

論文 / 著書情報  
Article / Book Information

|                   |                                                                                                                                                                                             |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 題目(和文)            | クラスター代数から生じる差分方程式                                                                                                                                                                           |
| Title(English)    | Difference equations arising from cluster algebras                                                                                                                                          |
| 著者(和文)            | 水野勇磨                                                                                                                                                                                        |
| Author(English)   | Yuma Mizuno                                                                                                                                                                                 |
| 出典(和文)            | 学位:博士(理学),<br>学位授与機関:東京工業大学,<br>報告番号:甲第11893号,<br>授与年月日:2021年3月26日,<br>学位の種別:課程博士,<br>審査員:鈴木 咲衣,梅原 雅顕,西畑 伸也,南出 靖彦,渡邊 澄夫,寺嶋 郁二                                                               |
| Citation(English) | Degree:Doctor (Science),<br>Conferring organization: Tokyo Institute of Technology,<br>Report number:甲第11893号,<br>Conferred date:2021/3/26,<br>Degree Type:Course doctor,<br>Examiner:,,,,, |
| 学位種別(和文)          | 博士論文                                                                                                                                                                                        |
| Category(English) | Doctoral Thesis                                                                                                                                                                             |
| 種別(和文)            | 審査の要旨                                                                                                                                                                                       |
| Type(English)     | Exam Summary                                                                                                                                                                                |

(博士課程)

論文審査の要旨及び審査員

| 報告番号            | 甲第  |      | 号 | 学位申請者氏名 |     | 水野勇磨 |      |
|-----------------|-----|------|---|---------|-----|------|------|
| 論文審査<br><br>審査員 |     | 氏 名  |   | 職 名     |     | 氏 名  | 職 名  |
|                 | 主査  | 鈴木咲衣 |   | 准教授     |     | 渡邊澄夫 | 教授   |
|                 | 審査員 | 梅原雅顕 |   | 教授      | 審査員 | 寺嶋郁二 | 特定教授 |
|                 |     | 西畑伸也 |   | 教授      |     |      |      |
|                 |     | 南出靖彦 |   | 教授      |     |      |      |

論文審査の要旨（2000 字程度）

クラスター代数は 2000 年頃に Fomin と Zelevinsky によって導入された概念であり，導入後に様々な分野の数学的対象がクラスター代数の構造を持つことが発見され，クラスター代数の理論を適用することで多くの興味深い結果が得られている．クラスター代数の理論が有効な分野の一つに離散力学系の理論がある．実際に，Fomin と Zelevinsky は，数理論理において重要な離散力学系である Zamolodchikov の Y-system の解の周期性を示すことに，クラスター代数の理論を用いることで成功した．証明のためのキーポイントは Zamolodchikov の Y-system をクラスター代数の対称性であるクラスターモジュラー群の元である自己同型として実現することにあつた．これらの性質を抽象化することで，Nakanishi により，2011 年にクラスター代数上 Y-system および T-system という離散力学系の新しいクラスが導入され，様々な異なる背景を持つ興味深い離散力学系がクラスター代数上の Y-system および T-system として解釈されることが発見されたが，それらを系統的に発見し解釈する方法などは今まで確立していなかった．本論文は「Difference equations arising from cluster algebras」と題し，準備のための一つの章と，クラスター代数上の離散力学系に関する研究をまとめた二つの章から構成されている．

第 1 章「Cluster algebras」では，第 2 章以降の議論で必要とされるクラスター代数についての基本的概念を説明している．

第 2 章「Y-systems and T-systems」では，シンプレクティック関係式を満たす正方行列の組として T-datum という新しい概念を導入し，T-datum を与えることとクラスター代数上の Y-system および T-system を与えることが等価であるという簡明かつ美しい結果を得た．正方行列の組である T-datum はクラスター代数上の Y-system および T-system よりもはるかに扱いやすい対象であり，この結果は Y-system および T-system の研究に新しい強力な手法を与えている．この対応は明示的であり，T-datum からクラスター代数を定義するデータである反対称化可能行列およびクラスターモジュラー群の元を具体的かつ系統的に与えることに成功している．この手法を用いて，既存の論文で得られていた様々なクラスター代数上の Y-system や T-system を系統的な方法で再構成している．

第 3 章「Periodic Y/T-systems」では，周期的なクラスター代数上の Y-system および T-system に着目して研究し，T-datum の同時正値性が対応するクラスター代数上の Y-system や T-system の解が周期的であるための必要条件であることを示している．同時正値性は行列に関する単純な条件であり，判定方法として強力である．また，カルタンの有限型の T-datum に対して分配  $q$  級数と呼ばれる超幾何  $q$  級数を定義し，数理論理における Nahm の予想から着想を得て，分配  $q$  級数は常にモジュラー関数であるという予想を提出し，いくつかの例で実際に証明している．分配  $q$  級数についての興味深い結果として，量子アフィン代数の Kirillov-Reshetikhin 加群に関する T-datum の分配  $q$  級数とアフィンリー代数の可積分最高ウェイト表現の指標のフェルミ公式が一致することを示している．

以上，本論文はクラスター代数上の Y-system および T-system をより扱いやすい T-datum として扱う全く新しい系統的な方法を与え，この方法を用いて解の周期性についての大きな結果を得ている．これらの研究結果は離散力学系の理論にクラスター代数の視点から斬新かつ興味深い知見をもたらしたものであり，これからの発展が大いに期待でき，理学上の貢献は大である．よって，本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値のあるものと認められる．

注意：「論文審査の要旨及び審査員」は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。