

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	疎性構造を持つ二次制約付き二次計画問題に対する厳密な求解条件について
Title(English)	On the Exactly Solvable Conditions of Quadratically Constrained Quadratic Program with Sparsity Structures
著者(和文)	東悟大
Author(English)	Godai Azuma
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第12327号, 授与年月日:2023年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:山下 真,三好 直人,渡邊 澄夫,中野 張,澄田 範奈,福田 光浩
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第12327号, Conferred date:2023/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	審査の要旨
Type(English)	Exam Summary

論文審査の要旨及び審査員

報告番号	甲第	号	学位申請者氏名	東 悟大		
論文審査 審査員		氏名	職名		氏名	職名
	主査	山下 真	教授		澄田 範奈	講師
	審査員	三好 直人	教授	審査員	福田 光浩	特定准教授
		渡邊 澄夫	教授			
		中野 張	准教授			

論文審査の要旨 (2000 字程度)

本論文は「On the Exactly Solvable Conditions of Quadratically Constrained Quadratic Program with Sparsity Structures」と題し、2次制約付き2次計画問題 (quadratically constrained quadratic program, 以下 QCQP) に対して半正定値計画緩和が厳密な最適解を与える十分条件の解明を研究対象としている。QCQP は最大カット問題や最大クリーク問題などの代表的な組合せ最適化問題も記述可能な広範な数理モデルである。QCQP の目的関数が凸関数であり実行可能領域も凸集合となる場合は、二次錐計画問題に変形することで内点法による多項式時間での求解が可能であるが、このような状況は QCQP の中でも限定的であり、最大カット問題が NP-hard であることから一般の QCQP の求解は NP-hard であることが知られている。凸とは限らない QCQP の近似値を得る方法として半正定値計画問題 (semidefinite program, 以下 SDP) に基づく緩和問題が多くの研究で用いられているが、SDP 緩和は緩和であるために良好な近似値を得られても元の QCQP の最適解を厳密には得られないのが通常である。しかし、最近の既存研究では、SDP 緩和を適用しても特定の条件を満たせば元の QCQP の最適解が得られることが研究対象とされており、そのような条件の理論的研究も進められている。

本論文は、SDP 緩和が元の QCQP の最適解を構成しうる条件を QCQP の入力行列が持つ疎なグラフ構造に着目して解析しようとするものである。

本論文は、以下のように英文6章で構成されている。

第1章「Introduction」では、どのような条件のときに SDP 緩和が QCQP の最適解を構成しうるか、という研究テーマを提起し、S-lemma として知られている結果などを含めて既存研究と本論文の繋がりを議論することで本論文の立ち位置を示している。また、本論文の各章の構成を俯瞰しつつ、本論文で明らかになった条件の概要を述べている。

第2章「Preliminaries」では、本論文の条件を議論するにあたって必要となる前提知識を整理している。特に、QCQP の変数が n 次元ベクトルのとき SDP 緩和の変数行列は $n \times n$ 次元行列となるが、SDP 緩和の双対問題の最適解における行列の階数が $n-1$ 以上になるときに SDP 緩和の最適解から QCQP の厳密な最適解を構築可能である、という既存研究の結果を紹介している。また、入力行列が対角行列に限定される場合やすべての入力行列が成分ごとに同符号である場合など既知の条件にも触れ、本論文の条件がこれらの条件を包含していることを示唆している。

第3章「Exactness Condition under Connected Cases」では、QCQP の入力行列から構成される統合疎パターンが連結グラフに対応している場合を解析している。特に、グラフが木構造や二部グラフの構造を持っているときに、行列不等式からなる系の実行可能性を判定することで双対問題の行列の階数を $n-1$ 以上に限定する条件を特定している。これらの条件の下で、第2章の結果などを適用することで SDP 緩和から QCQP の厳密な最適解が得られることを示している。

第4章「Exactness Condition under Disconnected Cases」では、統合疎パターンが連結構造を持っているとしていた第3章の仮定を取り除くことで、第3章の結果がより多くの QCQP に適用可能であることを得ている。この結果の証明では、グラフ構造を連結にするような項により目的関数を摂動させた QCQP を議論するが、その摂動 QCQP では対応する SDP 緩和が厳密な最適解を与えることを第3章の結果から導出し、最終的に摂動を0とする極限で第3章の連結構造の仮定を取り除けることを示している。

第5章「Exactness SDP relaxation of Special Classes of QCQPs」では、既存研究で解析されていた条件が本論文の条件に含まれることを述べている。特に、信頼領域法の子問題に対して SDP 緩和が厳密な最適解を与えることはよく知られている事実であるが、これに対して新規の別証明を

与えている。また、すべての入力行列が成分ごとに同符号であるような QCQP に対しては、新しい変数ベクトルを導入することで二部グラフに対応する QCQP に変形し、第 4 章の結果に帰着させている。これらによって、既存条件よりも緩い条件でも QCQP の最適解を構築できることが示されている。

第 6 章「Conclusion and Outlook」では、行列の階数が $n - 1$ 以上になることから SDP 緩和により QCQP の厳密な最適解を得られるという条件を基礎として、どのような条件まで解析したか、という本論文の結果を総括した後に、多項式最適化問題への適用など本論文の結果の拡張を展望している。

以上のように、本論文は、SDP 緩和により QCQP の厳密な最適解を得られる十分条件の解明に貢献している。QCQP は組合せ最適化問題を含むような数理モデルであり、その数理的構造に着目して得られた結果は、数理最適化分野の今後の様々な研究の理論的基礎の一つとなりうる。これらのことから、本論文は博士（理学）の学位論文としてふさわしいと考えられる。

注意：「論文審査の要旨及び審査員」は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。