

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	計算理論と抽象代数
Title(English)	Computation Theory and Abstract Algebra
著者(和文)	湯山孝雄
Author(English)	Takao Yuyama
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第12303号, 授与年月日:2023年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:加藤 文元,田口 雄一郎,内藤 聡,落合 理,鈴木 正俊,鹿島 亮
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第12303号, Conferred date:2023/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	審査の要旨
Type(English)	Exam Summary

(博士課程)

論文審査の要旨及び審査員

報告番号	甲第		号	学位申請者氏名		湯山 孝雄	
論文審査 審査員		氏 名	職 名		氏 名	職 名	
	主査	加藤 文元	特任教授	審査員	鈴木 正俊	准教授	
	審査員	田口 雄一郎	教授		鹿島 亮	准教授	
		内藤 聡	教授				
		落合 理	教授				

論文審査の要旨（2000 字程度）

本論文では、計算論（決定問題・意味論・形式言語理論を含む）と抽象代数学の間の相互関係について、先駆的な3つの仕事が報告されている。第1部では単純型付きラムダ計算の意味論について、第2部では有理数体の部分環における Hilbert 第10問題（Diophantus 方程式の有解性決定問題）、そして第3部では群の語の問題と G オートマトンに関する最新の結果が取り上げられている。第1部の仕事は鹿島亮（東工大情報）・松田直祐（新潟工科大工学部）との共同研究であり、すでに出版されている内容である（Notre Dame Journal of Formal Logic 61[4], pp.591-600（2020））。第2部の内容は、その大部分は申請者の修士論文の仕事で行ったものであり、今回はその拡張・一般解について報告された。最後の第3部の内容は今回最も新しい研究である。第1部から第3部までの内容それぞれについての審査の要旨と概要は以下の通りである。

第1部の話題はラムダ計算における意味論であり、上述の通り、鹿島・松田との共同研究である。ここでの主要な論点は、 β 同値規則なしの単純型付きラムダ計算の体系に関して、Barendregt の意味論を拡張した新たな意味論を構成し、その健全性や完全性について論じることにある。先行研究である Barendregt の意味論は健全性を有する一方、完全性を満たさないことが知られている。本論文（および上述の発表論文）では、この意味論の拡張である新しい意味論「項空間意味論」と、その制限である「プロパー項空間意味論」が導入されている。そこでは前者の項空間意味論は完全性をみたすが健全性は満たさないことが示され、さらに後者のプロパー項空間意味論が健全性と完全性の両方をみたすことが証明されている。また、プロパー項空間意味論をさらに制限した「(弱)飽和項空間意味論」という variant も構成され、その意味論的な性質についても詳細に調べられている。具体的には、「(弱)飽和項空間意味論」が完全性をみたすか否かは同様の手法では証明できないことを明確にするラムダ項が示されており、ここに申請者の本質的な寄与があることが確認された。

第2部では、有理数体の部分環に対する Hilbert 第10問題が取り上げられている。オリジナルの Hilbert 第10問題(略して「HTP」)は、いわゆる Diophantus 方程式（整数係数の多変数多項式=0 という形の方程式）が整数解を持つか否かを判定するという決定問題であり、これはすでに 1970 年に Matiyasevitch によって（Davis, Putnam, Robinson らの結果を基に）否定的に解決されている。すなわち、Diophantus 方程式が整数解を持つか否かを判定する一般的なアルゴリズムは存在しない。この

解決により、次に問題となるのは「整数解」というところを「有理数解」とした場合の決定問題（いわゆる「 $\mathbb{Q}$ 上の Hilbert 第 10 問題 $\text{HTP}(\mathbb{Q})$ 」）であるが、これはオリジナルの問題が解決して以降 50 年以上経った現在に至っても未解決の重要問題である。本論文では、有理数体 $\mathbb{Q}$ の部分環 R に対する Hilbert 第 10 問題 $\text{HTP}(R)$ について、計算可能性理論の観点から詳細に調べられている。この問題に関する先行研究には、いわゆる「ジェネリックな」部分環 R に対する Hilbert 第 10 問題 $\text{HTP}(R)$ の Turing 次数は $\text{HTP}(\mathbb{Q})$ の Turing 次数によって完全に決まるという Miller による仕事があるが、本論文では逆に、ジェネリックな部分環 R に対する $\text{HTP}(R)$ の Turing 次数が $\text{HTP}(\mathbb{Q})$ の Turing 次数をほとんど決めるという、計算困難性の新たな構造を明らかにしている。また、 $\text{HTP}(\mathbb{Q})$ が決定不能であることの、いわゆる「Banach-Mazur ゲーム」を用いた特徴付けも与えられている。

第 3 部では、いわゆる群の「語の問題」と G オートマトンとの関わりが調べられている。一般に、有限生成群 G とその有限生成系が与えられたとき、その有限生成系からなる文字列で G の単位元を表すものの全体を G の「語の問題 (word problem) $\text{WP}(G)$ 」という。 $\text{WP}(G)$ を形式言語として、計算論的・形式言語論的な観点からみることができるが、その際の形式言語的側面と、 G の群論的・抽象代数的側面との関連性を明らかにすることが興味の中心である。この問題における先行研究の一つである Anisimov の仕事においては、 $\text{WP}(G)$ が正則言語であることと、 G が有限群であることが同値であることを示されている。また Muller-Schupp は(後の Dunwoody の結果と合わせて) $\text{WP}(G)$ が文脈自由言語であることと、 G が実質的自由群であることが同値であることを示している。本論文では、この研究の文脈において、Elder-Kambites-Ostheimer によって示された定理（有限生成群 H の語の問題が Z^n オートマトンで認識されることと、 H が階数 n 以下の実質的自由アーベル群であることの同値性）に、新たな視角を導入し、直接的で本質的な別証明を与えている。群 G に対する「 G オートマトン」とは、通常の有限オートマトンに G の元を記憶するレジスターを付加したものである。すなわち、 G オートマトンは計算の途中でレジスターの値に G の元をかけて更新することができ、入力文字列を読み終わったときに終了状態かつレジスターの値が単位元ならば入力文字列を受理するというものである。Elder-Kambites-Ostheimer による当初の証明は、幾何学的群論における Gromov の多項式増大度定理に依存しているため間接的であり、しかも、語の問題を与える群 H とオートマトンのレジスターに元を与える群 G の間の群論的な関係が明瞭でないという問題があった。本論文の議論では、この点に関して本質的な寄与がなされている。すなわち、 G と H の間に部分的な群準同型が構成され、より組み合わせ論的・群論的な議論で、直接的な証明が与えられている。これは単に新しい（そしていくぶん簡単な）証明が発見されたというだけでなく、当該問題の理解に対して本質的な進歩を与える業績であり、より問題の本質・核心に近づくための重要なステップであることが確認された。

総じて、計算論・意味論やそれらと抽象代数学との関係性など、先駆的な仕事が多様に盛り込まれており、本論文は博士（理学）の学位を授与するのにふさわしいものであり、加えて、論文として質の高いものであると認められる。

注意：「論文審査の要旨及び審査員」は、東工大リサーチポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。