

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	古典論理と直観主義論理における命題結合子に関する研究
Title(English)	Studies on Propositional Connectives in Classical and Intuitionistic Logics
著者(和文)	高木 研斗
Author(English)	Kento Takagi
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第12168号, 授与年月日:2022年9月22日, 学位の種別:課程博士, 審査員:鹿島 亮,伊東 利哉,田中 圭介,増原 英彦,南出 靖彦
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第12168号, Conferred date:2022/9/22, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	審査の要旨
Type(English)	Exam Summary

(博士課程)

論文審査の要旨及び審査員

報告番号	甲第		号	学位申請者氏名		高木 研斗	
論文審査 審 査 員		氏 名	職 名		氏 名	職 名	
	主査	鹿島 亮	准教授	審査員	南出 靖彦	教授	
	審査員	伊東 利哉	教授				
		田中 圭介	教授				
		増原 英彦	教授				

論文審査の要旨 (2000 字程度)

本論文は「Studies on Propositional Connectives in Classical and Intuitionistic Logics (古典論理と直観主義論理における命題結合子に関する研究)」と題し、英文4章からなる。

数理論理学では多く論理体系を扱うが、その中で最も重要な二つの論理体系が古典論理と直観主義論理である。古典論理はすべての論理の基本となる論理である。直観主義論理は構成的な証明を記述するための論理であり、数理論理学とコンピュータサイエンスの共通領域における最も重要な論理である。これら二つの論理の関係の解明は数理論理学の中心的な課題として古くから研究されてきた。

本論文の研究の背景として以下の二つの事実がある。【背景1】数理論理学では標準的には否定($\neg$)、連言($\wedge$)、選言($\vee$)などの少数の特定の命題結合子を扱うが、これら以外の無数の結合子を導入して扱うこともある。【背景2】古典論理は直観主義論理よりも恒真な論理式が多い(このことを「古典論理は直観主義論理よりも強い」と言う)が、扱う命題結合子を否定と連言だけに限れば、古典論理と直観主義論理の強弱はなくなり恒真な論理式が一致する。するとこれらの背景から次の問題が自然に提起される。使用する命題結合子を非標準的な無数のものを含めて変化させると、古典論理と直観主義論理の強弱はどう変化するか? 本論文は、この自然であるが今まで研究がなされていなかった問題に取り組んで、網羅的で鮮やかな解を与えることに成功している。

ここで本論文の結果を記述するための記法を導入しておく。使用する命題結合子の集合を X としたとき、古典論理(classical logic)で恒真な論理式全体を $C(X)$ 、直観主義論理(intuitionistic logic)で恒真な論理式全体を $I(X)$ と書く。すると $I(X) \subseteq C(X)$ が常に成り立ち、 $X = \{\neg, \wedge\}$ の場合には $I(X) = C(X)$ が成り立つ(背景2)。さらに、仮定付き推論を表す形式的表現であるシークエント(sequent)という単位でも恒真性を論じる。使用する命題結合子の集合を X としたとき、古典論理で恒真なシークエント全体を $Cseq(X)$ 、直観主義論理で恒真なシークエント全体を $Iseq(X)$ と書く。

各章の内容は以下の通りである。

第1章「Introduction」では研究の背景、既存研究、そして本論文の結果の概要を説明している。

第2章「Propositional logic」では命題論理、すなわち論理式が命題変数と命題結合子だけから作られる枠組みで議論をしている。そして命題結合子の任意の集合 X に対して、 $I(X) = C(X)$ となるための必要十分条件、 $Iseq(X) = Cseq(X)$ となるための必要十分条件、さらに $I(X)$ や $C(X)$ が空集合になるための必要十分条件をそれぞれ明らかにしている。具体的な個別の結合子に対する議論ならば簡単であるが、ここでは X の要素の可能性が無限なのでそれに対応した非常に緻密な証明を行っている。なおこれらの必要十分条件は、 X の要素である命題結合子を真理値関数と見なしたときの初等的ないくつかの性質(単調性、優乗法性など)の組み合わせで簡潔に記述される。このような簡潔な条件を発見したことも本研究の大きな功績である。命題結合子の初等的な条件を用いて論理の性質を特徴付ける、という研究は今までになかったものであり、この新規性は注目すべきものである。

第3章「First-order logic」では第2章の結果を1階述語論理、すなわち論理式の構成要素に量化記号、述語記号および個体変数を加えた論理にまで拡張している。1階述語論理に拡張した場合には、通常の直観主義論理の他にクリプキモデルを定領域(constant domain)にした直観主義論理(これを $D(X)$ および $Dseq(X)$ と書く)があるので、それも含めて考察している。そして命題結合子の任意の集合 X に対して、 $D(X)$ 、 $I(X)$ 、 $C(X)$ の中の指定した二つが等しくなるための必要十分条件、 $Dseq(X)$ 、 $Iseq(X)$ 、 $Cseq(X)$ の中の指定した二つが等しくなるための必要十分条件、さらに $D(X)$ 、 $I(X)$ 、 $C(X)$ がそれぞれ空集合になるための必要十分条件を網羅的に明らかにしている。これらの必要十分条件は第2章と同様に X の要素の命題結合子の初等的な性質を組み合わせで記述されるが、量化記号が加わったことで条件の種類が多くなり、必要十分性の証明は第2章よりさらに緻密になっている。

第4章「Conclusion and future work」では本論文で得られた結果と未解決な問題をまとめて、今後の研究の発展を展望している。

以上をまとめると本論文は、古典論理と直観主義論理の関係解明という数理論理学における最も基本的で重要な研究の系譜に、命題結合子の初等的な性質による特徴付けというまったく新しい視点を付け加えて、簡潔で網羅的な結果を与えたものであり、理学的に貢献するところ大である。よって本論文を博士(理学)の学位論文としてふさわしいものと認める。

注意:「論文審査の要旨及び審査員」は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。