T2R2 東京科学大学 リサーチリポジトリ
Science Tokyo Research Repository

論文 / 著書情報
Article / Book Information

論題(和文)	ナッシュとゲールとシャノンとハインの、遊びをせんとや生まれけむ
Title(English)	
著者(和文)	松井知己
Authors(English)	Tomomi Matsui
出典(和文)	オペレーションズ・リサーチ : 経営の科学, Vol. 68, No. 3, pp. 101-107
Citation(English)	Communications of the Operations Research Society of Japan, Vol. 68, No. 3, pp. 101-107
発行日 / Pub. date	2023, 3

Powered by T2R2 (Science Tokyo Research Repository)

ナッシュとゲールとシャノンとハインの，遊びをせんとや生まれけむ

松井　知己

貴方は，Hex というゲームで遊んだことがありますか？ 第二次世界大戦の頃に考案されたこのボードゲームは，さまざまな人を魅了してきました．本稿では，Hex が誕生した頃の話題をまとめて報告します．

キーワード：Hex，Bridge-it，組合せゲーム

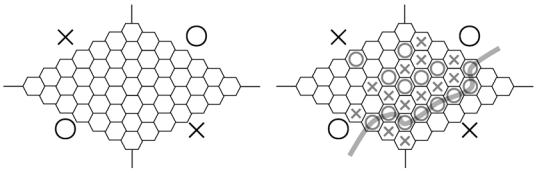
1. Hex の誕生

2007 年 7 月 12 日に開催された “Stony Brook Gale Feast” における David Gale の話は，こんな風に始まったらしい [1][1]．

“1948 年[2]の冬のことだった．プリンストン大学の食堂で朝食をとっている私の向かいに，ジョン・ナッシュが座った．彼は大学院の 2 年生で，私は 3 年生だった[3]．彼は「先手必勝を証明できるのに，必勝戦略がわからないゲームがあるんだ．」と話し始めた．”

このとき John F. Nash が Gale に説明したゲームは，今では Hex と呼ばれている．Hex は図 1(a) のように 6 角形がひし形に並んだ盤で遊ぶ二人ゲームである．ルールは以下のとおり．6 角形の中に，先手は○を，後手は×を，交互に書き込む．一度書いた印は消すことができず，すでに（○か×の）印が書かれた 6 角形には，重ねて印を書くことはできない．先手は○のついたひし形の 2 辺を（○の 6 角形で）つなげれば勝ち，後手は×のついたひし形の 2 辺を（×の 6 角形で）つなげれば勝ちとなる．図 1(b) は先手 (○) が勝利している例である[4]．図 1(a) の盤は 7×7 の 6 角形からなる盤だが，通常は 11×11 の盤が使われることが多いようだ．熟練者同士の対戦では 14×14 の盤が用いられる．

実はこのゲームは，デンマークの数学者／デザイナー／詩人の Piet Hein[5]によって 1942 年に Polygon という名前で考案されている [4, 5（8 章）]．Hein は当時，デンマークの新聞に Hex に関する懸賞金付き問題の連載コラムをもっており，Hex の小冊子は 5 万部発行されたとのことより，大ヒットだったといってよいと思われる．最近出版された本 [3] では，新聞記事などを Hein と共に執筆していた Jens Lindhard についての調査結果が詳述されている．残念ながら，デンマークでのブームが他国に広まる前に第二次世界大戦が激化し，Hein はナチスから逃れてアルゼンチンに渡り，Hex の新聞連載は終わりを告げた．



(a)　(b)

図 1　Hex 盤とゲームの例

戦後，Hex がアメリカで広まったのは，サイエンティフィック・アメリカン誌に掲載された Martin Gardner の記事 [6] がきっかけだったといわれている．Gardner がこのゲームを知った経緯はよくわかっていない．最新の本 [3]（7 章）によれば，Gardner は玩具会社 Parker Brothers に Hex について問い合わせた手紙の返信を 1956 年に受け取っており，このゲームは同社が数年前に Hex という名前で販売していたこと，発明

まつい　ともみ
東京工業大学工学院経営工学系
〒 152–8552 東京都目黒区大岡山 2–12–1 W9–98

[1] Gale は 2008 年に逝去されたため，この 2009 年の論文は，遺稿を元に作られたらしい．
[2] 2002 年出版の本 [2]（6 章）では，この会話は 1949 年の晩冬，寄宿舎の庭でとされている．2019 年出版の本 [3]（7.2 節と年表）でも，1949 年の（多分）2 月だったと結論付けている．
[3] この学年の意味はよくわからない．Gale と Nash は，1948 年に（約）27 歳と 20 歳．Gale は 1949 年に Ph.D. を取得，Nash は 1950 年に Ph.D. を取得している．
[4] 筆者の経験では「○や×は（それまで書いた印から）離れた場所に書いてもよい」ことが伝わっていない場合が多い．
[5] Hein は soma cube やスーパー楕円のデザイナーとしても知られている．ほかにも Niels Bohr，Albert Einstein，Charlie Chaplin と懇意であったなど，とても不思議な人物だったようだ．伝記の出版が望まれる．

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

者が Hein であることを聞き，Hein への連絡先も入手している．その後すぐに Gardner は，（アルゼンチンから戻っていた）コペンハーゲンの Hein に手紙を送り，このゲームの歴史や詳細について（昔からあるゲームの改変なのか，Hein のオリジナルなのかなど）問い合わせている．それから二人は何通もの手紙をやり取りし，Hein が（当時まだ証明されていなかった）4 色定理からこのゲームを発想したことや，Hein の考えていたデザインのほかの候補（図 2）などの情報を得ている．さらに Gardner は，Nash を自宅に招き（双方の住まいは数ブロックした離れていなかったらしい），このゲームについて数時間議論したとある[6]．これらの情報を元に書かれた 1957 年の記事 [6] において，Hex が再度，世に放たれた（表 1）．1957 年から 1 年間，プリンストン大に滞在した Claude Berge は，このとき Hex の魅力に取り憑かれたらしい [9].

Gardner の本 [4, 5] では，「Nash は Hein とは独立に同じゲームを再発明した」と簡単に記載されているが，元の記事 [6] では，そのような記載がなく，Hein のデザインであるとのみ書かれている[7]．最新の本 [3] において，この謎が解明されている．1957 年の記事 [6] に対し，Nash から Gardner に，ゲームのデザインについて自身のオリジナリティを主張する抗議の手紙が送られたらしい．これに対し Gardner は，Gale に問い合わせ，Hein と相談した末に，1988 年の本 [4, 5] の記述に落ちついたという．本 [3] の 7.2 節では，Hein との手紙による生々しいやりとりから，後々続く Hein と Gardner の信頼関係が作られていく様子が窺える．

Nash の半生を描いた『ビューティフルマインド』[2] の 6 章には，学生たちが Hex（当時は Nash または John[8] と呼ばれていた）で遊ぶのを John von Neumann が見て，後で Albert W. Tucker[9] にゲームの名前を尋ねたという記述がある．また，Gale がこのゲームを玩具会社に売り込むため奔走したとも記載されている．映画の『ビューティフルマインド』では残念ながら Hex のエピソードはなく，俳優ラッセル・クロウ演じる主人公が，囲碁で友人に負けるシーンが挿入されている[10]．

[6] Gardner が Claude E. Shannon への手紙 (1957) で書いている [3]（7.1 節の脚注 7）.
[7] 実は筆者は，以前からこの違いが気になっていた．
[8] ガードナー全集の訳書 [5]（8 章 p. 118）では，英語のスラングに関する記述まで追加されていて，素晴らしい．
[9] KKT 条件の Tucker である．
[10] 原作 [2] は（映画と違い）史実に忠実で，著名な OR の研究者も頻出する．未読の方には強くお勧めしたい．ちなみに当時のプリンストン大の研究者の間で囲碁が流行っていたのは事実らしい．

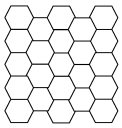


図 2　Hein が不採用とした盤の形状

表 1　簡単な年表

1939	第二次世界大戦開戦
1942	Hein が Polygon を考案し新聞などで宣伝
1945	第二次世界大戦終結
1949	Nash と Gale の会話 [1]
1950	Parker Bros. が特許を取得 [3] (Fig. 5.10)
1952	Nash [7]: RAND Technical Report
1953	Shannon [8]: Hex playing machine
1957	Gardner の記事 [6]

Hex に関する成書としては，戦略について詳しい本 [10]，変種ゲームリストが豊かな本 [11]，近年の知見が加わった本 [3]，また和書には，数学的に深く広い議論が書かれている本 [12]，初学者にも易しい 6 角形の可愛い本 [13] などがある．また本 [14] はゲーム理論の専門書だが，Hex などの遊びのゲームに比較的沢山のページを割いている．

2. Hex の性質と変種

Hex は引き分けで終わることがない．以下では，これを説明しよう．すべての 6 角形に印を付ければゲームは終了するため，有限の手番で必ず終了する．Hex が引き分けで終わるのは，すべての 6 角形に印が付けられ，どちらのプレイヤーも勝利していない状態でゲームが終了した場合のみである．このとき，Hex の盤を地図に見立て，○の印のついた 6 角形は海，×の印のついた 6 角形は陸地と考えよう．またひし形の盤の○の付いた 2 辺は海，×のついた 2 辺は陸地と考えると，海がつながっているか，陸がつながっているか，どちらか一方（のみ）が必ず成り立つことが，日常的な経験から推察される[11]．

上記のように Hex には引き分けがないことから，有限手番で，先手または後手の勝利でゲームが終了する．このことから，Hex には先手必勝か後手必勝の手順のどちらかが存在することが導かれる．この事実は，Hex

[11] このわかり易い説明に加え，数学的に厳密な証明が文献 [1] に掲載されている．厳密な証明が最初に掲載されたのは「トランジスタの父」と呼ばれる John R. Pierce [15] の本 [16] らしい．さらに Gale は文献 [17] において，Hex と Brouwer の不動点定理の関係について考察しているが，無理を承知で書いている感があり，とても楽しい．

 Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

のゲームをゲームの木と呼ばれる構造で表現し，逆向き帰納法（後ろ向き帰納法）を用いて必勝手順を求めることで示される（たとえば本 [14]（1.2 節）参照）．この性質は，ゲーム理論における「有限展開形 2 人ゼロ和完全情報ゲーム」に純粋戦略均衡解（鞍点解）が存在することの特殊ケースであり，成書 [18] に証明が書かれている．Hex のようなゲームに先手必勝か後手必勝の手順のどちらかが存在することは，以前は Zermelo[12] の定理と呼ばれていたが，Zermelo の論文 [19] では逆向き帰納法は扱われていないことが，論文 [20] において確認され，近年は Zermelo の定理とは呼ばれない[13]．

実は，Hex には先手必勝の手順が存在することを，strategy stealing（戦略泥棒）[14] と呼ばれる巧妙な方法で示すことができる．以下では，後手必勝の手順が存在すると仮定して，戦略泥棒の方法で矛盾を導く証明を，秋山仁と中村義作の本 [22] の文章でお送りしよう．ここでは先手は白石を，後手が黒石を，6 角形のマスに交互に置くというゲームで説明されている．

“まず，先手はどこかのマスに最初の白石を任意に置き，それ以後は，それがないものと解釈して後手必勝の手順で白石を置いていく．すると，その手順では白石が置けないこともある．任意に置いた白石がそのマスをちょうど塞いでいるときである．このときは，最初と同じように，またどこかのマスに白石を任意に置く．この手順を続けると，後手必勝の手順どおり白石が置けるときと，任意に置いた白石がそのマスを塞いでいるため，どこかのマスに白石を任意に置くときの 2 とおりとなる．ところが，白石をどのマスに置いても，それが不利に働くことは決してない．このため，もし後手必勝の手順があれば，それから先手必勝の手順も作ることができる．これは明らかに矛盾するので，後手必勝の手順は存在しない．（漢字等一部改変）”

お二人の文章はいかがだったろうか？ 上記で「ないものと解釈される『役目』」を担う白石は，ゲーム中は常に 1 個となっていることに注意されたい．それはたとえば，グリム童話[15] に出てくる「地獄への渡し守」のように，棹を手渡せば渡し守の『役目』は次の者に託

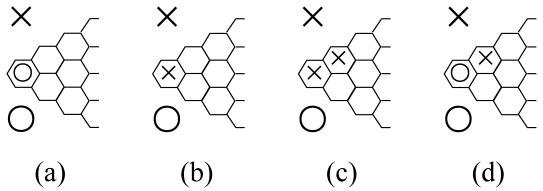


図 3　先手の悪手

され，本人は『役目』から解放されるのだ．

戦略泥棒によって先手の必勝手順の存在を証明できる二人ゲームはほかにもあるが，先手と後手でルールの違う連珠や，進めたコマを「動かさなかったと解釈する」ことができないチェスや将棋には適用できない．

戦略泥棒の方法は，Nash によって考案されたと記載されることが多いが[16]，これも Gardner の本 [4, 5] と元の記事 [6] では記述が異なる．本 [3] において，Gardner は Hein から証明（のアイデア）を個人的に知らされていたことが明らかにされている．戦略泥棒という手法については，記事 [6] のように，「Hein や Nash を含め，何人もの数学者によって独立に証明されていたらしい [3, 6]」 とでも記載すべきであろう．

戦略泥棒による先手必勝の証明は，必勝手順に関する情報を，ほとんど何も教えてくれない．これが本稿冒頭にある，Nash が Gale に語った言葉である．計算量理論における研究として，Hex は PSPACE 完全であることが示されている [23]．現状では，Hex の必勝手順が解明されているのは 9×9 盤あたりらしいが，筆者は最新結果に追い付いていない（詳細は文献 [3, 24] などを参照）．さらに，人間が理解できる（覚えられる？）サイズの必勝法の記述 “compact description” に関する研究 [25] もあり，最新の研究 [26, 27] などがある．

戦略泥棒の考え方は，さまざまな利用方法がある．以下では「Hex で，先手がひし形のとがった方の角に初手を打つ」のは悪手であり，後手の必勝手順が得られることを示そう [28, 29]．まず，先手○がひし形のとがった方の角に初手を打った際，先手に必勝手順があると仮定する．この仮定を，図 3 (a) の初期盤面から，×○×○ $\cdots$ の順に交互に打ったときに○に必勝手順が存在すると解釈する．このとき明らかに，図 3 (b) の初期盤面から○×○× $\cdots$ の順に打ったとき，×に必勝手順が存在する．これより，図 3 (c) の初期盤面から○×○× $\cdots$ の順に打ったときも（×の印が増えるのは，×のプレイヤーにとって不利にはならないことから）×に必勝手順が存在する（ここで戦略泥棒を使

[12] 整列可能定理や ZF 公理系の Ernst F. F. Zermelo.
[13] 論文 [20] において『Zermelo と帰納法を関係付けた最初の論文は Harold W. Kuhn [21] である』と指摘されている．論文 [20] の謝辞に Kuhn の名前があることから，この記述は Kuhn も了解済と思われる（KKT 条件の Kuhn である）．
[14] 未だ安定した訳語がない．いっそ『戦略泥棒』みたいな柔らかな訳語はどうかと思い，本稿で使ってみた！「戦略泥棒が」や「戦略泥棒をすることによって」など，言い回しが滑らかでとても使い易いのだが，読んだ感触は如何だろう？
[15] 『金の毛が三本はえた鬼』.
[16] 本 [3] には「Nash から証明のアイデアを聞いた際，Gale が書いたメモの写真」(Fig. 5.3–4) が掲載されている！

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

う）．図 3 (c) の初期盤面からはじめて○×○× ··· の順に打ったとき，×が勝利している任意の盤面において，角の×を○に変えても，その盤面で×はやはり勝利している．すなわち，図 3 (d) の初期盤面から○×○× ··· の順で打つというゲームにおいても，×には必勝戦略が存在する．ここで改めて，○が初手で図 3 (a) のように打ったとすると，×は第二手でその右上に印をつけて図 3 (d) のような盤面にすることができ，×に必勝戦略が存在することがわかる．これは○が初手で図 3 (a) のように打ったときに○に必勝戦略が存在することに矛盾する．

上記の証明より，後手が先手の初手を指定できるという Beck's Hex [28, 29] は，後手必勝のゲームであることがわかる．ちなみに，パイルール[17]と呼ばれる方法『先手が初手を打ったあと，後手が「(a) その初手を自分の手として採用し，先手と後手を交代」するか「(b) そのまま，後手として試合を続行」するか選択することができる』がある．このルールは，『初手が先手必勝なら (a)，初手が後手必勝なら (b)』を後手が選択できることから，元のゲームが先手必勝と後手必勝のどちらであろうとも，必ず後手必勝のゲームになってしまう．数学的にはゲームをつまらなくするルールなのだが[18]，何故か人間が遊ぶ際にはゲームが楽しくなることが多い．不思議だ．

負けと勝ちを入れ替えた逆型の Hex ゲーム，Rex または Misère Hex，を紹介しよう．Rex は Hex と同じ盤を用い，Hex と同様に交互に 6 角形内に印を書き込む．ただし Rex では，自分の印のついた対辺をつないだ方が負けとなる．このゲームを実際にプレイすることはお勧めできない．筆者の経験では，長く辛いゲームの果てに「つながった！」といった爽快感のない終了が待ち受けている．

Rex において引き分けがないことは，通常の Hex と同様に示すことができる．ゆえに先手と後手のどちらかが必勝戦略をもつ．Rex においては，自分の印をたくさん書くと不利になるため，後手が有利なゲームに見えるが，実は以下が成り立つ．

定理：$n \times n$ 盤で戦う Rex において，n が偶数（奇数）ならば，先手（後手）に必勝手順が存在する．

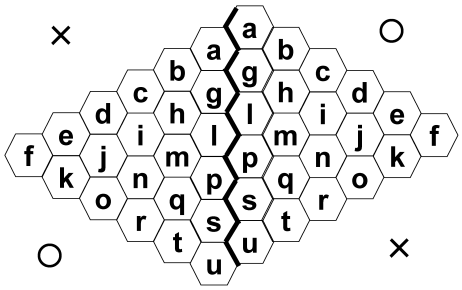


図 4　イカサマ盤 Hex

上記定理は「Robert Winder によって示されている」と Gardner の本 [4, 5] にあるが証明は記載されておらず，本 [3] に掲載された Winder の手紙でやっと読むことが可能となった．戦略泥棒を用いた巧妙な証明である．その後，論文 [30] において「$n \times n$ 盤で戦う Rex では，負けるプレイヤーが，盤の 6 角形すべてに印が書かれるまで負けを引き延ばすことができる」[19]ことが示された．ほかには，Hex と Rex の両方を特殊ケースとして含む "Division Game" が，山崎洋平によって提案され議論されている [31]．

最後に，ひし形に見えるけど実は歪んでいる図 4 の 6×7 盤で騙す「イカサマ技」 [4, 5] を紹介しよう．$n \times (n+1)$ 盤では，（素知らぬ顔で）近い対辺を結ぶプレイヤー（図 4 では×）になれば，後手でも線対称に打つだけで必ず勝つことができる．図 4 ならば，先手○が印を書いた場所と同じ文字の場所に，後手は自分の印×を書けば勝てる[20]（証明略）．このイカサマ技を最初に考え付いたのは誰なのか不明だが，本 [3]（5.4 節）では「どうやら Nash らしい」とだけ記載してある

このイカサマ盤を，2 辺が水平になる平行四辺形風に置けば「（歪んでいることには）案外気付かれないものです」と Claude E. Shannon は Gardner への手紙で書いている [3]（6.7 節）．Shannon は，このイカサマ技で人間のプレイヤーを降す機械を実際に作製している（Shannon + mechanical + Hex の 3 語の画像検索で見つかる写真で，6 角形を数えてみよう）．しかもサーミスタを使って機械の反応時間を遅らせ，探索（？）に数秒かかっている『振り』をさせるという念の入れようだ [3]（6.7 節）．流石は prankster と呼ばれる Shannon である[21]．

[17]兄弟でパイを分けるとき，お兄ちゃんがパイを二つに切って，弟が好きな方を選ぶ，と喧嘩がおきない．
[18]引き分けのあるゲームならば，パイルールの採用で，初手は先手後手の有利不利がない場所に打つことになる．良くできたルールと思う．

[19]Rex というゲームが人間に向かないほど長い戦いになる理由はこれだったのか `orz`.
[20]このように「予めマスのペアを多数定め，ペアの一方が打たれたら他方を打つ」とする戦略は pairing strategy と呼ばれる．本稿では，後でもう一度出現する．

 Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

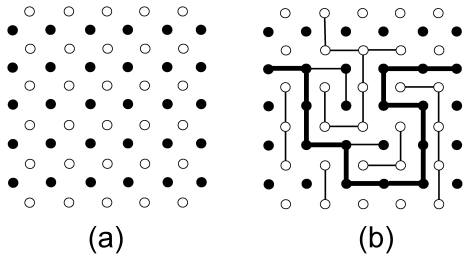


図 5　Bridge-it の盤

3. Bridge-it

次に，Gale によって発明されたゲーム Bridge-it を紹介しよう [32–34]．これは図 5(a) のような盤に先手と後手が交互に，縦または横の線分を引いていくゲームである．先手は（縦または横に）隣り合う白丸を，後手は（縦または横に）隣り合う黒丸を結ぶ線分を引くことしか許されず，それまでに引かれた線分と交差する線分は引くことができない．一度引かれた線分は消すことはできない．白は最上段の白丸（のどれか）と最下段の白丸（のどれか）を結べば勝利，黒は最右列の黒丸（のどれか）と最左列の黒丸（のどれか）を結べば勝利となる．図 5(b) は黒が勝利している例である（太線が左右をつないでいる道）．

このゲームは 1950 年に Gale が発明し，1957 年に自分から Gardner へ手紙で知らせたらしい [3]．Gardner は 1958 年の記事 [32] において Gale's Game という名前で紹介している．Gale 自身は Hex の正方形版を作りたかったと書いている [1]．Gardner の記事で紹介された後，沢山の玩具会社から製品化の誘いがあったが，Gale はそれらすべてに「好きにするように」と伝えたらしい．そのため Bridge-it の商品名で 1960 年に販売されたとき，Gale はそれを知らなかった（Gardner からの手紙で知った）．玩具の製品化で時間を費やすことには Hex でもう懲りていた，と Gale は Gardner への返信で書いている [3]（8.1 節）[22]．

Hex と同様な議論を用いて，このゲームには引き分けがないことを示すことができる．また戦略泥棒を使って先手必勝であることも示すことができる．それに加えこのゲームには，わかり易い先手必勝手順が存在する．

実はこのゲームでは，pairing strategy の考え方を用いることができる [35–37]．以下これを説明しよう．まず Bridge-it は，図 6(a) のような絵を鉛筆で描いて，白は（まだ）鉛筆で描かれている線分を 1 本選んでボールペンでなぞる，黒は（まだ）鉛筆で描かれている線分を 1 本選んで消しゴムで消す，というゲームだと考えることができる．白は最上段と最下段をボールペンで書いた線分でつなげれば勝ち，黒はこの絵の上下を分断すれば勝ちとなる．最上段内の点を結ぶ枝と最下段内の点を結ぶ枝は，白にとってつなげても無意味な枝であるため取り除いてある．

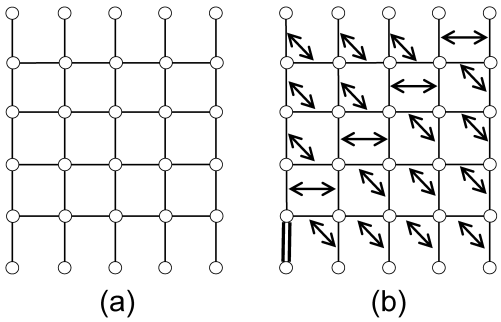


図 6　鉛筆で描かれた絵と pairing strategy

白の必勝戦略は，1 手目で図 6(b) の左下の二重線をつなぎ，2 手目以降は両向き矢印 (↔) の一方の枝を消されたら他方の枝をボールペンでなぞるというものだ．この戦略は RAND 研究所の Oliver Gross[23] によって開発されたとある [35–37]．

4. Shannon の Game Playing Machine

1951 年[24]に Shannon は，Bridge-it をプレイする Birdcage Machine を作成している [33, 34]．Birdcage Machine は，自身が白のプレイヤーならば，実際の盤面図 7(a) に対し (b) のような抵抗回路を構築する．この抵抗回路は，ゲームの開始時に白プレイヤーの線分すべてを同一値の抵抗で置き換え，実際の盤面 (a) で自分の打った手（白の線分）は抵抗の両端を短絡し，相手に防がれた手（黒の線分）は抵抗を切断する，という手続きで得られるものである．この機械の取る戦略は，抵抗の両端の電位差が最も大きい所（流れる電流値が最も大きな抵抗）を短絡する（そこに白の線を引く）というものである（候補が複数のときはランダムに選択するらしい）．先手の場合かなり強い（後手

[21]実際にこれと戦うと，勝てるのでは！？ と勘違いするほど白熱したゲーム展開となる（だからバレないのかも）．同じ力量の二人が戦っているようなものだから，当たり前か．．．．

[22]筆者はこのゲームの（8 角形のコマを用いた）商品版デザインが大好きだ．はなやま玩具から Connections の名前で販売されたゲーム盤ももっている．私のお気に入りだ．

[23]RAND 研究所の Gross っていったら，変数分離凸関数最小化問題を解く増加法の提案者 [38] ですよね [39]（4.8 節）．

[24]Gale が Gardner に手紙を書いたのが 1957 年なので，それ以前に Shannon は Bridge-it を知っていたことになる．

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

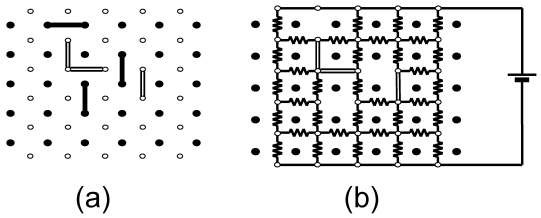


図 7　Shannon の Birdcage Machine

のときは弱い）と報告されている．さらに「抵抗の代わりに電球を接続し，最も明るいところを見つけようとしたが，明るさの違いがわからなかった」など，実物ならではの工夫があったようで楽しい[25]．

論文 [40] では，Birdcage Machine が先手でも負ける『嵌め手』が記載されている．さらに，Birdcage Machine 同士で戦った場合，小さなサイズの盤面では先手が非常に強いが，サイズが大きくなるに従って，先手の勝つ比率が 1/2 に近づく様子が確認されている．

論文 [8] によると，1953 年以前に Shannon と Edward. F. Moore は Hex をプレイする機械を作っている[26]．この機械がどのようなものなのか筆者は知りたくて文献を調査しているのだが，未だに詳細がわからない．Shannon の残した手がかりは文献 [8, 41] くらいしか存在しないようだ．論文 [8] に従って回路を記述すると，以下のようになる（ゲームは 6 角形のマスに白または黒の石を置くという形式で説明されている）．

“黒は上下の 2 辺をつなげれば勝利，白は左右の 2 辺をつなげれば勝利である．ゲーム盤上の白石には正の電位，黒石には負の電位，上下の辺には負の電位，左右の辺には正の電位を与えて，2 次元の電位場を構築する．この電位場上で，鞍点となる場所を次の手として選ぶ．”

残念ながら上記の記述だけでは，Shannon と Moore の作成した機械を再現できない[27]．また本 [3]（6.7 節の脚注 22）においても，機械の写真や詳細な情報が得られて『いない』ことが報告されている．

ところが筆者は最近，Nash が書いた RAND の Technical Report [7] に，Shannon の Hex playing machine の回路が記載されていることを，偶然に発見した[28]．筆者の知る限り，文献 [7] の『内容』に言及している文献は本 [3]（6.7 節の脚注 24 付近）のみだが，Shannon の回路が記載されていることには『何故か』触れていない[29]．

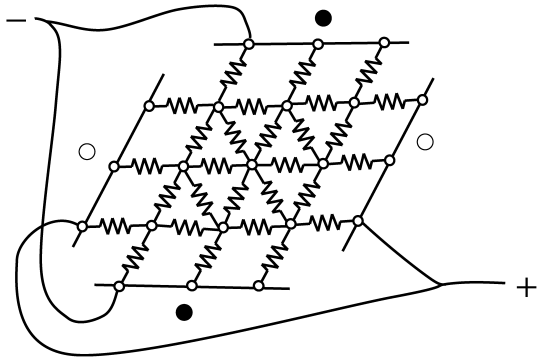


図 8　Nash の論文 [7] の図を改訂

論文 [7] に掲載されている回路を，文献 [8] の記述と合致するように書き直したものが図 8 である．論文 [7] において，Nash は次のように書いている．

“白の側面は正の電極に，黒の側面は負の電極に接続する．黒石が置かれた 6 角形は『正』の電極に直接接続する．”

筆者は言いたい，「違うじゃん！ Shannon [8] は，黒石は『負』って書いてるじゃん！！」．ちなみに Nash [7] では，白石が置かれた場所については記述がない．さらに，機械は黒石を打つとして，下記の場所を選んで打つと記載されている．（下記原文ママ）

“the machine chooses a move by finding a ‘path of least resistance’ along with the maximum of the positive potential is least. The path must of course connect his two sides. Then he plays at a point on this path at maximum positive potential (aweakest link). Observe that this is a mini-max principle.”

「わからないよぉ！！ 頭を抱えて泣きたくなる･･･もしかして，これも Shannon の prank なのか！？」なにか情報をおもちの方は，教えて下さい．

5. おわりに

本来ならば，この後に Shannon の switching game について記述すると，納まりの良い記事となるのだが，

[25]直流抵抗回路で，抵抗値がすべて同一の場合は「あるノードの電位は，（抵抗を介して）隣接するノードの電位の平均となる」という性質が成り立つ．この性質を用いて全ノードの電位を計算する反復法を容易に構築できる．

[26]Shannon といえばチェスの論文が有名だが，Shannon 自身はチェスをプレイする機械もプログラムも，（論文執筆当時は）作っていない [15]．

[27]本 [3] の 12.1 節に記載されている Shannon’s circuit は明らかに異なるものである．

[28]これ大手柄なんじゃない！？ なんて思ったりしているが，本 [3] の 7.1 節において “論文 [7] は当時，機密文書とされ一般には公開されなかった” と書かれている．

[29]6.7 節の脚注 22 と不整合があるように感じる．

 Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

紙面も筆者の力も尽きてしまった．申し訳ない．

最後となるが，未だ Hex で遊んだことのない読者は，是非一度遊んでみて欲しい．いつでも対戦してくれるアプリも複数ある[30]．きっと，子供の心に戻って楽しめることと思う．

遊ぶ子供の声きけば
我が身さえこそゆるがるれ[31]

参考文献

[1] D. Gale, "Topological games at Princeton, a mathematical memoir, " *Games and Economic Behavior*, **66**, pp. 647–656, 2009.

[2] シルヴィア・ナサー，『ビューティフル・マインド—天才数学者の絶望と奇跡—』，新潮社，2002.

[3] R. B. Hayward and B. Toft, *Hex, Inside and Out: The Full Story*, CRC Press, 2019.

[4] M. Gardner, *Hexaflexagons and Other Mathematical Diversions: The First Scientific American Book of Puzzles and Games*, University of Chicago Press, 1988.

[5] マーティン・ガードナー，『完全版マーティン・ガードナー数学ゲーム全集 1　ガードナーの数学パズル・ゲーム—フレクサゴン・確率パラドックス・ポリオミノ—』，日本評論社，2015.

[6] M. Gardner, "Mathematical games," *Scientific American,* **197**, pp. 145–151, 1957.

[7] F. J. Nash, "Some games and machines for playing them," *Technical Report D-1164*, RAND Corporation, 1952.

[8] C. E. Shannon, "Computers and automata," In *Proceedings of the IRE*, **41**, pp. 1234–1241, 1953.

[9] R. B. Hayward and J. Van Rijswijck, "Hex and combinatorics," *Discrete Mathematics,* **306**, pp. 2515–2528, 2006.

[10] C. Browne, *Hex Strategy: Making the Right Connections*, CRC Press, 2009.

[11] C. Browne, *Connection Games: Variations on a Theme*, CRC Press, 2018.

[12] 山崎洋平，『組み合わせゲームの裏表』，シュプリンガー・フェアラーク東京，1989.

[13] 半沢栄一，『ヘックス入門』，ビレッジプレス，2013.

[14] K. Binmore, *Fun and Games*, DC Heath, 1992.

[15] J. R. Pierce, "Looking back-Claude Elwood Shannon," *IEEE Potentials*, **12**, pp. 38–40, 1993.

[16] J. R. Pierce, *Symbols, Signals, and Noise: The Nature and Process of Communication, Harper Modern Science Series*, Harper, pp. 10–13, 1961.

[17] D. Gale, "The game of Hex and the Brouwer fixedpoint theorem," *The American Mathematical Monthly*, **86**, pp. 818–827, 1979.

[18] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 3rd ed., Princeton University Press, 1953.

[19] E. Zermelo, "Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels," *Proceedings of Fifth Congress Mathematicians*, Cambridge University Press, 1913.

[20] U. Schwalbe and P. Walker, "Zermelo and the early history of game theory," *Games and Economic Behavior,* **34**, pp. 123–137, 2001.

[21] H. Kuhn, "Extensive games and the problem of information," *Contributions to the Theory of Games II*, pp. 193–216, 1953.

[22] 秋山仁，中村義作，『ゲームにひそむ数理』，森北出版株式会社，1998.

[23] S. Reisch, "Hex ist PSPACE-vollständig," *Acta Informatica*, **15**, pp. 167–191, 1981.

[24] J. Pawlewicz and R. B. Hayward, "Scalable parallel DFPN search," In *Proceedings of the International Conference on Computers and Games*, pp. 138–150, 2014.

[25] J. Yang, S. Liao and M. Pawlak, "On a decomposition method for finding winning strategy in Hex game," In *Proceedings of the International Conference on Application and Development of Computer Games in the 21st Century*, pp. 96–111, 2001.

[26] 三島健，"Hex の必勝手順に対する新証明技法について，" 情報処理学会論文誌, **50**, pp. 893–903, 2009.

[27] 櫻井英俊，三島健，吉元昭裕，野下浩平，"ゲーム Hex における必勝手順の検証プログラム"，情報処理学会研究報告ゲーム情報学 (GI), **2008**, pp. 45–51, 2008.

[28] A. Beck, M. N. Bleicher and D. W. Crowe, *Excursions into Mathematics*, Worth, 1969.

[29] A. Beck, M. N. Bleicher and D. W. Crowe, *Excursions into Mathematics: The Millennium Edition*, CRC Press, 2020.

[30] J. Lagarias and D. Sleator, "Who wins Mis'ere Hex?" *I Personal Magic*, pp. 237–240, 1999.

[31] Y. Yamasaki, "Theory of division games," *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, **14**, pp. 337–358, 1978.

[32] M. Gardner, "Mathematical games," *Scientific American*, **199**, pp. 124–129, 1958.

[33] M. Gardner, *The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions*, Fireside, 1961.

[34] マーティン・ガードナー，『完全版マーティン・ガードナー数学ゲーム全集 2　ガードナーの数学娯楽—ソーマキューブ・エレウシス・正方形の正方分割—』，日本評論社，2015.

[35] M. Gardner, "Mathematical games," *Scientific American*, **205**, pp. 148–161, 1961.

[36] M. Gardner, *Martin Gardner's New Mathematical Diversions from "Scientific American"*, Allen & Unwin, 1969.

[37] マーティン・ガードナー，『完全版マーティン・ガードナー数学ゲーム全集 3　ガードナーの新・数学娯楽—球を詰め込む・4 色定理・差分法—』，日本評論社，2016.

[38] O. Gross, "A class of discrete-type minimization problems," *Technical Report RM-1644*, RAND Corporation, 1956.

[39] T. Ibaraki and N. Katoh, *Resource Allocation Problems: Algorithmic Approaches*, MIT press, 1998.

[40] T. Fischer, "Bridg-It–Beating Shannon's analog heuristic," *Update*, **2010**, pp. 6–14, 2010.

[41] C. E. Shannon, "Game playing machines," *Journal of the Franklin Institute*, **260**, pp. 447–453, 1955.

[30] どなかた，イカサマ技と Birdcage のアプリを作ってくださいませんか！？

[31] 『梁塵秘抄』後白河天皇.

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.