

論文 / 著書情報
Article / Book Information

タイトル	第32回整数論サマースクール報告集「ゼータ関数の解析的理論」
著者	鈴木正俊, 中村 隆, 青木 宏樹
出典	第32回整数論サマースクール報告集「ゼータ関数の解析的理論」, pp. 1-368
発行日	2026, 1

第32回
整数論サマースクール報告集
「ゼータ関数の解析的理論」

2025年9月8日～9月12日

於 新潟県南魚沼郡 越後湯沢温泉 湯沢東映ホテル

まえがき

2025 年度 (第 32 回) 整数論サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」は、2025 年 9 月 8 日 (月) から 9 月 12 日 (金) まで、越後湯沢温泉「湯沢東映ホテル」において開催されました。本報告集には、当日の講演をもとに講演者の方々に執筆していただいた原稿が収録されています。また、「宵の時間」で発表された学生の方々にもご寄稿をお願いしました。

この度、新型コロナウイルス感染症の影響により 2019 年を最後に休止していた合宿形式での開催を再開しました。これに伴い、学生の研究発表の時間である「宵の時間」も再開しました。開催前は、以前と同様に多くの皆様にご参加いただけるかどうか、世話人一同案じておりましたが、結果として参加者は 88 名にのぼり、各講演後や宵の時間には大変活発な議論が行われました。周到に準備された素晴らしい講演をしてくださった講演者の皆様、サマースクールの円滑な進行および活発な質疑応答の両立にご尽力くださった座長の皆様、そして参加者の皆様に心より厚く御礼申し上げます。

本サマースクールの開催にあたっては、多くの皆様にご協力をいただきました。講演者の皆様には、開催中の講演のみならず、事前の勉強会や報告集原稿の執筆に多大な労力と時間を割いていただきました。鈴木雄太さん (立教大学) には、報告集用に漸近記法の解説を執筆して頂きました。前々年度・前年度のサマースクール世話人代表である谷口隆さん (神戸大学)、立谷洋平さん (弘前大学) には、開催準備から報告集の作成に至るまで、長期間にわたり多くのご教示とご支援を賜りました。安福悠さん (早稲田大学)、金子元さん (筑波大学) からは、合宿形式での運営に関する貴重なご助言をいただきました。当日の会場では、受付業務やホワイトボードの設置・清掃、お茶菓子の補充など、多くの作業を手伝ってくださった西村典容さん (東京科学大学)、伊集大貴さん (東京理科大学)、大森皓平さん (東京理科大学) に感謝いたします。また、会場を提供してくださった湯沢東映ホテルの皆様には、期間中、非常に快適な環境を整えていただきました。この場を借りて、深く感謝申し上げます。

本サマースクールは、以下の科学研究費助成金の支援を受けております。

基盤研究 (C) 23K03039 (研究代表者：青木宏樹) 24K06649 (研究代表者：佐々木義卓)
 24K06664 (研究代表者：杉山真吾) 23K03050 (研究代表者：鈴木 正俊)
 24K06697 (研究代表者：宗野恵樹) 22K03276 (研究代表者：中村隆)
 22K03267 (研究代表者：松本耕二)
 若手研究 22K13900 (研究代表者：武田渉) 24K16906 (研究代表者：峰正博)

これらの一部によって本報告集も印刷されております。また、参加費をご自身の研究費や、学生の場合は指導教員の研究費などでご負担いただいた方々も多くいらっしゃるものと存じます。これらもサマースクールへの実質的なご支援であると考えております。本サマースクールをご支援くださいました皆様に、あらためて感謝申し上げます。

本サマースクールならびに本報告集が、ゼータ関数の解析的理論の研究を志す方々の糧となり、我が国における整数論の伝統が今後も豊かに継承されていくことを祈念して、結びの言葉といたします。

2025 年度 (第 32 回) 整数論サマースクール 世話人
 鈴木 正俊 (東京科学大学) 中村 隆 (東京理科大学) 青木 宏樹 (東京理科大学)

目次

まえがき	i
目次	ii
開催趣旨と実施概要	iv
プログラム	v
参加者リスト	vii
集合写真	viii
0. 漸近記法	1
鈴木雄太 (立教大学)	
1. Riemann ゼータ関数の基本的性質, 関数等式, 整数点での値	3
門田 慎也 (公立鳥取環境大学)	
2. 素数定理	17
佐々木 義卓 (東北学院大学)	
3. ゼータ関数の非零領域	33
武田 渉 (東邦大学)	
4. Riemann ゼータ関数の零点の個数, Chebyshev の関数に対する明示公式	52
小林 弘京 (水産大学校)	
5. 平均値定理	71
松本 耕二 (愛知工業大学)	
6. Riemann ゼータ関数の普遍性定理について	103
遠藤 健太 (鈴鹿工業高等専門学校)	
7. ゼータ関数・ L 関数の確率論的値分布	129
峰 正博 (早稲田大学)	
8. L 関数の subconvexity について	181
杉山 真吾 (金沢大学)	
9. リーマンゼータ関数のワイル評価	214
杉山 真吾 (金沢大学)	
10. 零点密度について	264
井上 翔太 (日本大学)	
11. Riemann ゼータ関数の中心線上の零点について	315
宗野 恵樹 (関東学院大学)	

宵の時間

Y01 多重 L 値の収束性について	355
伊集 大貴 (東京理科大学)	
Y02 種数 1 の 2 橋結び目の liminal $SL_2\mathbb{Z}_p$ 表現と奇数次巡回被覆	357
坂本 穂波 (お茶の水女子大学)	
Y03 BSD 不変量を共有する同型でない楕円曲線の組の無限族について	359
志賀 明日香 (東北大学)	
Y04 Stirling 数と多重ゼータ (スター) 関数の非正整数点における値	361
篠原 健 (名古屋大学)	
Y05 Riemann 予想下での Apostol Möbius 関数の部分和の評価	363
寺田 怜央 (九州大学)	
Y06 モジュラー方程式と Hauptmodul の特殊値	365
富山 和樹 (早稲田大学)	
Y07 シフトに関する普遍性定理	367
中井 啓太 (名古屋大学)	

開催趣旨と実施概要

古典的には、素数定理の証明や類体論の定式化などに見られるように、ゼータ関数や L 関数は、整数論の発展において中心的な役割を果たしてきました。これらをテーマとする整数論サマースクールは、これまでに3回開催されました（第9回: 2001, 第16回: 2008, 第26回: 2018）。しかしながら、ゼータ関数や L 関数の複素関数としての性質、およびそれらを扱う解析的理論の詳細にまで踏み込んだ解説は、これまであまり試みられてきませんでした。一方で近年、保型 L 関数の劣凸評価の改良や Riemann ゼータ関数に対する零点密度定理の改良などが画期的成果として注目を集めています。このような状況を踏まえると、ゼータ関数・ L 関数の解析的理論を学ぶ重要性は高まっていると言えるでしょう。

現代の整数論には、 $\circ\circ$ ゼータ関数や $\triangle\triangle$ L 関数など、多様なゼータ関数や L 関数が登場します。それらを扱う解析的手法の多くは、まず Riemann ゼータ関数に対して確立され、その後さまざまな方向へ拡張・一般化されてきました。そこで本サマースクールでは、講演で扱う対象を Riemann ゼータ関数に限定することにより、基礎事項の修得と同時に、発展的な手法や理論の間の関係を深く理解することを目指しました。

このような目標のもと、本サマースクール当日の講演は、月・火の基礎事項のパートと、水・木・金の発展的事項のパートに分けて行われました。

基礎パートでは、門田慎也さん、佐々木義卓さん、武田渉さん、小林弘京さんに、Riemann ゼータ関数を用いた誤差項付きの素数定理の証明について、Hadamard および de la Vallée Poussin の議論に沿った解説を、複素関数論の復習も含めて丁寧に行っていただきました。

発展パートでは、まず多種多様な場面で利用されるゼータ関数の平均値理論について、松本耕二先生に解説していただきました。続いて、ゼータ関数が複素関数として非常に特殊で興味深い対象であることを示す、値分布論における普遍性定理について、遠藤健太さんにお話ししていただきました。峰正博さんには、値分布論における確率論の応用と普遍性の確率論的証明について解説していただきました。

その後、杉山真吾さんにはゼータ関数の増大度の評価を改善する劣凸評価問題 (subconvexity problem) についてご説明いただき、Riemann ゼータ関数に関する Landau, Hardy–Littlewood の劣凸評価の証明の概略を述べていただきました。最後の二つの講演はいずれも Riemann 予想に関連したものでした。Riemann 予想とは、Riemann ゼータ関数の非自明零点がすべて臨界線上にあることを主張する、有名な未解決問題です。井上翔太さんには、ある領域に存在する零点の割合を評価する零点密度定理と、その改良が素数分布論にもたらす結論について、最先端の結果を交えて解説していただきました。トリを務めた宗野恵樹さんには、臨界線上の零点の個数を下から評価する Levinson の方法についてお話ししていただきました。

後半の発展パートでは、各講演者が互いの理論の関連にもたびたび言及され、自習だけでは把握しにくい理論間の深い繋がりが、より明確に浮かび上がったように思います。

本サマースクールではゼータ関数の解析的性質に関わる多くの手法や理論が取り上げられましたが、ランダム行列理論との関係をはじめ、本サマースクールで扱いきれなかった重要な話題も少なくありません。しかし、一週間にわたって学んだ内容をしっかりと身につければ、現代のゼータ関数の解析的理論の多くに自ら取り組むことができると、世話人一同考えています。また、本報告集には、サマースクールで直接は扱わなかった、より一般的なゼータ関数や L 関数に関する寄稿も含まれており、全体を通してゼータ関数研究の広がりを感じ取ることができるでしょう。

本サマースクールの講義および本報告集を通じて、ゼータ関数研究の広がりとおもしろさを感じ取っていただければ幸いです。

「ゼータ関数の解析的理論」

日程：2025 年 9 月 8 日(月) – 9 月 12 日(金)

会場：越後湯沢温泉 湯沢東映ホテル (新潟県南魚沼郡湯沢町大字湯沢 3459)

世話人：鈴木 正俊 (科学大), 中村隆 (理科大), 青木宏樹 (理科大)

Website: <https://sites.google.com/view/ntss2025>

9 月 8 日 (月)

- 13:00 ~ 受付
- 14:00 ~ 14:30 開会 (諸注意、講師紹介等)
- 14:30 ~ 15:30 門田 慎也 (公立鳥取環境大学)
Riemann ゼータ関数の基本的性質, 関数等式, 整数点での値 (1)
- 15:45 ~ 16:45 門田 慎也 (公立鳥取環境大学)
Riemann ゼータ関数の基本的性質, 関数等式, 整数点での値 (2)
- 17:00 ~ 18:00 門田 慎也 (公立鳥取環境大学)
Riemann ゼータ関数の基本的性質, 関数等式, 整数点での値 (3)
- 20:30 ~ 21:30 宵の時間 (学生・ポスドクの研究発表)

9 月 9 日 (火)

- 9:00 ~ 10:00 佐々木 義卓 (東北学院大学)
素数定理 (1)
- 10:15 ~ 11:15 佐々木 義卓 (東北学院大学)
素数定理 (2)
- 11:30 ~ 12:30 武田 渉 (東邦大学)
ゼータ関数の非零領域 (1)
- 14:00 ~ 15:00 武田 渉 (東邦大学)
ゼータ関数の非零領域 (2)
- 15:15 ~ 16:15 武田 渉 (東邦大学)
ゼータ関数の非零領域 (3)
- 16:30 ~ 17:30 小林 弘京 (水産大学校)
Riemann ゼータ関数の零点の個数, Chebyshev の関数に対する明示公式 (1)
- 17:45 ~ 18:45 小林 弘京 (水産大学校)
Riemann ゼータ関数の零点の個数, Chebyshev の関数に対する明示公式 (2)
- 19:15 ~ 21:15 懇親会

9 月 10 日 (水) (午前)

- 9:00 ~ 10:00 松本 耕二 (愛知工業大学)
平均値定理 (1)
- 10:15 ~ 11:15 松本 耕二 (愛知工業大学)
平均値定理 (2)
- 11:30 ~ 12:30 松本 耕二 (愛知工業大学)
平均値定理 (3)

9月10日（水）（午後）

14:00 ～ 18:45 自由討論

20:30 ～ 21:30 宵の時間（学生・ポスドクの研究発表）

9月11日（木）

9:00 ～ 10:00 遠藤 健太（鈴鹿工業高等専門学校）
Riemann ゼータ関数の普遍性定理について（1）

10:15 ～ 11:15 遠藤 健太（鈴鹿工業高等専門学校）
Riemann ゼータ関数の普遍性定理について（2）

11:30 ～ 12:30 峰 正博（早稲田大学）
種々のゼータ関数・ L 関数の値分布に対する確率論的考察（1）

14:00 ～ 15:00 峰 正博（早稲田大学）
種々のゼータ関数・ L 関数の値分布に対する確率論的考察（2）

15:15 ～ 16:15 杉山 真吾（金沢大学）
 L 関数の subconvexity について

16:30 ～ 17:30 杉山 真吾（金沢大学）
リーマンゼータ関数のワイル評価

17:45 ～ 18:45 井上 翔太（日本大学）
零点密度について（1）

20:30 ～ 21:30 今後のサマースクールについて + 宵の時間（学生・ポスドクの研究発表）

9月12日（金）

9:00 ～ 10:00 井上 翔太（日本大学）
零点密度について（2）

10:15 ～ 11:15 宗野 恵樹（関東学院大学）
Riemann ゼータ関数の中心線上の零点について（1）

11:30 ～ 12:30 宗野 恵樹（関東学院大学）
Riemann ゼータ関数の中心線上の零点について（2）

12:40 ～ 閉会

タイムテーブル（初日だけ若干時間が異なりますのでご注意ください）

時間帯	9/8（月）	9/9（火）	9/10（水）	9/11（木）	9/12（金）
9:00-10:00	－	佐々木	松本	遠藤	井上
10:15-11:15	－	佐々木	松本	遠藤	宗野
11:30-12:30	－	武田	松本	峰	宗野
14:00-15:00	門田	武田	－	峰	－
15:15-16:15	門田	武田	－	杉山	－
16:30-17:30	門田	小林	－	杉山	－
17:45-18:45	－	小林	－	井上	－
20:30-21:30	宵の時間		宵の時間	宵の時間	－

食事 朝食: 7:00～, 昼食: 13:00～, 夕食: 19:15～

連絡先: msuzuki@math.sci.isct.ac.jp（鈴木正俊）

参加者リスト (88名, 敬称略, 所属は参加時のもの)

弘前大学	剣持幸平	東邦大学	武田渉
	立谷洋平	東洋大学	奥村喜晶
東北大学	市川遼		島田晃治
	志賀明日香	日本大学	井上翔太
	田中大地	立教大学	鈴木雄太
	西淵裕太	早稲田大学	戸潤勇一郎
	柳田有貴子		富山和樹
	横溝真紘		峰正博
東北学院大学	佐々木義卓	早稲田大学高等学院	坂田裕
埼玉大学	小嶋久祉	理化学研究所	富田拓希
千葉大学	吉田武司	新潟大学	星明考
筑波大学	明野瑞樹	金沢大学	犬丸直人
	山口亮太		内田誠也
東京大学	中山湧水		杉山真吾
東京科学大学	鈴木正俊	名古屋大学	伊藤遥来
	西村典容		伊藤陸統
お茶の水女子大学	植木潤		篠原健
	坂本穂波		余錦波
一橋大学	小島教知		舘野荘平
関東学院大学	宗野恵樹		出口絢結
慶應義塾大学	近田真治		中井啓太
上智大学	荻原芙美		平野伶
	角皆宏	愛知工業大学	松本耕二
	中筋麻貴	鈴鹿工業高等専門学校	遠藤健太
成蹊大学	須藤眞樹	京都大学	田中卓也
	若林功		中田裕貴
創価大学	白鳥翔		馬杉和貴
	高嶺広伸	奈良女子大学	亀田あかり
	山上敦士	大阪大学	高橋裕太
津田塾大学	原隆	大坂公立大学	檜原友
東京国際工科専門職大学	町出智也	近畿大学	田坂浩二
東京理科大学	青木宏樹	神戸大学	山田達也
	生井浩太	呉工業高等専門学校	金井和貴
	伊集大貴	香川大学	内藤浩忠
	大森皓平	公立鳥取環境大学	門田慎也
	片岡武典	島根大学	野口裕也
	斎藤涼河	水産大学校	小林弘京
	白石伝助	九州大学	韓松林
	田島凜		窪田瑛仁
	舘山到来		郡司泰生
	東銀次郎		杉林直樹
	中村隆		寺田伶央
	柳澤拓也		藤吉裕輔
	吉崎彪雅		村上友哉

漸近記法

鈴木雄太（立教大学理学部）

概要

本稿では、解析的整数論で用いられる漸近記法を簡単にまとめる。

記法 1 位相空間 X 上の複素数値関数 $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ と $a \in X$ に対して

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow a) \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad (1)$$

と定める。これを「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ は **漸近的に等しい**」と表現する。

記法 2 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, $g: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $S \subset X$ に対して

$$f(x) \ll g(x) \text{ が範囲 } x \in S \text{ で成り立つ} \\ \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{ ある実数 } C > 0 \text{ が存在して, 任意の } x \in S \text{ に対して } |f(x)| \leq Cg(x) \quad (2)$$

と略記する。この $\ll$ を **Vinogradov 記号** と呼ぶ。ここで、

- 上記の定数 C を **implicit constant** ないしは **implied constant** と呼ぶ。
- もし implicit constant が他の変数 $a_1, \dots, a_n$ に依存する場合は $f(x) \ll_{a_1, \dots, a_n} g(x)$ と書いて表現する。一方, implicit constant が他の変数に依存せずに取りれることを, 「implicit constant は **絶対定数** である」と表現する。
- X が位相空間のとき, 成立範囲が $a \in X$ のある近傍であることを $x \rightarrow a$ で表す。
- Vinogradov 記号の成立範囲 S や implicit constant がどの変数に依存するかが文脈から明らかな場合や, 数式上ではこれらを省略することもある。
- g の非負値性を仮定せず, $f(x) \ll g(x)$ で $f(x) \ll |g(x)|$ を意味する流儀もある。

記法 3 関数 $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ と $S \subset X$ に対して

$$f(x) \asymp g(x) \text{ が範囲 } x \in S \text{ で成り立つ} \\ \stackrel{\text{def}}{\iff} f(x) \ll g(x) \text{ と } g(x) \ll f(x) \text{ がともに範囲 } x \in S \text{ で成り立つ} \quad (3)$$

と略記する. この $\asymp$ を **Hardy 記号** と呼ぶ. Implicit constant の取扱いは Vinogradov 記号のときを踏襲するが, 変数 $a_1, \dots, a_n$ への依存性は $\asymp_{a_1, \dots, a_n}$ と表す.

記法 4 関数 $g: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して,

$$O(g(x))$$

で, $f(x) \ll g(x)$ と指定された範囲で評価できる項 $f(x)$ の省略を表す. この $O(\dots)$ を **Landau の O 記号** と呼ぶ. なお, O は “big oh” と読むことが多い. Implicit constant の取扱いは Vinogradov 記号のときを踏襲するが, 変数 $a_1, \dots, a_n$ への依存性は $O_{a_1, \dots, a_n}(g(x))$ のように表す. また, 次の約束 5 を適用する.

約束 5 記法 4 で導入された Landau の O 記号に対して, 次を約束する:

- 同じ記号列であっても, 場所が違えば異なる項の省略を表してよい.
- 省略されている項が, 記号列に現れない変数を含むことを許す.

この約束は, 以下に導入する「項を省略する」記号にも同じく適用することとする.

記法 6 関数 $g: X \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$ に対して, 記号

$$o(g(x))$$

で, 指定された極限 $x \rightarrow a$ に対して

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

が成り立つ項 $f(x)$ の省略を表す. この $o(\dots)$ を **Landau の o 記号** と呼ぶ. なお, o は “little oh” と読むことが多い. また, 約束 5 を適用する.

記法 7 関数 $g: X \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$ に対して, 記号たち

$$\Omega(g(x)), \quad \Omega_+(g(x)), \quad \Omega_-(g(x))$$

で, 指定された極限 $x \rightarrow a$ に対して, それぞれ

$$\limsup_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{g(x)} > 0, \quad \limsup_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad \liminf_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} < 0$$

が成り立つ項 $f(x)$ の省略を表す. また, $\Omega_{\pm}(g(x))$ で $\Omega_+(g(x))$ と $\Omega_-(g(x))$ の両方の条件を満たす項 $f(x)$ の省略を表す. また, 約束 5 を適用する.

Riemann ゼータ関数の基本的性質, 関数等式, 整数点での値

門田 慎也 (公立鳥取環境大学 人間形成教育センター)

概要

本稿は, 2025 年度 (第 32 回) 整数論サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」における講演「Riemann ゼータ関数の基本的性質, 関数等式, 整数点での値」の報告記事であり, 暫定版の報告記事に若干, 修正・加筆を行った.

講演の準備をするにあたって, [3, 第 1, 2 章] や [1, 第 9 章] を参考にしたので, 必要に応じて参照してもらいたい.

第 1 節では Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の定義から出発し, 定義級数が $\operatorname{Re}(s) > 1$ において広義一様に絶対収束することと, Euler 積表示を持つことを示す. 第 2 節では $\zeta(s)$ が全複素平面に有理型関数として解析接続されることを示す. 第 3 節では関数等式を示し, 最後の第 4 節では $\zeta(s)$ の整数点での値について述べる.

1 Riemann ゼータ関数の定義と基本的性質

本稿では, 複素数 s の実部を σ , 虚部を t と表すことにする.

定義 1.1 (Riemann ゼータ関数) 複素数 s に対して, Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ を

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\operatorname{Re}(s) > 1)$$

で定義する. 定義級数の収束性は, 次の定理からわかる.

定理 1.2 $D_0 = \{s = \sigma + it \in \mathbb{C} \mid \sigma > 1, t \in \mathbb{R}\}$ とする.

- (1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は D_0 で広義一様に絶対収束する. したがって $\zeta(s)$ は D_0 において正則である. [4, 第 2 章 定理 5.2]

(2) n 番目の素数を p_n と表すと, D_0 で

- (i) 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-s})^{-1}$ は広義一様に絶対収束し,
(ii) 次の等式が成り立つ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-s})^{-1}.$$

上式の右辺を $\zeta(s)$ の **Euler 積表示**といい, $\prod_{p:\text{prime}} (1 - p^{-s})^{-1}$ と表すこともある. また, 後述する無限積の収束の定義より, D_0 で $\zeta(s) \neq 0$ である.

ここで, 無限積の定義と性質を述べておく. 詳しくは [5, 第 V 章 §6] を参照.

定義 1.3 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ に対して,

- (1) 0 となる a_n がない場合, 部分積 $A_n = \prod_{m=1}^n a_m$ が作る数列 $\{A_n\}_{n \geq 1}$ が

0 でない値 A に収束するとき, 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ は A に収束するという.

- (2) 0 となる a_n があり有限個の場合, そのような a_n を除いた無限積が収束するとき, 元の無限積も収束するといひ, その値は 0 とする.

無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が $A \neq 0$ に収束するとき, $a_n = A_n/A_{n-1}$ で分子・分母ともに A に

収束するので, $a_n \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) である. そこで, 無限積を $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ と表す. この無限積が収束すれば $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) である.

定義 1.4 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$ が収束するとき, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ は絶対収束するという.

命題 1.5 任意の自然数 n に対して $a_n \geq 0$ のとき, 次の (i), (ii) は同値である:

- (i) 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ は収束する. (ii) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

この命題より, 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ が絶対収束することと, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束することが同値であることがわかる.

ここから、関数列が作る無限積について述べる.

- 定義 1.6** (1) 各関数が集合 S 上で零点を持たない関数列 $\{f_n(s)\}_{n \geq 1}$ に対して、部分積 $F_n(s) = \prod_{m=1}^n f_m(s)$ が作る関数列 $\{F_n(s)\}_{n \geq 1}$ が S 上で零点を持たない関数 $F(s)$ に各点収束するとき、無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ は S 上で $F(s)$ に各点収束するという.
- (2) $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ が S 上で $F(s)$ に各点収束し、かつ $\{F_n(s)\}_{n \geq 1}$ が S 上で $F(s)$ に一様収束するとき、無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ は S 上で $F(s)$ に一様収束するという.

一様収束性の判定には、次の定理がよく使われる. 詳しくは [5, 第 IV 章 §13 定理 13.5, 第 V 章 §6 定理 6.4] を参照.

Weierstrass の M-test (優級数定理)

集合 S 上の関数列 $\{f_n(s)\}_{n \geq 1}$ に対して、次の (i), (ii) をみたす正数列 $\{M_n\}_{n \geq 1}$ が存在すれば、 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ と $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(s))$ は S 上で一様かつ絶対収束する :

- (i) 任意の $s \in S, n \in \mathbb{N}$ に対して $|f_n(s)| \leq M_n$ が成り立つ.
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束する.

このとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ を $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ や $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(s))$ の優級数という.

定理 1.2 の証明 任意にコンパクト集合 $K \subset D_0$ をとり、 $\sigma_0 = \min\{\sigma \mid s = \sigma + it \in K\}$ とおけば $\sigma_0 > 1$ である.

(1) 任意の $s \in K, n \in \mathbb{N}$ に対して、 $|n^{-s}| = n^{-\sigma} \leq n^{-\sigma_0}$ である. また、 $\sigma_0 > 1$ なので、以下のように優級数は収束する.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^n \frac{1}{x^{\sigma_0}} dx = 1 + \int_1^{\infty} x^{-\sigma_0} dx = 1 + \frac{1}{\sigma_0 - 1}$$

したがって、M-test より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は K 上で一様かつ絶対収束する.

(2) (i) まず, $(1 - p_n^{-s})^{-1} = \frac{1}{1 - p_n^{-s}} = \sum_{k=0}^{\infty} (p_n^{-s})^k$ だから

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-s})^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_n^{-ks} \right)$$

である. 任意の $s \in K$, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} p_n^{-ks} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} p_n^{-k\sigma} \leq \sum_{k=1}^{\infty} p_n^{-k\sigma_0}$$

である. また, n と k が自然数にわたって変化するとき, p_n^k は素べきしか動かないため $\{p_n^k \mid n, k = 1, 2, \dots\} \subsetneq \mathbb{N}$ である. したがって,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p_n^k)^{\sigma_0}} < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\sigma_0}}$$

となり, $\sigma_0 > 1$ なので優級数は収束する. よって, M-test より $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_n^{-ks}$ は K で一様かつ絶対収束する.

(ii) 自然数 N に対して

$$S(N) := \{p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_N^{e_N} \mid e_1, e_2, \dots, e_N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

とおく. このとき, 任意の $s \in D_0$ に対して,

$$\prod_{n=1}^N (1 - p_n^{-s})^{-1} = \prod_{n=1}^N \left(1 + p_n^{-s} + (p_n^2)^{-s} + (p_n^3)^{-s} + \cdots \right) = \sum_{m \in S(N)} m^{-s}$$

であるから,

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s} - \prod_{n=1}^N (1 - p_n^{-s})^{-1} \right| = \left| \sum_{m \notin S(N)} m^{-s} \right| \leq \sum_{m \notin S(N)} m^{-\sigma} \leq \sum_{m > p_N} m^{-\sigma}$$

となり, $N \rightarrow \infty$ のとき最右辺は 0 になるので目的の式を得る. なお, 最後の不等号は「 $m \leq p_N \Rightarrow m \in S(N)$ 」の対偶を考えることで保証される.

以上で定理 1.2 は証明できたが, おまけとして, D_0 において $\zeta(s) \neq 0$ であることを, 無限積の定義に頼らず直接確かめてみる ([2, Chapter 1, 1.1] を参照). 三角不等

式より $|1 - p_n^{-s}| \leq 1 + |p_n^{-s}| = 1 + p_n^{-\sigma}$ だから

$$|\zeta(s)| = \left| \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-s})^{-1} \right| \geq \prod_{n=1}^{\infty} (1 + p_n^{-\sigma})^{-1} = \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + p_n^{-\sigma}) \right)$$

が得られ, $x > 0$ において $\log(1+x) < x$ であることと, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-\sigma}$ が収束することから

$$\exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + p_n^{-\sigma}) \right) \geq \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-\sigma} \right) > 0$$

となり, D_0 において $\zeta(s) \neq 0$ であることが従う. $\square$

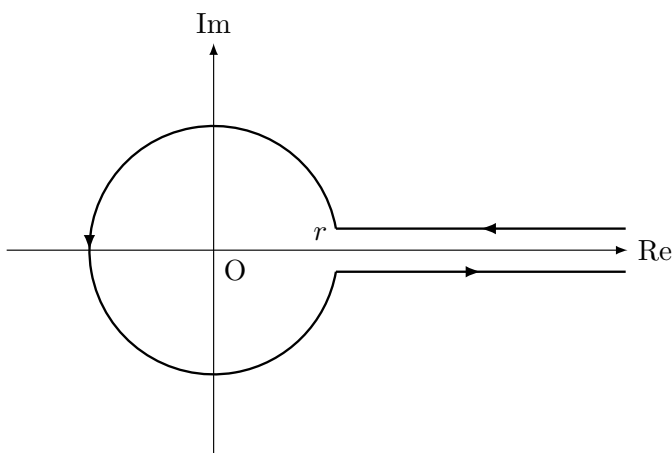
2 解析接続

本節の目標は, 次の定理を示すことである.

定理 2.1 (1) $\zeta(s)$ は複素平面全体に有理型関数として解析接続される.

(2) $\zeta(s)$ は $s = 1$ を除いて正則である. また, $s = 1$ は 1 位の極で留数は 1 である.

定理 2.1 を証明するために少し準備を行う. 正の数 r に対して, 積分路 $C(r)$ を, 実軸の正の方向の無限遠点から出発し, 実軸上を r まで進み, 原点を中心とする半径 r の円周に沿って反時計回りに 1 周し, 実軸上の点 r まで戻り, 再び実軸上を正方向に無限遠点まで戻る路とする. (次の図を参照)



さらに, 複素数 s と正の数 $r \notin 2\pi\mathbb{Z}$ に対して,

$$I(s; r) := \int_{C(r)} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

と定めると, 複素平面全体で広義一様に絶対収束し, 正則であることがわかる [1, 補題 9.2].

$I(s; r)$ の積分路の変更に関して, 次の補題が成り立つ.

補題 2.2 複素数 s と $0 < r_1 < r_2$ なる実数 $r_1, r_2 \notin 2\pi\mathbb{Z}$ に対して次が成り立つ :

$$I(s; r_1) = I(s; r_2) - 2\pi i \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ r_1 < |2\pi n| < r_2}} (2\pi i n)^{s-1}.$$

補題 2.2 の証明 $I(s; r_1) - I(s; r_2)$ の積分路 $C(r_1) - C(r_2)$ を考え, 積分路が負の向きであることに注意し留数定理を用いることで得られる. $\square$

補題 2.2 より, $0 < \delta, \delta' < 2\pi$ に対して $I(s; \delta) = I(s; \delta')$, つまり $0 < \delta < 2\pi$ に対して $I(s; \delta)$ は δ によらないので単に $I(s)$ とかくことにする. また, $C(r)$ を

L_1 : 実軸の ∞ から r までの部分

$A(r)$: 原点を中心とする半径が r の円周の部分 (実軸上の点 r から反時計回り)

L_2 : 実軸の r から ∞ の部分

の 3 つの部分に分ける. L_1 上にある z に対して $\arg z = 0$ と定めれば, $A(r)$ で原点を中心に 1 周するから L_2 上にある z に対しては $\arg z = 2\pi$ となることに注意すると,

$$\begin{aligned} I(s; r) &= \int_{\infty}^r \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx + \int_{A(r)} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz + \int_r^{\infty} \frac{x^{s-1} \cdot e^{2\pi i(s-1)}}{e^x - 1} dx \\ &= (e^{2\pi i s} - 1) \int_r^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx + \int_{A(r)} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz \end{aligned} \quad (2.1)$$

と変形できる. 特に, $0 < \delta < 2\pi$ と任意の整数 n に対して

$$I(n) = \int_{A(\delta)} \frac{z^{n-1}}{e^z - 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{z^{n-1}}{e^z - 1} \right) \quad (2.2)$$

である.

定理 2.1 の証明 (1) $\operatorname{Re}(s) = \sigma > 1$ とする. 次式の, ガンマ関数の積分表示において $t = nx$ (n は自然数) とおくと,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt = n^s \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx$$

となる. 両辺を n^s で割った後に n について和をとり, 最右辺における和と積分の順序交換が保証されれば,

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-nx} \right) x^{s-1} dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

を得る. ここで, 実数 $\sigma > 1$ に対して, $x > 0$ において $e^{-nx} x^{\sigma-1} > 0$ なので $\sum_{n=1}^N e^{-nx} x^{\sigma-1}$ は N について単調増加であるから, 単調収束定理により和と積分の順序交換が保証され

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nx} x^{\sigma-1} dx = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-nx} x^{\sigma-1} dx$$

が成り立つ. 左辺の σ を複素数 s に置き換えたものは, $\Gamma(s)\zeta(s)$ であるから $\operatorname{Re}(s) > 1$ において正則である. また, 右辺の σ を複素数 s に置き換えたもの, つまり $\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$ も $\operatorname{Re}(s) > 1$ において正則 (後述) であるから, 一致の定理により $\operatorname{Re}(s) > 1$ なる複素数 s に対しても, 順序交換が保証される. したがって, 式 (2.1) において $r = \delta$, $\delta \rightarrow 0$ としたときに右辺の第 1 項の積分は $\Gamma(s)\zeta(s)$ となることがわかった. 次に, $\delta \rightarrow 0$ のときに右辺の第 2 項が 0 になることを確かめる.

まず, e^z の Maclaurin 展開より

$$e^z - 1 = z \left(1 + \sum_{n=2}^\infty \frac{z^{n-1}}{n!} \right)$$

である. $f(z) = \sum_{n=2}^\infty \frac{z^{n-1}}{n!}$ とおけば, ある定数 C が存在して, $|z| \rightarrow 0$ のとき $|f(z)| \leq C|z|$ である. このとき 「 $f(z) = O(|z|)$ ($|z| \rightarrow 0$)」 とかく. つまり, $e^z - 1 = z(1 + O(|z|))$ とかける. $A(\delta)$ 上の z を $z = \delta e^{i\theta}$ と表せば,

$$\int_{A(\delta)} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\delta^{s-1} e^{(s-1)i\theta}}{\delta e^{i\theta} (1 + O(\delta))} i\delta e^{i\theta} d\theta = i\delta^{s-1} \int_0^{2\pi} \frac{e^{(s-1)i\theta}}{1 + O(\delta)} d\theta$$

となり, $\sigma > 1$ なので $\delta \rightarrow 0$ のときこれは 0 になる. 以上より,

$$\zeta(s) = \frac{1}{e^{2\pi is} - 1} \frac{1}{\Gamma(s)} I(s)$$

が得られ, $1/\Gamma(s)$ および $I(s)$ は全平面で正則で, $1/(e^{2\pi is} - 1)$ は有理型関数なので, 上式が $\zeta(s)$ の全複素平面への有理型関数としての解析接続を与える.

最後に, 残されていた $\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$ の $\operatorname{Re}(s) > 1$ における正則性を確かめるために, 次の 2 つを示す:

- (i) $f_n(s) = \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$ は $D_0 = \{s = \sigma + it \in \mathbb{C} \mid \sigma > 1, t \in \mathbb{R}\}$ で正則である.
- (ii) $\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$ は D_0 で広義一様に絶対収束する.

(i) 次の事実から従う.

事実 2.3 任意の $0 < a < b$ に対して, $G(s) := \int_a^b \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$ は $\mathbb{C}$ 上の正則関数である.

事実 2.3 の証明 この証明は [4, 第 2 章 定理 5.4] の証明に基づいている. $g(s, x) := \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}$ は $\mathbb{C}$ 上正則だから, Riemann 和

$$G_n(s) := \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n g\left(s, a + \frac{b-a}{n}k\right)$$

も $\mathbb{C}$ 上正則である. したがって, 関数列 $\{G_n(s)\}_{n \geq 1}$ が $G(s)$ に $\mathbb{C}$ 上広義一様収束することがいえればよい. 任意にコンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}$ をとる. また, 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. $g(s, x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続だから, $a \leq x \leq b$ で一様連続である. したがって, $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ に対して, ある $\delta = \delta(\varepsilon)$ が存在して, $|x_1 - x_2| < \delta$ ならば $\sup_{s \in K} |g(s, x_1) - g(s, x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ である. ここで, $N > \frac{b-a}{\delta}$ なる自然数 N をとり,

$$\begin{aligned} G_n(s) &= \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} g\left(s, a + \frac{b-a}{n}k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{a + \frac{b-a}{n}(k-1)}^{a + \frac{b-a}{n}k} g\left(s, a + \frac{b-a}{n}k\right) dx, \\ G(s) &= \sum_{k=1}^n \int_{a + \frac{b-a}{n}(k-1)}^{a + \frac{b-a}{n}k} g(s, x) dx \end{aligned}$$

に注意すれば, 任意の $s \in K, n \geq N$ に対して,

$$\begin{aligned}
 |G_n(s) - G(s)| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{a+\frac{b-a}{n}(k-1)}^{a+\frac{b-a}{n}k} \left\{ g\left(s, a + \frac{b-a}{n}k\right) - g(s, x) \right\} dx \right| \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \int_{a+\frac{b-a}{n}(k-1)}^{a+\frac{b-a}{n}k} \left| g\left(s, a + \frac{b-a}{n}k\right) - g(s, x) \right| dx \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \int_{a+\frac{b-a}{n}(k-1)}^{a+\frac{b-a}{n}k} \frac{\varepsilon}{b-a} dx \\
 &= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

だから, 関数列 $\{G_n(s)\}_{n \geq 1}$ は $G(s)$ に K 上一様収束する. $\square$

(ii) 任意にコンパクト集合 $K \subset D_0$ をとり, $\sigma_0 = \min\{\sigma \mid s = \sigma + it \in K\}, \sigma_1 = \max\{\sigma \mid s = \sigma + it \in K\}$ とおけば $\sigma_0, \sigma_1 > 1$ である.

まず, 積分を

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

と分ける. 1 つめの積分については, $e^x - 1 \geq x$ より

$$\left| \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \right| \leq \frac{x^{\sigma_0-1}}{x} = x^{\sigma_0-2}$$

であり, $\sigma_0 - 2 > -1$ なので

$$\int_0^1 x^{\sigma_0-2} dx = \frac{1}{\sigma_0 - 1}.$$

2 つめの積分については, σ_1 の整数部分を k とおけば

$$|x^{s-1}| = x^{\sigma-1} \leq x^{\sigma_1-1} \leq x^k \leq 2^k k! e^{\frac{x}{2}}$$

である (最後の不等号は $e^{\frac{x}{2}}$ の Maclaurin 展開における x^k の項に注目すると得られる) ことと, $e^x - 1 = e^x(1 - e^{-x}) \geq e^x(1 - e^{-1})$ より

$$\left| \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \right| \leq \frac{2^k k!}{1 - e^{-1}} e^{-\frac{x}{2}}$$

であり

$$\int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

なので, Weierstrass の M-test の積分版 [5, 第 IV 章 §14 定理 14.2] より主張が示された.

(2) $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ を用いると

$$(e^{2\pi i s} - 1)\Gamma(s) = 2ie^{\pi i s} \frac{e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}}{2i} \frac{\pi}{\Gamma(1-s)\sin(\pi s)} = \frac{2\pi i e^{\pi i s}}{\Gamma(1-s)}$$

なので, 解析接続を与える式にこれを代入すると

$$\zeta(s) = \frac{1}{2\pi i} \Gamma(1-s) e^{-\pi i s} I(s) \quad (2.3)$$

が得られる. $e^{-\pi i s}$ および $I(s)$ は全平面で正則なので, $\zeta(s)$ の特異点の候補は $\Gamma(1-s)$ の 1 位の極である $1-s=0, -1, -2, \dots$, つまり $s=1, 2, 3, \dots$ であるが, 定理 1.2 (1) より $\operatorname{Re}(s) > 1$ において $\zeta(s)$ は正則なので $s=2, 3, \dots$ は除外され $s=1$ のみが候補として残る. 式 (2.2) より,

$$I(1) = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{1}{e^z - 1} \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = 2\pi i \neq 0$$

となり $s=1$ は実際に $\zeta(s)$ の 1 位の極であることがわかる. また, $(s-1)\Gamma(1-s) = -\Gamma(2-s)$ より,

$$\operatorname{Res}_{s=1} \zeta(s) = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{-\Gamma(2-s)}{2\pi i} e^{-\pi i s} I(s) = 1$$

であるから, 留数が 1 であることがわかる. □

3 関数等式

定理 3.1 任意の複素数 s に対して次が成り立つ :

$$\zeta(s) = 2\Gamma(1-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) (2\pi)^{s-1} \zeta(1-s).$$

定理 3.1 の証明 一致の定理より $\sigma < 0$ である s に対して証明できれば十分であるから, $\sigma < 0$ とする. R を十分大きい整数とし, $N = 2R + 1$ とおく. 補題 2.2 において,

$r_1 = \delta < 2\pi, r_2 = N\pi$ とすれば,

$$I(s) = I(s; N\pi) - 2\pi i \sum_{n=1}^R \left\{ (2\pi i n)^{s-1} + (-2\pi i n)^{s-1} \right\}$$

となる. 式 (2.1) を用いた $I(s; N\pi)$ の表示における, 右辺第 2 項の積分路 $A(N\pi)$ 上にある z を $z = N\pi e^{i\theta}$ と表せば, $e^z = \exp(N\pi \cos \theta) \exp(iN\pi \sin \theta)$ である. $|e^z| = \exp(N\pi \cos \theta)$ が 1 に近いとき, $\cos \theta$ は 0 に近く, そのとき $\sin \theta$ は ± 1 に近い. 従って, e^z は $\exp(\pm(2R+1)\pi i) = -1$ に近いので, 1 からある程度離れている. つまり, ある正の定数 r が存在して, 任意の十分大きい整数 R と $0 \leq \theta < 2\pi$ に対して $|e^z - 1| > r$ が成り立つ. また, $|z^{s-1}| = |z|^{\sigma-1} \exp(-t \arg z) = (N\pi)^{\sigma-1} e^{-t\theta}$ であるから

$$\begin{aligned} \left| \int_{A(N\pi)} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz \right| &\leq \int_0^{2\pi} \frac{|z^{s-1}|}{|e^z - 1|} N\pi d\theta \\ &< \int_0^{2\pi} \frac{(N\pi)^{\sigma-1} e^{-t\theta}}{r} N\pi d\theta = \frac{(N\pi)^\sigma}{r} \int_0^{2\pi} e^{-t\theta} d\theta \end{aligned}$$

となり, $\sigma < 0$ なので $R \rightarrow \infty$ のときこれは 0 になる. すなわち, $I(s; N\pi) \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$) が得られる. 一方, 偏角の決め方に注意すると,

$$\begin{aligned} (2\pi i n)^{s-1} &= \exp((s-1) \log(2\pi i n)) = \exp((s-1) (\log |2\pi i n| + i \arg(2\pi i n))) \\ &= \exp\left((s-1) \left(\log(2\pi n) + \frac{\pi i}{2}\right)\right) = (2\pi n)^{s-1} e^{\frac{s-1}{2}\pi i}, \\ (-2\pi i n)^{s-1} &= \exp((s-1) \log(-2\pi i n)) \\ &= \exp((s-1) (\log | -2\pi i n| + i \arg(-2\pi i n))) \\ &= \exp\left((s-1) \left(\log(2\pi n) + \frac{3\pi i}{2}\right)\right) = (2\pi n)^{s-1} e^{\frac{3(s-1)}{2}\pi i}, \end{aligned}$$

であるから, $\sigma < 0$ のとき $R \rightarrow \infty$ とすれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} I(s) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{2}\pi i(s-1)} + e^{\frac{3}{2}\pi i(s-1)} \right) (2\pi n)^{s-1} \\ &= -e^{\pi i(s-1)} \left(e^{-\frac{s-1}{2}\pi i} + e^{\frac{s-1}{2}\pi i} \right) (2\pi)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-s}} \\ &= e^{\pi i s} \left(e^{-\frac{s-1}{2}\pi i} + e^{\frac{s-1}{2}\pi i} \right) (2\pi)^{s-1} \zeta(1-s) \end{aligned}$$

となり,

$$e^{-\frac{s-1}{2}\pi i} + e^{\frac{s-1}{2}\pi i} = 2 \cos\left(\frac{s-1}{2}\pi\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

に注意し, 式 (2.3) と組み合わせると, 目的の式が得られる. $\square$

4 整数点での値

定義 4.1 非負整数 m に対して, Seki-Bernoulli 数^{*1} B_m を母関数により

$$\frac{ze^z}{e^z - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{z^m}{m!}$$

で定義する.

注意 4.2

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \frac{z^m}{m!}$$

により定まる C_m を Seki-Bernoulli 数と呼ぶ流儀もあるので注意が必要である.

$\frac{ze^z}{e^z - 1} = \frac{z}{e^z - 1} + z$ なので, 両者の違いは $m = 1$ の値, $B_1 = \frac{1}{2}$ と $C_1 = -\frac{1}{2}$ だけである.

Seki-Bernoulli 数の母関数から 1 次の項を取り除いた $f(z) = \frac{ze^z}{e^z - 1} - \frac{z}{2}$ が偶関数であることから次がわかる.

事実 4.3 3 以上の奇数 m に対して, $B_m = 0$ である.

定理 4.4 (1) 自然数 m に対して, $\zeta(1 - m) = -\frac{B_m}{m}$ である. 特に, 上記の事実から, $s = -2, -4, -6, \dots$ で $\zeta(s) = 0$ である. これらを $\zeta(s)$ の自明な零点という.

(2) 自然数 m に対して, $\zeta(2m) = -\frac{(-1)^m (2\pi)^{2m}}{2 (2m)!} B_{2m}$ である.

^{*1} 単に Bernoulli 数と呼ばれることが多いが, Jakob Bernoulli の遺著 (1713) において導入される前年に, 関 孝和の遺稿集 (1712) において漸化的な定義が与えられ, 基本的な性質が議論されていることから, ここでは Seki-Bernoulli 数と呼ぶことにした. 詳細は [1, 第 1 章 1.1] や [3, 第 2 章] を参照.

定理 4.4 の証明 (1) 式 (2.3) に $s = 1 - m$ を代入すると,

$$\zeta(1 - m) = \frac{1}{2\pi i} \Gamma(m) e^{-\pi i(1-m)} I(1 - m) = \frac{1}{2\pi i} (m - 1)! (-1)^{1-m} I(1 - m)$$

となる. また, 式 (2.2) より $I(1 - m) = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{z^{-m}}{e^z - 1} \right)$ であり,

$$\frac{z^{-m}}{e^z - 1} = z^{-m-1} \frac{(-z)e^{-z}}{e^{-z} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_k \frac{z^{k-m-1}}{k!}$$

であるから, z^{-1} の項を見れば留数が $(-1)^m \frac{B_m}{m!}$ であることがわかる. それを上式に代入すれば結論を得る.

(2) 関数等式 $\zeta(s) = 2\Gamma(1 - s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) (2\pi)^{s-1} \zeta(1 - s)$ において, $s = 1 - 2m$ を代入すれば

$$\zeta(1 - 2m) = 2\Gamma(2m) \sin\left(\frac{\pi}{2} - m\pi\right) (2\pi)^{-2m} \zeta(2m)$$

となり, 左辺に (1) の結果を用い, 右辺に $\Gamma(2m) = (2m - 1)!$ および $\sin\left(\frac{\pi}{2} - m\pi\right) = (-1)^m$ を用いて式を整理すれば目的の結論を得る. $\square$

謝辞

まず, 日程の調整や会場の手配などを行ってくださり, 今回の整数論サマースクールを開催してくださった, 世話人である鈴木 正俊 氏 (東京科学大学), 中村 隆 氏 (東京理科大学), 青木 宏樹 氏 (東京理科大学) に心より感謝いたします. また, 暫定版の報告集についてコメントをくださった中筋 麻貴 氏 (上智大学/東北大学), 杉山 真吾 氏 (金沢大学), 鈴木 雄太 氏 (立教大学) にも感謝いたします. さらに, 報告集に加筆する際に, 鈴木 正俊 氏, 鈴木 雄太 氏からたくさんの有益なご助言を頂きました. 重ねて感謝申し上げます. 最後に, 講演をするにあたって公立鳥取環境大学特別研究費の助成を受けました.

参考文献

- [1] 荒川恒男, 伊吹山知義, 金子昌信, ベルヌーイ数とゼータ関数 新装版-整数論の風景-, 共立出版, 2022.

- [2] A. Ivić, The Riemann Zeta-Function, Wiley, 1985.
- [3] 松本耕二, リーマンのゼータ関数, 朝倉書店, 2005.
- [4] エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ (新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之 訳), プリンストン解析学講義 II 複素解析, 日本評論社, 2009.
- [5] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会, 1980.

素数定理

佐々木 義卓（東北学院大学工学部）

概要

素数定理は素数分布の漸近的挙動を表す素数分布論の基本定理である。本稿は Riemann ゼータ関数を用いた誤差項付きの素数定理の証明をまとめたものである。

1 素数定理

正の実数 x に対して, x 以下にある素数の個数を $\pi(x)$ で表す:

$$\pi(x) := \sum_{\substack{p \leq x \\ p: \text{素数}}} 1.$$

本稿が目的とするのは次の素数定理の証明である。

定理 1.1 (素数定理) ある正定数 C_1 が存在して,

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x \exp(-C_1 \sqrt{\log x})) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (1.1)$$

ただし, $\text{Li}(x)$ は (補正) 対数積分関数である:

$$\text{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} \quad (x \geq 2).$$

(1.1) の右辺は, $x \rightarrow \infty$ のとき $\pi(x)$ は $\text{Li}(x)$ で近似できて, その誤差 “ $|\pi(x) - \text{Li}(x)|$ ” が O 記号の関数で評価できることを表している。このような漸近等式では, 左辺の関数の挙動を決定している部分を**主要項** ((1.1) だと $\text{Li}(x)$) と呼び, O 記号の部分を**誤差項**あるいは**残余項**と呼ぶ。

(1.1) の主要項である $\text{Li}(x)$ の理解を深めておこう. 部分積分より,

$$\begin{aligned}\text{Li}(x) &= \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \\ &= \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) \quad (x \rightarrow \infty).\end{aligned}\tag{1.2}$$

ここで, $\log^k x$ は $(\log x)^k$ を表している. また, 誤差項は, 被積分関数が減少関数なので, 積分区間を適切に区切って以下のように評価した.

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} &= \left(\int_2^{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^x \right) \frac{dt}{\log^2 t} \leq \frac{1}{\log^2 2} \int_2^{\sqrt{x}} dt + \frac{1}{\log^2 \sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^x dt \\ &\ll \sqrt{x} + \frac{x}{\log^2 x} \ll \frac{x}{\log^2 x}.\end{aligned}$$

さらに (1.2) の積分に対して同様の計算を繰り返し実行することで,

$$\text{Li}(x) = \sum_{m=1}^n (m-1)! \frac{x}{\log^m x} + O\left(\frac{x}{\log^{n+1} x}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

が得られる. これは, $\text{Li}(x)$ が (1.1) の誤差項よりも大きいことを表している. また, (1.2) を用いると (1.1) は

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

と表せるので, 定理 1.1 は次の形で述べられる素数定理を, より精密に捉えたものと言える.

定理 1.2 (素数定理)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \rightarrow \infty).$$

本稿では 定理 1.1 の形の素数定理を証明する. 主に [4] に沿ってまとめており, 適宜, [1, 2, 3, 5] などとも参照されたい. 定理 1.1 の証明に必要な項目は以下の通りである.

- (イ) $\pi(x)$ と Chebyshev 関数 $\psi(x)$ の関係
- (ロ) Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ と $\psi(x)$ の関係
- (ハ) $\zeta(s)$ の非零領域と $(\zeta'/\zeta)(s)$ の評価

(ハ) は次のレクチャー (武田氏による) で重点的に扱われる予定であるため, 本稿では (ハ) に関する定理は認めた上で, 定理 1.1 の証明を行う.

2 Chebyshev の関数 $\vartheta(x)$, $\psi(x)$

我々が対象としているのは $\pi(x)$ であるが, Riemann ゼータ関数との関係という観点からすると, 次の関数 $\psi(x)$ の方がより自然な対象と言える. ここでは, $\pi(x)$ と $\vartheta(x)$, $\psi(x)$ の対応関係をまとめるとともに, $\psi(x)$ の漸近等式から素数定理 ($\pi(x)$ の漸近等式) が導かれることを示していく.

定義 2.1 (Chebyshev 関数) 次で定義される関数を Chebyshev 関数と呼ぶ.

$$\begin{aligned}\vartheta(x) &:= \sum_{\substack{p \leq x \\ p: \text{素数}}} \log p, \\ \psi(x) &:= \sum_{\substack{p^m \leq x \\ p: \text{素数} \\ m \geq 1}} \log p = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).\end{aligned}$$

ここで, $\Lambda(n)$ は von Mangoldt 関数であり, 以下で定義される:

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & n = p^m \text{ (} p: \text{素数, } m \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{) のとき,} \\ 0 & \text{その他.} \end{cases} \quad (2.1)$$

次の命題 2.2 は, $\psi(x)$, $\vartheta(x)$ と $\pi(x)$ の関係を表している.

命題 2.2

(i) $x \rightarrow \infty$ のとき,

$$\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x} \log x). \quad (2.2)$$

(ii) 次が成り立つ:

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt. \quad (2.3)$$

証明 (i) 関数 $\psi(x)$ の定義より,

$$\psi(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p: \text{素数}}} \sum_{\substack{m \geq 1 \\ p^m \leq x}} \log p = \sum_{1 \leq m \leq \log_2 x} \sum_{\substack{p \leq x^{1/m} \\ p: \text{素数}}} \log p = \sum_{1 \leq m \leq \log_2 x} \vartheta(x^{1/m})$$

と表せる. 一方で,

$$\vartheta(x) \leq \sum_{\substack{p \leq x \\ p: \text{素数}}} \log x \leq x \log x$$

に注意すれば,

$$\begin{aligned}\psi(x) - \vartheta(x) &= \vartheta(x^{1/2}) + \sum_{3 \leq m \leq \log_2 x} \vartheta(x^{1/3}) \\ &\ll x^{1/2} \log x + x^{1/3} \log^2 x \ll \sqrt{x} \log x\end{aligned}$$

となって, $\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x} \log x)$ を得る.

(ii) 以下の補題 2.3 において, $y = 3/2$, $f(t) = 1/\log t$,

$$a(n) = \begin{cases} \log p & n = p \text{ (素数)}, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とすればよい. その際, $x < 2$ に対して $\vartheta(x) = 0$ なので, 積分区間の下端は 2 として問題ない. $\square$

補題 2.3 (Abel の総和公式, 部分和公式) 数論的関数 $a(n)$ に対して, $A(x) := \sum_{n \leq x} a(n)$ とする. 関数 f が区間 $[y, x]$ ($0 < y < x$) で連続微分可能なとき, 次が成り立つ.

$$\sum_{y < n \leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t) dt. \quad (2.4)$$

証明 ([1]などを参照) $a(n) = A(n) - A(n-1)$ と表せることに注意すれば,

$$\begin{aligned}\sum_{y < n \leq x} a(n)f(n) &= \sum_{y < n \leq x} (A(n) - A(n-1))f(n) \\ &= \sum_{y < n \leq x} A(n)f(n) - \sum_{y-1 < n \leq x-1} A(n)f(n+1) \\ &= -A([y])f([y]+1) + A([x])f([x]) \\ &\quad + \sum_{[y]+1 \leq n \leq [x]-1} A(n)(f(n) - f(n+1)).\end{aligned} \quad (2.5)$$

ここで $[x]$ はガウス記号である. $n \leq t < n+1$ に対して, $A(t) = A(n)$ なので,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{[y]+1 \leq n \leq [x]-1} A(n)(f(n) - f(n+1)) \\
 &= - \sum_{[y]+1 \leq n \leq [x]-1} A(n) \int_n^{n+1} f'(t) dt \\
 &= - \sum_{[y]+1 \leq n \leq [x]-1} \int_n^{n+1} A(t) f'(t) dt \\
 &= - \int_{[y]+1}^{[x]} A(t) f'(t) dt.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

同様にして,

$$A([y])(f(y) - f([y]+1)) = - \int_y^{[y]+1} A(t) f'(t) dt, \tag{2.7}$$

$$A([x])(f([x]) - f(x)) = - \int_{[x]}^x A(t) f'(t) dt. \tag{2.8}$$

(2.6), (2.7), (2.8) を (2.5) に適用することで, 補題 2.3 を得る. $\square$

命題 2.2 で $\pi(x)$ と $\vartheta(x)$, $\psi(x)$ の関係をまとめた. 次は, 以下に述べる $\psi(x)$ の漸近等式から, 素数定理 ($\pi(x)$ の漸近等式) がどのように導かれるのかをまとめていく.

命題 2.4 ある正定数 C_3 が存在して,

$$\psi(x) = x + O(x \exp(-C_3 \sqrt{\log x})) \quad (x \rightarrow \infty). \tag{2.9}$$

素数定理 (1.1) の証明 命題 2.4 が成り立つとすると, (2.2) より,

$$\vartheta(x) = x + O(x \exp(-C_3 \sqrt{\log x})).$$

これを (2.3) に適用することで,

$$\begin{aligned}
 \pi(x) &= \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x \exp(-C_3 \sqrt{\log x})}{\log x}\right) \\
 &\quad + \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} + O\left(\int_2^x \frac{\exp(-C_3 \sqrt{\log t})}{\log^2 t} dt\right) \\
 &= \text{Li}(x) + O(x \exp(-C_3 \sqrt{\log x}))
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

を得る. ここで, (2.10) の計算・評価には, (1.2) および

$$\begin{aligned}
 \int_2^x \frac{\exp(-C_3\sqrt{\log t})}{\log^2 t} dt &= \left(\int_2^{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^x \right) \frac{\exp(-C_3\sqrt{\log t})}{\log^2 t} dt \quad (2.11) \\
 &\ll \int_2^{\sqrt{x}} dt + \frac{\exp(-C_3\sqrt{\log \sqrt{x}})}{\log^2 \sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^x dt \\
 &\ll \sqrt{x} + \frac{x \exp(-C_3\sqrt{\log \sqrt{x}})}{\log^2 x} \\
 &\ll x \exp(-C_1\sqrt{\log x})
 \end{aligned}$$

($C_1 = C_3/\sqrt{2}$ とおいた) を用いた. $\square$

以上より, 素数定理 (1.1) を完全に証明するためには, 命題 2.4 を証明すればよいことがわかった. また, (1.1) の誤差項は (2.9) から来ていることにも着目しよう. この誤差項の評価には $\zeta(s)$ の非零領域の情報や $(\zeta'/\zeta)(s)$ の評価が用いられる. Riemann ゼータ関数の挙動を解析することが素数分布の理解に繋がっているのであって, そのような視点から (2.9) の証明を見るのが大切になる.

3 Riemann ゼータ関数

前節より, 素数定理 (1.1) の証明は命題 2.4 を証明することに集約された.

命題 2.4 (再掲) ある正定数 C_3 が存在して,

$$\psi(x) = x + O(x \exp(-C_3\sqrt{\log x})) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (2.9)$$

命題 2.4 は, $\psi(x)$ の積分公式と Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の解析的性質を用いて証明される. 本節では命題 2.4 の証明に必要な Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の諸性質をまとめる.

Riemann ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

は $\Re s > 1$ において広義一様に絶対収束する. また, 無限積表示

$$\zeta(s) = \prod_{p: \text{素数}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

を持ち, $\Re s > 1$ に対して広義一様に絶対収束する (これは $\Re s > 1$ において $\zeta(s)$ が非零であることを述べている). 無限積表示から, $\Re s > 1$ において,

$$\log \zeta(s) = - \sum_{p: \text{素数}} \log(1 - p^{-s}) = \sum_{p: \text{素数}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}$$

(枝は s が実数の時に $\log \zeta(s)$ も実数となるものを選ぶ) を得る ($\log \zeta(s)$ の詳細は [1, §11.9]などを参照). また, $\log \zeta(s)$ も $\Re s > 1$ において広義一様に絶対収束するので, 項別に微分することで,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = - \sum_{p: \text{素数}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^{ms}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad (\Re s > 1) \quad (3.1)$$

が得られる.

式 (3.1) により, 係数部に $\Lambda(n)$ が現れる Dirichlet 級数は, Riemann ゼータ関数を用いて表現できることがわかった. 次節以降では, (3.1) を用いて $\psi(x)$ の積分公式を示し, そしてその積分公式を用いて命題 2.4 を証明していく. その際, 以下の Riemann ゼータ関数の解析的性質が重要になる.

定理 3.1 ($\zeta(s)$ の非零領域) 正定数 C_2 が存在して, 領域

$$\{s = \sigma + it \mid \sigma \geq 1 - C_2(\log(|t| + 2))^{-1}, t \in \mathbb{R}\} \quad (3.2)$$

において, $\zeta(s) \neq 0$ となる.

定理 3.2 ($(\zeta'/\zeta)(s)$ の評価) 正定数 C_4 ($< C_2$) が存在して, 領域

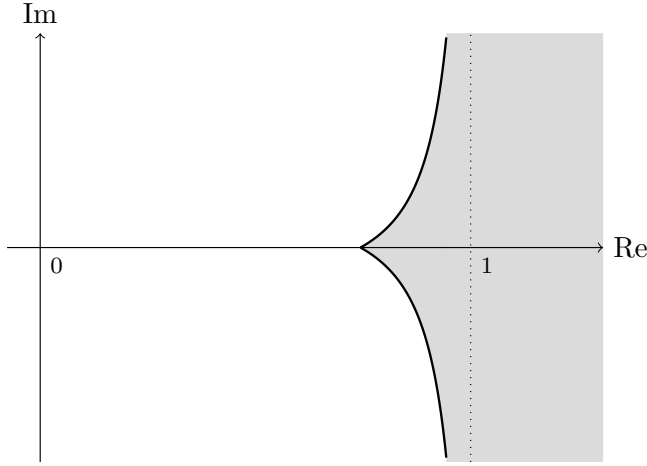
$$\{s = \sigma + it \mid \sigma \geq 1 - C_4(\log(|t| + 2))^{-1}, t \in \mathbb{R}\}$$

において,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = O(\log(|t| + 2)) \quad (3.3)$$

が成り立つ. ただし, $s = 1$ の近傍を除く.

定理 3.1 と 3.2 は Riemann ゼータ関数の非零領域のレクチャーで詳しく解説される. 非零領域 (3.2) については, 図 1 を参照されたい. 本稿では, この 2 つの定理を仮定して命題 2.4 の証明を述べる.

図 1 $\zeta(s)$ の非零領域

4 $\psi(x)$ の積分公式

Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ を用いた $\psi(x)$ の漸近等式の証明を目指しているわけだが、ここでは $\zeta(s)$ と $\psi(x)$ がどのように繋がっていくのかをまとめていく。Dirichlet 級数 $\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)/n^s$ とするとき、ある積分を通じて、 $\alpha(s)$ からその係数の部分 and $\sum_{n \leq x} a(n)$ の情報を取り出すことができる (Perron の公式と呼ばれる)。次に述べる $\psi(x)$ の積分公式が、 $a(n)$ が $\Lambda(n)$ の場合の Perron の公式である。

定理 4.1 $x \geq 2, T > 0, c = 1 + 1/\log x$ に対して、

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) \frac{x^s}{s} ds + O(T^{-1}x \log^2 x) + O(\log x). \quad (4.1)$$

まずは、次の補題を用いて定理 4.1 が導かれることを示す。

補題 4.2 $c, y, T > 0$ に対して、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds = \begin{cases} 1 + O(y^c \min\{1, T^{-1}|\log y|^{-1}\}) & y > 1 \\ \frac{1}{2} + O(cT^{-1}) & y = 1 \\ O(y^c \min\{1, T^{-1}|\log y|^{-1}\}) & 0 < y < 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

補題 4.2 の積分区間を $T \rightarrow \infty$ とした形 (例えば, [1, §11.12]) もあるが, ここでは T で止めた形にしていることが重要であって, 後々, 定理 4.1 を T に関する挙動も含めて扱うことになる.

定理 4.1 の証明 $c = 1 + 1/\log x$ とするとき, $-(\zeta'/\zeta)(s)$ は, $\Re s = c$ 上で絶対収束するので項別に積分して, 補題 4.2 を適用することで,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) \frac{x^s}{s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{(x/n)^s}{s} ds \\ &= \sum'_{n \leq x} \Lambda(n) + O \left(\sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \neq x}} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n} \right)^c \min\{1, T^{-1} |\log(x/n)|^{-1}\} \right) \\ & \quad + O(cT^{-1} \log x). \end{aligned} \tag{4.3}$$

ここで $\sum'_{n \leq x}$ は, x が整数のときは最後の項を $1/2$ 倍することを表す. $\Lambda(n) = O(\log n)$ に注意すれば, $\psi(x)$ との誤差は

$$\sum'_{n \leq x} \Lambda(n) = \psi(x) + O(\log x). \tag{4.4}$$

したがって, (4.3) の誤差項が $O(T^{-1} x \log^2 x) + O(\log x)$ であれば, (4.1) が得られることがわかる. では, その誤差項を評価していこう. $s = 1$ の近傍では

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{1}{s-1} - \gamma + O(|s-1|) \tag{4.5}$$

(γ は Euler 定数) なので, $x^c(\zeta'/\zeta)(c) \ll x \log x$ であることに注意する. これは (4.3) の誤差項において, $\min\{\dots\}$ の部分で仮に 1 を採用した場合の評価に対応しているが, 我々が期待している $\psi(x)$ の漸近展開の誤差項の評価としては大きく, 不適当である ($\psi(x) \sim x$ を目指しているので, 誤差項は x よりも小さくなるように評価したい). 一方, $|\log(x/n)|^{-1}$ は, n が x に近いときは大きくなるが, それ以外は小さく評価できる. これらの点を考慮して, 誤差項の級数部を 3 パートに分けて評価していく. まず, $n \leq x/2$ および $n \geq 3x/2$ の項では $|\log(x/n)|^{-1} \ll 1$ であって, (4.5) に注意すると,

$$\frac{x^c}{T} \sum_{n \leq x/2, n \geq 3x/2} \frac{\Lambda(n)}{n^c} \frac{1}{|\log(x/n)|} \ll \frac{x^c}{T} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(c) \right) \ll \frac{x \log x}{T}.$$

次に, $x/2 < n \leq x-2$ の項を考える. $m = [x] - n$ とおくと,

$$\log \frac{x}{n} = \log \frac{x}{[x] - m} \geq \log \frac{x}{x - m} = -\log \left(1 - \frac{m}{x}\right) \geq \frac{m}{x}$$

より,

$$\begin{aligned} \frac{x^c}{T} \sum_{x/2 < n \leq x-2} \frac{\Lambda(n)}{n^c} \left| \log \left(\frac{x}{n} \right) \right|^{-1} &\ll \frac{x^c}{T} \sum_{x/2 \leq n < x-2} \frac{\log x}{x^c} \left| \log \left(\frac{x}{n} \right) \right|^{-1} \\ &= \frac{\log x}{T} \sum_{2 \leq m < x/2} \left| \log \left(\frac{x}{[x] - m} \right) \right|^{-1} \\ &\leq \frac{\log x}{T} \sum_{2 \leq m < x/2} \frac{x}{m} \ll \frac{x \log^2 x}{T}. \end{aligned}$$

同様に $x+2 \leq n < 3x/2$ の項も評価できる. 残りの $x-2 < n < x+2$ の項は, $\Lambda([x]) \ll \log x$ であるから $O(\log x)$ と評価できる. 以上より, (4.3) の誤差項の評価は $O(T^{-1}x \log^2 x) + O(\log x)$. したがって, (4.3) とその誤差項の評価および (4.4) を組み合わせることで (4.1) を得る. $\square$

補題 4.2 の証明を述べる.

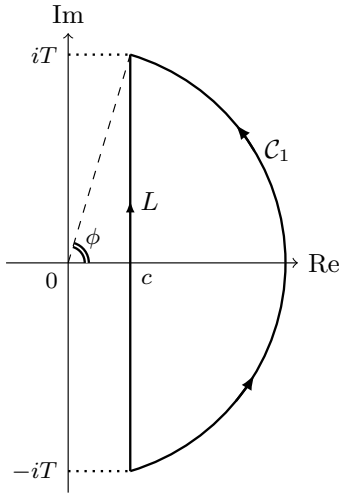
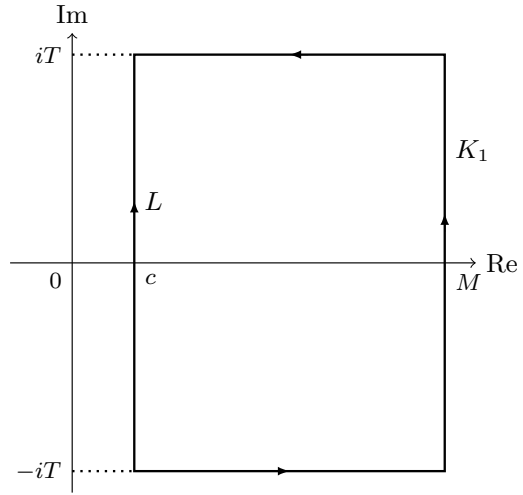
補題 4.2 の証明 積分経路を変形して計算する. 点 $c-iT$ から $c+iT$ へ向かう直線の経路を L で表す. また, 原点中心, 半径 $\sqrt{c^2 + T^2}$ の円周を $\mathcal{C}$ で表し, $\phi := \tan^{-1}(T/c)$ とおく.

まずは $0 < y < 1$ の場合を考える. 図 2 のように, L よりも右側の $\mathcal{C}$ に沿って, 点 $c-iT$ から $c+iT$ へ向かう経路を C_1 で表す. また, 十分大きな正の実数 M に対して, 点 $c-iT$ から出発して, $M-iT$, $M+iT$, $c+iT$ を順に直線で結んでできる折れ線の経路を K_1 で表す (図 3 参照). 積分路 L & C_1 および L & K_1 の内部で被積分関数 y^s/s は正則なので,

$$\int_L \frac{y^s}{s} ds = \int_{C_1} \frac{y^s}{s} ds = \int_{K_1} \frac{y^s}{s} ds$$

である. C_1 上では $|y^s| = y^{\Re s} \leq y^c$ ($0 < y < 1$ なので) であることに注意すると,

$$\left| \int_{C_1} \frac{y^s}{s} ds \right| \leq \int_{-\phi}^{\phi} y^c d\theta \ll y^c. \quad (4.6)$$

図2 経路 L & C_1 図3 経路 L & K_1

また、積分路 K_1 上では、虚軸と並行な線路上において

$$\left| \int_{M-iT}^{M+iT} \frac{y^s}{s} ds \right| \leq \int_{-T}^T \frac{y^M}{|M+it|} dt \leq \frac{y^M}{M} (2T) \rightarrow 0 \quad (M \rightarrow \infty)$$

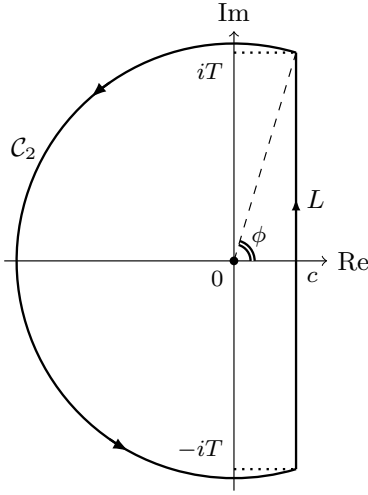
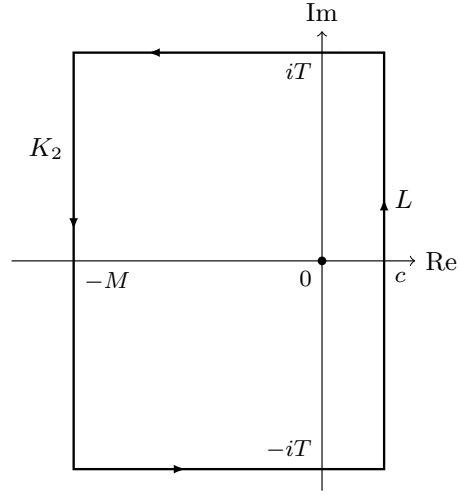
であり、残りの実軸と並行な積分路上においても $M \rightarrow \infty$ として、

$$\left| \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds \right| \leq \int_c^\infty \frac{y^\sigma}{|\sigma-iT|} d\sigma < \frac{1}{T} \int_c^\infty y^\sigma d\sigma = \frac{y^c}{T|\log y|} \quad (4.7)$$

が得られる。もう一方の積分路についても同様である。したがって、(4.6) と (4.7) より $0 < y < 1$ における評価が得られる。

次に $y > 1$ の場合を考える。図4のように、 L よりも左側の C に沿って、点 $c + iT$ から $c - iT$ へ向かう経路を C_2 で表す。また、十分大きな正の実数 M に対して、点 $c + iT$ から出発して、 $-M + iT$, $-M - iT$, $c - iT$ を順に直線で結んでできる折れ線の経路を K_2 で表す (図5 参照)。被積分関数 y^s/s は $s = 0$ に1位の極を持ち、その留数は1だから、

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_L + \int_{C_2} \right) \frac{y^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_L + \int_{K_2} \right) \frac{y^s}{s} ds = 1. \quad (4.8)$$

図4 経路 L & C_2 図5 経路 L & K_2

前の場合と同様にして, C_2 上では $|y^s| = y^{\Re s} \leq y^c$ ($y > 1$ なので) に注意して,

$$\left| \int_{C_2} \frac{y^s}{s} ds \right| \leq \int_{\phi}^{2\pi-\phi} y^c d\theta \ll y^c. \quad (4.9)$$

また, 積分路 K_2 においても, 虚軸と並行な線路上においては

$$\left| \int_{-M+iT}^{-M-iT} \frac{y^s}{s} ds \right| \leq \int_{-T}^T \frac{y^{-M}}{|-M+it|} dt \leq (2T) \frac{y^{-M}}{M} \rightarrow 0 \quad (M \rightarrow \infty)$$

である. 残りの実軸と並行な線路上の積分も $M \rightarrow \infty$ として,

$$\left| \int_{c+iT}^{-\infty+iT} \frac{y^s}{s} ds \right| < \frac{1}{T} \int_{-\infty}^c y^{\sigma} d\sigma = \frac{1}{T} \frac{y^c}{\log y}. \quad (4.10)$$

もう一方も同様である. (4.8), (4.9), (4.10) より, $y > 1$ における評価が得られる.

最後に, $y = 1$ のときは直接計算することで,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{ds}{s} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{c-it}{c^2+t^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{T/c} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_{T/c}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} + O(cT^{-1}). \end{aligned}$$

□

注意 4.3 補題 4.2 の証明において, 我々は y の値に応じて積分路を変えて計算していた. この経路は積分の寄与が小さくなるように選ばれている. 積分路を左右逆転させると, 例えば $y > 1$ のとき, K_1 上の積分の評価は M の増大とともに非常に大きくなるのがわかる.

5 命題 2.4 の証明 ～素数定理の証明～

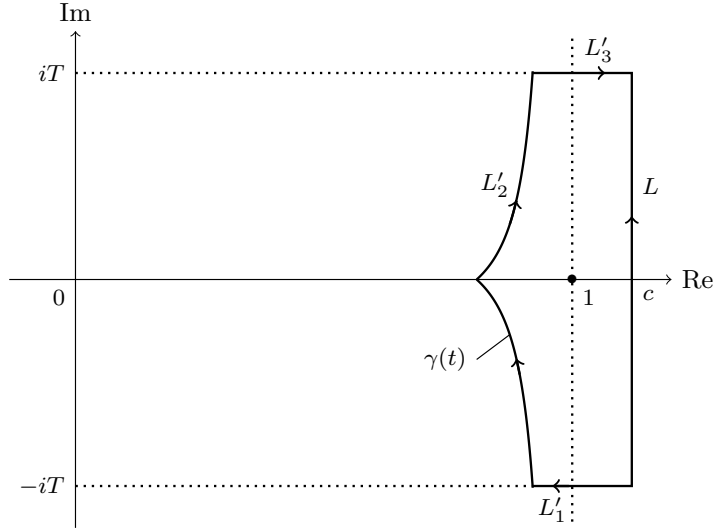
前節では $\psi(x)$ の積分公式を得た. 素数定理の証明のコアである $\psi(x)$ の漸近等式 (2.9) を導くには, $\psi(x)$ の積分公式の右辺から (2.9) の主要項「 x 」を導き出さなければならない. そのために, 我々は (4.1) の積分の積分路を複素数平面の左側へと変形して留数解析を行うわけだが, 今のところ被積分関数の $(\zeta'/\zeta)(s)$ は, $\Re s > 1$ で定義されているため, $\Re s = 1$ より左側の領域へと解析接続しなければならない. このとき, 臨界領域 ($0 < \Re s < 1$) における $\zeta(s)$ の性質に関する定理 3.1 と定理 3.2 が重要な役割を担う.

定理 3.2 の定数 C_4 を用いて $\gamma(t) = 1 - C_4(\log(|t| + 2))^{-1} + it$ ($|t| \leq T$) とし, 領域 (3.2) 内の曲線を表すことにする. また, $c - iT$ から左へ $\gamma(-T)$ が表す点まで水平に進み, $\gamma(-T)$ から $\gamma(t)$ が表す曲線に沿って $\gamma(T)$ まで移動し, 最後に $\gamma(T)$ から右へ $c + iT$ まで水平に進む経路を L' とする (図 6 参照). このとき, 定理 3.1 より, 積分路 L & L' 上およびその内部において $(\zeta'/\zeta)(s)$ は $s = 1$ に 1 位の極をもち, それを除いて正則であることに注意する.

(4.5) より, (4.1) の非積分関数の $s = 1$ での留数は x なので, 留数定理より,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) \frac{x^s}{s} ds = x + \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) \frac{x^s}{s} ds \quad (5.1)$$

となる. このとき, 留数から主要項に当たる「 x 」が得られたことに注意する. あとは右辺の積分が x よりも小さく評価できればよい. L' の実軸と並行な部分を L'_1, L'_3 と

図 6 経路 L & L'

し, $\gamma(t)$ が表す曲線部分を L'_2 とおく. L'_1 における積分は, 定理 3.2 より,

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{L'_1} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) \frac{x^s}{s} ds \right| \\
 & \leq \int_{1-C_4(\log(T+2))^{-1}}^c \left| -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT) \right| \frac{x^\sigma}{|\sigma + iT|} d\sigma \\
 & \ll \frac{\log T}{T} x^c \int_{1-C_4(\log(T+2))^{-1}}^c d\sigma \ll \frac{\log T}{T} x.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

L'_3 における積分も同様の評価である. L'_2 における積分は, 再び定理 3.2 より,

$$\int_{L'_2} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) \frac{x^s}{s} ds \ll \int_{-T}^T \log(|t| + 2) x^{1-C_4(\log(|t|+2))^{-1}} \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)|} dt. \tag{5.3}$$

L'_2 上では $1/|\gamma(t)| \ll 1/(|t| + 2)$, $|\gamma'(t)| \ll 1$ であり,

$$x^{1-C_4(\log(|t|+2))^{-1}} = x \exp \left(-C_4 \frac{\log x}{\log(|t| + 2)} \right) \leq x \exp \left(-C_4 \frac{\log x}{\log(T + 2)} \right)$$

なので, (5.3) は,

$$\begin{aligned} &\ll x \exp\left(-C_4 \frac{\log x}{\log(T+2)}\right) \int_{-T}^T \frac{\log(|t|+2)}{|t|+2} dt \\ &\ll x \exp\left(-C_4 \frac{\log x}{\log(T+2)}\right) \log^2(T+2). \end{aligned} \quad (5.4)$$

したがって, $\psi(x)$ の積分公式 (4.1) に, (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) を適用することで次を得る.

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x + O\left(x \frac{\log T}{T}\right) + O\left(x \exp\left(-C_4 \frac{\log x}{\log(T+2)}\right) \log^2(T+2)\right) \\ &\quad + O(T^{-1} x \log^2 x) + O(\log x). \end{aligned} \quad (5.5)$$

最後に T を適切に設定して (5.5) の誤差項をまとめる. というのも, (5.5) は T が増大するとき, 誤差項の第 1 項と第 3 項は減少するのに対して, 第 2 項は増大するという構図になっている. 誤差項としては, これらのバランスが取れている時が最適なのであって, 今の場合は $T^{-1} = \exp(-\log x / \log T)$ (整理すると $\log T = \sqrt{\log x}$) と設定するのが適当である. このとき, (5.5) の誤差項の第 1 項と第 3 項は, 合わせて $O(x \exp(-\sqrt{\log x})(\log x)^2)$ となる. 誤差項の第 2 項は, ある正定数 $C(< 1)$ で,

$$\frac{\log x}{\log(T+2)} \geq \frac{\log x}{\log T} C$$

とできるので, C_4 より小さい適当な正定数 C_5 を用いて, $O(x \exp(-C_5 \sqrt{\log x}) \log x)$ と評価できる. さらに, 正定数 a, A, A' ($A' < A$) に対して

$$\begin{aligned} &\exp(-A \sqrt{\log x})(\log x)^a \\ &= \exp(-A \sqrt{\log x}) \cdot \exp(a \log \log x) \\ &= \exp(-(A - A') \sqrt{\log x}) \cdot \exp(-A' \sqrt{\log x} + a \log \log x) \\ &\ll \exp(-(A - A') \sqrt{\log x}) \end{aligned}$$

であることに注意すれば, $C_3 < \min\{1, C_5\}$ を満たす適当な正定数 C_3 を用いることで, (5.5) の誤差項全体は, $O(x \exp(-C_3 \sqrt{\log x}))$ と評価できる. 以上より, 命題 2.4 が証明された.

本節における積分の評価には, 臨界領域 ($0 < \Re s < 1$) における $\zeta(s)$ の非零領域からの寄与があった. 例えば, (5.3) にある $x^{1-(C_4 \log(T+2))^{-1}}$ は, 非零領域をさらに左

側へと拡張できれば、その分、小さく評価できそうである。素数定理の誤差項をより精度良く評価することは、素数の分布を理解する上で重要なのであって、 $\zeta(s)$ の非零領域の追究が素数分布の理解と密接に関係している。

謝辞

本稿作成にあたり、岩手大学の川田浩一教授からたくさんのご支援を賜りました。ここに深く感謝申し上げます。

参考文献

- [1] T. M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Springer, New York (1976).
- [2] H. Davenport, Multiplicative Number Theory, Markham (1967), 2nd edition, Revised by H. L. Montgomery, Springer, New York (1980).
- [3] A. E. Ingham, The Distribution of Prime Numbers, Cambridge Mathematical Library (1932).
- [4] 松本耕二, リーマンのゼータ関数, 朝倉書店 (2005).
- [5] E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-function, Oxford University Press (1951), 2nd edition, Revised by D. R. Heath-Brown, Oxford University Press (1987).

ゼータ関数の非零領域

武田 渉（東邦大学理学部）

概要

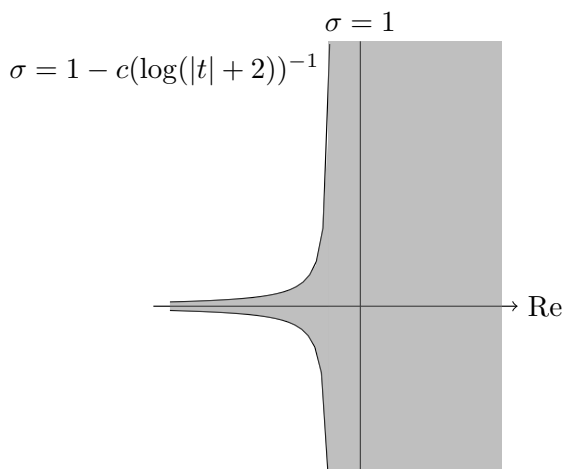
Riemann ゼータ関数を用いた素数定理の証明には Riemann ゼータ関数の解析的な性質がとても重要な役割を果たしていた．本稿の前半では素数定理の証明のカギとなる定理を 2 つ証明する．また, Riemann ゼータ関数の代数体への一般化である Dedekind ゼータ関数についても類似の問題を考えることができるため, それらについても紹介する．

1 Riemann ゼータ関数の評価とその一般化の概要

本稿は 2025 年度 (第 32 回) 整数論サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」における著者の同名講演の報告である．本稿では [3] において, 認めていた以下の 2 つの定理の証明を行う．定理について説明する前に, 重要な領域を以下で定義する．

$$D(c) = \left\{ s = \sigma + it \mid \sigma \geq 1 - \frac{c}{\log(|t| + 2)} \right\}.$$

図示すると以下の灰色で塗られた領域である．



この定義にも使っているが本稿を通して, $s \in \mathbb{C}$ とし, $\sigma = \operatorname{Re}(s), t = \operatorname{Im}(s)$ とする.

定理 1.1 (Riemann ゼータ関数の非零領域 (zero-free region)) ある定数 $c_2 > 0$ が存在して, $D(c_2)$ において, $\zeta(s) \neq 0$ となる.

定理 1.2 (Riemann ゼータ関数の対数微分の評価) 定理 1.1 と同じ c_2 を取る. このとき, ある定数 $(c_2 >)c_4 > 0$ が存在して, $D(c_4)$ から $s = 1$ の近傍 (例えば, 半径 10^{-4} の円盤) を除いた領域において,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = O(\log(|t| + 2)) \quad (|s| \rightarrow \infty)$$

が成立する.

また, これらを代数体のゼータ関数である Dedekind ゼータ関数 ζ_K について考えたときの結果についても紹介する. 具体的には以下の結果を示す.

定理 1.3 (Dedekind ゼータ関数の非零領域) ある $c > 0$ が存在して,

$$\left\{ s = \sigma + it \left| |t| \geq \frac{1}{1 + 4 \log D} \text{ かつ } \sigma \geq 1 - \frac{c}{\log D + n \log(|t| + 2)} \right. \right\}$$

となる範囲で $\zeta_K(s) \neq 0$ となる. ここで D, n は代数体 K に対して決まる定数である. (5 章参照)

2 関数等式再掲

関数等式については [1] によって,

$$\zeta(s) = 2\Gamma(1-s) \sin \frac{\pi s}{2} (2\pi)^{s-1} \zeta(1-s) \quad (2.1)$$

が得られていた. これについてももう少し考える. まず, ガンマ関数の基本的な公式:

$$\Gamma(1-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad (2.2)$$

$$2^x \sqrt{\pi} \Gamma(1-x) = \Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{x}{2}\right) \quad (2.3)$$

より,

$$\sin \frac{\pi s}{2} = \frac{\pi}{\Gamma(1 - \frac{s}{2}) \Gamma(\frac{s}{2})} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1-s}{2})}{2^s \Gamma(1-s) \Gamma(\frac{s}{2})}.$$

を得る. それぞれ等号は, (2.2) を $x = \frac{s}{2}$, (2.3) を $x = s$ として用いるとわかる. この等式を (2.1) に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= 2\Gamma(1-s) \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1-s}{2})}{2^s \Gamma(1-s) \Gamma(\frac{s}{2})} (2\pi)^{s-1} \zeta(1-s) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \pi^{s-\frac{1}{2}} \zeta(1-s) \end{aligned}$$

となる. ここで, 両辺に $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})$ をかけると,

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma(\frac{1-s}{2}) \zeta(1-s)$$

を得る. この式は $s \longleftrightarrow 1-s$ で対応していることがわかるため, 以下の関数を定義するとその関係がより見やすい.

定義 2.1 (ξ 関数) (Riemann の) ξ 関数を

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s)$$

と定める. $\xi(s)$ は $\mathbb{C}$ 上正則であることもわかる.

ここで, $\frac{1}{2} s(s-1) = \frac{1}{2} (1-s)(1-s-1)$ に注意すると

$$\xi(1-s) = \xi(s) \tag{2.4}$$

が従う. これも Riemann ζ 関数の関数等式ということもあり, 本稿ではこれを関数等式と呼ぶ. 以下では ξ 関数について考えるために Γ 関数と ζ 関数の評価を与える.

定理 2.2 (Stirling の公式)

$$D_S = \left\{ s \in \mathbb{C} \mid |\arg s| \leq \frac{\pi}{2}, |s| \geq \frac{1}{10000} \right\}$$

とする. このとき, D_S 内で一様に

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2} \right) \log s - s + \log \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|s|}\right) \quad (|s| \rightarrow \infty)$$

が成立する. 特に $x > \frac{1}{10000}$ に対して、

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} \exp \left(\left(x - \frac{1}{2} \right) \log x - x \right) \left(1 + O \left(\frac{1}{x} \right) \right) \quad (x \rightarrow \infty)$$

が従う.

定理 2.2 と Cauchy の積分公式

$$f'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\xi)}{(\xi - s)^2} d\xi$$

を $f(s) = \log \Gamma(s) - (s - \frac{1}{2}) \log s + s - \log \sqrt{2\pi}$ に対して用いると以下の系を得る.

系 2.3 定理 2.2 と同じ D_S において、

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) = \log s - \frac{1}{2s} + O \left(\frac{1}{|s|^2} \right) \quad (|s| \rightarrow \infty)$$

が成立する. また, $\frac{1}{10000} < \sigma < 2$ において, ある定数 $A > 0$ が存在して,

$$\left| \operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) \right| < A \log(|t| + 2) \quad (2.5)$$

が従う.

注意 2.4 定理 1.1, 1.2 の c_2, c_4 は [3] から共通している定数であるが A は適当な大きい正の数 $A > 0$ の意味で使い, 多くの場合異なる値となる.

補題 2.5 $\sigma \geq \frac{1}{2}$ と $|s - 1| > \frac{1}{10000}$ に対して, $\zeta(s) \ll |s|$.

証明 まず適当な C^1 級関数 $f(x)$ に対して、

$$\begin{aligned} & \sum_{n \leq b} f(n) \\ &= \frac{f(1)}{2} + \int_1^b f(x) dx + \int_1^b \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx - \left(b - [b] - \frac{1}{2} \right) f(b) \end{aligned}$$

が成り立つことに注意する．これは部分積分を用いて，

$$\begin{aligned}
 & \int_1^b \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx \\
 &= \sum_{n=1}^{[b]-1} \int_n^{n+1} \left(x - n - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx + \int_{[b]}^b \left(x - [b] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{[b]-1} (f(n+1) + f(n)) + \frac{f([b])}{2} + \left(b - [b] - \frac{1}{2} \right) f(b) - \int_1^b f(x) dx \\
 &= \frac{f(1)}{2} + \sum_{2 \leq n \leq b} f(n) + \left(b - [b] - \frac{1}{2} \right) f(b) - \int_1^b f(x) dx
 \end{aligned}$$

であることから従う．いま， $f(x) = x^{-s}$ とすると，

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \leq b} \frac{1}{n^s} &= \frac{1}{2} + \int_1^b x^{-s} dx - s \int_1^b \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) x^{-s-1} dx - \left(b - [b] - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{b^s} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{b^{1-s} - 1}{1-s} - s \int_1^b \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) x^{-s-1} dx - \left(b - [b] - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{b^s}
 \end{aligned}$$

を得る．ここで， $b \rightarrow \infty$ の極限を考えると等式

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - s \int_1^\infty \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) x^{-s-1} dx$$

を $\sigma > 1$ において得る．ここで， $\left| x - [x] - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2}$ と評価できることに注意すると，右辺第 3 項は $\sigma > 0$ で収束することがわかる．よって，解析接続から，この等式は $\sigma > 0$ で成立する．ここで， $\sigma \geq \frac{1}{2}$ かつ $|s-1| > \frac{1}{10000}$ とすると，

$$\zeta(s) \ll |s| \int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}} \ll |s|$$

が従う． □

定義 2.6 (整関数の位数) $f(s)$ を整関数，つまり $\mathbb{C}$ 上で正則な関数とする．このとき，

$$\inf \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid f(s) = O(\exp(|s|^\alpha)) \quad (|s| \rightarrow \infty) \}$$

を整関数の位数という．

定理 2.7 ξ は位数 1 の整関数である.

証明 関数等式 (2.4) より, $\operatorname{Re}(s) \leq \frac{1}{2}$ に対しても同じ評価を得るため,

$$I := \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \xi(s) = O(\exp(|s|^\alpha)) \quad \left(|s| \rightarrow \infty, \operatorname{Re}(s) \geq \frac{1}{2} \right) \right\} = 1$$

であることを示せば十分である. ξ の定義を復習すると

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

である. まず, $I \geq 1$ であることを示す. $s = \sigma \geq \frac{1}{2}$ のとき, Stirling の公式より,

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{\sigma}{2}}\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) &= \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{\sigma}{2} \log \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \log \pi\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right) \\ &> \exp\left(\frac{\sigma}{3} \log \frac{\sigma}{2}\right) \end{aligned}$$

である. さらに, $\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)\zeta(\sigma) > 1$ が十分大きな $\sigma > 0$ で成立するため,

$$\xi(\sigma) \geq \exp\left(\frac{\sigma}{3} \log \frac{\sigma}{2}\right)$$

となり, $I \geq 1$ となる.

次に $I \leq 1$ を示す. まず, Stirling の公式から, $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \ll \exp(A|s| \log |s|)$ であり,

$$\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \ll |s|^2 \exp(A|s| \log |s|)$$

であることがわかる. ここで, 補題 2.5 より, $s = 1$ の近傍を除いた $\sigma \geq \frac{1}{2}$ において, $\zeta(s) \ll |s|$ であることから,

$$\xi(s) \ll |s|^3 \exp(A|s| \log |s|) \ll \exp(|s|^{1+\varepsilon})$$

となり, これは $I \leq 1$ であることを示す. よって, ξ は位数 1 の整関数である. $\square$

有限位数の整関数は Hadamard の分解定理を通して無限積展開できることが知られている. 具体的な Hadamard の分解定理の主張は述べないが以下の定理を得る.

定理 2.8 (Hadamard の分解定理の応用)

$$\xi(s) = e^{a+bs} \prod_{\rho} \left(\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} \right)$$

となる定数 a, b が存在する. ρ は $\xi(s)$ の零点を重複度を込めてわたる.

例 2.9 $\sin x$ も位数 1 の整関数であるため, Hadamard の分解定理を適用できる. $\sin x$ の零点は $x = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) であるため,

$$\sin x = x \prod_{n \neq 0} \left(\left(1 - \frac{x}{n\pi}\right) e^{\frac{x}{n\pi}} \right)$$

となる.

ここで $\xi(s)$ の定義から, $\xi(s)$ の零点の候補は $s(s-1)$ から $s = 0, 1$, $\zeta(s)$ から負の偶数点と非自明零点が考えられる. しかし, $s = 1$ は $\zeta(s)$ の 1 位の極であることと $s = 0, -2, -4, \dots$ は $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ の 1 位の極であることから, $\zeta(s)$ の非自明零点以外はすべて $\xi(s)$ の零点ではなく, 結局, $\xi(s)$ の零点は $\zeta(s)$ の非自明零点となる. 以上のことから,

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{2e^{a+bs}\pi^{-\frac{s}{2}}}{s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \prod_{\rho} \left(\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} \right) \\ &= \frac{e^{a+bs}\pi^{-\frac{s}{2}}}{(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \prod_{\rho} \left(\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

であり, ρ は $\zeta(s)$ の非自明零点を重複度を込めてわたる.

注意 2.10 $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\zeta'}{\zeta}(0) = \log 2\pi$ であることから,

$$a = \log \frac{1}{2}, \quad b = \log 2 + \frac{1}{2} \log \pi - 1 - \frac{\gamma}{2}$$

がわかる.

(2.6) の両辺を対数微分をすると,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = b + \frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right) + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \quad (2.7)$$

を得る. 系 2.3 より, $|s-1| \geq \frac{1}{10000}$, $-1 < \sigma < 2$ において,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) + O(\log(|t|+2))$$

が得られる. 特に, 以下の補題を得る.

補題 2.11 ある定数 $A > 0$ が存在して, $-1 < \sigma < 2$ かつ $|s-1| \geq \frac{1}{10000}$ に対して,

$$\operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \geq \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sigma-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) - A \log(|t|+2)$$

が成立する.

注意 2.12 (収束について) (2.7) に現れる非自明な零点の和の収束性は以下で確認できる. 十分大きな数 $R > 0$ と $|\rho| > 2R$ なる非自明零点 ρ と $|s| \leq R$ なる s について,

$$\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{1-\frac{s}{\rho}} + \frac{1}{\rho} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{\rho^{n+1}}$$

に注意すると

$$\left| \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s|^n}{|\rho|^{n+1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{|\rho|^{n+1}} \leq \frac{R}{|\rho|^2} \frac{1}{1-\frac{R}{|\rho|}} = \frac{2R}{|\rho|^2}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} \sum_{\rho} \left| \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right| &= \sum_{|\rho| \leq 2R} \left| \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right| + \sum_{|\rho| > 2R} \left| \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right| \\ &\leq \sum_{|\rho| \leq 2R} \left| \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right| + \sum_{|\rho| > 2R} \frac{2R}{|\rho|^2} \end{aligned}$$

がわかる. 位数が 1 であることから,

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^2} < \infty$$

となるため, 和は広義一様収束する. ちなみにこの収束に関しては [2] で得られる結果からも示すことができる.

3 非零領域の証明

この章では Riemann ゼータ関数の非零領域 (定理 1.1) の証明を与える. まず

$$\operatorname{Re} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{n^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} \cos(t \log n)$$

であることに注意する. ここで

$$3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta = 2(1 + \cos \theta)^2 \geq 0$$

であるため,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(-3 \frac{\zeta'}{\zeta}(s) - 4 \frac{\zeta'}{\zeta}(s + it) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s + 2it) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} (3 + 4 \cos(t \log n) + \cos(2t \log n)) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

が任意の $\sigma > 1, t \in \mathbb{R}$ で成立する. ここで, $\zeta(\rho_0) = 0$ なる $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ ($\gamma_0 > 0$) を一つ固定する. 補題 2.11 から

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i\gamma_0) \leq -\sum_{\rho} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sigma + i\gamma_0 - \rho} + \frac{1}{\rho} \right) + A \log(\gamma_0 + 2) \quad (3.2)$$

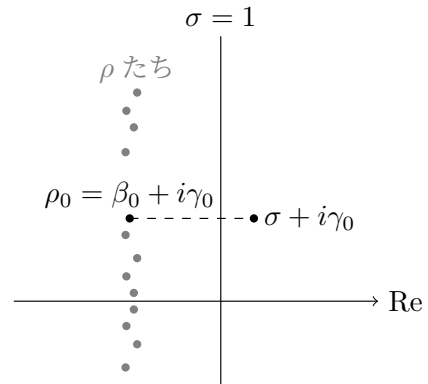
を得る.

ここで, $\sigma > 1$ と各零点 $\rho = \beta + i\gamma$ に対して

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sigma + i\gamma_0 - \beta - i\gamma} + \frac{1}{\beta + i\gamma} \right) \\ &= \frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + (\gamma_0 - \gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} > 0 \end{aligned}$$

であることから, (3.2) から, ρ_0 以外すべての項を取り除いて,

$$\begin{aligned} & -\operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i\gamma_0) \\ &< -\left(\frac{1}{\sigma - \beta_0} + \frac{1}{\beta_0 + i\gamma_0} \right) + A \log(\gamma_0 + 2) < -\frac{1}{\sigma - \beta_0} + A \log(\gamma_0 + 2) \end{aligned}$$



となる.

非自明零点の項はすべて取り除くことで,

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2i\gamma_0) < A \log(\gamma_0 + 2)$$

も分かる. また, [3, 式 (4.5)] で得られた評価から

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{1}{s-1} - \gamma + O(|s-1|)$$

であるため,

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) = \frac{1}{\sigma-1} + O(1) \quad (3.3)$$

が分かる. よって, (3.1) とこれらの評価を組み合わせると

$$\frac{3}{\sigma-1} - \frac{4}{\sigma-\beta_0} + O(1) + 2A \log(\gamma_0 + 2) > 0$$

となる. これまでの計算であらかじめ A を十分に大きくとっておくと

$$\frac{3}{\sigma-1} - \frac{4}{\sigma-\beta_0} + A \log(\gamma_0 + 2) > 0$$

が得られる. β_0 について解くように以下の通り計算をすると

$$\begin{aligned} \frac{4}{\beta_0 - \sigma} &> \frac{3}{\sigma - 1} - A \log(\gamma_0 + 2) \\ \beta_0 - \sigma &< \frac{4}{\frac{3}{\sigma-1} + A \log(\gamma_0 + 2)} \\ \beta_0 &< 1 + \sigma - 1 - \frac{3}{\frac{3}{\sigma-1} + A \log(\gamma_0 + 2)} \\ &= 1 - \frac{1 - A(\sigma - 1) \log(\gamma_0 + 2)}{\frac{3}{\sigma-1} + A \log(\gamma_0 + 2)} \end{aligned}$$

が得られる. ここで, $\sigma = 1 + (2A \log(\gamma_0 + 2))^{-1}$ とする. これは $\sigma > 1$ であることから問題はないことに注意. すると, $\zeta(\rho_0) = 0$ なる $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ に対して,

$$\beta_0 < 1 - \frac{1}{14A \log(\gamma_0 + 2)}$$

を得る. つまり,

$$\sigma \geq 1 - \frac{1}{14A \log(|t| + 2)}$$

には $\zeta(s) = 0$ となる点が存在しないことがわかり, Riemann ゼータ関数の非零領域を得る.

4 $\frac{\zeta'}{\zeta}$ の評価

この章ではもう一つの定理である定理 1.2 を示す. まず, Borel-Carathéodory の定理について紹介する.

定理 4.1 (Borel-Carathéodory の定理) $s_0 \in \mathbb{C}$ と $R > 0$ に対して, $f(s)$ を $|s - s_0| \leq R$ 内で正則な関数とする. また, 円周 $|s - s_0| = r$ ($r < R$) 上における $|f(s)|, \operatorname{Re}(f(s))$ の最大値を $M(r), N(r)$ とする. このとき,

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} N(r) + \frac{R+r}{R-r} |f(s_0)|$$

が成立する.

この帰結として, 以下の補題を得る.

補題 4.2 (cf. [4, 補題 4.1, 4.2]) 円板 $|s - s_0| < \frac{1}{2}$ 内において正則な関数 $f(s)$ が以下の仮定 1, 2 を満たすとする.

1. ある $t_0 = \operatorname{Im}(s_0)$ の関数 $M = M(t_0) > 1$ により

$$\frac{f(s)}{f(s_0)} = O(e^M), \quad \frac{f'(s)}{f(s_0)} = O(M)$$

と評価できる.

2. ある $0 < r < \frac{1}{16}$ が存在し, $|s - s_0| \leq \frac{1}{2}$ かつ $\operatorname{Re}(s) \geq \operatorname{Re}(s_0) - 2r$ であるとき, $f(s) \neq 0$ となる.

このとき, $|s - s_0| \leq r$ で

$$\frac{f'}{f}(s) = O(M)$$

が従う.

補題 4.2 を使って, 定理 1.2 を示す. まず, $|t_0| \geq 1$ である $t_0 \in \mathbb{R}$ をとり,

$$s_0 = 1 + \frac{c_2}{3 \log(|t_0| + 3)} + it_0$$

とする。このとき, (3.3) を用いると

$$\begin{aligned} \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s_0) \right| &\leq -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0) \quad (\sigma_0 = \operatorname{Re}(s_0)) \\ &\ll \frac{1}{\sigma_0 - 1} \ll \log(|t_0| + 3) \end{aligned}$$

が従う。最後の評価は σ_0 の定義から従う。一方, $|s - s_0| \leq \frac{1}{2}$ において $|\zeta(s)| \ll |t_0| + 3$ であり, Euler 積表示から,

$$\left| \frac{1}{\zeta(s_0)} \right| = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{\sigma_0}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}} \ll \frac{1}{\sigma_0 - 1} \ll \log(|t_0| + 3)$$

であるため,

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s_0)} \ll (|t_0| + 3) \log(|t_0| + 3) \ll \exp(A \log(|t_0| + 3))$$

が従う。ここで $M(t_0) = A \log(|t_0| + 3)$ とすれば補題 4.2 の仮定 1 が従う。

一方,

$$r = \frac{2}{3} \frac{c_2}{\log(|t_0| + 3)}$$

とする。このとき, c_2 を十分に小さくし, 改めて c_4 と書き直すことで $r < \frac{1}{16}$ とすることができる。このとき,

$$\sigma_0 - 2r = 1 + \frac{c_4}{3 \log(|t_0| + 3)} - \frac{4}{3} \frac{c_4}{\log(|t| + 3)} = 1 - c_4 \frac{1}{\log(|t| + 3)}$$

である。ここで, 非零領域 (定理 1.1) より,

$$\sigma > 1 - \frac{c_2}{\log(|t| + 2)}$$

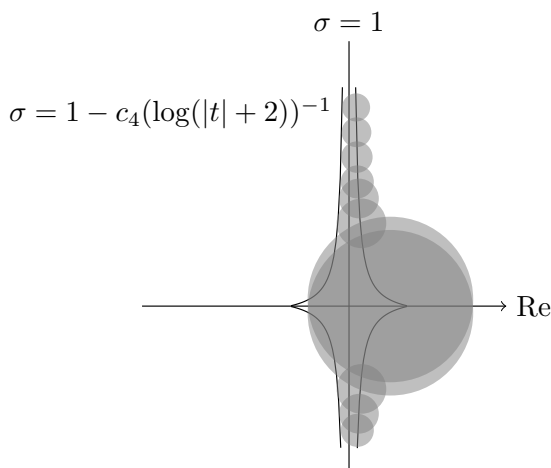
において, $\zeta(s) \neq 0$ であるが, $|s - s_0| \leq \frac{1}{2}$, $\sigma \geq 1 - \frac{c_2}{\log(|t| + 2)}$ を考えると

$$|t_0 + 3| \geq |t| + \frac{5}{2} > |t| + 2$$

から, $\sigma \geq \sigma_0 - 2r$ で $\zeta(\sigma_0) \neq 0$ である。よって, 補題 4.2 の仮定 2 も従う。以上より, $|s - s_0| \leq \frac{2}{3} \frac{c_4}{\log(|t| + 3)}$ において,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \ll \log(|t| + 3)$$

となる．上の評価が成り立つ円板をいくつか図示すると以下のとおりである．



以上より，定理 1.2，つまり，Riemann ゼータ関数の対数微分の評価が絶対収束領域より広い領域 $D(c_4)$ 内で得られた．

5 代数体への拡張

この章ではこれまでの結果を代数体のゼータ関数 (Dedekind ゼータ関数) について述べる．この章では K を代数体，つまり，有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次代数拡大体とする．また，拡大次数を $[K : \mathbb{Q}] = n$ とする．そして，

$$G = \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C}) = \{f : K \rightarrow \mathbb{C} \mid f(\alpha) = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Q}), f \text{ は体準同型}\}$$

とする．また， $f \in G$ のうち，実埋め込みの個数を n_1 個，虚埋め込みのペアの個数を n_2 組とする．つまり，

$$n_1 = \#\{f \in G \mid f(K) \subset \mathbb{R}\}, \quad n_2 = \frac{1}{2} \#\{f \in G \mid f(K) \not\subset \mathbb{R}\}$$

とする．ここで， $n = n_1 + 2n_2$ が成立することに注意する．そして， D を K の判別式の絶対値とする．

例 5.1 代数体の例として以下があげられる．

- $K = \mathbb{Q}$ のとき， $n = 1$ ， $n_1 = 1$ ， $n_2 = 0$ ， $D = 1$ である．
- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ のとき， $n = 2$ ， $n_1 = 2$ ， $n_2 = 0$ ， $D = 8$ である．

- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ のとき, $n = 2$, $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $D = 3$ である.

続いて, 代数体のゼータ関数を定義する準備を行う. まず, K の整数環は

$$\mathcal{O} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha \in K \mid f(\alpha) = 0 \text{ となる monic な } f(x) \in \mathbb{Z}[x] \text{ が存在} \}$$

と定義される. この環のイデアル $\mathfrak{a} (\subset \mathcal{O})$ に対して, そのノルム $\mathfrak{N}\mathfrak{a}$ を

$$\mathfrak{N}\mathfrak{a} \stackrel{\text{def}}{=} \#(\mathcal{O}/\mathfrak{a})$$

と定める. このとき, 代数体のゼータ関数は以下で定義される.

定義 5.2 (Dedekind ゼータ関数) 代数体 K とその整数環 $\mathcal{O}$ に対して,

$$\zeta_K(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}} \frac{1}{(\mathfrak{N}\mathfrak{a})^s}$$

と定義される. ここで和は $\mathcal{O}$ のゼロでないイデアル $\mathfrak{a} (\subset \mathcal{O})$ をすべてわたる. このとき, $\text{Re}(s) > 1$ で収束する.

Dedekind ゼータ関数は

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - (\mathfrak{N}\mathfrak{p})^{-s})^{-1} \quad (5.1)$$

という Euler 積表示をもつ. ここで積は $\mathcal{O}$ のゼロでない素イデアル $\mathfrak{p}$ をすべてわたる.

例 5.3 Dedekind ゼータ関数の具体例をいくつか挙げる.

- $K = \mathbb{Q}$ のとき, $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$ であり, そのイデアルは $(1), (2), (3), \dots, (n), \dots$ であり, $\mathfrak{N}(n) = n$ である. よって,

$$\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mathfrak{N}(n))^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$$

となる. つまり, Riemann ゼータ関数は有理数体 $\mathbb{Q}$ の Dedekind ゼータ関数とみなすことができる.

- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ のとき, $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ であり, そのイデアルは $(1), (1 + \sqrt{-1}), (2), (2 + \sqrt{-1}), (2 - \sqrt{-1}), \dots$ であり, $\mathfrak{N}(a + b\sqrt{-1}) = a^2 + b^2$ で

ある. よって,

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}} \frac{1}{(\mathfrak{N}\mathfrak{a})^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{2}{5^s} + \cdots$$

となる.

Riemann ゼータ関数と同じように Dedekind ゼータ関数も関数等式を満たすため, 最初にその準備を行う. ガンマ因子を

$$\gamma_K(s) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \right)^{r_2} \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right)^{r_1+r_2} \pi^{-\frac{ns}{2}}$$

と定めて, ξ 関数の代数体版を

$$\xi_K(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} s(s-1) D^{\frac{s}{2}} \gamma_K(s) \zeta_K(s)$$

と定める. このとき, 以下の関数等式が成り立つ.

定理 5.4 任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\xi_K(s) = \xi_K(1-s).$$

注意 5.5 $K = \mathbb{Q}$ のとき, $n = r_1 = 1, r_2 = 0, D = 1$ から,

$$\gamma_{\mathbb{Q}} = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \quad \xi_{\mathbb{Q}}(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \xi(s)$$

となり, (2.4) がそのまま表れる.

ここでは証明は述べないが事実をいくつかまとめる.

定理 5.6 以下が成立する.

- ξ_K は位数 1 の整関数.
- ζ_K の自明な零点の候補は非正整数のみである.
- ξ_K の零点は ζ_K の非自明な零点.

上の定理から, Hadamard の分解定理の特殊な場合をもちいると,

$$\begin{aligned} \xi_K(s) &= e^{a(K)+b(K)s} \prod_{\rho} \left(\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} \right) \\ \zeta_K(s) &= \frac{2e^{a(K)+b(K)s}}{s(s-1)D^{\frac{s}{2}}\gamma_K(s)} \prod_{\rho} \left(\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

を得る. ここで, ρ は $\zeta_K(s)$ の非自明零点を重複度を込めてわたる. ここで $\zeta_K(s)$ が実軸上で実の値をとり, 正則であることから, 鏡像の原理と合わせて,

$$\zeta_K(\rho) = 0 \implies \zeta_K(\bar{\rho}) = 0$$

が成立する. さらに関数等式から, $\zeta_K(\rho) = 0 \implies \zeta_K(1 - \rho) = 0$ も成立していたことに注意する. つまり, 以下の補題が成立する.

補題 5.7 $\zeta_K(\rho) = 0$ ならば, $\zeta_K(1 - \rho) = \zeta_K(\bar{\rho}) = \zeta_K(1 - \bar{\rho}) = 0$ が成立する.

いま,

$$\xi_K(s)^2 = e^{2a(K)+2b(K)s} \prod_{\rho} \left(\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \left(1 - \frac{s}{\bar{\rho}}\right) e^{\frac{s}{\rho} + \frac{s}{\bar{\rho}}} \right)$$

に対して, 対数微分すると,

$$2 \frac{\xi'_K}{\xi_K}(s) = 2b(K) + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{s - \bar{\rho}} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar{\rho}} \right)$$

を得る. ここで

$$\sum_{\rho} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar{\rho}} \right) = \sum_{\rho=\beta+i\gamma} \frac{2\beta}{\beta^2 + \gamma^2}$$

は絶対収束するため,

$$2 \frac{\xi'_K}{\xi_K}(s) = 2b(K) + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{s - \bar{\rho}} \right) + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar{\rho}} \right)$$

と分解できる. 一方,

$$2 \frac{\xi'_K}{\xi_K}(1 - s) = -2b(K) + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s - (1 - \rho)} + \frac{1}{s - (1 - \bar{\rho})} \right) - \sum_{\rho} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar{\rho}} \right)$$

であり, $2 \frac{\xi'_K}{\xi_K}(s) = 2 \frac{\xi'_K}{\xi_K}(1 - s)$ であるため,

$$4b(K)$$

$$= - \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{s - \bar{\rho}} \right) + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s - (1 - \rho)} + \frac{1}{s - (1 - \bar{\rho})} \right) - 2 \sum_{\rho} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar{\rho}} \right).$$

ここで, 補題 5.7 から, 最初 2 つの和は同じ和になるため,

$$b(K) = -\frac{1}{2} \sum_{\rho} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar{\rho}} \right), \quad \frac{\xi'_K}{\xi_K}(s) = \frac{1}{2} \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-\bar{\rho}} \right)$$

を得る. つまり, (5.2) の両辺を対数微分すると

$$\frac{\zeta'_K}{\zeta_K}(s) = \frac{1}{2} \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-\bar{\rho}} \right) - \frac{1}{2} \log D - \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} - \frac{\gamma'_K}{\gamma_K}(s) \quad (5.3)$$

となる.

補題 5.8 ある定数 $A > 0$ が存在して, $\frac{1}{8} < \sigma < 2$ に対して,

$$\left| \operatorname{Re} \frac{\gamma'_K}{\gamma_K}(s) \right| \leq An \log(|t| + 2)$$

が成立する.

証明 まず, 定義より,

$$\gamma_K(s) = \left(\pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma \left(\frac{s+1}{2} \right) \right)^{r_2} \left(\Gamma \left(\frac{s}{2} \right) \right)^{r_1+r_2} \pi^{-\frac{ns}{2}}$$

である. 両辺対数微分を取ると系 2.3 から,

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \frac{\gamma'_K}{\gamma_K}(s) \right| &= \left| \frac{r_2}{2} \operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s+1}{2} \right) + \frac{r_1+r_2}{2} \operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s}{2} \right) - \frac{n}{2} \log \pi \right| \\ &\leq A(r_1 + 2r_2) \log(|t| + 2) = An \log(|t| + 2) \end{aligned}$$

となり, 評価を得る. □

定理 (Dedekind ゼータ関数の非零領域 (定理 1.3)) ある $c > 0$ が存在して,

$$\left\{ s = \sigma + it \mid |t| \geq \frac{1}{1+4\log D} \text{ かつ } \sigma \geq 1 - \frac{c}{\log D + n \log(|t| + 2)} \right\}$$

となる範囲で $\zeta_K(s) \neq 0$ となる.

証明 まず, $\mathcal{O}$ のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して, $\Lambda_K(\mathfrak{a})$ を以下のように定義する.

$$\Lambda_K(\mathfrak{a}) = \begin{cases} \log(\mathfrak{N}\mathfrak{p}) & \text{ある } m \geq 1 \text{ と素イデアル } \mathfrak{p} \text{ が存在して } \mathfrak{a} = \mathfrak{p}^m, \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

と定める. このとき, [3, 式 (3.1)] を得る方法に倣い, Dedekind ゼータ関数の Euler 積 (5.1) を以下のように対数微分すると

$$\begin{aligned} -\log \zeta_K(s) &= \sum_{\mathfrak{p}: \text{素イデアル}} \log(1 - (\mathfrak{N}\mathfrak{p})^{-s}) = - \sum_{\mathfrak{p}: \text{素イデアル}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(\mathfrak{N}\mathfrak{p})^{ms}}, \\ -\frac{\zeta'_K}{\zeta_K}(s) &= \sum_{\mathfrak{p}: \text{素イデアル}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log(\mathfrak{N}\mathfrak{p})^m}{m(\mathfrak{N}\mathfrak{p})^{ms}} = \sum_{\mathfrak{p}: \text{素イデアル}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log(\mathfrak{N}\mathfrak{p})}{(\mathfrak{N}\mathfrak{p}^m)^s} = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}} \frac{\Lambda_K(\mathfrak{a})}{(\mathfrak{N}\mathfrak{a})^s} \end{aligned}$$

を得る. ここで, $\Lambda_K(\mathfrak{a}) \geq 0$ であることに注意すると $K = \mathbb{Q}$ と同じ議論により,

$$\operatorname{Re} \left(-3 \frac{\zeta'_K}{\zeta_K}(\sigma) - 4 \frac{\zeta'_K}{\zeta_K}(\sigma + i\tau) - \frac{\zeta'_K}{\zeta_K}(\sigma + 2i\tau) \right) \geq 0$$

が $\sigma > 1$ において成立する. ここで (5.3) から, $\zeta_K(s)$ の非自明な零点 $\rho = \beta_0 + i\gamma_0$ を 1 つ固定すると

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \left(-\frac{\zeta'_K}{\zeta_K}(\sigma + i\gamma_0) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\rho} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sigma + i\gamma_0 - \rho} + \frac{1}{\sigma + i\gamma_0 - \bar{\rho}} \right) + \frac{1}{2} \log D + An \log(|\gamma_0| + 2) \\ &\leq -\frac{1}{\sigma - \beta_0} + \frac{1}{2} \log D + An \log(|\gamma_0| + 2). \end{aligned}$$

となる. ここで, 不等式の部分は各零点 $\rho = \beta + i\gamma$ に対して,

$$-\operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sigma + i\gamma_0 - \rho} + \frac{1}{\sigma + i\gamma_0 - \bar{\rho}} \right) = \frac{\sigma - \beta}{|\sigma + i\gamma_0 - \rho|^2} + \frac{\sigma - \beta}{|\sigma + i\gamma_0 - \bar{\rho}|^2} > 0$$

であることに注意し, 非自明な零点の和から, $\rho = \beta_0 \pm i\gamma_0$ 以外の項を除いている. 他の 2 項に関しても同様に評価でき,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(-\frac{\zeta'_K}{\zeta_K}(\sigma + 2i\gamma_0) \right) &\leq \frac{1}{2} \log D + An \log(|\gamma_0| + 2), \\ \operatorname{Re} \left(-\frac{\zeta'_K}{\zeta_K}(\sigma) \right) &\leq \frac{1}{\sigma - 1} + \frac{A}{2} \log D + An \end{aligned}$$

が成立する. これらの評価を組み合わせ, あらかじめ A を十分大きくとっておくと,

$$\frac{3}{\sigma - 1} - \frac{4}{\sigma - \beta_0} + A(\log D + n \log(|\gamma_0| + 2)) > 0$$

を得る. 残りの計算は Riemann ゼータ関数の非零領域と同じであるため省略する. $\square$

注意 5.9 Dedekind ゼータ関数の非零領域は最近もいろいろな視点による研究がなされている. 1つの例として次のプレプリントがある [5]. こちらのプレプリントで引用されている文献などには非零領域や素数定理の類似の結果に対する応用が書かれている. 類似の研究が行われている一方で, 関数レベルの評価では Riemann ゼータ関数の非零領域のレベル (Korobov-Vinogradov の評価) までたどり着いていないこともわかる.

謝辞

2025 年度 (第 32 回) 整数論サマースクールの企画・運営をしていただいた世話人の鈴木正俊先生, 中村隆先生, 青木宏樹先生にこの場をお借りして御礼申し上げます. また, サポートスタッフの院生の方々にも感謝申し上げます. そして, 本稿の前の版に対して多くの有益なコメントを与えてくださった鈴木正俊先生, 佐々木義卓先生にも感謝申し上げます.

参考文献

- [1] 門田 慎也, Riemann ゼータ関数の基本的性質, 関数等式, 整数点での値, 本報告集 (2025)
- [2] 小林 弘京, Riemann ゼータ関数の零点の個数, Chebyshev の関数に対する明示公式, 本報告集 (2025)
- [3] 佐々木 義卓, 素数定理, 本報告集 (2025)
- [4] 松本 耕二, リーマンのゼータ関数, 朝倉書店 (2005)
- [5] S. Das, S. Gaba, E. S. Lee, A. Savalia, and P. J. Wong, New zero-free regions for Dedekind zeta-functions at small and large ordinates. arXiv preprint arXiv:2506.19319. (2025)

Riemann ゼータ関数の零点の個数, Chebyshev の関数に対する明示公式

小林 弘京 (水産大学校)

概要

本稿ではまず, 第 1 節にて Riemann ゼータ関数の零点の個数についての漸近式である, Riemann-von Mangoldt の公式の証明を行う. 次に, 第 2 節では, Riemann ゼータ関数の零点と, Chebyshev の関数とも呼ばれる $\psi(x)$ との関係を表す, 明示公式を証明する.

1 Riemann–von Mangoldt の公式

1.1 簡単な歴史と導入

Riemann の報文 [13] で言及されている結果の一つに, ζ 関数の零点の個数に関するものがある. 報文の中で彼は, $0 \leq \sigma \leq 1, 0 < t \leq T$ 内の ζ 関数の零点 (非自明零点) の個数は

$$\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$$

に漸近することを主張している. 彼は証明の大まかな方針は述べているものの, その詳細は省かれている. Riemann のこの主張を初めて厳密に証明したのは von Mangoldt [10] で, 1905 年のことである. その後, Backlund [1],[2] が証明の簡略化を行った.

さて, $T > 0$ が ζ 関数の零点の虚部と一致しないとき, $N(T)$ で $0 < \sigma < 1, 0 < t \leq T$ 内の ζ 関数の零点の重複度を込めた個数を表すものとする. なお, T が零点の虚部と一致する場合は $N(T) = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (N(T + \epsilon) + N(T - \epsilon))$ と定義しておく. なぜ $N(T)$ では長方形 $0 < \sigma < 1, 0 < t \leq T$ を考えるのか, σ の範囲が変わっていることにも注意しながらおさらいしておこう. まず, Euler 積によって, $\sigma > 1$ において ζ 関数は零点をもたないことがわかる. また, 素数定理の証明の過程

で示す通り, 直線 $\sigma = 1$ 上にも ζ 関数の零点は存在しない. さらに, 関数等式によって, $\sigma \leq 0$ においても自明零点を除いて ζ 関数の零点は存在しないことがわかる. 以上の考察から, ζ 関数の非自明零点の分布を調べる際には帯状領域 $0 < \sigma < 1$ に集中すれば良いことがわかるため, $N(T)$ の定義では $0 < \sigma < 1$ としている. この帯状領域 $0 < \sigma < 1$ を**臨界領域 (critical strip)** という. また, かの有名な Riemann 予想は, 全ての非自明零点が直線 $\sigma = \frac{1}{2}$ 上に存在するという予想だが, この直線 $\sigma = \frac{1}{2}$ を**臨界線 (critical line)** という. 次に, $0 < t \leq T$ と t が正の場合だけ考えている理由を簡単に整理する. まず, 関係式 $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\bar{s})$ が成立することが確かめられ (3.1 節参照), これによって, 零点が実軸を対称軸として線対称に分布していることがわかる (したがって, 関数等式と組み合わせることで, 臨界線を対称軸としても線対称に分布していることがわかる. 関数等式のみから言えることは, 零点が $s = \frac{1}{2}$ に関して点対称に分布していることだけである). さらに, $0 < \sigma < 1$ において ζ 関数は実零点をもたないことも確かめることができる (3.1 節参照). したがって, $0 < t \leq T$ の場合だけ考えれば十分である.

この節では, ζ 関数の非自明零点の分布に関する以下の三つの事実を証明する.

定理 1.1 $T \rightarrow \infty$ のとき,

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(T) + O(T^{-1})$$

が成り立つ. ここで, $S(T) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta(\frac{1}{2} + iT)$.

定理 1.2 $T \rightarrow \infty$ のとき,

$$S(T) \ll \log T.$$

系 1.3 $T \rightarrow \infty$ のとき,

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T) \quad (1.1)$$

が成り立つ.

特に式 (1.1) を指して Riemann–von Mangoldt の公式と呼ぶことも多い.

1.2 複素解析からの準備

まず念の為, 偏角の原理を紹介する.

補題 1.4 $D \subset \mathbb{C}$ を領域とする. f を D の閉包 $\overline{D}$ 上の有理型関数とし, D の境界 ∂D 上では零点も極ももたないとする. このとき, f の D 内の零点の個数を N , 極の個数を M とすると,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'}{f}(z) dz = N - M.$$

ここで, N と M は重複度を込めた個数である.

証明 有理型関数 f が $z = a$ で位数 k の零点をもつための必要十分条件は, 次の条件を満たす関数 $\tilde{f}$ が存在することであった:

- (1) $\tilde{f}$ は $z = a$ の近傍で正則.
- (2) $z = a$ の近傍で $f(z) = (z - a)^k \tilde{f}(z)$ が成立する.
- (3) $\tilde{f}(a) \neq 0$.

二番目の条件で k を $-k$ に変更すると, 位数 k の極をもつ必要十分条件になる. ここで, D 内にある f の相異なる零点を $a_1, a_2, \dots, a_n$ とし, それぞれの零点の位数を $k_1, k_2, \dots, k_n$ とする. 同様に, D 内にある f の相異なる極を $b_1, b_2, \dots, b_m$ とし, それぞれの極の位数を $l_1, l_2, \dots, l_m$ とする. 零点 $z = a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) の近傍では上記の $\tilde{f}$ として $\tilde{f}_i$ が存在し, 極 $z = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) の近傍では上記の $\tilde{f}$ として $\tilde{g}_i$ が存在するものとする. このとき, それぞれの零点の近傍に含まれ, 反時計回りに向き付けられた, 零点を囲う単純閉曲線を C_i とし, 同様にそれぞれの極を囲う単純閉曲線を C'_i とすると, Cauchy の積分定理から,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'}{f}(z) dz &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} \frac{f'}{f}(z) dz + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_i} \frac{f'}{f}(z) dz \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} \frac{k_i}{z - a_i} dz + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} \frac{\tilde{f}'_i}{\tilde{f}_i}(z) dz \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_i} \frac{l_i}{z - b_i} dz + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_i} \frac{\tilde{g}'_i}{\tilde{g}_i}(z) dz \end{aligned}$$

が成立する. ここで, 第 1 項と第 3 項はそれぞれ留数定理から

$$\sum_{i=1}^n k_i = N, \quad \sum_{i=1}^m l_i = M$$

であり, 第 2 項, 第 4 項は, 被積分関数が考えている領域で正則だから 0 である. $\square$

次に, Jensen の定理を紹介する.

補題 1.5 a を複素数とする. f は $|z-a| \leq R$ で正則であり, $z=a$ 及び $|z-a|=R$ 上で零点を持たないとする. $|z-a| \leq r$ における, $f(z)$ の零点の重複度も込めた個数を $n(r)$ と表すことにすると, 次が成り立つ:

$$\int_0^R \frac{n(r)}{r} dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta} + a)| d\theta - \log |f(a)|.$$

証明 $a=0$ の場合を示せば十分である. なぜなら, $g(z) := f(z+a)$ として $g(z)$ に定理を適用すれば良いからである.

まず, $|z| \leq R$ 内の零点は N 個存在するとする. さらにそれらを, その絶対値が小さい順に, $a_1, a_2, \dots$ とし, $r_n = |a_n|$ とする. このとき, 絶対値が同じものや重複零点も区別する. つまり, $a_i \neq a_{i+1}$ かつ $|a_i| = |a_{i+1}|$ といったものや $a_i = a_{i+1}$ といった場合もあるものとする.

$$\varphi(z) = \prod_{i=1}^N \frac{R^2 - \overline{a_i}z}{R(z - a_i)}$$

とおくと, $F(z) = f(z)\varphi(z)$ は $|z| \leq R$ で正則かつ $F(z) \neq 0$ だから, $\log F(z)$ は $|z| \leq R$ で正則. したがって, Cauchy の積分公式により,

$$\log F(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{\log F(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log F(Re^{i\theta}) d\theta.$$

よって, 実部をとると,

$$\log |f(0)| + \log |\varphi(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\varphi(Re^{i\theta})| d\theta.$$

ここで,

$$|\varphi(0)| = \prod_{i=1}^N \left| \frac{R}{a_i} \right| = \frac{R^N}{r_1 r_2 \dots r_N}$$

及び

$$|\varphi(Re^{i\theta})| = \prod_{i=1}^N \left| \frac{R - \overline{a_i}e^{i\theta}}{Re^{i\theta} - a_i} \right| = \prod_{i=1}^N \left| \frac{R - \overline{a_i}e^{i\theta}}{R - a_i e^{-i\theta}} \right| = 1$$

となるから,

$$\log \frac{R^N}{r_1 r_2 \dots r_N} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)|.$$

一方,

$$\begin{aligned}
 \int_0^R \frac{n(r)}{r} dr &= \sum_{i=1}^{N-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{n(r)}{r} dr + \int_{r_N}^R \frac{n(r)}{r} dr \\
 &= \sum_{i=1}^{N-1} n(r_i) \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{dr}{r} + n(r_N) \int_{r_N}^R \frac{dr}{r} \\
 &= \sum_{i=1}^{N-1} i(\log r_{i+1} - \log r_i) + N(\log R - \log r_N) \\
 &= \log \frac{R^N}{r_1 r_2 \dots r_N}
 \end{aligned}$$

だから, 主張を得る. □

1.3 零点

以下, ζ 関数の非自明零点を $\rho = \beta + i\gamma$ ($\beta, \gamma \in \mathbb{R}$) と書くこととする. Riemann-von Mangoldt の公式を示す前に, Jensen の定理を用いて零点分布に関する次の事実を示す.

補題 1.6 $T \rightarrow \infty$ のとき,

$$N(T+1) - N(T) \ll \log(T+2).$$

証明 まず, $n(r)$ を, $2 + iT$ を中心とする半径 r の円に含まれる $\zeta(s)$ の零点の個数としたとき, 初等幾何学的考察から

$$N(T+1) - N(T) \leq n(\sqrt{5})$$

であることがわかる. 実際, $2 + iT$ を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円は, 領域 $\{s = \sigma + it \mid 0 < \sigma < 1, T < t < T+1\}$ を含む. Jensen の定理から,

$$\int_0^3 \frac{n(r)}{r} dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\zeta(2 + iT + 3e^{i\theta})| d\theta - \log |\zeta(2 + iT)|.$$

ここで, $\zeta(s) \ll |s|$ が $\sigma \geq \frac{1}{2}$ で成り立つことと, 関数等式により $\zeta(s) \ll |t+2|^{1/2-\sigma} |\zeta(1-s)|$ が成り立つことから, ある $c > 0$ が存在して, $|\zeta(s)| \leq |t+2|^c$ が $-1 \leq \sigma \leq 5$ で成立することがわかる. したがって, $-1 \leq \Re(2 + 3e^{i\theta}) \leq 5$ だから,

$$\log |\zeta(2 + iT + 3e^{i\theta})| \leq 2c \log(T+2).$$

また,

$$\log |\zeta(2 + iT)| = \Re \log \zeta(2 + iT) = \Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-2-iT} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-2} \ll 1$$

である. したがって,

$$\int_0^3 \frac{n(r)}{r} dr \leq 3c \log(T+2).$$

一方,

$$\int_0^3 \frac{n(r)}{r} dr \geq \int_{\sqrt{5}}^3 \frac{n(r)}{r} dr \geq n(\sqrt{5}) \int_{\sqrt{5}}^3 \frac{dr}{r} = n(\sqrt{5}) \log \frac{3}{\sqrt{5}}$$

である. 以上から, 主張は成立する. $\square$

この補題から, 例えば, ζ 関数の非自明零点の虚部の逆数和について,

$$\sum_{\rho} \frac{1}{\gamma^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n < \gamma \leq n+1} \frac{2}{\gamma^2} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log 2n}{n^2} \ll 1$$

などがわかる.

ここで, $\arg \zeta(s)$ の定義を述べておく. 複素平面から $(-\infty, 1]$ 及び $(-\infty + i\gamma, \beta + i\gamma]$ を除いた部分を考える. その部分は単連結であり, $\log \zeta(\sigma) \in \mathbb{R}$ となる分枝をとる. このとき, $t \neq \gamma$ であれば, $L(s) : 2 \rightarrow 2 + it \rightarrow \sigma + it$ として,

$$\arg \zeta(s) = \Im \int_{L(s)} \frac{\zeta'}{\zeta}(z) dz$$

で定義する. ここで, $A \rightarrow B$ とは, 始点 A と終点 B とを結ぶ向き付けられた線分を表す. また, $t = \gamma$ であれば,

$$\arg \zeta(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\arg \zeta(\sigma + i(t + \varepsilon)) + \arg \zeta(\sigma + i(t - \varepsilon))}{2}$$

で定義する.

定理 1.1 の証明 まず, $\xi(s)$ の零点と, $\zeta(s)$ の非自明零点が一致することに注意する. C を複素平面上の点 $2 \pm iT$, $-1 \pm iT$ を頂点とする長方形領域の境界であって, 反時計回りに向き付けられたものとする. また, $N(T)$ と $\arg \zeta(s)$ の定義から, $\Im s = \pm T$ 上に零点が存在しない場合を示せば十分である. このとき偏角の原理により, 次の等式が成立する.

$$2N(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\xi'}{\xi}(s) ds.$$

右辺の積分のうち、積分路 $-1 \rightarrow -1 - iT \rightarrow 1/2 - iT$ については、

$$\begin{aligned} & i \int_0^{-T} \frac{\xi'}{\xi}(-1 + it) dt + \int_{-1}^{1/2} \frac{\xi'}{\xi}(\sigma - iT) d\sigma \\ &= -i \int_0^{-T} \frac{\xi'}{\xi}(2 - it) dt - \int_{-1}^{1/2} \frac{\xi'}{\xi}(1 - \sigma + iT) d\sigma \\ &= i \int_0^T \frac{\xi'}{\xi}(2 + it) dt + \int_2^{1/2} \frac{\xi'}{\xi}(\sigma + iT) d\sigma \end{aligned} \quad (1.2)$$

と変形でき、これは積分経路 C のうち、 $2 \rightarrow 2 + iT \rightarrow \frac{1}{2} + iT$ という経路上の積分である。なお、1つ目の等式では $\xi(s)$ の関数等式の対数微分 $\frac{\xi'}{\xi}(s) = -\frac{\xi'}{\xi}(1 - s)$ を用い、2つ目の等式ではそれぞれ $-t$, $1 - \sigma$ に対して変数変換を行った。

積分路 $1/2 + iT \rightarrow -1 + iT \rightarrow -1$ については、同様に、

$$\begin{aligned} & \int_{1/2}^{-1} \frac{\xi'}{\xi}(\sigma + iT) d\sigma + i \int_T^0 \frac{\xi'}{\xi}(-1 + it) dt \\ &= - \int_{1/2}^{-1} \frac{\xi'}{\xi}(1 - \sigma - iT) d\sigma - i \int_T^0 \frac{\xi'}{\xi}(2 - it) dt \\ &= \int_{1/2}^2 \frac{\xi'}{\xi}(\sigma - iT) d\sigma + i \int_{-T}^0 \frac{\xi'}{\xi}(2 + it) dt \end{aligned} \quad (1.3)$$

とできる。これらの積分は、積分経路 C のうち、 $\frac{1}{2} - iT \rightarrow 2 - iT \rightarrow 2$ という経路上の積分だが、この複素共役をとると積分 (1.2) の逆向き、すなわち積分 (1.2) に負号をつけたものになっていることがわかる。

以上のことから、 $C' : 2 \rightarrow 2 + iT \rightarrow \frac{1}{2} + iT$ とすると、式 (1.2), (1.3) より、

$$N(T) = \frac{1}{\pi} \Im \int_{C'} \frac{\xi'}{\xi}(s) ds$$

を得る。考えている経路上では $\frac{\xi'}{\xi}(s)$ は正則だから、次を得る：

$$\begin{aligned} N(T) &= \frac{1}{\pi} \left[\arg s + \arg(s - 1) - \frac{s}{2} \log \pi + \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \arg \zeta(s) \right]_{s=2}^{s=\frac{1}{2}+iT} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\arg\left(\frac{1}{2} + iT\right) + \arg\left(-\frac{1}{2} + iT\right) - \frac{T}{2} \log \pi \right. \\ &\quad \left. + \arg \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{T}{2}\right) + \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + iT\right) \right). \end{aligned}$$

まず, $\arg\left(\frac{1}{2} + iT\right) + \arg\left(-\frac{1}{2} + iT\right)$ を計算する. 一般に, $a, b > 0$ のとき $\arg(a + ib) + \arg(-a + ib) = \pi$ が成り立つことは, 複素平面上に 2 点 $a + ib$ と $-a + ib$ を図示すれば明らかにわかるが, あえて式で計算すると,

$$\arg(x + iy) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & (x, y > 0) \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & (x < 0, y > 0) \end{cases}$$

だから,

$$\arg\left(\frac{1}{2} + iT\right) + \arg\left(-\frac{1}{2} + iT\right) = \arctan(2T) + \arctan(-2T) + \pi = \pi.$$

また, Stirling の公式

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + \frac{1}{2} \log \pi + O(|s|^{-1})$$

より,

$$\log \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{T}{2}\right) = \left(-\frac{1}{4} + i\frac{T}{2}\right) \log\left(\frac{1}{4} + i\frac{T}{2}\right) - \frac{1}{4} - i\frac{T}{2} + \frac{1}{2} \log \pi + O(T^{-1}).$$

したがって,

$$\begin{aligned} & \arg \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{T}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{4} \arg\left(\frac{1}{4} + i\frac{T}{2}\right) + \frac{T}{4} \log\left(\frac{1}{16} + \frac{T^2}{4}\right) - \frac{T}{2} + O(T^{-1}) \\ &= -\frac{1}{4} \arctan(2T) + \frac{T}{4} \left(2 \log \frac{T}{2} + \log\left(1 + \frac{1}{4T^2}\right)\right) - \frac{T}{2} + O(T^{-1}) \\ &= -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \arctan \frac{1}{2T} + \frac{T}{2} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2} + O(T^{-1}) \\ &= \frac{T}{2} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2} - \frac{\pi}{8} + O(T^{-1}). \end{aligned}$$

以上をまとめると,

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + iT\right) + O(T^{-1}).$$

□

定理 1.2 の証明の準備をする. 次の主張を示す.

補題 1.7 $|s - 1| \geq \frac{1}{1000}$, $-1 \leq \sigma \leq 2$ に対して一様に

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\substack{\rho \\ |t-\gamma| \leq 1}} \frac{1}{s-\rho} + O(\log(|t|+2))$$

が成り立つ.

証明 まず, 武田氏の稿 [15, p.7] の補題 2.11 の直前にあるように, 考えている範囲で,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) + O(\log(|t|+2))$$

が成立するから, この式を $s = \sigma + it$ と $2 + it$ に対して適用したのちにそれらの差をとると, $\frac{\zeta'}{\zeta}(2 + it) = O(1)$ より,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right) + O(\log(|t|+2)).$$

ここで, 零点にわたる和のうち, $|t - \gamma| > 1$ となるものについては,

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\rho \\ |t-\gamma| > 1}} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right) \\ &= \sum_{\substack{\rho \\ |t-\gamma| > 1}} \frac{2-\sigma}{(\sigma-\beta+i(t-\gamma))(2-\beta+i(t-\gamma))} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\rho \\ n < |t-\gamma| \leq n+1}} \frac{2-\sigma}{(\sigma-\beta+i(t-\gamma))(2-\beta+i(t-\gamma))} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\rho \\ n < |t-\gamma| \leq n+1}} \frac{2-\sigma}{\left(\frac{\sigma-\beta}{t-\gamma} + i\right)\left(\frac{2-\beta}{t-\gamma} + i\right)} \frac{1}{(t-\gamma)^2} \\ &\ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N(t+n+1) - N(t+n) + N(t-n) - N(t-n-1)}{n^2} \\ &\ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(|t|+n+1)}{n^2} \ll \log(|t|+2) \end{aligned}$$

と評価できる. ここで, 最後から 2 番目の不等式を得るために補題 1.6 を用いた.

零点にわたる和のうち, $|t - \gamma| \leq 1$ となる残りの部分は,

$$\sum_{\substack{\rho \\ |t-\gamma|\leq 1}} \frac{1}{2+it-\rho} = \sum_{\substack{\rho \\ |t-\gamma|\leq 1}} \frac{1}{2-\beta+i(t-\gamma)} \ll \sum_{\substack{\rho \\ |t-\gamma|\leq 1}} 1 \ll \log(|t|+2)$$

となるから, 証明が完了する. $\square$

定理 1.2 の証明 $\arg \zeta(s)$ の定義から, $t \neq \gamma$ のときを示せば十分である. このとき,

$$\arg \zeta(2+it) = \Im \log \zeta(2+it) = \Im \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-2-it} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-2} \ll 1$$

であることと, 補題 1.7 より,

$$\begin{aligned} \arg \zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) &= \arg \zeta(2+it) - \int_{1/2}^2 \Im \frac{\zeta'}{\zeta}(s) ds \\ &= - \sum_{\substack{\rho \\ |t-\gamma|\leq 1}} \int_{1/2}^2 \Im \frac{1}{s-\rho} d\sigma + O(\log(|t|+2)). \end{aligned}$$

第一項の積分は,

$$\int_2^{1/2} \Im \frac{1}{s-\rho} d\sigma = - \int_2^{1/2} \frac{t-\gamma}{(\sigma-\beta)^2 + (t-\gamma)^2} d\sigma$$

であり, $\sigma - \beta = (t - \gamma)u$ と変数変換することで,

$$\begin{aligned} - \int_2^{1/2} \frac{t-\gamma}{(\sigma-\beta)^2 + (t-\gamma)^2} d\sigma &= \int_{\frac{1/2-\beta}{t-\gamma}}^{\frac{2-\beta}{t-\gamma}} \frac{du}{u^2+1} du \\ &= \arctan \frac{2-\beta}{t-\gamma} - \arctan \frac{1/2-\beta}{t-\gamma} \ll 1 \end{aligned}$$

を得る. したがって第一項の和は $\ll \log(|t|+2)$ となるから, 定理を得る. $\square$

2 明示公式

2.1 簡単な歴史と導入

Riemann は自身の報文 [13] にて,

$$J_0(x) = \sum'_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\log n}$$

と定義したとき,

$$J_0(x) = \text{li}(x) - \sum_{\rho} \text{li}(x^{\rho}) - \log 2 + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2 - 1) \log t}$$

という式を述べている. ただし, $\sum'_{n \leq x}$ は x が整数のとき, 和の最後の項を $\frac{1}{2}$ 倍することを示す記号である. また, $\text{li}(x^{\rho}) = \text{li}(e^{\rho \log x})$ であって,

$$\text{li}(e^w) = \begin{cases} \int_{-\infty+iv}^{u+iv} \frac{e^z}{z} dz & w = u + iv, v \neq 0 \\ \frac{1}{2} \lim_{v \rightarrow 0} (\text{li}(e^{u+iv}) + \text{li}(e^{u-iv})) & w = u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

と定義する. さらに, $J_0(x)$ は,

$$J_0(x) = \sum_{k \geq 1} \sum'_{p^k \leq x} \frac{1}{k} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \pi_0(x^{\frac{1}{k}})$$

と変形できる. ただし, $\pi_0(x) = \sum'_{p \leq x} 1$ である. 以上の事実から, Möbius 反転公式と呼ばれる公式を利用すると,

$$\pi_0(x) = \sum_{k \leq \log x / \log 2} \frac{\mu(k)}{k} J_0(x^{\frac{1}{k}})$$

及び

$$\pi_0(x) = \text{li}(x) - \sum_{\rho} \text{li}(x^{\rho}) - \frac{1}{2} \text{li}(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} \sum_{\rho} \text{li}(x^{\frac{\rho}{2}}) - \frac{1}{3} \text{li}(x^{\frac{1}{3}}) - \dots$$

を得る. これは今日 Riemann の素数公式と呼ばれる式であり, 彼の報文の目標となっている. この式の厳密な証明は von Mangoldt [9] によって 1895 年になされた. さらに, von Mangoldt は同じ論文で,

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) - \log 2\pi \quad (2.1)$$

なる公式を証明した. ただし,

$$\psi_0(x) = \sum'_{n \leq x} \Lambda(n)$$

である。この式は、漸近式ではなく、完全な等式であるためそれなりに価値のある式だが、実は右辺の零点にわたる和が絶対収束しないために、応用するには扱い難い。そこで Landau [8] は 1912 年この無限和を有限和で打ち切った (truncate) 形をした以下の式を証明した。

定理 2.1 (明示公式) 十分大きい x と T に対し、次が成り立つ:

$$\psi(x) = x - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leq T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) - \log 2\pi + R(x, T).$$

ここで,

$$R(x, T) \ll \log x + \frac{x}{T} (\log x T)^2.$$

本節では、この明示公式の証明を目標とする。なお、明示公式が $\psi_0(x)$ ではなく $\psi(x)$ についてのものであることに注意しておこう。 $\psi_0(x)$ についても同様の明示公式を得ることができ、それによって (2.1) を示すことができる。

明示公式の証明は、素数定理の証明をいくらか改変したものになっている。佐々木氏の稿 [14] において、素数定理の証明では積分路の左側を、非零領域の境界に沿ってとっていたが、明示公式の証明では、(大胆にも?) 左半平面側の無限遠に飛ばしてしまうのである。したがって、水平線上の積分評価において、零点との関係及び無限区間の積分に注意を要する。

2.2 明示公式の証明

まず二つほど補題を紹介する。

補題 2.2 実数 $T \geq 2$ に対して、 $T \leq T_1 \leq T + 1$ なる T_1 が存在し、

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma \pm iT_1) \ll (\log T)^2$$

が成り立つ。

証明 補題 1.6 により、全ての $\rho = \beta + i\gamma$ に対して、

$$|T_1 - \gamma| \gg \frac{1}{\log T}$$

が成り立つような $T \leq T_1 \leq T+1$ なる T_1 が存在する. よって, 補題 1.7 と再び補題 1.6 より,

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT_1) &= \sum_{\substack{\rho \\ |T_1 - \gamma| \leq 1}} \frac{1}{\sigma - \beta + i(T_1 - \gamma)} + O(\log T) \\ &\ll \log T \sum_{\substack{\rho \\ |T_1 - \gamma| \leq 1}} 1 + \log T \ll (\log T)^2. \end{aligned}$$

$s = \sigma - iT_1$ に対して成立することは, 零点の実軸に関する対称性 (あるいは, $\frac{\zeta'}{\zeta}(\overline{s}) = \overline{\frac{\zeta'}{\zeta}(s)}$) からただちにわかる. $\square$

補題 2.3

$$\mathcal{A} := \left\{ s \in \mathbb{C} \mid \sigma \leq -1, |s + 2k| \geq \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}$$

とする. $s \in \mathcal{A}$ に対して一様に

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \ll \log(|s| + 1).$$

証明 Stirling の公式により, $\mathcal{A}$ 上

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-s) \ll \log(|s| + 1).$$

いま s は負の偶数点から離れているから,

$$\cot \frac{\pi s}{2} = i + \frac{2i}{e^{i\pi s} - 1} \ll 1.$$

また, このとき

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(1-s) \ll 1$$

だから,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{\zeta'}{\zeta}(1-s) + \log 2\pi - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-s) + \frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi s}{2}$$

より, 主張が成立する. $\square$

定理 2.1 の証明 T_1 を補題 2.2 で与えられるものとし, $c = 1 + 1/\log x$ とすると, 素数定理の証明中に Perron の公式から得た式から,

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT_1}^{c+iT_1} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds + R_1$$

を得る. ただし,

$$R_1 \ll \log x + \frac{x}{T} (\log x)^2$$

である. ここで, K を正の奇数とし, $C: c-iT_1 \rightarrow -K-iT_1 \rightarrow -K+iT_1 \rightarrow c+iT_1$ とすると (時計回りになっていることに注意), 留数定理から,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT_1}^{c+iT_1} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds = x - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leq T_1}} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{1 \leq k < K/2} \frac{x^{-2k}}{2k} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) + R_2$$

を得る. ただし,

$$R_2 = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds$$

である. したがって,

$$\psi(x) = x - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leq T_1}} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{1 \leq k < K/2} \frac{x^{-2k}}{2k} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) + R_1 + R_2$$

を得る. さて, 積分路 C を, $c \pm iT_1 \rightarrow -1 \pm iT_1$, $-1 \pm iT_1 \rightarrow -K \pm iT_1$, 及び $-K-iT_1 \rightarrow -K+iT_1$ と分解してそれぞれ評価していく. 積分路 $c \pm iT_1 \rightarrow -1 \pm iT_1$ については, いま, $|\sigma \pm iT_1| \geq T$ だから, $x^c = x^{1+\frac{1}{\log x}} = ex \ll x$ に注意すると, 補題 2.2 より,

$$\int_{-1 \pm iT_1}^{c \pm iT_1} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds \ll \frac{(\log T)^2}{T} \int_{-1}^c x^\sigma d\sigma \ll \frac{x(\log T)^2}{T \log x}.$$

また, $\log |\sigma \pm iT_1| / |\sigma \pm T_1| \ll \log T/T$ だから, 積分路 $-1 \pm iT_1 \rightarrow -K \pm iT_1$ については, 補題 2.3 により,

$$\begin{aligned} \int_{-K \pm iT_1}^{-1 \pm iT_1} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds &\ll \int_{-K}^{-1} \frac{\log(|\sigma \pm T_1| + 1)}{|\sigma \pm T_1|} x^\sigma d\sigma \\ &\ll \frac{\log T}{T} \int_{-\infty}^{-1} x^\sigma d\sigma \ll \frac{\log T}{xT \log x} \end{aligned}$$

となる. 次に, $|-K + it| \geq K$ だから, 積分路 $-K-iT_1 \rightarrow -K+iT_1$ については,

$$\int_{-K-iT_1}^{-K+iT_1} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds \ll \frac{\log KT}{K} x^{-K} \int_{-T_1}^{T_1} dt \ll \frac{T \log KT}{K x^K}.$$

これは, $K \rightarrow \infty$ とすると $\rightarrow 0$ となる.

以上の評価から,

$$\psi(x) = x - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leq T_1}} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{-2k}}{2k} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) + O\left(\log x + \frac{x}{T}(\log xT)^2\right)$$

を得るが, 右辺第三項及び第四項は $O(1)$ だから, 結局

$$\psi(x) = x - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leq T_1}} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\log x + \frac{x}{T}(\log xT)^2\right) \quad (2.2)$$

となる. 最後に, この右辺第二項の T_1 を T に置き換える. $|x^\rho| \leq x$ であり, $T \leq T_1 \leq T+1$ だから, 補題 1.6 より,

$$\left| \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leq T_1}} \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leq T}} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \ll x \sum_{T < |\gamma| \leq T_1} \frac{1}{|\gamma|} \ll \frac{x}{T} \sum_{T < |\gamma| \leq T+1} 1 \ll \frac{x}{T} \log T.$$

したがって, T_1 を T に置き換えたときの誤差は, 式 (2.2) の誤差に吸収されるため, 一般の T についても定理が成立することが示された. $\square$

2.3 応用

ここで, 明示公式の応用例を一つ挙げておく.

定理 2.4 任意に固定した $1/2 \leq \theta < 1$ に対して,

$$\psi(x) = x + O(x^\theta (\log x)^2) \quad (2.3)$$

が成り立つことと, $\sigma > \theta$ に対して

$$\zeta(\sigma + it) \neq 0 \quad (2.4)$$

が成り立つことは同値.

証明 まず, 式 (2.3) が成り立つと仮定して式 (2.4) が成り立つことを示す.

$$\psi(x) = x + R(x), \quad R(x) \ll x^\theta (\log x)^2$$

とする. $\sigma > 1$ のとき, 佐々木氏の稿 [14, p.4] の補題 2.3 (部分和公式) において, $a(n) = \Lambda(n)$, $f(u) = u^{-s}$, $y = \frac{1}{2}$, $x \rightarrow \infty$ などとすれば,

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = s \int_1^{\infty} \psi(u) u^{-s-1} du \\ &= s \int_1^{\infty} u^{-s} du + s \int_1^{\infty} R(u) u^{-s-1} du \\ &= \frac{s}{s-1} + s \int_1^{\infty} R(u) u^{-s-1} du. \end{aligned}$$

$R(u) \ll u^{\theta}(\log u)^2$ より, 最後の積分は $\sigma > \theta$ で広義一様に絶対収束する. よって, この等式は $\sigma > \theta$ への $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ の解析接続を与えており, $s \neq 1$ で正則かつ, $\zeta(s) \neq 0$ であることがわかる.

次に, 式 (2.4) が成立すると仮定する. このとき, 明示公式から,

$$\psi(x) = x + O\left(x^{\theta} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leq T}} |\gamma|^{-1}\right) + O\left(\frac{x}{T}(\log xT)^2 + \log x\right)$$

であり, 補題 1.6 より,

$$\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leq T}} \frac{1}{|\gamma|} = \sum_{n \leq T} \sum_{n < |\gamma| \leq n+1} \frac{1}{|\gamma|} \ll \sum_{n \leq T} \frac{\log 2n}{n} \ll (\log T)^2$$

だから, $T = x$ とすれば良い. □

明示公式はこの他, 零点密度理論などでも重要な役割を果たす (井上氏の稿 [5] 参照). また, ここではキーワードに触れるにとどめるが, Dirichlet L -関数と関連付けて,

$$\psi(x; q, a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n), \quad \psi(x, \chi) = \sum_{n \leq x} \chi(n) \Lambda(n)$$

などを考えることで, Bombieri–Vinogradov の定理といった, さらなる発展を望むことができる. Bombieri–Vinogradov の定理については, 例えば [3] の 28 章を参照されたい.

3 補遺

3.1 第1節での主張について

ここでは、第1節の導入で後回しにした主張について証明する。最初に記号について確認する。 $\{x\}$ で x の小数部分を表し、 $[x]$ で x の整数部分を表す。したがって、 $x = [x] + \{x\}$ と書ける。

まず、 $\sigma > 1$ とする。このとき、佐々木氏の稿 [14, p.4] の補題 2.3 (部分和公式) において、 $a(n) = 1$, $f(u) = u^{-s}$, $y = \frac{1}{2}$, $x \rightarrow \infty$ などとすれば、

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = s \int_1^{\infty} [u] u^{-s-1} du = s \int_1^{\infty} u^{-s} du - s \int_1^{\infty} \{u\} u^{-s-1} du$$

を得る。第一の積分は、

$$\int_1^{\infty} u^{-s} du = \frac{1}{s-1}$$

となる。したがって、

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \{u\} u^{-s-1} du$$

である。右辺の積分は $\sigma > 0$ に対して絶対収束するから、この式は $\zeta(s)$ の $\sigma > 0$ への解析接続を与える。この表示式から

$$\overline{\zeta(s)} = \overline{\frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \{u\} u^{-s-1} du} = \frac{\bar{s}}{\bar{s}-1} - \bar{s} \int_1^{\infty} \{u\} u^{-\bar{s}-1} du = \zeta(\bar{s})$$

を得る。したがって、 $\sigma > 0$ で $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\bar{s})$ が成立するが、関数等式によって、全複素平面でこの等式が成立することがわかる。

なお、上記の表示式から、半直線 $(0, \infty)$ 上で $\zeta(s)$ が実数であることが分かる。鏡像の原理を認めると、このことから $\sigma > 0$ で $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\bar{s})$ が成立することが言える。

また、 $0 \leq \{u\} < 1$ だから、

$$0 \leq \int_1^{\infty} \{u\} u^{-\sigma-1} du < \int_1^{\infty} u^{-\sigma-1} du = \frac{1}{\sigma}.$$

したがって、不等式

$$\frac{1}{\sigma-1} < \zeta(\sigma) < \frac{\sigma}{\sigma-1}$$

を得る. この不等式から特に, $0 < \sigma < 1$ に対して $\zeta(\sigma) < 0$ が言えるから, この区間で $\zeta(s)$ は実零点を持たないことがわかる.

3.2 参考文献について

最後に, 参考文献について断りを入れておく. 本稿における証明等の議論は主に [12] を基に再構成した. その他, 補題 1.6 の証明は [16] 第 9 章 2 節, 定理 2.4 の証明は [6] 第 12 章 3 節, [11] 第 5 章を参考にした. Jensen の定理の証明は [17] の第 9 章 10 節を基にしている. 歴史の部分は [4], [7], [11], [12] を参考にした. このうち [4], [7] は歴史的なことが比較的詳しく書いてある. [12] 各章末の Note や [11] にも簡単な説明がある.

謝辞

本稿は第 32 回整数論サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」での講演を元に作成されたものです. サマースクールの世話人の先生方とサポートスタッフの院生各位に感謝申し上げます. また予習会や講演にて質問・コメントを下さった方々, 予稿に含まれていた誤りを指摘していただいた門田慎也氏, 杉山真吾氏, 鈴木正俊氏のおかげで, 本稿はより良い原稿になりました. 心よりお礼申し上げます. なお, 本稿の執筆に際しては, JSPS 科研費 JP25K17245 の助成を受けました.

参考文献

- [1] R. Backlund, *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris **158**, (1914), 1979–1981.
- [2] R. Backlund, *Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion*, Acta Math. **41**, (1918), 345–375.
- [3] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, Markham, 1967. (3rd ed., revised by H. L. Montgomery, Springer, 2000)
- [4] E. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, 1974.
- [5] 井上 翔太, 零点密度について, 本報告集, 2025.
- [6] A. Ivic, *The Riemann Zeta-Function*, Wiley, 1985.

- [7] 鹿野 健（編著），リーマン予想, 日本評論社, 1991.
- [8] E. Landau, *Über einige Summen, die von den Nullstellen der Riemann'schen Zetafunktion abhängen*, Acta Math. **35**, (1912), 271–294.
- [9] H. von Mangoldt, *Zu Riemanns Abhandlung 'Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse'*, J. Reine Angew. Math. **114**, (1895), 255–305.
- [10] H. von Mangoldt, *Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion $\xi(t)$* , Math. Ann. **60**, (1905), 1–19.
- [11] 松本 耕二, リーマンのゼータ関数, 朝倉書店, 2005.
- [12] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory: I. Classical Theory*, Cambridge University Press, 2006.
- [13] G. F. B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1859), 671–680.
- [14] 佐々木 義卓, 素数定理, 本報告集, 2025.
- [15] 武田 渉, ゼータ関数の非零領域, 本報告集, 2025.
- [16] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, 2ed edition, Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press
- [17] 辻 正次, 複素函数論, 槇書店, 1968.

平均値定理

松本 耕二（愛知工業大学基礎教育センター）

本稿では Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の平均値定理について扱う。

平均値理論というのは、ゼータ関数の解析的な理論の中でも最も歴史が古いものの一つで、Riemann ゼータ関数のみならず、その一般化や類似物である種々多様なゼータ関数、 L 関数に対しても、膨大な結果の蓄積がある。このような研究領域の全体像を紹介することは本稿のような短い記事では到底不可能である。そこで本稿では、扱う対象を Riemann の $\zeta(s)$ のみに絞り、しかも最近の諸結果までは含めず、おおそ Titchmarsh [37] の第 7 章や、Ivić [13] [14]、筆者の [29] の第 9 章、第 10 章、あるいは筆者のサーベイ [27] に述べられているような古典的な結果の紹介^{*1}に限って、その概要を解説することにしたい^{*2}。

1 二乗平均値 (I)

Riemann ゼータ関数の解析的な性質のうち、最も重要なものの一つがその絶対値の大きさであることは論をまたないであろう。この話題については後に杉山氏の稿で詳しく論じられるが、特に critical line $\Re s = 1/2$ 上での $\zeta(s)$ の大きさについて、 ε を任意に小さい正数として

$$\zeta(1/2 + it) = O((|t| + 2)^{c+\varepsilon}) \quad (1.1)$$

と書けば、 $c = 1/4$ がいわば「自明な評価」（凸性評価）で、今日では $c = 1/6$ や、さらにもう少し小さい c の値についても (1.1) が成り立つことが示されている。しかし

^{*1} 本稿では紹介する多くの定理について、証明のスケッチしか述べないので、証明の詳細についてはここに挙げた諸文献を参照していただきたい。

^{*2} サマースクールでは筆者は 3 コマの講演を行ない、本稿の内容をおおよそ紹介した。筆者の講演と本稿の記述に対して多くのコメントやミスプリントの指摘などをしてくださった皆様に、この場を借りてお礼申し上げたい。

(1.1) が $c = 0$ で成立するであろう、という Lindelöf 予想と呼ばれる予想があり、広く信じられているが、近い将来に証明される見通しは今のところは全くない。

そこで、個々の値そのものの評価は困難でも、平均値に対しては何かもう少し立ち入った結果が得られるのではないかと考えるのは自然な発想であろう。アプローチしやすいような形の平均値として、まずは

$$I_{\sigma}(T) = \int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt \quad (T \geq 2)$$

を考える。すると、Lindelöf 予想が正しければ

$$I_{1/2}(T) = O(T^{1+\varepsilon}) \quad (1.2)$$

が得られるが、平均値 $I_{1/2}(T)$ に対するこの評価は無条件に証明できる。実はさらに強く、次の定理を証明することができる。

定理 1 $T \geq 2$ に対して、

$$I_{1/2}(T) = T \log T + O(T(\log T)^{3/4}). \quad (1.3)$$

この定理の証明について述べる前に、より状況が見やすい、 $\sigma > 1/2$ の場合の平均値について触れておく。まず絶対収束領域 $\sigma > 1$ においては、次の結果が簡単に示せる。

定理 2 $\sigma > 1$ のとき、 $T \geq 2$ に対して、

$$I_{\sigma}(T) = \zeta(2\sigma)T + O(1) \quad (1.4)$$

が成り立つ。

証明 $\sigma > 1$ であるから、 $\zeta(s)$ の級数表示がそのまま使えて、

$$\begin{aligned} |\zeta(\sigma + it)|^2 &= \zeta(\sigma + it)\zeta(\sigma - it) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\sigma-it} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma+it} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\sigma} + \sum_{m \neq n} (mn)^{-\sigma} \left(\frac{n}{m}\right)^{it} \end{aligned}$$

となる。この右辺の第一項は $\zeta(2\sigma)$ である。そこで上式を 2 から T まで積分すると

$$\begin{aligned} I_\sigma(T) &= \zeta(2\sigma)(T-2) + \sum_{m \neq n} \frac{e^{iT \log(n/m)} - e^{2i \log(n/m)}}{i(mn)^\sigma \log(n/m)} \\ &= \zeta(2\sigma)T + O(1) + O\left(\sum_{m \neq n} \frac{1}{(mn)^\sigma |\log(n/m)|}\right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

となる。この最後の和は対称性から $m < n$ の場合のみ考えれば良いが、その場合をさらに $m < n \leq 2m$ と $n > 2m$ の二つに分ける。この後者 $n > 2m$ の部分においては $\log(n/m) \gg 1$ なので、この部分の上式への寄与は明らかに $O(1)$ である。前者においては $r = n - m$ とおくと、この部分の寄与は

$$\ll \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\sigma} \sum_{r=1}^m \frac{1}{(m+r)^\sigma \log((m+r)/m)}$$

となるが、 $(m+r)^\sigma \asymp m^\sigma$, $\log((m+r)/m) \asymp r/m$ に注意すれば、この式は

$$\ll \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2\sigma-1}} \sum_{r=1}^m \frac{1}{r} \ll \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2\sigma-1}} \log m \ll 1$$

となる。よって (1.5) の右辺の和の寄与は $O(1)$ であり、定理が示された。(証明終)

次に臨界領域における状況を考えるが、この場合には $\zeta(s)$ の級数表示はもはやそのままでは使えないので、何らかの別の表示式が必要となる。ここでは、臨界領域内の $\zeta(s)$ を有限和で近似する、次の式を利用する。

定理 3 $\sigma_0 > 0$, $x \geq 1$, $C > 2$ とすると、 $\sigma_0 \leq \sigma \leq 2$, $|t| \leq 2\pi x/C$ において一様に

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(x^{-\sigma})$$

が成り立つ。

証明のスケッチ この定理は、Euler-Maclaurin の和公式を用いて証明できる。区間 $[a, b]$ で連続微分可能な関数 $f(x)$ に対し、

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} f(n) &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x) dx \\ &\quad + \left(a - [a] - \frac{1}{2}\right) f(a) - \left(b - [b] - \frac{1}{2}\right) f(b) \end{aligned} \quad (1.6)$$

を Euler-Maclaurin の和公式という。

まず最初は $\sigma > 1$ と仮定して、 x より大きい整数 a を取り、

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq a} n^{-s} + \sum_{n > a} n^{-s}$$

と分割する。この第二の和に (1.6) を $f(n) = n^{-s}$, $b \rightarrow \infty$ として適用すると

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq a} \frac{1}{n^s} - \frac{a^{1-s}}{1-s} - s \int_a^\infty \frac{u - [u] - 1/2}{u^{s+1}} du - \frac{1}{2} a^{-s} \quad (1.7)$$

を得る。この右辺の積分は $\sigma > 0$ で収束するので、この式は $\zeta(s)$ の領域 $\sigma > 0$ への解析接続を与える。そしてその範囲で、右辺の積分項は $O(\sigma^{-1}|s|a^{-\sigma})$ と評価できる。

右辺の第一項を $n \leq x$ の部分と $x < n \leq a$ の部分にさらに分割する。この第二の和は

$$\sum_{x < n \leq a} n^{-\sigma} e^{-it \log n} \quad (1.8)$$

で、これは一種の「指数和」であるが、それを「指数積分」に変換して評価する van der Corput の補題 ([29, 補題 7.2]) を用いれば、(1.8) は

$$= \int_x^a \frac{du}{u^s} + O(x^{-\sigma}) = \frac{a^{1-s} - x^{1-s}}{1-s} + O(x^{-\sigma})$$

となることが分かる。この式と (1.7) を合わせて、 $a \rightarrow \infty$ とすれば定理を得る。(証明終)

定理 4 $1/2 < \sigma \leq 1$ のとき、 $T \geq 2$ に対して、

$$I_\sigma(T) = \zeta(2\sigma)T + O(T^{2-2\sigma} \log T) + O(T^{1/2}) \quad (1.9)$$

が成り立つ。

証明のスケッチ 定理 3 で $t = x$ ととると、

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq t} \frac{1}{n^s} + O(t^{-\sigma}) \quad (1.10)$$

を得る。この右辺第一項を $\Sigma_1(s)$ と書くことにすると、

$$I_\sigma(T) = \int_2^T |\Sigma_1(s)|^2 dt + O\left(\int_2^T |\Sigma_1(s)| t^{-\sigma} dt\right) + O\left(\int_2^T t^{-2\sigma} dt\right) \quad (1.11)$$

である。まずこの右辺の第一項については、 $T_1(m, n) = \max\{m, n\}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \int_2^T |\Sigma_1(s)|^2 dt &= \int_2^T \sum_{m \leq T} m^{-\sigma-it} \sum_{n \leq T} n^{-\sigma+it} dt \\ &= \sum_{m \leq T} \sum_{n \leq T} (mn)^{-\sigma} \int_{T_1(m, n)}^T \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt \end{aligned}$$

となる。この右辺を $m = n$ の部分と $m \neq n$ の部分に分ける。前者は

$$\sum_{n \leq T} n^{-2\sigma} (T - n) = T \left(\zeta(2\sigma) - \sum_{n > T} n^{-2\sigma} \right) + O\left(\sum_{n \leq T} n^{1-2\sigma}\right)$$

である。後者は

$$\ll \sum_{m < n \leq T} \frac{1}{(mn)^\sigma \log(n/m)}$$

で、これを定理 2 の証明のときと同様に評価すると $1/2 < \sigma < 1$ のとき $O(T^{2-2\sigma} \log T)$, $\sigma = 1$ のとき $O((\log T)^2)$ が示せる。以上により

$$\int_2^T |\Sigma_1(s)|^2 dt = \zeta(2\sigma)T + \begin{cases} O(T^{2-2\sigma} \log T) & (1/2 < \sigma < 1) \\ O((\log T)^2) & (\sigma = 1) \end{cases} \quad (1.12)$$

である。これで (1.11) の右辺第一項が処理できた。

残りの項については、第二項は (1.12) と Cauchy-Schwarz の不等式から容易に評価できて、 $O(T^{1/2})$ である。また第三項は自明に $O(1)$ なので、定理を得る。(証明終)

臨界線上の二乗平均値を与える定理 1 も、その証明の基本方針は上の定理 4 と同様である。ただ、この場合には定理 4 の証明に用いた近似式 (定理 3) では十分でなく、より精密な近似を与える次の結果を必要とする。

定理 5 $0 \leq \sigma \leq 1$, $x \geq 1$, $y \geq 1$, $2\pi xy = |t|$ に対して

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + \chi(s) \sum_{n \leq y} \frac{1}{n^{1-s}} + O(x^{-\sigma}) + O(|t|^{1/2-\sigma} y^{\sigma-1}) \quad (1.13)$$

が成り立つ。ここに

$$\chi(s) = 2\Gamma(1-s)\sin(\pi s/2)(2\pi)^{s-1} \quad (1.14)$$

である。

これを Hardy-Littlewood の近似関数等式という。

注意 上の $\chi(s)$ を用いれば、 $\zeta(s)$ の関数等式は $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$ と書ける。すると (1.13) の右辺において、その第一項は関数等式の左辺を有限で切ったもの、第二項は関数等式の右辺を有限で切ったもの、と見ることもできるであろう。これが「近似関数等式」という名称の由縁である。

定理 5 の証明はここでは述べないが、鞍部点法の発想に基づく巧妙な積分路を取って評価計算していくもので、簡単ではない（例えば [29] の 8 章参照）。そしてこの定理 5 を出発点とすれば、定理 1 の証明は定理 4 の証明とほぼ同様の議論でできるので、省略することにする。

上で紹介した三つの平均値定理は、主要項に関してはその係数まで含めて完全に決定しているが、誤差項の部分に関しては Cauchy-Schwarz の不等式などを使った大雑把な議論で済ませてしまっている。したがって、誤差項評価には改良の余地があるのではないかと誰しもが感じるであろう。実際、もう少し丁寧に議論することで、(1.3) の右辺には第二主要項があって、次の形の漸近式が成り立つことがわかる：

$$I_{1/2}(T) = T \log T + (2\gamma - \log(2\pi) - 1)T + E(T), \quad (1.15)$$

ただし γ は Euler 定数で、 $E(T)$ が誤差項である。この形の式を最初に得たのは Littlewood で、彼の誤差項評価は $E(T) = O(T^{3/4+\epsilon})$ である。この指数 $3/4$ は、その後 Ingham (1928) が $1/2$ に、Titchmarsh (1934) が $5/12$ に改良するなど、活発な研究の対象となる。誤差項 $E(T)$ の詳しい分析は、まさに二乗平均値理論の中核と言えるものであって、本稿 3 節においてより深い諸結果を紹介する。

2 平均値定理の意義

話を先へ進める前にこのあたりで、平均値定理を追求する、そもそもの動機について少しまとめておきたい。

前節においては、「個々の値を調べるのは難しいから、平均値でも考えようか」という、いささか弱音とも取れるような言い方で話をスタートさせた。しかし実は、そうした消極的な理由だけではなく、平均値定理には多くの重要な意義があるのである。以下にそれらを列挙してみよう。

(ア) Lindelöf 予想から得られる $I_{1/2}(T)$ の評価は (1.2) であるが、定理 1 はこれよりも強い評価 $I_{1/2}(T) \ll T \log T$ を与えている。

(イ) さらに、Lindelöf 予想は上からの評価を与えるだけであるが、定理 1 は漸近式の形なので、 $\zeta(s)$ のある種の「下からの評価」に関する情報をも与えている。すなわち、もし $\zeta(1/2 + it) = o(\sqrt{|\log t|})$ ($t \geq 2$) であれば、 $I_{1/2}(T) = o(T \log T)$ となるはずで、これは定理 1 に反する。よって $\zeta(1/2 + it) = o(\sqrt{|\log t|})$ ではあり得ない、ということが分かるわけである。このことをしばしば

$$\zeta(1/2 + it) = \Omega(\sqrt{|\log t|})$$

と書き、オメガ評価と呼んだりもする。

(ウ) 平均値定理は技術的な補助手段として、多くの場面で有効に働くことが知られている。例えば Lindelöf 予想は大変強い予想なので、それを仮定すると、素数分布論などにおいて深い結果を導けることが多い。しかししばしば、証明の途中で Lindelöf 予想を用いる箇所を上手く書き直せば、平均値の議論だけで済ませられる場合がある。そうすると、平均値に関する定理は多くの場合に証明可能なので、Lindelöf 予想という大きな予想を仮定しなくてもよくなるのである。

もう一つ、平均値定理の重要な意義と言えるのが、次の「原理」である：

(エ) 平均値について詳しく分かれば、個々の値についても詳しい情報を得ることができる。

このことを説明するために、高次べき平均値について述べよう。前節では二乗平均値についてだけ論じたが、より一般に、 m 乗平均値

$$\int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^m dt \tag{2.1}$$

を考えることが可能である。ここで、二乗の場合がそうであったように、 $m = 2k$ と偶数べきの場合には、

$$|\zeta(\sigma + it)|^{2k} = \zeta(\sigma + it)^k \zeta(\sigma - it)^k$$

と絶対値を外すことができるので計算がスムーズに進行し、いろいろと扱いやすい。そこで以下本稿では、 $m = 2k$ の場合のみを扱う。

注意 m が奇数の場合のべき平均値や、あるいはさらに m が整数でない場合の研究も行なわれている (Ivić [14], Ramachandra [36] 参照)。

偶数べき平均として、二乗の次に考えるべきなのは当然ながら四乗平均である。この場合についてもかなり古くから研究が行なわれている。漸近式

$$\int_2^T |\zeta(1/2 + it)|^4 dt = \frac{1}{2\pi^2} T(\log T)^4 + O(T(\log T)^3) \quad (2.2)$$

は 1928 年に Ingham によって証明された。この式の誤差項部分についてはその後、詳しい研究が進められ、保型形式のスペクトル理論とも結びついた大きな研究領域となっている。この話題については井上氏の稿を参照されたい。

二乗平均値についての定理 1 と、四乗平均値についての (2.2) とを見比べると、次のような推測が思い浮かぶかもしれない。すなわち、任意の自然数 k に対して、定数 C_k が存在して

$$\int_2^T |\zeta(1/2 + it)|^{2k} dt \sim C_k T(\log T)^{k^2} \quad (2.3)$$

ではないだろうか？

我々はこの予測が $k = 1$ と $k = 2$ については正しいことを知っている。しかし実は、今日においても、この予測が示されているのはこれら二つの場合のみである。もう少し弱く、上からの評価

$$\int_2^T |\zeta(1/2 + it)|^{2k} dt = O(T^{1+\varepsilon}) \quad (2.4)$$

を設定してみても、やはり $k \geq 3$ に対してはこの証明は得られていない。それにもかかわらず、(2.3), (2.4) は今日では多くの専門家が成り立つことを信じている予想となっており、ランダム行列理論とのアナロジーを辿って、定数 C_k の正しい値についても推測がなされている ([24] 参照)。

予想 (2.4) に対して、次の重要な定理が成り立つ。

定理 6 Lindelöf 予想は、評価 (2.4) が任意の自然数 k に対して成り立つことと同値である。

この定理こそ平均値定理の意義（エ）を具現化するものである。この事実が、 k が大きいときのべき平均値の研究が困難であることの根源的な理由であるし、逆に言えば、高次べき平均値を研究する動機づけにもなっているわけである。

定理 6 の証明のスケッチ Lindelöf 予想が成り立てば、任意の k に対して (2.4) が成り立つことは明白である。

逆を示すために、Balasubramanian と Ramachandra [4] [5] によって証明された、次の不等式を用いる。すなわち、 $t \geq 3$ 、 $0 < \delta < 1/2$ 、 m は自然数、 A は任意に固定した正の数とすると、

$$|\zeta(1/2 + it)|^m \ll (\log t) \int_{-\delta}^{\delta} |\zeta(1/2 + it + iv)|^m dv + t^{-A} \quad (2.5)$$

が成り立つ。

この不等式をまず認めて、(2.4) から Lindelöf 予想を導く。上の不等式で $m = 2k$ とおくと、右辺の積分は

$$\int_2^{t+\delta} |\zeta(1/2 + iu)|^{2k} du - \int_2^{t-\delta} |\zeta(1/2 + iu)|^{2k} du$$

と書けるが、この二つの積分は (2.4) によりどちらも $O(t^{1+\varepsilon})$ である。よって不等式 (2.5) の右辺も $O(t^{1+\varepsilon})$ となるから、

$$|\zeta(1/2 + it)| \ll t^{(1+\varepsilon)/2k}$$

と評価でき、 k は任意であるから、これは Lindelöf 予想を意味する。

そこで後は不等式 (2.5) を示せば良い。その出発点は、 $\zeta(1/2 + it)^m$ を多重積分で表わす、次の式である：

$$\begin{aligned} B^r \zeta(1/2 + it)^m &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^B \cdots \int_0^B \int_{|w|=\delta} \zeta(1/2 + it + w)^m \\ &\quad \times e^{(u_1 + \cdots + u_r)w} \frac{1}{w} dw du_1 \cdots du_r \end{aligned}$$

この式自体は留数定理からすぐ分かる。この後、右辺の w -積分を、 w の実部が正の部分と負の部分に分けたりして丁寧に評価してやることで結論を得るのだが、細部はかなりテクニカルなので、詳細は省略する。（証明終）

定理 6 によって、我々は高次のべき平均値にも重要な意義があることを知った。すでに述べたように、評価 (2.4) は $k \geq 3$ に対しては得られていないのだが、それでも今までに様々なアプローチが考案され、多くの部分的な成果が示されている。こうした高次べき平均の理論については 5 節、6 節でその一端を解説したい。

平均値から個々の値へのフィードバックは、二乗平均値理論の枠内でも見て取ることができる。実際、(2.5) で $m = 2$ とすると、

$$|\zeta(1/2 + it)|^2 \ll (\log t) \int_{t-\delta}^{t+\delta} |\zeta(1/2 + iu)|^2 du + t^{-A}$$

であるが、この右辺の積分は、(1.15) を用いれば

$$\begin{aligned} &= (t + \delta) \log(t + \delta) + (2\gamma - \log(2\pi) - 1)(t + \delta) + E(t + \delta) \\ &\quad - (t - \delta) \log(t - \delta) - (2\gamma - \log(2\pi) - 1)(t - \delta) - E(t - \delta) \\ &= E(t + \delta) - E(t - \delta) + O(\delta \log t) \end{aligned}$$

だから、

$$|\zeta(1/2 + it)|^2 \ll |E(t + \delta) - E(t - \delta)| \log t + \delta(\log t)^2 + t^{-A}$$

となる。したがって、二乗平均値の誤差項 $E(T)$ について十分詳しい情報が得られれば、 $|\zeta(1/2 + it)|$ 自体のシャープな評価が出ることが期待できる。

そこで次節では、 $E(T)$ についての、1 節で述べたよりも深く繊細な諸結果について論ずることにする。

3 二乗平均値 (II)

誤差項 $E(T)$ の評価については、1 節の記述は Titchmarsh が $E(T) = O(T^{5/12+\varepsilon})$ を得た、というところまでで止まっていた。その後 1978 年になって、Balasubramanian [2] は

$$E(T) = O(T^{1/3+\varepsilon}) \tag{3.1}$$

を証明した。正確にいうと、彼は実は $1/3$ よりさらに少しだけ小さい指数 $27/82$ にまで到達している。この指数はその後改良が重ねられ、Huxley [11] による $72/227$

などを経て、Bourgain と Watt が 2018 年に [6] で得た指数 1515/4816 が現時点では最良^{*3} である。

1 節において定理 1 を得た時の基本的な道具は近似関数等式（定理 5）であった。Balasubramanian は上記の改良を示すために、近似関数等式の誤差項を精密な漸近表示で置き換えた、次の式を用いた。

定理 7 (Riemann-Siegel formula) 小さい正の数 C と、 $0 \leq \sigma \leq 1$ 、 $t \geq 2\pi$ 、 $m = \lfloor \sqrt{t/2\pi} \rfloor$ 、 $N < Ct$ に対して

$$\begin{aligned} \zeta(s) = & \sum_{n \leq m} \frac{1}{n^s} + \chi(s) \sum_{n \leq m} \frac{1}{n^{1-s}} \\ & + (-1)^{m-1} e^{-(\pi s+t)i/2+3\pi i/8} (2\pi t)^{(s-1)/2} \Gamma(1-s) \\ & \times \left\{ S_N + O((N/t)^{N/6}) + O(e^{-Ct}) \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

が成り立つ。ただし

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k \leq n/2} \frac{n! i^{k-n}}{k!(n-2k)! 2^n} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{n/2-k} a_n \Psi^{(n-2k)} \left(\sqrt{\frac{2t}{\pi}} - 2m \right)$$

で、 a_n は z の関数

$$\exp \left((s-1) \log \left(1 + \frac{z}{\sqrt{t}} \right) - iz\sqrt{t} + \frac{i}{2} z^2 \right)$$

の $z=0$ での Taylor 展開における z^n の係数、また

$$\Psi(x) = \frac{\cos(\pi(x^2/2 - x - 1/8))}{\cos(\pi x)}$$

である。

この式は Siegel が 1932 年に公表したものであるが、なぜこの式に Riemann の名前も冠せられているのかを説明するため、この式が世に出た事情について少し紹介しておこう。この式は $\zeta(1/2+it)$ の非常に良い近似を与えるので、数値計算の目的にも有用である。実際に Riemann は $\zeta(s)$ の零点を数値計算するためにこの式を発見し、それを用いて虚部が小さいいくつかの零点の位置を求めている。しかし Riemann は

^{*3} $1/3=0.3333\dots$, $27/82=0.3292\dots$, $72/227=0.3171\dots$, $1515/4816=0.3145\dots$

この式を公表せず、彼の死後、その遺稿の中に埋もれてしまった。1920 年代になって、その遺稿がゲッティンゲン大学の図書館で再発見されると、膨大な数式や数値がただ書き連ねられた体のその遺稿を Siegel が分析し、その中から Riemann-Siegel formula を抽出することに成功したのである。Siegel にとってすら、その遺稿の中から窺い知れる Riemann の計算力は、真に驚嘆すべきものであったという。

さて、Riemann-Siegel formula を用いた、Balasubramanian による (3.1) の証明は相当に複雑なものであったが、その数年後、ある別の公式から出発すれば、比較的容易に (3.1) を導出できることが見出された。その公式が、次に述べる Atkinson formula であって、Atkinson [1] が 1949 年に発見したものである。

Atkinson formula を書き下すために、まず記号を準備する。自然数 n の正の約数の個数を $d(n)$ と書く。また

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} x &= \log(x + \sqrt{1 + x^2}), \\ e(T, n) &= \left(1 + \frac{\pi n}{2T}\right)^{-1/4} \left(\frac{2T}{\pi n}\right)^{-1/2} \left(\operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{\pi n}{2T}}\right)^{-1}, \\ f(T, n) &= 2T \operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{\pi n}{2T}} + (\pi^2 n^2 + 2\pi n T)^{1/2} - \frac{\pi}{4}, \\ g(T, n) &= T \log \left(\frac{T}{2\pi n}\right) - T + \frac{\pi}{4}, \\ B(T, \xi) &= \frac{T}{2\pi} + \frac{1}{2}\xi^2 - \xi \left(\frac{T}{2\pi} + \frac{1}{4}\xi^2\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

そして $X \asymp T$ とし、

$$\begin{aligned} \Sigma_1(T, X) &= \sqrt{2} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{1/4} \sum_{n \leq X} (-1)^n d(n) n^{-3/4} e(T, n) \cos(f(T, n)), \\ \Sigma_2(T, X) &= 2 \sum_{n \leq B(T, \sqrt{X})} d(n) n^{-1/2} \left(\log \frac{T}{2\pi n}\right)^{-1} \cos(g(T, n)) \end{aligned}$$

とおく。このとき、Atkinson formula とは次の式のことである。

定理 8 $T \geq 2$ に対し、

$$E(T) = \Sigma_1(T, X) - \Sigma_2(T, X) + O((\log T)^2) \quad (3.3)$$

が成り立つ。

この式はいかにも複雑なので、Atkinson がなぜこんな式を発表したか、がそもそも気になるであろう。実はその背景には、「 $\zeta(s)$ の二乗平均値と約数問題とのアナロジー」という、古くから意識されている観察があるので、まずそのことについて解説しておく。

上で出てきた $d(n)$ を約数関数と言って、整数論でもっとも基本的な数論的関数の一つであるが、その振る舞いはなかなか難しいので、ここでも平均値を考える、という着想が自然に現れる。約数関数の x までの和を考えると、

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + \Delta(x) \quad (3.4)$$

なる漸近式が成り立つ。ここで $\Delta(x)$ が誤差項であって、Dirichlet によって $\Delta(x) = O(x^{1/2})$ が証明されて以来、この $\Delta(x)$ の真の大きさを追求する問題を Dirichlet の約数問題と呼ぶ。

この問題に対して 20 世紀の初頭、Voronoi が重要な貢献をした。彼は Dirichlet の上記の評価を $\Delta(x) = O(x^{1/3+\varepsilon})$ にまで改良し、さらに、 $\Delta(x)$ を Bessel 関数を含む無限級数で表示した (Jutila [18] 参照)。この無限級数表示を Voronoi formula と称するが、Bessel 関数は指数関数や三角関数で近似できるのでその近似を用い、さらに無限級数を有限で切り落とすことで、有限型の Voronoi formula

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} x^{1/4} \sum_{n \leq N} \frac{d(n)}{n^{3/4}} \cos\left(4\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad + O(x^\varepsilon) + O(N^{-1/2} x^{1/2+\varepsilon}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

が得られる。ただし N は $N \ll x^A$ (A は定数) を満たす parameter とする。Voronoi formula や有限型 Voronoi formula は、今日でも約数問題におけるもっとも基本的な道具の一つである。

さて

$$\zeta(s)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k^s m^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k|n} 1 \right) \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} \quad (3.6)$$

であることから、 $\zeta(s)^2$ と $d(n)$ との間に繋がりがあうようなことは自然に期待できる。実際、上の (3.4) を (1.15) と比較すると、この両者の間にはっきりとしたアナロジーが存在することが感じ取れる。

しかし、両者の難易度にはかなりの差があることもまた事実である。例えば指数が $1/3 + \varepsilon$ の誤差項評価が証明されたのは約数問題については Voronoï の仕事だから 20 世紀の初めだが、対応する二乗平均値についての (3.1) はようやく 1978 年になって証明されている。こうしたことから、「まずは簡単な約数問題の方で結果を出しておいて、そのアナロジーを $\zeta(s)$ の二乗平均値の方で追求する」という一つの研究方針が浮かび上がる。

この着想は実際、二乗平均値の研究における、実り多い一つの指導原理となっている。そして Atkinson はこの指導原理に従い、Voronoi formula (3.5) の二乗平均値理論におけるアナロジーを追求して、彼の定理 8 に到達したのである。

Atkinson の式は、Voronoi の式に比べると格段に複雑であるが、そのこと自体、二乗平均値の方が約数問題よりも相当難しい、という事実の端的な現われと言っても良いだろう。

それにしてもやはり、Atkinson formula の見かけは際立って複雑である。そのあまりの複雑さがおそらく一因なのだと思うが、Atkinson formula は発表後、約 30 年もの間、ほとんど顧みられることなく放置されていた。その真価は、ようやく 1970 年代の末になって、認知され始めたのである。

まず 1978 年、Heath-Brown [9] が定理 8 を用いて次の結果を証明した。

定理 9

$$\int_2^T E(t)^2 dt = \left(\frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} d^2(n) n^{-3/2} \right) T^{3/2} + O(T^{5/4} (\log T)^2) \quad (3.7)$$

が成り立つ。

証明のスケッチ 証明の方針は、定理 8 の式を左辺に代入して、丁寧に積分していく正攻法である。項 $\Sigma_1(T, X)$ の二乗の積分の部分から (3.7) の右辺の主要項が出てくるのだが、その途上で指数積分を評価する次の不等式が有効に用いられる：

$$\left| \int_a^b \prod_{j=1}^k g_j(t) \exp(iff(t)) dt \right| \leq 2^{k+3} \prod_{j=0}^k M_j, \quad (3.8)$$

ここに $f(t), g_j(t)$ は単調連続な実関数で、 $f(t)$ は導関数も単調連続、そして $|g_j(t)| \leq M_j$ ($1 \leq j \leq k$), $|f'(t)| \geq M_0^{-1}$ が $[a, b]$ で成り立つものとする。

この不等式自体は、積分の第二平均値定理を用いて簡単に示すことができる。項 $\Sigma_2(T, X)$ の二乗の積分も同じ不等式を使って評価するが、こちらからは主要項は出てこない。そして最後に、 $\Sigma_1(T, X)$ と $\Sigma_2(T, X)$ の積の積分は Cauchy-Schwarz の不等式を使って評価することで、結論を得る。(証明終)

定理 9 から (2 節の (イ) で述べた議論と同様にして) 直ちに分かるように、

$$E(T) = \Omega(T^{1/4}) \quad (3.9)$$

が成り立つ*4。このことは、平均値定理の誤差項のさらに平均を考えることにも十分な意味があることを示している。

注意 定理 9 の誤差項も、Heath-Brown の証明で Cauchy-Schwarz を使った箇所などを丁寧に見てやることで、 $O(T(\log T)^4)$ にまで改良されている (Ivić [14], Preissmann [35])。また Ivić [14, p.61] が指摘しているように、この誤差項評価の改良は $E(T)$ 自体の評価の改良に繋がる。

続いて Jutila [17] が、定理 8 から (3.1) のような $E(T)$ の評価が導出できることを見出した。その議論はすでに述べた通り、Balasubramanian の (Riemann-Siegel formula を用いた) 原証明に比べると短いページ数で済むが、それでもかなりテクニカルである。短い区間での $E(t)$ の積分を考えたり、いくつかの因子の影響を partial summation で除去したりして、ある種の指数和の評価に持ち込むのであるが、本稿では詳細は省略する。Ivić [13] の 15.5 節を参照されたい。(Ivić のその本では、当時最新であった Kolesnik による指数和の評価を用いることで、 $E(T) \ll T^{35/108+\varepsilon}$ が示されている。)

その他、 $E(T)$ については、その高次のべき平均値や、精密なオメガ評価などに関しても、深い研究が数多く行なわれている。

本節の最後に、Atkinson の論文のもう一つの歴史的意義に触れておこう。Atkinson は彼の定理を証明するため、 s_1 と s_2 を独立な二つの複素変数として、積 $\zeta(s_1)\zeta(s_2)$ を考えるところから出発した。まず $\Re s_1 > 1$, $\Re s_2 > 1$ と仮定すると、 $\zeta(s)$ の

*4 この結果は Heath-Brown よりわずかに早く、Good [8] も全く別の方法で示している。

Dirichlet 級数表示が使えて、

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s_2}}$$

である。この右辺の二重和を $m = n$, $m < n$, $m > n$ に分割すると、 $m = n$ の部分は明らかに $\zeta(s_1 + s_2)$ である。 $m < n$ の部分を

$$\zeta_2(s_1, s_2) = \sum_{m < n} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2}}$$

と置けば、

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2) = \zeta_2(s_1, s_2) + \zeta_2(s_2, s_1) + \zeta(s_1 + s_2) \quad (3.10)$$

を得る。Atkinson はこの式において $s_1 = 1/2 + it$, $s_2 = 1/2 - it$ と置いて、臨界線上の二乗平均を考えたかったので、まず (3.10) の右辺を $\Re s_1 = 1/2$, $\Re s_2 = 1/2$ を含む範囲にまで解析接続する必要がある。こうして Atkinson は二重和 $\zeta_2(s_1, s_2)$ の解析接続の問題に遭遇し、Poisson の和公式を用いる方法でこれを解決した。

ところがこの $\zeta_2(s_1, s_2)$ はいわゆる Euler の二重和であって、言い換えれば Euler-Zagier の r -重ゼータ関数

$$\zeta_r(s_1, s_2, \dots, s_r) = \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_r^{s_r}}$$

の $r = 2$ の場合である。つまりこの Atkinson の 1949 年の論文は、Euler-Zagier 型の多重ゼータ関数を解析的な立場から扱った、史上最初の論文でもある。

上述の (3.10) を出発点とする Atkinson の証明は非常に長く、簡潔な紹介はとてもできない。Atkinson formula が約数問題に関する Voronoï formula の類似であることは既に述べたが、実はそれだけにとどまらず、Voronoï formula が Atkinson formula の証明の中で重要な役割を果たしていることだけ注意しておこう。Atkinson formula の証明は、成書だと Ivić [13], [14] に紹介があるが、Atkinson の原論文 [1] も案外読みやすい。^{*5}

^{*5} なお Atkinson の論文には一箇所、積分と極限との交換がそのままでは正当化できないところがあるが、これは筆者の論文 [26] の 6 節で指摘され、修復されている。

4 二乗平均値 (III)

二乗平均値について 1 節で示した三つの平均値定理のうち、3 節では $\sigma = 1/2$ 上での挙動を扱った定理 1 が Atkinson formula によっていかに精密化されるか、について解説した。ところで 1 節では領域 $\sigma > 1/2$ における二乗平均値の漸近式も示されているが、それらも精密化できるのであろうか。

本節では、 $1/2 < \sigma < 1$ においても Atkinson formula の類似が成り立ち、それを使えば $1/2 < \sigma < 1$ に対する $I_\sigma(T)$ の漸近式もいろいろと精密化できることを述べよう。

定理 1 を精密化した (1.15) から分かるように、 $\sigma = 1/2$ 上の二乗平均値の漸近式には第二主要項 $(2\gamma - \log(2\pi) - 1)T$ が存在する。同様に、 $1/2 < \sigma < 1$ においても、定理 4 を精密化した、第二主要項を含む次の形の漸近式が成り立つ：

$$I_\sigma(T) = \zeta(2\sigma)T + (2\pi)^{2\sigma-1} \frac{\zeta(2-2\sigma)}{2-2\sigma} T^{2-2\sigma} + E_\sigma(T), \quad (4.1)$$

ここで $E_\sigma(T)$ が誤差項である。この $E_\sigma(T)$ に対する Atkinson formula の類似は次のとおりである。

定理 10 $T \geq 2$ に対し、

$$E_\sigma(T) = \Sigma_{1,\sigma}(T, X) - \Sigma_{2,\sigma}(T, X) + O(\log T) \quad (4.2)$$

が成り立つ。ただし $\sigma_a(n) = \sum_{0 < d|n} d^a$ とおくとき、

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,\sigma}(T, X) &= \sqrt{2} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{3/4-\sigma} \\ &\quad \times \sum_{n \leq X} (-1)^n \sigma_{1-2\sigma}(n) n^{\sigma-5/4} e(T, n) \cos(f(T, n)), \\ \Sigma_{2,\sigma}(T, X) &= 2 \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{1/2-\sigma} \\ &\quad \times \sum_{n \leq B(T, \sqrt{X})} \sigma_{1-2\sigma}(n) n^{\sigma-1} \left(\log \frac{T}{2\pi n} \right)^{-1} \cos(g(T, n)) \end{aligned}$$

である。 $(\sigma = 1/2$ のとき、上の $\Sigma_{1,\sigma}(T, X)$, $\Sigma_{2,\sigma}(T, X)$ はそれぞれ定理 8 の $\Sigma_1(T, X)$, $\Sigma_2(T, X)$ と一致する。)

この定理は $1/2 < \sigma < 3/4$ の時に筆者 [26] が証明し、 $3/4 \leq \sigma < 1$ の時には筆者と Meurman との共著論文 [31, III] において得られたものである。

この式を用いることで、[26], [31, III] においては、Atkinson formula の帰結として 3 節で紹介したようないくつかの結果の類似を $E_\sigma(T)$ に対して導出している。上からの評価としては

$$E_\sigma(T) = O(T^{1/(1+4\sigma)}(\log T)^2) \quad (1/2 < \sigma < 1) \quad (4.3)$$

が得られ、また $E_\sigma(T)$ の二乗平均としては $1/2 < \sigma < 3/4$ においては

$$\begin{aligned} \int_2^T E_\sigma(t)^2 dt &= \frac{2}{5-4\sigma} (2\pi)^{2\sigma-3/2} \frac{\zeta^2(3/2)}{\zeta(3)} \zeta(5/2-2\sigma) \zeta(1/2+2\sigma) T^{5/2-2\sigma} \\ &\quad + O(T^{7/4-\sigma} \log T), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$\sigma = 3/4$ では

$$\int_2^T E_{3/4}(t)^2 dt = \frac{\zeta^2(3/2)\zeta(2)}{\zeta(3)} T \log T + O(T(\log T)^{1/2}), \quad (4.5)$$

そして $3/4 < \sigma < 1$ においては

$$\int_2^T E_\sigma(t)^2 dt = O(T) \quad (4.6)$$

が示されている。したがって $1/2 < \sigma < 3/4$ において $E_\sigma(T) = \Omega(T^{3/4-\sigma})$, また $E_{3/4}(T) = \Omega(\sqrt{\log T})$ であることも分かる。なお (4.4), (4.5) における誤差項は、その後いずれも $O(T)$ に改良されている ([31, II], [25])。

$E_\sigma(T)$ の二乗平均についてのこれらの結果から、 $E_\sigma(T)$ の振る舞いが $\sigma = 3/4$ のところで何らかの「相転移」を起こしていることが分かる。Atkinson formula の証明に Voronoï formula が本質的な役割を果たしていることは既述したが、同様に、定理 10 の証明には Oppenheim が得た、 $\sum_{n \leq x} \sigma_a(n)$ に対する Voronoï 型 formula が重要である。そしてこの Oppenheim formula の収束性が、 $a = -1/2$ を境にして様相を異にする。定理 10 に出てくる $\sigma_{1-2\sigma}(n)$ においては、この $a = -1/2$ に対応する σ の値は $\sigma = 3/4$ であり、これが上述した「相転移」が起こる内的理由である。

この Oppenheim formula の収束性の違いにより、定理 10 の証明自体も、 $\sigma = 3/4$ を境として違いが生じている。すなわち、 $1/2 < \sigma < 3/4$ においては基本的には $\sigma = 1/2$ の場合の Atkinson の議論を真似るだけで証明ができるが、 $3/4 \leq \sigma < 1$ においては Riesz 平均を用いた新しい工夫が必要である。

上からの評価 (4.3) は、 $E(T)$ の評価 (3.1) の素直なアナロジーであるが、この評価のべき指数 $1/(1+4\sigma)$ を (4.1) の第二主要項のべき指数 $2-2\sigma$ と比べると、実は σ が 1 に近いときには誤差項評価が第二主要項のオーダーを上回ってしまっていることがわかる。これでは誤差項評価としての意味をなさない。第二主要項のべき指数は $\sigma \rightarrow 1$ のときに 0 に近づくのだから、少なくとも同様に、 $\sigma \rightarrow 1$ のときにべき指数が 0 に近づくような誤差項評価がなされるべきである。このような評価は最初、Ivić [14] によって示された。彼の結果は exponent pair を用いて一般的に示されているが、特別な場合として

$$E_\sigma(T) = O(T^{1-\sigma}) \quad (1/2 < \sigma < 1) \quad (4.7)$$

が得られている。ただしこの評価は、今度は逆に $\sigma = 1/2$ の近くで (4.3) より悪い。

最終的には Ivić と筆者との共著論文 [16] において、

$$E_\sigma(T) = O(T^{2(1-\sigma)/3}(\log T)^{2/9}) \quad (1/2 < \sigma < 1) \quad (4.8)$$

が証明された。この評価は $1/2 < \sigma < 1$ の全域において、(4.1) の第二主要項と (4.3) のどちらよりも良い評価を与えている。この [16] においては exponent pair の理論を用いて他にも種々の上からの評価が論じられている。

以上により、定理 4 の右辺の第一主要項 $\zeta(2\sigma)T$ 以外の部分は、 $\sigma \rightarrow 1$ のとき、 T についてのべき指数が 0 に近づくような誤差評価ができることが分かった。これは定理 2 において $\sigma > 1$ のときの誤差項が $O(1)$ であるという事実と滑らかに繋がるわけである。

なお、ちょうど境目のところである $\sigma = 1$ における平均値の挙動も研究されていて、Balasubramanian, Ivić と Ramachandra [3] により

$$I_1(T) = \zeta(2)T - \pi \log T + O((\log T)^{2/3}(\log \log T)^{1/3}) \quad (4.9)$$

が証明されている。

5 高次べき平均 ($\sigma = 1/2$)

前節まで我々は、主として二乗平均値の理論を扱ってきた。しかし、2 節で述べたように、Lindelöf 予想を視野に入れるならば、二乗平均のみならず、より高次のべき

平均についても研究を進めることが望ましい。そこで以下、

$$I_{\sigma}^{[k]}(T) = \int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt$$

とおく。 $I_{\sigma}^{[1]}(T) = I_{\sigma}(T)$ (二乗平均) である。2 節では、臨界線上の四乗平均 $I_{1/2}^{[2]}(T)$ については漸近式 (2.2) が得られているが、 $k \geq 3$ に対しては上からの評価 (2.4) ですら示されていないことを述べた。では、 $I_{1/2}^{[k]}(T)$ に対して、どの程度の上からの評価なら証明可能であろうか。

簡単な考察から始めよう。 $k \geq 2$ に対し、

$$I_{1/2}^{[k]}(T) = \int_2^T |\zeta(1/2 + it)|^{2k-4} |\zeta(1/2 + it)|^4 dt$$

と分けて、 $(2k-4)$ -乗の部分を (1.1) で $c = 1/6$ としたものによって評価すれば、

$$I_{1/2}^{[k]}(T) \ll (T^{1/6+\varepsilon})^{2k-4} \int_2^T |\zeta(1/2 + it)|^4 dt$$

となる。残りの四乗平均に (2.2) を適用すれば、

$$I_{1/2}^{[k]}(T) \ll (T^{1/6+\varepsilon})^{2k-4} \cdot T(\log T)^4 \ll T^{(k+1)/3+\varepsilon} \quad (k \geq 2) \quad (5.1)$$

が得られる。

特に $k = 6$ の場合、つまり 12 乗平均の場合には上の評価は $I_{1/2}^{[6]}(T) = O(T^{7/3+\varepsilon})$ を与える。ところが Heath-Brown [10] は 1978 年、この評価を改良する次の定理を証明した。

定理 11

$$I_{1/2}^{[6]}(T) = O(T^{2+\varepsilon}) \quad (5.2)$$

が成り立つ。(正確には Heath-Brown はもう少し精密に、 $O(T^2(\log T)^{17})$ なる評価を得ている。)

これを用いると、 $3 \leq k \leq 5$ の場合の評価ももう少し改善できる。上の (5.1) から得られる評価のべき指数は、(ε -factor を除けば) $k = 3, 4, 5$ に対してそれ

それぞれ $4/3, 5/3, 2$ であるが、(5.2) と Hölder の不等式を使えばこれらをそれぞれ $5/4, 3/2, 7/4$ にまで改良できる。例えば六乗平均、つまり $k = 3$ の場合には、

$$\begin{aligned}
 I_{1/2}^{[3]}(T) &= \int_2^T |\zeta(1/2 + it)|^6 dt \\
 &= \int_2^T |\zeta(1/2 + it)|^3 \cdot |\zeta(1/2 + it)|^3 dt \\
 &\leq \left(\int_2^T |\zeta(1/2 + it)|^{3 \cdot (4/3)} dt \right)^{3/4} \cdot \left(\int_2^T |\zeta(1/2 + it)|^{3 \cdot 4} dt \right)^{1/4} \\
 &= (I_{1/2}^{[2]}(T))^{3/4} \cdot (I_{1/2}^{[6]}(T))^{1/4} \\
 &\ll (T(\log T)^4)^{3/4} \cdot (T^{2+\varepsilon})^{1/4} \ll T^{5/4+\varepsilon}
 \end{aligned}$$

と計算すれば良い*6。また $k \geq 6$ の場合の評価も、(2.2) の代わりに定理 11 を用いれば

$$I_{1/2}^{[k]}(T) \ll (T^{1/6+\varepsilon})^{2k-12} \cdot T^{2+\varepsilon} \ll T^{k/3+\varepsilon} \quad (k \geq 6) \quad (5.3)$$

となって、(5.1) を改善できる。個々の値の評価 (1.1) を、 $c = 1/6$ ではなく最新のもう少し良い評価で置き換えれば、当然もう少し小さい指数による評価が得られる。

定理 11 の証明のスケッチ この証明はかなり複雑で長いが、重要なテクニックがいくつも現われてくる証明なので、その骨組みだけでも説明しよう。まず、定理の主張を、次の命題に帰着させる：

命題 1 $t_1, \dots, t_R$ が実数で、 $|t_m| \leq T$, $|t_m - t_n| \geq 1$ ($m \neq n$), $|\zeta(1/2 + it_m)| \geq V$ を満たすとすれば、 $R \ll T^2 V^{-12} (\log T)^{16}$ が成り立つ。

これは「ゼータ関数が大きな値を取るような点はあまり多くはない」という、いかにももっともな直感を定式化した命題であって、ゼータ関数の理論ではしばしば極めて有効なものである。

まず、この命題から定理 11 を導く。不等式

$$\int_2^T |\zeta(1/2 + it)|^{12} dt \leq \sum_{2 \leq m \leq T} \max_{m \leq t \leq m+1} |\zeta(1/2 + it)|^{12}$$

*6 同様に、 $k = 4$ なら $|\zeta|^8 = |\zeta|^2 \cdot |\zeta|^6$ と分け、 $k = 5$ なら $|\zeta|^{10} = |\zeta| \cdot |\zeta|^9$ と分けて、Hölder の不等式を使う。

は明らかである。区間 $m \leq t \leq m+1$ の間で最大値を与える点を t_m と書く。すると $m \neq n$ なら $|t_{2m} - t_{2n}| \geq 1$, $|t_{2m-1} - t_{2n-1}| \geq 1$ である。そこでまず偶数番号に注目し、

$$\mathcal{S}_v = \{t_{2m} \mid 2^v \leq |\zeta(1/2 + it_{2m})| \leq 2^{v+1}\}$$

とにおいて、命題 1 を ($V = 2^v$ として) 用いると

$$\begin{aligned} \sum_{t_{2m} \in \mathcal{S}_v} |\zeta(1/2 + it_{2m})|^{12} &\leq (2^{v+1})^{12} \sum_{t_{2m} \in \mathcal{S}_v} 1 \\ &\ll 2^{12(v+1)} \cdot T^2 (2^v)^{-12} (\log T)^{16} \ll T^2 (\log T)^{16} \end{aligned}$$

を得る。奇数番号のところも同様に評価する。そして、評価 (1.1) により v の値は大きくても $\log T$ の定数倍なので、上の評価式をさらに v について足し合わせることで定理 11 を得る。

そこで後は命題 1 を示せば良い。そのために Heath-Brown はまず、(2.5) と類似した不等式

$$|\zeta(1/2 + it)|^2 \ll (\log t) \left(1 + \int_{-(\log t)^2}^{(\log t)^2} e^{-|u|} |\zeta(1/2 + i(t+u))|^2 du \right) \quad (5.4)$$

から始める。この不等式の証明は省略する。

命題 1 の条件を満たすような t_m で、短い区間 $[T_0, T_0 + J]$ ($2T/3 \leq T_0, T_0 + J \leq 5T/6$) に入っているものの集合を $\mathcal{S}_1$ と書く。また G を $G \asymp V^2 (\log T)^{-2}$, $G \geq (\log T)^3$ を満たす parameter とし、 $\mathcal{S}_1$ の元でさらに区間 $[\tau - G/2, \tau + G/2]$ ($T_0 \leq \tau \leq T_0 + J + G/2$) に入っているものの集合を $\mathcal{S}'_1 = \mathcal{S}'_1(\tau)$ とすれば、不等式 (5.4) から

$$\begin{aligned} V^2 |\mathcal{S}'_1| &\leq \sum_{t_m \in \mathcal{S}'_1} |\zeta(1/2 + it_m)|^2 \\ &\ll (\log T) \left(|\mathcal{S}'_1| + \int_{\tau-G}^{\tau+G} |\zeta(1/2 + it)|^2 \left(\sum_{t_m \in \mathcal{S}'_1} e^{-|t-t_m|} \right) dt \right) \\ &\ll (\log T) \left(|\mathcal{S}'_1| + \int_{\tau-G}^{\tau+G} |\zeta(1/2 + it)|^2 dt \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

が得られる。この右辺の積分に、Atkinson の定理 8 を適用すると、

$$\int_{\tau-G}^{\tau+G} |\zeta(1/2 + it)|^2 dt \ll G \log \tau + G \sum_{T^{1/2} \leq K=2^k \leq TG^{-2}(\log t)^3} (TK)^{-1/4} \\ \times \left(|S(K) + K^{-1} \int_0^K |S(x)| dx \right) e^{-G^2 K/T}$$

が示せる。ただし

$$S(x) = \sum_{K < n \leq K+x} (-1)^n d(n) \exp(i(f(T, n) + \pi/4))$$

である。この $S(x)$ について、再び、「この量が大きい値を取る点はどのくらいあるか」を定量的に評価する。ここでは large sieve と呼ばれる理論に基づく Halász の技法が用いられる。このあたりの議論の詳細はすべて省略するが、得られた $S(x)$ の評価を使うことで (5.5) の右辺が評価でき、

$$J \ll G^3 (\log T)^{-2} \quad (5.6)$$

の下で $|S_1| \ll TG^{-3}(\log T)^2$ に到達する。

S_1 は短い区間 $[T_0, T_0 + J]$ に入っている t_m たちの個数であった。それらの短い区間たちで $|t_m| \leq T$ なる t_m を全てカバーするにはおおよそ T/J 個のこうした S_1 が必要になるので、

$$R \ll (T/J) \cdot TG^{-3}(\log T)^2 = T^2 J^{-1} G^{-3} (\log T)^2 \quad (5.7)$$

となる。条件 (5.6) を満たす最大の J として $J \asymp G^3 (\log T)^{-2}$ と取れば、(5.7) から

$$R \ll T^2 G^{-6} (\log T)^4$$

を得る。ところが $G \asymp V^2 (\log T)^{-2}$ だったから、これを上式に代入すれば命題 1 の結論が得られ、定理 11 の証明が完成する。 (証明終)

注意 不等式 (5.4) を二乗から一般の m 乗の場合へと拡張した不等式が Ivić [13] の第 7 章で証明されていることを注意しておく。その一般化された不等式を (2.5) の代わりに用いても 2 節で述べた定理 6 の証明は進行する。

6 高次べき平均 ($\sigma > 1/2$)

1 節では、二乗平均の計算が、 $\sigma > 1$ では簡単で、 $\sigma = 1/2$ に近付くと難しくなることを見た。また 4 節で扱った $E_\sigma(T)$ ($1/2 < \sigma < 1$) に関連する種々の評価においても、 σ が 1 に近付くほど誤差評価が良くなることを見た。

そこで、高次のべき平均についても同様の現象を期待しても良いだろう。すなわち、 $\sigma = 1/2$ の線上における予想 (2.4) は $k \geq 3$ に対しては証明されていないわけであるが、 σ が $1/2$ よりも大きくなって 1 に近づけば、 $I_\sigma^{[k]}(T) = O(T)$ のような良い評価を示せるのではないだろうか。本節では、そのような結果が実際に証明可能であることを紹介する。

まず、Carlson による古典的な結果の紹介から始める。実数 σ と自然数 k に対し、

$$\int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = O(T^{1+\xi}) \quad (6.1)$$

が成り立つような正数 ξ の下限を $\xi_k(\sigma)$ と書き、また

$$\int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = O(T) \quad (6.2)$$

が成り立つような σ の下限を σ_k と書くことにする。絶対収束域 $\sigma > 1$ においては

$$|\zeta(\sigma + it)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+it}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} = O(1)$$

であるから、(6.2) は明らかに成り立つが、もっと小さい σ の値に対しても (6.2) が成り立つかどうか、が問われているわけである。この問題に対して、Carlson の定理は次の主張である。

定理 12 $0 < \alpha < 1$ なる任意の α に対し、

$$\sigma_k \leq \max \left\{ 1 - \frac{1 - \alpha}{1 + \xi_k(\alpha)}, \frac{1}{2} \right\} \quad (6.3)$$

が成り立つ。

証明のスケッチ 自然数 n を k 個の自然数の積として表す書き表し方の（順序が異なるものは別々の表し方とみての）個数を $d_k(n)$ と書く。 $k = 2$ のときは

$d_2(n) = d(n)$ (約数関数) に他ならず、この $d_k(n)$ を一般約数関数と呼ぶ。このとき、 $\delta > 0$ と $\max\{1/2, \alpha\} < \Re s < \alpha + 1$ ($s \neq 1$) に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) n^{-s} e^{-\delta n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(z-s) \zeta(z)^k \delta^{s-z} dz \quad (6.4)$$

が成り立つ。この式は、(3.6) の一般化である

$$\zeta(s)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s} \quad (\Re s > 1) \quad (6.5)$$

を右辺に代入して、よく知られた Mellin 逆変換の公式

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} ds \quad (c > 0, x > 0) \quad (6.6)$$

を適用すれば簡単に示せる。

式 (6.4) の右辺の積分路を $\Re z = \alpha$ まで移動すると、その途中で通過する極は $z = s$ と $z = 1$ であるが、 $z = s$ での留数は $\zeta(s)^k$ であり、 $z = 1$ での留数は十分小さいことが分かる。よって

$$\begin{aligned} \zeta(s)^k &= \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) n^{-s} e^{-\delta n} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma(z-s) \zeta(z)^k \delta^{s-z} dz + (\text{small}) \end{aligned}$$

で、この右辺の第一項、第二項をそれぞれ S_1, S_2 と書けば、

$$\begin{aligned} \int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt &= \int_2^T |S_1 - S_2 + (\text{small})|^2 dt \\ &\ll \int_2^T |S_1|^2 dt + \int_2^T |S_2|^2 dt + (\text{small}) \end{aligned}$$

であるから、この右辺の二つの積分を評価すれば良い。これを、 $d_k(n) \ll n^\varepsilon$ であることや Stirling の公式によって計算する。特に S_2 を含む積分から $\zeta(z)$ の $2k$ -乗積分が現れるので、それを (6.1) によって $O(T^{1+\xi_k(\alpha)+\varepsilon})$ と評価し、 δ を適切に選ぶことで

$$\int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt \ll T + T^{(1+\xi_k(\alpha))(1-\sigma)/(1-\alpha)+\varepsilon}$$

となる。この右辺が $O(T)$ となる条件から定理の結論が得られる。(証明終)

例えば $\alpha = 1/2$ の場合、(1.1) で $c = 1/6$ として用いると

$$\int_2^T |\zeta(1/2 + it)|^{2k} dt \ll T^{1+k/3+\varepsilon}$$

だから、 $\xi_k(1/2) \leq k/3$ が分かる。すると

$$1 - \frac{1 - 1/2}{1 + \xi_k(1/2)} \leq 1 - \frac{1}{2(1 + k/3)} = 1 - \frac{3}{6 + 2k}$$

となるから、定理 12 より

$$\sigma_k \leq 1 - \frac{3}{6 + 2k} \quad (6.7)$$

である。したがって (6.2) から、任意の自然数 k に対して、

$$\int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = O(T) \quad \left(\sigma > 1 - \frac{3}{6 + 2k} \right) \quad (6.8)$$

が得られる。

しかしこれは、さほど目覚ましい結果ではない。二乗平均、つまり $k = 1$ の場合には、定理 4 から $\sigma_1 \leq 1/2$ が分かるから、(6.7) から得られる結果はそれより悪い。また、より大きい k に対しても、今日では (6.7), (6.8) よりもずっとシャープな評価が知られている。上の結果からは、例えば $k = 3, 4, 5, 6$ に対して (6.8) の成り立つ範囲はそれぞれ

$$\sigma > \frac{3}{4}, \sigma > \frac{11}{14}, \sigma > \frac{13}{16}, \sigma > \frac{5}{6}$$

となるが、Ivić のテキスト [13] の第 8 章には、それぞれの k に対して改良された不等式

$$\sigma > \frac{7}{12}, \sigma > \frac{5}{8}, \sigma > \frac{41}{60}, \sigma > \frac{5}{7} \quad (6.9)$$

が示されている。こうした評価に到達するためには、5 節でも述べた、「ゼータ関数が大きい値を取る点はどのくらいあるか」に関する、立ち入った定量的な議論が必要である。

さて (6.8) により、とにかく 1 より小さい、ある σ_k が存在して、 $\sigma > \sigma_k$ では

$$\int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = O(T)$$

が成り立つことが分かった。ところが実は、ある σ に対してこうした $O(T)$ という評価が得られれば、それより右側の σ に対して漸近式が成り立つ、という結果がある。これも Carlson によるものである：

定理 13 Dirichlet 級数 $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ が $\sigma > 1$ で絶対収束し、 $\sigma \geq \alpha$ まで解析接続可能で、その範囲で ($s = 1$ で極を持つかもしれないが、それ以外では) 正則、かつその大きさは $|t|$ に関して多項式のオーダーで押さえられるとする。この $f(s)$ について

$$\int_{-T}^T |f(\alpha + it)|^2 dt = O(T)$$

が成り立つとすれば、 $\sigma > \alpha$ の中の任意の帯領域内で一様に、

$$\int_2^T |f(\sigma + it)|^2 dt \sim T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}$$

が成り立つ。

この定理も実は定理 12 と似通った手法で証明できるのだが、ここでは詳細は省略する。

定理 13 を $f(s) = \zeta(s)^k$ に適用すると、(6.5) に注意すれば、 $\sigma > \sigma_k$ において

$$\int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt \sim T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)^2}{n^{2\sigma}} \quad (6.10)$$

が得られることになる。

さらに、この漸近式を

$$\int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)^2}{n^{2\sigma}} + R_{\sigma}^{[k]}(T)$$

と書いて、誤差項 $R_{\sigma}^{[k]}(T)$ を評価する問題も考えられている。上でも引用した Ivić のテキストでは、

$$R_{\sigma}^{[k]}(T) \ll T^{(2-\sigma-\sigma_k)/(2-2\sigma_k)+\varepsilon} \quad (6.11)$$

が示されている。具体的な k の値で見ると、 $k = 3, 4, 5, 6$ に対し、 σ_k を (6.9) の右辺の値で置き換えて用いると、(6.9) の範囲で

$$\begin{aligned} R_{\sigma}^{[3]}(T) &\ll T^{(17-12\sigma)/10+\varepsilon}, & R_{\sigma}^{[4]}(T) &\ll T^{(11-8\sigma)/6+\varepsilon}, \\ R_{\sigma}^{[5]}(T) &\ll T^{(79-60\sigma)/38+\varepsilon}, & R_{\sigma}^{[6]}(T) &\ll T^{(9-7\sigma)/4+\varepsilon} \end{aligned} \quad (6.12)$$

なる評価が与えられていることになる。

これら (6.11), (6.12) の誤差項評価でいささか不満足なのは、誤差評価の指数が $\sigma \rightarrow 1-0$ のとき、0 に近づいていかないことである。二乗平均値の場合には 4 節において、漸近式の誤差項評価のべき指数が $\sigma \rightarrow 1-0$ で 0 に近づく形の式 (4.7), (4.8) がすでに得られていることを見た。しかしその証明は $\zeta(s)$ の二乗平均の特殊な形態に依存しているため、高次べき平均の場合には使えない。

そこで、高次べき $\zeta(s)^k = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n)n^{-s}$ を含むような一般的な ($\sigma > 1$ で絶対収束する) Dirichlet 級数 $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ について、その二乗平均が漸近式

$$\int_2^T |f(\sigma + it)|^2 dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} + R_{\sigma}(T; f)$$

($R_{\sigma}(T; f)$ が誤差項) を与えるような 1 に近い σ の範囲で、そのべき指数が $\sigma \rightarrow 1-0$ のとき 0 に近づくような誤差項評価を示すことはできないか、という問題に遭遇する。

この問題に関しては最初に筆者 [28] が、Rankin-Selberg の L 関数の場合に、そのような誤差評価を証明する方法を発見した。Rankin-Selberg L 関数については、その Dirichlet 係数の和の漸近式の誤差項評価や、誤差項の二乗平均、さらに係数の二乗和の評価などが色々と調べられているので、それらを組み合わせて使うのである。筆者の方法はすぐに Kanemitsu らの論文 [22] において一般的な枠組みで定式化された。続いて Ivić [15] がさらに改良を加えた。特に $\zeta(s)$ の高次べき平均の場合に、Kanemitsu らの結果は $k \geq 3$ に対し

$$R_{\sigma}^{[k]}(T) \ll T^{3k(1-\sigma)/(k+2-k\sigma)+\varepsilon} \quad \left(1 - \frac{1}{k} < \sigma < 1\right) \quad (6.13)$$

であり、Ivić はこのべき指数をさらに

$$2(1-\sigma)/(1-\beta_k) + \varepsilon \quad (\max\{\beta_k, 1/2\} < \sigma < 1) \quad (6.14)$$

に改良した^{*7}。ただし β_k は、一般約数関数 $d_k(n)$ の x までの和の漸近式の誤差項を $\Delta_k(x)$ と書くとき、

$$\int_2^X \Delta_k(x)^2 dx \ll X^{1+2b_k}$$

^{*7} 筆者の着想が $\zeta(s)$ の高次べき平均の場合にも適用できることは、筆者も初めから気づいていて、「これはさっさと論文にしないと誰かに先を越されるかなあ」などと思っていたら、たちまち金光さんたちや Ivić に先を越されたのである。

が成り立つような b_k の下限として定義される。Ivić の指数 (6.14) は、 k と σ の値によっては 1 を越えることもある式なので注意が必要であるが、少なくとも (6.13) が成り立つための条件である $1 - k^{-1} < \sigma < 1$ においては、(6.14) は (6.13) の改良を与える。このことは $\beta_3 = 1/3, \beta_4 = 3/8$, そして $\beta_k \leq (k-1)/(k+2)$ ($k \geq 4$) といった既知の事実を使えば容易に示せる。また Ivić は (6.14) 以外に、 $2(1-\sigma)/(2-\sigma_k-\sigma)+\varepsilon$ というべき指数による評価も得ている。その後、筆者は [30] において、Ivić [15] の議論を改めて一般的な枠組みで扱い、保型 L 関数の平均値に応用している。

上で引用したいいくつかの論文のように、平均値定理を一般的なゼータ関数、 L 関数に対して考察した研究は膨大にある。本稿で述べた、Riemann ゼータ関数の平均値に対する色々な手法も、そうした一般化ができるかどうか、多くの数学者が研究している。(2000 年ごろまでの様子は、[27] の後半部にサーベイがある。)

ただ、一般化が可能かどうかは、個々の手法によって大きく異なる。例えば近似関数等式は概して一般的な枠組みに馴染みやすく、Chandrasekharan と Narasimhan の理論 [7] などは古典的なものである。筆者の [28] に始まった上述の一連の研究もそうであるし、Carlson の定理 13 など一般的な平均値定理の一種である。

これに比して、Riemann の $\zeta(s)$ に対して強力な道具であった Atkinson formula は、現在ではいくつかの証明法が知られているが、その一般化は (Dirichlet の L 関数の場合*⁸を除くと) 簡単ではない。Jutila は Laplace 変換を利用して、保型 L 関数の一乗平均の場合 ([20]) や、Hardy 関数の場合 ([21]) に Atkinson formula の類似を得ている。また Motohashi [34] は $\zeta(s)$ の重みつき四乗平均に対する Atkinson 型の式を得ており、Jutila [19] は Motohashi の式の類似物を保型 L 関数に対して導出している。しかしゼータ関数、 L 関数の全く一般的な枠組みにおける Atkinson formula の正しい類似がどのようなものであるか、は依然として謎のままのようである。

*⁸ Dirichlet の L 関数に対する Atkinson 型 formula については、Meurman [32], Motohashi [33], Katsurada and Matsumoto [23], Ishikawa [12] など、多くの研究がある。

参考文献

- [1] F. V. Atkinson, The mean-value of the Riemann zeta function, *Acta Math.* **81** (1949), 353–376.
- [2] R. Balasubramanian, An improvement on a theorem of Titchmarsh on the mean square of $|\zeta(1/2+it)|$, *Proc. London Math. Soc.* (3)**36** (1978), 540–576.
- [3] R. Balasubramanian, A. Ivić and K. Ramachandra, The mean square of the Riemann zeta-function on the line $\sigma = 1$, *L'Enseignement Math.* **38** (1992), 13–25.
- [4] R. Balasubramanian and K. Ramachandra, Some local convexity theorems for the zeta-function like analytic functions, *Hardy-Ramanujan J.* **11** (1988), 1–12.
- [5] R. Balasubramanian and K. Ramachandra, A lemma in complex function theory I & II, *Hardy-Ramanujan J.* **12** (1989), 1–5 & 6–13.
- [6] J. Bourgain and N. Watt, Decoupling for perturbed cones and the mean square of $|\zeta(1/2+it)|$, *Int. Math. Res. Notices* (2018), no.17, 5219–5296.
- [7] K. Chandrasekharan and R. Narasimhan, The approximate functional equation for a class of zeta-functions, *Math. Ann.* **152** (1963), 30–64.
- [8] A. Good, Ein Ω -Resultat für das quadratische Mittel der Riemannschen Zeta-funktion auf der kritischen Linie, *Invent. Math.* **41** (1977), 233–251.
- [9] D. R. Heath-Brown, The mean value theorem for the Riemann zeta-function, *Mathematika* **25** (1978), 177–184.
- [10] D. R. Heath-Brown, The twelfth power moment of the Riemann-function, *Quart. J. Math. Oxford* (2)**29** (1978), 443–462.
- [11] M. N. Huxley, A note on exponential sums with a difference, *Bull. London Math. Soc.* **26** (1994), 325–327.
- [12] H. Ishikawa, A difference between the values of $|L(1/2+it, \chi_j)|$ and $|L(1/2+it, \chi_k)|$ I & II, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **55** (2006), 41–66 & **56** (2007), 1–9.
- [13] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function*, Wiley, 1985.
- [14] A. Ivić, *Lectures on Mean Values of the Riemann Zeta Function*, Tata Inst.

- Fund. Res., Springer, 1991.
- [15] A. Ivić, On mean values of some zeta-functions in the critical strip, *J. Théor. Nombr. Bordeaux* **15** (2003), 163–178.
 - [16] A. Ivić and K. Matsumoto, On the error term in the mean square formula for the Riemann zeta-function in the critical strip, *Monatsh. Math.* **121** (1996), 213–229.
 - [17] M. Jutila, Riemann’s zeta-function and the divisor problem, *Ark. Mat.* **21** (1983), 75–96.
 - [18] M. Jutila, *Lectures on a Method in the Theory of Exponential Sums*, Tata Inst. Fund. Res., Springer, 1987.
 - [19] M. Jutila, The fourth moment of Riemann’s zeta-function and the additive divisor problem, in “Analytic Number Theory”, *Proc. Conf. in Honor of H. Halberstam*, vol. 2, B. C. Berndt et al. (eds.), *Progr. Math.* **139**, Birkhäuser, 1996, pp. 517–536.
 - [20] M. Jutila, Atkinson’s formula revisited, in “Voronoi’s Impact on Modern Science, Book 1”, P. Engel and H. Syta (eds.), *Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine*, 1998, pp. 137–154.
 - [21] M. Jutila, Atkinson’s formula for Hardy’s function, *J. Number Theory* **129** (2009), 2853–2878.
 - [22] S. Kanemitsu, A. Sankaranarayanan and Y. Tanigawa, A mean value theorem for Dirichlet series and a general divisor problem, *Monatsh. Math.* **136** (2002), 17–34.
 - [23] M. Katsurada and K. Matsumoto, A weighted integral approach to the mean square of Dirichlet L -functions, in “Number Theory and its Applications”, *Dev. Math.* **2**, Kluwer, 1999, pp. 199–229.
 - [24] J.P. Keating and N. C. Snaith, Random matrices and L -functions, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 2859–2881.
 - [25] K.-Y. Lam, Some results on the mean values of certain error terms in analytic number theory, *M. Phil. Thesis*, Univ. of Hong Kong, 1997.
 - [26] K. Matsumoto, The mean square of the Riemann zeta-function in the critical strip, *Japanese J. Math.* **15** (1989), 1–13.
 - [27] K. Matsumoto, Recent developments in the mean square theory of the Rie-

- mann zeta and other zeta-functions, in “Number Theory”, R. P. Bambah et al. (eds.), Hindustan & Indian Nat. Sci. Acad./Birkhäuser, 2000, pp. 241–286.
- [28] K. Matsumoto, The mean values and the universality of Rankin-Selberg L -functions, in “Number Theory”, Turku Sympos. on Number Theory in Memory of K. Inkeri, M. Jutila and T. Metsänkylä (eds.), Walter de Gruyter, 2001, pp. 201–221.
- [29] 松本耕二、リーマンのゼータ関数、朝倉書店、2005.
- [30] K. Matsumoto, Liftings and mean value theorems for automorphic L -functions, Proc. London Math. Soc. (3)**90** (2005), 297–320.
- [31] K. Matsumoto and T. Meurman, The mean square of the Riemann zeta-function in the critical strip II & III, Acta Arith. **68** (1994), 369–382 & **64** (1993), 357–382.
- [32] T. Meurman, A generalization of Atkinson’s formula to L -functions, Acta Arith. **47** (1986), 351–370.
- [33] Y. Motohashi, A note on the mean value of the zeta and L -functions II, Proc. Japan Acad. **61A** (1985), 313–316.
- [34] Y. Motohashi, An explicit formula for the fourth power mean of the Riemann zeta-function, Acta Math. **170** (1993), 181–220.
- [35] E. Preissmann, Sur la moyenne de la fonction zêta, in “Analytic Number Theory and Related Topics”, K. Nagasaka (ed.), World Scientific, 1993, pp. 119–125.
- [36] K. Ramachandra, Lectures on the Mean-Value and Omega-Theorems for the Riemann Zeta-Function, Tata Inst. Fund. Res., Narosa Publ. House, 1995.
- [37] E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford, 1951; 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown, Oxford, 1986.

Riemann ゼータ関数の普遍性定理について

遠藤 健太（鈴鹿工業高等専門学校 電子情報工学科）

概要

Riemann ゼータ関数の普遍性定理を解説する．普遍性定理の証明法としては, Voronin の原証明, 確率論を用いた Bagchi の方法が有名である．本稿では確率論を仮定しない Voronin 流の証明を解説することにする．

1 Riemann ゼータ関数の普遍性定理

Riemann ゼータ関数の値分布について, 次の結果の紹介から始める．

定理 1.1 (Bohr-Courant [2]) 任意の $1/2 < \sigma \leq 1$ に対して, 集合

$$\{\zeta(\sigma + it) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

は, $\mathbb{C}$ において稠密である．

特に, 任意の $1/2 < \sigma < 1$ に対して, $\zeta(\sigma + it)$ は零にいくらでも近い値を取ることがわかる．この値 $\zeta(\sigma + it)$ は零にならないことを主張するのが Riemann 予想なので, この定理は Riemann 予想の難しさを示す一つの指標であるといえる．

Voronin は, 定理 1.1 の結果を高次元に拡張し, 次の定理を証明した．

定理 1.2 (Voronin [21]) 任意の $1/2 < \sigma \leq 1$ と正の整数 N に対して, 集合

$$\left\{ \left(\zeta(\sigma + it), \zeta'(\sigma + it), \dots, \zeta^{(N-1)}(\sigma + it) \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

は, $\mathbb{C}^N$ において稠密である．

Voronin は, 定理 1.2 をさらに関数空間へ拡張し, 次の驚くべき結果を証明した．

定理 1.3 (Voronin [22]) 集合 K を帯領域 $\{s \in \mathbb{C} \mid 1/2 < \sigma < 1\}$ のコンパクトな部分集合で, その補集合が連結であるものとする．また, 関数 f は K 上で零に値を

取らない連続関数で、 K の内部で正則であるとし、任意に $\epsilon > 0$ を固定する。このとき、ある $\tau > 0$ が存在して、

$$\max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \epsilon$$

が成り立つ。さらに、

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \lambda_1 \left\{ \tau \in [0, T] \mid \max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \epsilon \right\} > 0$$

が成り立つ。ただし、 λ_1 は、 $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を表す。

大雑把に述べると、定理 1.3 は、任意の零に値を取らない正則関数は、Riemann ゼータ関数の虚部方向への平行移動により一様に近似されることを主張している。この定理は Riemann ゼータ関数の普遍性定理と呼ばれている。

Voronin の発見後、他のゼータ関数への一般化やさまざまな種類の普遍性定理が証明されてきた。一連の研究における大きな発展としては、Bagchi [1] による確率論的手法が挙げられる。この手法は、普遍性定理の研究において標準的なものとして用いられている。この理論の解説については、[5, 6, 15] を見られたい。また、その他の発展をまとめたサーベイとして、[10] が参考になる。

本稿では、定理 1.3 を Voronin 流で解説する。Voronin の理論が解説された教科書として、[4] を挙げておく。なお、この教科書で扱っているのは $\log \zeta(s)$ の普遍性定理である。 $\zeta(s)$ の普遍性定理は、 $\log \zeta(s)$ の普遍性定理から簡単な議論で導ける。また、Voronin と Bagchi の証明の流れの大きな違いは、確率論の部分を除けば、平均値評価の取り扱いであることに注意しておく。Voronin の手法では、重み付きの平均値評価を考える必要があるが、Bagchi の手法は通常の意味での平均値評価のみで十分である。

最後に、Riemann ゼータ関数の普遍性定理と零点分布との関係性について述べよう。定理 1.3 の「関数 f として、Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ 自身を取ることができるか」という命題を考える。この命題を強再帰性 (strong recurrence) という。Riemann 予想を仮定すると、もちろん、強再帰性は成り立つ。実は、その逆も真であり、強再帰性が成り立てば Riemann 予想が導かれることが示されている [1]。さらに、定理 1.3 で仮定されている条件「関数 f が零に値を取らない」は本質的であり、取り除くことができないこともわかる。このように、定理 1.3 は、Riemann ゼータ関数の値の挙動の複雑さを示すだけでなく、零点分布についての情報も含んでいるといえる。

注意 1.4 定理 1.3 の主張は現代的な定式化であり, 実際に Voronin が証明したのは, 集合 K が円板 $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - 3/4| < r\}$, $0 < r < 1/4$ の場合である.

本稿を通して, 集合 D を $D = \{s \mid 1/2 < \sigma < 1\}$ とおく. 集合 K を D の部分集合でその補集合が連結なものとし, 関数 f を K 上で連続で, K の内部で正則な関数とする. また, 任意に $\epsilon > 0$ を固定しておく.

2 Voronin の証明の概略

$\sigma > 1$ における Riemann ゼータ関数 $\zeta(s + i\tau)$ の Euler 積表示

$$\zeta(s + i\tau) = \prod_p (1 - p^{-s-i\tau})^{-1}$$

から話を始める. 実部が $1/2 < \sigma < 1$ においては, 上記の表示は成り立たないのだが, 平均的には Euler 積を有限個で打ち切った関数

$$\zeta_M(s + i\tau) = \prod_{n=1}^M (1 - p_n^{-s-i\tau})^{-1}$$

で近似できることが証明できる. ここから, M が十分大きいときには

$$\max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - \zeta_M(s + i\tau)| < \frac{\epsilon}{3} \quad (2.1)$$

を満たす $\tau \in [0, T]$ が “たくさん” 存在していることがいえる. より正確に述べると,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \lambda_1 \left\{ \tau \in [0, T] \mid \max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - \zeta_M(s + i\tau)| < \frac{\epsilon}{3} \right\} = 1 + o(1)$$

が $M \rightarrow \infty$ のとき成り立つ.

次に, $\zeta_M(s + i\tau)$ を次のように変形してみる:

$$\begin{aligned} \zeta_M(s + i\tau) &= \prod_{n=1}^M \left(1 - p_n^{-s} \exp \left(-2\pi i \frac{\log p_n}{2\pi} \tau \right) \right)^{-1} \\ &= \prod_{n=1}^M \left(1 - p_n^{-s} \exp \left(-2\pi i \left\{ \frac{\log p_n}{2\pi} \tau \right\} \right) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

ただし, $\{x\}$ は, 実数 x の小数部分を表す.

ここで, Kronecker-Weyl の定理 (3.11) の特別な場合を見てみる. この定理によると, 任意の Jordan 可測な集合 $A \subset [0, 1)^M$ に対して,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \lambda_1 \left\{ \tau \in [0, T] \mid \left(\left\{ \frac{\log p_1}{2\pi} \tau \right\}, \dots, \left\{ \frac{\log p_M}{2\pi} \tau \right\} \right) \in A \right\} = \lambda_M(A)$$

が成り立つ. ただし, λ_M は $\mathbb{R}^M$ 上の Lebesgue 測度を表す. 例えば, $A = (\theta_{p_1} - \delta, \theta_{p_1} + \delta) \times \dots \times (\theta_{p_M} - \delta, \theta_{p_M} + \delta) \subset [0, 1)^M$, $\delta > 0$ と取れば, $(\{(\log p_1/(2\pi))\tau\}, \dots, \{(\log p_M/(2\pi))\tau\})$ が $(\theta_{p_1}, \dots, \theta_{p_M})$ を近似するような $\tau > 0$ を見つけることができる.

そこで, パラメータ $\underline{\theta}_M = (\theta_{p_n})_{n=1}^M \in [0, 1)^M$ 付きの複素関数

$$\zeta_M(s, \underline{\theta}_M) = \prod_{n=1}^M (1 - p_n^{-s} \exp(-2\pi i \theta_{p_n}))^{-1}$$

を考えると, $\zeta_M(s + i\tau)$ の平均的な挙動は, $\zeta_M(s, \underline{\theta}_M)$ と等しいことがいえる.

関数 $\zeta_M(s, \underline{\theta}_M)$ を詳しく調べることで, M が十分大きいとき, ある $\underline{\theta}_M^{(0)} = (\theta_{p_n}^{(0)})_{n=1}^M \in [0, 1)^M$ が存在して,

$$\max_{s \in K} \left| \zeta_M(s, \underline{\theta}_M^{(0)}) - f(s) \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad (2.2)$$

が成り立つことを示すことができる. この**稠密性についての命題**を示すには, Hilbert 空間における点列の並び替えに関する定理が必要で証明はかなり複雑となる.

関数 $\zeta_M(s, \underline{\theta}_M)$ のパラメータ $\underline{\theta}_M$ についての連続性を用いれば, ある $\delta = \delta(f, \epsilon, M)$ が存在して,

$$I_M = \left\{ \underline{\theta}_M = (\theta_{p_n})_{n=1}^M \mid \max_{1 \leq n \leq M} \|\theta_{p_n} - \theta_{p_n}^{(0)}\| < \delta \right\}$$

とおいたとき,

$$\underline{\gamma}_M(\tau) = \left(\left\{ \frac{\log p_1}{2\pi} \tau \right\}, \dots, \left\{ \frac{\log p_M}{2\pi} \tau \right\} \right) \in I_M \quad (2.3)$$

であれば,

$$\max_{s \in K} \left| \zeta_M(s + i\tau) - \zeta_M(s, \underline{\theta}_M^{(0)}) \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad (2.4)$$

が成り立つ. ただし, $\|x\|$ は実数 x と最も近い整数との距離を表す. ここで, $\zeta_M(s + i\tau) = \zeta_M(s, \underline{\gamma}_M(\tau))$ であることにも注意しておく. これより, M が十分大きいとき,

条件 (2.1), (2.3) を満たす $\tau \in [0, T]$ が見つければ, 不等式 (2.1), (2.2), (2.4) により,

$$\max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \epsilon$$

が成り立つ. 条件 (2.1), (2.3) を満たす $\tau \in [0, T]$ の存在には, **重み付きの平均値**を評価する必要がある.

以上が Voronin の戦略の概要である. 今後は, 証明を**稠密性についての命題と重み付きの平均値評価**の部分に分けて解説する.

3 準備

3.1 複素関数論からの道具

補題 3.1 集合 G を有界な単連結領域とする. 関数空間 $A^2(G)$ を

$$A^2(G) = \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ は正則, } \int_G |f(s)|^2 d\lambda_2(s) < \infty \right\}$$

で定義すると, $A^2(G)$ は内積

$$\langle f, g \rangle = \int_G f(s) \overline{g(s)} d\lambda_2(s)$$

に関して Hilbert 空間となる. ただし, λ_2 は $\mathbb{C}$ 上の Lebesgue 測度である.

注意 3.2 $A^2(G)$ は, Bergman 空間と呼ばれる空間である.

証明 例えば, [13, Proposition 7.2.2] を見よ. □

補題 3.3 集合 G を Jodan 領域とする. $f \in A^2(G)$ が任意の多項式 P に対して, $\langle f, P \rangle = 0$ を満たすとき, f は恒等的に零となる関数である.

証明 例えば, [13] の Proposition 7.2 とその直後の Remark 1 を見よ. □

補題 3.4 G を有界な単連結領域, $K \subset G$ をコンパクト集合とする. このとき, 関数 $f(s)$ が G 上で正則で

$$\int_G |f(s)|^2 d\lambda_2(s) < \infty$$

を満たせば,

$$\max_{s \in K} |f(s)| \leq \frac{1}{\pi d} \left(\int_G |f(s)|^2 d\lambda_2(s) \right)^{1/2}$$

が成り立つ. ただし, d は, K と G の補集合 G^c との距離を表す.

証明 例えば, [20, Lemma in §11.9] や [9, 補題 6.4] を見よ. □

補題 3.5 (Phragmén–Lindelöf の定理) 原点 O を通る二つの半直線 OA , OB で囲まれた角領域と二つの半直線上の点を Δ とし, OA , OB のなす角を $|\Delta|$ で表す. 関数 $f(z)$ が Δ を含むある領域で正則で, OA と OB 上である正の定数 M に対して $|f(z)| \leq M$ を満たし, Δ 内で, ある $\delta > 0$ に対して, $z = re^{i\theta}$ と表すとき

$$f(z) = O\left(e^{r^{\rho-\delta}}\right), \quad \rho = \frac{\pi}{|\Delta|}$$

が成り立つとする. このとき, $f(z)$ は Δ 内で $|f(z)| \leq M$ となる.

証明 例えば, [18, 第 10 章 定理 X. 6.], [19, Theorem 5.61] を見よ. □

補題 3.6 (Mergelyan の定理) 集合 $K \subset \mathbb{C}$ をコンパクトでその補集合が連結であるものとする. 関数 $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ を K 上で連続で, その内部で正則なものとする. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある多項式 $P(s)$ が存在して,

$$\max_{s \in K} |f(s) - P(s)| < \epsilon$$

が成り立つ.

証明 例えば, [14, Theorem 20.5] を見よ. □

3.2 解析的整数論からの道具

定理 3.7 (Riemann ゼータ関数の平均値定理) 任意の $1/2 < \sigma < 1$ に対して,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt = \zeta(2\sigma)$$

が成り立つ.

証明 例えば, [9, 第 9 章], [20, VII] を見よ. □

定理 3.8 (Carlson の平均値定理) Dirichlet 級数 $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ は, $\sigma > 1$ において絶対収束し, ある実数 $\alpha < 1$ が存在して, $\sigma \geq \alpha$ に解析接続可能で, $s = 1$ を

除いて正則であるとする。また, $\sigma \geq \alpha$ において, $f(s) = O(|t| + 2)^C$ が $s = 1$ の近傍を除いて成り立つとする。ただし, C はある正の定数である。このとき,

$$\int_{-T}^T |f(\alpha + it)|^2 dt = O(T)$$

であれば, $\alpha < \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ なる任意の帯領域内で一様に,

$$\int_2^T |f(\sigma + it)|^2 dt \sim T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}$$

が成り立つ。

証明 例えば, [9, 定理 9.4] や [20, Lemma in §9.51] を見よ。 □

3.3 その他の道具

定義 3.9 関数 $\gamma : [0, \infty) \ni t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_n(t))_{n=1}^N \in \mathbb{R}^N$ を連続関数とする。関数 γ が法 1 で一様に分布するとは, 任意の Jordan 可測集合 $D \subset [0, 1]^N$ に対して,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \lambda_1 \{t \in [0, T] \mid (\{\gamma_1(t)\}, \dots, \{\gamma_N(t)\}) \in D\} = \lambda_N(D)$$

が成り立つことをいう。

補題 3.10 連続関数 $\gamma : [0, \infty) \ni t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_n(t))_{n=1}^N \in \mathbb{R}^N$ は, 法 1 で一様に分布しているとし, 関数 $F : [0, 1]^N \rightarrow \mathbb{R}$ は Riemann 可積分関数とする。このとき,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(\{\gamma_1(t)\}, \dots, \{\gamma_N(t)\}) dt = \int_{[0, 1]^N} F(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

が成り立つ。

証明 区間 $I_j = [0, 1)$, $j = 1, 2, \dots, N$ をそれぞれ

$$0 = x_0^{(j)} < x_1^{(j)} < \dots < x_{A_j}^{(j)} = 1$$

と分割し, N 次元立方体 $[0, 1]^N = \prod_{j=1}^N I_j$ を小立方体

$$\left[x_{\alpha_1-1}^{(1)}, x_{\alpha_1}^{(1)} \right) \times \left[x_{\alpha_2-1}^{(2)}, x_{\alpha_2}^{(2)} \right) \times \dots \times \left[x_{\alpha_N-1}^{(N)}, x_{\alpha_N}^{(N)} \right),$$

$1 \leq j \leq N$, $1 \leq \alpha_j \leq A_j$ に分割する. これらの小立方体全体の集合を $\mathcal{R}$ とおく. 各小立方体 $R \in \mathcal{R}$ の直径 (対角線の長さ) を $d(R)$ とし, $d(\mathcal{R}) = \max_{R \in \mathcal{R}} d(R)$ とおく. ここで, $\{\gamma(t)\} = (\{\gamma_1(t)\}, \{\gamma_2(t)\}, \dots, \{\gamma_N(t)\})$ と略記し, 任意の $R \in \mathcal{R}$ に対して, $I_T(R) = \{t \in [0, T] \mid \{\gamma(t)\} \in R\}$ とおく. このとき, $[0, T] = \bigsqcup_{R \in \mathcal{R}} I_T(R)$ より,

$$\sum_{R \in \mathcal{R}} \inf_{\xi \in R} F(\xi) \frac{\lambda_1(I_T(R))}{T} \leq \frac{1}{T} \int_0^T F(\{\gamma(t)\}) dt \leq \sum_{R \in \mathcal{R}} \sup_{\xi \in R} F(\xi) \frac{\lambda_1(I_T(R))}{T}$$

が成り立つ. 関数 γ は法 1 で一様分布するので, $T \rightarrow \infty$ とすることで,

$$s(\mathcal{R}) \leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(\{\gamma(t)\}) dt \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(\{\gamma(t)\}) dt \leq S(\mathcal{R}),$$

$$s(\mathcal{R}) = \sum_{R \in \mathcal{R}} \inf_{\xi \in R} F(\xi) \lambda_N(R), \quad S(\mathcal{R}) = \sum_{R \in \mathcal{R}} \sup_{\xi \in R} F(\xi) \lambda_N(R)$$

を得る. したがって, Darboux の定理より, $d(\mathcal{R}) \rightarrow 0$ とすることで結論を得る. $\square$

補題 3.11 (Kronecker-Weyl の近似定理) $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ を $\mathbb{Q}$ 上線形独立な N 個の実数とし, $\Gamma \subset [0, 1)^N$ を Jordan 可測な集合とする. このとき,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \lambda_1 \{t \in [0, T] \mid (\{\alpha_1 t\}, \dots, \{\alpha_N t\}) \in \Gamma\} = \lambda_N(\Gamma)$$

が成り立つ.

証明 例えば, Karatsuba-Voronin の教科書 [4, Appendix §8] を見よ. 確率論を用いるが確率論測度の弱収束と Portemanteau の定理を用いた証明法は見通しが良い. これについては, 報告集 [8] が参考になる. $\square$

補題 3.12 (Markov の不等式) $P(x)$ を $\deg P = n$ となる実係数多項式とし,

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P(x)| \leq 1$$

を満たすとする. このとき,

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P'(x)| \leq n^2$$

が成り立つ.

証明 例えば, [12, Part Six. Problem 83] を参照せよ. $\square$

系 3.13 $P(x)$ を $\deg P = n$ となる複素係数多項式とする. このとき, 任意の $a < b$ に対して,

$$\max_{x \in [a, b]} |P'(x)| \leq \frac{4n^2}{b-a} \max_{t \in [a, b]} |P(t)|$$

が成り立つ.

証明 証明は, 論文 [7] を参考にした. $P(t_0) \neq 0$ のときのみ考えれば良い. $c_0 \in [a, b]$ を $|P(t_0)| = \max_{t \in [a, b]} |P(t)|$ を満たすようにとる. また,

$$P_1(t) = \frac{P\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)}{|P(t_0)|}$$

とおく. $P'_1(t)$ の実数部分と虚数部分に分けて, 補題 3.12 を用いると,

$$\max_{t \in [-1, 1]} |P'_1(t)| \leq \max_{t \in [-1, 1]} |\Re(P'_1(t))| + \max_{t \in [-1, 1]} |\Im(P'_1(t))| \leq 2n^2$$

が成り立つ. また,

$$\max_{t \in [-1, 1]} |P'_1(t)| = \frac{b-a}{2|P(t_0)|} \max_{t \in [-1, 1]} \left| P\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) \right| = \frac{b-a}{2|P(t_0)|} \max_{x \in [a, b]} |P(x)|$$

なので, 主張が従う. $\square$

補題 3.14 (Chebyshev の不等式) 任意の $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 可積分関数 $f(x)$ に対して,

$$\lambda_1 \{x \in [a, b] \mid |f(x)| \geq A\} \leq \frac{1}{A^2} \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

が成り立つ.

証明 例えば, [4, §7 Theorem 1] を見よ. $\square$

4 証明の詳細

まずは, 集合 K より広い領域で $\zeta(s)$ を扱うための細工をする. この細工により, Cauchy の積分定理や Hilbert 空間論を使うことができる.

Mergelyan の定理 (補題 3.6) より, ある多項式 P で K 上で零に値を取らないものが存在して,

$$\max_{s \in K} |f(s) - P(s)| < \frac{\epsilon}{9} \quad (4.1)$$

が成り立つ. P は, K において零に値を取らないので, ある単連結領域 G で $K \subset G$ かつ P は G 上で零に値を取らないものが存在する. よって, G 上で P の分枝 $\log P$ が取れる. これに注意して, 再び Mergelyan の定理を適用することで, ある多項式 Q が存在して,

$$\max_{s \in K} |P(s) - \exp(Q(s))| < \frac{\epsilon}{9} \quad (4.2)$$

が成り立つ. 次に, 我々が考えたいのは $\zeta(s+it)$ と $\exp(Q(s))$ の K 上での近似である. 関数 $\exp(Q(s))$ は, 複素全平面で零に値を取らない正則関数であることに注意しておく.

4.1 稠密性についての命題

本サブセクションでは, 次の命題を示すことを目標とする.

命題 4.1 ある正の整数 $M_0 = M_0(Q, \epsilon)$ が存在して, 任意の $M \geq M_0$ に対して, ある $\underline{\theta}_M^{(0)} = (\theta_{p_n}^{(0)})_{n=1}^M \in [0, 1)^M$ が存在して,

$$\max_{s \in K} \left| \zeta_M(s, \underline{\theta}_M^{(0)}) - \exp(Q(s)) \right| < \frac{\epsilon}{9}$$

が成り立つ.

この命題が証明できれば, 不等式 (4.1), (4.2) により, 不等式 (2.2) が成り立つ.

関数 $\zeta_M(s, \underline{\theta}_M)$ を

$$\zeta_M(s, \underline{\theta}_M) = \exp \left(\sum_{n=1}^M \log(1 - p_n^{-s} \exp(-2\pi i \theta_{p_n}))^{-1} \right)$$

と変形して, $\sum_{n=1}^M \log(1 - p_n^{-s} \exp(-2\pi i \theta_{p_n}))^{-1}$ と $Q(s)$ の近似を考える. 命題 4.1 を示すには, 次の補題を示せば十分である.

補題 4.2 次を満たす正の整数 $M_0 = M_0(Q)$ が存在する: 任意の整数 $M \geq M_0$ とある $\underline{\theta}_M^{(0)} = (\theta_{p_n}^{(0)})_{n=1}^M \in [0, 1)^M$ に対して,

$$\limsup_{M \rightarrow \infty} \max_{s \in K} \left| \sum_{n=1}^M \log(1 - p_n^{-s} \exp(-2\pi i \theta_{p_n}^{(0)}))^{-1} - Q(s) \right| = 0$$

が成り立つ.

この補題を証明するために, Hilbert 空間における点列の並び替えに関する結果を用いる. 長方形 $R = \{\sigma + it \mid \sigma_L < \sigma < \sigma_R, t_L < t < t_U\}$ を $K \subset R \subset D$ を満たすようにとる. ただし, σ_L と σ_R は,

$$1/2 < \sigma_L < \min_{s \in K} \Re(s) \leq \max_{s \in K} \Re(s) < \sigma_R < 1,$$

を満たすとする. 関数空間 $A^2(R)$ を

$$A^2(R) = \left\{ f : R \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ は正則}, \int_R |f(s)|^2 d\lambda_2(s) < \infty \right\}$$

と定義すると, $A^2(R)$ は内積

$$\langle f, g \rangle = \int_R f(s) \overline{g(s)} d\lambda_2(s)$$

に関して Hilbert 空間となる. ただし, λ_2 は $\mathbb{C}$ 上の Lebesgue 測度を表す. この内積から定まるノルムを

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_R |f(s)|^2 d\lambda_2(s)}$$

で定める.

次の補題を証明する.

補題 4.3 $A^2(R)$ において収束する級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - p_n^{-s} \exp(-2\pi i \theta_{p_n}))^{-1}, \quad \theta_{p_n} \in [0, 1)$$

による集合は, $A^2(R)$ について稠密である.

ここで, テイラー展開により,

$$\begin{aligned} \log(1 - p_n^{-s} \exp(-2\pi i \theta_{p_n}))^{-1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-2\pi i k \theta_{p_n})}{k p_n^{ks}} \\ &= \frac{\exp(-2\pi i \theta_{p_n})}{p_n^s} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\exp(-2\pi i k \theta_{p_n})}{k p_n^{ks}} \end{aligned}$$

と 2 つの和に分けられる. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-2\pi i \theta_{p_n}) p_n^{-s}$ は収束するとは限らないが, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \exp(-2\pi i k \theta_{p_n}) p_n^{-ks}/k$ は絶対収束する. これに注意すると, 次の補題から補題 4.3 を証明することができる.

補題 4.4 任意の正の整数 N に対して, $A^2(R)$ において収束する級数

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\exp(-2\pi i \theta_{p_n})}{p_n^s}, \quad \theta_{p_n} \in [0, 1)$$

による集合は, $A^2(R)$ について稠密である.

補題 4.4 から補題 4.3 が従うことの証明 任意に関数 $f \in A^2(R)$ と $\epsilon > 0$ を固定する. 任意の $N \geq 1$ と任意の $\theta_{p_n} \in [0, 1)$, $n = N+1, N+2, \dots$ に対して,

$$\log(1 - p_n^{-s} \exp(-2\pi i \theta_{p_n}))^{-1} - \frac{\exp(-2\pi i \theta_{p_n})}{p_n^s} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\exp(-2\pi i k \theta_{p_n})}{k p_n^{ks}} \ll \frac{1}{p_n^{2\sigma_L}}$$

が $s \in R$ について一様に成り立つ. これより,

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\log(1 - p_n^{-s} \exp(-2\pi i \theta_{p_n}))^{-1} - \frac{\exp(-2\pi i \theta_{p_n})}{p_n^s} \right) \right\|_2^2 \ll \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{p_n^{2\sigma_L}} \right|^2 \rightarrow 0$$

が $N \rightarrow \infty$ のとき成り立つ. よって, ある $N_0 = N_0(\epsilon)$ が存在して,

$$\left\| \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \left(\log(1 - p_n^{-s} \exp(-2\pi i \theta_{p_n}))^{-1} - \frac{\exp(-2\pi i \theta_{p_n})}{p_n^s} \right) \right\|_2 < \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立つ.

次に, 補題 4.4 を用いると, ある $\theta_{p_n}^{(*)} \in [0, 1)$, $n = N_0+1, N_0+2, \dots$ が存在して,

$$\left\| \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{\exp(-2\pi i \theta_{p_n}^{(*)})}{p_n^s} + \sum_{n=1}^{N_0} \log(1 - p_n^{-s})^{-1} - f(s) \right\|_2 < \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立つ.

以上より, 任意の $n = 1, 2, \dots, N_0$ に対して, $\theta_{p_n}^{(*)} = 0$ とおけば,

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - p_n^{-s} \exp(-2\pi i \theta_{p_n}^{(*)}))^{-1} - f(s) \right\|_2 \\ & \leq \left\| \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{\exp(-2\pi i \theta_{p_n}^{(*)})}{p_n^s} + \sum_{n=1}^{N_0} \log(1 - p_n^{-s} \exp(-2\pi i \theta_{p_n}^{(*)}))^{-1} - f(s) \right\|_2 \end{aligned}$$

$$+ \left\| \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \left(\log \left(1 - p_n^{-s} \exp \left(-2\pi i \theta_{p_n}^{(*)} \right) \right)^{-1} - \frac{\exp \left(-2\pi i \theta_{p_n}^{(*)} \right)}{p_n^s} \right) \right\|_2 < \epsilon$$

が従う. □

これまでの議論により, 補題 4.4 を証明すれば良いことがわかった. この手の主張を Voronin は, Pecherskii [11] の Hilbert 空間における点列の並び替えに関する結果を用いて証明している. Pecherskii の定理の証明は, Karatsuba–Voronin の教科書 [4] に詳しく述べられている. 実解析において, 条件収束する級数は, 和の順番を入れ替えることで任意の値に収束させることができることが Riemann の定理として知られているが, Pecherskii の定理は, Riemann の定理の Hilbert 空間版であるといえる.

本ノートでは, Pecherskii の結果の変種である次の補題を用いる.

補題 4.5 $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし, その内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$, ノルムを $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$ とする. 点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ は, 次の 2 条件を満たすとする:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty$,
- (ii) 任意の零元でない $x \in \mathcal{H}$ に対して, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, x \rangle_{\mathcal{H}}|$ は無限大に発散する.

このとき, 収束する級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \quad |a_n| = 1$$

による集合は, $\mathcal{H}$ において稠密である.

証明 証明については, [6, Chapter 6] や [15, Theorem 5.4] を見よ. □

補題 4.5 を用いて, 補題 4.4 を示す. $\mathcal{H} = A^2(R)$ とし, 点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ としては, $(p_n^{-s})_{n=N+1}^{\infty}$ を考える. 条件 (i) については,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \|p_n^{-s}\|_2^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_R |p_n^{-s}|^2 d\lambda_2(s) \ll \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{p_n^{2\sigma_L}} < \infty$$

により成り立つ.

次に条件 (ii) について考える. 任意に $0 \neq \phi \in A^2(R)$ を固定する. このとき, 任意の $n = N + 1, N + 2, \dots$ に対して,

$$\langle p_n^{-s}, \phi(s) \rangle = \int_R p_n^{-s} \overline{\phi(s)} d\lambda_2(s) = \int_R \exp(-s \log p_n) \overline{\phi(s)} d\lambda_2(s)$$

となる. そこで,

$$\Phi(w) = \int_R \exp(-sw) \overline{\phi(s)} d\lambda_2(s)$$

とおくと, 示すべき主張は次の通りである:

主張 4.6 上記の設定において,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\Phi(\log p_n)| = \infty$$

が成り立つ.

この主張を示すために, 関数 $\Phi(w)$ の下からの評価について考える. この関数 $\Phi(w)$ の取り扱い方法については, Voronin の方法と Bagchi の方法のどちらも有用である. Bagchi の方法については, [6, 15, 5] を参照せよ.

主張 4.6 を証明する. 証明方法は, [3] に準ずる. まずは, 次の補題を示す.

補題 4.7 任意の $A > 0$ と $x \geq 1$ を固定する. このとき, パラメータ A に依存する定数 $B = B(A) > 0$ とパラメータ A, x に依存する閉区間 $I = I(A, x) \subset [x, x + 1]$ で $\lambda_1(I) \geq Bx^{-2}$ となるものが存在して, 任意の $t \in I$ に対して,

$$|\Phi(t)| \geq \frac{1}{2} |\Phi(x)| + O(e^{-Ax})$$

が成り立つ. ただし, 定数 B と区間 I は関数 ϕ にも依存する.

証明 任意の $s \in R$ に対して, $|s| \leq M$ となる $M > 0$ をとる. 定数 $c_0 = c_0(A, M)$ を十分大きく取り, $K = [c_0 x]$ とおく. 関数 e^{-st} の Taylor 展開の項を

$$e^{-st} = \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k}{k!} s^k t^k + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} s^k t^k$$

のように 2 つに分ける. Stirling の公式 $k! \sim \sqrt{2\pi k} (k/e)^k \gg (k/e)^k$ を用いると, 第

2 項は, 任意の $s \in R$ と $t \in [x, x+1]$ に対して,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} s^k t^k &\ll \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{(2Mx)^k}{k!} \\
&= \frac{(2xM)^{K+1}}{(K+1)!} \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{(2xM)^{k-(K+1)}}{k!/(K+1)!} \\
&\leq \frac{(2xM)^{K+1}}{(K+1)!} e^{2xM} \\
&\ll \left(\frac{e}{K+1} \right)^{K+1} (2xM)^{K+1} e^{2xM} \\
&= \exp \left(-(K+1) \left(\log \left(\frac{K+1}{e} \right) - \log(2xM) + O \left(\frac{xM}{K} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, 定数 $c_0 = c_0(A, M)$ は十分大きくとれば,

$$\log \left(\frac{K+1}{e} \right) - \log(2xM) + O \left(\frac{xM}{K} \right) \geq 1 \quad \text{かつ} \quad K+1 \geq Ax$$

を満たすようにできる. よって,

$$e^{-st} = \sum_{k=0}^K \frac{(-1)^k}{k!} s^k t^k + O(e^{-Ax})$$

が成り立つ. したがって,

$$\Phi(t) = P(t) + O(e^{-Ax})$$

となる^{*1}. ただし,

$$P(t) = \sum_{k=0}^K \left(\int_R (-1)^k \frac{s^k}{k!} \overline{\phi(s)} d\lambda_2(s) \right) t^k$$

である.

次に, $x_0 \in [x, x+1]$ を $P(x_0) = \max_{x \leq t \leq x+1} |P(t)|$ を満たすようにとる. このとき, 系 3.13 より,

$$\max_{x \leq t \leq x+1} |P'(t)| \ll (\deg P)^2 |P(x_0)| \ll x_0^2 |P(x_0)|$$

^{*1} Cauchy-Schwarz の不等式により, $\int_R |\phi(s)| d\lambda_2(s) < \infty$ が簡単に確かめられる.

が成り立つ. ただし, $\deg P$ は多項式 $P(t)$ の次数を表す. ここで, $B = B(A)$ を十分小さく取る. このとき, 任意の $|t - x_0| \leq B/x_0^2$ と $x \leq t \leq x + 1$ に対して,

$$|P(x_0)| - |P(t)| \leq |P(x_0) - P(t)| = \left| \int_{x_0}^t P'(\xi) d\xi \right| \leq |t - x_0| \max_{x \leq \xi \leq x+1} |P'(\xi)|$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} |P(t)| &\geq |P(x_0)| - |t - x_0| \max_{x \leq \xi \leq x+1} |P'(\xi)| \\ &\geq |P(x_0)| + O(|t - x_0| x_0^2 |P(x_0)|) \\ &\geq |P(x_0)| + O(B |P(x_0)|) \\ &\geq \frac{1}{2} |P(x_0)| \geq \frac{1}{2} |P(x)| \end{aligned}$$

となる. したがって, $I = [x_0 - B/x_0^2, x_0 + B/x_0^2] \cap [x, x + 1]$ とおけば, 任意の $t \in I$ に対して,

$$|\Phi(t)| \geq |P(t)| + O(e^{-Ax}) \geq \frac{1}{2} |P(x)| + O(e^{-Ax}) \geq \frac{1}{2} |\Phi(x)| + O(e^{-Ax})$$

が従う. □

補題 4.8 f は整関数であり, 次の条件を満たすとする;

- (i) ある正の定数 A が存在して, $f(s) = O(e^{A|s|})$ が成り立つ,
- (ii) ある正の定数 $\pi/2 < \eta < \pi$ が存在して, $f(s) = O(1)$ が $\arg s = \pm\eta$ に対して成り立つ,
- (iii) $f(x) = o(1)$ が $x \rightarrow \infty, x \in \mathbb{R}$ のとき成り立つ.

このとき, f は恒等的に零となる.

証明 複素数平面を 3 つの集合 $0 \leq \arg(s) \leq \eta$, $-\eta \leq \arg(s) \leq 0$, $|\arg(-s)| \leq \eta$ に分ける. それぞれの領域は, 二つの半直線に囲まれた集合であり, この二つの半直線のなす角は, π より小さくなる. 仮定 (i) により, 十分小さい $\delta > 0$ に対して, $f(s) = O_\delta(e^{|s|^{1+\delta}})$ が成り立つことに注意すると, 仮定 (ii), (iii) 及び, 補題 3.5 により, $f(s)$ は $\mathbb{C}$ において有界となることがわかる. よって, Liouville の定理より $f(s)$ は定数関数となる. したがって, 仮定 (iii) から $f \equiv 0$ が従う. □

主張 4.6 の証明 まず, 関数 $\Phi(w)$ が恒等的に零でないことを示す. $\Phi(w) \equiv 0$ であると仮定する. このとき, $\Phi(w)$ は

$$\Phi(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^k}{k!} \int_R s^k \overline{\phi(s)} d\lambda_2(s) \right\} w^k$$

と Taylor 展開できる. Taylor 展開の係数の一意性により, 任意の $k = 1, 2, \dots$ に対して, $\int_R s^k \overline{\phi(s)} d\lambda_2(s) = 0$ が成り立つ. 補題 3.3 により, $\phi \equiv 0$ となり, これは矛盾である.

関数 $\Phi(w)$ は整関数であり, ある $C = C(R)$ が存在して,

$$\Phi(w) \ll e^{C|w|}$$

が $|w| \rightarrow \infty$ のときに成り立つ. 実数 λ を $\sigma_R < \lambda < 1$ を満たすようにとる. このとき, 関数 $e^{\lambda w} \Phi(w)$ の上からの評価を考える. まず,

$$(\lambda - s)w = (s - \lambda)(-w) = |s - \lambda||w| \exp \left(i \left(\arg(s - \lambda) + \arg(-w) \right) \right)$$

と変形できることに注意する. $s \in R$ のとき, $\Re(s) - \lambda \leq \sigma_R - \lambda$ なので, $\overline{R} - \lambda = \{s - \lambda \mid s \in \overline{R}\}$ は左半平面に属するコンパクト集合である. ただし, $\overline{R}$ は, 集合 R の閉包を表す. したがって, 十分小さく $\eta = \eta(R) > 0$ を取れば, 任意の $w \in \mathbb{C}$ で $|\arg(-w)| \leq \eta$ を満たすものに対して,

$$\cos \left(\arg(s - \lambda) + \arg(-w) \right) < 0$$

となるので,

$$\begin{aligned} |e^{\lambda w} \Phi(w)| &\leq \int_R |\exp((\lambda - s)w)| |\phi(s)| d\lambda_2(s) \\ &= \int_R \exp \left(|s - \lambda||w| \cos \left(\arg(s - \lambda) + \arg(-w) \right) \right) |\phi(s)| d\lambda_2(s) \\ &\ll 1 \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, 補題 4.8 により,

$$e^{\lambda x} \Phi(x) = \Omega(1)$$

が $x \rightarrow \infty$ のとき成り立つ. ここで, 関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して, $f(x) = \Omega(g(x))$ ($x \rightarrow \infty$) とは, $\limsup_{x \rightarrow \infty} |f(x)|/g(x) > 0$ が成り立つことを意味する. したがって, ある $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ で $x_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) なるものが存在して,

$$\Phi(x_n) \gg e^{-\lambda x_n} \quad (4.3)$$

が成り立つ.

次に, パラメータ A を $A > \lambda$ となるようにとり, 補題 4.7 を適用すれば, ある $B = B(\lambda, A)$ が存在して, 任意の x_n に対して, ある区間 $I_n = (a_n, b_n] \subset [x_n, x_n + 1]$ で, $b_n - a_n \geq Bx_n^{-2}$ となるものが存在して, 任意の $t \in I_n$ に対して,

$$|\Phi(t)| \geq \frac{1}{2} |\Phi(x_n)| + o(e^{-\lambda x_n})$$

が成り立つ. したがって, 不等式 (4.3) より,

$$\begin{aligned} \sum_{\log p \in I_n} |\Phi(\log p)| &\geq \sum_{\log p \in I_n} \left(\frac{1}{2} |\Phi(x_n)| + o(e^{-\lambda x_n}) \right) \\ &\gg e^{-\lambda x_n} \sum_{\log p \in I_n} 1 \\ &= e^{-\lambda x_n} (\pi(\beta_n) - \pi(\alpha_n)) \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $\alpha_n = e^{a_n}$, $\beta_n = e^{b_n}$ とおいた.

素数定理

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x \exp\left(-c\sqrt{\log x}\right)\right)$$

を用いて, $\pi(\beta_n) - \pi(\alpha_n)$ の下からの評価を行う. ここで, c は正の定数である. 素数定理より,

$$\begin{aligned} \pi(\beta_n) - \pi(\alpha_n) &= \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{du}{\log u} + O\left(\beta_n \exp\left(-c\sqrt{\log \alpha_n}\right)\right) \\ &\geq \frac{\beta_n - \alpha_n}{\log \beta_n} + O\left(\beta_n \exp\left(-c\sqrt{\log \alpha_n}\right)\right) \end{aligned}$$

が成り立つ. 第 1 項については,

$$\log \beta_n = b_n \leq x_n + 1 \ll x_n,$$

$$\beta_n - \alpha_n = e^{b_n} - e^{a_n} = e^{a_n} (e^{b_n - a_n} - 1) \geq \frac{Be^{x_n}}{x_n^2}$$

により,

$$\frac{\beta_n - \alpha_n}{\log \beta_n} \gg \frac{e^{x_n}}{x_n^3}$$

と評価できる. 第 2 項については,

$$\beta_n \exp(-c\sqrt{\log \alpha_n}) \ll e^{x_n} \exp(-c\sqrt{x_n}) = o\left(\frac{e^{x_n}}{x_n^3}\right)$$

と評価できる. よって,

$$\pi(\beta_n) - \pi(\alpha_n) \gg \frac{e^{x_n}}{x_n^3}$$

が成り立つ.

以上より,

$$\sum_{\log p \in I_n} |\Phi(\log p)| \gg \frac{e^{(1-\lambda)x_n}}{x_n^3} \rightarrow \infty$$

が $n \rightarrow \infty$ のとき成り立ち, 主張 4.6 が従う. $\square$

4.2 重み付きの平均値定理についての命題

Voronin の証明方法では, 重み付きの平均値の評価をする必要がある. まずは, セクション 2 の流れを改めておさらいしながら, 示すべき命題を述べる.

§4.1 の命題 4.1 と不等式 (4.1), (4.2) より, 次を満たす正の整数 $M_0 = M_0(f, \epsilon)$ が存在する: 任意の $M \geq M_0$ に対して, ある $\underline{\theta}_M^{(0)} = (\theta_{p_n}^{(0)})_{n=1}^M \in [0, 1]^M$ が存在して,

$$\max_{s \in K} \left| \zeta_M(s, \underline{\theta}_M^{(0)}) - f(s) \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad (4.4)$$

が成り立つ.

$M \geq M_0$ とする. このとき, 関数 $\zeta_M(s, \underline{\theta}_M)$ のパラメータ $\underline{\theta}_M$ についての連続性より, ある $\delta = \delta(f, \epsilon, M)$ が存在して,

$$I_M = \left\{ \underline{\theta}_M = (\theta_{p_n})_{n=1}^M \mid \max_{1 \leq n \leq M} \|\theta_{p_n} - \theta_{p_n}^{(0)}\| < \delta \right\}$$

とおいたとき,

$$\underline{\gamma}_M(\tau) = \left(\left\{ \frac{\log p_1}{2\pi} \tau \right\}, \dots, \left\{ \frac{\log p_M}{2\pi} \tau \right\} \right) \in I_M \quad (4.5)$$

であれば,

$$\max_{s \in K} \left| \zeta_M(s + i\tau) - \zeta_M\left(s, \theta_M^{(0)}\right) \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad (4.6)$$

が成り立つ. したがって, 条件 (4.5) かつ不等式

$$\max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - \zeta_M(s + i\tau)| < \frac{\epsilon}{3} \quad (4.7)$$

を満たす $\tau \in [0, T]$ が見つければ, 不等式 (4.4), (4.6), (4.7) により,

$$\max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \epsilon$$

が従う.

したがって, 示すべき命題は次のとおりである.

命題 4.9 上記の設定の下で, 次を満たす $M \geq M_0$ が存在する: ある $T_0 = T_0(M, f, \epsilon) > 0$ が存在して, 任意の $T \geq T_0$ に対して,

$$\mathbb{P}_T \left(\underline{\gamma}_M(\tau) \in I_M \quad \text{かつ} \quad \max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - \zeta_M(s + i\tau)| < \frac{\epsilon}{3} \right) > 0$$

が成り立つ. ただし, $\mathbb{P}_T(\dots) = T^{-1} \lambda_1 \{ \tau \in [0, T] \mid \dots \}$ とおく.

評価すべき不等式の左辺は,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_T \left(\underline{\gamma}_M(\tau) \in I_M \quad \text{かつ} \quad \max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - \zeta_M(s + i\tau)| < \frac{\epsilon}{3} \right) \\ &= \mathbb{P}_T \left(\underline{\gamma}_M(\tau) \in I_M \right) \\ & \quad - \mathbb{P}_T \left(\underline{\gamma}_M(\tau) \in I_M \quad \text{かつ} \quad \max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - \zeta_M(s + i\tau)| \geq \frac{\epsilon}{3} \right) \end{aligned}$$

と変形できる.

ここで, 第 1 項について, Kronecke-Weyl の近似定理 (補題 3.11) より,

$$\mathbb{P}_T \left(\underline{\gamma}_M(\tau) \in I_M \right) = \lambda_M(I_M) (1 + o(1))$$

が $T \rightarrow \infty$ のとき成り立つ. よって, 十分大きい M に対して, $T \rightarrow \infty$ のとき, 第 2 項が $\lambda_M(I_M)$ より小さくなれば良いことがわかる.

Chebyshev の不等式 (補題 3.14) より,

$$\mathbb{P}_T \left(\underline{\gamma}_M(\tau) \in I_M \quad \text{かつ} \quad \max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - \zeta_M(s + i\tau)| \geq \frac{\epsilon}{3} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{3}{\epsilon}\right)^2 \frac{1}{T} \int_0^T \left(\mathbb{1}_{I_M}(\gamma_M(\tau)) \cdot \max_{s \in K} |\zeta(s+i\tau) - \zeta_M(s+i\tau)| \right)^2 d\tau \\
&= \left(\frac{3}{\epsilon}\right)^2 \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{1}_{I_M}(\gamma_M(\tau)) \cdot \max_{s \in K} |\zeta(s+i\tau) - \zeta_M(s+i\tau)|^2 d\tau
\end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 $\mathbb{1}_A$ は集合 A についての定義関数を表す。

以上より、次の主張を示せば良いことがわかる。

主張 4.10 上記の設定の下で、

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{1}_{I_M}(\gamma_M(\tau)) \cdot \max_{s \in K} |\zeta(s+i\tau) - \zeta_M(s+i\tau)|^2 d\tau = o(\lambda_M(I_M))$$

が $M \rightarrow \infty$ のとき成り立つ。

証明 この主張を示すには、少し込み入った議論が必要である。不等式 $|a+b|^2 \leq 2^2(|a|^2 + |b|^2)$ に注意すると、任意の正の整数 $N > M$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{1}_{I_M}(\gamma_M(\tau)) \cdot \max_{s \in K} |\zeta(s+i\tau) - \zeta_M(s+i\tau)|^2 d\tau \ll S_1 + S_2, \\
S_1 &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{1}_{I_M}(\gamma_M(\tau)) \cdot \max_{s \in K} |\zeta(s+i\tau) - \zeta_N(s+i\tau)|^2 d\tau, \\
S_2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{1}_{I_M}(\gamma_M(\tau)) \cdot \max_{s \in K} |\zeta_N(s+i\tau) - \zeta_M(s+i\tau)|^2 d\tau
\end{aligned}$$

が成り立つ。

まずは、 S_1 の評価を行う。補題 3.4 により、

$$\max_{s \in K} |\zeta(s+i\tau) - \zeta_M(s+i\tau)|^2 \leq \frac{1}{\pi^2 d^2} \int_R |\zeta(s+i\tau) - \zeta_M(s+i\tau)|^2 d\lambda_2(s) \quad (4.8)$$

が成り立つ。ここで、 d は集合 K と R^c との距離を表す。これを用いると、 S_1 は、

$$\begin{aligned}
S_1 &\ll \frac{1}{T} \int_0^T \left(\mathbb{1}_{I_M}(\gamma_M(\tau)) \int_R |\zeta(s+i\tau) - \zeta_N(s+i\tau)|^2 d\lambda_2(s) \right) d\tau \\
&\leq \frac{1}{T} \int_R \left(\int_0^T |\zeta(s+i\tau) - \zeta_N(s+i\tau)|^2 d\tau \right) d\lambda_2(s) \\
&\leq 2 \int_R \max_{\sigma_L \leq \sigma \leq \sigma_R} \left(\frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} |\zeta(\sigma+i\tau) - \zeta_N(\sigma+i\tau)|^2 d\tau \right) d\lambda_2(s)
\end{aligned}$$

$$\leq 2\lambda_2(R) \max_{\sigma_L \leq \sigma \leq \sigma_R} \left(\frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} |\zeta(\sigma + i\tau) - \zeta_N(\sigma + i\tau)|^2 d\tau \right)$$

と評価できる. ここで, 定理 3.7 と定理 3.8, 評価 $\zeta(s) \ll |s|$, $\Re(s) \geq 1/2$ (証明は, 例えば [17] を見よ) により,

$$\max_{\sigma_L \leq \sigma \leq \sigma_R} \left(\frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} |\zeta(\sigma + i\tau) - \zeta_N(\sigma + i\tau)|^2 d\tau \right) \ll \zeta(2\sigma_L) - \zeta_N(2\sigma_L)$$

が $T \rightarrow \infty$ のとき成り立つ. $N \rightarrow \infty$ のとき $\zeta(2\sigma_L) - \zeta_N(2\sigma_L) \rightarrow 0$ となるので,

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} S_1 = o(1)$$

が成り立つことがわかる.

次に, S_2 の評価を行う. 不等式 (4.4) 及び, 条件 (4.5) から不等式 (4.6) が従うことを用いると,

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{1}_{I_M}(\gamma_M(\tau)) \cdot \max_{s \in K} |\zeta_M(s + i\tau)|^2 \cdot \max_{s \in K} |\zeta_N/\zeta_M(s + i\tau) - 1|^2 d\tau \\ &\leq \left(\max_{s \in K} |f(s)| + \frac{\epsilon}{3} \right)^2 \\ &\quad \times \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{1}_{I_M}(\gamma_M(\tau)) \cdot \max_{s \in K} |\zeta_N/\zeta_M(s + i\tau) - 1|^2 d\tau \\ &\ll \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \mathbb{1}_{I_M}(\gamma_M(\tau)) \cdot \max_{s \in K} |\zeta_N/\zeta_M(s + i\tau) - 1|^2 d\tau \end{aligned}$$

が成り立つ. さらに, 不等式 (4.8) と補題 3.10*²により,

$$\begin{aligned} S_2 &\ll \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{1}_{I_M}(\gamma_M(\tau)) \left(\int_R |\zeta_N/\zeta_M(s + i\tau) - 1|^2 d\lambda_2(s) \right) d\tau \\ &= \int_R \left(\frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{1}_{I_M}(\gamma_M(\tau)) \cdot |\zeta_N/\zeta_M(s + i\tau) - 1|^2 d\tau \right) d\lambda_2(s) \\ &\rightarrow \int_R \left(\int_{[0,1]^N} \mathbb{1}_{I_M}(\underline{\theta}_M) \cdot |\zeta_N(s, \underline{\theta}_N)/\zeta_M(s, \underline{\theta}_M) - 1|^2 d\lambda_N(\underline{\theta}_N) \right) d\lambda_2(s) \end{aligned}$$

*² 例えば, [16, 定理 9.5] を用いると, 被積分関数の Riemann 可積分性が確かめられる.

が $T \rightarrow \infty$ のとき成り立つ。ここで,

$$\int_{[0,1]^N} \mathbb{1}_{I_M}(\underline{\theta}_M) \cdot |\zeta_N(s, \underline{\theta}_N) / \zeta_M(s, \underline{\theta}_M) - 1|^2 d\lambda_N(\underline{\theta}_N)$$

の計算を行う。まず,

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^N} \mathbb{1}_{I_M}(\underline{\theta}_M) \cdot |\zeta_N(s, \underline{\theta}_N) / \zeta_M(s, \underline{\theta}_M) - 1|^2 d\lambda_N(\underline{\theta}_N) \\ &= \int_{[0,1]^N} \mathbb{1}_{I_M}((\theta_{p_n})_{n=1}^M) \\ & \quad \times \left| \prod_{n=M+1}^N (1 - p^{-s} \exp(-2\pi i \theta_{p_n}))^{-1} - 1 \right|^2 d\lambda_N((\theta_{p_n})_{n=1}^N) \\ &= \int_{[0,1]^M} \mathbb{1}_{I_M}((\theta_{p_n})_{n=1}^M) d\lambda_M((\theta_{p_n})_{n=1}^M) \\ & \quad \times \int_{[0,1]^{N-M}} \left| \prod_{n=M+1}^N (1 - p^{-s} \exp(-2\pi i \theta_{p_n}))^{-1} - 1 \right|^2 d\lambda_{N-M}((\theta_{p_n})_{n=M+1}^N) \\ &= \lambda_M(I_M) \\ & \quad \times \int_{[0,1]^{N-M}} \left| \prod_{n=M+1}^N (1 - p^{-s} \exp(-2\pi i \theta_{p_n}))^{-1} - 1 \right|^2 d\lambda_{N-M}((\theta_{p_n})_{n=M+1}^N) \end{aligned}$$

と変形する。任意の $\ell_{M+1}, \ell_{M+2}, \dots, \ell_N \in \mathbb{Z}$ に対して, 等式

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^{N-M}} \exp(-2\pi i \theta_{p_{M+1}})^{\ell_{M+1}} \cdots \exp(-2\pi i \theta_{p_N})^{\ell_N} d\lambda_{N-M}((\theta_{p_n})_{n=M+1}^N) \\ &= \begin{cases} 1 & \ell_{M+1} = \cdots = \ell_N = 0 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つことと, 等式

$$\begin{aligned} & \left| \prod_{n=M+1}^N (1 - p^{-s} \exp(-2\pi i \theta_{p_n}))^{-1} - 1 \right|^2 \\ &= \left| \prod_{n=M+1}^N \left(\sum_{\alpha_n=0}^{\infty} (p_n^{-s} \exp(-2\pi i \theta_{p_n}))^{\alpha_n} \right) - 1 \right|^2 \\ &= \left| \sum_{\substack{\alpha_{M+1}, \dots, \alpha_N=0 \\ (\alpha_{M+1}, \dots, \alpha_N) \neq \mathbf{0}}}^{\infty} p_{M+1}^{-\alpha_{M+1}s} \cdots p_N^{-\alpha_N s} \exp(-2\pi i \theta_{p_{M+1}})^{\alpha_{M+1}} \cdots \exp(-2\pi i \theta_{p_N})^{\alpha_N} \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{\alpha_{M+1}, \dots, \alpha_N, \beta_{M+1}, \dots, \beta_N=0 \\ (\alpha_{M+1}, \dots, \alpha_N), (\beta_{M+1}, \dots, \beta_N) \neq \mathbf{0}}}^{\infty} p_{M+1}^{-\alpha_{M+1}s - \beta_{M+1}\bar{s}} \dots p_N^{-\alpha_N s - \beta_N \bar{s}} \\
&\quad \times \exp(-2\pi i \theta_{p_{M+1}})^{\alpha_{M+1} - \beta_{M+1}} \dots \exp(-2\pi i \theta_{p_N})^{\alpha_N - \beta_N}
\end{aligned}$$

が成り立つことに注意すれば, 任意の $s \in R$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^N} \mathbb{1}_{I_M}(\underline{\theta}_M) \cdot |\zeta_N(s, \underline{\theta}_N) / \zeta_M(s, \underline{\theta}_M) - 1|^2 d\lambda_N(\underline{\theta}_N) \\
&= \lambda_M(I_M) \left(\prod_{n=M+1}^N (1 - p^{-2\sigma})^{-1} - 1 \right) \leq \lambda_M(I_M) \times \sum_{n \geq p_{M+1}} \frac{1}{n^{2\sigma_L}}
\end{aligned}$$

が成り立つ. よって,

$$S_2 \ll \lambda_M(I_M) \times \sum_{n \geq p_{M+1}} \frac{1}{n^{2\sigma_L}}$$

となる.

以上より, 任意の正の整数 $N > M$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{1}_{I_M}(\underline{\gamma}_M(\tau)) \cdot \max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - \zeta_M(s + i\tau)|^2 d\tau \\
&\ll \limsup_{T \rightarrow \infty} S_1 + \lambda_M(I_M) \times \sum_{n \geq p_{M+1}} \frac{1}{n^{2\sigma_L}}
\end{aligned}$$

が成り立つ. $N \rightarrow \infty$ とすることで結論を得る. $\square$

謝辞

2025 年度整数論サマースクールでの講演の機会をくださった世話人の鈴木正俊先生, 中村隆先生, 青木宏樹先生に感謝申し上げます. また, 原稿について多くの誤植をご指摘してくださいました松本耕二先生, 鈴木正俊先生に心より御礼申し上げます.

参考文献

- [1] B. Bagchi, *Statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series*, Thesis, Calcutta, Indian Statistical Institute, 1981.

- [2] H. Bohr and R. Courant, *Neue Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximationen auf die Riemannsche Zetafunktion*, *J. Reine Angew. Math.* **144** (1914), 249–274.
- [3] J. Kaczorowski and M. Kulas, *On the non-trivial zeros off the critical line for L -functions from the extended Selberg class*, *Monatsh. Math.* **150** (2007), 217–232.
- [4] A. A. Karatsuba and S. M. Voronin, *The Riemann Zeta-Function*, Walter de Gruyter, 1992.
- [5] E. Kowalski, *An introduction to Probabilistic Number Theory*, Cambridge studies in advanced mathematics 192, Cambridge University Press, Cambridge, 2021.
- [6] A. Laurinćikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-function*, Kluwer, 1996.
- [7] Y. Lee, T. Nakamura, L. Pańkowski, *Selberg’s orthonormality conjecture and joint universality of L -functions*, *Math. Z.* **286**, 2017.
- [8] 峰正博, ゼータ関数・ L 関数の確率論的値分布, 第32回整数論サマースクール報告集, 2025年.
- [9] 松本耕二, *Riemann のゼータ関数*, 朝倉書店, 2005.
- [10] K. Matsumoto, *A survey on the theory of the universality for zeta and L -functions*, Number theory, 95–144, Ser. Number Theory Appl, **11**, World. Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2015.
- [11] D. V. Pecherskii, *On rearrangements of terms in functional series*, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **209** (1973), 1285–1287 (in Russian); *Soviet Math. Dokl.* **14** (1973), 633–636.
- [12] G. Pólya, G. Szegő, *Problems and Theorems in Analysis II*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [13] H. Queffélec and M. Queffélec, *Diophantine Approximation and Dirichlet Series*, HRI Lecture Notes Series 2, American Mathematical Society, 2013.
- [14] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
- [15] J. Steuding, *Value-distribution of L -functions*, *Lecture Notes in Math.* **1877**, Springer, 2007.

- [16] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会, 1980.
- [17] 武田渉, ゼータ関数の非零領域, 第 32 回整数論サマースクール報告集, 2025 年.
- [18] 辻正次, 複素函数論, 槇書店, 1986.
- [19] E. C. Titchmarsh, *Theory of Functions*, Oxford U. P., 1952.
- [20] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Second edition, Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press, New york, 1986.
- [21] S. M. Voronin, *On the distribution of nonzero values of the Riemann ζ -function*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **128** (1972), 131–150 (in Russian); Proc. Steklov Inst. Math. **128** (1972), 153–175.
- [22] S. M. Voronin, *Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **39** (1975), 475–486 (in Russian); Math. USSR Izv. **9** (1975), 443–453.

ゼータ関数・ L 関数の確率論的値分布

峰 正博（早稲田大学 GEC）

概要

ゼータ関数・ L 関数の値分布理論は、Bohr を始祖として 20 世紀初頭から今日に至るまで歩を進め続けてきた。最初の隆盛期は 1930 年代であり、これは Kolmogorov により確率論の公理的な基礎付けが導入された時期と重なる。ゼータ関数・ L 関数の振る舞いを確率論的に捉えようという指針は、その後の確率論の発展と共に大きな広がりを見せ、様々な成果をもたらすこととなった。本稿はこうした理論を概観することを目的として、現在までの研究で得られた諸結果の中から主要なものを抜粋して紹介しようと思う。

1 Bohr–Jessen の極限定理

Riemann は素数分布の研究の観点から、1859 年の論文『Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse』において、複素関数としての

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

の性質を調べることの重要性を見出した。Riemann の論文における主張の多くは、議論のあらましが簡素に述べられるだけのものであり、それらに厳密な証明を与えることは 19 世紀後半の整数論の至上命題の一つだったのではないかと思う。こうした流れは 1896 年の素数定理の証明にて一段落^{*1}したが、その後も $\zeta(s)$ の研究は様々な方向に広がり、その一枝として値分布の理論がある。すなわち変数 $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ の値が動くときに、関数 $\zeta(s)$ の値が全体的にどのように振る舞うかを調べるのである。例えば $\zeta(s)$ の平均値 (cf. 本報告集 [松 25]) やオーダー評価 (cf. 本報告集 [杉 25]) もある意味ではその範疇にあると言えるが、本稿で扱うのは Bohr の仕事を出発点とする、ゼータ関数・ L 関数の **確率論的値分布** の理論である。

^{*1} もちろん、本稿執筆時点でも証明されていない主張が一つ残っているのだが。

Bohr は 1910 年代から $\zeta(s)$ の値分布に関する研究を開始した．その最初期の結果としては，師である Landau との共同研究で 1910 年に得られた次の定理がある．

定理 1.1 ([BL10]) 任意の $\delta > 0$ に対して， $\zeta(s)$ は帯領域 $1 - \delta < \operatorname{Re}(s) < 1 + \delta$ において，高々一つの例外を除く全ての複素数値を無限回とる．

証明は Picard の定理を用いた純粋な複素解析の手法による．なお Riemann 予想を信じるならば，上記の例外値は 0 でなければならない．もし逆にそれが 0 でないことを示せたら Riemann 予想が反証されるわけだが，その可能性は次の 1911 年の Bohr 単独の結果によって排除される．

定理 1.2 ([Boh11]) 任意の $\delta > 0$ に対して， $\zeta(s)$ は帯領域 $1 < \operatorname{Re}(s) < 1 + \delta$ において，0 でない全ての複素数値を無限回とる．

定理 1.1 と異なり，定理 1.2 の証明には Diophantus 近似といった整数論の手法が用いられることは注目すべき点であるが，本稿ではこれらの結果の証明には立ち入らない．原論文は 20 世紀初頭の作ということもあり，現代人には少々読み辛く感じるかもしれない．その場合は [Tit86, Chap. XI] を参照するとよい．

以上は主に $\zeta(s)$ の Dirichlet 級数および Euler 積が絶対収束する領域での話であったが，Bohr は次に帯領域 $1/2 < \operatorname{Re}(s) \leq 1$ での $\zeta(s)$ の値分布の研究に進む．ここで， $\zeta(s)$ の複素対数の分枝について述べておく必要がある．本稿で扱う $\log \zeta(s)$ は，複素対数の主値をとることで定義される $\operatorname{Log} \zeta(s)$ とは異なるので注意されたい．複素平面 $\mathbb{C}$ 上の集合 $\mathcal{Z}$ を

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{\substack{\rho \in \mathbb{C} \\ \zeta(\rho) = 0, \infty}} \{x + i \operatorname{Im}(\rho) \mid -\infty < x \leq \operatorname{Re}(\rho)\}$$

と定める．ただし $\zeta(\rho) = 0, \infty$ は $\rho \in \mathbb{C}$ が $\zeta(s)$ の零点または極であることを表す．このとき補集合 $\mathcal{G} := \mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}$ は単連結開集合であり， $\zeta(s)$ は $\mathcal{G}$ 上に零点を持たない正則関数である．したがって $s, s_0 \in \mathcal{G}$ に対して，複素積分

$$I(s, s_0) = \int_{s_0}^s \frac{\zeta'}{\zeta}(z) dz$$

は経路が $\mathcal{G}$ に含まれる限り well-defined である．そこで $s \in \mathcal{G}$ に対して，

$$\log \zeta(s) = I(s, 2) + \log \zeta(2)$$

と定義するのである．ただし右辺において $\log \zeta(2) = \log(\pi^2/6) = 0.4977\dots$ である．
 このように定義された $\log \zeta(s)$ が以下の性質を持つことは容易に確認できる．

- $\log \zeta(s)$ は $\mathcal{G}$ 上の正則関数であり, $\exp(\log \zeta(s)) = \zeta(s)$ が成り立つ．
- $\operatorname{Re}(s) > 1$ のとき, $\log \zeta(s)$ は Dirichlet 級数表示

$$\log \zeta(s) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p^{-ks}$$

を持つ．とくに実数 $\sigma > 1$ に対して $\log \zeta(\sigma) \in \mathbb{R}$ である．

さて, Bohr は 1916 年に次の結果を示した．

定理 1.3 ([Boh16]) 任意の $1/2 < \sigma \leq 1$ に対して, 集合

$$\{\log \zeta(\sigma + it) \mid t \in \mathbb{R}, \sigma + it \in \mathcal{G}\}$$

は $\mathbb{C}$ で稠密である．

言い換えれば, $1/2 < \sigma \leq 1$ のとき曲線 $\gamma(t) := \log \zeta(\sigma + it)$ は $\mathbb{C}$ 上の任意の点に幾らでも近づくのである．このことから $\zeta(s)$ の値の振る舞いは非常に複雑であり, しかしまだ魅力的な研究対象であることが感じ取れるだろう．なお, 定理 1.3 からは直ちに, 集合 $\{\zeta(\sigma + it) \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$ も $\mathbb{C}$ で稠密であることが従う．このことについて Bohr は Courant との共著論文 [BC14] で定理 1.3 以前に個別に証明を与えている．本稿では定理 1.3 は様々な確率論的な議論を行った上で証明されるが, それは Bohr の原証明とはかなり趣が異なるものである．Bohr 流の議論は [松 05, 6 章] に収録されているので, ぜひ合わせてご覧いただきたい．

定理 1.3 により, $1/2 < \sigma \leq 1$ のとき $\log \zeta(\sigma + it)$ の値は任意の点 $w \in \mathbb{C}$ に近くなるが, その頻度を考えるのは自然な発想である．例えば, 原点から遠い点に近づく頻度は比較的小さくなるであろうことは定性的に予想できるが, 稠密性だけではそれを定量的に測ることはできないのである．そこで $\mathbb{C}$ 上の適当な集合 $\mathcal{R}$ に対して,

$$\mathcal{T}_\sigma(\mathcal{R}) = \{t \in \mathbb{R} \mid \log \zeta(\sigma + it) \in \mathcal{R}, \sigma + it \in \mathcal{G}\}$$

と定めて, その大きさを調べることにしよう．

記号 λ_k によって $\mathbb{R}^k$ の k 次元 Lebesgue 測度を表す． $\mathbb{C}$ を $z \mapsto (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ により $\mathbb{R}^2$ と同一視し, λ_2 を $\mathbb{C}$ の Lebesgue 測度と呼ぶこともある．

集合 $\mathcal{R}$ が Borel 可測なら, $\mathcal{T}_\sigma(\mathcal{R})$ も Borel 可測である. 定理 1.3 は $\mathcal{R}$ が開集合であれば, $1/2 < \sigma \leq 1$ のとき $\mathcal{T}_\sigma(\mathcal{R})$ が空でないことを意味するが, 実はそれだけで $\lambda_1 \mathcal{T}_\sigma(\mathcal{R}) = \infty$ が従う (考えてみよ). そこで, t の高さを制限して

$$\begin{aligned} L_{\sigma,T}(\mathcal{R}) &= \lambda_1(\mathcal{T}_\sigma(\mathcal{R}) \cap [0, T]) \\ &= \lambda_1 \{t \in [0, T] \mid \log \zeta(\sigma + it) \in \mathcal{R}\} \end{aligned}$$

とし, $T \rightarrow \infty$ での挙動を考えることにする. ここで最後の式で条件 $\sigma + it \in \mathcal{G}$ を省略したが, 固定された $\sigma \in \mathbb{R}$ に対して $\sigma + it \notin \mathcal{G}$ なる $t \in \mathbb{R}$ は可算個しかないので, Lebesgue 測度を考える上で不都合はない. Bohr とその弟子 Jessen によって 1930 年代に証明された以下の結果は, **Bohr–Jessen の極限定理** と呼ばれる.

定理 1.4 ([BJ30, BJ32]) $\mathcal{R} = [a, b] \times i[c, d]$ を $\mathbb{C}$ 上の長方形とする.

(1) 任意の $\sigma > 1/2$ に対して, 次の極限值が存在する:

$$W_\sigma(\mathcal{R}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{L_{\sigma,T}(\mathcal{R})}{T}.$$

(2) 任意の $\sigma > 1/2$ に対して連続関数 $M_\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し, (1) の極限值は

$$W_\sigma(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} M_\sigma(w) d\lambda_2(w)$$

と表される. さらに $1/2 < \sigma \leq 1$ のとき, 任意の $w \in \mathbb{C}$ に対して $M_\sigma(w) > 0$ が成り立つ.

なお, [BJ30] と [BJ32] は同名の論文だが, 前者では $\sigma > 1$ の場合が, 後者では $1/2 < \sigma \leq 1$ の場合が扱われている. とくに $\mathcal{R}$ を点 $w \in \mathbb{C}$ を含む小さな長方形とすると, 上記の極限值 $W_\sigma(\mathcal{R})$ は $\log \zeta(\sigma + it)$ の値が w に近くなる頻度を表すと理解される. 任意の $1/2 < \sigma \leq 1$ に対して (2) により $W_\sigma(\mathcal{R}) > 0$ が成り立つので, 定理 1.4 は定理 1.3 を精緻化した結果であると言える.

ところで, $\zeta(s)$ の値分布を考える上では, 関数等式により領域を $\operatorname{Re}(s) \geq 1/2$ に制限してよいだろう. すると残っているのは臨界線 $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ 上の値分布である. これは場合によっては相当に難しく, 例えば集合 $\{\zeta(1/2 + it) \mid t \in \mathbb{R}\}$ が $\mathbb{C}$ で稠密かどうか本稿執筆時点では分かっていない^{*2}. 臨界線上の値分布について本稿では扱わないが, 象徴的な結果を一つだけ紹介しておこう.

^{*2} これを Ramachandra の問題と呼称する文献を時々見かけるが, 筆者はその情報源を知らない.

定理 1.5 $\mathcal{R} = [a, b] \times i[c, d]$ を $\mathbb{C}$ 上の長方形とする. このとき

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \lambda_1 \left\{ t \in [0, T] \left| \frac{\log \zeta(1/2 + it)}{\sqrt{\frac{1}{2} \log \log T}} \in \mathcal{R} \right. \right\} = \int_{\mathcal{R}} \exp \left(-\frac{|z|^2}{2} \right) \frac{d\lambda_2(z)}{2\pi}$$

が成り立つ.

これが確率論における中心極限定理 (cf. [Kle20, Chap. 15]) の類似であることは一目瞭然である. 定理 1.5 は Selberg により初めて得られたと伝えられており, 証明の方法は [Tsa84] で確認できる.

2 確率論を用いた定式化

Bohr–Jessen の極限定理 (定理 1.4) が示された 1930 年代という時代は, Khinchin や Kolmogorov といったモスクワ学派の数学者による測度論的な確率理論の萌芽期でもあった. 確率論の手法が整数論の研究にも有用であることは早くから認識されていたようで, Erdős, Kac, Wintner らが 1930 年代から研究を開始し, 今日における「確率論的数論^{*3}」の礎を築いた. Bohr–Jessen の極限定理の原証明はこうした動きと独立しているように見えるが, 論文内には Wahrscheinlichkeit というドイツ語で確率を意味する単語が散見される. そして 1935 年には Jessen と Wintner の研究が合流し, [JW35] において確率論を用いた $\zeta(s)$ の値分布理論を展開した. とくに Bohr–Jessen の極限定理は次のように定式化される. 確率論の基礎事項については最小限の内容を 付録 A に纏めたので, 必要に応じて参照していただきたい.

定理 2.1 ([JW35]) 以下の結果が成り立つ.

- (1) 任意の $\sigma > 1/2$ に対して, $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 上のある確率測度 Q_σ が存在し,

$$P_{\sigma, T}(A) = \frac{1}{T} \lambda_1 \{ t \in [0, T] \mid \log \zeta(\sigma + it) \in A \}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}) \quad (2.1)$$

によって定義される確率測度 $P_{\sigma, T}$ は $T \rightarrow \infty$ のとき Q_σ に弱収束する.

- (2) 任意の $\sigma > 1/2$ に対して, (1) の極限測度 Q_σ は絶対連続である. とくに,

$$Q_\sigma(A) = \int_A M_\sigma(w) d\lambda_2(w), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$$

^{*3} 確率論的数論の代表的な結果の幾つかを 付録 B に纏めたので, 合わせてご覧いただきたい.

を満たす連続関数 $M_\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在する．さらに $1/2 < \sigma \leq 1$ のとき、任意の $w \in \mathbb{C}$ に対して $M_\sigma(w) > 0$ である．

注意点が二つある．一つ目は、[JW35] における幾つかの用語は、現代の確率論の標準的な用法とは異なるということである．さらに、その後しばらくの間 [JW35] を引用した論文にも同じことが言えるので注意されたい．本稿の定理 2.1 は、実際には [JW35] の元々の主張を現代風に読み替えたものである．二つ目は、定理 1.4 の (1) の主張を導くためには、定理 2.1 の (1), (2) 両方の主張が必要だということである．どうということかということ、Portmanteau の定理（定理 A.15）により、まず定理 2.1 の (1) は $Q_\sigma(\partial A) = 0$ を満たす $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ に対して

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_{\sigma,T}(A) = Q_\sigma(A)$$

を導く．もし A として $\mathcal{R} = [a, b] \times i[c, d]$ をとることができれば、確率測度 $P_{\sigma,T}$ の定義よりこれは定理 1.4 の (1) にほかならないが、条件 $Q_\sigma(\partial \mathcal{R}) = 0$ が満たされるということは定理 2.1 の (2) を用いて初めて分かるのである．

Jessen と Wintner は極限測度 Q_σ の存在だけでなく、その構成方法も [JW35] で明らかにしている．その後の研究の進展もあり、 Q_σ やその密度関数である $M_\sigma(w)$ の構成については以下の 3 通りの方法が知られている．

- 確率測度の無限畳み込みとしての構成（Jessen–Wintner [JW35] など）
- Schwartz 超関数の無限畳み込みとしての構成（Ihara [Iha08] など）
- ランダム Euler 積の分布としての構成（Bagchi [Bag81] など）

理論的にはどれでもほぼ等価だが、現在の主流は **ランダム Euler 積** による方法で、本稿ではこれを軸として話を進める．ランダム Euler 積とは次のように定義される確率変数 $\zeta(s, X)$ のことである．まず、 (X_p) を素数 p で添字づけられた確率変数 X_p の独立な無限列で、各 X_p は $\mathbb{C}$ の単位円 $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 上に値をとり、 $X_p \sim \mathbf{m}$ と分布しているものとする^{*4}．ただし $\mathbf{m}$ は全測度を $\mathbf{m}(\mathbb{T}) = 1$ と正規化した $\mathbb{T}$ の Haar 測度である．とくに円弧 $A(\alpha, \beta) = \{e^{i\theta} \mid \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ の測度は、 $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ を満たす任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して $\mathbf{m}(A(\alpha, \beta)) = (\beta - \alpha)/2\pi$ と

^{*4} そのような確率変数の無限列の存在は確率論の一般論から保証される．系 A.12 を見よ．ちなみに [Bag81] での (X_p) の構成法は少々異なるが、汎用性に劣るので本稿では採用しなかった．

与えられる。またこのとき、任意の可測関数 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して

$$\mathbb{E}[f(X_p)] = \int_{\mathbb{T}} f(z) d\mathbf{m}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta \quad (2.2)$$

が成り立つ。さて $s \in \mathbb{C}$ に対して、確率変数の無限積

$$\zeta(s, X) = \prod_p (1 - p^{-s} X_p)^{-1} \quad (2.3)$$

を考える。各 X_p は $\mathbb{T}$ 上に値をとるので、 $\zeta(s)$ の Euler 積と同様に無限積 (2.3) は $\operatorname{Re}(s) > 1$ のとき確実収束することが分かる。さらに次の事実が成り立つ。

補題 2.2 無限積 (2.3) は $\operatorname{Re}(s) > 1/2$ のとき概収束する。

証明 $\operatorname{Re}(s) = \sigma > 1/2$ とする。まず (X_p) は独立なので、 $(p^{-s} X_p)$ も独立である。次に $X_p \sim \mathbf{m}$ および (2.2) により、

$$\mathbb{E}[p^{-s} X_p] = \frac{p^{-s}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta = 0, \quad \mathbb{E}[|p^{-s} X_p|^2] = \frac{p^{-2\sigma}}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 d\theta = p^{-2\sigma}$$

と計算される。 $\sigma > 1/2$ より $\sum_p p^{-2\sigma}$ は収束するので、Kolmogorov の 2 級数定理 (定理 A.17) により $\sum_p p^{-s} X_p$ は概収束する。よって (2.3) も概収束する。 $\square$

補題 2.2 により、 $\operatorname{Re}(s) > 1/2$ のとき $\zeta(s, X)$ は $\mathbb{C}$ に値をとる確率変数である。さらに同様に、 $\operatorname{Re}(s) > 1/2$ のとき無限和

$$\log \zeta(s, X) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p^{-ks} (X_p)^k \quad (2.4)$$

が概収束することも分かるので、 $\log \zeta(s, X)$ も $\mathbb{C}$ に値をとる確率変数である。実は定理 2.1 の極限測度 Q_σ は $\log \zeta(\sigma, X)$ の分布に一致する。すなわち、

$$Q_\sigma(A) = \mathbb{P}(\log \zeta(\sigma, X) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}) \quad (2.5)$$

が成り立つ。以降の 3 節から 4 節にかけて定理 2.1 の証明を概観するが、そもそも定理 2.1 の証明方法は何パターンか考えられる。本稿では準備を最小限にするため、[JW35] とは異なる手法を採用する箇所も多々あることを先に断っておく。

3 極限定理の証明

定理 2.1 の (1) の主張は $\zeta(s)$ の値分布に関する「極限定理」と呼ばれるもので、確率測度の Fourier 変換である特性関数を用いて証明される。 $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、 $\langle z, w \rangle = \operatorname{Re} z \operatorname{Re} w + \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w$ とおく。このとき

$$\psi_z(w) = \exp(i \langle z, w \rangle)$$

は $\mathbb{C} (\simeq \mathbb{R}^2)$ の加法的指標であり、以下の性質を満たす。

補題 3.1 以下の不等式が成り立つ。

- (1) 任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、 $|\psi_z(w)| \leq 1$.
- (2) 任意の $z, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ に対して、 $|\psi_z(w_1) - \psi_z(w_2)| \leq |z| |w_1 - w_2|$.

証明 (1) は定義より明らか。(2) も初等的に確かめられる。 □

実数 $\sigma > 1/2$ に対して、 $P_{\sigma, T}$ と Q_σ をそれぞれ (2.1) と (2.5) により定義される $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 上の確率測度とすると、これらの特性関数は

$$\Lambda(z; P_{\sigma, T}) = \frac{1}{T} \int_0^T \psi_z(\log \zeta(\sigma + it)) dt, \quad \Lambda(z; Q_\sigma) = \mathbb{E}[\psi_z(\log \zeta(\sigma, X))]$$

と与えられる。Lévy の判定法 (定理 A.19) により、 $T \rightarrow \infty$ のとき $P_{\sigma, T}$ が Q_σ に弱収束することは、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Lambda(z; P_{\sigma, T}) = \Lambda(z; Q_\sigma) \tag{3.1}$$

が成り立つことと同値である。これを示すため、 $\log \zeta(s)$ や $\log \zeta(s, X)$ の Dirichlet 級数を有限で打ち切った対象を考え、それらを用いて $P_{\sigma, T}$ や Q_σ の類似をつくる。記号 $\sum_{p^k \leq N}$ は条件 $p^k \leq N$ を満たす素数 p と整数 $k \geq 1$ の組を渡る有限和を表すものとする。このとき、 $N \geq 2$ に対して

$$R_N(s) = \sum_{p^k \leq N} \frac{1}{k} p^{-ks}, \quad R_N(s, X) = \sum_{p^k \leq N} \frac{1}{k} p^{-ks} (X_p)^k$$

と定め、さらに $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 上の確率測度 $P_{\sigma, T, N}$ および $Q_{\sigma, N}$ を

$$\begin{aligned} P_{\sigma, T, N}(A) &= \frac{1}{T} \lambda_1 \{t \in [0, T] \mid R_N(\sigma + it) \in A\}, \\ Q_{\sigma, N}(A) &= \mathbb{P}(R_N(\sigma, X) \in A) \end{aligned}$$

によって定義する．このように定義した $P_{\sigma,T,N}$ と $Q_{\sigma,N}$ の特性関数に関する以下の三つの命題を証明できれば，(3.1) は直ちに従う．

命題 3.2 任意の $\sigma > 1/2$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して，次が成り立つ：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} |\Lambda(z; P_{\sigma,T}) - \Lambda(z; P_{\sigma,T,N})| = 0.$$

命題 3.3 任意の $\sigma > 1/2$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して，次が成り立つ：

$$\sup_{N \geq 2} \lim_{T \rightarrow \infty} |\Lambda(z; P_{\sigma,T,N}) - \Lambda(z; Q_{\sigma,N})| = 0.$$

命題 3.4 任意の $\sigma > 1/2$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して，次が成り立つ：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\Lambda(z; Q_{\sigma}) - \Lambda(z; Q_{\sigma,N})| = 0.$$

このうち命題 3.4 の証明は簡単なので先に済ませておく．大雑把な傾向として，整数論的な対象である $\zeta(s)$ や $R_N(s)$ に関する主張よりも，確率論的な対象である $\zeta(s, X)$ や $R_N(s, X)$ に関する主張のほうが証明し易いことが多い．

命題 3.4 の証明 まず補題 3.1 の (2) により，

$$\begin{aligned} |\Lambda(z; Q_{\sigma}) - \Lambda(z; Q_{\sigma,N})| &= |\mathbb{E}[\psi_z(\log \zeta(\sigma, X))] - \mathbb{E}[\psi_z(R_N(\sigma, X))]| \\ &\leq |z| \cdot \mathbb{E}[|\log \zeta(\sigma, X) - R_N(\sigma, X)|] \end{aligned}$$

が成り立つ．さらに Cauchy–Schwarz の不等式により

$$\mathbb{E}[|\log \zeta(\sigma, X) - R_N(\sigma, X)|] \leq \mathbb{E}\left[|\log \zeta(\sigma, X) - R_N(\sigma, X)|^2\right]^{1/2}$$

であるので，この右辺が $N \rightarrow \infty$ のときに $\rightarrow 0$ となることが示せば結論が従う．ここで $\sigma > 1/2$ に対して，

$$\log \zeta(\sigma, X) - R_N(\sigma, X) = \sum_{p^k > N} \frac{1}{k} p^{-k\sigma} (X_p)^k$$

は概収束するので，その 2 次モーメントは

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|\log \zeta(\sigma, X) - R_N(\sigma, X)|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{p^k > N} \frac{1}{k} p^{-k\sigma} (X_p)^k \sum_{q^\ell > N} \frac{1}{\ell} q^{-\ell\sigma} (X_q)^\ell\right] \\ &= \sum_{p^k > N} \sum_{q^\ell > N} \frac{1}{k\ell} (p^k q^\ell)^{-\sigma} \mathbb{E}\left[(X_p)^k (\overline{X}_q)^\ell\right] \quad (3.2) \end{aligned}$$

と計算される．この最後の期待値について，まず $p = q$ のときは (2.2) を用いて

$$\mathbb{E} \left[(X_p)^k (\overline{X_p})^\ell \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} e^{-i\ell\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & k = \ell \text{ のとき} \\ 0 & k \neq \ell \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つ．一方で $p \neq q$ のときは X_p と X_q が独立であるので， $k, \ell \geq 1$ より

$$\mathbb{E} \left[(X_p)^k (\overline{X_q})^\ell \right] = \mathbb{E} \left[(X_p)^k \right] \mathbb{E} \left[(\overline{X_q})^\ell \right] = 0$$

となることが分かる．したがって，(3.2) において $p^k = q^\ell$ の対角項のみが残り，

$$\mathbb{E} \left[|\log \zeta(\sigma, X) - R_N(\sigma, X)|^2 \right] = \sum_{p^k > N} \frac{1}{k^2} p^{-2k\sigma}$$

が導かれる． $\sigma > 1/2$ より $\sum_p p^{-2\sigma}$ は収束し，このことから $N \rightarrow \infty$ のとき，

$$\sum_{p^k > N} \frac{1}{k^2} p^{-2k\sigma} \leq \sum_{p > N} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} p^{-2k\sigma} \leq \frac{\pi^2}{6} \sum_{p > N} p^{-2\sigma} \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

である．以上で結論が示された． $\square$

3.1 等分布の理論

命題 3.3 は，整数論的な対象である $R_N(s)$ と確率論的な対象である $R_N(s, X)$ を結ぶ役割を担うという点で，非常に重要である．この種の結果は「等分布の理論」がその背景にあり，とくに命題 3.3 に対しては次の補題がその証明の根幹をなす．

補題 3.5 有限個の相異なる素数 $p_1, \dots, p_n$ に対して， $\gamma_n(t) = (p_1^{-it}, \dots, p_n^{-it})$ は $\mathbb{T}^n$ 上で積測度 $\mathbf{m}_n = \underbrace{\mathbf{m} \otimes \dots \otimes \mathbf{m}}_{n \text{ 個}}$ について等分布する．すなわち，

$$\mu_{n,T}(A) = \frac{1}{T} \lambda_1 \{t \in [0, T] \mid \gamma_n(t) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^n)$$

によって定義される確率測度 $\mu_{n,T}$ は $T \rightarrow \infty$ のとき $\mathbf{m}_n$ に弱収束する．

証明 以下， $\mathbb{T}^n$ 上の点を一般に $\underline{z} = (z_1, \dots, z_n)$ と書く． $\mathbb{T}^n$ 上の複素数値連続関数全体の集合を $C(\mathbb{T}^n)$ とすると，

$$d_n(f, g) = \sup_{\underline{z} \in \mathbb{T}^n} |f(\underline{z}) - g(\underline{z})|$$

は $C(\mathbb{T}^n)$ の距離を定める．また $\mathbb{T}^n$ のコンパクト性から任意の $f \in C(\mathbb{T}^n)$ は有界であるので，Portmanteau の定理（定理 A.15）により，補題は

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^n} f d\mu_{n,T} = \int_{\mathbb{T}^n} f d\mathbf{m}_n \quad (3.4)$$

が任意の $f \in C(\mathbb{T}^n)$ に対して成り立つことと同値である．さらに距離 d_n に関して Laurent 多項式全体の集合は $C(\mathbb{T}^n)$ において稠密なので，任意の $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ に対して $f(z) = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$ の場合に (3.4) が成立することを見ればよい．まず左辺については，確率測度 $\mu_{n,T}$ の定義から

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} d\mu_{n,T}(z) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (p_1^{-it})^{k_1} \dots (p_n^{-it})^{k_n} dt \\ &= \begin{cases} 1 & (k_1, \dots, k_n) = \mathbf{0} \text{ のとき} \\ 0 & (k_1, \dots, k_n) \neq \mathbf{0} \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

となることが分かる．実際， $(k_1, \dots, k_n) = \mathbf{0}$ のときは明らかに成立し，そうでないときに限り素因数分解の一意性より $p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \neq 1$ であるので， $T \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{1}{T} \int_0^T (p_1^{-it})^{k_1} \dots (p_n^{-it})^{k_n} dt = \frac{(p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n})^{-iT} - 1}{-iT \log(p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n})} \rightarrow 0$$

が成立する．一方で (3.4) の右辺についても，Fubini の定理と (2.2) により

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} d\mathbf{m}_n(z) &= \prod_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik_j \theta} d\theta \\ &= \begin{cases} 1 & (k_1, \dots, k_n) = \mathbf{0} \text{ のとき} \\ 0 & (k_1, \dots, k_n) \neq \mathbf{0} \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ．以上で $f(z) = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$ の場合に (3.4) を示すことができた． $\square$

説明の都合で順番が前後することになったが，補題 3.5 こそが確率変数列 (X_p) の由来なのである．相異なる素数 $p_1, \dots, p_n$ に対して， $X_{p_1}, \dots, X_{p_n}$ は独立であり，各 p_j に対して $X_{p_j} \sim \mathbf{m}$ と分布することから， $(X_{p_1}, \dots, X_{p_n}) \sim \mathbf{m}_n$ が成り立つ．ゆえに補題 3.5 より任意の連続関数 $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(p_1^{-it}, \dots, p_n^{-it}) dt = \mathbb{E}[f(X_{p_1}, \dots, X_{p_n})] \quad (3.5)$$

が導かれるが，むしろ逆にこれが成り立つように (X_p) を用意したのである．

命題 3.3 の証明 整数 $N \geq 2$ に対して, N 以下の全ての素数を $p_1, \dots, p_n$ とする. このとき $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{T}$ に対して

$$S_{\sigma, N}(z_1, \dots, z_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{1 \leq k \leq \frac{\log N}{\log p_j}} \frac{1}{k} p_j^{-k\sigma} z_j^k$$

と定めると, $S_{\sigma, N}$ は $\mathbb{T}^n$ 上の連続関数であり, 定義より

$$S_{\sigma, N}(p_1^{-it}, \dots, p_n^{-it}) = R_N(\sigma + it), \quad S_{\sigma, N}(X_{p_1}, \dots, X_{p_n}) = R_N(\sigma, X)$$

が成り立つ. これらの等式により, 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \psi_z(S_{\sigma, N}(p_1^{-it}, \dots, p_n^{-it})) dt &= \Lambda(z; P_{\sigma, T, N}), \\ \mathbb{E}[\psi_z(S_{\sigma, N}(X_{p_1}, \dots, X_{p_n}))] &= \Lambda(z; Q_{\sigma, N}) \end{aligned}$$

が従うので, (3.5) を $f = \psi_z \circ S_{\sigma, N}$ として適用すれば結論を得る. $\square$

3.2 零点密度評価の応用

定理 2.1 の (1) の主張の証明を完了するには, あとは命題 3.2 さえ示せばよい. 本稿では, 命題 3.2 を Selberg による以下の形の $\zeta(s)$ の零点密度評価を用いて証明する. ここで $N(\sigma, T)$ により, 条件 $\operatorname{Re}(\rho) > \sigma$, $0 < \operatorname{Im}(\rho) \leq T$ を満たす $\zeta(s)$ の零点 ρ を重複度込みで数えた個数を表すものとする.

補題 3.6 ([Sel46]) 任意の $1/2 \leq \sigma \leq 1$ に対して, 次の評価が成り立つ:

$$N(\sigma, T) \ll T^{1-\frac{1}{4}(\sigma-\frac{1}{2})} \log T.$$

本稿では補題 3.6 は証明せず, 単に事実として用いることにする. Selberg による原論文以外にも [Tit86, Chap. IX]などを参照するとよいだろう. 命題 3.2 の証明のために, $\log \zeta(s)$ に関する以下の補題も必要になる.

補題 3.7 $1/2 \leq \sigma_0 < 1$, $N \geq 2$, $|t| \geq N+3$ とする. さらに条件 $\sigma_0 \leq \operatorname{Re}(\rho) \leq 1$, $|\operatorname{Im}(\rho) - t| \leq N+2$ を満たす $\zeta(s)$ の零点 ρ は存在しないと仮定する.

(1) $\sigma_0 < x \leq 2$ かつ $|y - t| \leq N$ のとき, 次の評価が成り立つ:

$$\log \zeta(x + iy) \ll \frac{\log |t|}{x - \sigma_0}.$$

(2) $\sigma_0 < \sigma \leq 1$ のとき, 次の漸近等式が成り立つ:

$$\log \zeta(\sigma + it) = R_N(\sigma + it) + O\left(\frac{\log |t|}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2} N^{\sigma_1 - \sigma}\right).$$

ただし, $\sigma_1 = \min\left(\sigma_0 + \frac{1}{\log N}, \frac{\sigma + \sigma_0}{2}\right)$ とする.

証明 ほぼ同じ主張が [GS06, Lemma 1] で得られており, 証明も概ね同様の流れで行う. まず (1) の主張を示すため, $z_0 = 2 + iy$, $R = 2 - \sigma_0$, $r = 2 - x$ と定める. このとき $0 < r < R \leq 3/2$ であり, 仮定から $\zeta(z)$ は閉円盤 $|z - z_0| \leq R$ に零点を持たない. また $|1 - z_0| \geq |y| - 1 \geq |t| - N - 1 \geq 2$ より, $\zeta(z)$ の極も閉円盤 $|z - z_0| \leq R$ 内に存在しない. よって $\log \zeta(z)$ は $|z - z_0| \leq R$ において正則であり, Borel–Carathéodory の定理 (cf. 本報告集 [杉 25, 武 25]) により

$$\max_{|z - z_0| \leq r} |\log \zeta(z)| \leq \frac{2r}{R - r} \max_{|z - z_0| \leq R} \operatorname{Re} \log \zeta(z) + \frac{R + r}{R - r} |\log \zeta(z_0)| \quad (3.6)$$

が成り立つ. まず r の定め方から, $|(x + iy) - z_0| \leq r$ である. 次に, $z \in \mathcal{G}$ のとき $\operatorname{Re} \log \zeta(z) = \log |\zeta(z)|$ であるので, 凸評価 (cf. 本報告集 [杉 25]) から

$$\max_{|z - z_0| \leq R} \operatorname{Re} \log \zeta(z) \leq \log(|t| + N + 2) + O(1) \ll \log |t|$$

が従う. 最後に $\operatorname{Re}(z_0) = 2$ より, $\log \zeta(z_0)$ に対しては Dirichlet 級数表示が使えて,

$$|\log \zeta(z_0)| \leq \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p^{-2k} \ll 1$$

となる. これらを (3.6) に代入し, (1) の主張が得られる. 続いて (2) の主張を示すため, $c = 1 - \sigma + \frac{1}{\log N} > 0$ とおき複素積分

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iN}^{c+iN} \log \zeta(\sigma + it + w) N^w \frac{dw}{w}$$

を考える. まず $\sigma + c > 1$ より積分経路上では再び Dirichlet 級数表示が使えるので, Perron の公式 (cf. 本報告集 [佐 25]) を用いて

$$I = R_N(\sigma + it) + O\left(N^{c-1} \sum_{p^k \neq N} \frac{1}{k} p^{-k(\sigma+c)} \frac{1}{|\log(N/p^k)|} + \frac{1}{N}\right)$$

が導かれる．ただし記号 $\sum_{p^k \neq N}$ は条件 $p^k \neq N$ を満たす素数 p と整数 $k \geq 1$ の組を渡る無限和を表すものとする．この誤差項について，

$$\sum_{p^k \neq N} \frac{1}{k} p^{-k(\sigma+c)} \frac{1}{|\log(N/p^k)|} \leq \sum_{n \neq N} n^{-(\sigma+c)} \frac{1}{|\log(N/n)|}$$

とし，さらに右辺の和を $\frac{1}{2}N < n < 2N$ なる項の和と $n \leq \frac{1}{2}N$, $2N \leq n$ なる項の和に分割して評価することで，

$$I = R_N(\sigma + it) + O(N^{-\sigma} \log N) \quad (3.7)$$

が結論づけられる．一方で，複素積分 I の経路を以下の $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$ に変更することを考える．

- $\mathcal{L}_1$ は $c - iN$ と $\sigma_1 - \sigma - iN$ を繋ぐ線分
- $\mathcal{L}_2$ は $\sigma_1 - \sigma - iN$ と $\sigma_1 - \sigma + iN$ を繋ぐ線分
- $\mathcal{L}_3$ は $\sigma_1 - \sigma + iN$ と $c + iN$ を繋ぐ線分

このとき仮定より，経路を変更する際に通過する積分関数の極は $w = 0$ のみであり，これは留数が $\log \zeta(\sigma + it)$ の単純極である．ゆえに

$$I = \log \zeta(\sigma + it) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \log \zeta(\sigma + it + w) N^w \frac{dw}{w} \quad (3.8)$$

が成り立つ．ここで $w \in L$ に対して， $x = \sigma + \operatorname{Re}(w)$, $y = t + \operatorname{Im}(w)$ とすると $\sigma_0 < x \leq 2$, $|y - t| \leq N$ を満たすので，(1) が適用可能であり，

$$\log \zeta(\sigma + it + w) \ll \frac{\log |t|}{\sigma + \operatorname{Re}(w) - \sigma_0}$$

が積分経路 $\mathcal{L}$ 上で成り立つことが分かる．よって $\mathcal{L}_1$ および $\mathcal{L}_3$ 上の積分は

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_3} \log \zeta(\sigma + it + w) N^w \frac{dw}{w} &\ll \frac{\log |t|}{\sigma_1 - \sigma_0} N^c \int_{\sigma_1 - \sigma}^c \frac{du}{|u \pm iN|} \\ &\ll \frac{\log |t|}{\sigma_1 - \sigma_0} N^{c-1} \end{aligned}$$

と評価され， $\mathcal{L}_2$ 上の積分は

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_2} \log \zeta(\sigma + it + w) N^w \frac{dw}{w} &\ll \frac{\log |t|}{\sigma_1 - \sigma_0} N^{\sigma_1 - \sigma} \int_{-N}^N \frac{dv}{|\sigma_1 - \sigma + iv|} \\ &\ll \frac{\log |t|}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2} N^{\sigma_1 - \sigma} \end{aligned}$$

と評価される．これらを (3.8) に代入し，

$$I = \log \zeta(\sigma + it) + O\left(\frac{\log |t|}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2} N^{\sigma_1 - \sigma}\right) \quad (3.9)$$

を得る．よって (3.7) と (3.9) から結論が従う． $\square$

命題 3.2 の証明 以下， $\sigma > 1$ の場合と $1/2 < \sigma \leq 1$ の場合に分けて証明を行う． $\sigma > 1$ に対しては，命題 3.4 のときと同様に補題 3.1 の (2) と Cauchy-Schwarz の不等式を用いて，

$$|\Lambda(z; P_{\sigma, T}) - \Lambda(z; P_{\sigma, T, N})| \leq |z| \cdot \left(\frac{1}{T} \int_0^T |\log \zeta(\sigma + it) - R_N(\sigma + it)|^2 dt \right)^{1/2}$$

が得られる．ここで $\log \zeta(\sigma + it)$ の Dirichlet 級数表示を用いて，右辺の積分は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T |\log \zeta(\sigma + it) - R_N(\sigma + it)|^2 dt \\ &= \sum_{p^k > N} \sum_{q^\ell > N} \frac{1}{k\ell} (p^k q^\ell)^{-\sigma} \frac{1}{T} \int_0^T (p^k)^{-it} (q^\ell)^{it} dt \\ &= \sum_{p^k > N} \frac{1}{k^2} p^{-2k\sigma} + \sum_{\substack{p^k > N, q^\ell > N \\ p^k \neq q^\ell}} \frac{1}{k\ell} (p^k q^\ell)^{-\sigma} \frac{(q^\ell/p^k)^{iT} - 1}{iT \log(q^\ell/p^k)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

と変形される．最後の 2 重和は $T \rightarrow \infty$ とすると $\rightarrow 0$ となることが分かるので，

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\log \zeta(\sigma + it) - R_N(\sigma + it)|^2 dt = \sum_{p^k > N} \frac{1}{k^2} p^{-2k\sigma}$$

が導かれる．右辺は (3.3) より $N \rightarrow \infty$ のとき $\rightarrow 0$ となるので，結論が従う．次に $1/2 < \sigma \leq 1$ に対しては， $\sigma_0 = \frac{\sigma+1/2}{2}$ ， $N_T = (\log T)^{\frac{2}{\sigma-\sigma_0}}$ と定める．このとき十分大きな T に対して $\sigma_1 := \min\left(\sigma_0 + \frac{1}{\log N_T}, \frac{\sigma+\sigma_0}{2}\right) = \sigma_0 + \frac{1}{\log N_T}$ である．ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_T &= \mathcal{A}_T(\sigma, \sigma_0, N_T) \\ &= \left\{ t \geq N_T + 3 \mid \log \zeta(\sigma + it) = R_{N_T}(\sigma + it) + O\left(\frac{\log t}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2} N_T^{\sigma_1 - \sigma}\right) \right\} \end{aligned}$$

とおく. 補題 3.1 の (1) と (2), および Cauchy–Schwarz の不等式により,

$$\begin{aligned}
& |\Lambda(z; P_{\sigma, T}) - \Lambda(z; P_{\sigma, T, N})| \\
& \leq |\Lambda(z; P_{\sigma, T}) - \Lambda(z; P_{\sigma, T, N_T})| + |\Lambda(z; P_{\sigma, T, N_T}) - \Lambda(z; P_{\sigma, T, N})| \\
& \leq |z| \cdot \frac{1}{T} \int_{\mathcal{A}_T \cap [0, T]} |\log \zeta(\sigma + it) - R_{N_T}(\sigma + it)| dt + \frac{\lambda_1([0, T] \setminus \mathcal{A}_T)}{T} \\
& \quad + |z| \cdot \left(\frac{1}{T} \int_0^T |R_{N_T}(\sigma + it) - R_N(\sigma + it)|^2 dt \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

が成り立つ. まず第 1 項の積分については, 集合 $\mathcal{A}_T$ の定義より,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \int_{\mathcal{A}_T \cap [0, T]} |\log \zeta(\sigma + it) - R_{N_T}(\sigma + it)| dt & \ll \frac{N_T^{\sigma_0 - \sigma} (\log N_T)^2}{T} \int_3^T \log t dt \\
& \ll \frac{(\log \log T)^2}{\log T} \quad (3.11)
\end{aligned}$$

と評価される. 続いて第 2 項を評価するために,

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_T &= \mathcal{B}_T(\sigma, \sigma_0, N_T) \\
&= \{t \geq N_T + 3 \mid \exists \rho \text{ s.t. } \zeta(\rho) = 0, \sigma_0 \leq \operatorname{Re}(\rho) \leq 1, |\operatorname{Im}(\rho) - t| \leq N_T + 2\}
\end{aligned}$$

とおくと, 補題 3.7 より $(\mathcal{A}_T)^c \subset \mathcal{B}_T$ である. ゆえに

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \lambda_1([0, T] \setminus \mathcal{A}_T) & \leq \frac{N_T + 3}{T} + \frac{4(N_T + 2)}{T} N(\sigma_0, T) \\
& \ll \frac{1}{T} (\log T)^{\frac{2}{\sigma - \sigma_0}} + T^{-\frac{1}{4}(\sigma_0 - \frac{1}{2})} (\log T)^{\frac{2}{\sigma - \sigma_0} + 1} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

が補題 3.6 から従う. よって (3.11) と (3.12) を用いて $T \rightarrow \infty$ とすると,

$$\begin{aligned}
& \limsup_{T \rightarrow \infty} |\Lambda(z; P_{\sigma, T}) - \Lambda(z; P_{\sigma, T, N})| \\
& \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} |z| \cdot \left(\frac{1}{T} \int_0^T |R_{N_T}(\sigma + it) - R_N(\sigma + it)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (3.13)
\end{aligned}$$

が得られる. 最後にこの右辺の積分を評価しよう. (3.10) と同様に,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{T} \int_0^T |R_{N_T}(\sigma + it) - R_N(\sigma + it)|^2 dt \\
& = \sum_{N < p^k \leq N_T} \frac{1}{k^2} p^{-2k\sigma} + \sum_{N < p^k \leq N_T} \sum_{\substack{N < q^\ell \leq N_T \\ p^k \neq q^\ell}} \frac{1}{k\ell} (p^k q^\ell)^{-\sigma} \frac{(q^\ell/p^k)^{iT} - 1}{iT \log(q^\ell/p^k)} \\
& =: S_1 + S_2
\end{aligned}$$

と変形できる．ここで S_1 については任意の T に対して

$$|S_1| \leq \sum_{p^k > N} \frac{1}{k^2} p^{-2k\sigma}$$

が成り立ち、 S_2 については任意の N に対して

$$|S_2| \leq \frac{4}{T} \sum_{m \leq N_T} \sum_{\substack{n \leq N_T \\ m > n}} (mn)^{-\sigma} \frac{1}{\log(m/n)} \ll \frac{N_T^{2-2\sigma} \log N_T}{T}$$

となることが、和を $n < m < 2n$ なる項の和と $m \geq 2n$ なる項の和に分割して評価することで分かる． $N_T = (\log T)^{\frac{2}{\sigma-\sigma_0}}$ より、これらの評価から

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |R_{N_T}(\sigma + it) - R_N(\sigma + it)|^2 dt = 0$$

が成り立つ．(3.13) により以上で $1/2 < \sigma \leq 1$ の場合の証明が完結した． $\square$

4 ランダム Euler 積の性質

3 節までで定理 2.1 の (1) の主張の証明が完了した．続いて (2) の主張を示そう．これはもはやゼータ関数 $\zeta(s)$ に関する主張ではなく、ランダム Euler 積 $\zeta(s, X)$ の性質に関する主張である．ただしその証明は、純粋に確率論の諸結果を用いるだけで済むということではなく、整数論的な性質が必要になる箇所も多々あることに注目していただきたい．

4.1 絶対連続分布

まず $\log \zeta(\sigma, X)$ が絶対連続分布であること、すなわち (2.5) によって定義される確率測度 Q_σ の絶対連続性を示す．Lévy の反転公式 (定理 A.24) により、特性関数 $\Lambda(z; Q_\sigma)$ に対して

$$\int_{\mathbb{C}} |\Lambda(z; Q_\sigma)| d\lambda_2(z) < \infty \quad (4.1)$$

が成り立てば Q_σ は絶対連続であり、その密度関数 (Radon–Nikodým 微分) は

$$M_\sigma(w) = (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{C}} \Lambda(z; Q_\sigma) \psi_{-z}(w) d\lambda_2(z) \quad (4.2)$$

として得られるのであった．さらにこのとき Lebesgue の優収束定理を用いた議論で M_σ が連続であることも分かる．本稿では (4.1) を次の命題の系として示す．

命題 4.1 任意の $\sigma > 1/2$ に対してある定数 $c(\sigma) > 0$ が存在し、

$$|\Lambda(z; Q_\sigma)| \leq \exp \left(-c(\sigma) \frac{|z|^{1/\sigma}}{\log |z|} \right)$$

が $|z| \geq 3$ を満たす全ての $z \in \mathbb{C}$ に対して成り立つ．

証明 まず $\log \zeta(s, X)$ の Dirichlet 級数表示 (2.4) と $\psi_z(w)$ の加法的性より、

$$\Lambda(z; Q_\sigma) = \mathbb{E} \left[\psi_z \left(\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p^{-k\sigma} (X_p)^k \right) \right] = \mathbb{E} \left[\prod_p \psi_z \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p^{-k\sigma} (X_p)^k \right) \right]$$

が成り立つ．ここで確率変数列 (X_p) は独立なので、特性関数 $\Lambda(z; Q_\sigma)$ は

$$\Lambda(z; Q_\sigma) = \prod_p g_{\sigma,p}(z) \tag{4.3}$$

という無限積表示を持つ．ただし各素数 p に対して、関数 $g_{\sigma,p}(z)$ は

$$g_{\sigma,p}(z) = \mathbb{E} \left[\psi_z \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p^{-k\sigma} (X_p)^k \right) \right]$$

と定義される．さらに指数関数の冪級数展開を用いて、

$$\begin{aligned} \psi_z(w) &= 1 + i \langle z, w \rangle - \frac{1}{2} \langle z, w \rangle^2 + O(|\langle z, w \rangle|^3) \\ &= 1 + \frac{i}{2} (z\bar{w} + \bar{z}w) - \frac{1}{8} (z^2\bar{w}^2 + 2|z|^2|w|^2 + \bar{z}^2w^2) + O(|z|^3|w|^3) \end{aligned}$$

が任意の $z, w \in \mathbb{C}$ に対して成り立つことが分かり、また $k \geq 1$ に対して (2.2) より $\mathbb{E}[(X_p)^k] = 0$ であるので、これらを用いて $g_{\sigma,p}(z)$ は

$$g_{\sigma,p}(z) = 1 - \frac{1}{4} |z|^2 p^{-2\sigma} + O(|z|^3 p^{-3\sigma})$$

と計算される．すなわち、ある定数 $A(\sigma) > 0$ が存在して

$$\left| g_{\sigma,p}(z) - \left(1 - \frac{1}{4} |z|^2 p^{-2\sigma} \right) \right| \leq A(\sigma) |z|^3 p^{-3\sigma}$$

が成り立つ. よって $|z|p^{-\sigma} < r(\sigma) := \min\left(\frac{1}{\sqrt[3]{8A(\sigma)}}, 1\right)$ が成り立つとき, 不等式

$$|g_{\sigma,p}(z)| \leq 1 - \frac{1}{4}|z|^2p^{-2\sigma} + A(\sigma)|z|^3p^{-3\sigma} < 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \quad (4.4)$$

が得られる. 一方で定義から $|g_{\sigma,p}(z)| \leq 1$ は常に満たされるので, (4.3) により

$$|\Lambda(z; Q_\sigma)| \leq \prod_{x < p \leq 2x} |g_{\sigma,p}(z)|$$

が任意の $x \geq 2$ に対して成り立つことが分かる. ここで $x_\sigma = \left(\frac{|z|}{r(\sigma)}\right)^{1/\sigma}$ とおくと, $x_\sigma < p \leq 2x_\sigma$ のとき $|z|p^{-\sigma} < r(\sigma)$ であるから, (4.4) を用いて

$$|\Lambda(z; Q_\sigma)| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^{\pi(2x_\sigma) - \pi(x_\sigma)} = \exp(-c(\pi(2x_\sigma) - \pi(x_\sigma))) \quad (4.5)$$

が得られる. ただし $c = \log(8/7) = 0.133... > 0$ である. 素数定理より

$$\pi(2x_\sigma) - \pi(x_\sigma) \gg \frac{x_\sigma}{\log x_\sigma} \gg \frac{|z|^{1/\sigma}}{\log |z|}$$

が成り立つので, (4.5) より結論が従う. $\square$

命題 4.1 により, 任意の $k \geq 1$ に対して

$$\int_{\mathbb{C}} |z|^k |\Lambda(z; Q_\sigma)| d\lambda_2(z) < \infty$$

が成り立つことも分かる. したがって (4.2) の積分記号下での微分が可能であり, $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2$ と同一視して実 2 変数関数として見ると $M_\sigma(w)$ は無限回微分可能な関数である. [JW35] ではより詳しく, $1/2 < \sigma \leq 1$ のとき $M_\sigma(w)$ は実 2 変数関数として解析的であることも示されている. (4.2 節で見るように $\sigma > 1$ のときは $M_\sigma(w)$ はコンパクト台を持つので, 解析的ではない.)

注意 4.2 本稿における確率測度 Q_σ やその密度関数 $M_\sigma(w)$ の取り扱い, [JW35] のそれとは少し異なるように見える. [JW35] では素数 p に対して

$$Q_{\sigma,p}(A) = \frac{1}{2\pi} \lambda_1 \left\{ \theta \in [0, 2\pi) \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p^{-k\sigma} e^{ik\theta} \in A \right. \right\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$$

と定義される $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 上の確率測度 $Q_{\sigma,p}$ を考え、それらの畳み込み測度

$$(Q_{\sigma,p_1} * \cdots * Q_{\sigma,p_N})(A) = \int_{\mathbb{C}^N} \mathbf{1}_A(z_1 + \cdots + z_N) dQ_{\sigma,p_1}(z_1) \cdots dQ_{\sigma,p_N}(z_N)$$

の $N \rightarrow \infty$ での弱収束極限として Q_σ を構成している。ここで p_n により n 番目の素数を表し、 $\mathbf{1}_A$ により集合 A の指示関数を表す。とは言えこれは本質的には本稿の考え方と同じである。なぜなら (X_p) のとり方から、各 p に対して

$$Q_{\sigma,p}(A) = \mathbb{P} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p^{-k\sigma} (X_p)^k \in A \right)$$

であることは明らかであるし、また (X_p) の独立性から命題 A.13 より

$$(Q_{\sigma,p_1} * \cdots * Q_{\sigma,p_N})(A) = \mathbb{P} \left(\sum_{n \leq N} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p_n^{-k\sigma} (X_{p_n})^k \in A \right)$$

も成り立つ。つまり確率変数として書くか、その分布である確率測度として書くかの違いでしかない。また [IM11] では、 $\mathbb{C}$ 上の Schwartz 超関数として $Q_{\sigma,p}$ を捉え、それを変数変換により Dirac の δ 超関数を用いて表したものを $M_{\sigma,p}$ と定義した。すると $N \geq 5$ であれば畳み込み $M_{\sigma,p_1} * \cdots * M_{\sigma,p_N}$ が連続関数であること、また $N \rightarrow \infty$ としたときの極限 $M_\sigma = *_p M_{\sigma,p}$ が存在して無限回微分可能な関数であること、などが示された。[IM11] の著者の一人である伊原康隆氏は、 M_σ を M 関数と呼称した。本稿における密度関数の記号もこれに準ずるものである^{*5}。

4.2 稠密性補題の応用

さて、定理 2.1 の (2) の主張で証明がまだ残っているのは、 $1/2 < \sigma \leq 1$ のとき、任意の $w \in \mathbb{C}$ に対して $M_\sigma(w) > 0$ というものだけである。本稿では「稠密性補題」と呼ばれる次の結果を用いてこれを証明する。

補題 4.3 ([Bag81]) H を任意の複素 Hilbert 空間とし、内積とノルムをそれぞれ $(\cdot, \cdot)$ と $\|\cdot\|$ で表す。ここで H 上の点列 (x_n) は以下の条件を満たすと仮定する。

^{*5} 正確には、[IM11] では Lebesgue 測度を 2π で割った $|dw| = d\lambda_2(w)/2\pi$ という測度で考えている。このほうが Fourier 変換とその逆変換の関係が少し綺麗になる。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty.$$

$$(2) \text{ 任意の } y \in H \setminus \{0\} \text{ に対して, } \sum_{n=1}^{\infty} |(x_n, y)| = \infty.$$

このとき, $\mathbb{T}$ 上のある点列 (a_n) が存在して $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ となるような $x \in H$ 全体の集合は H で稠密である.

補題 4.3 は単に事実として用いることにする. 証明では Hahn–Banach の定理が重要な役割を果たすのだが, 詳細は [Bag81, Section 5.2] や [Lau96, Section 6.1] を参照されたい. 以下, $H = \mathbb{C}$ を自明な複素 Hilbert 空間として補題 4.3 を適用する. すなわち $z, w \in \mathbb{C}$ に対して $(z, w) = z\bar{w}$ および $\|z\| = |z|$ として考える.

命題 4.4 $1/2 < \sigma \leq 1$ のとき, $\log \zeta(\sigma, X)$ は狭義正分布である. すなわち

$$\text{supp } \log \zeta(\sigma, X) = \mathbb{C} \quad (4.6)$$

が成り立つ. 一方で $\sigma > 1$ のとき, $\log \zeta(\sigma, X)$ はコンパクト台を持つ.

証明 (X_p) は独立であるので, 定理 A.27 より

$$\text{supp } \log \zeta(\sigma, X) = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \text{supp} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p_n^{-k\sigma} (X_{p_n})^k \right)} \quad (4.7)$$

が成り立つ. ただし p_n により n 番目の素数を表すものとする. まず $1/2 < \sigma \leq 1$ の場合を考える. このとき $\sum_p p^{-2\sigma}$ は収束するので, 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\sum_{n \geq N} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} p_n^{-k\sigma} < \frac{\epsilon}{2} \quad (4.8)$$

を満たす $N = N(\sigma, \epsilon) \geq 2$ がとれる. 勝手な $w \in \mathbb{C}$ をとり,

$$w' = w - \sum_{n < N} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p_n^{-k\sigma}$$

とおく. 次に複素数列 $(x_n)_{n \geq N}$ を $x_n = p_n^{-\sigma}$ と定めると, 補題 4.3 の条件 (1) と (2) は $1/2 < \sigma \leq 1$ のとき満たされるので, $\mathbb{T}$ 上のある点列 $(a_n)_{n \geq N}$ が存在して

$$\left| \sum_{n \geq N} a_n p_n^{-\sigma} - w' \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad (4.9)$$

が成り立つ. $n < N$ に対しては $a_n = 1$ と定めると, (4.8) と (4.9) より

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p_n^{-k\sigma} a_n^k - w \right| \\ & \leq \left| \sum_{n < N} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p_n^{-k\sigma} a_n^k + \sum_{n \geq N} p_n^{-\sigma} a_n - w \right| + \left| \sum_{n \geq N} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} p_n^{-k\sigma} a_n^k \right| < \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $a_n \in \mathbb{T}$ より,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p_n^{-k\sigma} a_n^k \in \sum_{n=1}^{\infty} \text{supp} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p_n^{-k\sigma} (X_{p_n})^k \right)$$

であるので, (4.7) より $w \in \text{supp} \log \zeta(\sigma, X)$ が成り立つ. ゆえに (4.6) が示された. $\sigma > 1$ のときは, $z \in \text{supp} \log \zeta(\sigma, X)$ であれば (4.7) より

$$|z| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p_n^{-k\sigma} = \log \zeta(\sigma)$$

が成り立つので, $\text{supp} \log \zeta(\sigma, X)$ は閉円盤 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \log \zeta(\sigma)\}$ に含まれる. 以上で命題の主張が全て示された. $\square$

命題 4.4 により, $1/2 < \sigma \leq 1$ のとき $\mathbb{C}$ 上の任意の開集合 G に対して

$$Q_{\sigma}(G) = \int_G M_{\sigma}(w) d\lambda_2(w) > 0$$

が成り立つ. ゆえに M_{σ} は, 少なくとも任意の点の任意の開近傍上で恒等的に 0 になることはない. 目標であった任意の $w \in \mathbb{C}$ で $M_{\sigma}(w) > 0$ であることを証明するには, もう少し工夫が必要になる. そのために,

$$\log \zeta(s, X)^{\#} = \sum_{\substack{n=1 \\ n: \text{ odd}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p_n^{-ks} (X_{p_n})^k, \quad \log \zeta(s, X)^{\flat} = \sum_{\substack{n=1 \\ n: \text{ even}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p_n^{-ks} (X_{p_n})^k$$

を考える. これらは $\log \zeta(s, X)$ と同様に $\text{Re}(s) > 1/2$ のとき概収束する. さらに, 4.1 節と全く同じ議論を辿ることにより, $\log \zeta(\sigma, X)^{\#}$ と $\log \zeta(\sigma, X)^{\flat}$ は $\sigma > 1/2$ のとき絶対連続分布であることが分かる. さらに

$$\begin{aligned} Q_{\sigma}^{\#}(A) &:= \mathbb{P}(\log \zeta(\sigma, X)^{\#} \in A) = \int_A M_{\sigma}^{\#}(w) d\lambda_2(w), \\ Q_{\sigma}^{\flat}(A) &:= \mathbb{P}(\log \zeta(\sigma, X)^{\flat} \in A) = \int_A M_{\sigma}^{\flat}(w) d\lambda_2(w) \end{aligned}$$

を満たす連続関数 $M_\sigma^\#, M_\sigma^\flat : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在する. $\log \zeta(\sigma, X)^\#$ と $\log \zeta(\sigma, X)^\flat$ は独立で, $\log \zeta(\sigma, X) = \log \zeta(\sigma, X)^\# + \log \zeta(\sigma, X)^\flat$ を満たすので, 命題 A.13 より Q_σ は $Q_\sigma^\#$ と $Q_\sigma^\flat$ の畳み込みとして得られる. したがって

$$M_\sigma(w) = \int_{\mathbb{C}} M_\sigma(w' - w)^\# M_\sigma(w')^\flat d\lambda_2(w') \quad (4.10)$$

が成り立つ. 命題 4.4 と同様に, $1/2 < \sigma \leq 1$ のとき $M_\sigma^\#$ と $M_\sigma^\flat$ も任意の点の任意の開近傍上で恒等的に 0 になることはないことが示される. よって (4.10) より $M_\sigma(w) > 0$ が成り立つ. 長い道程だったが, 以上で定理 2.1 の証明が完了した.

5 その後の進展

今日まで続くゼータ関数・ L 関数の確率論的値分布の研究は, その大多数が Bohr–Jessen の極限定理を礎とすると言っても過言ではない. 本節では Bohr 後の研究の進展状況を一部ではあるが見てゆこう. 各結果の証明の詳しい解説はしないが, 前節までの Bohr–Jessen の極限定理の証明と比較しつつ, 証明のアイディアや大まかな流れを可能な限り紹介しようと思う.

5.1 関数空間における分布

Bohr–Jessen の極限定理に対する一つの発展の方向は, $\zeta(s)$ の値が複素平面 $\mathbb{C}$ 上でどのように分布するかを考えるのではなく, $\zeta(s)$ が関数として適当な空間の中でどのように分布するかを考えることである. これは $\zeta(s)$ の **普遍性** と呼ばれる性質と関係する. 1975 年, Voronin によって [Vor75] で初めて証明された $\zeta(s)$ の普遍性定理は, ほぼ同時期に Bagchi の学位論文 [Bag81] で確率論的な定式化および証明がなされた. 現代では Bagchi 流の方法が主流派になっており, 本稿でもこちらを主に採用するが, Voronin 流の方法については本報告集 [遠 25] をご覧いただきたい.

本節では, D は帯領域 $\{s \in \mathbb{C} \mid 1/2 < \operatorname{Re}(s) < 1\}$ を表すものとし, さらに

$$H(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は } D \text{ で正則}\}$$

とおく. $H(D)$ にはコンパクト開位相を入れる. この位相について $f_n \rightarrow f$ であることは, 帯領域 D に含まれる任意のコンパクト集合上において f_n が f に一様収束することと同値である. 次の結果は $\zeta(s)$ の普遍性定理と呼ばれる.

定理 5.1 ([Bag81]) K を D に含まれるコンパクト集合で、補集合が連結なものとする。 f を K 上連続で零点を持たず、 K の内部では正則な関数とする。このとき

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \lambda_1 \left\{ \tau \in [0, T] \mid \max_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \epsilon \right\} > 0 \quad (5.1)$$

が任意の $\epsilon > 0$ に対して成り立つ。

大雑把に言えば、適当な条件を満たす任意の関数 $f(s)$ は Riemann ゼータ関数の平行移動 $\zeta(s + i\tau)$ によりコンパクト集合上で一様に近似できるのである。Bagchi による定理 5.1 の証明は、以下の二つの主張を示す部分に分けることができる。

(1) $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ 上の確率測度 P_T および Q を

$$\begin{aligned} P_T(A) &= \frac{1}{T} \lambda_1 \{ \tau \in [0, T] \mid \zeta(s + i\tau) \in A \}, \\ Q(A) &= \mathbb{P}(\zeta(s, X) \in A) \end{aligned}$$

によって定義すると、 $T \rightarrow \infty$ のとき P_T は Q に弱収束する。

(2) $\text{supp } \zeta(s, X) = \{f \in H(D) \mid f \text{ は } D \text{ 上で零点を持たない}\} \cup \{0\}$.

ただし $\zeta(s, X)$ は (2.2) によって定義されるランダム Euler 積で、これは $H(D)$ に値をとる確率要素であることが示される。さて、まず関数 f が $H(D)$ の元であり、 D 上で零点を持たない場合に (5.1) が成り立つことを見よう。Portmanteau の定理 (定理 A.15) により、上記の (1) から

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} P_T(G) \geq Q(G) \quad (5.2)$$

が $H(D)$ の任意の開集合 G に対して成立する。ここで G として、

$$G = \left\{ g \in H(D) \mid \max_{s \in K} |g(s) - f(s)| < \epsilon \right\}$$

なる集合をとる。(開集合であることを確認せよ。) このとき (5.2) の左辺は (5.1) の左辺に一致する。右辺については、上記の (2) から $f \in \text{supp } \zeta(s, X)$ であり、また定義から $f \in G$ であるので、 $Q(G) > 0$ が成り立つ。よって (5.1) がこの場合には成立することが分かる。定理 5.1 の主張にある一般の f の場合には、Mergelyan の定理を用いた議論 (cf. 本報告集 [遠 25]) により、適当な多項式 $p(s)$ を用いて $f(s)$ を $e^{p(s)}$ で近似する。関数 $e^{p(s)}$ は $H(D)$ の元であり、 D 上で零点を持たないので、

上記より $\zeta(s)$ の平行移動で近似できる．このことから，やはり (5.1) が一般の f に対しても成り立つことが示される．

上記の (1) の主張は，見るからに定理 2.1 の (1) の主張を発展させたものである．一方で $\mathbb{C}$ 上では Fourier 解析の手法が有用であったのに対して， $H(D)$ 上では使い易い Fourier 解析の理論が存在しないように思える．関数空間における極限定理は [Bag81] 以来長らく，エルゴード理論を用いた少し高級な議論で証明が行われていたのだが，近年になり比較的簡単な手法が Kowalski により [Kow17, Kow21] で導入された．今後はこれが主流になってゆくのだろう．

また， $\text{supp } \zeta(s, X)$ に関する (2) の主張は，命題 4.4 の関数空間 $H(D)$ における類似である．証明にはやはり補題 4.3 が用いられるのだが， $H(D)$ は Hilbert 空間ではないので少し工夫が必要になる．そこで [Bag81] では Hardy 空間，[KV92] では Bergman 空間^{*6}という Hilbert 空間が補助的に用いられている．ここでは後者のみ述べることにする．Bergman 空間は $\mathbb{C}$ 上の有界な単連結開集合 G に対して，

$$A^2(G) = \left\{ f: G \text{ 上で正則} \mid \int_G |f(z)|^2 d\lambda_2(z) < \infty \right\}$$

と定義され，その内積は $f, g \in A^2(G)$ に対して次で与えられるものである：

$$(f, g) = \int_G f(z) \overline{g(z)} d\lambda_2(z).$$

注意 5.2 実は定理 5.1 を証明したいだけであれば，上記の (1) と (2) の主張は些か強すぎる．コンパクト集合 K に対して， $K \subset G \subset \overline{G} \subset D$ なる有界単連結領域 G で ∂G が Jordan 曲線であるものにとる．そして $H(D)$ ではなく $A^2(G)$ に対して (1) と (2) の類似を証明できれば，定理 5.1 が従うのである． $H(D)$ よりも Hilbert 空間である $A^2(G)$ のほうが扱い易く，しかも結局は補題 4.3 を使うのだから，元々すべてを $A^2(G)$ で議論してしまったほうが無駄がない．一方で， $H(D)$ 上でも極限定理が成立するということはそれ自体に価値があるとも言えるので，その立場からはやはり $H(D)$ 上での分布を考えることに意義はあると思われる．

考えている空間の違いという点以外にも，定理 2.1 の主張は $\log \zeta(s)$ に関するものだったのに対して，上記の (1) と (2) は対数をとらない $\zeta(s)$ そのものに関する主張であるという相違点もある．実は定理 2.1 の $\zeta(s)$ での類似は [JW35] でも得られているのだが，関数空間における極限定理の系としても次の結果が得られる．

^{*6} [KV92] では Bergman 空間のことを誤って Hardy 空間と呼んでいるので注意されたい．

定理 5.3 任意の $1/2 < \sigma < 1$ に対して, $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 上の確率測度 $\tilde{P}_{\sigma,T}$ と $\tilde{Q}_\sigma$ を

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{\sigma,T}(A) &= \frac{1}{T} \lambda_1 \{ \tau \in [0, T] \mid \zeta(\sigma + i\tau) \in A \}, \\ \tilde{Q}_\sigma(A) &= \mathbb{P}(\zeta(\sigma, X) \in A)\end{aligned}$$

によって定義すると, $T \rightarrow \infty$ のとき $\tilde{P}_{\sigma,T}$ は $\tilde{Q}_\sigma$ に弱収束する.

写像 $\pi_\sigma : H(D) \rightarrow \mathbb{C}; f \mapsto f(\sigma)$ に対して, 定義より

$$\tilde{P}_{\sigma,T}(A) = P_T(\pi_\sigma^{-1}A), \quad \tilde{Q}_\sigma(A) = Q(\pi_\sigma^{-1}A)$$

が任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ に対して成り立つ. よって π_σ が連続であることと, $T \rightarrow \infty$ のとき P_T が Q に弱収束することから定理 5.3 は直ちに従う.

確率測度 Q や $\tilde{Q}_\sigma$ の絶対連続性はどうだろうか. 後者に関しては, (2.5) によって定義される $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 上の確率測度 Q_σ を用いて $\tilde{Q}_\sigma(A) = Q_\sigma(\exp^{-1}A)$ が任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ に対して成り立つので, Q_σ の絶対連続性 (定理 2.1) により $\tilde{Q}_\sigma$ も λ_2 に関して絶対連続である. ゆえに, ある可測関数 $D_\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し

$$\tilde{Q}_\sigma(A) = \mathbb{P}(\zeta(s, X) \in A) = \int_A D_\sigma(w) d\lambda_2(w), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$$

を満たす. しかしながら, この密度関数 D_σ は注意 4.2 で述べたような構造を有するとは期待できない. (D_σ は伊原氏の言う M 関数ではないのだと思う.) 確率測度 Q に関する状況はさらに厳しい. そもそも $H(D)$ は無限次元の空間であり, 局所有限かつ平行移動で不変な狭義正測度という意味での Lebesgue 測度は存在しないことが知られている. そうなると $H(D)$ 上のどの測度に関する絶対連続性を考えればよいのか, という基本的なことから検討を始める必要があり, 研究が追いついていないのが現状である. 未来に期待したい.

問題 5.4 確率測度 Q の絶対連続性について考察せよ.

本稿では普遍性定理の応用として得られる様々な結果や, 普遍性の定量評価の問題などには全く触れることができなかった. それ以外にもゼータ関数・ L 関数の普遍性に関連するトピックはたくさんあるので, 松本耕二氏によるサーベイ論文 [Mat15] もぜひ参照していただきたい.

5.2 ディスクレパンシー評価

Bohr–Jessen の極限定理において収束の速さを知りたいというのは自然な発想であろう。松本耕二氏による 1980 年代の一連の論文 [Mat85, Mat87, Mat88] を端緒として, Bohr–Jessen の極限定理の誤差である

$$D_\sigma(T) = \sup_{\mathcal{R}} |P_{\sigma,T}(\mathcal{R}) - Q_\sigma(\mathcal{R})|$$

の評価は, $\zeta(s)$ の値分布における「ディスクレパンシー評価」と呼ばれている。ここで $P_{\sigma,T}$ と Q_σ はそれぞれ (2.1) と (2.5) により定義される $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 上の確率測度であり, $\sup_{\mathcal{R}}$ は $\mathbb{C}$ 上の長方形 $[a, b] \times i[c, d]$ 全体を渡る上限を表す。本稿執筆時点での $D_\sigma(T)$ の最善の上界は, Lamzouri と Lester と Radziwiłł によって 2019 年に得られた次の評価である。

定理 5.5 ([LLR19]) 以下の結果が成り立つ。

$$D_\sigma(T) \ll \begin{cases} (\log T)^{-\sigma} & 1/2 < \sigma < 1 \text{ のとき,} \\ (\log T)^{-1}(\log \log T)^2 & \sigma = 1 \text{ のとき.} \end{cases}$$

さて, $P_{\sigma,T}$ と Q_σ の特性関数である $\Lambda(z; P_{\sigma,T})$ と $\Lambda(z; Q_\sigma)$ に対して, (3.1) が任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して成り立つことを示せば定理 2.1 の (1) が得られるのであった。この考え方を発展させて,

$$\Lambda(z; P_{\sigma,T}) = \Lambda(z; Q_\sigma) + \text{誤差項}$$

の形の漸近等式が $|z| \leq R$ の範囲で成立すれば, おおよそ $D_\sigma(T) \ll R^{-1}$ の評価が得られることが分かる。定理 5.5 は様々な工夫によって $1/2 < \sigma < 1$ のときに $R = (\log T)^\sigma$ ととれることを示すことで得られた結果である。

注意 5.6 実は $\sigma = 1$ の場合の [LLR19] の議論はやや甘い評価を残す箇所があり, 実際にはもう少し改善が可能である。また $\sigma > 1$ に対する結果は [LLR19] には何も述べられていないが, $1/2 < \sigma < 1$ の場合と同じ議論を辿ることで, この場合にも $D_\sigma(T)$ の上からの評価を得ることができる。以下の評価は筆者の学位論文 [Min21]

に証明付きで収録されている.

$$D_\sigma(T) \ll \begin{cases} (\log T)^{-\sigma} & 1/2 < \sigma < 1 \text{ のとき,} \\ (\log T)^{-1}(\log \log T \log \log \log T) & \sigma = 1 \text{ のとき,} \\ (\log T)^{-1}(\log \log T) & \sigma > 1 \text{ のとき.} \end{cases}$$

また $\zeta(s)$ に対する結果ではないが, [Min22] にも類似の結果がある.

$D_\sigma(T)$ の下からの評価はどうなるだろうか. [LLR19] には $D_\sigma(T) = \Omega(T^{1-2\sigma+\epsilon})$ というオメガ評価が Appendix 内に記載されている*7. しかし定理 5.5 で記述した上からの評価とは大きな幅があるため, $D_\sigma(T)$ の真のオーダーについては手掛かりが全くないのが現状である. これも未来に期待したい.

問題 5.7 $D_\sigma(T)$ の真のオーダーについて考察せよ.

5.3 極値分布

実数 $\sigma > 1/2$ と $T > 0$ に対して, $\mathbb{R}$ 上の関数 $\Phi_{\sigma,T}(\tau)$ および $\Psi_\sigma(\tau)$ を

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma,T}(\tau) &= \frac{1}{T} \lambda_1 \{t \in [0, T] \mid \log |\zeta(\sigma + it)| > \tau\}, \\ \Psi_\sigma(\tau) &= \mathbb{P}(\log |\zeta(\sigma, X)| > \tau) \end{aligned}$$

により定義する. (2.1) と (2.5) によって定義される $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 上の確率測度 $P_{\sigma,T}$ と Q_σ を用いると, 半平面 $A_\tau := \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(w) > \tau\}$ に対して, これらの関数は $\Phi_{\sigma,T}(\tau) = P_{\sigma,T}(A_\tau)$ および $\Psi_\sigma(\tau) = Q_\sigma(A_\tau)$ と表すことができる. とくに $\lambda_2(\partial A_\tau) = 0$ であるので, 固定された $\tau \in \mathbb{R}$ に対しては定理 2.1 により

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Phi_{\sigma,T}(\tau) = \Psi_\sigma(\tau)$$

が成り立つことが分かる. さて τ を動かしたとき, $\Phi_{\sigma,T}(\tau)$ や $\Psi_\sigma(\tau)$ はどのような挙動を示すだろうか. これを考えるのが「極値分布」の理論である.

まず $\sigma > 1$ の場合を考える. 固定された $\sigma > 1$ に対しては $|\zeta(\sigma + it)|$ や $|\zeta(\sigma, X)|$ の値は有界なので, $\tau > 0$ が十分大きければ $\Phi_{\sigma,T}(\tau)$ や $\Psi_\sigma(\tau)$ は常に 0 に等しい. この状況はあまり面白くない. 一方で $1/2 < \sigma \leq 1$ の場合は, $\Phi_{\sigma,T}(\tau)$ や $\Psi_\sigma(\tau)$

*7 筆者は証明をフォローしていない. [LLR19] には論文全体を通して数々の誤りや不可解な点が含まれているので, これから読んでみようという方は細心の注意を払って読んでいただきたい.

の挙動は以下に述べるように大変興味深い研究対象になる．実は $\Phi_{\sigma,T}(\tau)$ よりも $\Psi_{\sigma}(\tau)$ のほうが扱い易い．結果の主張を述べるために、

$$I_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

を第 1 種変形 Bessel 関数とし、実数 $u > 0$ に対して $g(u) = \log I_0(u)$ と定義する．このとき次の二つの結果が知られている．

定理 5.8 ([GS06]) 十分大きな $\tau > 0$ に対して、 $t > 0$ を $\tau = \log t + \gamma$ を満たすようにとる．ただし $\gamma = 0.577\dots$ は Euler 定数とする．このとき

$$\Psi_1(\tau) = \exp \left(-\frac{e^{t-A}}{t} \left(1 + O \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \right) \right)$$

が以下の定数 A に対して成り立つ：

$$A = 1 + \int_0^1 (g(y^{-1}) - y^{-1}) dy + \int_1^{\infty} g(y^{-1}) dy.$$

定理 5.9 ([Lam11]) $1/2 < \sigma < 1$ とする．十分大きな $\tau > 0$ に対して、

$$\Psi_{\sigma}(\tau) = \exp \left(-A(\sigma) \tau^{\frac{1}{1-\sigma}} (\log \tau)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \left(1 + O \left(\frac{1}{\sqrt{\log \tau}} \right) \right) \right)$$

が以下の定数 $A(\sigma) > 0$ に対して成り立つ：

$$A(\sigma) = (1 - \sigma) \left(\frac{1 - \sigma}{\sigma} \int_0^{\infty} g(y^{-\sigma}) dy \right)^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}.$$

定理 5.9 の原型となる結果は 1999 年に服部哲弥氏と松本耕二氏により [HM99] で得られていて、定数 $A(\sigma)$ もそこで導入されたものである．なぜ、Bessel 関数が上記の結果に現れるかを説明するのは困難だが、 $I_0(z)$ の積分表示に由来する等式

$$I_0(z) = \mathbb{E} [\exp(z \operatorname{Re} X_p)]$$

からその一端を垣間見ることができる．ここで X_p は単位円周 $\mathbb{T}$ 上に値をとり、 $X_p \sim \mathbf{m}$ と分布するものである．関数 $\Psi_{\sigma}(\tau)$ の漸近挙動を考察する上で、確率変数 $\log |\zeta(\sigma, X)| = \operatorname{Re} \log \zeta(\sigma, X)$ のモーメント母関数

$$F_{\sigma}(z) = \mathbb{E} [\exp(z \operatorname{Re} \log \zeta(\sigma, X))]$$

の解析が重要な役割を果たす． (X_p) の独立性から，非常に大雑把に見れば

$$F_\sigma(z) \approx \prod_p \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{z}{p^\sigma} \operatorname{Re} X_p \right) \right] = \prod_p I_0 \left(\frac{z}{p^\sigma} \right)$$

が得られる．($\approx$ は何となく近い，程度の曖昧な意味で使っている．) あとは極値分布の理論における標準的な手法である鞍点法による解析で， $\Psi_\sigma(\tau)$ に関する漸近等式が得られるのである．

関数 $\Psi_\sigma(\tau)$ の挙動が分かったので，関数 $\Phi_{\sigma,T}(\tau)$ については， $T \rightarrow \infty$ のときに

$$\Phi_{\sigma,T}(\tau) \sim \Psi_\sigma(\tau) \quad (5.3)$$

がどのような範囲の τ に対して成立するかを考えることが課題となる．定理 5.5 と定理 5.9 を適用すると， $1/2 < \sigma < 1$ のときは $1 \ll \tau \leq c(\log \log T)^{1-\sigma}$ の範囲まで (5.3) が成立することが分かる．ただし $c = c(\sigma) > 0$ は小さな定数である．実際には τ の範囲はもっと広くとることができることが知られていて，現在は

$$1 \ll \tau \leq c(\log T)^{1-\sigma} (\log \log T)^{-1}$$

の範囲では (5.3) が保たれることが証明されている．中心極限定理に対する大偏差の理論との単純な比較によると， τ がある範囲を超えると (5.3) は保たれなくなるが，その後もある程度の範囲までは $\Phi_{\sigma,T}(\tau)$ の漸近挙動は分かるかもしれない．現状は手詰まり感があり，やはり未来に期待したい．

問題 5.10 (5.3) が保たれる τ の最大範囲を求めよ．またその範囲を超えたときに起きる現象について考察せよ．

6 その他のゼータ関数・ L 関数の値分布

ここまでは Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の値分布に関する結果のみを概観してきた．一方で今日の解析的整数論では，様々な数学的対象から生じるゼータ関数・ L 関数が研究されている．何らかの数学的対象 f に対して L 関数 $L(s, f)$ が定義されたとき，

$$P_{\sigma,T}(A; f) = \frac{1}{T} \lambda_1 \{t \in [0, T] \mid \log L(\sigma + it, f) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$$

なる確率測度を定め，定理 2.1 の類似を証明しようというのは一つの研究方針として考えられる．実際それはかなり成功していて， L 関数の公理的枠組みにおける一般

論が構築されるに至っている．例えば Selberg クラスにおける普遍性定理を論じた [NS10] などはその極致の一つと言えるだろう．

もう一つの方向として，数学的対象の集合 $\mathcal{F}$ に対して L 関数の族 $(L(s, f))_{f \in \mathcal{F}}$ が定義されたとき，変数 s の値は固定して $f \in \mathcal{F}$ が動くときの値分布を研究するという道も考えられる．本節では具体例として，Dirichlet 指標， GL_2 の保型形式， S_n -field から生じる Galois 表現に対して，その L 関数の値分布に関する研究を見てゆこうと思う．これらの L 関数の基礎事項を一つ一つ紹介している余裕はないので，必要に応じて [IK04, Chap. 5] などを参照していただきたい．

6.1 Dirichlet 指標の L 関数

q を素数とする． $\mathcal{X}_q$ により， $\text{mod } q$ の原始的な Dirichlet 指標全体の集合を表すものとする． $\chi \in \mathcal{X}_q$ に対して，Dirichlet L 関数

$$L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad \text{Re}(s) > 1$$

の複素対数 $\log L(s, \chi)$ が，Riemann ゼータ関数の場合と同様に $\mathcal{G}_\chi := \mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}_\chi$ 上の正則関数として定義される．ただし集合 $\mathcal{Z}_\chi$ は

$$\mathcal{Z}_\chi = \bigcup_{\substack{\rho \in \mathbb{C} \\ L(\rho, \chi) = 0}} \{x + i \text{Im}(\rho) \mid -\infty < x \leq \text{Re}(\rho)\}$$

と定める． $s \in \mathbb{C}$ に対して， $\mathcal{X}_q(s) = \{\chi \in \mathcal{X}_q \mid s \in \mathcal{G}_\chi\}$ とおく．このとき定理 2.1 の類似として次が成り立つ．

定理 6.1 以下の結果が成り立つ．

- (1) 任意の $\sigma > 1/2$ に対して $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 上のある確率測度 Q_σ^D が存在し， $s \in \mathbb{C}$ で $\text{Re}(s) = \sigma$ を満たすものに対して

$$P_{s,q}^D(A) = \frac{1}{|\mathcal{X}_q(s)|} |\{\chi \in \mathcal{X}_q(s) \mid \log L(s, \chi) \in A\}|, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$$

によって定まる確率測度 $P_{s,q}^D$ は $q \rightarrow \infty$ のとき Q_σ^D に弱収束する．

- (2) 任意の $\sigma > 1/2$ に対して，(1) の極限測度 Q_σ^D は絶対連続である．

極限測度 Q_σ^D は $s \in \mathbb{C}$ の虚部には依存しないことに注意せよ. 定理 2.1 の証明がそうであったように, ゼータ関数・ L 関数の値分布に関する極限定理の証明は何らかの等分布性が重要な役割を果たす. 定理 6.1 に対しては, 次の補題が適合する.

補題 6.2 有限個の相異なる素数 $p_1, \dots, p_n \neq q$ に対して,

$$\mu_{n,q}^D(A) = \frac{1}{|\mathcal{X}_q|} |\{\chi \in \mathcal{X}_q(s) \mid (\chi(p_1), \dots, \chi(p_n)) \in A\}|, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^n)$$

によって定まる確率測度 $\mu_{n,q}^D$ は $q \rightarrow \infty$ のとき $\mathbf{m}_n$ に弱収束する. ただし $\mathbf{m}_n$ は補題 3.5 に現れたものと同じ $(\mathbb{T}^n, \mathcal{B}(\mathbb{T}^n))$ 上の確率測度である.

証明には指標の直交性が用いられる. 補題 6.2 により, 定理 6.1 の証明では $\zeta(s)$ の値分布の研究で用いたものと同じランダム Euler 積 $\zeta(s, X)$ が用いられることになる. ここで任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $p^{-s}X_p$ は $p^{-s-it}X_p$ と同じ分布を持つので, $\zeta(s, X)$ と $\zeta(s+it, X)$ は同じ分布を持つことに注意せよ. したがって $\log \zeta(s, X)$ の分布は $s \in \mathbb{C}$ の虚部に依存せず,

$$Q_\sigma(A) = \mathbb{P}(\log \zeta(s, X) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$$

と表せるのである. 定理 6.1 の極限測度 Q_σ^D は Q_σ に一致する. これが Q_σ^D が $s \in \mathbb{C}$ の虚部には依存しない理由である. 対応する零点密度評価などは別途用意する必要があるが, 定理 6.1 は定理 2.1 と本質的に全く同じ流れで証明できるので, ぜひ考えていただきたい.

6.2 保型形式の L 関数

q を素数とし, $k \geq 2$ とする. $S_k(q)$ により, 重さ k ・レベル q の正則カスプ形式全体のなす線形空間を表すものとし, $S_k^{\text{new}}(q)$ は新形式からなる $S_k(q)$ の部分空間とする. このとき $S_k^{\text{new}}(q)$ は正規化された Hecke 固有新形式からなる基底 $B_k(q)$ を持つ. 任意の $f \in S_k(q)$ は

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) n^{\frac{k-1}{2}} \exp(2\pi i n z), \quad \text{Im}(z) > 0$$

と Fourier 級数展開できる. とくに $f \in B_k(q)$ に対しては, Fourier 係数 $a_f(n)$ は実数値をとる乗法的な数論的関数である. さらに Deligne の結果により, 任意の素数

$p \neq q$ に対して $a_f(p) \in [-2, 2]$ が成立することも知られている. さて, $f \in B_k(q)$ に付随する保型 L 関数

$$L(s, f) = \left(1 - \frac{a_f(q)}{q^s}\right)^{-1} \prod_{p \neq q} \left(1 - \frac{a_f(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

に対する定理 2.1 の類似は次の通りである.

定理 6.3 以下の結果が成り立つ.

(1) 任意の $\sigma > 1/2$ に対して, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 Q_σ^A が存在し,

$$P_{\sigma, q}^A(A) = \frac{1}{|B_k(q)|} |\{f \in B_k(q) \mid \log L(\sigma, f) \in A\}|, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

によって定義される確率測度 $P_{\sigma, q}^A$ は $q \rightarrow \infty$ のとき Q_σ^A に弱収束する.

(2) 任意の $\sigma > 1/2$ に対して, (1) の極限測度 Q_σ^A は絶対連続である.

定理 2.1 や 定理 6.1 との相違点として, $\sigma > 1/2$ に対しては常に $\log L(\sigma, f) \in \mathbb{R}$ であることから, 定理 6.3 は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度に関する主張となる. この場合もやはり証明方針は定理 2.1 と変わらない. 補題 3.5 に対応する結果としては, 以下に述べる $a_f(p)$ に関する等分布定理を用いる.

補題 6.4 ([Ser97]) 有限個の相異なる素数 $p_1, \dots, p_n \neq q$ に対して,

$$\mu_{n, q}^A(A) = \frac{1}{|B_k(q)|} |\{f \in B_k(q) \mid (a_f(p_1), \dots, a_f(p_n)) \in A\}|, \quad A \in \mathcal{B}([-2, 2]^n)$$

により定義される確率測度 $\mu_{n, q}^A$ は $q \rightarrow \infty$ のとき $\mathbf{m}_{p_1}^A \otimes \dots \otimes \mathbf{m}_{p_n}^A$ に弱収束する. ただし素数 p に対して, $\mathbf{m}_p^A$ は p 進 Plancherel 測度と呼ばれ, 閉区間 $[-2, 2]$ 上で

$$d\mathbf{m}_p^A(x) = \frac{p+1}{(p^{1/2} + p^{-1/2})^2 - x^2} \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx$$

により与えられるものである.

補題 6.4 は Serre によって証明された結果の特殊な場合である. その証明には Eichler–Selberg 跡公式が用いられる. (X_p^A) を素数 p で添字づけられた確率変数 X_p^A の独立な無限列で, 各 X_p^A は $[-2, 2]$ 上に値をとり, $X_p^A \sim \mathbf{m}_p^A$ と分布している

ものとする。このとき

$$L(s, X^A) = \prod_p \left(1 - \frac{X_p^A}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} \right)^{-1}$$

と定めると、定理 6.3 の極限測度 Q_σ^A は $\log L(\sigma, X^A)$ の分布に一致する。定理 6.3 の証明は本稿では行わない。ディスクレパンシー評価や極値分布まで含めた結果が [Min22, Min23a] で得られているので参照されたい。

6.3 Galois 表現の L 関数

S_n は n 次対称群を表すものとする。有理数体 $\mathbb{Q}$ の n 次拡大体 K が S_n -field であるとは、 K の $\mathbb{Q}$ 上の正規閉包 $\hat{K}$ に対して $\text{Gal}(\hat{K}/\mathbb{Q}) \simeq S_n$ が満たされることをいう。 $n \geq 2$ のとき、 S_n -field K の Dedekind ゼータ関数は

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) L(s, \rho_K) \quad (6.1)$$

と分解される。ただし ρ_K は S_n の標準表現と呼ばれる $(n-1)$ 次元複素既約表現と同一視される $\text{Gal}(\hat{K}/\mathbb{Q})$ の表現であり、 $L(s, \rho_K)$ はその Artin L 関数である。このとき (6.1) によって、 $L(s, \rho_K)$ の Euler 積表示は $\zeta_K(s)$ と $\zeta(s)$ の Euler 積表示を用いて明示的に記述できる。例えば $n = 2, 3$ に対する状況は以下の通りである。

- 全ての 2 次体 K は S_2 -field である。この場合の $L(s, \rho_K)$ の Euler 積表示は

$$L(s, \rho_K) = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha_K(p)}{p^s} \right)^{-1}, \quad \text{Re}(s) > 1$$

となる。ただし $\alpha_K(p) \in \mathcal{A}_2 := \{\pm 1, 0\}$ であり、 K における素数 p の分解に応じて次のように決定される：

$$\alpha_K(p) = \begin{cases} 1 & (p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \text{ (分解) のとき,} \\ -1 & (p) = \mathfrak{p}_1 \text{ (惰性) のとき,} \\ 0 & (p) = \mathfrak{p}_1^2 \text{ (分岐) のとき.} \end{cases}$$

すなわち $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ と表すとき、Kronecker 記号を用いて $\alpha_K(p) = \left(\frac{d}{p}\right)$ が成り立つ。したがって $L(s, \rho_K)$ は Dirichlet 指標 $\left(\frac{d}{\cdot}\right)$ の L 関数に一致する。

- 3 次体 K は $\mathbb{Q}$ 上 Galois でなければ S_3 -field である. この場合は

$$L(s, \rho_K) = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha_K(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta_K(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

となる. ただし $(\alpha_K(p), \beta_K(p)) \in \mathcal{A}_3 := \{(1, 1), (1, -1), (e^{2\pi i/3}, e^{-2\pi i/3}), (1, 0), (0, 0)\}$ であり, K における p の分解に応じて次のように決定される:

$$(\alpha_K(p), \beta_K(p)) = \begin{cases} (1, 1) & (p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \text{ (完全分解) のとき,} \\ (1, -1) & (p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \text{ (部分分解) のとき,} \\ (e^{2\pi i/3}, e^{-2\pi i/3}) & (p) = \mathfrak{p}_1 \text{ (惰性) のとき,} \\ (1, 0) & (p) = \mathfrak{p}_1^2 \mathfrak{p}_2 \text{ (部分分岐) のとき,} \\ (0, 0) & (p) = \mathfrak{p}_1^3 \text{ (完全分岐) のとき.} \end{cases}$$

このとき $\operatorname{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約ユニタリーカスピダル保型表現 π_K が存在して, $L(s, \rho_K)$ は π_K のスタンダード L 関数に一致することが知られている.

ここで S_n -field K に対して, その判別式, 類数, 単数基準をそれぞれ d_K , h_K , R_K と表す. このとき (6.1) と類数公式により,

$$L(1, \rho_K) = c_K \frac{h_K R_K}{\sqrt{|d_K|}} \quad (6.2)$$

が成り立つ. ただし c_K は K の実埋め込みの個数を r_1 個, 複素埋め込みの個数を $2r_2$ 個, K に含まれる 1 の冪根の個数を w 個とするとき $c_K = 2^{r_1} (2\pi)^{r_2} / w$ と表される. このことから K を動かす場合の $L(s, \rho_K)$ の値分布は, 代数的整数論の観点からも意義がある研究対象であると言える.

$L_n^{(r_2)}(X)$ により, $|d_K| \leq X$ かつ K の複素埋め込みの個数が $2r_2$ 個であるような S_n -field K の共役類 $[K]$ 全体の集合を表すものとする. $L(s, \rho_K)$ に対する定理 2.1 の類似は次の通りである.

定理 6.5 $n = 2, 3$ のとき, $r_2 = 0, 1$ に対して以下の結果が成り立つ.

- (1) 任意の $\sigma > 1/2$ に対して, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 $Q_{\sigma}^{S_n}$ が存在し,

$$P_{\sigma, X}^{S_n}(A) = \frac{1}{|L_n^{(r_2)}(X)|} \left| \left\{ [K] \in L_n^{(r_2)}(X) \mid \log L(\sigma, \rho_K) \in A \right\} \right|, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

によって定まる確率測度 $P_{\sigma, X}^{S_n}$ は, 任意の $\sigma > \sigma_n$ に対して $X \rightarrow \infty$ のとき $Q_{\sigma}^{S_n}$ に弱収束する. ただし $\sigma_2 = 1/2$, $\sigma_3 = 7/8$ とする.

(2) 任意の $\sigma > 1/2$ に対して, (1) の極限測度 $Q_\sigma^{S_n}$ は絶対連続である.

有限集合 $\mathcal{A}_2$ や $\mathcal{A}_3$ には離散位相を入れて位相空間として扱う. この場合の Borel σ -代数は冪集合に他ならない. さて S_2 -field, S_3 -field に関しては, 補題 3.5 に対応する結果は以下の等分布定理である.

補題 6.6 有限個の相異なる素数 $p_1, \dots, p_k$ および $r_2 = 0, 1$ に対して,

$$\mu_{k,X}^{S_2}(A) = \frac{1}{|L_2^{(r_2)}(X)|} \left| \left\{ [K] \in L_2^{(r_2)}(X) \mid (\alpha_K(p_1), \dots, \alpha_K(p_k)) \in A \right\} \right|,$$

により定まる $(\mathcal{A}_2^k, \mathcal{B}(\mathcal{A}_2^k))$ 上の確率測度 $\mu_{k,X}^{S_2}$ は $X \rightarrow \infty$ のとき $\mathbf{m}_{p_1}^{S_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{m}_{p_k}^{S_2}$ に弱収束する. ただし素数 p に対して, $\mathbf{m}_p^{S_2}$ は

$$\mathbf{m}_p^{S_2}(\{a\}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} & a = 1 \text{ のとき,} \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} & a = -1 \text{ のとき,} \\ \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} & a = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定義される $(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}(\mathcal{A}_2))$ 上の確率測度である.

補題 6.7 有限個の相異なる素数 $p_1, \dots, p_k$ および $r_2 = 0, 1$ に対して,

$$\mu_{k,X}^{S_3}(A) = \frac{1}{|L_3^{(r_2)}(X)|} \left| \left\{ [K] \in L_3^{(r_2)}(X) \mid (\gamma_K(p_1), \dots, \gamma_K(p_k)) \in A \right\} \right|,$$

により定まる $(\mathcal{A}_3^k, \mathcal{B}(\mathcal{A}_3^k))$ 上の確率測度 $\mu_{k,X}^{S_3}$ は $X \rightarrow \infty$ のとき $\mathbf{m}_{p_1}^{S_3} \otimes \dots \otimes \mathbf{m}_{p_k}^{S_3}$ に弱収束する. ただし素数 p に対して $\gamma_K(p) = (\alpha_K(p), \beta_K(p))$ とおき, $\mathbf{m}_p^{S_3}$ は

$$\mathbf{m}_p^{S_3}(\{a\}) = \begin{cases} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^{-1} & a = (1, 1) \text{ のとき,} \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^{-1} & a = (1, -1) \text{ のとき,} \\ \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^{-1} & a = (e^{2\pi i/3}, e^{-2\pi i/3}) \text{ のとき,} \\ \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^{-1} & a = (1, 0) \text{ のとき,} \\ \frac{1}{p^2} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^{-1} & a = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定義される $(\mathcal{A}_3, \mathcal{B}(\mathcal{A}_3))$ 上の確率測度である.

これらの等分布性の証明には S_n -field の局所条件付き数え上げ公式が用いられる. これは $n = 2$ の場合は初等的に証明ができ, $n = 3$ の場合は [BST13, TT13] による結果である. $(X_p^{S_2})$ を素数 p で添字づけられた確率変数 $X_p^{S_2}$ の独立な無限列で, 各 $X_p^{S_2}$ は $\mathcal{A}_2$ 上に値をとり, $X_p^{S_2} \sim \mathbf{m}_p^{S_2}$ と分布しているものとする. 同様に, $(X_p^{S_3})$ を素数 p で添字づけられた確率ベクトル $X_p^{S_3} = (A_p^{S_3}, B_p^{S_3})$ の独立な無限列で, 各 $X_p^{S_3}$ は $\mathcal{A}_3$ 上に値をとり, $X_p^{S_3} \sim \mathbf{m}_p^{S_3}$ と分布しているものとする. このとき

$$L(s, X^{S_2}) = \prod_p \left(1 - \frac{X_p^{S_2}}{p^s}\right)^{-1}, \quad L(s, X^{S_3}) = \prod_p \left(1 - \frac{A_p^{S_3}}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{B_p^{S_3}}{p^s}\right)^{-1}$$

と定義すると, 定理 6.5 の極限測度 $Q_\sigma^{S_n}$ は $\log L(\sigma, X^{S_n})$ の分布に一致する. 本稿では定理 6.5 の証明は行わないが, これも定理 2.1 に類似した方法で証明することができる. また定理 6.5 と (6.2) により, $n = 2, 3$ のとき

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{|L_n^{(r_2)}(X)|} \sum_{[K] \in L_n^{(r_2)}(X)} \Phi \left(c_K \frac{h_K R_K}{\sqrt{|d_K|}} \right) = \mathbb{E} [\Phi(L(1, X^{S_n}))]$$

が任意の有界連続関数 $\Phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ に対して成り立つことが導かれる. これから直ちに従うものではないが, もう少し議論を進めることで次の結果が得られる.

定理 6.8 ([Min23b]) $X \rightarrow \infty$ のとき, 漸近等式

$$\sum_{[K] \in L_3^{(0)}(X)} h_K R_K \sim c X^{3/2}, \quad \sum_{[K] \in L_3^{(1)}(X)} h_K R_K \sim \frac{6}{\pi} c X^{3/2}$$

が成り立つ. ただし $c > 0$ は次のように与えられる定数である:

$$c = \frac{\pi^2 \zeta(3)}{432} \prod_p (1 + p^{-2} - 2p^{-3} - 2p^{-4} + 2p^{-6} + p^{-7} - p^{-8}).$$

さらに [Min23b] では誤差項や第 2 主要項の存在なども議論されている.

注意 6.9 $n \geq 4$ の場合はどうであろうか. まず S_n -field の数え上げ公式については, $n = 4, 5$ に対しても [Bha05, Bha10] で得られているので, 補題 6.6 や補題 6.7 に類似した結果を得ることはできるであろう. 定理 6.5 に類似した結果を得るには, さらに $L(s, \rho_K)$ の解析的性質が必要になる. S_4 -field K に対しては, $\mathrm{GL}_3(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の

既約ユニタリーカスピダル保型表現 π_K が存在し, $L(s, \rho_K)$ は π_K のスタンダード L 関数となることが [Cho14] で知られているので, 議論には十分であると思われる. 以上の観察から, S_4 -field に対しては unconditional に定理 6.5 の類似を証明できると推測できる.

付録 A 確率論の基礎事項

A.1 確率空間と確率要素の定義

定義 A.1 集合 $\Omega \neq \emptyset$ に対して, その部分集合からなる集合 $\mathcal{F}$ が σ -代数 であるとは, 以下の条件を満たすことを言う. (このとき $(\Omega, \mathcal{F})$ は **可測空間** と呼ばれる.)

- $\emptyset \in \mathcal{F}$ が成り立つ.
- $A \in \mathcal{F}$ のとき, $A^c \in \mathcal{F}$ が成り立つ. (A^c により A の補集合を表す.)
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ のとき, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ が成り立つ.

例 A.2 S が位相空間であるとき, S の開集合を全て含む σ -代数の中で最小のものが存在する. これを S の **Borel σ -代数** といい, $\mathcal{B}(S)$ で表す. S の部分集合 E は $E \in \mathcal{B}(S)$ のとき **Borel 可測** であるという.

定義 A.3 $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とする. $m : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ が $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の **可算加法的測度** あるいは単に **測度** であるとは, 以下の条件を満たすことを言う. (このとき $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ は **測度空間** と呼ばれる.)

- $m(\emptyset) = 0$ が成り立つ.
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ のとき, 任意の $m \neq n$ に対して $A_m \cap A_n = \emptyset$ であれば,

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

が成り立つ.

定義 A.4 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度 $\mathbb{P}$ が $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ を満たすとき, $\mathbb{P}$ を **確率測度** という. このとき $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ は **確率空間** と呼ばれる. さらに, Ω のことを **標本空間** といい, Ω の元を **標本** という. また $\mathcal{F}$ の元を **事象** という.

定義 A.5 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ を可測空間とする. 写像 $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ は任意の $E \in \mathcal{F}_2$ に対して $f^{-1}(E) \in \mathcal{F}_1$ を満たすとき $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ -可測であるという. とくに $\mathcal{F}_2$ が Borel σ -代数であるときは, 省略して f は $\mathcal{F}_1$ -可測であるという. さらに $\mathcal{F}_1$ も Borel σ -代数であるなら, f は **Borel 可測** あるいは単に **可測** であるという.

定義 A.6 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間, S を位相空間とする. 写像 $X: \Omega \rightarrow S$ が $\mathcal{F}$ -可測であるとき, X は S に値をとる **確率要素** と呼ばれる. 次のような変種もある.

- S の要素が数である場合, 確率要素のことを **確率変数** と呼ぶ.
- S の要素がベクトルである場合, 確率要素のことを **確率ベクトル** と呼ぶ.
- S の要素が行列である場合, 確率要素のことを **ランダム行列** と呼ぶ*8.

本稿ではランダム Euler 積なる対象を扱ってきたが, その呼称は S として様々な Euler 積からなる集合が現れることに由来する.

定義 A.7 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上で定義された S に値をとる確率要素 X に対して,

$$\mu(A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}), \quad A \in \mathcal{B}(S) \quad (\text{A.1})$$

は $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の確率測度を定める. これを確率要素 X の **分布** といい, X の分布が μ で与えられることを $X \sim \mu$ と表す.

注意 A.8 確率測度を考えることと確率要素を考えることは等価である. 定義 A.7 の通り, 確率要素からその分布である確率測度が定まる. 逆に確率測度が与えられたとき, その確率測度を分布とするような確率要素を構成できる (後述). 同じ分布を持つ確率要素を同一視するのであれば, この対応は 1 対 1 である. 実のところ確率論では確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の存在感は薄く, 例えば (A.1) の右辺は $\mathbb{P}(X \in A)$ と略記されるのが常である. 本稿でもその流儀に倣い, 確率要素と言えは何らかの確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ で定義されているものと暗黙のうちに了解する.

定義 A.9 $S \subset \mathbb{C}$ とする. このとき S に値をとる確率変数 X に対して,

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_S z d\mu(z)$$

を X の **期待値** という. ただし最後の積分においては $X \sim \mu$ であるとする.

*8 法則に従って確率行列と呼びたいところであるが, 確率論における他の概念に確率行列という訳語を充ててしまったためか, ランダム行列と呼ぶことがほとんどである.

A.2 独立性

定義 A.10 $X_1, \dots, X_n$ を S に値をとる確率要素とし, 各 $k = 1, \dots, n$ に対して $X_k \sim \mu_k$ と分布しているとする. $X_1, \dots, X_n$ が **独立** であるとは, 直積空間 S^n に値をとる確率要素 $(X_1, \dots, X_n)$ に対して,

$$(X_1, \dots, X_n) \sim \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$$

が成り立つことをいう. ただし右辺は μ_k たちの積測度を表す. また, (X_n) を S に値をとる確率要素の無限列としたとき, (X_n) が **独立** であるとは, 任意の $n \geq 1$ に対して $X_1, \dots, X_n$ が独立であることをいう.

独立な確率要素の無限列は存在するのだろうか. その疑問に応えるため, 確率論における基本定理の一つである次の結果を紹介しよう.

定理 A.11 (Kolmogorov の拡張定理) S を完備可分距離空間とする. 各 $n \geq 1$ に対して, $(S^n, \mathcal{B}(S^n))$ 上の確率測度 μ_n で, 条件 $\mu_{n+1}(A \times S) = \mu_n(A)$ が任意の $A \in \mathcal{B}(S^n)$ に対して成り立つものが与えられたとする. このとき S の可算無限直積を S^∞ と書くことにすると, $(S^\infty, \mathcal{B}(S^\infty))$ 上の確率測度 μ で,

$$\mu(A \times S^\infty) = \mu_n(A) \tag{A.2}$$

が任意の $A \in \mathcal{B}(S^n)$ に対して満たされるものが一意に存在する.

証明 [Kle20, Theorem 14.39] を見よ. □

系 A.12 S を完備可分距離空間とする. (ν_n) を $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の確率測度からなる任意の無限列とすると, S に値をとる独立な確率要素の無限列 (X_n) で, 各 $n \geq 1$ に対して $X_n \sim \nu_n$ と分布するものが存在する.

証明 $\mu_n = \nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_n$ とおくと μ_n は $(S^n, \mathcal{B}(S^n))$ 上の確率測度であり,

$$\mu_{n+1}(A \times S) = \mu_n(A)\nu_{n+1}(S) = \mu_n(A)$$

が任意の $A \in \mathcal{B}(S^n)$ に対して成り立つ^{*9}. よって定理 A.11 により, $(S^\infty, \mathcal{B}(S^\infty))$ 上の確率測度 μ で (A.2) が満たされるものがとれる. ここで $X_n : S^\infty \rightarrow S$ により,

^{*9} 確率論と有限測度論の違いがここにあると筆者は感じている. 確率測度を全測度が 1 の測度として定義したことがここで生きてくるのである.

$\omega = (\omega_n) \in S^\infty$ に対してその第 n 成分 ω_n を射影する写像を表すものとする. これは連続であるので, Borel 可測である. ゆえに X_n は $(S^\infty, \mathcal{B}(S^\infty), \mu)$ で定義された S に値をとる確率要素である. あとは任意の $n \geq 1$ に対して, $X_1, \dots, X_n$ が条件

$$\mu(\{\omega \in S^\infty \mid (X_1, \dots, X_n)(\omega) \in A\}) = \mu_n(A) \quad (\text{A.3})$$

を任意の $A \in \mathcal{B}(S^n)$ に対して満たすことを示せば, $(X_1, \dots, X_n) \sim \nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_n$ が導かれるので, (X_n) が所望の性質を満たす確率要素の無限列であることが分かる. さて (A.3) の左辺は定義より $\mu(A \times S^\infty)$ に等しい. したがって (A.3) は (A.2) にほかならない. 以上で証明が完了した. $\square$

命題 A.13 S に値をとる独立な確率要素 $X_1, \dots, X_n$ に対して, 以下が成り立つ.

- (1) 可測写像 $f_k : S \rightarrow S'$ ($1 \leq k \leq n$) に対して, $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ は S' に値をとる独立な確率要素である.
- (2) $X_k \sim \mu_k$ ($1 \leq k \leq n$) のとき, $X_1 + \dots + X_n \sim \mu_1 * \dots * \mu_n$ が成り立つ. ただし, $\mu_1 * \dots * \mu_n$ は

$$(\mu_1 * \dots * \mu_n)(A) = \int_{S^n} \mathbf{1}_A(z_1 + \dots + z_n) d\mu_1(z_1) \dots d\mu_n(z_n) \quad A \in \mathcal{B}(S)$$

によって定義される $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の確率測度である.

- (3) 任意の可測関数 $f_k : S \rightarrow \mathbb{C}$ ($1 \leq k \leq n$) に対して,

$$\mathbb{E}[f_1(X_1) \dots f_n(X_n)] = \mathbb{E}[f_1(X_1)] \dots \mathbb{E}[f_n(X_n)]$$

が成り立つ.

証明 容易である. $\square$

A.3 確率要素の収束

定義 A.14 S を位相空間とする. (μ_n) を $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の確率測度の無限列とし, μ を $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の確率測度とする. 任意の有界連続関数 $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f d\mu_n = \int_S f d\mu \quad (\text{A.4})$$

が成り立つとき, μ_n は $n \rightarrow \infty$ のとき μ に **弱収束** するといい, $\mu_n \Rightarrow \mu$ と表す.

定理 A.15 (Portmanteau の定理) S を距離空間とする. (μ_n) を $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の確率測度からなる無限列とし, μ を $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の確率測度とする. このとき以下の主張は同値である.

- (1) 任意の有界 Lipschitz 連続関数 $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ に対して (A.4) が成り立つ.
- (2) 任意の閉集合 $F \subset S$ に対して $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$ が成り立つ.
- (3) 任意の開集合 $G \subset S$ に対して $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$ が成り立つ.
- (4) 任意の $A \in \mathcal{B}(S)$ で $\mu(\partial A) = 0$ を満たすものに対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$ が成り立つ.

証明 [Kle20, Theorem 13.16] を見よ. □

定義 A.16 (X_n) を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ で定義された S に値をとる確率要素の無限列とし, X を同じく $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ で定義された S に値をとる確率要素とする.

- 任意の $\omega \in \Omega$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ が成り立つとき, X_n は $n \rightarrow \infty$ のとき X に **確実収束** するという.
- $\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1$ が成り立つとき, X_n は $n \rightarrow \infty$ のとき X に **概収束** するという.
- $n \geq 1$ に対して $X_n \sim \mu_n$, また $X \sim \mu$ とする. $n \rightarrow \infty$ のとき $\mu_n \Rightarrow \mu$ が成り立つならば, X_n は $n \rightarrow \infty$ のとき X に **分布収束** するという.

X_n が確実収束するならば概収束し, 概収束するならば分布収束することが分かる.

定理 A.17 (Kolmogorov の 2 級数定理) (X_n) を $\mathbb{C}$ に値をとる独立な確率変数の無限列とする. このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_n|^2],$$

が収束するならば, 確率変数の無限和

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$$

は概収束する.

証明 [Kow21, Theorem B.10.1] を見よ. □

定義 A.18 μ を $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ 上の確率測度とする. このとき $\mathbb{R}^k$ 上の関数

$$\Lambda(x; \mu) = \int_{\mathbb{R}^k} \exp(i\langle x, y \rangle) d\mu(y)$$

を μ の **特性関数** という. ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^k$ の標準的な内積を表す.

定理 A.19 (Lévy の判定法) (μ_n) を $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ 上の確率測度の無限列とし, μ を $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ 上の確率測度とする. $n \rightarrow \infty$ のとき $\mu_n \Rightarrow \mu$ であることは,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda(x; \mu_n) = \Lambda(x; \mu)$$

が任意の $x \in \mathbb{R}^k$ に対して成り立つことと同値である.

証明 [Kle20, Theorem 15.24] を見よ. □

A.4 Lebesgue 分解

定義 A.20 μ, ν を可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度とする.

- (1) 任意の $A \in \mathcal{F}$ で $\nu(A) = 0$ を満たすものに対して $\mu(A) = 0$ が成り立つとき, μ は ν に対して **絶対連続** であるといい, $\mu \ll \nu$ と表す^{*10}.
- (2) ある $A \in \mathcal{F}$ であって $\mu(A) = 0$ かつ $\nu(\Omega \setminus A) = 0$ を満たすものが存在するとき, μ は ν に対して **特異的** であるといい, $\mu \perp \nu$ と表す.

とくに $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ 上の測度 μ が Lebesgue 測度 λ_k に対して絶対連続であるとき, 単に μ は絶対連続であるという. また μ が λ_k に対して特異的であるとき, ある $x \in \mathbb{R}^k$ に対して $\mu(\{x\}) > 0$ が成り立つ場合, μ は **離散的** であるといい, 逆に任意の $x \in \mathbb{R}^k$ に対して $\mu(\{x\}) = 0$ が成り立つ場合, μ は **特異連続** であるという.

定義 A.21 μ を可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度とする. 集合列 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ で

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \mu(A_n) < \infty$$

を満たすものが存在するとき, μ は **σ -有限** であるという.

^{*10} Vinogradov の記号と同じであるが, 見分けることは容易であろう.

定理 A.22 (Lebesgue の分解定理) μ, ν を可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度で σ -有限なものとする. このとき $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度 μ_a, μ_s で,

- $\mu(A) = \mu_a(A) + \mu_s(A), \quad A \in \mathcal{F}$
- $\mu_a \ll \nu$
- $\mu_s \perp \nu$

を満たすものが一意に存在する.

証明 [Kle20, Theorem 7.33] を見よ. □

定理 A.23 (Radon–Nikodým の定理) μ, ν を可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度で σ -有限なものとする. $\mu \ll \nu$ であることは, ある $\mathcal{F}$ -可測関数 $D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ で

$$\mu(A) = \int_A D \, d\nu$$

が任意の $A \in \mathcal{F}$ に対し成立するものが存在することと同値である. この関数 D は ν -零集合での値の差を除いて一意に定まり, μ の ν に関する Radon–Nikodým 微分と呼ばれる. これを記号 $\frac{d\mu}{d\nu}$ で表すこともある.

証明 [Kle20, Corollary 7.34] を見よ. □

定理 A.24 (Lévy の反転公式) μ を $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ 上の確率測度とすると,

$$\int_{\mathbb{R}^k} |\Lambda(x; \mu)| \, d\lambda_k(x) < \infty$$

が成り立つならば $\mu \ll \lambda_k$ であり, その Radon–Nikodým 微分は

$$D(y) = (2\pi)^{-k} \int_{\mathbb{R}^k} \Lambda(x; \mu) \exp(-i\langle x, y \rangle) \, d\lambda_k(x)$$

によって与えられる連続関数として $\frac{d\mu}{d\lambda_k} = D$ ととることができる

証明 $k = 1$ の場合は [Kle20, Exercise 15.1.7] を見よ. 一般の場合も同様である. □

A.5 測度の台

定義 A.25 S を位相空間とする. μ を $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の測度とすると, 集合

$$\text{supp } \mu = \{x \in S \mid x \text{ の任意の開近傍 } G \text{ に対して } \mu(G) > 0\}$$

を μ の 台 という. また, S に値をとる確率要素 X に対して $X \sim \mu$ であるとき, $\text{supp } X = \text{supp } \mu$ を X の 台 という.

定義 A.26 S を位相空間とする. μ を $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の測度とすると, $\text{supp } \mu = S$ が成り立つならば μ は **狭義正** であるという.

定理 A.27 S を可分 Banach 空間とする. (X_n) を S に値をとる独立な確率変数の無限列とし, $X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ は概収束すると仮定する. このとき

$$\text{supp } X = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \text{supp } X_n}$$

が成り立つ. ただし右辺に現れる $\sum_{n=1}^{\infty} \text{supp } X_n$ は, S 上のある点列 (x_n) が存在して, $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ かつ $x_n \in \text{supp } X_n$ ($n \geq 1$) となるような $x \in S$ 全体の集合を表すものとする.

証明 [Kow21, Theorem B.10.8] を見よ. □

付録 B 確率論的数論

B.1 Erdős–Wintner の定理

確率論的数論の起源をどこに求めるかは諸説あると思われるが, 初期の取り組みの一つとして過剰数や不足数, そして完全数の分布に関する研究に確率論的な考え方を適用するというものがある. 自然数 n に対して, $\sigma(n)$ により n の正の約数の総和を表すものとして, 条件

$$\sigma(n) > 2n, \quad \sigma(n) < 2n, \quad \sigma(n) = 2n$$

を満たす n をそれぞれ過剰数, 不足数, 完全数と呼ぶ. 1929 年に Bessel-Hagen はこれらの数の密度がどうなるかという問題を提議した. すなわち, 極限

$$\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} |\{n \leq N \mid \sigma(n) > 2n\}|, \quad \beta = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} |\{n \leq N \mid \sigma(n) < 2n\}|$$

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} |\{n \leq N \mid \sigma(n) = 2n\}|$$

の存在性やその具体的な値について考察せよというのである. この問題は 1933 年に Davenport によって解決された.

定理 B.1 ([Dav33]) $u > 0$ とする. このとき極限值

$$F(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \left\{ n \leq N \mid \frac{\sigma(n)}{n} \leq u \right\} \right|$$

が存在する. さらに $F(u)$ は $u \in (0, \infty)$ の関数として連続かつ狭義単調増加であり, $\lim_{u \rightarrow +0} F(u) = 0$ および $\lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = 1$ を満たす.

この定理の帰結として, 上述した極限值 α, β, γ について $\alpha = 1 - F(2)$, $\beta = F(2)$, $\gamma = 0$ が従う. また, $\sigma(n)$ を適当な数論的関数に変えた場合の研究も後に行われた. 次の定理の主張は Erdős と Wintner によって [Erd38, EW39] で得られた結果を, 現代の確率論の用語を用いて読み替えたものである.

定理 B.2 (Erdős–Wintner の定理) $f(n)$ を加法的な実数値数論的関数とする. このとき次の (1) と (2) は同値である.

(1) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上のある確率測度 Q_f が存在し,

$$P_{f,N}(A) = \frac{1}{N} |\{n \leq N \mid f(n) \in A\}|, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

によって定義される確率測度 $P_{f,N}$ は $N \rightarrow \infty$ のとき Q_f に弱収束する.

(2) 以下の級数はすべて収束する:

$$(a) \sum_{|f(p)| > 1} \frac{1}{p}; \quad (b) \sum_{|f(p)| \leq 1} \frac{f(p)^2}{p}; \quad (c) \sum_{|f(p)| \leq 1} \frac{f(p)}{p}.$$

証明 [Ten15, Theorem III.4.1] を見よ. □

とくに加法的関数 $f(n)$ として $f(n) = \log \frac{\sigma(n)}{n}$ と選ぶと, 定理 B.2 から定理 B.1 が導かれるのだが, それを見るためには極限測度 Q_f の性質をもう少し詳しく調べる必要がある. 本稿で概説したゼータ関数・ L 関数の値分布に対する極限定理の場合と同様に, Q_f も適切な確率変数により構成される. (N_p) を素数 p で添字づけられた確率変数 N_p の独立な無限列で, 各 N_p は $\mathbb{Z} \cap [0, \infty)$ 上に値をとり,

$$\mathbb{P}(N_p = k) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1}{p^k}, \quad k \in \mathbb{Z} \cap [0, \infty)$$

と分布しているものとする. このとき

$$\mathfrak{S}_f = \sum_p f(p^{N_p})$$

とくと, Kolmogorov の 2 級数定理 (定理 A.17) によってこの級数は概収束する. 定理 B.2 の極限測度 Q_f は実数値確率変数 $\mathfrak{S}_f$ の分布に一致する. すなわち,

$$Q_f(A) = \mathbb{P}(\mathfrak{S}_f \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

が成り立つのである. さらにこのことから, [JW35, Theorem 35] を適用することで Q_f は絶対連続・特異的・離散的のいずれかになることも分かる. より詳しく,

$$\sum_{f(p) \neq 0} \frac{1}{p} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad Q_f \text{ は離散的}$$

も [EW39] で示されている. 逆に Q_f が離散的でなければ,

$$F(u) = Q_f((-\infty, u]), \quad u \in \mathbb{R}$$

により定義される関数は連続かつ狭義単調増加であり, $\lim_{u \rightarrow -\infty} F(u) = 0$ および $\lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = 1$ を満たす. 以上によって, 加法的関数 $f(n) = \log \frac{\sigma(n)}{n}$ に対して定理 B.2 を適用すると, 定理 B.1 が導かれることが分かる. ところで, この場合の極限測度 Q_f は絶対連続ではなく, 特異的であることが Erdős によって [Erd39] で示されている. 関数 $F(u)$ のグラフのフラクタル幾何的な性質を調べるのも興味深い研究課題であろう.

B.2 Erdős–Kac の定理

本付録の最後に, 中心極限定理に類似した結果が確率論の数論においても知られていることを紹介しよう. 自然数 n に対して, $\omega(n)$ により n の相異なる素因数の個数を表すとする. $\omega(n)$ の分布について, Erdős と Kac により [EK39, EK40] で次の結果が示されている.

定理 B.3 (Erdős–Kac の定理) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ に対して,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \left\{ n \leq N \mid \frac{\omega(n) - \log \log N}{\sqrt{\log \log N}} \in [a, b] \right\} \right| = \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

が成り立つ.

証明 [Ten15, Theorem III.4.15] を見よ. □

謝辞

本稿は第 32 回整数論サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」での筆者の講演を元に作成されたものである。世話人の先生方とサポートスタッフの院生各位、また予稿に含まれていた誤りを指摘していただいた杉山真吾氏に感謝する。

本稿の作成は JSPS 科研費 JP24K16906 の助成を受けたものである。

参考文献

- [Bag81] B. Bagchi, *The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta function and other allied Dirichlet series*, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981, Thesis (Ph.D.).
- [BC14] H. Bohr and R. Courant, *Neue Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximationen auf die Riemannsche Zetafunktion*, J. Reine Angew. Math. **144** (1914), 249–274.
- [Bha05] M. Bhargava, *The density of discriminants of quartic rings and fields*, Ann. of Math. (2) **162** (2005), no. 2, 1031–1063.
- [Bha10] ———, *The density of discriminants of quintic rings and fields*, Ann. of Math. (2) **172** (2010), no. 3, 1559–1591.
- [BJ30] H. Bohr and B. Jessen, *Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion*, Acta Math. **54** (1930), no. 1, 1–35.
- [BJ32] ———, *Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion*, Acta Math. **58** (1932), no. 1, 1–55.
- [BL10] H. Bohr and E. Landau, *Über das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_k(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$* , Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. **1910** (1910), 303–330.
- [Boh11] H. Bohr, *Über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$* , Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1911), 409–428.
- [Boh16] ———, *Zur Theorie der Riemann’schen Zetafunktion im Kritischen Streifen*, Acta Math. **40** (1916), no. 1, 67–100.

- [BST13] M. Bhargava, A. Shankar, and J. Tsimerman, *On the Davenport-Heilbronn theorems and second order terms*, Invent. Math. **193** (2013), no. 2, 439–499.
- [Cho14] P. J. Cho, *The strong Artin conjecture and large class numbers*, Q. J. Math. **65** (2014), no. 1, 101–111.
- [Dav33] H. Davenport, *Über numeri abundantes*, Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. **1933** (1933), 830–837.
- [EK39] P. Erdős and M. Kac, *On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **25** (1939), 206–207.
- [EK40] ———, *The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions*, Amer. J. Math. **62** (1940), 738–742.
- [Erd38] P. Erdős, *On the Density of Some Sequences of Numbers: III*, J. London Math. Soc. **13** (1938), no. 2, 119–127.
- [Erd39] ———, *On the smoothness of the asymptotic distribution of additive arithmetical functions*, Amer. J. Math. **61** (1939), 722–725.
- [EW39] P. Erdős and A. Wintner, *Additive arithmetical functions and statistical independence*, Amer. J. Math. **61** (1939), 713–721.
- [GS06] A. Granville and K. Soundararajan, *Extreme values of $|\zeta(1+it)|$* , The Riemann zeta function and related themes: papers in honour of Professor K. Ramachandra, Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser., vol. 2, Ramanujan Math. Soc., Mysore, 2006, pp. 65–80.
- [HM99] T. Hattori and K. Matsumoto, *A limit theorem for Bohr-Jessen’s probability measures of the Riemann zeta-function*, J. Reine Angew. Math. **507** (1999), 219–232.
- [Iha08] Y. Ihara, *On “M-functions” closely related to the distribution of L'/L -values*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008), no. 3, 893–954.
- [IK04] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [IM11] Y. Ihara and K. Matsumoto, *On certain mean values and the value-distribution of logarithms of Dirichlet L-functions*, Q. J. Math. **62** (2011), no. 3, 637–677.

- [JW35] B. Jessen and A. Wintner, *Distribution functions and the Riemann zeta function*, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935), no. 1, 48–88.
- [Kle20] A. Klenke, *Probability theory—a comprehensive course*, Universitext, Springer, Cham, 2020, Third edition.
- [Kow17] E. Kowalski, *Bagchi’s theorem for families of automorphic forms*, Exploring the Riemann zeta function, Springer, Cham, 2017, pp. 181–199.
- [Kow21] ———, *An introduction to probabilistic number theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 192, Cambridge University Press, Cambridge, 2021.
- [KV92] A. A. Karatsuba and S. M. Voronin, *The Riemann zeta-function*, De Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 5, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1992, Translated from the Russian by Neal Koblitz.
- [Lam11] Y. Lamzouri, *On the distribution of extreme values of zeta and L-functions in the strip $\frac{1}{2} < \sigma < 1$* , Int. Math. Res. Not. IMRN (2011), no. 23, 5449–5503.
- [Lau96] A. Laurinćikas, *Limit theorems for the Riemann zeta-function*, Mathematics and its Applications, vol. 352, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.
- [LLR19] Y. Lamzouri, S. J. Lester, and M. Radziwiłł, *Discrepancy bounds for the distribution of the Riemann zeta-function and applications*, J. Anal. Math. **139** (2019), no. 2, 453–494.
- [Mat85] K. Matsumoto, *Discrepancy estimates for the value-distribution of the Riemann zeta-function. II*, Number theory and combinatorics. Japan 1984 (Tokyo, Okayama and Kyoto, 1984), World Sci. Publishing, Singapore, 1985, pp. 265–278.
- [Mat87] ———, *Discrepancy estimates for the value-distribution of the Riemann zeta-function. I*, Acta Arith. **48** (1987), no. 2, 167–190.
- [Mat88] ———, *Discrepancy estimates for the value-distribution of the Riemann zeta-function. III*, Acta Arith. **50** (1988), no. 4, 315–337.
- [Mat15] ———, *A survey on the theory of universality for zeta and L-functions*, Number theory, Ser. Number Theory Appl., vol. 11, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2015, pp. 95–144.

- [Min21] M. Mine, *Probabilistic studies of the value-distributions of zeta and L -functions*, 2021, Thesis (D.Sc.)–Tokyo Institute of Technology.
- [Min22] ———, *Probability density functions attached to random Euler products for automorphic L -functions*, Q. J. Math. **73** (2022), no. 2, 397–442.
- [Min23a] ———, *Large deviations for values of L -functions attached to cusp forms in the level aspect*, J. Math. Soc. Japan **75** (2023), no. 3, 941–981.
- [Min23b] ———, *The value-distribution of Artin L -functions associated with cubic fields in conductor aspect*, Math. Z. **304** (2023), no. 4, Paper No. 64, 54pp.
- [NS10] H. Nagoshi and J. Steuding, *Universality for L -functions in the Selberg class*, Lith. Math. J. **50** (2010), no. 3, 293–311.
- [Sel46] A. Selberg, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function*, Arch. Math. Naturvid. **48** (1946), no. 5, 89–155.
- [Ser97] J.-P. Serre, *Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p* , J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 1, 75–102.
- [Ten15] G. Tenenbaum, *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, third ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 163, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, Translated from the 2008 French edition by Patrick D. F. Ion.
- [Tit86] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, second ed., The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986, Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.
- [Tsa84] K.-M. Tsang, *The distribution of the values of the Riemann zeta-function*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1984, Thesis (Ph.D.)–Princeton University.
- [TT13] T. Taniguchi and F. Thorne, *Secondary terms in counting functions for cubic fields*, Duke Math. J. **162** (2013), no. 13, 2451–2508.
- [Vor75] S. M. Voronin, *Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **39** (1975), no. 3, 475–486.
- [遠 25] 遠藤 健太, *Riemann ゼータ関数の普遍性定理について*, 第 32 回整数論サマースクール報告集, 2025 年.

- [佐 25] 佐々木 義卓, 素数定理, 第 32 回整数論サマースクール報告集, 2025 年.
- [杉 25] 杉山 真吾, L 関数の subconvexity について, 第 32 回整数論サマースクール報告集, 2025 年.
- [武 25] 武田 渉, ゼータ関数の非零領域, 第 32 回整数論サマースクール報告集, 2025 年.
- [松 05] 松本 耕二, リーマンのゼータ関数, 開かれた数学 1, 朝倉書店, 2005 年.
- [松 25] ———, 平均値定理, 第 32 回整数論サマースクール報告集, 2025 年.

L 関数の subconvexity について

杉山 真吾（金沢大学 理工研究域数物科学系）

概要

本記事は、第 32 回整数論サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」における 2025 年 9 月 11 日（木）の筆者の講演内容がもとになっている。本記事では、 L 関数の subconvexity 問題を考える動機や応用を解説する。この記事によって若い学生がゼータ関数・ L 関数の解析的理論に参入してくれれば幸いである。（もちろん若くはない研究者の参入も大歓迎である。）

1 序章

L 関数の subconvexity 問題とはどういう問題なのか、また 2025 年現在で subconvexity について知られていることは何なのか、を俯瞰することが目的である。最新の結果にも触れるため、2025 年 9 月 1 日時点で未出版である arxiv 版の原稿も多く引用することにする。

1.1 記号の準備

正の実数全体の集合を $\mathbb{R}_{>0}$ と書く。

Landau の記号のビッグ・オーの添え字は、無視している定数が依存するパラメーターを表すものとする。つまり、 X を集合として関数 $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ があったときに、もし「パラメーター $a, b, c, \dots$ に依存する定数 $C_{a,b,c,\dots} > 0$ が存在して任意の $x \in X$ に対して $|f(x)| \leq C_{a,b,c,\dots}|g(x)|$ 」が成り立つならば、

$$f(x) = \mathcal{O}_{a,b,c,\dots}(g(x)), \quad (x \in X)$$

と書くことにする。 $f(x) = \mathcal{O}_{a,b,c,\dots}(g(x))$, $(x \in X)$ のことを

$$f(x) \ll_{a,b,c,\dots} g(x), \quad (x \in X)$$

とも書き, この書き方を Vinogradov の記法と呼ぶ. 例えば, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\log x \ll_{\epsilon} x^{\epsilon}, \quad (x \geq 1)$$

が成り立つ. “ $(x \in X)$ ” の括弧を書かずに “ $x \in X$ ” と書くこともある. x の動く範囲が明らかな時は “ $(x \in X)$ ” の部分は省略されることがある. x が十分大きい範囲を考える時は $(x \rightarrow \infty)$ と書くこともある. この $\ll$ という記号は「十分大」を表すときにも用いられることもあるが, Vinogradov の記法のみを知っていれば混乱することはない. また, $f \ll g$ かつ $g \ll f$ のとき $f \asymp g$ と書く. 無視している定数がパラメーターに依存していることを明示するときは $\asymp$ に添え字を付ける.

0 以下の実数全体を $\mathbb{R}_{\leq 0}$ とする. Log を, $\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$ 上で正則で, かつ正の実数 s に対して $\text{Log } s$ が実数となるような対数関数とする.

特に断らない限り, $s \in \mathbb{C}$ に対して $\sigma := \text{Re}(s)$, $t := \text{Im}(s)$ とする.

2 Riemann ゼータ関数の subconvexity

L 関数の subconvexity について論じる前に, Riemann ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

の subconvexity を説明する. $\zeta(s)$ は, $\text{Re}(s) > 1$ の範囲で広義一様絶対収束し, この範囲で正則な関数である. $\mathbb{C}$ 上の有理型関数として解析接続され, $s = 1$ で単純極を持ち, $\mathbb{C} - \{1\}$ 上では正則になる. $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$, $\widehat{\zeta}(s) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s) \zeta(s)$ とおくと, $\widehat{\zeta}(s) = \widehat{\zeta}(1-s)$ という関数等式が成り立つ. ($\Gamma_{\mathbb{R}}(s)$ は $\mathbb{R}^{\times}$ の自明表現に付随する Tate の局所 L 因子であるので, $\mathbb{R}$ という添え字が付いている. 本記事の内容を理解する上では気にしなくてよい.)

値分布論の観点で, $\zeta(s)$ の値を評価することが盛んに研究されたと思われる. また $s = \sigma + it$ ($\sigma, t \in \mathbb{R}$) で σ が 1 より小さくて 1 に近い実数のときは, $\zeta(s)$ を t の式で上から評価することによって, Riemann ゼータ関数の非零領域の拡張や素数定理の誤差項の改善に応用できる (cf. [13, Theorem 8.27, Corollary 8.28, Theorem 8.29, Corollary 8.30]). ゆえに素数分布の観点でも $\zeta(s)$ の特殊値を評価することに意義があるため, $\zeta(s)$ の値の評価を研究する流れが生じたと思われる.

ここでは素数定理への応用などを気にせず, $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ ($\sigma \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$) のとき, σ を固定して $\zeta(s)$ を t の式で評価してみよう. もし $\sigma > 1$ ならば $|\zeta(s)| \leq \zeta(\sigma) \asymp_{\sigma} 1$

であり, μ を Möbius 関数とすると $|\frac{1}{\zeta(s)}| = |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}| \leq \zeta(\sigma) \asymp_{\sigma} 1$ も成り立つので, t を動かすとき $\zeta(s) \asymp_{\sigma} 1$ である. 関数等式があるため, $\sigma < 0$ のときは $\zeta(s) = \frac{\Gamma_{\mathbb{R}}(1-s)}{\Gamma_{\mathbb{R}}(s)} \zeta(1-s)$ となり, $\zeta(1-s)$ は $\sigma < 0$ を固定して t を動かすとき $\zeta(1-s) \asymp_{\sigma} 1$ である. ガンマ関数の商の部分は Stirling の公式

$$\Gamma(\sigma + it) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\pi|t|} |t|^{\sigma-1/2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)\right), \quad |t| \rightarrow \infty$$

を用いると,

$$\frac{\Gamma_{\mathbb{R}}(1-s)}{\Gamma_{\mathbb{R}}(s)} = \pi^{s-1/2} \frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)} \asymp_{\sigma} |t|^{1/2-\sigma}, \quad |t| \rightarrow \infty$$

となる. したがって, 任意の $\sigma < 0$ に対して $\zeta(s) \asymp_{\sigma} (1+|t|)^{1/2-\sigma}$ となる.

$\zeta(s)$ の $0 \leq \sigma \leq 1$ における値はどのような式で評価されるのか, それは直ちには分からない. なぜならば $\zeta(s)$ を定義している級数に $s = \sigma + it$ を代入できないからである. 解析接続で値を定めているため, 値はとらえどころのないものである. 定義の級数を少し変形すれば $0 \leq \sigma \leq 1, t \in \mathbb{R}$ の範囲から $s = 1$ の近傍を除いたところで $\zeta(s) \ll |s| \asymp_{\sigma} (1+|t|)$ を示すことができる (cf. 武田 [38, 補題 2.5]). 実際はもう少し強い以下の評価が証明できる.

定理 2.1 $0 \leq \sigma \leq 1$ のとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\zeta(\sigma + it) \ll_{\epsilon} (1+|t|)^{\frac{1-\sigma}{2}+\epsilon}, \quad (t \in \mathbb{R}, |t| \geq 2).$$

これを証明するには, 複素関数論における Phragmén-Lindelöf の凸性原理 (Phragmén-Lindelöf convexity principle) を用いればよい. この原理は単に Phragmén-Lindelöf の原理と呼ばれることもある.

命題 2.2 (Phragmén-Lindelöf の原理 [21, 補題 7.1, pp.92–93]) $a < b, t_0 > 0$ とする. f は $D = \{\sigma + it \in \mathbb{C} \mid a \leq \sigma \leq b, t \geq t_0\}$ の開近傍上で定義された連続関数で, D 上正則とする. また, ある定数 $0 < c < \frac{\pi}{b-a}$ があって $f(s) \ll \exp(\exp(ct))$ ($s \in D$) とする. $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ が存在して, $f(a+it) \ll t^{\alpha}, f(b+it) \ll t^{\beta}$ ($t \geq t_0$) が成り立つとする. このとき, 任意の $\sigma + it \in D$ に対して

$$f(\sigma + it) \ll t^{\alpha \frac{b-\sigma}{b-a} + \beta \frac{\sigma-a}{b-a}}$$

である (無視している定数は t に依存しない. f や t_0 などには依存する).

この命題は、複素関数論における最大値の原理を非有界な領域上に拡張したものともみなせる．指数に現れる $\ell(\sigma) := \alpha \frac{b-\sigma}{b-a} + \beta \frac{\sigma-a}{b-a}$ には幾何的な意味がある． xy 平面上で 2 点 (a, α) と (b, β) を結んだ線分上の点で x 座標が σ になる点は $(\sigma, \ell(\sigma))$ である．したがって上の命題から、 $\inf\{c \in \mathbb{R} \mid |f(\sigma + it)| \ll_{\sigma} t^c, (t \geq t_0)\}$ が σ の関数として凸関数になることが分かる．これが凸性原理と呼ばれる所以である．

証明 [21, 補題 7.1] には証明が書かれていないので別の文献を参考にする．

まず $\alpha = 0$ かつ $\beta = 0$ のときに証明する．ここでは Prachar の本 [31, Satz 7.1] を参考にする．このときは f は D の境界 $\{s = \sigma + it \mid \sigma = a \text{ or } \sigma = b \text{ or } t = t_0\}$ 上で有界なので、上界 $M > 0$ を 1 つとる^{*1}．変数変換 $s' = \pi \frac{s-(a+b)/2}{b-a}$ により、 D は $\{s = \sigma + it \mid -\pi/2 \leq \sigma \leq \pi/2, t \geq \pi t_0/(b-a)\}$ になり、 $f(s) \ll \exp(\exp(ct))$ は $f(s) \ll \exp \exp(\frac{b-a}{\pi} c \operatorname{Im}(s'))$ に置き換わる．また、 $0 < \frac{b-a}{\pi} c < 1$ である．ゆえに、最初から $a = -\pi/2, b = \pi/2, 0 < c < 1$ として証明すればよい．

$c < d < 1$ となる d を 1 つとる．任意の $\epsilon > 0$ をとり、 $g(s) := \exp(-\epsilon \cos(ds))f(s)$ とおく． g は D 上正則で、任意の $s \in D$ に対して

$$|g(s)| \leq \exp(-\epsilon \cos(d\sigma) \cosh(dt)) |f(s)| \leq \exp\left(-\frac{1}{2}\epsilon \cos\left(\frac{d\pi}{2}\right) e^{dt}\right) |f(s)|$$

となる． $0 < d < 1$ より $\cos(\frac{d\pi}{2}) > 0$ なので、 D の境界上で $|g(s)| \leq |f(s)| \leq M$ となる． D 上では $|g(s)| \ll \exp(e^{ct} - \frac{1}{2}\epsilon \cos(\frac{d\pi}{2}) e^{dt})$ となる． $0 < d < 1$ より $\cos(\frac{d\pi}{2}) > 0$ なので、 $c < d$ に注意すれば、 $t \rightarrow \infty$ のとき $g(s) \rightarrow 0$ となる．よって、 $t_1 \geq t_0$ を満たすある実数 t_1 が存在して、 $-\pi/2 \leq \sigma \leq \pi/2$ かつ $t \geq t_1$ のとき $|g(s)| \leq M$ が成り立つ．

$T \geq t_1$ を満たす任意の実数 T に対して、 $-\pi/2 \leq \sigma \leq \pi/2, t_0 \leq t \leq T$ で与えられる長方形の境界上で $|g(s)| \leq M$ となる．最大値の原理よりこの長方形の内部でも $|g(s)| \leq M$ となるから、 $T \rightarrow \infty$ とすることで、 D 上で $|g(s)| \leq M$ が成り立つことが分かる． D 上で

$$|f(s)| = \exp(\epsilon \cos(d\sigma) \cosh(dt)) |g(s)| \leq \exp(\epsilon \cos(d\sigma) \cosh(dt)) M$$

であるので $\epsilon \rightarrow +0$ とすれば、 D 上で $|f(s)| \leq M$ となる．

$\alpha = 0, \beta = 0$ のときに証明できたので、一般の $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ の場合に移る (a, b, c も元の条件で考える)．ここでは辻 [40, 定理 X.9] を参考にする． $\ell(s) := \alpha \frac{b-s}{b-a} +$

^{*1} $M > 0$ は任意の $\sigma \in [a, b]$ に対して $|f(\sigma + it_0)| \leq M$ を満たす必要があることに注意せよ．

$\beta \frac{s-a}{b-a}$ とおく. $s \in D$ のとき $-is \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$ なので $\psi(s) := \exp(\ell(s) \operatorname{Log}(-is))$ とおくと, ψ は D 上正則である. $s = \sigma + it$ ($a \leq \sigma \leq b, t \geq t_0$) に対して

$$\operatorname{Log}(-is) - \log t = |\operatorname{Log}(s) - \operatorname{Log}(it)| = \left| \int_{it}^{\sigma+it} \frac{du}{u} \right| \leq \int_{it}^{\sigma+it} \frac{|du|}{|u|} \leq \frac{|\sigma|}{t}$$

となるので, $\operatorname{Log}(-is) = \log t + E(s)/t$, $|E(s)| \leq \max(|a|, |b|)$ と表せる. $\operatorname{Re}(\ell(s) \operatorname{Log}(-is)) = \ell(\sigma) \log t + \ell(\sigma) \operatorname{Re}(E(s))/t - \operatorname{Im}(E(s)) \frac{\beta-\alpha}{b-a}$ より,

$$|\psi(s)| = \exp(\ell(\sigma) \log t + \mathcal{O}(1)) \asymp \exp(\ell(\sigma) \log t) = t^{\ell(\sigma)}$$

となる. ここで $g(s) := f(s)/\psi(s)$ とおけば, $g(a+it) \ll 1$, $g(b+it) \ll 1$ ($t \geq t_0$) が成り立ち, D の内部では $|g(s)| \ll \exp(\exp(ct))t^{-\ell(\sigma)} \ll \exp(\exp(ct))$ となる. D の境界上で $|g(s)| \ll 1$ であるから $\alpha = \beta = 0$ の場合の主張を適用することができて, D 上でも $|g(s)| \ll 1$ となる. ゆえに $|f(s)| \ll t^{\ell(\sigma)}$ ($s \in D$) が示された. $\square$

定理 2.1 の証明 $|\zeta(\sigma - it)| = |\zeta(\sigma + it)|$ なので $t \geq 2$ で考えればよい. $\epsilon > 0$ を任意にとる. $\zeta(-\epsilon + it) \ll_{\epsilon} t^{1/2+\epsilon}$, $\zeta(1+\epsilon + it) \ll_{\epsilon} 1 = t^0$ は先ほど確認した. $t_0 = 2$ として $-\epsilon \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1+\epsilon$ に対して Phragmén-Lindelöf の原理 (命題 2.2) を適用すれば, 任意の $\sigma \in [0, 1]$ と任意の $t \geq 2$ に対して,

$$\zeta(\sigma + it) \ll_{\epsilon} t^{(\frac{1}{2}+\epsilon) \frac{(1+\epsilon)-\sigma}{(1+\epsilon)-(-\epsilon)} + 0 \frac{\sigma-(-\epsilon)}{(1+\epsilon)-(-\epsilon)}} = t^{\frac{1-\sigma}{2} + \frac{\epsilon}{2}}$$

となる. $\square$

Riemann 予想や素数定理の観点から, 臨界線 $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ 上での $\zeta(s)$ の値分布が気になるところである. Riemann ゼータ関数の関数等式と解析的性質からすぐに分かるのは, 凸評価 (convexity bound) と呼ばれる以下の評価である.

系 2.3 (凸評価 (convexity bound)) 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\zeta(1/2 + it) \ll_{\epsilon} (1 + |t|)^{1/4+\epsilon}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

証明 定理 2.1 の評価に $\sigma = 1/2$ を代入すればよい. $\square$

定理 2.1 の評価を凸評価と呼ぶこともある. 凸評価の名前の由来は $\mu(\sigma) := \inf\{c \in \mathbb{R} \mid \zeta(\sigma + it) \ll_{\sigma} (1 + |t|)^c, (|t| \geq 2)\}$ が凸関数であることから来ている. 上記の考察により, $\mu(0) = 1/2 - \sigma$, $\mu(1) = 0$, $\mu(\sigma) \leq \frac{1-\sigma}{2}$ が分かる. そして以下の問題が自然に提起される.

問題 2.4 (subconvexity 問題) 凸評価を改良し, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\zeta(1/2 + it) \ll_{\epsilon} (1 + |t|)^{a+\epsilon}, \quad t \in \mathbb{R}$$

となるような $a \in [0, 1/4]$ を見つけよ.

もし a を $1/4 + \epsilon$ よりも小さくできるなら, $\zeta(1/2 + it) \ll_{\epsilon} (1 + |t|)^{a+\epsilon}$ の形の評価を subconvexity 評価 (subconvexity bound) と呼ぶ. 日本語だと劣凸評価と訳されることがある. これは凸評価より小さいという意味であり, 凸評価より劣っている訳ではない. 筆者は部分凸評価という日本語訳を採用したほうが良いと思っている.

期待される最良の評価は $\mu(\sigma) = 0$ である. 言い換えると以下の通りである.

予想 2.5 (Lindelöf 予想) 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\zeta(1/2 + it) \ll_{\epsilon} (1 + |t|)^{\epsilon}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

凸評価の改善が興味を惹く理由の 1 つとしては, 次の定理がある.

定理 2.6 Riemann 予想を仮定すると Lindelöf 予想が従う.

証明 Titchmarsh [43, Theorem 14.2] と松本 [21, pp.112–113] を参考にする. Riemann 予想を仮定すると, $\log \zeta(s) := \int_2^s \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} dz + \log \zeta(2)$ が $\operatorname{Re}(s) > 1/2$ の範囲で正則関数になるように定義できる. ただし $\log \zeta(2) \in \mathbb{R}$ である. $\log$ の分枝を固定して $\log \zeta(s)$ を定めている訳ではないので, $\zeta(s)$ の偏角 $\operatorname{Im} \log \zeta(s)$ は非有界であることに注意せよ.

$t \geq 2$ のときに評価を与えれば十分なので $t \geq 2$ で考える. $\sigma > 1$ のとき $\zeta(\sigma + it) \ll_{\sigma} 1$ であることと定理 2.1 より, 中心が $2 + it$, 半径が $R = 3/2 - \eta_1/2$ ($\eta_1 > 0$ は十分小) の円周上で, $\operatorname{Re}(\log \zeta(s)) = \log |\zeta(s)| \ll \log t$ を得る. ゆえに $r = 3/2 - \eta_1$ とおくと, Borel-Carathéodory の定理 (後述する定理 2.7) により, 中心 $2 + it$, 半径 r の円周上で

$$|\log \zeta(s)| \ll \frac{3 - 2\eta_1}{\eta_1/2} \log t + \frac{3 - (3/2)\eta_1}{\eta_1/2} |\log \zeta(2 + it)| \ll \frac{\log t}{\eta_1} \quad (2.1)$$

となる. ここで $\log \zeta(2 + it) \ll 1$ を使ったが, これは以下のように示される. まず $\operatorname{Re}(\zeta(2 + it)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(t \log n)}{n^2} \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \pi^2/6 > 0$ なので $|\operatorname{Im} \log \zeta(2 + it)| < \pi/2$ である. よって $|\log \zeta(2 + it)|^2 = \{\log |\zeta(2 + it)|\}^2 + \{\operatorname{Im} \log \zeta(2 + it)\}^2 \leq \{\log \zeta(2)\}^2 + (\pi/2)^2$ となる.

次に $1/2 < \sigma_0 \leq 1$ となる σ_0 と $2 < \sigma^*$ となる σ^* をとる. $\sigma_0 \leq \sigma \leq 1, 2 < \sigma^* \leq t$ としておき, 中心が $\sigma^* + it$ で半径がそれぞれ $r_1 = \sigma^* - 1 - \eta_2, r_2 = \sigma^* - \sigma, r_3 = \sigma^* - 1/2 - \eta_1$ の 3 つの円周 (ただし $\eta_1 > 0$ は $1/2 + \eta_1 < \sigma_0$ となるよう小さくとり直し, $\eta_2 > 0$ も十分小さくとる) の上での $|\log \zeta(s)|$ の最大値を M_1, M_2, M_3 と書くと, Hadamard の三円定理 (後述する定理 2.8) により, $M_2 \leq M_1^\theta M_3^{1-\theta}$ である. ここで, 半径 r_1 の円周上の点 s は常に $\operatorname{Re}(s) \geq 1 + \eta_2$ を満たすので, $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ を項別積分して $\zeta(s) \ll \frac{1}{s-1}$ ($\operatorname{Re}(s) > 1, s \rightarrow 1$) を用いれば, $M_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\eta_2}} \ll \frac{1}{\eta_2}$ を得る. また, 中心が $2 + it$ で半径が $r = 3/2 - \eta_1$ の円は中心が $\sigma^* + it$ で半径が r_3 の円に含まれているので, (2.1) と最大値の原理より $M_3 \ll \frac{\log t}{\eta_1}$ である. そして η_1, η_2 に依存して十分大きくとった σ^* に対して

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\log(1 - \frac{\sigma-1/2-\eta_1}{\sigma^*-1/2-\eta_1})}{\log(1 - \frac{1+\eta_2-1/2-\eta_1}{\sigma^*-1/2-\eta_1})} = \frac{-\frac{\sigma-1/2-\eta_1}{\sigma^*-1/2-\eta_1} + \mathcal{O}_{\eta_1}(\frac{1}{(\sigma^*)^2})}{-\frac{1/2+\eta_2-\eta_1}{\sigma^*-1/2-\eta_1} + \mathcal{O}_{\eta_1, \eta_2}(\frac{1}{(\sigma^*)^2})} \\ &= \frac{\sigma - 1/2 - \eta_1}{1/2 + \eta_2 - \eta_1} + \mathcal{O}_{\eta_1, \eta_2}\left(\frac{1}{\sigma^*}\right) \\ &= 2\sigma - 1 + \mathcal{O}(\eta_1) + \mathcal{O}(\eta_2) + \mathcal{O}_{\eta_1, \eta_2}\left(\frac{1}{\sigma^*}\right) \end{aligned}$$

と評価できる. ゆえに,

$$M_2 \ll \frac{1}{\eta_2^\theta} \left(\frac{\log t}{\eta_1} \right)^{1-\theta} \ll \eta_2^{-\theta} \eta_1^{-1+\theta} (\log t)^{2-2\sigma+\mathcal{O}(\eta_1)+\mathcal{O}(\eta_2)+\mathcal{O}_{\eta_1, \eta_2}((\sigma^*)^{-1})}$$

となる. $\sigma + it$ が半径 r_2 の円周上に乗っているので, η_1, η_2 を十分小さくにとって σ^* を十分大きくとれば,

「 $1/2 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1$ のとき任意の $\delta > 0$ に対してある $C_\delta > 0$ が存在して, 任意の $t \geq 2$ に対して $|\log \zeta(s)| \leq C_\delta (\log t)^{2-2\sigma+\delta}$ である. ただし $s = \sigma + it$.」

が成り立つことが分かる^{*2}. すると $|\log |\zeta(s)|| \leq |\log \zeta(s)| \leq C_\delta (\log t)^{2-2\sigma+\delta}$ もいえる. ここで $(\log t)^{2-2\sigma+\delta} = \frac{1}{(\log t)^{2\sigma-1-\delta}} \log t$ であり, $\sigma > 1/2$ に対して $\delta > 0$ を小さくとることで $2\sigma - 1 - \delta > 0$ となることから, 任意の $\epsilon > 0$ に対して t を十分大きくとれば $\frac{1}{(\log t)^{2\sigma-1-\delta}}$ はいくらでも小さくできる. したがって任意の $\epsilon > 0$ に対してある $t_\epsilon > 0$ が存在して, 任意の $t \geq t_\epsilon$ に対して $-\epsilon \log t < \log |\zeta(s)| < \epsilon \log t$ が

^{*2} $\sigma_1 = 1/\eta_1 = 1/\eta_2 = \log \log t$ とすることで $\log \zeta(s) = \mathcal{O}(\log \log t (\log t)^{2-2\sigma}), (1/2 + 1/\log \log t \leq \sigma \leq 1)$ も成り立つ ([43, (14.2.4)])

成り立つ. 特に $1/2 < \sigma \leq 1$, $t \geq 2$ において $t^{-\epsilon} \ll_{\epsilon} \zeta(s) \ll_{\epsilon} t^{\epsilon}$ が成り立つ. また関数等式と Stirling の公式により $\sigma < 1/2$, $t \geq 2$ で $\zeta(\sigma + it) \ll_{\epsilon} t^{1/2-\sigma+\epsilon}$ も成り立つ. $\mu(\sigma)$ は凸関数なので $\zeta(s) \ll_{\epsilon} t^{\epsilon}$ は $\sigma = 1/2$ でも成り立つ. $\square$

証明で用いた 2 つの定理を復習しておく.

定理 2.7 (Borel-Carathéodory の定理) $s_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ とする. f を円板 $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - s_0| \leq R\}$ の開近傍上で正則な関数とする. $0 < r < R$ なる r に対して $M(r) := \max_{|s-s_0|=r} |f(s)|$, $A(r) := \max_{|s-s_0|=r} \operatorname{Re}(f(s))$ とおく. このとき,

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(s_0)|, \quad 0 < r < R.$$

証明 Titchmarsh の関数論の本 [42, §5.5] を参考にする. $s_0 = 0$ としてよい. f が定数関数のときに成り立つことはすぐに確認できるので, f は定数ではないとしてよい. まず $f(0) = 0$ のときに示す. f は定数ではないので, $A(R) > A(0) = 0$ である. $\phi(z) := \frac{Rf(z)}{2A(R)-f(z)}$ とおく. $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ 上で分母は 0 にならないから, ϕ は D 上の正則関数である. $-2A(R) + \operatorname{Re} f(z) \leq \operatorname{Re} f(z) \leq 2A(R) - \operatorname{Re} f(z)$ に注意すると, $|\phi(z)| = R \frac{|f(z)|}{\{2A(R) - \operatorname{Re}(f(z))\}^2 + \operatorname{Im}(f(z))^2} \leq R$ となる. $\phi(0) = 0$ なので Schwarz の補題 (例えば [42, 5.2]) から, $|\phi(z)| \leq |z|$ となる. $|z| = r$ のとき $|f(z)| = \left| \frac{2A(R)\phi(z)}{R+\phi(z)} \right| \leq \frac{2A(R)r}{R-r}$ となるので主張が得られる. $f(0) \neq 0$ のときは $f(z) - f(0)$ に対して今示した不等式を適用すると, $|z| = r$ のとき

$$|f(z)| \leq \max_{|z|=r} |f(z) - f(0)| + |f(0)| \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} \operatorname{Re}(f(z) - f(0)) + |f(0)|$$

となり, 主張を得る. $\square$

Borel-Carathéodory の定理は Riemann ゼータ関数の非零領域 (zero-free region) の存在を証明するときにも用いられるのであった.

定理 2.8 (Hadamard の三円定理 (Hadamard's three-circles theorem))

$R > 0$ または $R = \infty$ とし, 実数 ρ は $0 < \rho < R$ を満たすものとする. f を円環領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid \rho < |z| < R\}$ 上の正則関数とする. $\rho < r < R$ を満たす任意の r に対して $M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|$ とおく. $\rho < r_1 < r_2 < r_3 < R$ なる任意の $r_1, r_2, r_3 > 0$ に対して,

$$M(r_2) \leq M(r_1)^{\theta} M(r_3)^{1-\theta}$$

が成り立つ. ただし, $\theta := \frac{\log r_3 - \log r_2}{\log r_3 - \log r_1} \in (0, 1)$. これは $\log M(r)$ が $\log r$ の関数として凸関数であるということを意味している.

証明 Titchmarsh の関数論の本 [42, 5.3] を参考にする. $\lambda \in \mathbb{R}$ とし, $\phi(z) := z^\lambda f(z)$ とおくと ϕ は円環領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_3\}$ 上で正則な多価関数である (λ が整数なら一価関数). しかし $|\phi|$ は一価連続関数であるので, 同じ方法で多価関数 ϕ に対する最大値の原理が証明できる. よって, z が $r_1 \leq |z| \leq r_3$ を満たしながら動くとき, $|\phi|$ はこの円環領域の境界上で最大値をとる. ゆえに $r_1 \leq |z| \leq r_3$ で $|\phi(z)| \leq \max(r_1^\lambda M(r_1), r_3^\lambda M(r_3))$ となる. 特に z を $|z| = r_2$ を満たすように動かすことで $M(r_2) \leq \max(r_1^\lambda r_2^{-\lambda} M(r_1), r_3^\lambda r_2^{-\lambda} M(r_3))$ も得られる. 不等式をより sharp にするには $\max$ の中身が釣り合うように λ をとればよいから, $r_1^\lambda M(r_1) = r_3^\lambda M(r_3)$ とすると $\lambda = -\frac{\log M(r_3) - \log M(r_1)}{\log r_3 - \log r_1}$ を得る. λ をこのようにとれば, $M(r_2) \leq r_1^\lambda r_2^{-\lambda} M(r_1)$ から,

$$\begin{aligned} M(r_2)^{\log r_3 - \log r_1} &\leq (r_1 r_2^{-1})^{-\log M(r_3) + \log M(r_1)} M(r_1)^{\log r_3 - \log r_1} \\ &= M(r_1)^{\log r_1 - \log r_2} M(r_3)^{\log r_2 - \log r_1} \times M(r_1)^{\log r_3 - \log r_1} \\ &= M(r_1)^{\log r_3 - \log r_2} M(r_3)^{\log r_3 - \log r_1 - (\log r_3 - \log r_2)} \end{aligned}$$

となり, 主張を得る. □

Riemann 予想を仮定すると Lindelöf 予想が成り立つことが, Lindelöf 予想を信じる傍証の 1 つである. そうなると次は, Riemann 予想を仮定せずに Lindelöf 予想を証明することは可能なのか, そしてもし Lindelöf 予想が証明できなくとも subconvexity 評価を与えることは可能なのか, といった問題に直面する.

注意 2.9 Littlewood [19] により, Riemann 予想の仮定の下で $C > 0$ が存在して

$$\zeta(1/2 + it) \ll \exp\left(C \frac{\log t}{\log \log t}\right), \quad t \geq 2$$

となることが証明された. これは Lindelöf 予想より強い不等式である.

3 Riemann ゼータ関数の subconvexity 評価について知られていること

Lindelöf 予想は現状まだ証明されていないが, subconvexity 評価はいくつか知られている. 歴史上初めての subconvexity は Weyl 評価である.

定理 3.1 (Weyl 評価 [17]) 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\zeta(1/2 + it) \ll_{\epsilon} (1 + |t|)^{1/6+\epsilon}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Weyl 評価と書いたが Weyl は何もしていない. Hardy, Littlewood が最初に証明を与えたが, 文献としては Landau の論文 [17] で初めて証明が世に出た. なぜ Weyl 評価と呼ばれるのかは同じサマースクール報告集の拙著 [36] を参照されたい.

$\zeta(1/2 + it) \ll_{\epsilon} (1 + |t|)^{a+\epsilon}$ を満たす a についての研究はこれまでにいくつかある. すべてを列挙しないが, 例えば Walfisz が $a = 163/988 = 0.1650... < 1/6$, Titchmarsh が $27/164 = 0.1647...$, Kolesnik が $a = 139/858 = 0.1620...$ を証明している. Titchmarsh の本 [43, p.118] には $a = 139/858$ の結果まで紹介されている. その後, Bombieri, Iwaniec [2] による以下の評価が与えられブレイクスルーとなった:

$$\zeta(1/2 + it) \ll_{\epsilon} (1 + |t|)^{9/56+\epsilon}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

この後 15 年ほど経って Huxley が $a = 89/570 = 0.15614...$, $a = 32/205 = 0.1561...$ を示した. さらにその後 10 年以上経ってから Bourgain が $a = 53/342 = 0.1550...$ を示した (これらの歴史は [3] に書いてある). 2025 年 9 月 1 日時点で知られている最良の評価は $a = 53/342$ と同時期に Bourgain [3] が与えた以下の評価である.

定理 3.2 (Bourgain 評価 [3]) 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\zeta(1/2 + it) \ll_{\epsilon} (1 + |t|)^{13/84+\epsilon}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4 L 関数の subconvexity

Riemann ゼータ関数を一般化したものを L 関数と呼ぶ. L 関数と呼ぶときは多くの場合, 素数に関する無限積 (Euler 積) を持つことが課される. したがって, Hurwitz

ゼータ関数やスペクトルゼータ関数は Riemann ゼータ関数の一般化であるが通常は L 関数とは呼ばない.

L 関数はケースバイケースで公理化がなされており, 絶対的な定義は存在しない. この記事では L 関数の定義は Iwaniec, Kowalski の本 [13, §5.1] をわずかに改変しつつ採用する.

定義 4.1 (L 関数 (Iwaniec, Kowalski の流儀)) 添え字 $\mathcal{A}$ が付された s の関数 $L(s, \mathcal{A})$ が L 関数であるとは, 以下の条件を満たすときにいう.

- (1) $L(s, \mathcal{A})$ は $\operatorname{Re}(s) > 1$ に対して Euler 積表示

$$L(s, \mathcal{A}) = \prod_p \frac{1}{(1 - \alpha_{p,1}p^{-s}) \cdots (1 - \alpha_{p,d}p^{-s})}$$

を持つ. ただし p は素数全体を動く. そしてこの無限積は $\operatorname{Re}(s) > 1$ で絶対収束する. ここで, $d \geq 1$ は素数 p に依らない整数で, $\alpha_{p,1}, \dots, \alpha_{p,d} \in \mathbb{C}$ とする.

- (2) 任意の素数 p と任意の $j \in \{1, \dots, d\}$ に対して $|\alpha_{p,j}| < p$ が成り立つ.
 (3) $L(s, \mathcal{A})$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数として解析接続される. また $\mathbb{C} - \{1\}$ 上では正則で, $s = 1$ で正則かまたは極を持つ. $s = 1$ における極としての位数を $r \geq 0$ とすると, $(s-1)^r L(s, \mathcal{A})$ は増大度に関して位数が 1 である.
 (4) $\mu_{\mathcal{A},1}, \dots, \mu_{\mathcal{A},d} \in \mathbb{C}$ (ただし任意の $j = 1, \dots, d$ に対して $\operatorname{Re}(\mu_{\mathcal{A},j}) > -1$), 整数 $N_{\mathcal{A}} \geq 1$, 絶対値が 1 の複素数 $\epsilon_{\mathcal{A}}$ が存在して,

$$\widehat{L}(s, \mathcal{A}) := \left\{ \prod_{j=1}^d \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \mu_{\mathcal{A},j}) \right\} L(s, \mathcal{A}), \quad \varepsilon(s, \mathcal{A}) := \epsilon_{\mathcal{A}} N_{\mathcal{A}}^{1/2-s}$$

$$L(s, \overline{\mathcal{A}}) := \overline{L(\overline{s}, \mathcal{A})}, \quad \widehat{L}(s, \overline{\mathcal{A}}) := \left\{ \prod_{j=1}^d \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \overline{\mu_{\mathcal{A},j}}) \right\} L(s, \overline{\mathcal{A}}) = \overline{\widehat{L}(\overline{s}, \mathcal{A})}$$

とおくと, 関数等式

$$\widehat{L}(s, \mathcal{A}) = \varepsilon(s, \mathcal{A}) \widehat{L}(1-s, \overline{\mathcal{A}})$$

が成り立つ.

- (5) 素数 p が $p \nmid N_{\mathcal{A}}$ を満たすならば, 任意の $j = 1, \dots, d$ に対して $\alpha_{p,j} \neq 0$.

注意 4.2 (1) Iwaniec, Kowalski [13, §5.1] の L 関数の公理では, $\mu_{\overline{\mathcal{A}},j} = \mu_{\mathcal{A},j}$ の流儀を採用しているが, 本記事ではこの流儀は採用しない.

(2) $L(s, \mathcal{A})$ が L 関数のとき, $L(s, \overline{\mathcal{A}})$ も L 関数である. $L(s, \overline{\mathcal{A}}) = L(s, \mathcal{A})$ なので, $N_{\overline{\mathcal{A}}} := N_{\mathcal{A}}$, $\epsilon_{\overline{\mathcal{A}}} := \overline{\epsilon_{\mathcal{A}}} = \epsilon_{\mathcal{A}}^{-1}$ とおき, $\varepsilon(s, \overline{\mathcal{A}}) := \epsilon_{\overline{\mathcal{A}}} N_{\overline{\mathcal{A}}}^{1/2-s}$ とおくと, $\widehat{L}(s, \overline{\mathcal{A}}) = \varepsilon(s, \overline{\mathcal{A}}) \widehat{L}(1-s, \overline{\mathcal{A}})$ が成り立つ.

(3) 上記の定義は Selberg クラスの L 関数とはところどころ条件が違う.

L 関数を $L(s)$ と書いてもよいのに $\mathcal{A}$ という文字を添えているのは, 単に添え字付けるためである. L 関数は, Dirichlet 指標, 保型形式, 代数多様体, 保型表現, Galois 表現といった対象に付随して定義されるときに数論的に興味深いので, $\mathcal{A}$ はそういった対象を意識している.

定義 4.3 (この記事での用語) $L(s, \mathcal{A})$ を Iwaniec-Kowalski の意味での L 関数とするとき, $s_0 \in \mathbb{C}$ に対して s の関数 $L(s + s_0, \mathcal{A})$ も L 関数と呼ぶことにする. $\widehat{L}(s + s_0, \mathcal{A})$ は Iwaniec, Kowalski の公理の「 $|\alpha_{p,j}| < p$ 」と「 $s = 0, 1$ で極を持つ可能性がある」以外の条件は満たす. 例えば $s_0 \neq 0$ で $L(s + s_0, \mathcal{A})$ の極がある場合にその極が $s = 1 - s_0 \neq 1$ となるからである. $L(s + s_0, \mathcal{A})$ の形をした有限個の L 関数の積も L 関数と呼ぶことにする.

定義 4.4 $L(s, \mathcal{A})$ を L 関数とする.

- (1) 各素数 p に対して, $L(s, \mathcal{A})$ の p における因子の分母は p^{-s} の多項式である. さらに $p \nmid N_{\mathcal{A}}$ を満たすすべての素数 p に対して, この多項式の次数は d である. この d を $L(s, \mathcal{A})$ の次数と呼ぶ.
- (2) $\widehat{L}(s, \mathcal{A})$ を $L(s, \mathcal{A})$ の完備化と呼ぶ. $\varepsilon(s, \mathcal{A})$ は ε 因子 (イプシロンファクター) と呼ばれる.
- (3) $\epsilon_{\mathcal{A}}$ はルートナンバーと呼ばれる. グローバルルートナンバーと呼ばれることもある.
- (4) $N_{\mathcal{A}}$ はコンダクター (導手) と呼ばれる. 後に導入するアナリティックコンダクターと区別するためにアリスメティックコンダクターと呼ばれることもある.
- (5) すべての素数 p とすべての $j \in \{1, \dots, d\}$ に対して $|\alpha_{p,j}| \leq 1$ が成り立つとき, $L(s, \mathcal{A})$ は Ramanujan 予想を満たすという.
- (6) $\widehat{L}(s, \mathcal{A})$ のすべての零点が $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ の上にあるとき, $\widehat{L}(s, \mathcal{A})$ は一般

Riemann 予想を満たすという．一般 Riemann 予想は Generalized Riemann Hypothesis または Grand Riemann Hypothesis と呼ばれるので，略して GRH と称する．

Riemann ゼータ関数は次数 1 の L 関数である．他の L 関数の例をいくつか紹介する．以下，保型形式や保型表現の専門用語は説明なしに使用する．

例 4.5 $q \geq 3$ を整数とする． q を法とする原始的 Dirichlet 指標 χ に付随する Dirichlet L 関数

$$L(s, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

は Iwaniec-Kowalski の意味で L 関数である． χ は非自明なので $L(s, \chi)$ は $\mathbb{C}$ 上で正則である． $\delta_\chi \in \{0, 1\}$ を $\chi(-1) = (-1)^{\delta_\chi}$ となるように定め，

$$\widehat{L}(s, \chi) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \delta_\chi) L(s, \chi)$$

とおく． χ のガウス和を $\mathcal{G}(\chi) := \sum_{a=0}^{q-1} \chi(a) e^{2\pi i \frac{a}{q}}$ で定めて $\epsilon_\chi := i^{-\delta_\chi} q^{-1/2} \mathcal{G}(\chi)$ とおく．このとき $|\epsilon_\chi| = 1$ であり，関数等式

$$\widehat{L}(s, \chi) = \epsilon_\chi q^{1/2-s} \widehat{L}(1-s, \overline{\chi})$$

が成り立つ．

例 4.6 $k \geq 1$, $N \geq 1$ を整数とし， χ を N を法とする Dirichlet 指標とする． f を重さ k ，レベル N ，指標 χ の楕円カスプ形式とし，正規化された新 Hecke 固有形式であるとする*³． f の Fourier 展開を $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{(k-1)/2} \lambda_f(n) e^{2\pi i n z}$ とすると， f は Ramanujan-Petersson 予想を満たす，つまり， N を割り切らないすべての素数 p に対して $|\lambda_f(p)| \leq 2$ が成り立つ． f に付随する保型 L 関数

$$L(s, f) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \lambda_f(p)p^{-s} + \chi(p)p^{-2s}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

は Iwaniec-Kowalski の意味で L 関数である． $L(s, f)$ は $\mathbb{C}$ 上正則である．

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)$$

*³ 楕円カスプ形式や Maass カスプ形式のレベルを導入する際には， $\Gamma_0(N)$ の作用を考えている．

とおくと, duplication formula により $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)$ が成り立つ.

$$\begin{aligned}\widehat{L}(s, f) &:= \Gamma_{\mathbb{C}}(s + (k-1)/2)L(s, f) \\ &= \Gamma_{\mathbb{R}}(s + (k-1)/2)\Gamma_{\mathbb{R}}(s + (k+1)/2)L(s, f)\end{aligned}$$

とおくと, 絶対値が 1 の複素数 ϵ_f が存在して,

$$L(s, f) = \epsilon_f N^{1/2-s} L(1-s, \bar{f})$$

の形の関数等式が成り立つ. ここで $\bar{f}(z) := \overline{f(\bar{z})} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{(k-1)/2} \overline{\lambda_f(n)} e^{2\pi i n z}$.

例 4.7 $\nu \in \mathbb{C}$ とし, $N \geq 1$ は整数とする. χ を N を法とする Dirichlet 指標とする. f を双曲的ラプラシアン $-y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)$ の固有値 $1/4 - \nu^2$, レベル N , 指標 χ の Maass カスプ形式とし, 正規化された新 Hecke 固有形式であるとする. さらに $f(-\bar{z}) = (-1)^{\delta} f(z)$ ($\delta \in \{0, 1\}$) とする. $\delta = 0$ のとき f は偶 (even) であるといい, $\delta = 1$ のときは f は奇 (odd) であるという. 双曲的ラプラシアンの固有値は 0 以上の実数なので, $\nu \in i\mathbb{R} \cup (-1/2, 1/2)$ であることが分かる^{*4}. f の Fourier 展開を $f(x + iy) = \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} 2\lambda_f(n) \sqrt{y} K_{\nu}(2\pi|n|y) e^{2\pi i n x}$ とする^{*5}と, f に付随する保型 L 関数

$$L(s, f) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \lambda_f(p)p^{-s} + \chi(p)p^{-2s}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 3/2$$

は $\mathbb{C}$ 上の整関数として解析接続できる. $\operatorname{Re}(s) > 3/2$ で絶対収束することはすぐに分かるが, Rankin-Selberg L 関数 $L(s, f \times \bar{f})$ が $s = 1$ で極を持つことを用いると, 絶対収束域は $\operatorname{Re}(s) > 1$ まで延長できる.

$$\widehat{L}(s, f) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \nu + \delta) \Gamma_{\mathbb{R}}(s - \nu + \delta) L(s, f)$$

とおくと, 絶対値が 1 の複素数 ϵ_f が存在して, 関数等式

$$\widehat{L}(s, f) = \epsilon_f N^{1/2-s} \widehat{L}(1-s, \bar{f})$$

が成り立つ. ここで $\bar{f}(z) := \overline{f(\bar{z})}$.

^{*4} $\nu \in i\mathbb{R}$ であること, つまり $1/4 - \nu^2 \geq 1/4$ であることが予想されている (Selberg 予想). $N = 1$ のときは Selberg 予想は正しい.

^{*5} $K_{\nu}(y) := \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y}{2}(t+t^{-1})} t^{\nu-1} dt$ ($y > 0$) は第 2 種変形 Bessel 関数である.

例 4.8 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ のアデール環とする. $n \geq 1$ は整数とし, π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約ユニタリーカスピダル保型表現とする*⁶. $n \geq 2$ のとき, Godement, Jacquet により導入された (非完備) 保型 L 関数 $L(s, \pi)$ は Iwaniec-Kowalski の意味で L 関数である. この保型 L 関数はスタンダード L 関数とも呼ばれる. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の既約ユニタリー表現の分類により, $|\alpha_{p,j}| < p^{1/2}$ が成り立つ. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の既約ユニタリー表現の分類により $\mathrm{Re}(\mu_{\pi,j}) > -1/2$ も成り立つ.

$n = 1$ のときは $\pi = \chi \otimes |\cdot|_{\mathbb{A}}^{it_0}$ (ただし χ は $\mathbb{R}_{>0}$ 上自明な $\mathbb{Q}^{\times} \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}$ の Hecke 指標, $|\cdot|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ はイデールノルム, $t_0 \in \mathbb{R}$) と表せる. χ が非自明のときは $L(s, \pi)$ は $\mathbb{C}$ 上正則である. χ が自明指標のときは $L(s, \pi) = L(s, |\cdot|_{\mathbb{A}}^{it_0}) = \zeta(s + it_0)$ となり, $s = 1 - it_0$ で 1 位の極を持ち, $s \in \mathbb{C} - \{1 - it_0\}$ では正則である. $\zeta(s + it_0)$ は L 関数であり, $t_0 = 0$ のときに限り Iwaniec-Kowalski の意味で L 関数である.

例 4.9 $n_1, n_2 \geq 1$ を整数とし, π_1 を $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約ユニタリーカスピダル保型表現, π_2 を $\mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約ユニタリーカスピダル保型表現とする. π_1, π_2 の中心指標はともに $\mathbb{R}_{>0}$ 上自明とする. $L(s, \pi_1), L(s, \pi_2)$ の $\alpha_{p,j}$ に対応するパラメーターをそれぞれ $\alpha_{1,p,j_1}, \alpha_{2,p,j_2}$ とする. Rankin-Selberg L 関数 $L(s, \pi_1 \times \pi_2)$ は, $p \nmid N_{\pi_1} N_{\pi_2}$ を満たすすべての素数 p に対して Euler 積の p における因子が

$$\prod_{j_1=1}^{n_1} \prod_{j_2=1}^{n_2} \frac{1}{1 - \alpha_{1,p,j_1} \alpha_{2,p,j_2} p^{-s}}$$

となるように定義される. $L(s, \pi_1 \times \pi_2)$ は Iwaniec-Kowalski の意味で次数 $n_1 n_2$ の L 関数である. $n_1 = n_2$ かつ $\pi_1 \cong \pi_2$ のとき*⁷は $s = 1$ のみで 1 位の極を持ち, $\mathbb{C} - \{1\}$ 上で正則である. $n_1 \neq n_2$ または $\pi_1 \not\cong \pi_2$ のときは $\mathbb{C}$ 上で正則である.

$L(s, \pi_1 \times \pi_2)$ の $\alpha_{p,j}$ に対応するパラメーターを $\beta_{p,j}$ とすると, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の既約ユニタリー表現の分類により, $|\beta_{p,j}| < p$ が成り立つ. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の既約ユニタリー表現の分類により, $\mathrm{Re}(\mu_{\pi_1 \times \pi_2, j}) > -1$ も成り立つ.

例 4.10 GL_n に対する保型 L 関数 (スタンダード L 関数) の積も L 関数である. 実際, $n_1, \dots, n_m \geq 1$ を整数とし, 各 n_j に対して $\mathrm{GL}_{n_j}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約ユニタリーカスピダル保型表現 π_j をとる. $n_j = 1$ のときは π_j は $\mathbb{Q}^{\times} \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}$ の Hecke 指標である

*⁶ 既約カスピダル保型表現 π の中心指標がユニタリーならば π もユニタリーである. 逆も成り立つ.

*⁷ $\bar{\pi}_2$ は π_2 の複素共役である. ユニタリー性から $\bar{\pi}_2$ は π_2 の反傾表現 $\pi_2^{\vee}$ と同型である.

が⁸, $\mathbb{R}_{>0}$ 上で自明であると仮定する^{*8}. この仮定の下で $L(s, \pi) := \prod_{j=1}^m L(s, \pi_j)$ は Iwaniec-Kowalski の意味で L 関数である. 次数は $d := n_1 + \cdots + n_m$ である. π はただの添え字と思って差し支えない. 実際には π は $\pi_1, \dots, \pi_m$ の isobaric 和 (等圧和)

$$\pi = \pi_1 \boxplus \cdots \boxplus \pi_m$$

であり, これは $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約保型表現である. このような π を isobaric (等圧的) であるという. すべての数論的な L 関数は保型 L 関数であると期待されている. Langlands 関手性を仮定すると, すべての (代数群 G に対する) 保型 L 関数はある n に対する $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の isobaric 保型表現の L 関数になるべきである. 未完の証明が補われつつある Arthur の内視分類 (endoscopic classification) の理論を用いれば, 一般の代数群 G に対する保型 L 関数が GL_n に対する保型 L 関数の積で記述されることが分かる. したがって, L 関数全体のクラスとしては任意の整数 $d \geq 1$ に対する $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の任意の既約 isobaric 保型表現の L 関数の全体を考えれば十分だと思われる.

例 4.11 楕円モジュラー形式から Siegel モジュラー形式を構成することができる. $k \geq 6$ を奇数とし, f を重さ $2k$, レベル 1 の楕円カスプ形式とし, 正規化された Hecke 固有形式であるとする. このとき $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ に関する次数 2, 重さ $k+1$ のスカラー値 Siegel カスプ形式 F が f から構成できて, F のスピノール L 関数が

$$L(s, F, \mathrm{Spin}) = \zeta(s+1/2)\zeta(s-1/2)L(s, f)$$

と表される. この F を f の Saito-Kurokawa リフトと呼ぶ. $L(s, F, \mathrm{Spin})$ は次数 4 で Euler 積表示を持ち, s と $1-s$ に関する関数等式を持つ. しかし $s = 1/2, 3/2$ で極を持つ. Riemann ゼータ関数のシフトが含まれているので, この保型 L 関数は一般 Riemann 予想を満たさない. また, Ramanujan 予想も満たさない (Saito-Kurokawa リフト F は一般 Ramanujan-Petersson 予想を満たさない).

例 4.12 $k \geq 6$ と $n \geq 1$ を整数とし, $n \equiv k \pmod{2}$ が成り立つとする. 重さ $2k$, レベル 1 の楕円カスプ形式 f が正規化された Hecke 固有形式であるとする. この f から $\mathrm{Sp}_{4n}(\mathbb{Z})$ に関する次数 $2n$, 重さ $k+n$ のスカラー値 Siegel カスプ形式 F_n が構

^{*8} この仮定がない場合は, $\pi_j = |\cdot|_{\mathbb{A}}^{it_j}$ ($t_j \in \mathbb{R} - \{0\}$) のときに $L(s, \pi_j) = \zeta(s+it_j)$ となり, $L(s, \pi_j)$ は $s=1$ で極を持たず, $s=1-it_j$ で極を持つ.

成できて, F_n のスタンダード L 関数が

$$L(s, F_n, \text{Std}) = \zeta(s) \prod_{j=1}^{2n} L(s + n + 1/2 - j, f)$$

で与えられる. この F_n は Duke-Imamoglu-Ikeda リフト (または Ikeda リフト) と呼ばれ, F_1 は先ほどの Saito-Kurokawa リフト F に一致する. $L(s, F_n, \text{Std})$ は Euler 積表示を持ち, 次数が $4n + 1$ である. また $s = 1$ で単純極を持ち, $\mathbb{C} - \{1\}$ 上で正則であり, s と $1 - s$ に関する関数等式を持つ. 保型 L 関数 $L(s, F_n, \text{Std})$ は Ramanujan 予想を満たさない (Ikeda リフト F_n は一般 Ramanujan-Petersson 予想を満たさない). また, $L(s, f)$ が実部 $1/2$ の零点を (無限個) 持つことから, $L(s, f)$ のシフトを含む L 関数 $L(s, F_n, \text{Std})$ が一般 Riemann 予想を満たさないことも分かる (cf. $L(s, f)$ の実部 $1/2$ の零点については [16] など).

解析数論的な動機で L 関数を研究する際は Selberg クラスの L 関数に限定しても良からう, と思える例である.

定義 4.13 (アナリティックコンダクター (解析的導手) [13, (5.7)]) L 関数 $L(s, \mathcal{A})$ のアナリティックコンダクターを以下で定める:

$$Q(\mathcal{A}) := \left\{ \prod_{j=1}^d (3 + |\mu_{\mathcal{A},j}|) \right\} \times N_{\mathcal{A}}.$$

$s_0 \in \mathbb{C}$ に対して, s を変数とする L 関数 $L(s + s_0, \mathcal{A})$ のアナリティックコンダクターを $Q(\mathcal{A}, s_0)$ と書くことにする.

注意 4.2 (2) により, $Q(\overline{\mathcal{A}}) = Q(\mathcal{A})$ である.

例 4.14 $t \in \mathbb{R}$ を固定する. s の関数 $\zeta(s + it)$ は L 関数であり, アナリティックコンダクターは $3 + |t|$ である. $3 + |t| \asymp 1 + |t|$, ($t \in \mathbb{R}$) である. 任意の固定された $t_0 > 0$ に対して, $t \geq t_0$ の範囲で $3 + |t| \asymp_{t_0} |t|$ も成り立つ.

例 4.15 $q \geq 3$ は整数であるとし, χ は q を法とする原始的 Dirichlet 指標であるとする. $L(s, \chi)$ のアナリティックコンダクターは $Q(\chi) = (3 + \delta_\chi)q$ である. $Q(\chi) \asymp q$ が成り立つ.

例 4.16 f を重さ k , レベル N , 指標 χ の楕円カスプ形式とする. f が正規化された新 Hecke 固有形式であるとき, 保型 L 関数 $L(s, f)$ のアナリティックコンダクターは

$Q(f) = (3 + \frac{k-1}{2})(3 + \frac{k+1}{2})N$ である. $Q(f) \asymp k^2 N$ が成り立つ.

例 4.17 f をラプラシアン固有値 $\lambda = 1/4 - \nu^2$, レベル N , 指標 χ の Maass カスプ形式とする. f が正規化された新 Hecke 固有形式であり, $f(-\bar{z}) = (-1)^\delta f(z)$ ($\delta \in \{0, 1\}$) のとき, 保型 L 関数 $L(s, f)$ のアナリティックコンダクターは $Q(f) = (3 + |\nu + \delta|)(3 + |\nu - \delta|)N$ である. $Q(f) \asymp \lambda N$ が成り立つ.

アナリティックコンダクターの概念は, GL_n に対する L 関数の $s = 1/2$ での値 (中心値) の大きさを評価するための不変量として, Iwaniec, Sarnak [14, (31)] で導入された. つまり subconvexity 問題を考えるために導入された.

$L(s, \mathcal{A})$ を Iwaniec-Kowalski の意味での次数 d の L 関数とする. Riemann ゼータ関数の凸評価と同様に, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$L(1/2 + it, \mathcal{A}) \ll_{d, \epsilon} Q(\mathcal{A}, it)^{1/4 + \epsilon}, \quad t \in \mathbb{R}$$

が成り立つことが期待できる. ここで無視している定数は d, ϵ には依存してもよいが $\mathcal{A}$ には依存しない (つまり $L(s, \mathcal{A})$ の定義に現れる d 以外のデータ ($\{\alpha_{p,j}\}$, r , $\{\mu_{A,j}\}$, ϵ_A , N_A) には依存しない). この評価を $L(s, \mathcal{A})$ の凸評価と呼ぶ.

$\mathcal{A}$ が $GL_d(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約ユニタリーカスピダル保型表現のときは凸評価が証明できる.

定理 4.18 (GL_d に対する L 関数の凸評価) $d \geq 2$ は整数とする. π を $GL_d(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約ユニタリーカスピダル保型表現とする. $0 \leq \sigma \leq 1, t \in \mathbb{R}$ とする. 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$L(\sigma + it, \pi) \ll_{d, \epsilon} Q(\pi, it)^{\frac{1-\sigma}{2} + \epsilon} \ll_d Q(\pi)^{\frac{1-\sigma}{2} + \epsilon} \{(3 + |t|)^d\}^{\frac{1-\sigma}{2} + \epsilon}, \quad t \in \mathbb{R}$$

が成り立つ. 特に凸評価 $L(1/2 + it, \pi) \ll_{d, \epsilon} Q(\pi, it)^{1/4 + \epsilon}$ が成り立つ.

証明 Riemann ゼータ関数のときの定理 2.1 と同様にして証明を与える. 後半の不等式はアナリティックコンダクターの定義から得られるので, 前半の不等式を示せば十分である. $d \geq 2$ なので $L(s, \pi)$ は $\mathbb{C}$ 上で正則である. L 関数の 1 での値に関する Li の評価 [18, Theorem 2] により, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $L(1 + it, \pi) = L(1, \pi \otimes |\cdot|_{\mathbb{A}}^{it}) \ll_{d, \epsilon} Q(\pi, it)^\epsilon$ が成り立つ^{*9}. $L(s, \pi)$ の関数等式に出てくるガンマ関

^{*9} Molteni [26] の評価を用いてもよい. ただし Molteni [26] は一般の代数体について論じているが,

数の積を

$$L(s, \pi_\infty) := \prod_{j=1}^d \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \mu_{\pi,j})$$

と書くことにする． π_∞ は単なる記号と思ってよい（実際は π_∞ は π の無限素点成分であり， $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ の generic 既約ユニタリ表現である． $L(s, \pi_\infty)$ は Godement-Jacquet の局所 L 因子である）．関数等式と Stirling の公式を使うことで，

$$\begin{aligned} |L(0 + it, \pi)| &= N_\pi^{1/2} \frac{|L(1 - it, \overline{\pi_\infty})|}{|L(0 + it, \pi_\infty)|} |L(1 - it, \overline{\pi})| \\ &\ll_{d,\epsilon} N_\pi^{1/2} \left\{ \prod_{j=1}^d (3 + |\overline{\mu_{\pi,j}} - it|) \right\}^{1/2} \times Q(\overline{\pi}, -it)^\epsilon \\ &\ll_d Q(\overline{\pi}, -it)^{1/2+\epsilon} = Q(\pi, it)^{1/2+\epsilon} \end{aligned}$$

となる． $\widehat{L}(s, \pi)$ はカスプ形式のゼータ積分で書けるため， $0 \leq \sigma \leq 1$ ， $t \in \mathbb{R}$ の範囲で有界である．すなわちこの範囲で $|\widehat{L}(\sigma + it, \pi)| \ll_\pi 1$ となる．これと Stirling の公式を使うと $0 \leq \sigma \leq 1$ において $L(\sigma + it, \pi) \ll_\pi (3 + |t|)^{d(1/2-\sigma)} e^{d\pi|t|/2} \leq (3 + |s|)^{d/2} e^{d\pi|s|/2} \ll_d \exp(|s|^2)$ となる． $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ に対する Phragmén-Lindelöf の凸性原理（命題 2.2 ではなく後述の命題 4.19 の方）を用いれば主張を得る．（もし命題 2.2 を使うと $L(1/2 + it, \pi) \ll_{\pi,\epsilon} \{(3 + |t|)^d\}^{\frac{1-\sigma}{2}+\epsilon}$ しか証明できないことに注意せよ．） $\square$

上の証明で用いたのは，命題 2.2 の t_0 を $-\infty$ にしたバージョンの Phragmén-Lindelöf の原理である．

命題 4.19 (Phragmén-Lindelöf の原理 ([13, Theorem 5.53] を改変)) $a < b$ とする． f は $D = \{s = \sigma + it \in \mathbb{C} \mid a \leq \sigma \leq b\}$ の開近傍上で定義された複素数値連続関数で， D 上で正則とする．ある $A > 0$ が存在して $f(s) \ll \exp(|s|^A)$ ，($s \in D$) であるとする．

- (1) ある $M > 0$ が存在して， $|f(s)| \leq M$ が D の境界 $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) = a \text{ or } b\}$ 上で成り立つとする．このとき任意の $s \in D$ で $|f(s)| \leq M$ が成り立つ．

彼の議論は Rankin-Selberg convolution の解析性を仮定しているため， $\mathbb{Q}$ 上の L 関数に対してしか適用できない．そして $\mathbb{Q}$ 上であっても Rankin-Selberg L 関数に適用できない．Li [18] は Rankin-Selberg convolution の解析性は仮定していないので，一般の代数体上の L 関数に対して適用できる．

(2) $M_a > 0$, $M_b > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ が存在して, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $|f(a+it)| \leq M_a(1+|t|)^\alpha$, $|f(b+it)| \leq M_b(1+|t|)^\beta$ であるとする. このとき, a, b, α, β のみに依存する定数 $C > 0$ が存在して,

$$|f(\sigma+it)| \leq CM_a^{\frac{b-\sigma}{b-a}} M_b^{\frac{\sigma-a}{b-a}} (1+|t|)^{\alpha \frac{b-\sigma}{b-a} + \beta \frac{\sigma-a}{b-a}}, \quad \sigma+it \in D$$

が成り立つ. 実際, $C = 2^{\max(\alpha, \beta)/2} (b-a+1)^{\max(\alpha, \beta)}$ ととれる. (C が f , M_a , M_b , t に依存しないことが重要である.)

証明 [13, Theorem 5.53] に証明は書かれていない. Prachar の本に (1) と同じ主張 [31, Satz 7.2] があり, 「Satz 7.1 (命題 2.2 の $\alpha = \beta = 0$ の場合) と同様にすればよい」と書いてある.

そこでまず, 命題 2.2 の $\alpha = \beta = 0$ の場合と同様にして (1) を示す. 任意の $c > 0$ に対して, $f(s) \ll \exp(\exp(\log|s|^A)) \ll_c \exp(\exp(c|t|))$ となるので, $c < \frac{\pi}{b-a}$ となるようにしておく. 命題 2.2 と同じ議論により, $a = -\pi/2$, $b = \pi/2$, $0 < c < 1$ としてよい. $c < d < 1$ となる実数 d を 1 つとる. $\epsilon > 0$ を任意にとり, $g(s) := \exp(-\epsilon \cos(ds))f(s)$ とおくと, g は D 上正則であり, $|g(s)| \leq \exp(-\frac{1}{2}\epsilon \cos(\frac{d\pi}{2})e^{d|t|})|f(s)|$ となる. $0 < d < 1$ より, D の境界上で $|g(s)| \leq M$ となる. D 上で $g(s) \ll \exp(e^{c|t|} - \epsilon \frac{1}{2} \cos(\frac{d\pi}{2})e^{d|t|})$ となり, $c < d < 1$ より $|t| \rightarrow \infty$ で $g(s) \rightarrow 0$ となる. ゆえに, ある $t_1 > 0$ が存在して, $T \geq t_1$ を満たす任意の $T > 0$ に対して, $-\pi/2 \leq \sigma \leq \pi/2$, $|t| = T$ のとき $|g(s)| \leq M$ が成り立つ. 最大値の原理により, $-\pi/2 \leq \sigma \leq \pi/2$, $-T \leq t \leq T$ で与えられる長方形の内部でも $|g(s)| \leq M$ が成り立つ. したがって, $T \rightarrow \infty$ とすれば D 上で $|g(s)| \leq M$ となる. 後は $\epsilon \rightarrow +0$ とすれば D 上で $|f(s)| \leq M$ を得る.

次に (2) を示す. Fiori [6, Theorem 1 and Lemma 5] を参考にする. $G(s) := s - a + 1$, ($s \in D$) とおく. $1 + |t| \leq 2^{1/2} \sqrt{1+t^2}$ ($t \in \mathbb{R}$) より $1 + |t| \leq 2^{1/2} |G(s)|$ だから,

$$|f(a+it)| \leq 2^{\alpha/2} M_a |G(a+it)|^\alpha \quad (t \in \mathbb{R}),$$

$$|f(b+it)| \leq 2^{\beta/2} M_b |G(b+it)|^\beta \quad (t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ. ここで

$$F(s) := f(a+s) \overline{f(b-\bar{s})},$$

$$H(s) := (2^{\alpha/2} M_a)(2^{\beta/2} M_b) G(a+s)^\alpha G(b-s)^\beta$$

とおくと, F と H は $D' := \{s = \sigma + it \mid 0 \leq \sigma \leq b - a, t \in \mathbb{R}\}$ 上正則である. G は D 上で非ゼロなので $\Psi(s) := F(s)/H(s)$ も D' 上正則である. Ψ の定義より $|\Psi(0 + it)| \leq 1$, ($t \in \mathbb{R}$) が成り立つ. また, $1 + |t| \leq 2^{1/2}\sqrt{1+t^2} \leq 2^{1/2}\sqrt{(b-a+1)^2+t^2}$, ($t \in \mathbb{R}$) であることに注意すると, $|\Psi(b-a+it)| \leq 1$, ($t \in \mathbb{R}$) も成り立つ. $|G(s)| \geq 1$, ($s \in D$) なので, ある $A' > 0$ が存在して $\Psi(s) \ll \exp(|s|^{A'})$ ($s \in D'$) も成り立つ. したがって (1) の結果を適用することができて, D' 上で $|\Psi(s)| \leq 1$ を得る. すなわち

$$|f(a+s)\overline{f(b-\bar{s})}| \leq (2^{\alpha/2}M_a)(2^{\beta/2}M_b)G(a+s)^{\alpha}G(b-s)^{\beta}, \quad s \in D'$$

が成り立つ. 特に $s = (b-a)/2 + it$ とすることで,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2} + it\right) \right| \leq (2^{\alpha/2}M_a)^{1/2}(2^{\beta/2}M_b)^{1/2} \left| G\left(\frac{a+b}{2} + it\right) \right|^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

を得る. $\sigma = a$ と $\sigma = b$ の中点 $\sigma = (a+b)/2$ における評価が得られた. 次にこれを用いて $[a, (a+b)/2]$ や $[(a+b)/2, b]$ に対して同様の議論をすると $\sigma = (3a+b)/4$ や $\sigma = (a+3b)/4$ のときの評価が得られ, この議論を次々に繰り返すことで, 以下の不等式

$$|f(\sigma + it)| \leq (2^{\alpha/2}M_a)^{\frac{b-\sigma}{b-a}}(2^{\beta/2}M_b)^{\frac{\sigma-a}{b-a}}|G(\sigma + it)|^{\alpha\frac{b-\sigma}{b-a} + \beta\frac{\sigma-a}{b-a}}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

が, $\sigma = a + (b-a)\frac{n}{2^k}$ ($n \geq 0, k \geq 0$ は整数で $\frac{n}{2^k} \in [0, 1]$ を満たす) のときに成り立つことが分かる. これと f と G の連続性により, 任意の $\sigma \in [a, b]$ で不等式 (4.1) が成り立つことが分かる. $|G(s)| \leq (b-a+1)(1+|t|)$, ($s \in D$) および $\alpha\frac{b-\sigma}{b-a} + \beta\frac{\sigma-a}{b-a} \leq \max(\alpha, \beta)$, ($a \leq \sigma \leq b$) を使えば, (2) の主張を得る. $\square$

注意 4.20 定数倍を無視しない場合の Phragmén-Lindelöf の原理について補足しておく.

- (1) 命題 4.19 の証明を見れば分かるように, 「ある $A > 0$ が存在して $f(s) \ll \exp(|s|^A)$, ($s \in D$)」という条件は「 $0 < c < \frac{\pi}{b-a}$ を満たすある実数 c が存在して $f(s) \ll \exp(\exp(c|t|))$, ($s \in D$)」という条件に弱められる.
- (2) 定数倍を無視しないような (2) と同様の形の Phragmén-Lindelöf の原理は Rademacher [32] が初出と思われる (証明は Rademacher の本 [33, Chapter 4] に self-contained に書かれている). 竜沢の本 [39, p.173] にも演習問題と

して $\log$ 付きの場合が書かれており, 証明にはガンマ関数が用いられる ([39, pp.259–261]). また最近では, かなり一般的な形の Phragmén-Lindelöf の原理もある (Fiori [6]).

- (3) Iwaniec, Kowalski [13, Theorem 5.53 (2)] では命題 4.19 (2) の定数 C は $C = 1$ とされているが, これは間違いである. 例えば $1 < a < b$, $f(s) := s$ のとき $M_a = a$, $M_b = b$, $\alpha = \beta = 1$ として, [13, Theorem 5.53 (2)] を使うと $|f((a+b)/2 + it)| \leq M_a^{1/2} M_b^{1/2} (1 + |t|)$ となる. 特に $t = 0$ のときに $(a+b)/2 \leq \sqrt{ab}$ となるが, これは相加・相乗平均の関係に矛盾する.

注意 4.21 Ramanujan 予想を仮定した上での凸評価の導出は近似関数等式を使えばできる (Michel [24, 1190–05]). これは Riemann ゼータ関数の場合の議論 [43, (5.1.8)] と本質的に同じである.

GL_n に対する L 関数に対して凸評価は証明できるが, 現時点では凸評価の証明が与えられていない L 関数もある. これは $L(1 + it, \mathcal{A}) \ll_{d,\epsilon} Q(\mathcal{A}, it)^\epsilon$ という不等式が保証されていないからである. しかしながら, 凸評価が成り立つかどうか保証されていない L 関数も含めて, 一般の L 関数に対して subconvexity 問題は提示できる.

問題 4.22 (subconvexity 問題) $d \geq 1$ を整数とする. $L(s, \mathcal{A})$ を次数 d の L 関数とする. 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$L(1/2 + it, \mathcal{A}) \ll_{d,\epsilon} Q(\mathcal{A}, it)^{a+\epsilon}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(無視している定数は $\mathcal{A}$ と t には依らない) となるような $a \in [0, 1/4]$ を見つけよ.

Riemann ゼータ関数のときと同様に, L 関数に対して Lindelöf 予想が考えられる.

予想 4.23 (一般 Lindelöf 予想 (Generalized Lindelöf Hypothesis)) $d \geq 1$ を整数とする. $L(s, \mathcal{A})$ を次数 d の L 関数とする. このとき任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$L(1/2 + it, \mathcal{A}) \ll_{d,\epsilon} Q(\mathcal{A}, it)^\epsilon, \quad t \in \mathbb{R}$$

が成り立つ. ここで無視している定数は $\mathcal{A}$ と t には依らない.

L 関数にいくつかの条件を課すと, 一般 Riemann 予想から一般 Lindelöf 予想が導かれる.

定理 4.24 ([13, Corollary 5.20]) $L(s, \mathcal{A})$ を Iwaniec-Kowalski の意味での次数

d の L 関数とする. $L(s, \mathcal{A})$ の $s = 1$ における極の位数を $r \geq 0$ とし, $r \leq d$ を仮定する. さらに $L(s, \mathcal{A})$ は Ramanujan 予想を満たすとする. このとき $L(s, \mathcal{A})$ が一般 Riemann 予想を満たすなら, $L(s, \mathcal{A})$ に対する一般 Lindelöf 予想が成り立つ.

証明 [13, Corollary 5.20] では (筆者が証明を読んだ限り) 無視している定数は r に依存する. ただし $r \leq d$ (もっと一般に $r \ll d$ など) があれば無視している定数が r に依存しないようにできる. これを説明するため, 証明の概略を述べておく. $p_r(s) = (s-1)^r/(s+1)^r$ とおくと $p_r(s)L(s, \mathcal{A})$ は $\mathbb{C}$ 上正則である. 一般 Ramanujan 予想と一般 Riemann 予想を仮定しているので [13, Theorem 5.19]^{*10}により, $1/2 < \sigma \leq 5/4$, $t \in \mathbb{R}$, $s = \sigma + it$ において

$$\log(p_r(s)L(s, \mathcal{A})) \ll \frac{d(\log Q(\mathcal{A}, s))^{2-2\sigma}}{(2\sigma-1)\log \log Q(\mathcal{A}, s)} + d \log \log Q(\mathcal{A}, s)$$

が成り立つ. ここで無視している定数は絶対定数である. これより, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\operatorname{Re}(s) \geq 1/2 + \epsilon$ の範囲で

$$Q(\mathcal{A}, s)^{-\epsilon} \ll_{d, \epsilon} p_r(s)L(s, \mathcal{A}) \ll_{d, \epsilon} Q(\mathcal{A}, s)^\epsilon$$

が成り立つ. Phragmén-Lindelöf の原理 (命題 4.19) より, $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ 上で $L(s, \mathcal{A}) \ll_{d, \epsilon} |p_r(s)|^{-1} Q(\mathcal{A}, s)^\epsilon$ が成り立つ. $r \leq d$ のときは $|p_r(1/2 + it)|^{-1} \asymp_d 1$, ($t \in \mathbb{R}$) であるから, $L(1/2 + it, \mathcal{A}) \ll_{d, \epsilon} Q(\mathcal{A}, it)^\epsilon$ が従う. $\square$

$L(s, \mathcal{A})$ が Ramanujan 予想を満たし, 非零領域を持てば, $r \leq d$ が成り立つことが知られている ([13, Exercise 8]). また, GL_n に対する保型 L 関数の積として与えられる次数 d の L 関数は $r \leq d$ を満たしている. これらの観点から $r \leq d$ を課すことは自然に思える. また, 一般 Ramanujan-Petersson 予想は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の任意の既約ユニタリーカスピダル保型表現に対して成り立つと期待されており, ゆえに GL_n に対する L 関数は Ramanujan 予想を満たすと期待されている. Ramanujan 予想を満たさず一般 Riemann 予想も満たさない (定義 4.3 の意味での) L 関数の例としては, Saito-Kurokawa リフトに付随するスピノール L 関数や, Ikeda リフトに付随するスタンダード L 関数がある (例 4.11, 例 4.12).

注意 4.25 F を代数体とする. これまでの L 関数の話と同様にして, F の整数環の極大イデアルに関する無限積を考えることで F 上の L 関数を導入することができ

^{*10} この定理は [13, Theorem 5.16] を使えば示せるが, 実はその過程でも $r \leq d$ が必要である.

る. $L(s, \mathcal{A})$ を次数 d の F 上の L 関数とする. アナリティックコンダクター $Q(\mathcal{A})$ と $Q(\mathcal{A}, s_0)$ が $\mathbb{Q}$ 上の L 関数の場合 (定義 4.13) と同様に定義でき, F 上の GL_n に対する保型 L 関数などに対して, 凸評価

$$L(1/2 + it, \mathcal{A}) \ll_{F,d,\epsilon} Q(\mathcal{A}, it)^{1/4+\epsilon}, \quad t \in \mathbb{R}$$

が成り立つ. この凸評価を改良できるかという問題, つまり

$$L(1/2 + it, \mathcal{A}) \ll_{F,d,\epsilon} Q(\mathcal{A}, it)^{a+\epsilon}, \quad t \in \mathbb{R}$$

が成り立つような実数 $a \in [0, 1/4]$ を見つける問題も subconvexity 問題と呼ばれる.

注意 4.26 F が $\mathbb{Q}$ の n 次拡大体のとき, F の Dedekind ゼータ関数は F 上の L 関数とみなすときは 1 次の L 関数であるが, $\mathbb{Q}$ 上の L 関数とみなすときは n 次の L 関数である.

5 L 関数の subconvexity について知られていること

L 関数の subconvexity に関する研究はたくさんあるので, すべてを本記事で紹介することはできない. 特に $\mathrm{GL}_1, \mathrm{GL}_2$ に関する L 関数の subconvexity の研究は多い. 本記事では主要なものをピックアップして紹介する.

5.1 1 次の L 関数の subconvexity

Riemann ゼータ関数については既に見たので, Dirichlet L 関数について見てみる. Burgess [4] が次のような評価を与えた.

定理 5.1 (Burgess [4]) ある $A > 0$ が存在して, 任意の整数 $q \geq 3$ と q を法とする任意の原始的 Dirichlet 指標 χ と任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$L(1/2 + it, \chi) \ll_{\epsilon} (1 + |t|)^A q^{3/16+\epsilon}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$3/16 < 4/16 = 1/4$ なのでこの評価は q に関しては凸評価より良くなっている. このような結果は q アスペクトに関する subconvexity 評価と呼ばれる. 指数の $3/16$ をもっと小さくするまでに人類は 40 年ほど費やしており, χ が 2 次指標のときに $3/16$ を $1/6$ に改良するという q アスペクトに関する subconvexity 評価が Conrey,

Iwaniec [5] によって与えられた. $1/6$ は Riemann ゼータ関数に対する Weyl 評価の指数と同じであるので, L 関数の subconvexity 評価で指数が $1/6$ の場合の評価を Weyl 評価 (Weyl bound) や Weyl 型評価 (Weyl-type bound) と呼んだりする. Petrow, Young [30] により, 最近になって A のほうも Weyl 評価と同じ $1/6$ まで下げられた.

定理 5.2 (Petrow-Young [30]) $q \geq 3$ を整数とする. q を法とする任意の原始的 Dirichlet 指標 χ と任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$L(1/2 + it, \chi) \ll_{\epsilon} (1 + |t|)^{1/6+\epsilon} q^{1/6+\epsilon}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Burgess の証明では χ に付随する指標和の評価が用いられた. 一方, Conrey, Iwaniec や Petrow, Young の証明では, 近似関数等式と GL_2 の保型形式の理論 (Petersson 跡公式, Kuznetsov 跡公式) が用いられた.

5.2 2 次の L 関数の subconvexity

次数 2 の保型 L 関数の subconvexity はさまざまな結果が知られているが, 例えば次のような定理が知られている.

定理 5.3 (Jutila, 本橋 [15]) f が重さ k , レベル 1 の楕円カスプ形式であって正規化された Hecke 固有形式であるとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$L(1/2 + it, f) \ll_{\epsilon} k^{1/3+\epsilon} (1 + |t|)^{1/3+\epsilon} = \{k^2(1 + |t|)^2\}^{1/6+\epsilon}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

またラプラシアン固有値が $1/4 - \nu^2$, レベル 1 の Maass カスプ形式 f が正規化された Hecke 固有形式のとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$L(1/2 + it, f) \ll_{\epsilon} |\nu|^{1/3+\epsilon} (1 + |t|)^{1/3+\epsilon} = \{|\nu|^2(1 + |t|)^2\}^{1/6+\epsilon}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

これらの評価も Weyl 評価である. Jutila, 本橋 [15] では上記の評価を uniform bound と呼んでおり, subconvexity という用語で検索しても引っかからないので要注意である. 証明には近似関数等式と保型形式の理論 (Petersson 跡公式, Kuznetsov 跡公式) を用いる.

一般的な設定での GL_2 に対する L 関数の subconvexity は Michel, Venkatesh [25] によって与えられた. F を代数体, $\mathbb{A}_F$ を F のアデール環とする. π を $GL_2(\mathbb{A}_F)$ の

既約ユニタリーカスピダル保型表現とすると、ある $\delta > 0$ が存在して

$$L(1/2, \pi) \ll_{F, \epsilon} Q(\pi)^{1/4-\delta}$$

が成り立つ^{*11}.

最近になって、sub-Weyl 評価の報告があった。

定理 5.4 (sub-Weyl 評価 (Holowinsky, Munshi, Sharma, Streipel [8])) f を重さ k , レベル 1 の楕円カスピ形式であって正規化された Hecke 固有形式とする. または f をレベル 1 の Maass カスピ形式であって正規化された Hecke 固有形式とする. このとき $\delta > 0$ が存在して、任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$L(1/2 + it, f) \ll_{f, \epsilon} t^{1/3-\delta+\epsilon}, \quad t \gg 1$$

となる. 実際には $\delta = 1/174$ とできる.

これは t アスペクトに関する subconvexity 評価である. 次数が 2 以上の L 関数で Weyl 評価を打ち破った subconvexity 評価はこれが初めてである. 証明には指数和の評価やデルタ法 (delta method, delta symbol method) を用いる.

5.3 高次の L 関数の subconvexity

次数が 3 以上の L 関数については GL_3 , $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$, $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$, $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ などの保型形式に付随する保型 L 関数に対してはいくつか結果があるが、次数が一般の L 関数の subconvexity は、文献があまりない.

以下の結果は Heath-Brown [7] によるものである.

定理 5.5 (Heath-Brown [7]) $L(s, \mathcal{A})$ を Heath-Brown [7] の意味での L 関数とする (ここでの L 関数は Selberg クラスの L 関数と同様であるが省略する). $L(s, \mathcal{A})$ の Euler 積表示が $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束するとする.

$$\log L(s, \mathcal{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

^{*11} 筆者は [25] の証明について懐疑的である. 2 章の Sobolev ノルムの性質に証明がついておらず, 3 章に説明が不十分な箇所が多々ある. そして 3 章には間違いもある. 無視している定数が F, ϵ, π の中心指標に依存する場合の同様の結果は後に Wu が与えたが, 彼のいくつかの論文で [25] の一部の命題や補題の証明が修正されていたり詳しく書かれていたりする.

で b_n を定める. この b_n は n が素数べきではないとき 0 になる. このとき

$$L(1/2, \mathcal{A}) \ll Q(\mathcal{A})^{1/4} \exp \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^{3/2}} \right)$$

が成り立つ. 無視している定数は $d, \text{ord}_{s=1} L(s, \mathcal{A}), \{\text{Re}(\mu_{\mathcal{A},j})\}_{j=1}^d$ には依存するが, $Q(\mathcal{A}), \{\text{Im}(\mu_{\mathcal{A},j})\}_{j=1}^d$ には依存しない. 特に「 $Q(\mathcal{A})$ と $\mu_{\mathcal{A},j}$ に依存しない $C > 0$ が存在して, 任意の整数 $n \geq 1$ で $|b_n| \leq Cn^{1/3}$ 」ならば, $L(1/2, \mathcal{A}) \ll Q(\mathcal{A})^{1/4}$ が成り立つ.

無視している定数は $\{\text{Re}(\mu_{\mathcal{A},j})\}_{j=1}^d$ に依存しているが, 凸評価の指数 $1/4 + \epsilon$ が $1/4$ に改良されたといえる^{*12}.

GL_n に対する保型 L 関数の weak subconvexity 評価 (弱い subconvexity 評価) の結果も紹介しておく. Soundararajan, Thorner [34] により, 凸評価よりは強いが subconvexity 評価よりは弱い以下の評価が与えられた.

定理 5.6 (weak subconvexity 評価) π を $\text{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約ユニタリーカスピダル保型表現とする. このとき,

$$L(s, \pi) \ll_n \frac{Q(\pi)^{1/4}}{(\log Q(\pi))^{1/(10^{17}n^3)}}.$$

次に π_1 を $\text{GL}_{n_1}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約ユニタリーカスピダル保型表現, π_2 を $\text{GL}_{n_2}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約ユニタリーカスピダル保型表現とする. このとき,

$$L(s, \pi_1 \times \pi_2) \ll_{n_1, n_2} |L(3/2, \pi_1 \times \pi_2)|^2 \frac{Q(\pi)^{1/4}}{(\log Q(\pi_1 \times \pi_2))^{1/(10^{17}n_1^3n_2^3)}}.$$

手法は解析数論的である. 2 番目の主張に出てくる L 関数の特殊値は $L(3/2, \pi_1 \times \pi_2) \ll_{n_1, n_2} 1$ であってほしいが, 現状このように評価することはできない. このように評価できるケースはいくつか知られている ([34, pp.1244–1245]):

- (1) π_1, π_2 の少なくともどちらかが一般 Ramanujan-Petersson 予想を満たすとき.
- (2) $n_1 = n_2 = 2$ のとき.

^{*12} [7] では $Q(\mathcal{A})$ の定義に $\text{Re}(\mu_{\mathcal{A},j})$ の情報が含まれていないことに注意せよ.

- (3) $n_1 = 3, n_2 = 2$ であって $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約カスピダル保型表現 τ_1 が存在して $\pi_1 = \mathrm{Sym}^2(\tau_1)$ のとき (実は π_1 がカスピダルでなくてもよい).
- (4) $n_1 = n_2 = 3$ であって $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約カスピダル保型表現 τ_1, τ_2 が存在して $\pi_1 = \mathrm{Sym}^2(\tau_1), \pi_2 = \mathrm{Sym}^2(\tau_2)$ のとき.
- (5) $n_1 = 4, n_2 = 2$ であって, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約カスピダル保型表現 τ_1 が存在して $\pi_1 = \mathrm{Sym}^3(\tau_1)$ のとき.

また, π_1, π_2 を固定して $t \in \mathbb{R}$ を動かしたとき $L(3/2 + it, \pi_1 \times \pi_2) \ll_{\pi_1, \pi_2} 1$ となるので, 定理 5.6 の証明と同様の議論で

$$L(1/2 + it, \pi_1 \times \pi_2) \ll_{\pi_1, \pi_2} \frac{(2 + |t|)^{n_1 n_2 / 4}}{\log(3 + |t|)^{1/(10^{17} n_1^3 n_2^3)}}$$

を証明することもできる ([34, Example 5]).

次に, 上記の結果よりも指数を小さくできるような高次の L 関数の subconvexity 評価を紹介する. 筆者の知る限りでは, 一般の次数の L 関数の subconvexity を最初に与えたのは Marshall [20] である. 彼はユニタリー群 $U_{n+1} \times U_n$ に対する L 関数の subconvexity 評価をレベルアスペクトで与えた.

定理 5.7 ($U_{n+1} \times U_n$ に対する subconvexity) F を代数体, E/F を CM 拡大とし, V を $n+1$ 次元の E 上の非退化 Hermite 空間とし, V はすべての F の無限素点で正定値とする. V_H を V の n 次元部分空間とする (このとき V_H も非退化になる). $G = U(V)$, $H = U(V_H)$ を F の無限素点でコンパクトなユニタリー群とする. F の有限素点 $\mathfrak{p}$ で E の中で分解するものを 1 つ固定し, $\mathfrak{p}$ に対応する剰余体の位数を q とする. π と π_H をそれぞれ $G(\mathbb{A}_F)$, $H(\mathbb{A}_F)$ の既約カスピダル保型表現とし, いくつかの条件を満たしながらコンダクター N_π と N_{π_H} の q べき因子の指数が無限に大きくなるように動かす (実際は $\mathcal{F}_{\mathrm{SC}}$ という集合の中で動かす). π の $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{A}_E)$ へのベースチェンジリフトを Π とし, π_H の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$ へのベースチェンジリフトを π_H とする. このとき

$$L(1/2, \Pi \times \Pi_H^\vee) \ll Q(\Pi \times \Pi_H^\vee)^{1/4-\delta}$$

が成り立つ. ここで $\delta > 0$ は $\delta < \frac{1}{4n(n+1)(2n^2+3n+3)}$ を満たす任意の実数である. 無視している定数は N_Π, N_{π_H} の q のべき指数には依らない.

レベルアスペクトの中でも素数べきのべき指数を無限大に飛ばすときの subcon-

vexity は深さアスペクトと呼ばれる．Marshall の subconvexity 評価は深さアスペクトに関するものである．証明は $U_{n+1} \times U_n$ に対する相対跡公式，増幅子 (amplifier)，保型形式の周期積分に関するユニタリー型の Ichino-Ikeda 公式を使う．

この結果は当時 Marshall の講演によって聞けるのみで，論文 [20] は未完成のままだった^{*13}．その後 Nelson がスペクトルアスペクトで $U_{n+1} \times U_n$ の研究を推し進め，Marshall の論文より先に [27] が arxiv に公開された (後続する研究としては Hu, Nelson [10] も参照されたし)．その後 Nelson [28] は一般的な設定で， GL_n に対する保型 L 関数の subconvexity 評価を以下のような形で与えることに成功した．

定理 5.8 (GL_n に対する subconvexity) $n \geq 2$ を整数とし，

$$\delta_n^\# := \frac{2}{3n^5 - 2n^4 - n^2} > \frac{2}{3n^5}$$

とおく．任意の $GL_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約ユニタリーカスピダル保型表現 π と $0 < \delta < \delta_n^\#$ を満たす任意の実数 δ に対して

$$L(1/2 + it, \pi) \ll_{\pi} (3 + |t|)^{(1-\delta)n/4}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

凸評価から $L(1/2 + it, \pi) \ll_{n, \epsilon} Q(\pi)^{1/4+\epsilon} (3 + |t|)^{n/4+\epsilon}$ が得られる．Nelson の評価で無視している定数は保型表現 π に依存するので，定理 5.8 は t アスペクトに関する subconvexity 評価である．証明には， $GL_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の保型表現に関するスペクトル理論と，軌道法 (orbit method, Lie 群の表現をべき零軌道で分類する理論) を応用する Nelson, Venkatesh による手法を使う．Nelson の t アスペクトの subconvexity 評価は Yang [44] によって改善されている．2025 年のある日，Hu, Nelson がある種のレベルアスペクトの subconvexity も発表した [11]．

6 L 関数の subconvexity の応用例

たとえ一般 Lindelöf 予想が証明できなくても， L 関数の subconvexity 評価が証明できれば他の問題に応用することができる．ここではキーワードの紹介に留める．

- (1) Riemann ゼータ関数の零点密度の評価と短区間素数定理 (cf. 井上 [12, 定理 2.6, 定理 2.4]). Riemann ゼータ関数の subconvexity 評価が応用される．

^{*13} 筆者は，2019 年 3 月にパリで開かれた研究集会のノートを齋藤正顕さん (工学院大学) にたまたま見せてもらった．その時 Marshall の結果を知った．

- (2) 2次元球面上の有理点の一様分布性 (Michel [23, pp.96–97]). テータ関数の Fourier 係数の評価に帰着され, それは Waldspurger の公式により GL_2 の ベースチェンジ L 関数の subconvexity 問題に帰着される.
- (3) Heegner 点の一様分布性 (Michel [22] など). 虚 2 次体に対応する GL_2 の 楕円トーラス上の周期積分が Heegner 点上の有限和になることと Zhang の公式により, Rankin-Selberg L 関数の subconvexity 問題に帰着される.
- (4) 量子一意エルゴード性 (Quantum Unique Ergodicity, 略して QUE). モジュラー曲線に対する正則保型形式版の QUE を証明するには対称 2 次 L 関数の weak subconvexity があればよい (Holowinsky, Soundararajan [9] など).
また, GL_2 の保型形式の三重線形周期 (trilinear period) も QUE に関連しており, 一方で Watson-Ichino の公式により三重線形周期は三重積 L 関数の中心値と関係があるため, subconvexity が応用される (Bisain, Humphries, Mandelshtam, Walsh, Wang [1], Nelson [29]).
- (5) GL_2 の相対跡公式を用いて非正則な保型表現の佐武パラメーターの重み付き一様分布定理を得る際に, 連続スペクトルを誤差項に組み込む必要がある. ここで GL_1 の subconvexity 評価が応用される (都築 [41], 筆者 [35]).

7 謝辞

講演および報告集の執筆の機会を与えてくださった世話人の鈴木正俊氏 (東京科学大学), 中村隆氏 (東京理科大学), 青木宏樹氏 (東京理科大学) に感謝いたします.

執筆にあたり, 都築正男氏 (上智大学) と保型 L 関数の値の評価について議論をしました. また, 2023 年に中国のハルビンで開催された Pan Asian Number Theory Conference に参加した際, Han Wu 氏 (University of Science and Technology of China) と議論をしました. その際に頂いた Wu 氏の講演用スライドも今回参考にしました. 鈴木雄太氏 (立教大学) から [32] を教えていただき, Phragmén-Lindelöf の原理について議論をしました. 松本耕二氏 (愛知工業大学) から [39] を, 鈴木正俊氏 (東京科学大学) から [33] をそれぞれ教えていただき, 鈴木正俊氏から有益なコメントを頂きました. 峰正博氏 (早稲田大学) から反例 (注意 4.20 (3)) を教えていただき, [29] の出版について情報を頂きました. 小林弘京氏 (水産大学校) と L 関数の零点について議論をしました. 彼らにも感謝いたします.

筆者は科研費 JP24K06664 (基盤研究 (C)) の助成を受けています。

参考文献

- [1] A. Bisain, P. Humphries, A. Mandelshtam, N. Walsh, X. Wang, *Subconvexity implies effective unique ergodicity for Hecke-Maaß cusp forms on $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash SL_2(\mathbb{R})$* , *Essent. Number Theory* **3** (2024), No. 1, 101–144.
- [2] E. Bombieri, H. Iwaniec, *On the order of $\zeta(\frac{1}{2} + it)$* , *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **13** (1986), no. 3, 449–472.
- [3] J. Bourgain, *Decoupling, exponential sums and the Riemann zeta function*, *J. Amer. Math. Soc.* **30** (2017), 205–224.
- [4] D. A. Burgess, *On character sums and L -series. II*, *Proc. London Math. Soc.* (3) **13** (1963), 524–536.
- [5] B. Conrey, H. Iwaniec, *The cubic moment of central values of automorphic L -functions*, *Ann. of Math. (2)* **151** (2000), no. 3, 1175–1216.
- [6] A. Fiori, *A note on the Phragmén-Lindelöf theorem*, preprint, arXiv:2502.13282 [math.NT].
- [7] D. R. Heath-Brown, *Convexity bounds for L -functions*, *Acta Arith.* **136** (2009), no. 4, 391–395.
- [8] R. Holowinsky, R. Munshi, P. Sharma, J. Streipel, *Sub-Weyl bound for $GL(2)$ via trivial delta*, preprint, arXiv:2503.00656 [math.NT].
- [9] R. Holowinsky, K. Soundararajan, *Mass equidistribution for Hecke eigenforms*, *Ann. of Math. (2)* **172** (2010), no. 2, 1517–1528.
- [10] Y. Hu, P. D. Nelson, *Subconvexity bounds for $U_{n+1} \times U_n$ in horizontal aspects*, preprint, arXiv:2309.06314 [math.NT].
- [11] Y. Hu, P. D. Nelson, *The subconvexity bound for standard L -functions in level aspect*, preprint. arXiv:2503.12310 [math.NT].
- [12] 井上翔太, 「零点密度について」, 第 32 回整数論サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」報告集.
- [13] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic number theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [14] H. Iwaniec, P. Sarnak, *Perspectives on the analytic theory of L -functions*,

- GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999), Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part II, 705–741.
- [15] M. Jutila, Y. Motohashi, *Uniform bound for Hecke L -functions*, Acta Math. **195** (2005), 61–115.
 - [16] D. Kim, *Infinitely many zeros of additively twisted L -functions on the critical line*, J. Number Theory **253** (2023), 157–187.
 - [17] E. Landau, *Über die ζ -Funktion und die L -Funktionen*, Math. Z. **20**, 105–125, (1924).
 - [18] X. Li, *Upper bounds on L -functions at the edge of the critical strip*, Int. Mat. Res. Not. **2010**, Issue 4, (2010), 727–755.
 - [19] J. E. Littlewood, *On the zeros of the Riemann zeta-function*, Proc. Camb. Philos. Soc. 22 (1924), 295–318.
 - [20] S. Marshall, *Subconvexity for L -functions on $U(n) \times U(n+1)$ in the depth aspect*, preprint, arXiv:2309.16667 [math.NT].
 - [21] 松本耕二, リーマンのゼータ関数, 朝倉書店, 2005.
 - [22] P. Michel, *The subconvexity problem for Rankin-Selberg L -functions and equidistribution of Heegner points*, Ann. of Math. (2) **160** (2004), no. 1, 185–236.
 - [23] P. Michel, *Analytic number theory and families of automorphic L -functions*, Automorphic forms and applications, 181–295. IAS/Park City Math. Ser., 12, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
 - [24] P. Michel, *Recent progresses on the subconvexity problem*, Astérisque No. 438 (2022), Exp. No. 1190, 353–401.
 - [25] P. Michel, A. Venkatesh, *The subconvexity problem for GL_2* , Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **111** (2010), 171–271.
 - [26] G. Molteni, *Upper and lower bounds at $s = 1$ for certain Dirichlet series with Euler product*, Duke Math. J. **111** (2002), no. 1, 133–158.
 - [27] P. D. Nelson, *Spectral aspect subconvex bounds for $U_{n+1} \times U_n$* , Invent. Math. **232** (2023), no. 3, 1273–1438.
 - [28] P. D. Nelson, *Bounds for standard L -functions*, preprint, arXiv:2109.15230 [math.NT].
 - [29] P. D. Nelson, *Soft bounds for local triple products and the subconvexity-QUE*

- implication for GL_2* , *Mathematika* **71** (2025), no. 4, Paper No. e70053.
- [30] I. Petrow, M. P. Young, *The fourth moment of Dirichlet L -functions along a coset and the Weyl bound*, *Duke Math. J.* **172** (2023), no. 10, 1879–1960.
 - [31] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957.
 - [32] H. Rademacher, *On the Phragmén-Lindelöf theorem and some applications*, *Math. Z.* **72** (1959), 192–204.
 - [33] H. Rademacher, *Topics in analytic number theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 169 Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
 - [34] K. Soundararajan, J. Thorner, *Weak subconvexity without a Ramanujan hypothesis*, *Duke Math. J.* **168** (2019), no. 7, 1231–1268.
 - [35] S. Sugiyama, *Asymptotic behaviors of means of central values of automorphic L -functions for $GL(2)$* , *J. Number Theory* **156** (2015), 195–246.
 - [36] 杉山真吾, 「リーマンゼータ関数のワイル評価」, 第 32 回整数論サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」報告集.
 - [37] S. Sugiyama, M. Tsuzuki, *Relative trace formulas and subconvexity estimates of L -functions for Hilbert modular forms*, *Acta Arith.* **176** (2016), 1–63.
 - [38] 武田渉, 「ゼータ関数の非零領域」, 第 32 回整数論サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」報告集.
 - [39] 竜沢周雄, 関数論, 共立出版, 1980.
 - [40] 辻正次, 複素関数論, 槇書店, 1968.
 - [41] M. Tsuzuki, *Spectral means of central values of automorphic L -functions for $GL(2)$* , *Mem. Amer. Math. Soc.* **235** (1110) (2014).
 - [42] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, 2nd ed., Oxford University Press, Oxford, 1976.
 - [43] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, 2nd ed., Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.
 - [44] L. Yang, *Relative trace formula, subconvexity and quantitative nonvanishing of Rankin-Selberg L -functions for $GL(n+1) \times GL(n)$* , preprint, arXiv:2309.07534 [math.NT].

リーマンゼータ関数のワイル評価

杉山 真吾（金沢大学 理工研究域数物科学系）

概要

本記事は、第 32 回整数論サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」における 2025 年 9 月 11 日（木）の筆者の講演内容がもとになっている。本記事では、Riemann ゼータ関数の subconvexity に関する prototype である Weyl bound の証明法を解説する。部分和法や指数和に慣れる良い機会になることを期待する。この記事によって若い学生が L 関数の解析的理論に参入してくれれば幸いである。（もちろん若くはない研究者の新規参入も大いに期待している。）

1 The Weyl bound

1.1 主定理の紹介

完備化されていない Riemann ゼータ関数を $\zeta(s)$ で表す。 $\zeta(s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数であり、 $\operatorname{Re}(s) > 1$ の範囲では

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

という級数表示を持つのであった。さて、本記事では以下の定理を証明する。

定理 1.1 (The Weyl bound (Weyl 評価)) 任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$\zeta(1/2 + it) \ll_{\epsilon} (1 + |t|)^{1/6 + \epsilon}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

この評価を考察する動機や背景などは同じサマースクール報告集の拙著 [18] に譲るとして、この記事ではこの定理を証明してみよう。

$\zeta(s)$ の絶対収束域は $\operatorname{Re}(s) > 1$ の範囲より左側には延びず、 $\operatorname{Re}(s_0) \leq 1$ なる $s_0 \in \mathbb{C}$ に対しては

$$\zeta(s_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s_0}}$$

とはできないのであった。そこが、臨界線 $\{1/2 + it \mid t \in \mathbb{R}\}$ 上の $\zeta(s)$ の値の評価を与えようとしても一筋縄ではいかない理由の 1 つである。

現在では Weyl bound の証明法はいろいろ知られており、いくつかの専門書でも解説されている。初めて皆が証明を読める形にしたのは Landau で、およそ 100 年前に出た Landau の論文 [10] は、Riemann ゼータ関数の subconvexity に関する歴史上初の証明付き文献である。当時は黎明期であったため記述が洗練されてはいないが、最も古い文献を読んで歴史を知るとともに、現代の手法のブラッシュアップを目論むことも有益であると考え。証明の随所に部分和法・部分積分法が使われており、解析数論的技法の良い練習にもなる。というわけで、Landau の論文 [10] でどのように証明されたのか解説していこう。

Landau [10] は実際には Hurwitz ゼータ関数

$$\zeta(s, w) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+w)^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1, \quad 0 < w \leq 1$$

に対して評価を与えている。ここで、 w を固定するとき Hurwitz ゼータ関数は s の関数として $\mathbb{C}$ 上の有理型関数として解析接続され、 $\operatorname{Re}(s) > 0$ の範囲では $s \neq 1$ で正則で、 $s = 1$ で単純極を持つのであった。

Landau は以下の評価を証明し、その系として Riemann ゼータ関数の Weyl bound を与えた。

定理 1.2 (Landau [10]) $0 < w \leq 1$ なる実数 w を固定する。任意の $\epsilon > 0$ に対して、Hurwitz ゼータ関数に関する以下の評価が成り立つ：

$$\zeta(1/2 + it, w) \ll_{\epsilon} (1 + |t|)^{1/6+\epsilon}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ここで、無視している定数は w には依存しない。

本記事では Hurwitz ゼータ関数に対するこの定理の証明を解説し、その系として Weyl bound を与える。

1.2 記号

非負整数全体の集合を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で表し、正の整数全体の集合を $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ で表す。2 乗して -1 になる複素数の 1 つを i と書くことにする。 $x \in \mathbb{R}$ に対して、 x の整数部分、す

なわち $x - m \in [0, 1)$ となるただ 1 つの整数 $m \in \mathbb{Z}$ を $[x]$ で表す (Gauss 記号). 本記事では, $t > 0$, $a \in \mathbb{R}$ に対して $\log^a t := (\log t)^a$ と書くことにする.

便利なので, Landau の記号 $\mathcal{O}$ だけでなく, 代わりに Vinogradov の記法 $\ll$ も使用する. すなわち, 集合 X 上の 2 つの関数 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ に対して,

$$\exists C > 0, \forall x \in X, |f(x)| \leq C|g(x)|$$

のことを

$$f(x) \ll g(x), \quad x \in X$$

と書く. これは Landau の記号を用いると

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)), \quad x \in X$$

と表される. “ $x \in X$ ” の部分は括弧をつけて “ $(x \in X)$ ” と書くこともある. 文脈から関数の定義域が明らかなきは “ $x \in X$ ” の部分は省略される. $f \ll g$ のように書かれることもある. また, $f(x) \ll g(x), (x \in X)$ かつ $g(x) \ll f(x), (x \in X)$ のときは

$$f(x) \asymp g(x), \quad x \in X$$

と書く. 無視している定数がパラメーター $a, b, c, \dots$ に依存していることを明示するときは, $\ll_{a,b,c,\dots}$ のように表す. 例えば, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\log x \ll_{\epsilon} x^{\epsilon}, \quad x > 1$$

が成立する, というように用いる. 記号 $\asymp$ にも添え字をつけて同様の使い方をする. 例えば, 任意の $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して

$$x^m \asymp_m (x+1)^m, \quad x > 1$$

が成立する, と書いたりもする.

Landau の記号や Vinogradov の記法において, 無視している定数がいかなるパラメーターにも依らないときはその定数を絶対定数 (absolute constant) と呼ぶ.

2 Weyl bound の証明

2.1 Landau がしたこと

Hardy, Littlewood が初めて証明した評価なので Weyl-Hardy-Littlewood bound や Hardy-Littlewood bound などと呼ばれることもあるが, Littlewood のアナウンス

記事 [11] しかなく、証明は未発表のままである*¹。歴史上人類が初めて証明を読むことが可能になった論文は Landau の “Über die ζ -Funktion und die L -Funktionen” である ([10])。この論文のイントロダクションを読むと、「Hardy と Littlewood のノートを見せていただいたので感謝する」「彼らの手法を簡明にして近似関数等式を使わない証明にした」とかが書いてある。

論文に載っている Landau の結果は Weyl bound よりもいくぶん一般的に記述されている。Landau の論文で与えられた評価は以下の通りである。

定理 2.1 (Landau [10]) 整数 $q \geq 2$ を固定し、 $Q = 2^{q-1}$ とおくとき、次が成り立つ:

$$\zeta\left(1 - \frac{1}{Q} + it\right) \ll_q t^{\frac{1}{(q+1)Q}} \log^{1+\frac{1}{Q}} t, \quad t \geq 3.$$

この Landau の評価で $q = 2$ とすれば $Q = 2$ であり、

$$\frac{1}{(q+1)Q} = \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}, \quad 1 + \frac{1}{Q} = \frac{3}{2}$$

なので $\zeta(1/2 + it) \ll (1 + |t|)^{1/6} \log^{3/2} t$, ($t \geq 3$) を得る。 $0 \leq t \leq 3$ 上では $\zeta(1/2 + it)$ は有界であること、そして $|\zeta(\sigma + it)| = |\zeta(\sigma - it)|$ により、 $t \geq 0$ において成り立つ評価は $t \in \mathbb{R}$ でも成り立つことに注意すれば、 $\log^{3/2} t \ll_\epsilon t^\epsilon$, ($t > 1$) を用いることで

$$\zeta(1/2 + it) \ll_\epsilon (1 + |t|)^{1/6+\epsilon}, \quad t \in \mathbb{R}$$

の形の評価 (つまり定理 1.1 の Weyl bound) が得られる。

Weyl bound と言っておきながら Weyl は subconvexity に関しては何もやっていない。これには理由があって、Hardy, Littlewood や Landau が Weyl differencing (または Weyl differencing method や Weyl’s estimate of exponential sums) と呼ばれる手法を用いていることから、Weyl bound と呼ばれるのである。日本語だと Weyl differencing は Weyl 差分法というべきだろうか。Weyl differencing は実多項式に付随する指数和の評価法であり、Weyl が $[0, 1]$ 内の数列の一様分布 ([23]) や $\zeta(1 + it)$ の評価 ([24]) で用いた技法である。Blomer, Jana, Nelson による GL_2 の三重積 L 関数に対する Weyl bound の論文 [2] の Introduction に Weyl bound の歴史がいろいろ書いてあり、これも参考になる。

*¹ 2025 年 9 月 11 日時点で Wikipedia の Lindelöf hypothesis の記事内で Hardy, Littlewood の論文が 2 件引用されている。しかしその 2 件の論文では Weyl bound は与えられていない。

Landau は Riemann ゼータ関数だけでなく, k を法とする Dirichlet 指標 χ に付随する Dirichlet L 関数

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

の場合の評価も与えている. この L 関数は χ が自明指標のときは実質 Riemann ゼータ関数になり, χ が非自明な指標のときは $\mathbb{C}$ 上の整関数として解析接続され, s と $1-s$ に関する関数等式を持つのであった. Landau の評価は以下の通りである.

定理 2.2 (Landau [10]) 整数 $q \geq 2$ を固定し, $Q = 2^{q-1}$ とおく. $k \geq 1$ を整数とし, χ を k を法とする Dirichlet 指標とする. このとき,

$$L\left(1 - \frac{1}{Q} + it, \chi\right) \ll_{q,k} t^{\frac{1}{(q+1)Q}} \log^{1+\frac{1}{Q}} t, \quad t \geq 3$$

が成り立つ.

Riemann ゼータ関数や Dirichlet L 関数に関する上記の評価を得るために Landau は何をしたかという, Hurwitz ゼータ関数

$$\zeta(s, w) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+w)^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1, \quad 0 < w \leq 1$$

に対する同様の評価を与えた. w を固定するとき, このゼータ関数は s の関数として $\operatorname{Re}(s) > 1$ の範囲で正則だが, $\mathbb{C}$ 上の有理型関数として解析接続されて $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ の範囲でも正則になるのであった. [10] において定理 2.1 と定理 2.2 を証明するために Landau が与えたのは以下の評価である.

定理 2.3 (Landau [10]) w を $0 < w \leq 1$ なる実数とする. 整数 $q \geq 2$ を固定し, $Q = 2^{q-1}$ とおく. Hurwitz ゼータ関数に関する以下の評価が成り立つ:

$$\zeta\left(1 - \frac{1}{Q} + it, w\right) \ll_q t^{\frac{1}{(q+1)Q}} \log^{1+\frac{1}{Q}} t, \quad t \geq 3.$$

ここで, 無視している定数は w に依らない.

$\zeta(s, w)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続できて, $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ 上の値, 特に $1 - \frac{1}{Q} + it$ での値も意味を持つのであった. この定理で $w = 1$ とすれば定理 2.1 (特

に定理 1.1 の Weyl bound) が得られる. また Dirichlet L 関数は Hurwitz ゼータ関数を用いて

$$L(s, \chi) = \frac{1}{k^s} \sum_{a=1}^{k-1} \chi(a) \zeta\left(s, \frac{a}{k}\right)$$

と分解できるため,

$$\left| L\left(1 - \frac{1}{Q} + it, \chi\right) \right| \leq k^{-1+\frac{1}{Q}} \sum_{a=1}^{k-1} \left| \zeta\left(s, \frac{a}{k}\right) \right| \ll_q k^{\frac{1}{Q}} \times t^{\frac{1}{(q+1)Q}} \log^{1+\frac{1}{Q}} t, \quad t \geq 3$$

が得られる. ここで無視している定数は q には依存するが χ と k には依らない. ゆえに定理 2.2 が示される. 特に, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$L(1/2 + it, \chi) \ll_{\epsilon} k^{1/2} t^{1/6+\epsilon} \asymp_k t^{1/6+\epsilon}, \quad t \geq 3$$

が得られる.

注意 2.4 Dirichlet L 関数の凸評価 (convexity bound) は

$$L(1/2 + it, \chi) \ll_{\epsilon} (1 + |t|)^{1/4+\epsilon} k^{1/4+\epsilon}$$

なので, Landau の評価は k に関しては悪くなっている.

注意 2.5 上記の考察により, Weyl bound で無視している定数の k に依存する部分は $k^{\frac{1}{Q}} (\leq k^{1/2})$ である. この後の証明をよく読めば分かることだが, 無視している定数の q に依存する部分は 「 $\log^{q+1} t \leq C_q t^{\delta_q}$ 」 を満たす定数 $C_q > 0$ のみが関係している (cf. 補題 4.1 の証明. なお $\delta_q > 0$ の明示式は補題 6.9 の証明を見れば分かる). 実際, 今回紹介した Riemann ゼータ関数と Hurwitz ゼータ関数の評価において無視している定数は, 絶対定数 $A, B > 0$ を用いて $AC_q + B$ と書ける. この A, B は計算可能 (effective) であることも分かる. また, 定理 2.2 で Dirichlet L 関数の評価において無視している定数は $(AC_q + B)k^{\frac{1}{Q}}$ と書ける.

Landau の論文 [10] では σ が 1 に近いとき (正確には $63/64 < \sigma < 1$ のとき) の $\zeta(\sigma + it)$ の大きさも評価している. そしてこの評価の zero-free region への応用および素数定理の誤差項評価への応用が論じられている. 本稿の目的は Weyl bound の証明を理解することなので今回はこれらの話題は扱わない. ただ, 素数定理の証明法を勉強した者であれば, zero-free region への応用および素数定理の誤差項評価への応用は自分で論文を読めば容易に理解できるはずである.

2.2 証明のアイデア

ここから先の我々の目標は定理 2.3 を示すことである．厳密ではないがだいたいアイデアは次の通りである．以下，Hurwitz ゼータ関数ではなく Riemann ゼータ関数の場合に heuristic argument (発見的議論) をする．

本当は級数表示に $\operatorname{Re}(s) \leq 1$ なる s を代入してはいけないが，

$$\zeta(1/2 + it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2+it}}$$

と書いてみる．右辺は発散するから右辺を勝手に $\sum_{n=1}^M \frac{1}{n^{1/2+it}}$ (M は十分大) に置き換える．とりあえず $M = 2^m - 1$ だと思おうと，和を 2 べきごとに分割することで右辺を

$$\sum_{n=1}^M \frac{1}{n^{1/2+it}} = \sum_{j=1}^m \sum_{n=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{n^{1/2+it}}$$

と分割できる^{*2}．したがって，後は $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対する

$$\sum_{n=N}^{2N-1} \frac{1}{n^{1/2+it}} = \sum_{n=N}^{2N-1} \frac{1}{n^{1/2}} e^{-it \log n}$$

が N と t の式で評価できればよい．実は，後述する補題 3.1 を使うと右辺は

$$\sum_{n=N}^{2N-1} \frac{1}{n^{1/2}} e^{-it \log n} \ll N^{-1/2} \max_{c \in \{N, \dots, 2N-1\}} \left| \sum_{n=N}^c e^{-it \log n} \right|$$

と評価できるので， $\sum_{n=N}^c e^{-it \log n}$ の形の和を評価できればよい．だがここで安易に三角不等式を使うと

$$\left| \sum_{n=N}^c e^{-it \log n} \right| \leq \sum_{n=N}^c |e^{-it \log n}| = c - N + 1$$

となり， t の情報が失われてしまう．そしてこの評価では所望の評価は得られない． $\{e^{-it \log n}\}_{N \leq n \leq c}$ は単位円周上にイイ感じに散っているため，これらの複素数を足

^{*2} Hurwitz ゼータ関数のときは $n+w$ の n を 2^{j-1} から $2^j - 1$ まで動かすので，ここの説明とは 1 ズレる．しかし結果に影響を及ぼさない．

すと打ち消し合いが起こるはずである．したがって $\sum_{n=N}^c e^{-it \log n}$ を三角不等式を使わずに繊細に評価する必要がある．

一般に関数 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ があるとき, $a < b$ を満たす $a, b \in \mathbb{Z}$ に対する

$$\sum_{n=a}^b g(n) e^{if(n)}$$

の形の和を指数和 (exponential sum) という． f が実数係数の多項式で $g(n) \equiv 1$ の場合の和は Weyl 和とも呼ばれる (cf. [14, p.37]). 上の考察で生じた和 $\sum_{n=N}^c e^{-it \log n}$ はまさに指数和である．この指数和をうまく評価することで所望の結果を得るのである．

指数和をうまく評価するとはどういうことであろうか．簡単な例として以下の指数和を考える:

$$\sum_{n=1}^N e^{2\pi i n \theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

三角不等式で評価すると

$$\left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i n \theta} \right| \leq \sum_{n=1}^N |e^{2\pi i n \theta}| = \sum_{n=1}^N 1 = N$$

であり, $|\sum_{n=1}^N e^{2\pi i n \theta}| \leq N$ という評価は容易かつ自然に得られる．必要に迫られなければ, この不等式を改良したいと強く願う人はいないだろう．しかし各項に絶対値を付けて実数の和にしたがために, 単位円周上の和の打ち消し合いを無に帰しており, ゆえにこの不等式は荒過ぎるのである．まったくもってデリカシーがない評価である．

それでは, 安易に三角不等式を使わずに計算できるところまで計算してみよう． θ が整数のときはそもそも和が N であるので考えない事にする． θ が整数でない実数のときは $e^{2\pi i \theta} \neq 1$ なので, 等比級数の計算をすれば

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i n \theta} \right| &= \left| \frac{e^{2\pi i \theta} (1 - e^{2\pi i N \theta})}{1 - e^{2\pi i \theta}} \right| = \frac{|1 - e^{2\pi i N \theta}|}{|1 - e^{2\pi i \theta}|} \\ &\leq \frac{|1| + |e^{2\pi i N \theta}|}{|1 - e^{2\pi i \theta}|} = \frac{2}{|1 - e^{2\pi i \theta}|} = \frac{1}{|\sin \pi \theta|} \end{aligned} \quad (2.1)$$

となる． N に関する 1 次式による評価が, N に関して有界な評価に改良できた (ただし上界が θ に依存している)． $|1 - e^{2\pi i N \theta}| \leq |1| + |e^{2\pi i N \theta}| = 2$ の評価では三角不

等式を使っているが、和を整理する前に使うよりはマシである．このような感じで指数和の評価を頑張ることで、Landau は Hurwitz ゼータ関数に対する評価を得たのである．

少し脱線するが、指数和がなぜ大事かというと、例えば一様分布への応用が知られている． $\alpha \in \mathbb{R}$ を無理数とする． $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して $n\alpha$ の“小数部分”を $a_n \in [0, 1)$ とおく．すなわち $a_n := n\alpha - [n\alpha]$ ． $\alpha > 0$ のとき a_n は文字通り $n\alpha$ の小数部分である．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が区間 $[0, 1]$ の中でどのように分布しているかという問題が考えられるが、Weyl [23, Satz 2] によって、一様に分布していることが示された．

定理 2.6 任意の無理数 α に対して、上で与えた $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $[0, 1]$ の中で (Lebesgue 測度に関して) 一様分布である．式で表すと以下の通りである：

$$\forall f \in C([0, 1]), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n) = \int_0^1 f(x) dx.$$

証明 区間 $[0, 1]$ 上の連続関数のなす環 $C([0, 1])$ に sup norm で位相を入れると、この位相に関して Banach 空間になる． $C([0, 1])$ の中で稠密な空間の任意の元 f に対して主張を証明すればよい．Weierstrass の多項式近似定理の三角多項式版により、 $e^{2\pi i m x}$ ($m \in \mathbb{Z}$) の形の関数で生成される $C([0, 1])$ の部分空間は $C([0, 1])$ の中で稠密である (今の時代であれば Weierstrass の多項式近似定理の三角多項式版の代わりに Stone-Weierstrass の定理を用いてもよい)．よって任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対する $f(x) = e^{2\pi i m x}$ のときに示せばよい． $m = 0$ のときは両辺が 1 になるので、任意の $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ に対して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i m n \alpha} = 0$$

を示せばよい (一様分布性の上記の指数和の極限による特徴付けは Weyl's criterion と呼ばれる)． $m \neq 0$ のとき、 α が無理数であることに注意すれば $m\alpha \notin \mathbb{Z}$ である．ゆえに (2.1) が適用できて、

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i m n \alpha} \right| \leq \frac{1}{N |\sin(\pi m \alpha)|} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

となるから証明が完了する． □

この証明の最後の計算で、三角不等式を用いて各項に絶対値をつけてしまうと

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i m n \alpha} \right| \leq \frac{1}{N} \times N = 1$$

となってしまう、うまくいかないことに注意しよう.

注意 2.7 指数和の評価をうまくすれば、最高次の係数が無理数であるような定数でない実数係数多項式 f に対して $a_n = f(n) - [f(n)]$ とおくとき、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $[0, 1]$ の中で (Lebesgue 測度に関して) 一様分布であることも証明できる ([23, Satz 9]). この一様分布性を $f(x) = \alpha x$ に適用すれば先程示した定理 2.6 も得られる.

3 議論の正当化

3.1 Hurwitz ゼータ関数の分解

上の考察は heuristic argument (発見的議論) であり数学的に厳密でないところがあるので、正当化していこう.

まず $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定する. m は後でうまくとることにする. Hurwitz ゼータ関数を

$$\zeta(s, w) = \sum_{n=0}^m \frac{1}{(n+w)^s} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n+w)^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

と書くと右辺の第 1 項には $s = 1/2 + it$ を代入してよい. 第 2 項にも代入したいが、今の形では発散してしまうので工夫が必要である. 第 1 項は指数和の評価を頑張ればよいのだが今は保留にし、第 2 項の処理から考えてみる.

第 2 項の無限和を, Abel の変形法による常套手段によって $\operatorname{Re}(s) > 0$ の範囲で通用する形に変形する:

$$\begin{aligned} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n+w)^s} &= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{n - (n-1)}{(n+w)^s} \\ &= -\frac{m}{(m+w)^s} + \sum_{n=m}^{\infty} n \left(\frac{1}{(n+w)^s} - \frac{1}{(n+1+w)^s} \right) \\ &= -\frac{m}{(m+w)^s} + s \sum_{n=m}^{\infty} n \int_n^{n+1} \frac{du}{(u+w)^{s+1}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{m}{(m+w)^s} + s \int_m^\infty \frac{[u]du}{(u+w)^{s+1}}.$$

積分内の $[u]$ を有界な関数に置き換えたほうが評価しやすそうなので, そうなるようにもう少し変形する. 部分積分により

$$s \int_m^\infty \frac{u du}{(u+w)^{s+1}} = \frac{m}{(m+w)^s} + \int_m^\infty \frac{du}{(u+w)^s} = \frac{m}{(m+w)^s} + \frac{1}{s-1} \frac{1}{(m+w)^{s-1}}$$

となるので,

$$\sum_{n=m+1}^\infty \frac{1}{(n+w)^s} = \frac{1}{(s-1)(m+w)^{s-1}} - s \int_m^\infty \frac{u - [u]}{(u+w)^{s+1}} du \quad (3.1)$$

とできる. 広義積分内の分母が $s+1$ 乗なので, この式は $\operatorname{Re}(s) > 0$ で収束して意味を持つ. この表示に $s = 1/2 + it$ を代入すれば評価ができるというわけである. ちなみに上記の方法により, $\zeta(s, w)$ は $\operatorname{Re}(s) > 0$ の範囲に有理型関数として解析接続されることも分かる.

3.2 基本的な不等式

ここで, $\sum_{n=0}^m \frac{1}{(n+w)^s}$ の評価にも $\sum_{n=m+1}^\infty \frac{1}{(n+w)^s}$ の評価にも関わる不等式をいくつか準備しておこう.

補題 3.1 $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $a < b$ とする. $\{\epsilon_j\}_{j=a}^b$ は $0 \leq \epsilon_a \leq \epsilon_{a+1} \leq \dots \leq \epsilon_b$ を満たす実数列とする. $L > 0$ とし, $\{\xi_j\}_{j=a}^b$ は任意の $c = a, \dots, b$ に対して $|\sum_{r=c}^b \xi_r| \leq L$ を満たす複素数列とする. このとき $|\sum_{r=a}^b \epsilon_r \xi_r| \leq \epsilon_b L$ が成り立つ.

証明 Landau の論文 [10] では Wohlbekannt, つまり well-known の一言で証明が終わっている. 部分和法 (partial summation) を使えばすぐに示せるのだが, well-known と書かれると驚く人もいだろう. 部分和法を使った議論は高木の解析概論 [19, pp.165–166] に書いてあるのでこれを参考にする.

さて, $s_n := \sum_{r=n}^b \xi_r$, $S = \sum_{r=a}^b \epsilon_r \xi_r$ とおく. $n \in \{a, \dots, b-1\}$ に対して $\xi_n = s_n - s_{n+1}$ であるから部分和法により

$$\begin{aligned} S &= \epsilon_a(s_a - s_{a+1}) + \epsilon_{a+1}(s_{a+1} - s_{a+2}) + \dots + \epsilon_{b-1}(s_{b-1} - s_b) + \epsilon_b s_b \\ &= \epsilon_a s_a + (\epsilon_{a+1} - \epsilon_a) s_{a+1} + \dots + (\epsilon_b - \epsilon_{b-1}) s_b \end{aligned}$$

となる. 任意の $n = a, \dots, b$ で $|s_n| \leq L$ が成り立つので, 各 s_n の係数が 0 以上であることと合わせて,

$$\begin{aligned} |S| &\leq \epsilon_a |s_a| + (\epsilon_{a+1} - \epsilon_a) |s_{a+1}| + \dots + (\epsilon_b - \epsilon_{b-1}) |s_b| \\ &\leq \epsilon_a L + (\epsilon_{a+1} - \epsilon_a) L + \dots + (\epsilon_b - \epsilon_{b-1}) L = \epsilon_b L \end{aligned}$$

を得る (望遠鏡和が出てきて中間の項は打ち消し合う). $\square$

上の補題の複素数列 $\{\xi_j\}_{j=a}^b$ を実数列であるという条件に限定する代わりに, 不等式の条件が一般的になったものも示すことができる. そのような主張は以下の通りで, 高木の解析概論 [19, p.309] に見つかる. 補題 3.1 と補題 3.2 のどちらの不等式を使うかは状況を見て判断する.

補題 3.2 実数列 $\{a_j\}_{j=0}^{n-1}$ と実数列 $\{\epsilon_j\}_{j=0}^{n-1}$ で, $\epsilon_0 \geq \epsilon_1 \geq \dots \geq \epsilon_{n-1} \geq 0$ を満たすものがあるとする. $s_\nu = a_0 + \dots + a_\nu$, ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$) とおく. A, B を $A \leq B$ なる実数とする. このとき

$$\forall \nu \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad A \leq s_\nu \leq B$$

ならば

$$A\epsilon_0 \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \epsilon_\nu \leq B\epsilon_0$$

が成り立つ.

証明 高木の解析概論 [19, p.309] には主張のみが書いてあるので, 証明はさっきの [19, pp.165–166] の議論を参考にする.

$1 \leq \nu \leq n-1$ のとき $a_\nu = s_\nu - s_{\nu-1}$ なので部分和法により

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \epsilon_\nu &= \epsilon_0 s_0 + \epsilon_1 (s_1 - s_0) + \dots + \epsilon_{n-1} (s_{n-1} - s_{n-2}) \\ &= (\epsilon_0 - \epsilon_1) s_0 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) s_1 + \dots + (\epsilon_{n-2} - \epsilon_{n-1}) s_{n-2} + \epsilon_{n-1} s_{n-1} \end{aligned}$$

となる. 各 s_ν ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$) の係数は 0 以上なので,

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \epsilon_\nu \leq (\epsilon_0 - \epsilon_1) B + (\epsilon_1 - \epsilon_2) B + \dots + (\epsilon_{n-2} - \epsilon_{n-1}) B + \epsilon_{n-1} B = \epsilon_0 B$$

となる (望遠鏡和が出てきて中間の項は打ち消し合う). 同様に $\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \epsilon_\nu \geq \epsilon_0 A$ も分かる. $\square$

さて、Landau の論文 [10] を読み進めていくと p.120 に以下のような記述がある：

「van der Corput と私がよく用いる定理により、 F が実数値で $F'' \geq \lambda > 0$ を満たすとき、

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{iF(x)} dx \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

が成り立つ。」

・・・「知らんがな」である。論文を読んでいて引用なしに謎の定理が使用されている場面に出会ったら、精神的な苦痛を受けるだろう。100 年前の当時の読者は匙を投げたかもしれない。だがご安心を！今なら Titchmarsh [22, Lemma 4.4] に書いてある*3。

「van der Corput と私がよく用いる定理」の証明の際に、安易に三角不等式を用いると $|\int_{\alpha}^{\beta} e^{iF(x)} dx| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |e^{iF(x)}| dx = \int_{\alpha}^{\beta} 1 dx = \beta - \alpha$ となり、これでは $F(x)$ の情報が消えてしまう。ゆえに指数和のときと同様に繊細に評価する必要がある。 $\int_{\alpha}^{\beta} e^{iF(x)} dx$ の形の積分は指数積分と呼ばれ、こちらも指数和と同様にこれまで研究されてきた。実際、van der Corput の論文をいくつか見てみると、指数和と指数積分に関するものが見つかる (例えば [5])。

「van der Corput と私がよく用いる定理」を証明するには第 2 平均値の定理を用いればよい。平均値の定理は微分積分学の教科書に載っていて大学 1 年生の講義でも扱われるが、一方で第 2 平均値の定理に至っては出会わないまま一生を過ごすこともありうる。よって、ここで紹介しておく。

定理 3.3 (第 2 平均値の定理) $a, b \in \mathbb{R}$ を $a < b$ なるものとする。 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上で有界な Riemann 積分可能な関数とする。 $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を有界な単調減少関数とし、 $\varphi \geq 0$ とする。このときある $\xi \in [a, b]$ が存在して

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a) \int_a^{\xi} f(x)dx$$

が成り立つ。

証明 高木の解析概論 [19, pp.309–311] に書いてある。当該ページの定理 68 は、「 φ

*3 例えば 1922 年に出版された van der Corput の [5] などに書いてある。なぜ引用しなかったのか。

が有界な単調関数ならば $\xi \in [a, b]$ が存在して

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a) \int_a^\xi f(x)dx + \varphi(b) \int_\xi^b f(x)dx$$

となる」と述べている。したがって単調減少な φ に対してこの定理 68 を直接用いても所望の等式は得られない。よく見ると定理 68 の証明は、 φ が単調減少で $\varphi \geq 0$ の場合をまず証明してからその後で一般の場合を証明している。我々は φ が単調減少で $\varphi \geq 0$ の場合を考えれば十分なので、この仮定の下で証明する。

$[a, b]$ の分割 Δ に対して、分割によってできる区間を $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ ($x_0 = a, x_n = b$) とし、各区間 $[x_j, x_{j+1}]$ の幅を $\delta_j = x_{j+1} - x_j$ とおく (ただし $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$)。分割 Δ の幅を $|\Delta| := \max_{j \in \{0, 1, \dots, n-1\}} \delta_j$ で定めると、 f が $[a, b]$ 上で Riemann 積分可能であることから

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\delta_j$$

が成り立つ。

分割 Δ に対して f の各区間 $[x_j, x_{j+1}]$ における振幅を v_j とする (ただし $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$)。すなわち $v_j = \max_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) - \min_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)$ とおく。 f が Riemann 積分可能なので、Darboux の定理を使えば、 Δ に関する f の過剰和と不足和の差 $\sum_{j=0}^{n-1} v_j \delta_j$ は $|\Delta| \rightarrow 0$ のとき 0 に収束する。

さて任意に $\epsilon > 0$ をとる。このとき $\delta > 0$ が存在して、 $|\Delta| < \delta$ なる任意の $[a, b]$ の分割 Δ に対して $\sum_{j=0}^{n-1} v_j \delta_j < \epsilon$ が成り立つ。このとき任意の $\nu \in \{1, \dots, n-1\}$ に対して

$$\left| \int_a^{x_\nu} f(x)dx - \sum_{j=0}^{\nu-1} f(x_j)\delta_j \right| \leq \sum_{j=0}^{\nu-1} v_j \delta_j \leq \sum_{j=0}^{n-1} v_j \delta_j < \epsilon$$

となる。したがって

$$\int_a^{x_\nu} f(x)dx - \epsilon \leq \sum_{j=0}^{\nu-1} f(x_j)\delta_j \leq \int_a^{x_\nu} f(x)dx + \epsilon$$

が成り立つ。 $\int_a^y f(x)dx$ は $y \in [a, b]$ の関数として連続なので、 $[a, b]$ 上で最小値と最大値が存在する。それらを A, B とすると、上の不等式を用いることで

$$A - \epsilon \leq \sum_{j=0}^{\nu-1} f(x_j)\delta_j \leq B + \epsilon$$

を得る．ここで部分和法の帰結である補題 3.2 を $a_j = f(x_j)\delta_j$, $\epsilon_j = \varphi(x_j)$ に対して適用すると,

$$(A - \epsilon)\varphi(a) \leq \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\varphi(x_j)\delta_j \leq (B + \epsilon)\varphi(a)$$

となる． φ は $[a, b]$ 上で単調関数なので Riemann 積分可能であり, ゆえに $f\varphi$ も $[a, b]$ 上で Riemann 積分可能である．よって $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$ は存在し, 上記の考察から

$$A\varphi(a) \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq B\varphi(a)$$

を得る． $\varphi(a) = 0$ のときは φ は恒等的に 0 になり主張は従うので, $\varphi(a) > 0$ と仮定してよい． $\int_a^y f(x)dx$ の y に関する連続性と中間値の定理から, この関数は A と B の間の値を満遍なく取りうる．よって特に

$$\int_a^\xi f(x)dx = \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\varphi(a)}$$

となる $\xi \in [a, b]$ の存在が分かる． □

注意 3.4 同様にして, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が有界で Riemann 積分可能な関数とし, $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を有界な単調増加関数で $\varphi \geq 0$ ならば, ある $\xi \in [a, b]$ が存在して,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(b) \int_\xi^b f(x)dx$$

となることも分かる．こちらも第 2 平均値の定理と呼ばれる．

「van der Corput と私がよく用いる定理」は 2 次導関数に関する条件が考慮されているが, 1 次導関数に関する条件が考慮されたものがあるので, それを先に示す．以下は一階微分判定法 (the first derivative test) と呼ばれている (cf. 松本 [12, p.102]).

補題 3.5 (一階微分判定法) $a, b \in \mathbb{R}$ を $a < b$ なるものとする． $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は微分可能であるとする．ここで $F'(a), F'(b)$ は片側微分を考えている． $\lambda > 0$ とし, さらに F' は単調であるとする．また「 $\forall x \in [a, b], F'(x) \geq \lambda$ 」と「 $\forall x \in [a, b], F'(x) \leq -\lambda$ 」のどちらかが成り立つとする．このとき以下の不等式が成立する:

$$\left| \int_a^b e^{iF(x)} dx \right| \leq \frac{4}{\lambda}.$$

証明 証明は Titchmarsh [22, Lemma 4.2] を参考にする. 不等式の左辺は積分の複素共役を考えても同じ値だから, 必要ならば -1 倍することで, F' は単調増加であるとしてよい. $e^{iF(x)} = \cos F(x) + i \sin F(x)$ なので積分を 2 つに分けて評価する. $1/F'$ が単調減少であるので, 第 2 平均値の定理 (定理 3.3) を使えば, ある $\xi \in [a, b]$ が存在して,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \cos F(x) dx \right| &= \left| \int_a^b \frac{1}{F'(x)} \{\cos F(x)\} F'(x) dx \right| = \left| \frac{1}{F'(a)} \int_a^\xi \{\cos F(x)\} F'(x) dx \right| \\ &= \left| \frac{\sin F(\xi) - \sin F(a)}{F'(a)} \right| \leq \frac{2}{\lambda} \end{aligned}$$

となる. 同様の計算で $\left| \int_a^b \sin F(x) dx \right| \leq \frac{2}{\lambda}$ も分かるので主張が従う. $\square$

「van der Corput と私がよく使う定理」は以下の通りである. こちらは二階微分判定法 (the second derivative test) と呼ばれている (cf. 松本 [12, p.102]).

補題 3.6 (Landau いわく「van der Corput と私がよく使う定理」) $a, b \in \mathbb{R}$ を $a < b$ なるものとする. $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が 2 回微分可能であるとする. ここで $F'(a), F'(b), F''(a), F''(b)$ は片側微分を考えている. $r > 0$ とする. 「 $\forall x \in [a, b], F''(x) \geq r$ 」と「 $\forall x \in [a, b], F''(x) \leq -r$ 」のどちらかが成り立つとする. このとき, 以下の不等式が成り立つ:

$$\left| \int_a^b e^{iF(x)} dx \right| \leq \frac{8}{\sqrt{r}}.$$

証明 証明は Titchmarsh [22, Lemma 4.4] を参考にする. 不等式の左辺は積分の複素共役を考えても同じ値だから, 必要ならば -1 倍することで「 $\forall x \in [a, b], F''(x) \geq r$ 」の場合のみを考えればよい. $r > 0$ より F' は単調増加であるので, 区間 (a, b) 内に F' の零点は高々 1 つしかない. この零点があるとき, c で表すことにする. $a + \delta < b - \delta$ と $a + \delta \leq c \leq b - \delta$ を満たす任意の実数 $\delta > 0$ に対して

$$\int_a^b e^{iF(x)} dx = \left(\int_a^{c-\delta} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^b \right) e^{iF(x)} dx = I_1 + I_2 + I_3$$

となる. ただし I_1, I_2, I_3 はそれぞれ $[a, c - \delta], [c - \delta, c + \delta], [c + \delta, b]$ 上の積分である.

$a + \delta \leq c \leq b - \delta$ であると仮定しているので 任意の $x \in [c + \delta, b]$ に対して

$$F'(x) = \int_c^x F''(t)dt \geq r(x - c) \geq r\delta$$

となる. ゆえに一階微分判定法 (補題 3.5) が使えて, $|I_3| \leq \frac{4}{r\delta}$ となる. 同様に任意の $x \in [a, c - \delta]$ に対して $-F'(x) = \int_x^c F''(t)dt \geq r(c - x) \geq r\delta$ なので $|I_1| \leq \frac{4}{r\delta}$ となる. I_2 の評価は, 積分範囲の幅が 2δ しかないので

$$|I_2| \leq \int_{c-\delta}^{c+\delta} |e^{iF(x)}|dx \leq \int_{c-\delta}^{c+\delta} dx = 2\delta$$

としておけばよい. 以上の議論により $|I| \leq \frac{8}{r\delta} + 2\delta$ を得るが, ここで $\delta > 0$ をうまくとって不等式を最適化しよう. それには第 1 項と第 2 項のどちらも大きくなりすぎないように釣り合う δ を見つければよいから, $\frac{8}{r\delta} = 2\delta$ とすると $\delta = \frac{2}{\sqrt{r}}$ を得る. (解析的整数論の論文でしばしば, 天から与えられたかのごとく「 $\delta = \frac{2}{\sqrt{r}}$ とすればよい」などと書かれたりするが, 釣り合う δ を求めているだけである.) したがって $\delta = \frac{2}{\sqrt{r}}$ とすれば $|I| \leq \frac{8}{r\delta} + 2\delta = \frac{8}{\sqrt{r}}$ となる.

Titchmarsh [22, Lemma 4.4] ではここで証明が終わっており, $a + \delta > c$ または $c > b - \delta$ のときも同様であるとだけ書いてある. しかしどうやって同様にすればよいか分からない人もいるかもしれないので詳細を書いておく.

[以下, 補足] まず $a + \delta < b - \delta$ でない場合にどうするか説明する. このときは $a + \delta \geq b - \delta$ なので, $b - a \leq 2\delta$ となる. もともとの積分の中に絶対値を入れることで $\int_a^b e^{iF(x)}dx \leq 2\delta < \frac{8}{r\delta} + 2\delta$ となり, 所望の不等式を得る. よって, 初めから $a + \delta < b - \delta$ を仮定してよいのである. 次に c の条件を考えよう.

(1) $c < a + \delta$ のときは $\int_a^{c+\delta} e^{iF(x)}dx + \int_{c+\delta}^b e^{iF(x)}dx$ と分ければよい. 第 2 項は $|\int_{c+\delta}^b e^{iF(x)}dx| \leq \frac{4}{r\delta}$ とできるのであった. 第 1 項は絶対値を積分の中に入れることで $|\int_a^{c+\delta} e^{iF(x)}dx| \leq c + \delta - a < 2\delta$ となるので, $|\int_a^b e^{iF(x)}dx| \leq \frac{4}{r\delta} + 2\delta < \frac{8}{r\delta} + 2\delta$ となる.

(2) $b - \delta < c$ のときは $\int_a^{c-\delta} e^{iF(x)}dx + \int_{c-\delta}^b e^{iF(x)}dx$ と分ければよい. 第 1 項は $|\int_a^{c-\delta} e^{iF(x)}dx| \leq \frac{4}{r\delta}$ とできるのであった. 第 2 項は絶対値を積分の中に入れることで $|\int_{c-\delta}^b e^{iF(x)}dx| \leq b - c + \delta < 2\delta$ となるので, $|\int_a^b e^{iF(x)}dx| \leq \frac{4}{r\delta} + 2\delta < \frac{8}{r\delta} + 2\delta$ となる.

(3) 省略されている部分を補い終わったかと思うかもしれないが, まだやることはある. 上記の議論では, 零点 c の存在を仮定して不等式を示した. そもそも零点 c が

ないときはどうすべきなのか, Titchmarsh [22, Lemma 4.4] には言及がないのでここで細部を補っておく.

零点 c が存在しないので, F' は $[a, b]$ 上で常に正か常に負である. まずは $F' > 0$ のときを考える. 指数積分を $\int_a^{a+\delta} e^{iF(x)} dx + \int_{a+\delta}^b e^{iF(x)} dx$ と分ける. 第 1 項は積分の中に絶対値を入れることで $|\int_a^{a+\delta} e^{iF(x)} dx| \leq a + \delta - a = \delta$ となる. $F'(a) \geq 0$ に注意すると, $x \in [a + \delta, b]$ のときに $F'(x) = \int_a^x F''(t) dt + F'(a) \geq r(x - a) + F'(a) \geq r\delta$ となるので一階微分判定法 (補題 3.5) により $|\int_{a+\delta}^b e^{iF(x)} dx| \leq \frac{4}{r\delta}$ となり, $|\int_a^b e^{iF(x)} dx| \leq \frac{4}{r\delta} + \delta < \frac{8}{r\delta} + 2\delta$ となる.

最後に $F' < 0$ のときを考える. $\int_a^{b-\delta} e^{iF(x)} dx + \int_{b-\delta}^b e^{iF(x)} dx$ と分ける. 第 2 項は絶対値を積分の中に入れることで $|\int_{b-\delta}^b e^{iF(x)} dx| \leq b - b + \delta = \delta$ となる. $F'(b) < 0$ に注意すると, $x \in [a, b - \delta]$ のとき $-F'(x) = \int_x^b F''(t) dt - F'(b) \geq r(b - x) - F'(b) \geq r\delta$ なので一階微分判定法 (補題 3.5) により $|\int_a^{b-\delta} e^{iF(x)} dx| = |\int_a^{b-\delta} e^{-iF(x)} dx| \leq \frac{4}{r\delta}$ となり, $|\int_a^b e^{iF(x)} dx| \leq \frac{4}{r\delta} + \delta < \frac{8}{r\delta} + 2\delta$ となる.

細部を詰めると冗長になってしまったが, 以上で証明が完了した. $\square$

4 Hurwitz ゼータ関数の第 1 項と第 2 項の考察

Hurwitz ゼータ関数を

$$\zeta(s, w) = \sum_{n=0}^m \frac{1}{(n+w)^s} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n+w)^s}$$

と 2 つの和に分解したときの第 1 項 $\sum_{n=0}^m \frac{1}{(n+w)^s}$ の評価は §6 に後回しにするが, 結果だけ述べておく.

補題 4.1 $0 < w \leq 1$ とする. q は整数で $q \geq 3$, $Q = 2^{q-1}$ とする. $s = 1 - \frac{1}{Q} + it$, $t \geq 3$ のとき, 以下が成り立つ:

$$\sum_{\frac{t}{\log q - 1} < n \leq t^2} \frac{1}{(n+w)^s} \ll_q t^{\frac{1}{(q+1)Q}}.$$

ここで無視している定数は q に依存する.

補題 4.2 $0 < w \leq 1$ とする. q は整数で $q \geq 2$, $Q = 2^{q-1}$ とする. $s = 1 - \frac{1}{Q} + it$, $t \geq 3$ のとき, 以下が成り立つ:

$$\sum_{0 \leq n \leq \frac{t^{\frac{2}{q+1}}}{\log^{q-1} t}} \frac{1}{(n+w)^s} \ll t^{\frac{1}{(q+1)Q}} \log^{1+\frac{1}{Q}} t.$$

Σ の下の文字がつぶれて見えにくいかもしれないので一応断っておくと, 上の 2 つの補題の和の範囲に現れる分数の分子は $t^{\frac{2}{q+1}}$ である.

この章と次の章では第 2 項

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n+w)^s} = \frac{1}{(s-1)(m+w)^{s-1}} - s \int_m^{\infty} \frac{u - [u]}{(u+w)^{s+1}} du$$

を評価する (なおこの等式は (3.1) として既に与えた).

4.1 臨界線から外れた直線 $\operatorname{Re}(s) = \sigma > 1/2$ 上での評価

$q \geq 2$ は整数で, $Q = 2^{q-1}$, $t \geq 3$, $s = 1 - \frac{1}{Q} + it$ とする. ここで $q \geq 3$ とすると, $Q \geq 4$ であり $\operatorname{Re}(s) > 1/2$ である. $m = [t^2]$ とすると指数和の評価である補題 4.1 と補題 4.2 を合わせることで,

$$\sum_{n=0}^m \frac{1}{(n+w)^s} \ll_q t^{\frac{1}{(q+1)Q}} \log^{1+\frac{1}{Q}} t$$

が導かれる. 後の評価は簡単で, 積分の中に絶対値を入れて評価すれば,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(s-1)(m+w)^{s-1}} - s \int_m^{\infty} \frac{u - [u]}{(u+w)^{s+1}} du \\ & \ll \frac{1}{t} m^{1/Q} + t \int_m^{\infty} \frac{1}{u^{2-1/Q}} du \ll \frac{1}{t} m^{1/Q} + t m^{-1+1/Q} \asymp t^{2/Q-1} \leq t^{-1/2} \end{aligned}$$

となるので, 第 2 項はまったく悪さをせず, $\zeta(s, w) \ll_q t^{\frac{1}{(q+1)Q}} \log^{1+\frac{1}{Q}} t$ が導かれる. というわけで $\operatorname{Re}(s) > 1/2$ のときの定理 2.3 は比較的簡単に導出されたのであるが, 我々の目標である Weyl bound は $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ における評価なので, $q = 2$ のときが知りたいのであった.

4.2 臨界線 $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ 上での評価

それでは $q = 2$ のときを考えよう．このときは $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ であるが，残念ながら $\operatorname{Re}(s) > 1/2$ のときのように第 2 項が簡単に評価できず，悪さをしている．もう少し頑張らないといけない． $m := \lfloor \frac{t^{2/3}}{\log t} \rfloor$ とすると，

$$\zeta(s, w) = \sum_{n=0}^m \frac{1}{(n+w)^s} + \frac{1}{(s-1)(m+w)^{s-1}} - s \int_m^\infty \frac{u - [u]}{(u+w)^{s+1}} du$$

において補題 4.2 より，第 1 項は

$$\sum_{n=0}^m \frac{1}{(n+w)^s} \ll t^{1/6} \log^{3/2} t$$

と評価できる．残りの項が $\mathcal{O}(t^{1/6} \log^{3/2} t)$ であればよい．

評価したい残りの項の被積分関数の分子を扱いやすくするため， $1/2$ ずらした関数 $u - [u] - 1/2$ を考えよう． $u - [u] - 1/2$ は $\mathbb{R}$ 上の周期 1 を持つ区分的に C^1 級な周期関数であるので，この関数は不連続点 ($\mathbb{Z}$ の元) を除く範囲で Fourier 級数展開できる：

$$u - [u] - \frac{1}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^{\infty} a_h \cos 2\pi h u + \sum_{h=1}^{\infty} b_h \sin 2\pi h u, \quad u \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}.$$

ここで，Fourier 係数は以下のように積分で求められる：

$$\begin{aligned} a_h &= 2 \int_0^1 \left(u - [u] - \frac{1}{2} \right) (\cos 2\pi h u) du = 0, \quad h \geq 0, \\ b_h &= 2 \int_0^1 \left(u - [u] - \frac{1}{2} \right) (\sin 2\pi h u) du = -\frac{1}{\pi h}, \quad h \geq 1. \end{aligned}$$

したがって Fourier 級数展開は

$$u - [u] - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi h u}{h}, \quad u \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

となる． $u - [u] - 1/2$ の不連続点は積分の値に影響しないため，

$$-\pi \int_m^\infty \frac{u - [u] - 1/2}{(u+w)^{s+1}} du = \int_m^\infty \frac{1}{(u+w)^{s+1}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi h u}{h} du \quad (4.1)$$

が成り立つ. もしもこれが $\mathcal{O}(t^{-5/6} \log^{3/2} t)$ であれば,

$$\begin{aligned} -s \int_m^\infty \frac{u - [u]}{(u+w)^{s+1}} du &= -s \int_m^\infty \frac{1/2}{(u+w)^{s+1}} du - s \int_m^\infty \frac{u - [u] - 1/2}{(u+w)^{s+1}} du \\ &= -\frac{1}{2(m+w)^s} + \mathcal{O}(|s|t^{-5/6} \log^{3/2} t) = \mathcal{O}(t^{1/6} \log^{3/2} t) \end{aligned}$$

となり, $\frac{1}{(s-1)(m+w)^{s-1}} \ll t^{-1}m^{1/2} \ll 1$ と合わせて $\zeta(s, w)$ の第 2 項の評価が完了する. そして $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ のときの定理 2.3 の証明も終わる.

注意 4.3 $u - [u] - 1/2$ は 1 次の Bernoulli 多項式 $B_1(x) = x - 1/2$ に $u - [u]$ を代入したものである. Euler-Maclaurin の公式に一般の次数の Bernoulli 多項式 $B_k(x)$ が現れるので, $u - [u] - 1/2$ が現れるのは自然だと思える (荒川, 伊吹山, 金子 [1, 定理 5.1]). さらに, $B_k(u - [u])$ の Fourier 展開も可能である (荒川, 伊吹山, 金子 [1, 注意 4.13]).

ちなみに本橋 [15, p.1] によれば, 解析的整数論の基本手段の多くは展開式 $u - [u] - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\pi} \sum_{h=0}^\infty \frac{\sin 2\pi h u}{h}$ に源を持つとのことである.

次の章では (4.1) が $\mathcal{O}(t^{-5/6} \log^{3/2} t)$ であることを示すべく, 頑張る.

5 第 2 項の評価

等式 (4.1) の右辺の積分内の級数 $\sum_{h=1}^\infty \frac{\sin 2\pi h u}{h}$ は少々厄介である. 広義 Riemann 積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ が収束するが絶対収束しないということは有名である. Lebesgue 積分の世界だと積分の収束性と絶対収束性は同値であるのでこのようなことは起きない. 同様に, $\sum_{h=1}^\infty \frac{\sin 2\pi h u}{h}$ もまた収束するが絶対収束しない級数である (収束性は Cauchy の収束条件を確かめればよい). ゆえに三角不等式を安易に用いて和の中に絶対値の記号を入れてはならない.

補題 5.1 $t \geq 3, u \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ のとき, u に最も近い整数と u の距離を $\{u\} \in (0, 1/2]$ とすると,

$$\left| \sum_{h=[t]+1}^\infty \frac{\sin 2\pi h u}{h} \right| \ll \min \left(1, \frac{1}{t\{u\}} \right).$$

証明 $a < b$ なる $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と $0 < u \leq 1/2$ なる実数 u に対して, (2.1) により

$$\left| \sum_{h=a}^b \sin 2\pi hu \right| \leq \left| \sum_{h=a}^b e^{2\pi i hu} \right| \leq \frac{1}{\sin \pi u} \leq \frac{1}{2u}$$

となる*⁴. ここで $\sin \pi u \geq 2u$, ($0 \leq u \leq 1/2$) を用いた*⁵. 特に,

$$\left| \sum_{h=a}^b \sin 2\pi hu \right| \leq \frac{1}{2\{u\}}$$

となる. 部分和法から得られる補題 3.1 により,

$$\left| \sum_{h=a}^b \frac{\sin 2\pi hu}{h} \right| \leq \frac{1}{2a\{u\}}$$

が成り立つ. このことから Cauchy の条件がチェックできて, u を固定するとき $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi hu}{h}$ が収束することが分かる. この不等式で $b \rightarrow \infty$ とすると, 以下の不等式を得る:

$$\left| \sum_{h=a}^{\infty} \frac{\sin 2\pi hu}{h} \right| \leq \frac{1}{2a\{u\}}.$$

次に, $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $u \in \mathbb{R}$ に対して一様に $|\sum_{h=a}^{\infty} \frac{\sin 2\pi hu}{h}| = \mathcal{O}(1)$ となることを示す. Landau の論文 [10] では “Bekanntlich”, つまり「よく知られているように」と書かれているのみである. だがすぐに証明できることではないので, ここで証明しておく. 松本の本の [12, 問 7.1] を誘導に従って解けばよい (Titchmarsh の関数論の本 [21, p.42, Examples (ii)] にもある). $\sum_{h=1}^{a-1} \frac{\sin 2\pi hu}{h}$ が $a \geq 2$, $u \in \mathbb{R}$ に関して有界であることを示せば十分であり, 実際ここから $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi hu}{h}$ の u に関する有界性も分かるので, $\sum_{h=a}^{\infty} \frac{\sin 2\pi hu}{h}$ の有界性も分かる.

それでは $\sum_{h=1}^{a-1} \frac{\sin 2\pi hu}{h}$ の有界性を証明しよう. u に関して周期 1 なので $-1/4 \leq u \leq 3/4$ で考えればよい. Dirichlet 核を用いた積分表示

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{a-1} \frac{\sin 2\pi hu}{h} = \int_0^1 \left(y - [y] - \frac{1}{2} \right) \frac{\sin(\pi(2a-1)(y-u))}{\sin(\pi(y-u))} dy$$

*⁴ 間違っていないのだが, Landau [10] では, $|\sum_{h=a}^b e^{2\pi i hu}| \leq \frac{2}{\sin \pi u} \leq \frac{1}{u}$ となっている.

*⁵ $[0, 1/2]$ 上の関数 $f(u) := \sin \pi u - 2u$ が $(0, 1/2)$ 上で $f'' < 0$ であり, $f(0) = f(1/2) = 0$ を満たすことに注意すれば $[0, 1/2]$ 上で $f \geq 0$ となることが示せる.

を考察することにする. $1/4 \leq u \leq 3/4$ の下で, $y \in [0, 1]$ が $\sin(\pi(y-u)) = 0$ を満たすのは $y = u$ のときのみである. よって, $[0, 1]$ 上の積分を $[0, u]$ 上の積分と $[u, 1]$ 上の積分に分けて $\frac{1}{\sin X} - \frac{1}{X} = \frac{1}{X(1+\mathcal{O}(X^2))} - \frac{1}{X} = \mathcal{O}(X)$, ($X \rightarrow 0$) に注意すると,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(y - [y] - \frac{1}{2} \right) \frac{\sin(\pi(2a-1)(y-u))}{\sin(\pi(y-u))} dy \\ & - \int_0^1 \left(y - [y] - \frac{1}{2} \right) \frac{\sin(\pi(2a-1)(y-u))}{\pi(y-u)} dy \\ & = \int_0^u \left(y - [y] - \frac{1}{2} \right) \sin(\pi(2a-1)(y-u)) \mathcal{O}(y-u) dy \\ & + \int_u^1 \left(y - [y] - \frac{1}{2} \right) \sin(\pi(2a-1)(y-u)) \mathcal{O}(y-u) dy \end{aligned}$$

となり, 右辺は $u \in [1/4, 3/4]$ と $a \geq 2$ に関して有界である. したがって, この式の左辺の第 1 項の積分の有界性は第 2 項の積分の有界性に帰着された. $[0, 1]$ 上の積分において $[y] = 0$ として計算してよい. そこで $\varphi(y) := y$, ($y \in [0, 1]$) とすればこれは非負で有界かつ単調増加であるから, φ が単調増加の場合の第 2 平均値の定理 (注意 3.4) を使うことができる. ゆえに $\xi \in [0, 1]$ が存在して

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(y - [y] - \frac{1}{2} \right) \frac{\sin(\pi(2a-1)(y-u))}{\pi(y-u)} dy &= \frac{1}{2} \int_{\xi}^1 \frac{\sin(\pi(2a-1)(y-u))}{\pi(y-u)} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi(2a-1)(\xi-u)}^{\pi(2a-1)(1-u)} \frac{\sin r}{r} dr \end{aligned}$$

となる. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$ が収束することにより, この積分は $u \in [1/4, 3/4]$ と $a \geq 2$ に関して一様に有界であることがいえて, $\sum_{h=1}^{a-1} \frac{\sin 2\pi hu}{h}$ も $u \in [1/4, 3/4]$, $a \geq 2$ に関して有界である. $-1/4 \leq u \leq 1/4$ のときは Dirichlet 核による積分の範囲を $-1/2$ から $1/2$ までに書き換えておけば, $1/4 \leq u \leq 3/4$ のときと同様にして有界性がいえる. (ただし, $y - [y] - 1/2$ は $-1/2 \leq y < 0$ で $y + 1/2$, $0 \leq y \leq 1/2$ で $y - 1/2$ であり, $-(y - 1/2)$ が非負で単調減少になることに注意せよ.) したがって, $\sum_{h=1}^{a-1} \frac{\sin 2\pi hu}{h}$ が $a \geq 2$, $u \in \mathbb{R}$ に関して有界であることが分かる*6. 以上により主張を得る. $\square$

注意 5.2 実は $|\sum_{h=1}^{a-1} \frac{\sin 2\pi hu}{h}| \leq \frac{\pi}{2} + 1$ である (cf. Titchmarsh の関数論の本 [21, p.440]). $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = 1.85\dots$ は上限である ([7, Satz 4]).

*6 「級数 $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi hu}{h}$ が有界収束する (boundedly convergent)」ともいう.

前の章で $m := \lceil \frac{t^{2/3}}{\log t} \rceil$ とおいたことを思い出す。さて、評価したかった積分 (4.1) を和に分解する：

$$\begin{aligned}
 & \int_m^\infty \frac{1}{(u+w)^{s+1}} \sum_{h=1}^\infty \frac{\sin 2\pi hu}{h} du \\
 &= \int_m^\infty \frac{1}{(u+w)^{s+1}} \left\{ \sum_{h=1}^{[t]} \frac{\sin 2\pi hu}{h} + \sum_{h=[t]+1}^\infty \frac{\sin 2\pi hu}{h} \right\} du \\
 &= \int_m^\infty \frac{1}{(u+w)^{s+1}} \sum_{h=1}^{[t]} \frac{\sin 2\pi hu}{h} du + \int_m^\infty \frac{1}{(u+w)^{s+1}} \sum_{h=[t]+1}^\infty \frac{\sin 2\pi hu}{h} du \\
 &= S_1 + S_2.
 \end{aligned}$$

ここでは $[t]$ までの和と $[t]+1$ 以降の和に分解し、前者を S_1 、後者を S_2 としている。 S_2 の被積分関数の級数は絶対収束しないので、 $\int$ と Σ の交換は保証されていないことに注意しよう。 S_1 は指数和の積分なので後回しにして、 S_2 を評価しよう。

$q=2$, $Q=2$ のとき $s=1-\frac{1}{Q}+it$ について $\operatorname{Re}(s)=1/2$ が成り立つ。 $t \geq 3$ のとき $n \geq m$ となる各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して補題 5.1 を適用すれば、

$$\begin{aligned}
 & \int_n^{n+1} \frac{1}{(u+w)^{s+1}} \sum_{h=[t]+1}^\infty \frac{\sin 2\pi hu}{h} du \\
 &\ll \frac{1}{n^{1/2+1}} \int_n^{n+1} \min\left(1, \frac{1}{t\{u\}}\right) du \ll \frac{2}{n^{3/2}} \int_0^{1/2} \min\left(1, \frac{1}{tu}\right) du \\
 &= \frac{2}{n^{3/2}} \left(\int_0^{1/t} du + \int_{1/t}^{1/2} \frac{1}{tu} du \right) = \frac{2}{n^{3/2}} \left(\frac{1}{t} + \frac{\log 1/2 - \log 1/t}{t} \right) \ll \frac{\log t}{n^{3/2}t}
 \end{aligned}$$

となる。 n ごとの評価を全部かき集めて足すことで、

$$S_2 = \sum_{n=m}^\infty \int_n^{n+1} \frac{1}{(u+w)^{s+1}} \sum_{h=[t]+1}^\infty \frac{\sin 2\pi hu}{h} du \ll \frac{\log t}{t} \sum_{n=m}^\infty \frac{1}{n^{3/2}} \ll \frac{\log t}{t} \ll \frac{\log^{3/2} t}{t^{5/6}}$$

となる。後は

$$S_1 = \int_m^\infty \frac{1}{(u+w)^{s+1}} \sum_{h=1}^{[t]} \frac{\sin 2\pi hu}{h} du = \sum_{h=1}^{[t]} \frac{1}{h} \int_m^\infty \frac{\sin 2\pi hu}{(u+w)^{s+1}} du$$

が $\mathcal{O}(t^{-5/6} \log^{3/2} t)$ になることを示せばよい。 h に関する和は有限和なので S_1 は $\int$ と Σ を交換したものを考えてよいことに注意しよう。

h ごとに積分を評価することを考える．ここで「van der Corput と私がよく使う定理」を使いたいの条件を確認してみると、

$$\frac{d^2}{du^2}(-t \log(u+w) \pm 2\pi hu) = \frac{t}{(u+w)^2} \geq \frac{t}{4u^2} \geq \frac{t}{4v^2}, \quad u \in [1, v]$$

となるので*7, 「van der Corput と私がよく使う定理」(二階微分判定法, 補題 3.6) により, $v \geq m$ と h に対して

$$\left| \int_m^v e^{i(-t \log(u+w) \pm 2\pi hu)} du \right| \ll \frac{2v}{\sqrt{t}}$$

が成り立つ*8. よって, 不定積分

$$G(v) := \int_m^v \frac{\sin 2\pi hu}{(u+w)^{it}} du = \int_m^v \frac{e^{2\pi i hu - it \log(u+w)} - e^{-2\pi i hu - it \log(u+w)}}{2i} du$$

は

$$|G(v)| \ll \frac{v}{\sqrt{t}}$$

を満たす．ここで部分積分により,

$$\begin{aligned} \int_m^\infty \frac{\sin 2\pi hu}{(u+w)^{s+1}} du &= \int_m^\infty \frac{G'(u)}{(u+w)^{3/2}} du \\ &= \left[\frac{G(u)}{(u+w)^{3/2}} \right]_m^\infty - \int_m^\infty G(u) \frac{-3}{2} \frac{1}{(u+w)^{5/2}} du \\ &= \frac{3}{2} \int_m^\infty \frac{G(u)}{(u+w)^{5/2}} du \ll \int_m^\infty \frac{u}{\sqrt{t}} \frac{1}{u^{5/2}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_m^\infty u^{-3/2} du = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{2}{\sqrt{m}} \end{aligned}$$

を得る． $m = \left[\frac{t^{2/3}}{\log t} \right]$ であったことを思い出すと最後の式は $O(t^{-1/2} \times t^{-1/3} \log^{1/2} t) = O(t^{-5/6} \log^{1/2} t)$ となる (むしろこれを見越して m が選ばれた). よって

$$S_1 \ll \sum_{h=1}^{[t]} \frac{1}{h} \times t^{-5/6} \log^{1/2} t \asymp t^{-5/6} \log^{3/2} t$$

となる．指数積分の評価を用いて, 第 2 項に関して所望の評価を得ることができた.

*7 Landau [10, p.121] では $u \geq 1$ の範囲で $\frac{t}{4u^2}$ で下から評価しているが, $1 \leq u \leq v$ の範囲で $\frac{t}{4v^2}$ で下から評価するべきである.

*8 Landau [10, p.121] では $\frac{2A_{14}u}{\sqrt{t}}$ ($A_{14} > 0$ は絶対定数) で評価しているが, $\frac{2A_{14}v}{\sqrt{t}}$ を使うべきである.

6 指数和と第 1 項の評価

ここまででもうすべてを証明しきった気分かもしれないが、第 1 項 $\sum_{n=0}^m \frac{1}{(n+w)^s}$ の評価は保留にしていたのであった。こちらは有限和だが指数和として慎重に評価しなければならない。この章では、補題 4.1 と補題 4.2 を証明することを目指す。

まず、指数和の評価として知られる Weyl differencing を見てみよう。

補題 6.1 (Weyl differencing) $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, $K := 2^{k-1}$ とする。 $\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし、 $P(z) = 2\alpha z^k + \alpha_{k-1}z^{k-1} + \cdots + \alpha_1 z$ は z に関する実数係数多項式とする (つまり $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$)。 P から定まる Weyl 和

$$\sum_r e^{iP(r)}$$

を考える。ここで r は連続する μ 個の整数のなす集合を動くとする。このとき

$$\left| \sum_r e^{iP(r)} \right|^K \leq (2\mu)^{K-k} \sum_{\substack{(h_1, \dots, h_{k-1}) \in \mathbb{Z}^{k-1} \\ L \leq \mu-1}} \left| \sum_{l=0}^{\mu-1-L} e^{2i\alpha k! H l} \right| \quad (6.1)$$

が成り立つ。ここで $(h_1, \dots, h_{k-1}) \in \mathbb{Z}^{k-1}$ は $L = \sum_{\nu=1}^{k-1} |h_\nu|$ とおいたときに $L \leq \mu-1$ を満たすように動く。また、 $H = \prod_{\nu=1}^{k-1} h_\nu$ とおいた。

証明に入る前に評価の意味を考えてみよう。安直に三角不等式を用いた場合

$$\left| \sum_r e^{iP(r)} \right|^K \leq \left(\sum_r |e^{iP(r)}| \right)^K \leq \mu^K$$

となるが、上の補題は実質 μ^{K-k} で評価しているので、この点で上の評価は優れているといえる。

証明 Landau の論文 [10, p.108] では「証明はこのジャーナルの私の論文 *Zum Waringschen Problem* の pp.225–226 にある」とだけ記してあり、証明は省略されている。そこでここでは Landau の “Zum Waringschen Problem” [9] を参考にする。 $m \in \mathbb{Z}$ とし、 $U = \sum_{r=m+1}^{m+\mu} e^{iP(r)}$ とおく。以下の式変形は当たり前であるが、証明において本質的な部分である：

$$|U|^2 = \sum_{h=m+1}^{m+\mu} e^{iP(h)} \sum_{r=m+1}^{m+\mu} e^{-iP(r)} = \sum_{h,r} e^{i(P(h)-P(r))}.$$

ここで $h = r + h_1$ に置き換えて h_1, r に関する和にすると, 整数 h_1, r が動く範囲は

$$|h_1| \leq \mu - 1,$$

$$\max(m+1, m+1-h_1) \leq r \leq \min(m+\mu, m+\mu-h_1)$$

となる. $h_1 \geq 0$ のときは r は $m+1$ から $m+\mu-h_1$ まで動き, $h_1 \leq 0$ のときは r は $m+1-h_1$ から $m+\mu$ まで動く. 指数の部分は

$$P(h) - P(r) = P(r+h_1) - P(r) = 2\alpha k h_1 r^{k-1} + \beta_1(h_1)r^{k-2} + \cdots + \beta_{k-1}(h_1)$$

(ただし各 $j = 1, \dots, k-1$ に対して $\beta_j(h_1) \in \mathbb{R}$) の形となり, この r の多項式を $Q_{h_1}(r) \in \mathbb{R}[r]$ とおくと, r に関する次数は $k-1$ 以下になっている. さらに

$$|U|^2 = \left| \sum_{|h_1| \leq \mu-1} \sum_r e^{iQ_{h_1}(r)} \right| \leq \sum_{|h_1| \leq \mu-1} \left| \sum_r e^{iQ_{h_1}(r)} \right| \quad (6.2)$$

と評価できる. ただしここで r は連続する $\mu - |h_1|$ 個の整数を動く.

多項式の次数が高々 k の場合の指数和 $\sum_r e^{iP(r)}$ を評価すると, 多項式の次数が高々 $k-1$ の場合の指数和 $\sum_r e^{iQ_{h_1}(r)}$ が出てきたので, 不等式 (6.1) を証明するために k に関する帰納法を使う.

まず $k=2$ のとき, $K=2=k$ であり, 証明したい不等式 (6.1) は先程示した不等式 (6.2) と一致する. ゆえに $k=2$ で (6.1) は成立する.

次に $k > 2$ のとき, k を $k-1$ に置き換えた際に (6.1) が成り立つと仮定する. このとき元々の (6.1) も成り立つことを示す. まず (6.2) の両辺を $K/2$ 乗 (つまり 2^{k-2} 乗) して,

$$|U|^K \leq \left(\sum_{|h_1| \leq \mu-1} \left| \sum_r e^{iQ_{h_1}(r)} \right| \right)^{2^{k-2}}$$

を得る. ここで複素数列 $\{c_\nu\}_{\nu=1}^M$ に対して Cauchy-Schwarz の不等式

$$\left| \sum_{\nu=1}^M c_\nu \right|^2 \leq \sum_{\nu=1}^M 1^2 \sum_{\nu=1}^M |c_\nu|^2 = M \sum_{\nu=1}^M |c_\nu|^2$$

が成り立つことを思い出す. この不等式を 2 乗してもう一度 Cauchy-Schwarz の不等式を使えば $|\sum_{\nu=1}^M c_\nu|^2 \leq M^{1+2} \sum_{\nu=1}^M |c_\nu|^2$ となる. さらにこの不等式を 2 乗してもう一度 Cauchy-Schwarz の不等式を使えば $|\sum_{\nu=1}^M c_\nu|^{2^3} \leq M^{1+2+2^2} \sum_{\nu=1}^M |c_\nu|^{2^3}$

となる．このことから分かるように，2 乗して Cauchy-Schwarz の不等式を使うという操作を繰り返すことで

$$\left| \sum_{\nu=1}^M c_\nu \right|^{2^{k-2}} \leq M^{2^{k-2}-1} \sum_{\nu=1}^M |c_\nu|^{2^{k-2}} \quad (6.3)$$

が得られる*9．これを用いて

$$|U|^K \leq (2\mu)^{2^{k-2}-1} \sum_{|h_1| \leq \mu-1} \left| \sum_r e^{iQ_{h_1}(r)} \right|^{2^{k-2}}$$

を得る． r に関する和の 2^{k-2} 乗はまさに帰納法の仮定が適用できる形になっているので適用してみると，

$$|U|^{2^{k-1}} \leq (2\mu)^{2^{k-2}-1} \sum_{|h_1| \leq \mu-1} (2\mu)^{2^{k-2}-(k-1)} \sum_{(h_2, \dots, h_{k-1})} \left| \sum_r e^{2i\alpha k h_1 \times (k-1)! h_2 \cdots h_{k-1} r} \right|$$

とできる．ここで $(h_2, \dots, h_{k-1}) \in \mathbb{Z}^{k-2}$ は $\sum_{\nu=2}^{k-1} |h_\nu| \leq (\mu - |h_1|) - 1$ となるように動く．また $r \in \mathbb{Z}$ は $0 \leq r \leq (\mu - |h_1|) - 1 - \sum_{\nu=2}^{k-1} |h_\nu|$ となるように動く．よって (6.1) を得る． $\square$

証明で差分 $P(r+h_1) - P(r)$ が登場したことから，Weyl differencing の名の由来が伺える． $P(r)$ の r に関する次数が k のとき， $P(r+h_1) - P(r)$ の r に関する次数が $k-1$ 以下になっているところもポイントである．

次に，これを用いて以下のような係数付きの指数和の評価を与えよう．

補題 6.2 補題 6.1 と記号は同じとする． $h \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，

$$\left| \sum_{r=0}^{\mu-1} r^h e^{iP(r)} \right| < 4\mu^h \left(\mu^{1-\frac{1}{K}} + \mu^{1-\frac{k}{K}} \left\{ \sum_{h_1, \dots, h_{k-1}=1}^{\mu} \min \left(\mu, \frac{1}{|\sin(\alpha k! H)|} \right) \right\}^{\frac{1}{K}} \right)$$

が成り立つ．ただし $\min(\mu, \frac{1}{0})$ は μ とみなすことにする．

*9 このように Landau は Cauchy-Schwarz の不等式を繰り返し使うことで証明しているが， $p = 2^{k-2} > 1$ において $q > 1$ を $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ となるようにとれば，Hölder の不等式により所望の不等式 $|\sum_{\nu=1}^M c_\nu|^p \leq \sum_{\nu=1}^M |c_\nu|^p (\sum_{\nu=1}^M 1)^{p/q} = M^{p-1} \sum_{\nu=1}^M |c_\nu|^p$ が直ちに得られる．

注意 6.3 証明に入る前に、補題 6.2 の不等式の左辺を、三角不等式を用いて各項に絶対値をつけた和で評価してみよう．すると $|\sum_{r=0}^{\mu-1} r^h e^{iP(r)}| \leq \sum_{r=0}^{\mu-1} r^h \asymp_h \mu^{h+1}$ となる．上の主張の右辺は

$$\begin{aligned} & \mu^{h+1-\frac{1}{K}} + \mu^{h+1} \left\{ \frac{1}{\mu^k} \sum_{h_1, \dots, h_{k-1}=1}^{\mu} \min \left(\mu, \frac{1}{|\sin(\alpha k! H)|} \right) \right\}^{\frac{1}{K}} \\ & \ll \mu^{h+1-\frac{1}{K}} + \mu^{h+1} \times \left(\frac{\mu^{k-1} \times \mu}{\mu^k} \right)^{\frac{1}{K}} \ll \mu^{h+1} \end{aligned}$$

を満たすので、上の不等式は安直に得られる評価よりも改良されているといえる．

証明 不等式の左辺を見ると、補題 3.1 と補題 6.1 を使えばできそうな形をしているので、やってみる．まず $\alpha k! H \in \pi \mathbb{Z}$ のときは、任意の $l \in \mathbb{Z}$ に対して $e^{2\alpha i k! H l} = 1$ なので

$$\sum_{l=0}^{\mu-1-L} e^{2\alpha i k! H l} = \mu - L \leq \mu$$

となる．次に $\alpha k! H \notin \pi \mathbb{Z}$ のときは、(2.1) を適用すれば

$$\left| \sum_{l=0}^{\mu-1-L} e^{2\alpha i k! H l} \right| \leq \frac{1}{|\sin \alpha k! H|}$$

となる．以上をまとめると、 $\xi_r = e^{iP(r)}$ とおくとき、任意の $c \in \{0, \dots, \mu-1\}$ に対して、Weyl differencing の帰結 (補題 6.1) により、

$$\begin{aligned} \left| \sum_{r=c}^{\mu-1} \xi_r \right|^K & \leq \{2(\mu-c)\}^{K-k} \sum_{\substack{(h_1, \dots, h_{k-1}) \in \mathbb{Z}^{k-1} \\ L \leq \mu-1}} \min \left(\mu - c, \frac{1}{|\sin \alpha k! H|} \right) \\ & \leq (2\mu)^{K-k} \sum_{\substack{(h_1, \dots, h_{k-1}) \in \mathbb{Z}^{k-1} \\ L \leq \mu-1}} \min \left(\mu, \frac{1}{|\sin \alpha k! H|} \right) \end{aligned}$$

となる．最後の式は $h_1, \dots, h_{k-1}$ のいずれかが 0 の項とそうでない項に分けると、対称性から

$$\left| \sum_{r=c}^{\mu-1} \xi_r \right|^K$$

$$\begin{aligned}
&\leq (2\mu)^{K-k} \left\{ \sum_{\substack{(h_1, \dots, h_{k-1}) \in \mathbb{Z}^{k-1} \\ L \leq \mu-1, H=0}} \mu \right\} + 2^{k-1} \times \sum_{\substack{(h_1, \dots, h_{k-1}) \in \mathbb{Z}^{k-1} \\ h_1 + \dots + h_{k-1} \leq \mu-1 \\ h_1 > 0, \dots, h_{k-1} > 0}} \min \left(\mu, \frac{1}{|\sin \alpha k! H|} \right) \Bigg\} \\
&\leq (2\mu)^{K-k} \left\{ \mu(k-1)(2\mu-1)^{k-2} + 2^{k-1} \times \sum_{h_1, \dots, h_{k-1}=1}^{\mu-1} \min \left(\mu, \frac{1}{|\sin \alpha k! H|} \right) \right\} \\
&\leq (2\mu)^{K-k} \mu^{k-1} 2^{k-2} k + 2^{K-1} \mu^{K-k} \sum_{h_1, \dots, h_{k-1}=1}^{\mu-1} \min \left(\mu, \frac{1}{|\sin \alpha k! H|} \right)
\end{aligned}$$

となる．両辺を後で $1/K$ 乗することを考慮すれば，第 1 項の一番右の k を $k < 2^{k-1} = K < 2^K$ と粗く評価し，第 2 項の 2^{K-1} を $2^{K-1} < 4^K$ と評価しておけば十分であり，

$$\left| \sum_{r=c}^{\mu-1} \xi_r \right|^K < \left(4\mu^{1-\frac{1}{K}} + 4\mu^{1-\frac{k}{K}} \left\{ \sum_{h_1, \dots, h_{k-1}=1}^{\mu-1} \min \left(\mu, \frac{1}{|\sin \alpha k! H|} \right) \right\}^{\frac{1}{K}} \right)^K$$

を得る．ここで両辺を $1/K$ 乗すれば

$$\left| \sum_{r=c}^{\mu-1} \xi_r \right| < 4\mu^{1-\frac{1}{K}} + 4\mu^{1-\frac{k}{K}} \left\{ \sum_{h_1, \dots, h_{k-1}=1}^{\mu-1} \min \left(\mu, \frac{1}{|\sin \alpha k! H|} \right) \right\}^{\frac{1}{K}}$$

となる．後は $\epsilon_r = r^h \geq 0$ とおけば， $\{\epsilon_r\}_{r=0}^{\mu-1}$ は広義単調増加で $\epsilon_{\mu-1} \leq \mu^h$ を満たすから， $\xi_r = e^{iP(r)}$ と $\epsilon_r = r^h$ に対して補題 3.1 を適用すると証明が完了する ($\mu-1$ までの和は μ までの和以下であることに注意せよ)． $\square$

さて， $\sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^{it}}$ の形の指数和を評価する際に，Weyl differencing を使用しようにも，指数和の $\sum_{n=a}^b e^{if(n)}$ の f にあたる部分が実数係数の多項式でなく $f(n) = -t \log(n+w)$ である．実は $\log$ を多項式で近似すれば Weyl differencing が使えるようになる．近似には $\log(1+x)$ の Maclaurin 展開を使えばよい．近似の精度を測ると以下のようなになる．

補題 6.4 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $t > 1$ とする． $0 \leq x < 1$ とするとき，

$$(1+x)^{it} e^{-it \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n} = e^{it \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n}$$

の Maclaurin 展開を $\sum_{h=0}^{\infty} e_h(t)x^h$ とする. このとき,

$$\sum_{h=0}^{\infty} |e_h(t)| \left(\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{k+1}} \right)^h < 2$$

が成立する.

証明 $\exp\left(\frac{tx^{k+1}}{1-x}\right) = \exp\left(t \sum_{n=k+1}^{\infty} x^n\right) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h(t)x^h$ とする. ここで,

$$\begin{aligned} \exp\left(it \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\right) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l t^l}{l!} \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right)^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} i^l t^l \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l \geq k+1} \frac{(-1)^{n_1-1}}{n_1} x^{n_1} \frac{(-1)^{n_2-1}}{n_2} x^{n_2} \dots \frac{(-1)^{n_l-1}}{n_l} x^{n_l} \end{aligned}$$

なので,

$$e_h(t) = \sum_{l=0}^h \frac{i^l t^l}{l!} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_l \geq h+1 \\ n_1 + \dots + n_l = h}} \frac{(-1)^{n_1-1}}{n_1} \dots \frac{(-1)^{n_l-1}}{n_l}$$

となる. 同様の計算で

$$f_h(t) = \sum_{l=0}^h \frac{t^l}{l!} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_l \geq h+1 \\ n_1 + \dots + n_l = h}} 1$$

も分かるので, $|e_h(t)| \leq f_h(t)$ が成り立つ. すると

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{\infty} |e_h(t)| \left(\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{k+1}} \right)^h &\leq \sum_{h=0}^{\infty} f_h(t) \left(\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{k+1}} \right)^h = \exp\left(\frac{t \left(\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{k+1}} \right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{k+1}}} \right) \\ &< e^{\frac{1/2^{k+1}}{1/2}} = e^{1/2^k} \leq e^{1/2} = 1.6487\dots < 2 \end{aligned}$$

となる. ここで, $t > 1$ のとき $1 - \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{k+1}} > \frac{1}{2}$ となることを用いた. $\square$

$\sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^{it}}$ を Weyl differencing を用いて評価したい. そこで, バラバラに分割した和のパーツごとに評価することを考える. パーツの評価は以下ようになる.

補題 6.5 $k \in \mathbb{Z}, k \geq 2, K := 2^{k-1}$ とする. $t > 1, \mu \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, v > 0, \frac{\mu}{v} \leq \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{k+1}}$ とするとき,

$$\left| \sum_{r=0}^{\mu-1} \left(1 + \frac{r}{v} \right)^{it} \right| < 8 \left(\mu^{1-\frac{1}{K}} + \mu^{1-\frac{1}{K}} \left\{ \sum_{h_1, \dots, h_{k-1}=1}^{\mu} \min \left(\mu, \frac{1}{|\sin \frac{tk!H}{2kv^k}|} \right) \right\}^{\frac{1}{K}} \right)$$

が成り立つ。ここで、 $H = \prod_{j=1}^{k-1} h_j$ とおいた。 $\min(\mu, \frac{1}{0})$ は μ とみなすことにする。

証明 指数和に現れる $\log(1 + \frac{r}{v})$ を実多項式で近似しよう。今の場合は

$$P(z) := \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n-1} t}{nv^n} z^n$$

で近似すればよい。

$$R := 4 \left(\mu^{1-\frac{1}{K}} + \mu^{1-\frac{k}{K}} \left\{ \sum_{h_1, \dots, h_{k-1}}^{\mu} \min \left(\mu, \frac{1}{|\sin(\alpha k! H)|} \right) \right\}^{\frac{1}{K}} \right)$$

とおくと、Weyl differencing の帰結 (補題 6.2) により、 $h \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\left| \sum_{r=0}^{\mu-1} r^h e^{iP(r)} \right| < \mu^h R$$

となる。補題 6.2 の α はここでは $2\alpha = \frac{(-1)^{k-1} t}{kv^k}$ で与えられる。 $0 \leq r \leq \mu - 1$ のとき $0 \leq \frac{r}{v} < \frac{\mu}{v} < 1$ なので、補題 6.4 の $e_h(t)$ を定義する式に $x = \frac{r}{v}$ を代入すると、

$$\left(1 + \frac{r}{v}\right)^{it} = \exp \left(it \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{r}{v}\right)^n \right) \sum_{h=0}^{\infty} e_h(t) \left(\frac{r}{v}\right)^h = \exp(iP(r)) \sum_{h=0}^{\infty} e_h(t) \frac{r^h}{v^h}$$

となる。したがって和をとれば

$$\sum_{r=0}^{\mu-1} \left(1 + \frac{r}{v}\right)^{it} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{e_h(t)}{v^h} \sum_{r=0}^{\mu-1} r^h e^{iP(r)}$$

とできて、指数和が生じる。仮定より $\frac{\mu}{v} \leq \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{k+1}}$ なので、補題 6.4 より

$$\begin{aligned} \left| \sum_{r=0}^{\mu-1} \left(1 + \frac{r}{v}\right)^{it} \right| &\leq \sum_{h=0}^{\infty} \frac{|e_h(t)|}{v^h} \left| \sum_{r=0}^{\mu-1} r^h e^{iP(r)} \right| < \sum_{h=0}^{\infty} \frac{|e_h(t)|}{v^h} \mu^h R \\ &\leq R \sum_{h=0}^{\infty} |e_h(t)| \left(\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{k+1}} \right) < 2R \end{aligned}$$

となる。 □

補題 6.5 の評価を使うと所望の評価を得る。

補題 6.6 (目標としていた指数和の評価) $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, $K := 2^{k-1}$ とする. $t \geq 3$, $0 < w \leq 1$, $N, N' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $N \leq N' < 2N$ とする. このとき,

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^{it}} \right| < 2^{17} (N^{1-\frac{1}{K}} t^{\frac{1}{(k+1)K}} + N t^{-\frac{1}{(k+1)K}} \log^{\frac{k-1}{K}} t) \log^{\frac{1}{K}} t$$

が成り立つ. ここで 2^{17} という数に特に意味はなく, 絶対定数であることが重要である.

証明 $N \leq 4t^{\frac{1}{k+1}}$ のときと $N > 4t^{\frac{1}{k+1}}$ のときに場合分けする.

$N \leq 4t^{\frac{1}{k+1}}$ のときは絶対値を和の中に入れてよいため簡単である. 実際,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^{it}} \right| &\leq \sum_{n=N}^{N'} 1 = N' - N + 1 \leq N = N^{1-\frac{1}{K}} N^{\frac{1}{K}} \\ &\leq N^{1-\frac{1}{K}} \times 4^{\frac{1}{K}} t^{\frac{1}{(k+1)K}} < 4N^{1-\frac{1}{K}} t^{\frac{1}{(k+1)K}} \log^{\frac{1}{K}} t \end{aligned}$$

となり, 主張の不等式を得る. ここで, $4 < 4^K \log t$ より $4^{\frac{1}{K}} < 4 \log^{\frac{1}{K}} t$ であることを用いた.

後は $N > 4t^{\frac{1}{k+1}}$ のときを考えればよい. このときは $N > 4$ である. $\mu := [\frac{1}{2} N t^{-\frac{1}{k+1}}]$, $M := [\frac{N'-N}{\mu}]$ とおくと, これらは整数で $\mu \geq 2$, $M \geq 0$ を満たす. さらに

$$\frac{1}{4} N t^{-\frac{1}{k+1}} < \mu \leq \frac{1}{2} N t^{-\frac{1}{k+1}} \quad (6.4)$$

$$M \leq \frac{N' - N}{\mu} < \frac{N}{\mu} < 4t^{\frac{1}{k+1}} \quad (6.5)$$

$$0 \leq N' - N - M\mu < \mu \quad (6.6)$$

が成り立つ. $M < 2$ のときは評価は簡単で, 実際 $N' \leq N + M\mu + (\mu - 1) \leq N + \mu + (\mu - 1) = N + 2\mu - 1$ となり, 絶対値を和の中に入れて

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^{it}} \right| \leq N' - N + 1 \leq 2\mu \leq N t^{-\frac{1}{k+1}}$$

とできる. ここで

$$t^{-\frac{1}{k+1}} < t^{\frac{1}{(k+1)K}} \log^{\frac{k-1}{K}} N \log^{\frac{1}{K}} t \quad (6.7)$$

を使えば主張を得る. (6.7) は, $t \geq 3$, $N > 4$ のときに成り立つ不等式

$$\frac{1}{t^{\frac{K}{k-1}}} \leq 1 < \log^{k-1} N \log t$$

の両辺を $1/K$ 乗すれば得られる.

最後に, $M \geq 2$ のときを考える. これが一番面倒である. $0 \leq m \leq M$ なる整数 m に対して $v_m := N + w + m\mu$ とおく.

$$N < v_m \leq v_M \leq N + 1 + \frac{N' - N}{\mu} \times \mu = N' + 1 \leq 2N$$

となる. 特に $N < v_m$ なので, (6.4) により

$$\frac{\mu}{v_m} < \frac{\mu}{N} < \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{k+1}}$$

となる. ここで μ の倍数ごとに和を区切って

$$\sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^{it}} = \sum_{m=1}^M \sum_{r=0}^{\mu-1} \frac{1}{(v_{m-1}+r)^{it}} + \sum_{r=0}^{N'-N-M\mu} \frac{1}{(v_M+r)^{it}}$$

としよう. この第 2 項は, (6.6) と (6.4) に注意すれば, 絶対値を和の中に入れることで

$$\left| \sum_{r=0}^{N'-N-M\mu} \frac{1}{(v_M+r)^{it}} \right| \leq N' - N - M\mu < \mu \leq \frac{1}{2} N t^{-\frac{1}{k+1}} \leq N t^{-\frac{1}{k+1}}$$

となる. したがって

$$s_m := \left| \sum_{r=0}^{\mu-1} \frac{1}{(1 + \frac{r}{v_{m-1}})^{it}} \right| = \left| \sum_{r=0}^{\mu-1} \left(1 + \frac{r}{v_{m-1}} \right)^{it} \right|$$

とおけば, $t \geq 3$, $N \geq 4$ のときの不等式 (6.7) により,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^{it}} \right| &= \left| \sum_{m=1}^M \sum_{r=0}^{\mu-1} \frac{1}{(v_{m-1}+r)^{it}} + \sum_{r=0}^{N'-N-M\mu} \frac{1}{(v_M+r)^{it}} \right| \\ &< \sum_{m=1}^M s_m + N t^{-\frac{1}{k+1}} \end{aligned}$$

$$< \sum_{m=1}^M s_m + N t^{-\frac{1}{(k+1)K}} (\log^{\frac{k-1}{K}} N) \log^{\frac{1}{K}} t$$

となる．補題 6.5 で $v = v_{m-1}$ としてよくて， $\Theta_m := \frac{tk!H}{2kv_{m-1}^k}$ (ただし $m \in \{1, \dots, M\}$) とおくと，

$$s_m < 8 \left(\mu^{1-\frac{1}{K}} + \mu^{1-\frac{k}{K}} \left\{ \sum_{h_1, \dots, h_{k-1}=1}^{\mu} \min \left(\mu, \frac{1}{|\sin \Theta_m|} \right) \right\}^{\frac{1}{K}} \right)$$

となる (Θ_m は $h_1, \dots, h_{k-1}$ に依存するが添え字づけていない)．よって，

$$\sum_{m=1}^M s_m < 8M\mu^{1-\frac{1}{K}} + 8\mu^{1-\frac{k}{K}} \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{h_1, \dots, h_{k-1}=1}^{\mu} \min \left(\mu, \frac{1}{|\sin \Theta_m|} \right) \right\}^{\frac{1}{K}}$$

となる．第 1 項については (6.4) と (6.5) により， $8M\mu^{1-\frac{1}{K}} < 8 \times 4t^{\frac{1}{k+1}} \times \frac{1}{2}N^{1-\frac{1}{K}}t^{-\frac{1}{k+1}} < 32N^{1-\frac{1}{K}}t^{\frac{1}{(k+1)K}} \log^{\frac{1}{K}} t$ となる．第 2 項についてはいろいろ頑張ること

$$(\text{第 2 項}) < 2^{16} (t^{-\frac{1}{(k+1)K}} N \log^{\frac{k-1}{K}} N + t^{\frac{1}{(k+1)K}} N^{1-1/K}) \log^{\frac{1}{K}} t$$

であることが分かるが，この評価はとても面倒なので次の補題 6.7 に譲ることとする．第 1 項と第 2 項の評価から $\sum_{m=1}^M s_m$ の評価が得られるので，主張を得る． $\square$

補題 6.7 記号は補題 6.6 およびその証明中と同じとする．このとき，

$$\begin{aligned} & 8\mu^{1-\frac{k}{K}} \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{h_1, \dots, h_{k-1}=1}^{\mu} \min \left(\mu, \frac{1}{|\sin \Theta_m|} \right) \right\}^{\frac{1}{K}} \\ & < 2^{16} (t^{-\frac{1}{(k+1)K}} N \log^{\frac{k-1}{K}} N + t^{\frac{1}{(k+1)K}} N^{1-\frac{1}{K}}) \log^{\frac{1}{K}} t. \end{aligned}$$

証明 以下， $\min \left(\mu, \frac{1}{|\sin \Theta_m|} \right)$ を $\min_{m,H}$ と書くことにする． $k \geq 2$ なので $p := K > 1$ ， $q := \frac{K}{K-1} > 1$ である． $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ となるので，Hölder の不等式により

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{h_1, \dots, h_{k-1}=1}^{\mu} \min_{m,H} \right\}^{\frac{1}{K}} & \leq M^{1-\frac{1}{K}} \left\{ \sum_{m=1}^M \sum_{h_1, \dots, h_{k-1}=1}^{\mu} \min_{m,H} \right\}^{\frac{1}{K}} \\ & = M^{1-\frac{1}{K}} \left\{ \sum_{h_1, \dots, h_{k-1}=1}^{\mu} \sum_{m=1}^M \min_{m,H} \right\}^{\frac{1}{K}} \end{aligned}$$

が成り立つ (これは (6.3) と実質同じ不等式である). m に関する和と $(h_1, \dots, h_{k-1})$ に関する和を交換するのがポイントである. m に関する和を評価するのが面倒であるが, そこを突破すれば $h_1, \dots, h_{k-1}$ に関する和の評価は実は簡単である.

まず m に関する和を評価するため, $h_1, \dots, h_{k-1}$ を固定して考える. $\frac{1}{x^k}$ に対する平均値の定理を用いると, $1 \leq m \leq M$ のとき

$$\Theta_m - \Theta_{m+1} = \frac{tk!H}{2k} \left(\frac{1}{v_{m-1}^k} - \frac{1}{v_m^k} \right) > \frac{tk!H}{2k} \frac{k(v_m - v_{m-1})}{v_m^{k+1}}$$

となる. よって

$$\Theta_m - \Theta_{m+1} > \frac{tk!H}{2k} \frac{k\mu}{(2N)^{k+1}} > \frac{tk!H}{2} \frac{Nt^{-\frac{1}{k+1}}}{4(2N)^{k+1}} = \frac{k!}{2^{k+4}} Ht^{\frac{k}{k+1}} N^{-k}$$

となるので, $\Delta := \frac{k!}{2^{k+4}} Ht^{\frac{k}{k+1}} N^{-k} > 0$ とおくと $\Theta_m > \Theta_{m+1} + \Delta$ が成り立つ.

$\sin$ の値の逆数和を評価するために, Θ_m が実数直線上のどこに存在しているか考えてみる. $\Theta_1 = \frac{tk!H}{2k(N+w)} < tk!HN^{-k}$ であることと $0 < \Theta_M < \dots < \Theta_2 < \Theta_1$ であることに注意すると, $\Theta_1, \dots, \Theta_M$ のいずれかが含まれている $(\frac{\pi}{2}g, \frac{\pi}{2}(g+1)]$ の形の区間の候補の個数を評価できる. 実際, この個数は $[0, \Theta_1]$ を $\pi/2$ おきに区切ってできる区間の個数以下であるから, 個数は高々

$$1 + \frac{\Theta_1}{\pi/2} < 1 + \frac{2}{\pi} tk!HN^{-k} < 1 + tk!HN^{-k}$$

である.

$\Theta_1, \dots, \Theta_M$ のいずれかを含む区間のうちの 1 つを $(\frac{\pi}{2}g, \frac{\pi}{2}(g+1)]$ (ただし g は整数) とする. この区間には $\Theta_{a_g+1}, \dots, \Theta_{a_g+m_g}$ の m_g 個が含まれているとすると, $(m_g - 1)\Delta < \pi/2$ が成り立つ. また $|\sin \Theta_{a_g+2}| > \sin \Delta$, $|\sin \Theta_{a_g+3}| > \sin 2\Delta, \dots$, $|\sin \Theta_{a_g+m_g}| > \sin(m_g - 1)\Delta$ となる. さらに, $l \in \{1, \dots, m_g - 1\}$ のとき $l\Delta \leq \pi/2$ より

$$\sin(l\Delta) \geq \frac{2}{\pi} l\Delta > \frac{l\Delta}{2}$$

である. $m_g \leq M$ であることと (6.5) より $M < 4t^{\frac{1}{k+1}}$ であること, $\sum_{l=1}^M \frac{1}{l} < 1 + \log M$ が成り立つことを用いると,

$$\sum_{l=0}^{m_g-1} \min_{a_g+l+1, H} \leq \mu + \sum_{l=1}^{m_g-1} \frac{1}{|\sin \Theta_{a_g+l+1}|} < \mu + \sum_{l=1}^{m_g-1} \frac{1}{\sin l\Delta}$$

$$\begin{aligned}
&< \mu + \sum_{l=2}^{m_g-1} \frac{2}{l\Delta} \leq \mu + \sum_{l=1}^M \frac{2}{l\Delta} < \mu + \frac{2}{\Delta}(1 + \log M) \\
&< \mu + \frac{2}{\Delta}(1 + \log 4t^{\frac{1}{k+1}}) < \mu + \frac{2}{\Delta}(1 + 2\log 2 + \frac{1}{2}\log t) \\
&< \mu + \frac{1}{\Delta}(6 + \log t) < \mu + \frac{7}{\Delta}\log t
\end{aligned}$$

となる. ここで (6.4) より $\mu < Nt^{-\frac{1}{k+1}}$ となることを思い出すと

$$\mu\Delta \leq \mu \frac{k!}{2^{k+4}} \mu^{k-1} t^{\frac{k}{k+1}} N^{-k} < k!(\mu t^{\frac{1}{k+1}} N^{-1})^k < k!$$

なので,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{m_g-1} \min_{a_g+l+1, H} &< \frac{k!}{\Delta} + \frac{7\log t}{\Delta} < \frac{k!\log t}{\Delta} + \frac{7k!\log t}{\Delta} = \frac{8k!\log t}{\Delta} \\
&= 8 \times 2^{k+4} \frac{1}{H} N^k t^{-\frac{k}{k+1}} \log t \leq 2^{8k} t^{-\frac{k}{k+1}} N^k \frac{1}{H} \log t
\end{aligned}$$

となる. これで $(\frac{\pi}{2}g, \frac{\pi}{2}(g+1)]$ に含まれる Θ_m たちの寄与は評価できた. この寄与をすべてかき集めて足せば $\sum_{m=1}^M \min\left(\mu, \frac{1}{|\sin \Theta_m|}\right)$ の評価が得られる. Θ_m を含む区間の候補の数は高々 $1 + tk!HN^{-k}$ であったことを思い出せば,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^M \min_{m, H} &< (1 + tk!HN^{-k}) \times 2^{8k} t^{-\frac{k}{k+1}} N^k \frac{1}{H} \log t \quad (6.8) \\
&= 2^{8k} t^{-\frac{k}{k+1}} N^k \frac{1}{H} \log t + 2^{8k} k! t^{\frac{1}{k+1}} \log t
\end{aligned}$$

を得る.

次にこの和の $h_1, \dots, h_{k-1}$ を動かして和をとったものを評価したいが, それは

$$\begin{aligned}
\sum_{h_1, \dots, h_{k-1}=1}^{\mu} \frac{1}{H} &= \left(\sum_{h=1}^{\mu} \frac{1}{h} \right)^{k-1} \leq (1 + \log \mu)^{k-1} \\
&\leq (1 + \log N)^{k-1} \leq (2 \log N)^{k-1} < 2^k \log^{k-1} N
\end{aligned}$$

と $\sum_{h_\nu} 1 = \mu^{k-1} \leq N^{k-1} t^{-\frac{k-1}{k+1}}$ を使えばよく, 結局

$$\sum_{h_1, \dots, h_{k-1}=1}^{\mu} \sum_{m=1}^M \min_{m, H} < 2^{9k} t^{-\frac{k}{k+1}} N^k (\log^{k-1} N) \log t + 2^{8k} k! t^{-\frac{k-2}{k+1}} N^{k-1} \log t$$

を得る. どうせ $1/K$ 乗をするので $2^{9k} \leq 2^{9K} < 2^{11K}$, $2^{8k} k! < 2^{8K} k^k < 2^{8K} 2^{k^2} < 2^{8K} 2^{3K} = 2^{11K}$ と大雑把に評価しておけば,

$$V := 2^{11} (t^{-\frac{k}{(k+1)K}} N^{\frac{k}{K}} \log^{\frac{k-1}{K}} N + t^{-\frac{k-2}{(k+1)K}} N^{\frac{k-1}{K}}) \log^{\frac{1}{K}} t$$

とおくとき

$$\sum_{h_1, \dots, h_{k-1}=1}^{\mu} \sum_{m=1}^M \min_{m,H} < V^K$$

だから

$$\left\{ \sum_{h_1, \dots, h_{k-1}=1}^{\mu} \sum_{m=1}^M \min_{m,H} \right\}^{\frac{1}{K}} < V \quad (6.9)$$

が成り立つ. (6.4) より $\mu < N t^{-\frac{1}{k+1}}$ であり, (6.5) より $M < 4 t^{\frac{1}{k+1}}$ であったので, 最初に Hölder の不等式によって与えた不等式を使えば

$$\begin{aligned} & 8 \mu^{1-\frac{k}{K}} \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{h_1, \dots, h_{k-1}=1}^{\mu} \min_{m,H} \right\}^{\frac{1}{K}} \\ & < 8 \mu^{1-\frac{k}{K}} M^{1-\frac{1}{K}} < 8 N^{1-\frac{k}{K}} t^{-\frac{1}{k+1} + \frac{k}{(k+1)K}} 4 t^{\frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)K}} V \\ & = 2^{16} (t^{-\frac{1}{(k+1)K}} N \log^{\frac{k-1}{K}} N + t^{\frac{1}{(k+1)K}} N^{1-\frac{1}{K}}) \log^{\frac{1}{K}} t \end{aligned}$$

となり, 主張を得る. $\square$

6.1 指数和の評価のまとめ

補題 6.6 では it 乗が出てくる指数和の評価を与えたが, より一般に $\sigma + it$ 乗の和についても評価を与えたい. これは部分和法を使えば $\sigma = 0$ の場合の評価に帰着できるので, 最終的に以下の評価を得る.

系 6.8 $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, $K := 2^{k-1}$ とする. $N, N' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $N \leq N' < 2N$ とする. $0 < w \leq 1$, $\sigma > 0$, $t \geq 3$, $s = \sigma + it$ のとき,

$$\sum_{n=N}^{N'-1} \frac{1}{(n+w)^s} \leq 2^{17} (N^{1-\frac{1}{K}-\sigma} t^{\frac{1}{(k+1)K}} + N^{1-\sigma} t^{-\frac{1}{(k+1)K}} \log^{\frac{k-1}{K}} t) \log^{\frac{1}{K}} t.$$

証明 補題 6.6 の不等式の右辺を Z とする. $\sigma > 0$ なので数列 $\{\frac{1}{(n+w)^\sigma}\}_{n=N}^{N'-1}$ は単調減少であり, $\frac{1}{(n+w)^\sigma} \leq \frac{1}{N^\sigma}$ に注意すれば, 補題 3.1 より

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s} \right| = \left| \sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^\sigma} \frac{1}{(n+w)^{it}} \right| \leq \frac{1}{N^\sigma} Z$$

となる. これより主張を得る. $\square$

この系が強力なので, これを使えば後は簡単である.

補題 6.9 $q \in \mathbb{Z}, q \geq 3, Q = 2^{q-1}$ とする. $t > 3, \sigma = 1 - \frac{1}{Q}$ とする. $N, N' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ は $\frac{t^{\frac{2}{q+1}}}{\log^{q-1} t} < N \leq t^2$ と $N \leq N' < 2N$ を満たすとする. このとき, q にのみ依存する $\delta_q > 0$ が存在して,

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < 2^{18} t^{\frac{1}{(q+1)Q} - \delta_q} \log^q t$$

となる.

証明 具体的に δ_q を定めることで証明する. $k \in \{2, \dots, q-1\}$ であって

$$\frac{t^{\frac{2}{k+2}}}{\log^{q-1} t} < N \leq \frac{t^{\frac{2}{k+1}}}{\log^{q-1} t}$$

を満たすものが存在するとする. この存在性は一意的である. もしこのような k が存在しないなら, N は

$$\frac{t^{2/3}}{\log^{q-1} t} < N \leq t^2$$

を満たすが, この場合は後で扱うことにする.

(1) 上記の $k \geq 2$ が存在したとすると, $t^{-\frac{1}{(k+1)K}} < N^{-\frac{1}{K}} t^{\frac{1}{(k+1)K}}$ が成り立つ. 系 6.8 から得られる

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < 2^{17} (N^{\frac{1}{Q} - \frac{1}{K}} t^{\frac{1}{(k+1)K}} + N^{\frac{1}{Q}} t^{-\frac{1}{(k+1)K}}) \log^{\frac{k}{K}} t$$

の第2項に $t^{-\frac{1}{(k+1)K}} < N^{-\frac{1}{K}} t^{\frac{1}{(k+1)K}}$ を適用すれば,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s} \right| &< 2^{18} N^{\frac{1}{Q}-\frac{1}{K}} t^{\frac{1}{(k+1)K}} \log^{\frac{k}{K}} t < 2^{18} \left(\frac{t^{\frac{2}{k+2}}}{\log^{q-1} t} \right)^{\frac{1}{Q}-\frac{1}{K}} t^{\frac{1}{(k+1)K}} \log^{\frac{k}{K}} t \\ &< 2^{18} t^{-\frac{2}{k+2}(\frac{1}{K}-\frac{1}{Q})+\frac{1}{(k+1)K}} \log^q t \end{aligned}$$

となる.

(1-1) $k = q - 1$ のとき, $K = Q/2$ なので t の指数は

$$-\frac{2}{q+1} \left(\frac{2}{Q} - \frac{1}{Q} \right) + \frac{2}{qQ} = -\frac{2}{(q+1)Q} + \frac{2}{qQ} = \frac{2}{q(q+1)Q} < \frac{1}{(q+1)Q}$$

となる. したがって $\delta_q = \frac{1}{(q+1)Q} - \frac{2}{q(q+1)Q} = \frac{q-2}{q(q+1)Q}$ とおけばよい.

(1-2) $k \leq q - 2$ のときは $Q \geq 4K$ なので

$$\begin{aligned} (t \text{ の指数}) &\leq -\frac{2}{k+2} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{4K} \right) + \frac{1}{(k+1)K} = \frac{1}{K} \left(-\frac{3}{2(k+2)} + \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{K} \frac{-(k-1)}{2(k+2)(k+1)} < 0 < \frac{1}{(q+1)Q} \end{aligned}$$

となる. したがって $\delta_q = \frac{1}{(q+1)Q}$ とおけばよい.

(2) 次に上記の $k \geq 2$ が存在しない場合を考える. 系 6.8 で $k = 1$ とすると^{*10}, $Q \geq 4$ に注意すれば,

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s} &< 2^{17} (N^{-1+\frac{1}{Q}} t^{1/2} + N^{\frac{1}{Q}} t^{-\frac{1}{2}}) \log t \\ &< 2^{17} \left\{ \left(\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\log^{q-1} t} \right)^{-1+\frac{1}{Q}} t^{1/2} + t^{\frac{2}{Q}} t^{-1/2} \right\} \log t \\ &< 2^{17} (t^{-\frac{1}{6}+\frac{2}{3Q}} + t^{\frac{2}{Q}-\frac{1}{2}}) \log^q t < 2^{18} \log^q t \end{aligned}$$

となる. よって $\delta_q = \frac{1}{(q+1)Q}$ とおけばよい.

以上の議論により, 証明が完了した. □

最後に, 後回しにしていた補題 4.1 と補題 4.2 を証明することでこの章を終える.

^{*10} 6章のここに至るまでに得た評価は $k = 1$ のときも同様にして示せる. ただし $k = 1$ のときは, ここに至るまでに出てきた “ $\sum_{h_1, \dots, h_{k-1}}$ ” はないものとし, $L = 0, H = 1$ とする.

補題 4.1 の証明 和を 2 べきで分割するので $N_j = 2^{j-1}$ とおく. $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ に対して a を素因数分解したときの 2 の指数を $\text{ord}_2(a) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. 区間 $I := (\frac{t^{\frac{2}{q+1}}}{\log^{q-1} t}, t^2]$ を $[N_j, 2N_j) \cap I$ の形の区間に分割すると $J := \text{ord}_2([t^2]) + 1$ 個の区間に分割されて, $I = \cup_{j=1}^{J+1} ([N_j, 2N_j) \cap I)$ となる. $\text{ord}_2([t^2]) + 1 = \mathcal{O}(\log t)$ である. ここで I と共通部分をとっているのは, I を分割したときに両端に位置する $j = 1$ と $j = J + 1$ の場合の区間は I に含まれているとは限らないからである.

各 j と $N_j \leq N' < 2N_j$ を満たす任意の整数 N' に対して, 補題 6.9 を適用すれば,

$$\sum_{n=N_j}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s} < 2^{18} t^{\frac{1}{(q+1)Q}} - \delta_q \log^q t, \quad t > 3$$

と評価できる. よって, 「 $\forall t > 3, \log^{q+1} t \leq C_q t^{\delta_q}$ 」を満たす定数 $C_q > 0$ をとることと,

$$\left(\sum_{\frac{t^{\frac{2}{q+1}}}{\log^{q-1} t} < n < N_1} + \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{n=N_j}^{2N_j-1} + \sum_{N_J \leq n < t^2} \right) \frac{1}{(n+w)^s} \ll \log t \times t^{\frac{1}{(q+1)Q}} \frac{\log^q t}{t^{\delta_q}} \\ \leq C_q t^{\frac{1}{(q+1)Q}}$$

と評価でき, 所望の不等式を得る. $\square$

補題 4.2 の証明 補題 4.1 と同様に, $[0, \frac{t^{\frac{1}{q+1}}}{\log^{q-1} t}]$ を 2 べきごとに分割して評価すればよい. 2 べきごとに分割したときに生じる区間の個数は $\text{ord}_2([\frac{t^{\frac{1}{q+1}}}{\log^{q-1} t}]) + 1 = \mathcal{O}(\log t)$ である.

$N, N' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を $N \leq N' < 2N$, $N \leq \frac{t^{\frac{2}{q+1}}}{\log^{q-1} t}$ を満たす整数とする. 系 6.8 で $\sigma = 1 - \frac{1}{Q}$, $k = q$ とすると,

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{(n+w)^s} \right| < 2^{17} (t^{\frac{1}{(q+1)Q}} + N^{\frac{1}{Q}} t^{-\frac{1}{(q+1)Q}} \log^{\frac{q-1}{Q}} t) \log^{\frac{1}{Q}} t \\ \leq 2^{17} t^{\frac{1}{(q+1)Q}} \log^{\frac{1}{Q}} t + 2^{17} \left(\frac{t^{\frac{2}{Q(q+1)}}}{\log^{\frac{q-1}{Q}} t} \right) t^{-\frac{1}{(q+1)Q}} (\log^{\frac{q-1}{Q}} t) \log^{\frac{1}{Q}} t = 2^{18} t^{\frac{1}{(q+1)Q}} \log^{\frac{1}{Q}} t$$

と評価できる. 2 べきごとに分けたことで生じる上記のような形の和をまとめて足し

あげれば

$$\sum_{0 \leq n \leq \frac{2}{\log^q - 1} t} \frac{1}{(n+w)^s} \ll \log t \times t^{\frac{1}{(q+1)Q}} \log^{\frac{1}{Q}} t$$

と評価できる. □

ここまでの議論により, 定理 2.3 (そして Weyl bound) の証明も完了した. 証明を見れば分かるが, 登場した不等式すべてにおいて, 無視している定数は $w \in (0, 1]$ に依存しない. そして q に依存する定数は補題 4.1 の証明で出てくる $C_q > 0$ のみである.

7 文献に関するコメント

指数和は日本語の専門書でも一応勉強できる. 松本 [12], 本橋 [14] を読めば基本は押さえられる. 加えて Titchmarsh [22] の 4 章と 5 章を読めば十分であろう. L 関数や解析的整数論の題材を集約した Iwaniec, Kowalski の本 [8, Chapter 8] にも指数和の章がある.

なんとこの世には指数和の評価に特化した本が存在する. Graham, Kolesnik による “van der Corput’s method of exponential sums” である. 指数対 (exponent pair) について詳しく書かれているのが特徴である.

以下は余談であるが, Tao のブログの記事 [20] の中で Weyl differencing に関する問題が提起されている. 興味のある読者はチャレンジされたし!

問題 7.1 χ を q を法とする Dirichlet 指標とする. $M, N \in \mathbb{Z}$, $1 \leq N \leq q$ とする. このとき Pólya-Vinogradov の不等式

$$\sum_{M+1 \leq n \leq M+N} \chi(n) \ll q^{1/2} \log q$$

もしくはこの改良が, Weyl differencing から得られるだろうか?

8 Riemann ゼータ関数に特化した証明

Hurwitz ゼータ関数の評価方法を紹介したが, Riemann ゼータ関数に特化した議論を用いると, 近似関数等式が使えるので Weyl bound の証明はもう少し簡単になる.

近似関数等式 (approximate functional equation) とは, Riemann ゼータ関数の関数等式を用いて近似することで得られる漸近式である. 慣習で, asymptotic formula とは呼ばない.

$$\zeta(1/2 + it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2+it}}$$

としたいが, この級数は発散するのでこのままでは意味をなさない. しかし級数を序盤の有限和で打ち切ると $s = 1/2 + it$ でも値として意味を持つので, 残りの無限和をうまく評価することで

$$\zeta(1/2 + it) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^{1/2+it}} + \chi(1/2 + it) \sum_{n \leq y} \frac{1}{n^{1/2-it}} + \mathcal{O}(x^{-1/2}) + \mathcal{O}(y^{-1/2})$$

の形の漸近公式を得る. これが近似関数等式である. ここで

$$\chi(s) := \frac{\Gamma_{\mathbb{R}}(1-s)}{\Gamma_{\mathbb{R}}(s)} = \frac{\pi^{-(1-s)/2} \Gamma((1-s)/2)}{\pi^{-s/2} \Gamma(s/2)} = 2^{s-1} \pi^s \frac{\sec(\pi s/2)}{\Gamma(s)}$$

とにおいて, これは Riemann ゼータ関数の関数等式 $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$ に現れるのであった^{*11}. この近似関数等式を用いる方法は Riemann ゼータ関数の関数等式が前提となっているため, Hurwitz ゼータ関数に対しては有効ではない.

Landau の論文 [10] で扱われている手法は, 本質的には the Weyl-Hardy-Littlewood method である. 指数和 $\sum_{n=a}^b e^{if(n)}$ の評価において f が実多項式の場合に評価を良くするのがこの手法であり, Titchmarsh [22, Chapter V] でも解説されている. Titchmarsh [22, Chapter V] では Landau の手法とは異なり近似関数等式を用いているため, Hurwitz ゼータ関数には応用できない. Titchmarsh [22, Theorem 5.5] により $\zeta(1/2 + it) \ll t^{1/6} \log^{3/2} t$ が与えられている.

注意 8.1 Titchmarsh の本 [22, Theorem 5.12], Patterson の本 [16, Theorem 6.6] には

$$\zeta(1/2 + it) = \mathcal{O}(t^{1/6} \log t), \quad t \geq 3$$

とある. Landau の結果 (Weyl-Hardy-Littlewood の方法) の $\log^{3/2} t$ の因子が $\log t$ に改善されている. Titchmarsh の本も Patterson の本も証明法は同じで, 近似関数等式から始めて指数和に関する van der Corput の 2 階微分判定法と 3 階微分判定法

^{*11} $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$ は $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\times}$ の自明表現に付随する Tate の局所 L 因子である.

を用いている．指数和 $\sum_{n=a}^b e^{if(n)}$ の評価において実数値関数 f の高次導関数の条件から指数和の評価を良くするのは van der Corput's method と呼ばれる．近似関数等式と高階微分判定法により証明がスッキリしている．近似関数等式を用いているためこの手法は Hurwitz ゼータ関数には適用できない．

注意 8.2 Titchmarsh の本 [22, Theorem 5.18] にあるように,

$$\zeta(1/2 + it) \ll t^{27/164}, \quad t \geq 3$$

も指数和の評価と近似関数等式を用いて証明されている．この評価は van der Corput's method のときの証明法と同じであり，評価を $1/6 = 0.16666\dots$ から $27/164 = 0.164634\dots$ に改善するのはいまや容易い．

現代では，Landau の論文を読むよりも Titchmarsh の本を読んだほうが洗練された手法を理解できると思われる．それでも，歴史上初の文献でありさらに近似関数等式を用いない手法によって Hurwitz ゼータ関数を評価した Landau の論文が色褪せることはない．

注意 8.3 本橋の素数分布論に関する本 [14, §2.1] に簡明な証明が載っている．指数和を Fourier 級数だと思えることができるので，Poisson 和公式で指数積分の和に書き換えることができる．この技法と Weyl や van der Corput の方法を用いることでも

$$\zeta(1/2 + it) \ll t^{1/6}(\log t)^{3/2}, \quad t \geq 3$$

が証明できる．

本記事で扱わなかった手法についても触れておく．指数対 (exponent pair) という概念があって，これは指数和の評価に現れるパラメーターであり，指数和の評価から新しい指数和の評価を得る操作 A, B なるものを用いて，1 つ exponent pair を見つければそこからどんどん新しい exponent pair を作ることができる．exponent pair が見つければそれに応じて Riemann ゼータ関数の subconvexity も得られる．例えば Phillips [17] が与えた $229/1392 = 0.164511\dots$ は良い exponent pair を見つけることで得られたものである．exponent pair は指数和に特化した Graham, Kolesnik の本 [6] を読めば勉強できる．

Bombieri, Iwaniec [3] は Vinogradov の平均値定理と large sieve (大きな篩) を応用することで， A, B の操作では得られない新しい exponent pair を発見し，

$$\zeta(1/2 + it) \ll_{\epsilon} |t|^{9/56+\epsilon}, \quad |t| \gg 1$$

を得た．証明は Graham, Kolesnik の本 [6, §7] で解説されている．

本記事の執筆時点 (2025 年 9 月) で Riemann ゼータ関数の最良の subconvexity は Bourgain [4] によって証明された

$$\zeta(1/2 + it) \ll_{\epsilon} |t|^{13/84+\epsilon}, \quad |t| \gg 1$$

である ($13/84 = 0.154761\dots$)．decoupling method と呼ばれる手法によって，上記の評価は示された．

Riemann ゼータ関数の平均値の評価から subconvexity を導出することも可能である．レベル 1 の Maass カスプ形式の空間の完全正規直交系で Hecke 固有形式からなるものを $\{f_j\}_j$ とすると，スタンダード L 関数 $L(s, f_j)$ は次数 2 の保型 L 関数である．本橋の公式 [13] (起源は Zavorotnyi [25]) は，Riemann ゼータ関数の 4 次モーメントを $L(1/2, f_j)$ などを用いて表す公式である：

$$\int_T^{T+H} |\zeta(1/2 + it)|^4 dt = \sum_{j; t_j < T/H} (\dots) L(1/2, f_j)^3 + \dots$$

この公式の右辺は Weyl law により $T^{2/3+o(1)}$ になるので， $\zeta(1/2 + it) \ll_{\epsilon} 1 + |t|^{2/3 \times 1/4 + \epsilon} = 1 + |t|^{1/6 + \epsilon}$ が得られる (cf. Blomer's talk^{*12})．「Riemann ゼータ関数だけに興味があって，保型 L 関数には興味がない！」という方も保型形式が必要に迫られることだろう．

今のところ Riemann ゼータ関数の subconvexity の研究においては exponent pair の理論や decoupling method の理論が有益そうな気がする．しかしながら，Riemann 予想を先に証明してその Corollary として Lindelöf 予想を証明するのが，一番っとり早いかもしれない．

付録 A 松本耕二著「リーマンのゼータ関数」の 7 章の補足

松本 [12] の 7 章「オーダー評価」を読む人のためにこの Appendix を残しておく．7 章は簡潔にまとまっていて勉強するのに適しているが，議論が不十分であると筆者が感じる箇所がいくつか見られるので，補足を書いておく^{*13}．したがって松本 [12]

^{*12} <https://video.renyi.hu/video/valentin-blomer-the-weyl-bound-for-triple-product-l-functions-166>

^{*13} 7 章とは関係ないが，6 章の補題 6.2 の証明にも不備がある．補題 6.2 の主張自体は正しい．

の 7 章を見ていない人にとってはこの Appendix は訳が分からないと思われる．この Appendix は松本 [12] を読んでいない人は読み飛ばしても構わない．

この章ではページ番号や記号や式番号は松本 [12] に従うことにする．ただしこの本の 7 章において η に依存する定数を見捨てた評価を $\mathcal{O}$ で書いている箇所がいくつかある．ここでは η に依存することを明示して $\mathcal{O}_\eta$ と書くことにする．

(1) (7.1) の評価は

$$\zeta(\sigma + it) \asymp 1 \quad (\sigma > 1)$$

とあるが

$$\zeta(\sigma + it) \asymp 1 \quad (t \in \mathbb{R})$$

とすべきである．ここで無視している定数は σ に依存する．

(2) pp.95–96 で、補題 7.2 を用いて定理 7.1 の証明をしているが、p.95 の「 η を十分小さくとれば $\nu = 0$ のみが現れ」の部分は正しくない．補題 7.2 の右辺は $\alpha - \eta < \nu < \beta + \eta$ なる整数 ν をわたる和であるが、 $\alpha = f'(N) = \frac{|t|}{2\pi N} \in [0, 1)$ 、 $\beta = f'(x) = \frac{|t|}{2\pi x} \in [0, 1)$ に対して補題 7.2 を適用するので、 η が十分小さいときは $\alpha - \eta < \nu < \beta + \eta$ を満たす整数は存在しない．

いろいろ修正方法はあると思われるが、例えば以下のように修正すればよい．

まず p.95 で $f(x) = \frac{t}{2\pi} \log x$ と定義されているが、 $f(x) = \frac{|t|}{2\pi} \log x$ と定義する． f を定義した後に

$$|f'(x)| = \frac{|t|}{2\pi x} \leq \frac{1}{C} < 1$$

とあるが、ここは

$$f'(x) = \frac{|t|}{2\pi x} \leq \frac{1}{C} < 1$$

に変更する．ここで十分小さい $\epsilon > 0$ を 1 つ固定し、 $\eta = \alpha + \epsilon$ とすると、 $\alpha - \eta = -\epsilon$ 、 $\beta + \eta = \alpha + \beta + \epsilon$ なので、 N を十分大きくして $\alpha + \beta + \epsilon < 1$ とすれば、 $\alpha - \eta < \nu < \beta + \eta$ を満たす整数 ν は $\nu = 0$ のみになる． η は N に依存し、補題 7.2 で無視している定数は η に依存しているため、無視した定数は N に依存している．したがって $N \rightarrow \infty$ とするときに困ってしまう．だがしかし補題 7.2 の証明をよく読めば、補題 7.2 の誤差項

$$\mathcal{O}_\eta(g(a) \log(\beta - \alpha + 2)) + \mathcal{O}_\eta(|g'(a)|)$$

は

$$\mathcal{O}(g(a) \log(\beta - \alpha + 2)) + \mathcal{O}(|g'(a)|) + \mathcal{O}\left(\frac{g(a)}{\eta}\right)$$

(無視している定数は η に依存しない) とできるので, これを用いる. (なぜ誤差項がこうなるかは後で述べる.)

(3) p.95 の

$$\sum_{x < n \leq N} n^{-\sigma} e^{it \log n} = \int_x^N e^{-\sigma + it} du + \mathcal{O}_\eta(x^{-\sigma})$$

を

$$\sum_{x < n \leq N} n^{-\sigma} e^{i|t| \log n} = \int_x^N e^{-\sigma + i|t|} du + \mathcal{O}(x^{-\sigma}) + \mathcal{O}\left(\frac{x^{-\sigma}}{\eta}\right)$$

に修正する. $t \geq 0$ のときは上の両辺の複素共役をとり, $t < 0$ ならそのまま用いることで,

$$\sum_{x < n \leq N} n^{-\sigma} e^{-it \log n} = \int_x^N \frac{1}{u^s} + \mathcal{O}(x^{-\sigma}) + \mathcal{O}\left(\frac{x^{-\sigma}}{\eta}\right)$$

となる. これと (7.11) から p.96 の上から 1 行目の式は

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + \mathcal{O}(x^{-\sigma}) + \mathcal{O}\left(\frac{x^{-\sigma}}{\eta}\right) + \mathcal{O}((\sigma^{-1}|s| + 1)N^{-\sigma})$$

に置き換わる. $N \rightarrow \infty$ とすると $\eta - \epsilon = \alpha \rightarrow 0$ だから $\eta \rightarrow \epsilon$ となる. よって $N \rightarrow \infty$ とすることで

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + \mathcal{O}\left(\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)x^{-\sigma}\right)$$

となる. $\epsilon > 0$ は十分小さい定数であったから定理 7.1 の主張を得る.

(4) 後回しにしていた補題 7.2 の誤差項について述べる. p.102 の上から 5 行目は

$$\ll |g'(a)| \frac{\log(\beta + 2)}{\beta} \ll |g'(a)|$$

とあるが, 正しくは

$$\ll |g'(a)| \left(\frac{\log(\beta + 2)}{\beta} + 1 \right) \ll |g'(a)|$$

である．p.102 の下から 7 行目で「補題 7.3 により $\mathcal{O}(g(a))$ となる．」とあるが，ここは「補題 7.3 により $\mathcal{O}(\frac{g(a)}{\eta})$ となる．無視している定数は η に依らない．」とする．補題 7.2 の証明で η に依存する定数が無視されるのはここだけであるので誤差項が上記 (2) で述べた通りの形になる．

- (5) ついでだが，p.104 の補題 7.5 の証明で $\mathcal{O}((\beta - \alpha + 1)\Lambda^{-1/2})$ の評価を得るところがあるが，ここは $\eta = 1/2$ として補題 7.4 を適用すればよい．
- (6) これまで説明してきた修正案とは関係ないが，同じ章なので p.103 の補題 7.4 の証明について一応補足しておく．証明の最後に「点 c が存在しない場合は，上と同様に議論すればよい」と書いてあるが，実際にどのように同様にすればよいのか説明する． c が存在しない場合， $F' > 0$ のときは

$$\int_a^b G(x)e^{iF(x)}dx = \int_a^{a+\delta} G(x)e^{iF(x)}dx + \int_{a+\delta}^b G(x)e^{iF(x)}dx$$

となる．絶対値を積分の中に入れることで $|\int_a^{a+\delta} G(x)e^{iF(x)}dx| < G\delta$ が得られる． $b-a > 2\delta$ ならば，任意の $x \in [a+\delta, b]$ に対して $F'(x) = \int_a^x F''(t)dt + F'(a) \geq M(x-a) + F'(a) > M\delta$ なので補題 7.3 より $|\int_{a+\delta}^b G(x)e^{iF(x)}dx| < \frac{4G}{M\delta + F'(a)} < \frac{4G}{M\delta}$ となる． $b-a \leq 2\delta$ のときは積分の中に絶対値を入れることで $|\int_{a+\delta}^b G(x)e^{iF(x)}dx| < G\delta$ となる．よって

$$\left| \int_a^b G(x)e^{iF(x)}dx \right| < G\delta + \max\left(\frac{4G}{M\delta}, G\delta\right) < G\left(2\delta + \frac{8}{M\delta}\right)$$

となるので， $\delta = 2/\sqrt{M}$ とすることで証明が完了する． $F'(x) < 0$ のときは $\int_a^{b-\delta}$ と $\int_{b-\delta}^b$ に分けることで上述の議論と本当に同様にすればよい．

謝辞

第 32 回整数論サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」での講演の機会を与えてくださったことに関して，世話人の鈴木正俊氏（東京科学大学），中村隆氏（東京理科大学），青木宏樹氏（東京理科大学）に感謝いたします．指数和に関して有益なコメントをくださった宗野恵樹氏（関東学院大学）にも感謝いたします．原稿に関して有益なコメントをくださった門田慎也氏（公立鳥取環境大学），権寧魯氏（九州大学），鈴木正俊氏（東京科学大学），峰正博氏（早稲田大学）にも感謝いたします．

筆者は科研費 JP24K06664 (基盤研究 (C)) の助成を受けています。

参考文献

- [1] 荒川恒男, 伊吹山知義, 金子昌信, ベルヌーイ数とゼータ関数 新装版, 共立出版, 2022.
- [2] V. Blomer, S. Jana, P. Nelson, *The Weyl bound for triple product L -functions*, Duke Math. J. **172** (2023), no. 6, 1173–1234.
- [3] E. Bombieri, H. Iwaniec, *On the order of $\zeta(1/2 + it)$* , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **13** (1986), no. 3, 449–472.
- [4] J. Bourgain, *Decoupling, exponential sums and the Riemann zeta function*, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), 205–224.
- [5] van der Corput, *Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem*, Math. Ann. **87** (1922), no. 1-2, 39–65.
- [6] S. W. Graham, G. Kolesnik, *van der Corput's method of exponential sums*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 126, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [7] Gronwall, *Über die Gibbssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x + 1/2 \sin 2x + \dots + 1/n \sin nx$* , Math. Ann. **72** (1912), no. 2, 228–243.
- [8] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 53. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [9] E. Landau, *Zum Waringschen Problem*, Math. Z. **12**, (1922), 219–247.
- [10] E. Landau, *Über die ζ -Funktion und die L -Funktionen*, Math. Z. **20**, 105–125, (1924).
- [11] J. E. Littlewood, *Researches in the theory of the Riemann ζ -function*, in Records of Proceedings at Meetings, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **20** (1922), xxiv.
- [12] 松本耕二, リーマンのゼータ関数, 朝倉書店, 2005.
- [13] Y. Motohashi, *An explicit formula for the fourth power mean of the Riemann zeta-function*, Acta Math. **170** (1993), no. 2, 181–220.
- [14] 本橋洋一, 解析的整数論 I 素数分布論, 朝倉書店, 2009.

- [15] 本橋洋一, 解析的整数論 II ゼータ解析, 朝倉書店, 2011.
- [16] S. J. Patterson, *An introduction to the theory of the Riemann zeta-function*, Cambridge Stud. Adv. Math. 14, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [17] E. Phillips, *The zeta function of Riemann; further developments of van der Corput method*, Quart. J. Math. **4**, Issue 1, (1933), 209–225.
- [18] 杉山真吾, 「 L 関数の subconvexity について」, 第 32 回整数論サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」報告集.
- [19] 高木貞治, 定本 解析概論 改訂第三版, 岩波書店, 2010.
- [20] T. Tao, *Bounding short exponential sums on smooth moduli via Weyl differencing*, 2013. <https://terrytao.wordpress.com/tag/weyl-differencing/> (2025 年 9 月 11 日時点).
- [21] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, 2nd ed., Oxford University Press, Oxford, 1976.
- [22] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, 2nd ed., Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.
- [23] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Ann. **77** (1916), no. 3, 313–352.
- [24] H. Weyl, *Zur Abschätzung von $\zeta(1 + ti)$* , Math. Z. **10** (1921), 88–101.
- [25] N. I. Zavorotnyĭ, *On the fourth moment of the Riemann zeta-function*, Automorphic functions and number theory, Part I, II (Russian), 69–124a, 254, Akad. Nauk SSSR, Dalnevostochn. Otdel., Vladivostok, 1989.

零点密度について

井上 翔太（日本大学 生産工学部 教養・基礎科学系）

概要

本報告書は、2025 年度サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」に関連して執筆したものである。本稿では Riemann ゼータ関数の零点密度について概説し、素数分布への応用やゼータ関数の値分布との関係に触れる。特に、零点密度評価の中でも素数分布に重要な応用をもつ Ingham および Huxley の結果とその証明を解説する。さらに、その証明に必要な Dirichlet 多項式の平均値定理や、Riemann ゼータ関数の 4 乗平均の漸近公式の証明も紹介する。

1 導入

本報告書では ζ は Riemann ゼータ関数を意味し、 s は複素数、その実部を σ 、虚部を t で表す。また、 ρ は Riemann ゼータ関数の非自明な零点とし、その実部を β 、虚部を γ とする。虚数単位は i （ローマン体）で表す。

本稿の目的は零点密度関数と呼ばれる、Riemann ゼータ関数の零点の個数関数

$$N(\sigma, T) := \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ \beta \geq \sigma, -T \leq \gamma \leq T}}^* 1$$

の上からの評価を証明し、その評価がもたらす素数分布への応用を紹介することである。ここで、 $\sum^*$ は零点を重複込みで和を取ることを意味する。この関数を用いると Riemann 予想は、任意の $\sigma > 1/2$, $T > 0$ に対して $N(\sigma, T) = 0$ 、という主張となるが、これを示すのは現時点では極めて困難である。Riemann-von Mangoldt の公式 ([14] の系 2.3) により、任意の $\sigma \geq 1/2$ に対して $N(\sigma, T) \ll T \log T$ と評価される。また、Euler 積表示により、 $\zeta(s)$ は $\sigma > 1$ で零点を持たないので、 $\sigma > 1$ に対して $N(\sigma, T) = 0$ であることも分かる。これらが $N(\sigma, T)$ に対する自明な評価である。よって我々の当面の目標は、Riemann 予想とまではいかなくとも、これら自明な評価よりも強力な非自明な評価を得ることである。現在、それら非自明な評価は、零点密度

評価 (zero-density estimate) や零点密度定理 (zero-density theorem) などと呼ばれる。そのような零点についての個数評価は素数分布に重要な応用を持つことが知られており, Riemann ゼータ関数の主要な研究テーマの一つとして確立されている。

本稿で証明する零点密度定理は以下の二つである。

定理 1.1 (Ingham [10], 1940) 正の定数 c_1 が存在して, 十分大きな任意の正の数 T と任意の $1/2 \leq \sigma \leq 1$ に対して,

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log T)^{c_1} \quad (1.1)$$

が成り立つ。

定理 1.2 (Huxley [7], 1972) 正の定数 c_2 が存在して, 十分大きな任意の正の数 T と任意の $3/4 \leq \sigma \leq 1$ に対して,

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{3(1-\sigma)}{3\sigma-1}} (\log T)^{c_2} \quad (1.2)$$

が成り立つ。

本稿では上記の定理を $c_1 = 6, c_2 = 3995$ で証明する。本来は $c_1 = 5, c_2 = 44$ であるが, 証明を簡潔にするために, ここでは前述の c_1, c_2 で証明を行う。

Hoheisel [6] や Ingham [9] により, このような零点密度評価が素数分布に応用できることが明らかにされた。実際, 定理 1.1 と定理 1.2 を組み合わせることで, 以下の素数分布に関する定理が得られる。

定理 1.3 正の定数 c_3 が存在して,

$$\pi(x+h) - \pi(x) \sim \frac{h}{\log x}, \quad x \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

が任意の $x^{7/12}(\log x)^{c_3} \leq h \leq x$ に対して成り立つ。特に, 素数の間隔評価,

$$p_{n+1} - p_n \ll p_n^{7/12} (\log p_n)^{c_3} \quad (1.4)$$

も成り立つ。

漸近公式 (1.3) は**短区間素数定理**と呼ばれる。Huxley の零点密度評価により, 短区間素数定理 (1.3) は $h = x^{7/12}(\log x)^{c_3}$ で成り立つが, この結果は Huxley 以降, 半世紀にわたり更新されることがなかった。しかし, 去年 (2024 年) Guth-Maynard [2]

による重要なブレイクスルーがあり, 短区間素数定理の幅が $h = x^{17/30+\varepsilon}$ に改善された. 彼らは十分大な T と任意の $1/2 \leq \sigma \leq 1$ に対して, 以下の零点密度評価

$$N(\sigma, T) \ll_{\varepsilon} T^{\frac{15(1-\sigma)}{3+5\sigma} + \varepsilon} \quad (1.5)$$

を示すことでこの改善を得ている.

短区間素数定理の応用の一つは, 素数の間隔評価である. 通常 of 素数定理 ([21] の定理 1.1) $\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x \exp(-c\sqrt{\log x}))$ から得られる素数の間隔評価は $p_{n+1} - p_n \ll p_n \exp(-c\sqrt{\log p_n})$ である. この右辺は $= o(p_n)$ で非自明ではあるが, $\gg p_n^{1-\varepsilon}$ なので, 通常 of 素数定理から得られる間隔評価の上限は p^a (a は 1 よりも真に小さな定数) にも届かない. これは現在最良 of Korobov-Vinogradov の誤差評価を用いても同様である. 一方で, もし短区間素数定理 (1.3) が $h = x^a$, $0 < a < 1$ で成り立つならば, $\pi(x + x^a) - \pi(x) \geq 1$ となるので, $p_{n+1} - p_n \ll p_n^a$ ($a < 1$) を得る. この考察と同様にして, 短区間素数定理 (1.3) から素数の間隔評価 (1.4) が導かれる. 特に $h = x^a$, $a < 1/2$ で (1.3) が成り立つならば, 十分大な n で $p_{n+1} - p_n \leq p_n^{1/2}$ となり, これは Legendre 予想*1 をほぼ解決する主張となる. このように, 零点密度評価は素数分布に対して極めて重要な応用をもたらす.

1.1 構成と諸注意

本稿は以下のように構成される. まず第 2 節で, 零点密度, 素数分布, および Riemann ゼータ関数の増大度評価と平均値定理の関係性を紹介する. 次に第 3 節では零点密度評価の証明で重要となる零点探査法 (zero-detection method) を紹介する. 第 4 節では Dirichlet 多項式の平均値定理を解説し, 第 5 節では Riemann ゼータ関数の 4 乗平均を証明する. 第 6 節では定理 1.1 とそれに関連する零点密度についての 2 つの定理を証明する. そして最後に, 第 7 節で定理 1.2 の証明を行う.

本稿の内容は, 主に [12] と [19] を参考にした. 証明 of 都合上, 省略 or 簡易化した箇所も多いため気になる方はこれらを見ていただきたい. 他にも, [11], [15], [18], [24] などは零点密度周辺 of テーマ or L 関数について of 話題も含んでおり参考になるだろう.

*1 Legendre 予想は任意 of 正 of 整数 n に対して, 区間 $[n^2, (n+1)^2]$ に属する素数が存在することを主張する.

零点密度定理や短区間素数定理という、多くの人が興味を持つだろうと推察されるテーマを扱ったため、初学者への読みやすさを考慮して、なるべく証明は本稿で閉じるように心がけた。証明で使う諸々の結果たちは可能な限り、簡単に証明できるものを採用した。一方で、Korobov-Vinogradov の非零領域についての結果（定理 2.5）と、Riemann ゼータ関数の 12 乗平均（定理 7.1）の二つの結果については残念ながら証明を省略した。これらの証明は [19] を参照していただきたい。

2 零点密度と $\zeta(s)$ の各種評価、素数分布との関係

2.1 Riemann 予想, Lindelöf 予想, および密度予想

零点密度評価は実部が $1/2$ から離れるほど、非自明零点の個数が少なくなることを示すことが意義である。そのためこの理論の目的のひとつは、評価

$$N(\sigma, T) \ll T^{A(\sigma)(1-\sigma)} (\log T)^{B(\sigma)} \quad (2.1)$$

をできる限り小さな $A(\sigma), B(\sigma)$ に対して証明することである。そして定理 1.1 はこの評価が $1/2 \leq \sigma \leq 1$ で $A(\sigma) = 3/(2-\sigma)$ で成り立つことを意味し、定理 1.2 は $3/4 \leq \sigma \leq 1$ ではこれを $A(\sigma) = 3/(3\sigma-1)$ と改良できることを示している。Riemann-von Mangoldt の公式と零点の対称性により $N(1/2, T) \geq \frac{1}{2}N(T) \sim \frac{1}{4\pi}T \log T \gg T^{2(1-1/2)} \log T$ である。よって、 $A = A(\sigma)$ で A が σ に依存しない定数ならば、 $1/2 \leq \sigma \leq 1$ で一様に (2.1) が成り立つ A の下限は 2 となる。そして $A(\sigma) \equiv 2$ でも (2.1) が成り立つか否かは現状未解決問題であり、これを**密度予想 (Density Hypothesis)** と呼ぶ。正確には以下の主張を密度予想と呼ぶ。^{*2}

予想 2.1 (密度予想) 任意の $\varepsilon > 0$, $1/2 \leq \sigma \leq 1$, $T \geq 3$ に対して、

$$N(\sigma, T) \ll_{\varepsilon} T^{2(1-\sigma)+\varepsilon}.$$

Riemann 予想が真ならば、任意の $\sigma > 1/2$ に対して常に $N(\sigma, T) = 0$ となるので、密度予想と Riemann 予想の主張には大きな差がある。一方で、素数分布への帰結と

^{*2} 文献によって、密度予想の主張には違いがある。例えば、Iwaniec-Kowalski [11] では

$$N(\sigma, T) \ll T^{2(1-\sigma)} \log T$$

を密度予想と呼んでいる。

しては、密度予想は Riemann 予想に匹敵するほどの効力を発揮する。実際に以下の定理が成り立つ。

定理 2.2 Riemann 予想が真であるとき、短区間素数定理 (1.3) は任意の $x^{1/2}(\log x)^c \leq h \leq x$, $c > 2$ に対して成り立つ。また密度予想が真であるとき, (1.3) は任意の $x^{1/2+\varepsilon} \leq h \leq x$, $\varepsilon > 0$ に対して成り立つ。

定理 2.2 により、Riemann 予想と密度予想がもたらす短区間素数定理の主張には、短区間の長さの下限が $x^{1/2}(\log x)^c$ か $x^{1/2}x^\varepsilon$ であるかの違いしかない。この $(\log x)^c$, x^ε は両者小さい増大因子ではあるものの、これらの要素を排除できないため、未だに Legendre 予想は Riemann 予想下でも解決できない。そのため、これらは重要な対象であり研究もされている ([1], [5] 参照)。しかし、主要な項である $x^{1/2}$ は一致する、つまりこれらに多項式オーダーとしての差はなく、この意味では密度予想は Riemann 予想に匹敵する重要な未解決問題となる。

また密度予想は Riemann ゼータ関数の値分布論とも密接に関係する。実際に、次の定理が知られている。

定理 2.3 Lindelöf 予想が真ならば、密度予想も真である。

従って、Riemann ゼータ関数の増大度評価や平均値定理は、零点分布ないしは素数分布論へ重要な帰結を持つ。この節では、これらの関係をさらに詳しく考察したい。

2.2 零点密度と短区間素数定理

まず、定理 1.3 と定理 2.2 の証明のために以下の定理を証明する。

定理 2.4 任意の $1/2 \leq \sigma \leq 1$ に対して、

$$N(\sigma, T) \ll T^{A(\sigma)(1-\sigma)}(\log T)^B \quad (2.2)$$

が成り立つと仮定する。ここで、 B はある絶対定数であり、 $A(\sigma)$ は σ のみに依存する数で、 $1/2 \leq \sigma \leq 1$ に対して $A(\sigma)(1-\sigma) \leq 1$ をみたし、さらにある定数 $A > 2$, $1/2 \leq \sigma_0 < 1$ に対して $\sigma \geq \sigma_0$ で $A(\sigma) \leq 2$ かつ $1/2 \leq \sigma \leq \sigma_0$ で $A(\sigma) \leq A$ をみたすと仮定する。このとき任意の $x \geq 3$ に対して、 h が $x^{1-1/A}(\log x)^M \leq h \leq x$ をみたすならば、短区間素数定理 (1.3) が成り立つ。ただし、 $M > (B+2)/A(1-\sigma_0)$ 。

この定理を用いて, 定理 1.1 と定理 1.2 が成り立つ仮定の下での定理 1.3 の証明を与える.

定理 1.3 の証明. 定理 1.1 を $1/2 \leq \sigma \leq 3/4$, 定理 1.2 を $3/4 \leq \sigma \leq 1$ に対して用いることで, (2.2) が $A(\sigma) = 12/5$, $B = \max\{c_1, c_2\}$ に対して成り立つことが分かる. よって, 定理 2.4 を $\sigma_0 = 1/2$, $A = 12/5$ として用いることで, 定理 1.3 を得る. $\square$

定理 2.2 の証明. 定理 2.2 の Riemann 予想下での主張は, Riemann 予想と同値な式

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O\left(x^{1/2} \log x\right)$$

により得られる. この同値性は [14] の定理 2.4 と, 以下の部分和公式 ([21] の補題 2.3) で導かれる漸近公式 ([21] の命題 2.2 参照)

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\psi(u)}{u(\log u)^2} du + O\left(x^{1/2}\right) \quad (2.3)$$

から従う.

密度予想が成り立つとき, 密度予想の仮定を $1/2 \leq \sigma \leq 5/6$ で用い, Huxley の零点密度評価 (1.2) を $5/6 \leq \sigma \leq 1$ で用いることで, (2.2) が $A(\sigma) = 2 + \varepsilon$, $B = c$ (c は定理 1.2 と同じ定数) で成り立つ. よって定理 2.4 により, 短区間素数定理 (1.3) が $x^{1/2+\varepsilon} \leq h \leq x$ で成り立つことが分かる. 従って, 定理 2.2 が成り立つ. $\square$

以下, 定理 2.4 の証明を行う. この証明では, 次の Korobov-Vinograd の非零領域の結果を用いる.

定理 2.5 ある正の絶対定数 c が存在して, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\zeta(s) \neq 0, \quad \sigma \geq 1 - c(\log(|t| + 3))^{-2/3}(\log \log(|t| + 3))^{-1/3}.$$

定理 2.4 の証明. 漸近公式 (2.3) より, $h \geq x^{1-1/A}(\log x)^M$, $M > (B+3)/A(1-\sigma_0)$ に対して,

$$\psi(x+h) - \psi(x) \sim h$$

が成り立つことを示せばよい.

Riemann の明示公式 ([14] の定理 2.1) を用いることで,

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h - \sum_{|\gamma| \leq T} x^\rho \frac{(1+h/x)^\rho - 1}{\rho} + O\left(\frac{x}{T}(\log(xT))^2 + \log x\right)$$

が任意の $T \geq 1$ に対して成り立つ. この証明では $T = x^{1/A}(\log x)^{3-M}$ とする. このとき, 上記の O の項は $o(h)$ となる.

以下零点の和について考える. ここで零点の和を以下の 4 つの和

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{|\gamma| \leq U \\ \sigma_0 < \beta \leq 1}} x^\rho \frac{(1+h/x)^\rho - 1}{\rho} + \sum_{\substack{U < |\gamma| \leq T \\ \sigma_0 < \beta \leq 1}} x^\rho \frac{(1+h/x)^\rho - 1}{\rho} \\ & + \sum_{\substack{|\gamma| \leq T \\ 1/2 \leq \beta \leq \sigma_0}} x^\rho \frac{(1+h/x)^\rho - 1}{\rho} + \sum_{\substack{|\gamma| \leq T \\ 0 < \beta < 1/2}} x^\rho \frac{(1+h/x)^\rho - 1}{\rho} \\ & =: S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \end{aligned}$$

に分割して考える. ただし, $U = x/h$ である. まず S_4 に対しては, Riemann-von Mangoldt の公式と部分和公式により,

$$S_4 \ll x^{1/2} \sum_{1 < |\gamma| \leq T} \frac{1}{|\gamma|} \ll x^{1/2} \left(\frac{N(T)}{T} + \int_1^T \frac{N(\xi)}{\xi^2} d\xi \right) \ll x^{1/2} (\log x)^2 = o(h)$$

と評価される.

次に S_1 と S_2 について考える. まず S_1 に対しては,

$$S_1 = \sum_{\substack{|\gamma| \leq U \\ \sigma_0 < \beta \leq 1}} x^\rho \int_1^{1+h/x} \xi^{\rho-1} d\xi \ll \sum_{\substack{|\gamma| \leq U \\ \sigma_0 < \beta \leq 1}} x^\beta \int_1^{1+1/U} 1 d\xi \ll \frac{1}{U} \sum_{\substack{|\gamma| \leq U \\ \sigma_0 < \beta \leq 1}} x^\beta$$

と評価される. さらに, $A(\sigma) \leq 2$ が $\sigma_0 \leq \sigma \leq 1$ で成り立つので,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{|\gamma| \leq U \\ \sigma_0 < \beta \leq 1}} x^\beta &= \log x \sum_{\substack{|\gamma| \leq U \\ \sigma_0 < \beta \leq 1}} \int_{\sigma_0}^{\beta} x^\sigma d\sigma + \sum_{\substack{|\gamma| \leq U \\ \sigma_0 < \beta \leq 1}} x^{\sigma_0} \\ &= \log x \int_{\sigma_0}^1 x^\sigma N(\sigma, U) d\sigma + x^{\sigma_0} N(\sigma_0, U) \\ &\ll \log x \max_{\sigma_0 \leq \sigma \leq 1} x^\sigma N(\sigma, U) \end{aligned}$$

が成り立つ。よって,

$$S_1 \ll \log x \max_{\sigma_0 \leq \sigma \leq 1} x^\sigma N(\sigma, U) U^{-1}.$$

また S_2 について,

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{\substack{U < |\gamma| \leq T \\ \sigma_0 < \beta \leq 1}} x^\rho \frac{(1 + h/x)^\rho - 1}{\rho} \\ &\ll \sum_{\substack{U < |\gamma| \leq T \\ \sigma_0 < \beta \leq 1}} x^\beta \frac{1}{|\gamma|} = \sum_{\substack{U < |\gamma| \leq T \\ \sigma_0 < \beta \leq 1}} x^\beta \int_{|\gamma|}^T \frac{d\xi}{\xi^2} + \frac{1}{T} \sum_{\substack{U < |\gamma| \leq T \\ \sigma_0 < \beta \leq 1}} x^\beta \end{aligned}$$

となることが分かる。第 1 項については、和と積分の交換により

$$\begin{aligned} &\int_U^T \sum_{\substack{U < |\gamma| \leq \xi \\ \sigma_0 < \beta \leq 1}} x^\beta \frac{d\xi}{\xi^2} \\ &= \log x \int_U^T \xi^{-2} \int_{\sigma_0}^1 x^\sigma \left(\sum_{\substack{U < |\gamma| \leq \xi \\ \sigma < \beta \leq 1}} 1 \right) d\sigma d\xi + x^{\sigma_0} \int_U^T \xi^{-2} N(\sigma_0, \xi) d\xi \\ &\ll \log x \int_U^T \xi^{-2} \int_{\sigma_0}^1 x^\sigma N(\sigma, \xi) d\sigma d\xi + x^{\sigma_0} \int_U^T \xi^{-2} N(\sigma_0, \xi) d\xi \\ &\ll \log x \log T \max_{\sigma_0 \leq \sigma \leq 1} x^\sigma \max_{U \leq \xi \leq T} \xi^{-1} N(\sigma, \xi) \end{aligned}$$

と評価される。これらの評価と S_1 の評価により,

$$S_1 + S_2 \ll (\log x)^2 \max_{\sigma_0 \leq \sigma \leq 1} x^\sigma \max_{U \leq \xi \leq T} \xi^{-1} N(\sigma, \xi) \quad (2.4)$$

を得る。今、 $\delta(x) = (\log x)^{-2/3} (\log \log x)^{-1/3}$ とおくと、定理 2.5 により、 $N(\sigma, T) = 0$, $\sigma \geq 1 - c_0 \delta(x)$, が十分小な正の定数 c_0 に対して成り立つ。そして $1/2 \leq \sigma_0 \leq \sigma \leq 1$ に対して、 $A(\sigma) \leq 2$ かつ $A(\sigma)(1 - \sigma) \leq 1$ なので、(2.4) の右辺は

$$\begin{aligned} &(\log x)^{B+2} \max_{\sigma_0 \leq \sigma \leq 1 - c_0 \delta(x)} x^\sigma U^{-1} U^{A(\sigma)(1-\sigma)} \\ &\ll x U^{-1} (\log x)^{B+2} \max_{\sigma_0 \leq \sigma \leq 1 - c_0 \delta(x)} (x U^{-2})^{-(1-\sigma)} \end{aligned}$$

と評価される. さらに, $U = x/h \leq x^{1/A}(\log x)^{-M}$ であることから, 上記は

$$\begin{aligned} &\ll h(\log x)^{M+B+2} \max_{\sigma_0 \leq \sigma \leq 1-c_0\delta(x)} (x \cdot x^{-2/A})^{-(1-\sigma)} \\ &\ll h(\log x)^{M+B+2} \exp\left(-c_0\left(1 - \frac{2}{A}\right)(\log x)^{1/3}(\log \log x)^{1/3}\right) = o(h) \end{aligned}$$

とさらに評価される. 従って, $S_1 + S_2 = o(h)$ を得る.

最後に S_3 を評価する. 評価 (2.4) と同様に

$$S_3 \ll (\log x)^2 \max_{1/2 \leq \sigma \leq \sigma_0} x^\sigma \max_{U \leq \xi \leq T} \xi^{-1} N(\sigma, \xi)$$

と評価できる. 仮定より, $A(\sigma)(1-\sigma) \leq 1$ が成り立つので,

$$\begin{aligned} &\max_{1/2 \leq \sigma \leq \sigma_0} x^\sigma \max_{U \leq \xi \leq T} \xi^{-1} N(\sigma, \xi) \ll (\log x)^B \max_{1/2 \leq \sigma \leq \sigma_0} x^\sigma U^{A(\sigma)(1-\sigma)-1} \\ &\ll \frac{x}{U} (\log x)^B \max_{1/2 \leq \sigma \leq \sigma_0} (xU^{-A})^{-(1-\sigma)} \ll h(\log x)^B \max_{1/2 \leq \sigma \leq \sigma_0} (x^{1-A}h^A)^{-(1-\sigma)}. \end{aligned}$$

よって,

$$S_3 \ll h(\log x)^{B+2} \max_{1/2 \leq \sigma \leq \sigma_0} (x^{1-A}h^A)^{-(1-\sigma)}.$$

従って, $h \geq x^{1-1/A}(\log x)^M$, $M > (B+2)/A(1-\sigma_0)$ のときは $S_3 = o(h)$ となる.

以上より, 定理 2.4 を得る. $\square$

2.3 Riemann ゼータ関数の増大度評価と零点密度評価

定理 2.3 は, 以下の一般的な主張から導かれる.

定理 2.6 任意の正の数 ϑ を固定する. このとき, $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll (|t| + 1)^\vartheta \quad (2.5)$$

が成り立つならば

$$N(\sigma, T) \ll T^{2(1+2\vartheta)(1-\sigma)} (\log T)^6 \quad (2.6)$$

が任意の $1/2 \leq \sigma \leq 1$, $T \geq 3$ に対して成り立つ.

定理 2.6 を $\vartheta = \varepsilon$ として適用することで, 定理 2.3 を得る. 定理 2.6 の証明は第 6 節の定理 1.1 の証明直後で行う.

2.4 Riemann ゼータ関数の平均値定理と零点密度評価

本節の最後に, Riemann ゼータ関数の平均値定理と零点密度評価との関係について述べる. 多くの場合に, 平均値は関数の増大度を直接調べるよりも扱いやすい. 例えば, Hardy と Littlewood [3] による 2 乗平均の漸近公式 ([16] の定理 1)

$$\int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt \sim T \log T, \quad T \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

は Riemann ゼータ関数の “平均値” が $\sqrt{\log t}$ であることを示す. この平均値は Lindelöf 予想よりもはるかに強い評価を与えているが, あくまでこれは平均としての結果である. 一方, このような平均値の結果から, Riemann ゼータ関数自体の増大度評価をある程度導くことができることも知られている ([16] の第 2 節を参照). 実際, (2.7) から $\zeta(1/2 + it) \ll_\varepsilon (|t| + 1)^{1/2+\varepsilon}$ が得られる. 一般に, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $a > 0$ に対して

$$\int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^k dt \ll_\varepsilon T^{a+\varepsilon}$$

が成り立つならば, $\zeta(1/2 + it) \ll_\varepsilon (|t| + 1)^{a/k+\varepsilon}$ が従う. 特に, Ingham [8] による 4 乗平均の漸近公式

$$\int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^4 dt \sim \frac{1}{2\pi^2} T (\log T)^4, \quad T \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

から $\zeta(1/2 + it) \ll_\varepsilon t^{1/4+\varepsilon}$ が導かれる. これは凸評価 ([22] の系 2.3 を参照) と呼ばれる. この凸評価を定理 2.6 に適用することで, 次の零点密度評価

$$N(\sigma, T) \ll T^{(3+\varepsilon)(1-\sigma)} (\log T)^6$$

が得られる. さらに, 定理 2.4 にこの零点密度評価を適用することで, 短区間素数定理が $x^{2/3+\varepsilon} \leq h \leq x$ で成立することが分かる.

以上は, 平均値定理を通して Riemann ゼータ関数自体の増大度を評価し, その結果として得られる零点分布および素数分布への応用を述べたものである. 一方, Riemann ゼータ関数の増大度評価を介さず, 平均値定理から直接零点密度評価を導くことでより強い結果を得ることもできる. 実際, 以下の定理が成り立つ.

定理 2.7 任意の正の実数 a, b, k を固定する. このとき任意の $T \geq 3$ に対して,

$$\int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^k dt \ll T^a (\log T)^b \quad (2.9)$$

が成り立つならば,

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{2(k+2a)(1-\sigma)}{k+2(2-2\sigma)}} (\log T)^\theta$$

が任意の $T \geq 3$, $1/2 \leq \sigma \leq 1$ に対して成り立つ. ただし, $\theta = \max\{6, 2 + 2(k + b)/(k + 2)\}$.

定理 2.7 は Ingham の零点密度評価 (1.1) を含む主張である. 実際, 4 乗平均の漸近公式 (2.8) により, $a = 1$, $b = 4$, $k = 4$ で (2.9) が成り立つので, 定理 2.7 から定理 1.1 が従う. そのため, 漸近公式 (2.8) は Ingham の零点密度評価の証明において重要な役割を果たす. よって本稿では漸近公式 (2.8) の証明も解説する. また本稿では, 定理 1.1 の証明の解説に重点を置くため, 一般的な場合の証明は一旦避け, 定理 1.1 と定理 2.7 は分けて証明を行う. 定理 2.7 の証明は, 第 6 節の最後に述べる.

Keating と Snaith [13] はランダム行列理論による考察から, 任意の実数 $k > -1/2$ に対して,

$$\int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^{2k} dt \sim C(k) T (\log T)^{k^2} \quad (2.10)$$

が成り立つと予想した. ここで, $C(k)$ は k のみに依存する明示的なある定数である. この予想は自明な場合の $k = 0$ と, 前述の $k = 1, 2$ の場合を除き未解決である. この予想の重要性を定理 2.7 を用いて解説したい. 今, $k = 3$ の場合, つまり 6 乗平均に対して, Keating-Snaith 予想と同様の上からの評価

$$\int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^6 dt \ll T (\log T)^9$$

が成り立つと仮定する. このとき, 定理 2.7 により, 任意の $1/2 \leq \sigma \leq 1$, $T \geq 3$ に対して,

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{8(1-\sigma)}{5-2\sigma}} (\log T)^6$$

が成り立つ. この零点密度評価を $1/2 \leq \sigma \leq 23/39$ で, Huxley の零点密度評価を $23/30 \leq \sigma \leq 1$ で用いることで, (2.2) が $A(\sigma) = 30/13$, $B = 3995$ で成り立つ. 従っ

て, 定理 2.4 により, 短区間素数定理が $x^{17/30}(\log x)^c \leq h \leq x$ で成り立つことが分かる. これは驚くべきことに Guth-Maynard の短区間素数定理の範囲と一致^{*3}する. さらに, Huxley の零点密度評価のみでなく Guth-Maynard の零点密度評価 (1.5) も用いると, 短区間素数定理が成り立つ範囲は $x^{39/70+\varepsilon} \leq h \leq x$ まで広がる. この観察から, 6 乗平均が素数分布に対して重要な帰結をもつことが分かる. 同様に高次の k 乗平均では素数分布により強い帰結をもつことも分かる. 従って, Ingham 以来約 100 年, 4 より高次の冪乗平均に関する (2.10) は未解決であるが, 依然として解析数論における重要な未解決問題として, 多くの数学者により様々な観点から研究されている.

3 零点探査法

以降この報告書では, Γ を通常のカンマ関数, μ を Möbius 関数, つまり,

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & (n=1), \\ (-1)^k & (n=p_1 \cdots p_k, p_i \text{ らは異なる素数}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とする. Möbius 関数を係数にもつ長さ X の Dirichlet 多項式を

$$M_X(s) = \sum_{n \leq X} \mu(n) n^{-s}$$

と表す. この Dirichlet 多項式は $1/\zeta(s)$ の Dirichlet 級数表示を X で打ち切ったものであることから, X が大きいとき, $\zeta(s)M_X(s)$ は 1 に近い関数となることが期待される. 実際に $\sigma > 1$ のとき,

$$\zeta(s)M_X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{d|n \\ d \leq X}} \mu(d) n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}, \quad a(n) = a_X(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d \leq X}} \mu(d)$$

と書くことができ, よく知られた公式,

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & (n=1), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

^{*3} Guth-Maynard の範囲は $x^{17/30+\varepsilon} \leq h \leq x$ であり, x^ε が $\log x$ の冪乗に置き換わっている分, むしろこちらの範囲の方が広い.

により, $a(n)$ は

$$\begin{aligned} a(1) &= 1, \quad a(n) = 0, \quad 2 \leq n \leq X, \\ |a(n)| &\leq d(n), \quad n > X \end{aligned}$$

をみtas. 従って, $\sigma > 1$ かつ X が大きいとき, $\zeta(s)M_X(s)$ は 1 に近い関数となることが分かる.

また, $N(\sigma, T)$ の条件をみtas零点で, $\tilde{\rho}_1 = \tilde{\beta}_1 + i\tilde{\gamma}_1$ を $\tilde{\gamma}_1 > 0$ で最小のものとし, もし $\tilde{\gamma}_1$ を虚部にもつ $N(\sigma, T)$ の条件をみtas零点が複数存在する場合は, その零点らの実部の最小を $\tilde{\beta}_1$ として定める. 帰納的に $n \geq 2$ に対して $\tilde{\rho}_n = \tilde{\beta}_n + i\tilde{\gamma}_n$ を $\tilde{\gamma}_n \geq \tilde{\gamma}_{n-1} + 1$ をみtas最も小さい零点の虚部として定義し, もし $\tilde{\gamma}_n$ を虚部にもつ $N(\sigma, T)$ の条件をみtas零点が複数存在する場合は, その零点らの実部の最小を $\tilde{\beta}_n$ として定める. このとき,

$$\mathcal{Z}(\sigma, T) = \left\{ \rho = \tilde{\beta}_n \pm i\tilde{\gamma}_n : \tilde{\gamma}_n \leq T \right\}$$

と定義する. この定義で重要な点は, $\mathcal{Z}(\sigma, T)$ に属する任意の異なる 2 つの零点の虚部の距離が 1 以上となることである.

上記の定義の下で, 以下が成り立つ.

命題 3.1 (The Zero-Detection Method) 任意の $\sigma \geq 1/2$ を取る. このとき, 任意の T, X, Y で $X \geq 1$, $X \leq Y^2$ かつ T, Y が十分大なとき,

$$N(\sigma, T) \ll (R_1 + R_2) \log T + \log Y \log(\log Y)$$

が成り立つ. ただし, R_1 は集合

$$\mathcal{R}_1 = \left\{ \rho \in \mathcal{Z}(\sigma, T) : \left| \sum_{X < n \leq 2Y \log Y} a(n) n^{-\rho} e^{-n/Y} \right| \geq \frac{1}{3} \right\} \quad (3.1)$$

の個数であり, R_2 は集合

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 = & \quad (3.2) \\ & \left\{ \rho \in \mathcal{Z}(\sigma, T) : \right. \\ & \quad \left| \int_{-\log(TY)}^{\log(TY)} \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma + iu\right) M_X\left(\frac{1}{2} + i\gamma + iu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta + iu\right) Y^{\frac{1}{2} - \beta + iu} du \right| \geq \frac{1}{3} \left. \right\} \end{aligned}$$

の個数である.

注意 3.2 この命題で $X < 2Y \log Y$ の仮定は必要ない. 実際にこれが成り立たない場合でも $\mathcal{R}_1$ を空集合とみなせばこの命題は成り立つ.

証明. 任意の $\rho \in \mathcal{Z}(\sigma, T)$ で $|\gamma| > \log Y$ をみたすものを取る. ガンマ関数の Mellin 逆変換公式

$$e^{-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(w) z^{-w} dw \quad \operatorname{Re}(z) > 0, c > 0 \quad (3.3)$$

を用いることで,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta(\rho+w) M_X(\rho+w) \Gamma(w) Y^w dw \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-\rho} \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(w) \left(\frac{n}{Y}\right)^{-w} dw = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-\rho} e^{-n/Y} \\ &= e^{-1/Y} + \sum_{n>X} a(n) n^{-\rho} e^{-n/Y} \end{aligned}$$

となることが分かる. 一方で, 積分路を変更することで,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta(\rho+w) M_X(\rho+w) \Gamma(w) Y^w dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-\beta-i\infty}^{1/2-\beta+i\infty} \zeta(\rho+w) M_X(\rho+w) \Gamma(w) Y^w dw \\ & \quad + \operatorname{Res}_{w=1-\rho} (\zeta(\rho+w) M_X(\rho+w) \Gamma(w) Y^w) \end{aligned} \quad (3.4)$$

となる. ここで, 積分路を変更する際に, $\sigma \geq 1/2$, $|t| \geq 1$ の時に成り立つ評価 $\zeta(s) \ll |t|$ ([23] の補題 2.5 参照) と M_X についての評価 $|M_X(\rho+w)| \leq \sum_{n \leq X} n^{-1/2} \ll_X 1$ (つまり w の虚部に関して $M_X(\rho+w)$ は有界な関数), さらに Stirling の公式を用いたことに注意する. また, $w=0$ でのガンマ関数の極は, $\zeta(\rho+w)$ の零点と打ち消される. 等式 (3.4) の右辺の積分を

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-\beta-i\infty}^{1/2-\beta+i\infty} \zeta(\rho+w) M_X(\rho+w) \Gamma(w) Y^w dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\log(TY)}^{\log(TY)} \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma + iu\right) M_X\left(\frac{1}{2} + i\gamma + iu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta + iu\right) Y^{1/2-\beta+iu} du \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{|u|>\log(TY)} \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma + iu\right) M_X\left(\frac{1}{2} + i\gamma + iu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta + iu\right) Y^{1/2-\beta+iu} du \end{aligned}$$

と二つに分ける. 積分路を変更したときと同様の議論で, 評価 $\zeta(\frac{1}{2} + it) \ll |t|$, $|t| \geq 1$ と $M_X(\frac{1}{2} + i\gamma + iu) \ll X^{1/2}$ と Stirling の公式を用いると, 後半の積分は

$$\begin{aligned} &\ll \int_{|u| \geq \log(TY)} (|u| + |\gamma|) X^{1/2} |u|^{-\beta} e^{-\pi|u|/2} Y^{1/2-\beta} du \\ &\ll X^{1/2} Y^{1/2-\beta} \int_{\log(TY)}^{\infty} (u + T) e^{-\pi u/2} du \\ &\ll X^{1/2} (\log(TY) + T) e^{-\pi \log(TY)/2} \end{aligned}$$

と評価できる. 従って, Y が十分大きく $X \leq Y^2$ のときは, 後半の積分は十分小さくなり, 例えば絶対値が $1/100$ 以下となることが分かる.

また (3.4) の留数について, Riemann ゼータ関数は $s = 1$ で留数 1 の単純極を持つので

$$\operatorname{Res}_{w=1-\rho} (\zeta(\rho+w) M_X(\rho+w) \Gamma(w) Y^w) = M_X(1) \Gamma(1-\rho) Y^{1-\rho}$$

が成り立つ. Stirling の公式と評価 $M_X(1) = \sum_{n \leq X} \mu(n) n^{-1} \ll \sum_{n \leq X} n^{-1} \ll \log X$ により, これは

$$\ll Y^{1-\beta} \log X |\gamma|^{1/2-\beta} e^{-\pi|\gamma|/2} \ll e^{-\pi \log Y/2} Y^{1/2} \log X$$

と評価できる. 二つ目の評価式で $|\gamma| > \log Y$ を用いたことに注意する. よって, Y が十分大きく, $X \leq Y$ のとき, $w = 1 - \rho$ での留数は十分小さくなり, こちらについても絶対値が $1/100$ 以下となることが分かる.

さらに, $|a(n)| \leq d(n)$ であり, 約数の個数の自明な不等式 $d(n) \leq 2n^{1/2}$ を用いると

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n > 2Y \log Y} a(n) n^{-\rho} e^{-n/Y} \right| &\leq \sum_{n > 2Y \log Y} d(n) n^{-1/2} e^{-n/Y} \ll \sum_{n > 2Y \log Y} e^{-n/Y} \\ &\leq \frac{e^{-2 \log Y}}{1 - e^{-1/Y}} \ll Y e^{-2 \log Y} = Y^{-1} \end{aligned}$$

となることも分かる. これについても Y が十分大なときは十分小さくなるため, 絶対値が $1/100$ 以下となることが分かる. 最後に $e^{-1/Y}$ についても Y が十分大なとき, 1 に近い値となるため, $e^{-1/Y} = 1 + E(Y)$ で $|E(Y)| \leq 1/100$ が成り立つことにも注

意する. 以上をまとめると,

$$\begin{aligned} & 1 + \sum_{X < n \leq Y(\log Y)^2} a(n)n^{-\rho}e^{-n/Y} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\log(TY)}^{\log(TY)} \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma + iu\right) M_X\left(\frac{1}{2} + i\gamma + iu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta + iu\right) Y^{1/2-\beta+iu} du + R \end{aligned}$$

となり, R は不等式 $|R| \leq 4/100 = 1/25$ をみたす. よって, 零点 $\rho \in \mathcal{Z}(\sigma, T)$ が $|\gamma| > \log Y$ をみたすとき, (3.1) または (3.2) のどちらかをみたすことが分かる. よって,

$$\#\mathcal{Z}(\sigma, T) - \#\mathcal{Z}(\sigma, \log Y) \leq R_1 + R_2 \quad (3.5)$$

が成り立つ.

Riemann-von Mangoldt の公式により, 区間 $[-T, T]$ 上で幅 1 の区間における Riemann ゼータ関数の零点の個数は高々 $\ll \log T$ であり, $\beta \geq \sigma$ かつ $2\log Y < |\gamma| \leq T$ をみたす零点に対して, $\rho = \tilde{\beta} + i\tilde{\gamma} \in \mathcal{Z}(\sigma, T)$ で $\log Y < \tilde{\gamma} \leq \gamma < \tilde{\gamma} + 1$ をみたす零点が存在することに注意すると,

$$\begin{aligned} N(\sigma, T) - N(\sigma, 2\log Y) &= \sum_{\substack{\rho \\ \beta \geq \sigma \\ 2\log Y < |\gamma| \leq T}}^* 1 \leq \sum_{\substack{\tilde{\beta} + i\tilde{\gamma} \in \mathcal{Z}(\sigma, T) \\ \log Y < |\tilde{\gamma}| \leq T}} \sum_{\substack{\rho \\ \beta \geq \sigma \\ \tilde{\gamma} \leq \gamma < \tilde{\gamma} + 1}}^* 1 \\ &\ll \sum_{\substack{\tilde{\beta} + i\tilde{\gamma} \in \mathcal{Z}(\sigma, T) \\ \log Y < |\tilde{\gamma}| \leq T}} \log T = (\#\mathcal{Z}(\sigma, T) - \#\mathcal{Z}(\sigma, \log Y)) \log T. \end{aligned}$$

そして, 不等式 (3.5) と Riemann-von Mangoldt の公式による評価 $N(\sigma, 2\log Y) \leq N(2\log Y) \ll \log Y \log(\log Y)$ を用いることで,

$$\begin{aligned} N(\sigma, T) &\ll (\#\mathcal{Z}(\sigma, T) - \#\mathcal{Z}(\sigma, \log Y)) \log T + N(\sigma, 2\log Y) \\ &\ll (R_1 + R_2) \log T + \log Y \log(\log Y) \end{aligned}$$

となり主張を得る. □

4 Dirichlet 多項式の平均値

この節ではいくつかの Dirichlet 多項式の平均値についての評価を証明する.

4.1 Montgomery-Vaughan の不等式

次の平均値定理は Montgomery-Vaughan [17] により証明された。

定理 4.1 任意の $x \in \mathbb{R}$, $N, T \geq 2$ と任意の数論的関数 $a(n)$ に対して,

$$\int_x^{x+T} \left| \sum_{n \leq N} a(n) n^{-it} \right|^2 dt = T \sum_{n \leq N} |a(n)|^2 + O \left(\sum_{n \leq N} n |a(n)|^2 \right)$$

が成り立つ。この等式は $\sum_{n=1}^{\infty} n |a(n)|^2$ が収束するなら、 $N = +\infty$ のときも成り立つ。

証明. 実数 N は整数であると仮定しても一般性を失わない。以下それを仮定する。最初に,

$$\begin{aligned} \int_x^{x+T} \left| \sum_{n \leq N} a(n) n^{-it} \right|^2 dt &= \sum_{m, n \leq N} a(m) \overline{a(n)} \int_x^{x+T} \left(\frac{n}{m} \right)^{it} dt \\ &= T \sum_{n \leq N} |a(n)|^2 + \sum_{\substack{m, n \leq N \\ m \neq n}} a(m) \overline{a(n)} \frac{(n/m)^{i(x+T)} - (n/m)^{ix}}{i \log(n/m)} \end{aligned}$$

と変形する。この後半の和が $\ll \sum_{n \leq N} |a(n)|^2 n$ となることを示せばよい。ここではより一般的に、任意の数論的関数 $b(n)$ と、 $m \neq n$ のとき $\lambda_m \neq \lambda_n$ をみたす実数列 $\{\lambda_n\}$ に対して,

$$\sum_{\substack{m, n \leq N \\ m \neq n}} \frac{b(m) \overline{b(n)}}{\lambda_m - \lambda_n} \ll \sum_{n \leq N} |b(n)|^2 \delta_n^{-1} \quad (4.1)$$

が成り立つことを示す。ただし、 $\delta_n = \min_{m \leq N, m \neq n} |\lambda_n - \lambda_m|$ である。この評価を示せば、 $|\log(n/m)| \gg n^{-1}$ が任意の $m \neq n$ で成り立つので、目的の評価を得る。

まず目標の和を

$$\sum_{\substack{m, n \leq N \\ m \neq n}} \frac{b(m) \overline{b(n)}}{\lambda_m - \lambda_n} = \sum_{n \leq N} \overline{b(n)} \delta_n^{-1/2} \sum_{\substack{m \leq N \\ m \neq n}} b(m) \delta_m^{-1/2} \frac{(\delta_m \delta_n)^{1/2}}{\lambda_m - \lambda_n}$$

と変形する. この右辺の絶対値の 2 乗に Cauchy-Schwarz の不等式を適用することで,

$$\left| \sum_{\substack{m, n \leq N \\ m \neq n}} \frac{b(m)\overline{b(n)}}{\lambda_m - \lambda_n} \right|^2 \leq \left(\sum_{n \leq N} |b(n)|^2 \delta_n^{-1} \right) \times \left(\sum_{n \leq N} \left| \sum_{\substack{m \leq N \\ m \neq n}} b(m) \delta_m^{-1/2} \frac{(\delta_m \delta_n)^{1/2}}{\lambda_m - \lambda_n} \right|^2 \right)$$

が成り立つことが分かる. よって,

$$\sum_{n \leq N} \left| \sum_{\substack{m \leq N \\ m \neq n}} b(m) \delta_m^{-1/2} \frac{(\delta_m \delta_n)^{1/2}}{\lambda_m - \lambda_n} \right|^2 \ll \sum_{n \leq N} |b(n)|^2 \delta_n^{-1} \quad (4.2)$$

を示せば, (4.1) を得る.

ベクトル $\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^N$ を $x_n = b(n)\delta_n^{-1/2}$ と定義し, また $A = (c_{m,n})$ を $N \times N$ 行列で $c_{n,n} = 0$ かつ, $m \neq n$ のとき $c_{m,n} = (\delta_m \delta_n)^{1/2}/(\lambda_m - \lambda_n)$ と定義する. このとき, (4.2) の左辺は $\|A\mathbf{x}\|^2$, 右辺は $\|\mathbf{x}\|^2$ と一致することが分かる. ただし, $\|\bullet\|$ は Hermite 内積から定まる通常のノルムである. また $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$ を A の極大ベクトルとする. ここで $\mathbf{y}$ が A の極大ベクトルとは, $\|A\mathbf{y}\|/\|\mathbf{y}\| = \max_{\mathbf{a} \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}} \|A\mathbf{a}\|/\|\mathbf{a}\|$ をみたす $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ を意味する. このような $\mathbf{y}$ が存在することは, A の $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ 上の写像としての連続性と線型性により保証される. この $\mathbf{y}$ に対して,

$$\sum_{n \leq N} \left| \sum_{\substack{m \leq N \\ m \neq n}} b(m) \delta_m^{-1/2} \frac{(\delta_m \delta_n)^{1/2}}{\lambda_m - \lambda_n} \right|^2 = \|A\mathbf{x}\|^2 \leq \left(\frac{\|A\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} \right)^2 \|\mathbf{x}\|^2$$

となるので, (4.2) については $\|A\mathbf{y}\|/\|\mathbf{y}\| \ll 1$ を示せばよい.

正規行列 X に対して, 任意のベクトルが X の正規直交な固有ベクトルの線型結合で表せる. この事実から, ベクトル $\mathbf{v}$ が X の極大ベクトルであることと, $\mathbf{v}$ が絶対値が最大となる X の固有値の固有ベクトルであること, が同値になることが分かる. そして今, A は歪 Hermite 行列なので A は正規行列であり, 固有値は全て純虚数である. よって, 極大ベクトル $\mathbf{y} = (y_m)_{m=1}^N$ を $A\mathbf{y} = i\mu\mathbf{y}$, $\mu \in \mathbb{R}$ をみたすもの, つまり任意の $1 \leq n \leq N$ に対して

$$\sum_{\substack{m \leq N \\ m \neq n}} y_m \frac{(\delta_m \delta_n)^{1/2}}{\lambda_m - \lambda_n} = i\mu y_n \quad (4.3)$$

をみたすものとして取ることができる。今, $\|A\mathbf{y}\|^2$ を

$$\begin{aligned}\|A\mathbf{y}\|^2 &= \sum_{n \leq N} \left| \sum_{\substack{m \leq N \\ m \neq n}} y_m \frac{(\delta_m \delta_n)^{1/2}}{\lambda_m - \lambda_n} \right|^2 \\ &= \sum_{m \leq N} |y_m|^2 \sum_{\substack{n \leq N \\ n \neq m}} \frac{\delta_m \delta_n}{(\lambda_m - \lambda_n)^2} + \sum_{\substack{l, m \leq N \\ l \neq m}} y_l \overline{y_m} \sum_{\substack{n \leq N \\ n \neq l, m}} \frac{(\delta_l \delta_n)^{1/2}}{\lambda_l - \lambda_n} \frac{(\delta_m \delta_n)^{1/2}}{\lambda_m - \lambda_n}\end{aligned}$$

と変形する。この後半の和は部分分数分解により

$$\begin{aligned}& \sum_{\substack{l, m \leq N \\ l \neq m}} y_l \overline{y_m} \sum_{\substack{n \leq N \\ n \neq l, m}} \frac{(\delta_l \delta_n)^{1/2}}{\lambda_l - \lambda_n} \frac{(\delta_m \delta_n)^{1/2}}{\lambda_m - \lambda_n} \\ &= \sum_{\substack{m, n \leq N \\ m \neq n}} \frac{\overline{y_m} \delta_n}{\lambda_m - \lambda_n} \sum_{\substack{l \leq N \\ l \neq m, n}} y_l \frac{(\delta_l \delta_m)^{1/2}}{\lambda_l - \lambda_m} + \sum_{\substack{l, n \leq N \\ l \neq n}} \frac{y_l \delta_n}{\lambda_l - \lambda_n} \sum_{\substack{m \leq N \\ m \neq l, n}} \overline{y_m} \frac{(\delta_l \delta_m)^{1/2}}{\lambda_m - \lambda_l}\end{aligned}$$

と二つの和に分解できる。これに (4.3) を用いると,

$$\begin{aligned}& \sum_{\substack{m, n \leq N \\ m \neq n}} \frac{\overline{y_m} \delta_n}{\lambda_m - \lambda_n} \left(i\mu y_m - y_n \frac{(\delta_n \delta_m)^{1/2}}{\lambda_n - \lambda_m} \right) + \sum_{\substack{l, n \leq N \\ l \neq n}} \frac{y_l \delta_n}{\lambda_l - \lambda_n} \left(-i\mu \overline{y_l} - \overline{y_n} \frac{(\delta_l \delta_n)^{1/2}}{\lambda_n - \lambda_l} \right) \\ &= 2 \operatorname{Re} \sum_{\substack{m, n \leq N \\ m \neq n}} \overline{y_m} y_n \frac{\delta_n^{3/2} \delta_m^{1/2}}{(\lambda_m - \lambda_n)^2}\end{aligned}$$

となる。従って,

$$\|A\mathbf{y}\|^2 = \sum_{m \leq N} |y_m|^2 \delta_m \sum_{\substack{n \leq N \\ n \neq m}} \frac{\delta_n}{(\lambda_n - \lambda_m)^2} + 2 \operatorname{Re} \sum_{\substack{m, n \leq N \\ m \neq n}} \overline{y_m} y_n \frac{\delta_n^{3/2} \delta_m^{1/2}}{(\lambda_n - \lambda_m)^2} \quad (4.4)$$

を得る。ここで,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n \leq N \\ n \neq m}} \frac{\delta_n}{(\lambda_n - \lambda_m)^2} &\leq \sum_{\substack{n \leq N \\ n \neq m}} \frac{\delta_n}{(\lambda_n - \lambda_m)^2 - (\delta_n/2)^2} \\ &= \sum_{\substack{n \leq N \\ n \neq m}} \int_{\lambda_n - \delta_n/2}^{\lambda_n + \delta_n/2} \frac{d\lambda}{(\lambda - \lambda_m)^2} \leq \int_{|\lambda| \geq \delta_m/2} \frac{d\lambda}{\lambda^2} = 4\delta_m^{-1}\end{aligned} \quad (4.5)$$

が成り立つので, (4.4) の右辺の前半の和は $\leq 4 \sum_{m \leq N} |y_m|^2 = 4 \|\mathbf{y}\|^2 \ll \|\mathbf{y}\|^2$ と評価される. また, (4.4) の後半の和について, m に関する和に対して Cauchy-Schwarz の不等式を用いることで

$$\left| \operatorname{Re} \sum_{\substack{m, n \leq N \\ m \neq n}} \overline{y_m} y_n \frac{\delta_n^{3/2} \delta_m^{1/2}}{(\lambda_n - \lambda_m)^2} \right| \leq \|\mathbf{y}\| \times \left(\sum_{m \leq N} \delta_m \left| \sum_{\substack{n \leq N \\ n \neq m}} y_n \frac{\delta_n^{3/2}}{(\lambda_n - \lambda_m)^2} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

右辺の和を展開し, 不等式 $2|y_l \overline{y_n}| \leq |y_l|^2 + |y_n|^2$ を用いると,

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq N} \delta_m \left| \sum_{\substack{n \leq N \\ n \neq m}} y_n \frac{\delta_n^{3/2}}{(\lambda_n - \lambda_m)^2} \right|^2 &= \sum_{m \leq N} \delta_m \sum_{\substack{l, n \leq N \\ l, n \neq m}} y_l \overline{y_n} \frac{\delta_l^{3/2}}{(\lambda_l - \lambda_m)^2} \frac{\delta_n^{3/2}}{(\lambda_n - \lambda_m)^2} \\ &\leq \sum_{n \leq N} |y_n|^2 \delta_n^{3/2} \sum_{\substack{l \leq N \\ l \neq m}} \frac{\delta_l^{3/2}}{(\lambda_l - \lambda_m)^2} \sum_{\substack{m \leq N \\ m \neq n}} \frac{\delta_m}{(\lambda_n - \lambda_m)^2} \end{aligned}$$

を得る. 不等式 (4.5) と

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{l \leq N \\ l \neq n}} \frac{\delta_l^{3/2}}{(\lambda_l - \lambda_n)^2} &\leq \sum_{\substack{l \leq N \\ l \neq n}} \frac{\delta_l}{|\lambda_l - \lambda_n|^{3/2}} \ll \sum_{\substack{l \leq N \\ l \neq n}} \int_{\lambda_l - \delta_l/2}^{\lambda_l + \delta_l/2} \frac{d\lambda}{|\lambda - \lambda_n|^{3/2}} \\ &\leq 2 \int_{\delta_n/2}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{3/2}} \ll \delta_n^{-1/2} \end{aligned}$$

により,

$$\sum_{n \leq N} |y_n|^2 \delta_n^{3/2} \sum_{\substack{l \leq N \\ l \neq m}} \frac{\delta_l^{3/2}}{(\lambda_l - \lambda_m)^2} \sum_{\substack{m \leq N \\ m \neq n}} \frac{\delta_m}{(\lambda_n - \lambda_m)^2} \ll \sum_{n \leq N} |y_n|^2 = \|\mathbf{y}\|^2.$$

よって, (4.4) の後半の和も $\ll \|\mathbf{y}\|$ と評価される. 従って, $\|A\mathbf{y}\| \ll \|\mathbf{y}\|$ となり, (4.2) を得る. これで, 定理 4.1 の証明が完了する. $\square$

定理 4.1 の応用として, 以下の離散平均についての評価も得る.

命題 4.2 任意の $N, T \geq 2$, $R \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 任意の数論的関数 $a(n)$, そして任意の $\sigma_1, \dots, \sigma_R \in \mathbb{R}$ と $1 \leq |t_r - t_{r'}| \leq T$, $r \neq r'$ をみたす $t_1, \dots, t_R \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\sum_{r \leq R} \left| \sum_{n \leq N} a(n) n^{-\sigma_r - it_r} \right|^2 \ll \log N \left(T \sum_{n \leq N} |a(n)|^2 n^{-2\sigma_0} + \sum_{n \leq N} n^{1-2\sigma_0} |a(n)|^2 \right)$$

が $\sigma_0 = \min\{\sigma_1, \dots, \sigma_R\}$ で成り立つ.

証明. まず, $\sigma_1 = \dots = \sigma_R = 0$ として,

$$\sum_{r \leq R} \left| \sum_{n \leq N} a(n) n^{-it_r} \right|^2 \ll \log N \left(T \sum_{n \leq N} |a(n)|^2 + \sum_{n \leq N} n |a(n)|^2 \right) \quad (4.6)$$

を示す. 実数 y に対して, 関数 f が $f \in C^1([y - 1/2, y + 1/2])$ をみたすとき,

$$f(x) = \int_{y-1/2}^{y+1/2} f(t) dt + \int_{y-1/2}^x (t - y + 1/2) f'(t) dt + \int_x^{y+1/2} (t - y - 1/2) f'(t) dt$$

が任意の $x \in [y - 1/2, y + 1/2]$ に対して成り立つ. よって

$$|f(y)| \leq \int_{y-1/2}^{y+1/2} (|f(t)| + \frac{1}{2} |f'(t)|) dt$$

が成り立つ. この不等式により, $f(t) = \left(\sum_{n \leq N} a(n) n^{-it} \right)^2$ とすると,

$$\sum_{r \leq R} \left| \sum_{n \leq N} a(n) n^{-it_r} \right|^2 = \sum_{r \leq R} |f(t_r)| \leq \sum_{r \leq R} \int_{t_r-1/2}^{t_r+1/2} (|f(t)| + \frac{1}{2} |f'(t)|) dt.$$

今, $|t_r - t_{r'}| \geq 1$ かつ $|t_r - t_{r'}| \leq T$ であることから

$$\sum_{r \leq R} \left| \sum_{n \leq N} a(n) n^{-it_r} \right|^2 \leq \int_{t_1-T}^{t_1+T} |f(t)| dt + \frac{1}{2} \int_{t_1-T}^{t_1+T} |f'(t)| dt$$

を得る. 右辺の前半の積分については定理 4.1 を用いることで,

$$\int_{t_1-T}^{t_1+T} |f(t)| dt = \int_{t_1-T}^{t_1+T} \left| \sum_{n \leq N} a(n) n^{-it} \right|^2 dt \ll \sum_{n \leq N} (T + n) |a(n)|^2$$

となることが分かる. また, $f'(t) = -2i \sum_{m \leq N} a(m) m^{-it} \log m \times \sum_{n \leq N} a(n) n^{-it}$

となることから Cauchy-Schwarz の不等式と定理 4.1 より,

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1-T}^{t_1+T} |f'(t)| dt \\
& \leq 2 \left(\int_{t_1-T}^{t_1+T} \left| \sum_{m \leq N} a(m) m^{-it} \log m \right|^2 dt \right)^{1/2} \times \left(\int_{t_1-T}^{t_1+T} \left| \sum_{n \leq N} a(n) n^{-it} \right|^2 dt \right)^{1/2} \\
& \ll \left(\sum_{m \leq N} (T+m) |a(m) \log m|^2 \right)^{1/2} \times \left(\sum_{n \leq N} (T+n) |a(n)|^2 \right)^{1/2} \\
& \leq \log N \left(T \sum_{n \leq N} |a(n)|^2 + \sum_{n \leq N} n |a(n)|^2 \right)
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, 評価 (4.6) を得る.

次に一般の $\sigma_1, \dots, \sigma_R \in \mathbb{R}$ の場合を示す. これは (4.6) を部分和公式で一般化することで得られる. まず部分和公式により,

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq N} a(n) n^{-\sigma_r - it_r} &= a(1) + \sum_{2 \leq n \leq N} a(n) n^{-\sigma_r - it_r} \\
&= a(1) + N^{\sigma_0 - \sigma_r} \sum_{2 \leq n \leq N} a(n) n^{-\sigma_0 - it_r} \\
&\quad - \int_2^N (\sigma_0 - \sigma_r) \xi^{\sigma_0 - \sigma_r - 1} \sum_{2 \leq n \leq \xi} a(n) n^{-\sigma_0 - it_r} d\xi.
\end{aligned}$$

任意の $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ に対して $|z_1 + z_2 + z_3|^2 \leq 3|z_1|^2 + 3|z_2|^2 + 3|z_3|^2$ が成り立つので,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n \leq N} a(n) n^{-\sigma_r - it_r} \right|^2 &\leq 3|a(1)|^2 + 3 \left| \sum_{2 \leq n \leq N} a(n) n^{-\sigma_0 - it_r} \right|^2 \\
&\quad + 3 \left| \int_1^N (\sigma_0 - \sigma_r) \xi^{\sigma_0 - \sigma_r - 1} \sum_{2 \leq n \leq \xi} a(n) n^{-\sigma_0 - it_r} d\xi \right|^2.
\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz の不等式により,

$$\left| \int_2^N (\sigma_0 - \sigma_r) \xi^{\sigma_0 - \sigma_r - 1} \sum_{2 \leq n \leq \xi} a(n) n^{-\sigma_0 - it_r} d\xi \right|^2$$

$$\leq (\sigma_r - \sigma_0)^2 \int_2^N \xi^{2\sigma_0 - 2\sigma_r - 1} \log \xi \, d\xi \times \int_2^N \left| \sum_{2 \leq n \leq \xi} a(n) n^{-\sigma_0 - it_r} \right|^2 \frac{d\xi}{\xi \log \xi}.$$

任意の $x \geq 0$ に対して, $xN^{-x} \log N = x \log N / e^{x \log N} \leq 1$ が成り立つことに注意すると, 右辺前半の積分は

$$= 2^{2(\sigma_0 - \sigma_r)} - N^{2(\sigma_0 - \sigma_r)} - (\sigma_r - \sigma_0) \left(N^{2(\sigma_0 - \sigma_r)} \log N - 2^{2(\sigma_0 - \sigma_r)} \log 2 \right) \ll 1$$

と評価できる. よって,

$$\begin{aligned} \sum_{r \leq R} \left| \sum_{n \leq N} a(n) n^{-\sigma_r - it_r} \right|^2 &\ll \sum_{r \leq R} |a(1)|^2 + \sum_{r \leq R} \left| \sum_{2 \leq n \leq N} a(n) n^{-\sigma_0 - it_r} \right|^2 \\ &\quad + \int_2^N \sum_{r \leq R} \left| \sum_{2 \leq n \leq \xi} a(n) n^{-\sigma_0 - it_r} \right|^2 \frac{d\xi}{\xi \log \xi} \end{aligned} \quad (4.7)$$

を得る. これに (4.6) の $a(n)$ を $a(n)n^{-\sigma_0}$ として適用することで,

$$\begin{aligned} &\sum_{r \leq R} \left| \sum_{n \leq N} a(n) n^{-\sigma_r - it_r} \right|^2 \\ &\ll R |a(1)|^2 + \log N \left(T \sum_{n \leq N} |a(n)|^2 n^{-2\sigma_0} + \sum_{n \leq N} n^{1-2\sigma_0} |a(n)|^2 \right) \\ &\quad + \int_2^N \log \xi \left(T \sum_{2 \leq n \leq \xi} |a(n)|^2 n^{-2\sigma_0} + \sum_{2 \leq n \leq \xi} n^{1-2\sigma_0} |a(n)|^2 \right) \frac{d\xi}{\xi \log \xi} \end{aligned}$$

となる. 右辺の第 1 項は $R \ll T$ であることから, 第 2 項の定数倍以下なので省略できる. また右辺の積分は

$$\begin{aligned} &= T \sum_{2 \leq n \leq N} |a(n)|^2 n^{-2\sigma_0} \int_n^N \frac{d\xi}{\xi} + \sum_{2 \leq n \leq N} n^{1-2\sigma_0} |a(n)|^2 \int_n^N \frac{d\xi}{\xi} \\ &\ll \log N \left(T \sum_{n \leq N} |a(n)|^2 n^{-2\sigma_0} + \sum_{n \leq N} n^{1-2\sigma_0} |a(n)|^2 \right) \end{aligned}$$

と評価される. 以上により, 一般の $\sigma_1, \dots, \sigma_R \in \mathbb{R}$ の場合の証明も完了する. □

4.2 Halász-Montgomery の不等式

定理 1.2 の証明のために, ここでは以下の不等式を証明する.

補題 4.3 複素内積空間 H に対して, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を内積, $a \in H$ に対して, $\|a\| = \langle a, a \rangle^{1/2}$ とする. このとき, 任意の $a_1, \dots, a_R, b \in H$ に対して, ある $1 \leq r \leq R$ で $a_r \neq 0$ ならば

$$\sum_{1 \leq r \leq R} \frac{|\langle a_r, b \rangle|^2}{\sum_{r' \leq R} |\langle a_r, a_{r'} \rangle|} \leq \|b\|^2 \quad (4.8)$$

が成り立つ. 特に,

$$\sum_{1 \leq r \leq R} |\langle a_r, b \rangle|^2 \leq \|b\|^2 \max_{1 \leq r \leq R} \sum_{1 \leq r' \leq R} |\langle a_r, a_{r'} \rangle| \quad (4.9)$$

が成り立つ.

証明. 任意の $\xi_r \in \mathbb{C}$ に対して, 不等式

$$\|b - \sum_{1 \leq r \leq R} \xi_r a_r\|^2 \geq 0$$

の左辺を展開することで,

$$\|b\|^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{1 \leq r \leq R} \xi_r \langle a_r, b \rangle + \sum_{1 \leq r, r' \leq R} \xi_r \overline{\xi_{r'}} \langle a_r, a_{r'} \rangle \geq 0$$

を得る. また, $2|\xi_r \overline{\xi_{r'}}| \leq |\xi_r|^2 + |\xi_{r'}|^2$ を用いることで,

$$\|b\|^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{1 \leq r \leq R} \xi_r \langle a_r, b \rangle + \sum_{1 \leq r \leq R} |\xi_r|^2 \sum_{1 \leq r' \leq R} |\langle a_r, a_{r'} \rangle| \geq 0$$

も得る. 従って, ξ_r を

$$\xi_r = \frac{\langle a_r, b \rangle}{\sum_{1 \leq r' \leq R} |\langle a_r, a_{r'} \rangle|}$$

と選ぶことで, (4.8) を得る.

また, (4.8) により,

$$\frac{1}{\max_{1 \leq r \leq R} \sum_{1 \leq r' \leq R} |\langle a_r, a_{r'} \rangle|} \sum_{1 \leq r \leq R} |\langle a_r, b \rangle|^2 \leq \sum_{1 \leq r \leq R} \frac{|\langle a_r, b \rangle|^2}{\sum_{1 \leq r' \leq R} |\langle a_r, a_{r'} \rangle|} \leq \|b\|^2$$

となり, (4.9) を得る. $\square$

補題 4.4 を用いて, Dirichlet 多項式の離散平均に対する, 命題 4.2 とは別の評価を証明する.

命題 4.4 任意の $M > 1$ に対して, 他の記号は命題 4.2 と同じ条件下で,

$$\begin{aligned} & \sum_{r \leq R} \left| \sum_{N < n \leq MN} a(n) n^{-\sigma_r - it_r} \right|^2 \\ & \ll \left(MN + RT^{1/2} \log T \log(2M) \right) \sum_{N < n \leq MN} |a(n)|^2 n^{-2\sigma_0} \end{aligned} \quad (4.10)$$

が成り立つ.

証明. 実数 MN は整数であると仮定しても一般性を失わないので以下それを仮定する. まず, $\sigma_1 = \cdots = \sigma_R = 0$ の場合を証明する. 関数 f を区間 $[1/2, 3]$ に台をもつ C^∞ 級関数であり, $x \in [1, 2]$ で $f(x) = 1$ かつ, $x \geq 0$ で $0 \leq f(x) \leq 1$ をみたすものとして固定する. そして, $f_M(x)$ を

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x \leq 1), \\ f(1 + x/M) & (x > 1) \end{cases}$$

と定義し, さらに $f_{M,N}(x) = f_M(x/N)$ と定義する. 区間 $[1, 1 + 1/M]$ 上で f の値は常に 1 なので, f_M も C^∞ 関数となることに注意したい. このとき, $f_{M,N}$ は $N < x \leq MN$ で $f_{M,N}(x) = 1$ をみたし, $[N/2, 2MN]$ に台をもつ. 補題 4.3 を, 通常の Hermite 内積に対する $\mathbb{C}$ 上の $2MN$ 次元内積空間を H とし, $a_r = (a_r(n))_{n=1}^{2MN} \in H$ を $a_r(n) = f_{M,N}(n)^{1/2} n^{-it_r}$, さらに $b = (b(n))_{n=1}^{2MN} \in H$ を $n \in [N, MN]$ のときは $b(n) = a(n)$, $n \notin [N, MN]$ のときは $b(n) = 0$ とする. このとき, 対象の和は

$$\sum_{1 \leq r \leq R} \left| \sum_{N < n \leq MN} a(n) n^{-it_r} \right|^2 = \sum_{1 \leq r \leq R} |\langle a_r, b \rangle|^2$$

と表現できる. 補題 4.3 を用いると,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq r \leq R} \left| \sum_{N < n \leq MN} a(n) n^{-it_r} \right|^2 &\leq \|b\|^2 \max_{1 \leq r \leq R} \sum_{1 \leq r' \leq R} |\langle a_r, a_{r'} \rangle|^2 \\ &= \max_{1 \leq r \leq R} \sum_{1 \leq r' \leq R} \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_{M,N}(n) n^{-i(t_r - t_{r'})} \right| \times \sum_{n \leq N} |a(n)|^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

を得る. 次に, $f_{M,N}$ を含む n についての和を評価するために, 関数 $G(t) := \sum_{n=1}^{\infty} f_{M,N}(n) n^{-it}$ を考察する. 関数 $\widetilde{f_{M,N}}$ を

$$\widetilde{f_{M,N}}(w) = \int_0^{\infty} f_{M,N}(x) x^{w-1} dx = N^w \int_{1/2}^{2M} f_M(x) x^{w-1} dx$$

と定義する. つまり $\widetilde{f_{M,N}}$ は $f_{M,N}$ の Mellin 変換である. このとき, $\widetilde{f_{M,N}}$ は整関数である. また, $\operatorname{Re} w \geq 0$ に対して,

$$\widetilde{f_{M,N}}(w) = N^w \int_{1/2}^{2M} f_M(x) x^{w-1} dx \ll (2MN)^{\operatorname{Re} w} \log(2M) \quad (4.12)$$

が成り立つ. 加えて, $0 \leq \operatorname{Re} w \leq 2$, $w \neq 0$ に対して部分積分を 2 回行うことで,

$$\begin{aligned} \widetilde{f_{M,N}}(w) &= \frac{N^w}{w(w+1)} \int_{1/2}^{2M} f_M''(x) x^{w+1} dx \\ &= \frac{N^w}{w(w+1)} \int_{1/2}^1 f_M''(x) x^{w+1} dx + \frac{M^{-2} N^w}{w(w+1)} \int_1^{2M} f_M''(1+x/M) x^{w+1} dx \\ &\ll \frac{(MN)^{\operatorname{Re} w}}{|w(1+w)|} \end{aligned} \quad (4.13)$$

も成り立つ. 今, $f_{M,N}$ は $C^\infty([0, \infty))$ に属する $[N/2, 2MN]$ に台をもつ関数なので, Mellin 反転公式により

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-it} f_{M,N}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-it} \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \widetilde{f_{M,N}}(w) n^{-w} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \widetilde{f_{M,N}}(w) \zeta(it+w) dw \end{aligned}$$

が成り立つ. 最後の級数と積分の入れ替えについては, 評価 (4.13) により級数と積分は絶対収束するので正当化される. 積分路を移動することで,

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f_{M,N}}(iu) \zeta(it+iu) du + \operatorname{Res}_{w=1-it} \left(\widetilde{f_{M,N}}(w) \zeta(it+w) \right).$$

留数の項については (4.13) を用いることで,

$$\operatorname{Res}_{w=1-it} \left(\widetilde{f_{M,N}}(w) \zeta(it+w) \right) = \widetilde{f_{M,N}}(1-it) \ll MN(1+|t|)^{-2}$$

と評価される. 積分の項については, $\sigma > 0$, $t \in \mathbb{R}$ に関する次の評価

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \ll (1+|t|^{1-\sigma}) \min \left\{ \frac{1}{|\sigma-1|}, \log(|t|+3) \right\} \quad (4.14)$$

を用いる. これは ζ の Dirichlet 級数を $\sum_{n \leq |t|} n^{-s} + \sum_{n > |t|} n^{-s}$ と分け, 前半の和は自明に, 後半の和は [23] の補題 2.5 と同様の議論で評価することで証明できる. 特に, $\sigma = 1$, $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\zeta(1+it) \ll \log(|t|+3)$ が成り立つ. この評価と関数等式により得られる評価 $\zeta(it+iu) \ll (1+|t|+|u|)^{1/2} \log(|t|+|u|+3)$, (4.12) および (4.13) を用いることで,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f_{M,N}}(iu) \zeta(it+iu) du \\ & \ll \int_{|u| \leq 1} (1+|t|+|u|)^{1/2} \log(|t|+|u|+3) \log(2M) du \\ & \quad + \int_{|u| \geq 1} (1+|t|+|u|)^{1/2} \log(|t|+|u|+3) u^{-2} du \\ & \ll (1+|t|)^{1/2} \log(|t|+3) \log(2M). \end{aligned}$$

従って,

$$G(t) \ll MN(1+|t|)^{-2} + (1+|t|)^{1/2} \log(|t|+3) \log(2M)$$

を得る. この評価と, 二つの仮定 $|t_r - t_{r'}| \geq 1$, $r \neq r'$ と $-T \leq t_r \leq T$ であることを用いることで,

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq r \leq R} \sum_{1 \leq r' \leq R} \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_{M,N}(n) n^{-i(t_r - t_{r'})} \right| = \max_{1 \leq r \leq R} \sum_{1 \leq r' \leq R} |G(t_r - t_{r'})| \\ & \ll \max_{1 \leq r \leq R} \left\{ \sum_{1 \leq r' \leq R} MN(1+|t_r - t_{r'}|)^{-2} \right. \\ & \quad \left. + (1+|t_r - t_{r'}|)^{1/2} \log(|t_r - t_{r'}|+3) \log(2M) \right\} \\ & \ll MN \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \max_{1 \leq r \leq R} \sum_{1 \leq r' \leq R} T^{1/2} \log T \log(2M) \\ & \ll MN + RT^{1/2} \log T \log(2M). \end{aligned}$$

この評価を (4.11) に適用することで, $\sigma_1 = \cdots = \sigma_R = 0$ の場合の (4.10) を得る.

一般の σ_r に関しては, 命題 4.2 の場合と同様に, (4.7) の和の範囲を $N < n \leq MN$ に変更したものに対して, (4.10) の $a(n)$ を $a(n)n^{-\sigma_0}$ として適用することで,

$$\begin{aligned}
& \sum_{r \leq R} \left| \sum_{N < n \leq MN} a(n)n^{-\sigma_r - it_r} \right|^2 \\
& \ll \sum_{r \leq R} \left| \sum_{N < n \leq MN} a(n)n^{-\sigma_0 - it_r} \right|^2 + \int_1^M \sum_{r \leq R} \left| \sum_{N < n \leq \xi N} a(n)n^{-\sigma_0 - it_r} \right|^2 \frac{d\xi}{\xi \log(N\xi)} \\
& \ll \left(MN + RT^{1/2} \log T \log(2M) \right) \sum_{N < n \leq MN} |a(n)|^2 n^{-2\sigma_0} \\
& \quad + \int_1^M (\xi N + RT^{1/2} \log T \log(2\xi)) \sum_{N < n \leq \xi N} |a(n)|^2 n^{-2\sigma_0} \frac{d\xi}{\xi \log(N\xi)} \\
& \ll (MN + RT^{1/2} \log T \log(2M)) \sum_{N < n \leq MN} |a(n)|^2 n^{-2\sigma_0}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 以上より, 一般の σ_r に対しても (4.10) が成り立つ. これでこの命題の証明が完了する. $\square$

系 4.5 命題 4.4 と同じ仮定をおき, かつ

$$W = W(M, N) = \sum_{N < n \leq MN} |a(n)| n^{-2\sigma_0},$$

$$\mathcal{T} = \left\{ t_r : \left| \sum_{N < n \leq MN} a(n)n^{-\sigma_r - it_r} \right| \geq V \right\}$$

とおく. このとき, 任意の $V \geq CW^{1/2}$ に対して,

$$\#\mathcal{T} \ll MNTV^{-6}W^3(\log(V^2/W))^2(\log(2M))^2 + MNV^{-2}W$$

が成り立つ. ただし, C は十分大な正の絶対定数である.

証明. まず, U を

$$V^2 = C_1 U^{1/2} W \log U \log(2M)$$

をみたす正の数とする. ただし, C_1 は後で選ばれる絶対定数である. ここで, $V \geq CW^{1/2}$ で C を C_1 に依存して十分大とすることで, $U \geq 2$ となる. このとき,

$\mathcal{T}$ を含む長さが高々 $2T$ の区間を, 長さ $2U$ の区間 I_j , $j = 1, \dots, J$ に分割する. この分割の個数 J は, もちろん高々 $\lceil T/U \rceil$ 個である. 区間 I_j に属する $\mathcal{T}$ の元の集合を $\mathcal{T}_j$ とする, つまり $\mathcal{T}_j = I_j \cap \mathcal{T}$ と定義し, $R_j = \#\mathcal{T}_j$ とする. この設定の下で, 命題 4.4 の T を U として適用することで,

$$\begin{aligned} R_j V^2 &\leq \sum_{t_r \in \mathcal{T}_j} \left| \sum_{N < n \leq MN} a(n) n^{-\sigma_r - it_r} \right|^2 \\ &\leq C_2 \left(MN + R_j U^{1/2} \log U \log(2M) \right) \sum_{N < n \leq MN} |a(n)|^2 n^{-2\sigma_0} \\ &= C_2 \left(MN + R_j U^{1/2} \log U \log(2M) \right) W \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, C_2 は正の絶対定数である. ここで, $C_1 = 2C_2$ とすれば, $C_2 U^{1/2} W V^{-2} \log U \log(2M) = 1/2$ となり, 上記の不等式は $R_j \ll V^{-2} M N W$ と変形できる. 従って,

$$\begin{aligned} \#\mathcal{T} &= \sum_{1 \leq j \leq J} R_j \ll J V^{-2} M N W \leq \left(\frac{T}{U} + 1 \right) V^{-2} M N W \\ &\ll M N T V^{-6} W^3 (\log(V^2/W))^2 (\log(2M))^2 + M N V^{-2} W \end{aligned}$$

となり主張を得る. □

5 Riemann ゼータ関数の 4 乗平均

本節では Ingham による Riemann ゼータ関数の 4 乗平均の漸近公式 (2.8) を証明する. 具体的には以下を証明する.

定理 5.1 任意の $T \geq 3$ に対して,

$$\int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^4 dt = \frac{1}{2\pi^2} T (\log T)^4 + O(T (\log T)^3).$$

注意 5.2 定理 2.7 から分かるように, 零点密度評価の証明には 4 乗平均の漸近公式は必要ではなく, 上からの評価のみで十分である. しかし, Riemann ゼータ関数の平均値定理はそれ自体が興味深い対象であるため, 本稿では漸近公式の証明まで与える.

定理 5.1 の証明では, 近似関数等式の際に用いる鞍点法や指数和などの複雑な議論を用いない. この証明法は Ramachandra [20] によるものである. そこで必要となる

のは Montgomery と Vaughan による Dirichlet 多項式の平均値定理 (定理 4.1), 約数関数 $d(n)$ の 2 乗平均の漸近公式 (系 5.5, $k = 2, \sigma = 1$), そして関数等式のみで証明できる ζ^2 の近似公式 (補題 5.6) の三つだけである.

最初に定理 5.1 の証明の準備として, 約数関数 $d(n) = \sum_{d|n} 1$ の 2 乗平均に対する漸近公式を証明する. また後々のために, ここでは一般約数関数 $d_k(n)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に一般化した漸近公式を与える. 一般約数関数 $d_k(n)$ は

$$\zeta(s)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s}, \quad \sigma > 1$$

によって定義される. このとき, $d(n) = d_2(n)$ であり, 一般的に d_k は乗法的関数であり, 任意の素冪 p^a に対して,

$$d_k(p^a) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(k)\Gamma(a+1)} \quad (5.1)$$

が成り立つ. ここでは, $d_k(n)^2$ の和を考えるため, これを係数にもつ Dirichlet 級数を F として定義する, つまり

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)^2}{n^s}.$$

数論的関数 d_k^2 は乗法的関数なので F は Euler 積をもち, それを考察することで, $F(s) = \zeta(s)^{k^2} G_k(s)$ と表示できることが分かる. ただし, G_k は $\sigma > 1/2$ で絶対収束する Dirichlet 級数表示をもつ関数である. 例えば, $k = 2$ のときは, $G_2(s) = 1/\zeta(2s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-2s}$ となる. このとき, 以下が成り立つ.

命題 5.3 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $X \geq 3$ に対して,

$$\sum_{n \leq X} d_k(n)^2 = C_k X (\log X)^{k^2-1} + O_k \left(X (\log X)^{k^2-2} \right).$$

ここで, $C_k = G_k(1)/\Gamma(k^2)$ である. 特に, $C_2 = 1/\pi^2$.

注意 5.4 注意 5.2 と同様に, 命題 5.3 のような漸近公式は零点密度評価の証明では必要ない. 実際には, 上からの評価

$$\sum_{n \leq X} d_k(n)^2 \ll_k X (\log X)^{k^2-1} \quad (5.2)$$

だけで十分であり, $k = 2$ でこの評価を使うことで, 定理 5.1 の上からの評価のみであれば証明できる. そして (5.2) であれば比較的簡単に証明できる. 以下それを記す. 零点密度の証明のみに焦点を当てるなら, ここさえフォローすれば十分である. 命題 5.3 と (5.2) の証明は [11] の第 1.6 節を参考にした.

命題 5.3 の証明の都合により, ここでは一般の $k, l \geq 1$ に対して,

$$\sum_{n \leq X} d_k(n)^l \ll_{k,l} X(\log X)^{k^l-1} \quad (5.3)$$

を示す. この一般化は約数関数に対する重要な評価 $d_k(n) \ll_{k,\varepsilon} n^\varepsilon$ を導く. 実際に, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して評価 (5.3) を $l = 2/\varepsilon$ として用いることで,

$$d_k(n) \leq \left(\sum_{m \leq n} d_k(m)^l \right)^{1/l} \ll_{k,\varepsilon} \left\{ n(\log n)^{k^l-1} \right\}^{1/l} \ll_{k,\varepsilon} n^\varepsilon$$

が成り立つ.

さて (5.3) の証明に入る. 数論的関数 h を $h(n) = (d_k^l * \mu)(n) = \sum_{m|n} d_k(m)^l \mu(n/m)$ と定義する. このとき $k \geq 1$ のときは $h(n) \geq 0$ が成り立つことに注意したい. Möbius の反転公式により, $d_k(n)^l = \sum_{m|n} h(m)$ となるので

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} d_k(n)^l &= \sum_{m_1 m_2 \leq X} h(m_1) \leq X \sum_{m_1 \leq X} \frac{h(m_1)}{m_1} \leq X \prod_{p \leq X} \sum_{a=0}^{\infty} h(p^a) p^{-a} \\ &= X \prod_{p \leq X} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \sum_{a=0}^{\infty} d_k(p^a)^l p^{-a}. \end{aligned}$$

最後の a についての和は (5.1) により

$$\sum_{a=0}^{\infty} d_k(p^a)^l p^{-a} = 1 + \frac{k^l}{p} + O_{k,l} \left(\frac{1}{p^2} \right) \leq \left(1 + \frac{1}{p} \right)^{k^l} \left(1 + \frac{1}{p^2} \right)^C$$

と十分大きな定数 $C = C_0(k, l)$ を用いて評価される. Mertens の公式 $\sum_{p \leq X} p^{-1} \leq$

$\log \log X + O(1)$ を用いることで,

$$\begin{aligned} X \prod_{p \leq X} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{a=0}^{\infty} d_k(p^a)^l p^{-a} &\ll_k X \prod_{p \leq X} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{k^l} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^C \\ &\leq X \exp \left((k^l - 1) \sum_{p \leq X} \frac{1}{p} + O_{k,l} \left(\sum_{p \leq X} \frac{1}{p^2} \right) \right) \\ &\ll_{k,l} X (\log X)^{k^l - 1} \end{aligned}$$

となる. これにより, (5.3) を得る.

命題 5.3 の証明. 十分小な任意の $\varepsilon > 0$ をとる. このとき注意 5.4 により, $d_k(n) \ll_{k,\varepsilon} n^\varepsilon$ と評価できる. この評価により,

$$\sum_{n \leq X} d_k(n)^2 = \sum_{n \leq \lceil X \rceil + 1/2} d_k(n)^2 + O(d_k(\lceil X \rceil)^2) = \sum_{n \leq \lceil X \rceil + 1/2} d_k(n)^2 + O_{k,\varepsilon}(X^\varepsilon)$$

となり, この誤差は我々の目的に対しては十分小さい. ただし, $\lceil X \rceil$ は X 以上の最小の整数である. よって, X の少数部分が $1/2$ であると仮定してよい.

Perron の公式 ([18, Theorem 5.2, Corollary 5.3] 参照) より, $T = \exp(2\sqrt{\log X})$, $c_0 = 1 + 1/\log X$ に対して,

$$\sum_{n \leq X} d_k(n)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - iT}^{c_0 + iT} F(s) \frac{X^s}{s} ds + E.$$

ただし,

$$E \ll \sum_{X/2 < n < 2X} d_k(n)^2 \min \left\{ 1, \frac{X}{T|X - n|} \right\} + \frac{X}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)^2}{n^{c_0}}.$$

ここで, $H = X^{1/2}$ とおく. このとき, X の少数部分が $1/2$ であることに注意して前半の和を,

$$\begin{aligned} &\sum_{X/2 < n < X} d_k(n)^2 \min \left\{ 1, \frac{X}{T|X - n|} \right\} \\ &\leq \frac{X}{T} \sum_{X/2 \leq n \leq X-H} \frac{d_k(n)^2}{X - n} + \sum_{X-H < n \leq X-1/2} d_k(n)^2 \end{aligned}$$

と分割する. 後半の和は $\ll_{\varepsilon, k} X^{1/2+\varepsilon}$ と評価される. 前半の和は部分和公式により,

$$\sum_{X/2 < n \leq X-H} \frac{d_k(n)^2}{X-n} = d_k(\lceil X-H \rceil)^2 H^{-1} - \int_{X/2}^{X-H} \sum_{X+H < n \leq \xi} d_k(n)^2 \frac{d\xi}{(X-\xi)^2}$$

となり, 最初の項は $\ll_{k, \varepsilon} X^{-1/2+2\varepsilon}$ であり, 後半の和は (5.2) により, $\ll_k H^{-1} X (\log X)^{k^2-1} \ll_{\varepsilon} X^{1/2+\varepsilon}$ と評価される. よって,

$$\sum_{X/2 < n < X} \frac{d_k(n)^2}{X-n} \ll_{k, \varepsilon} X^{1/2+\varepsilon}$$

を得る. 同様に,

$$\sum_{X < n \leq 2X} \frac{d_k(n)^2}{n-X} \ll_{k, \varepsilon} X^{1/2+\varepsilon}$$

が成り立つことも分かる. 今 $d_k(n)^2$ が乗法的であることから, (5.1) を用いて F の Euler 積を計算することで, $F(s) = \zeta(s)^{k^2} G_k(s)$ と書けることが分かる. ただし, $G_k(s)$ は $\sigma > 1/2$ で絶対収束する Dirichlet 級数で表示される関数である. このとき,

$$\frac{X}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)^2}{n^{c_0}} = \frac{X}{T} F(c_0) = \frac{X}{T} \zeta(1+1/\log X)^{k^2} G_k(1+1/\log X)$$

となる. 関数 G_k は $\sigma > 1/2$ で絶対収束する Dirichlet 級数で表せるので, $G_k(1+1/\log X) \ll_k 1$ であり, かつ Riemann ゼータ関数は $s=1$ で 1 位の極を持つことから

$$\frac{X}{T} \zeta(1+1/\log X)^{k^2} G_k(1+1/\log X) \ll_k \frac{X}{T} (\log X)^{k^2} \ll_k X e^{-\sqrt{\log X}}$$

と評価できる. 従って,

$$\sum_{n \leq X} d_k(n)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0-iT}^{c_0+iT} F(s) \frac{X^s}{s} ds + O_k \left(X e^{-\sqrt{\log X}} \right)$$

が成り立つ.

次に右辺の積分路を変更すると,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0-iT}^{c_0+iT} F(s) \frac{X^s}{s} ds \\
 &= \operatorname{Res}_{s=1} \left(\zeta(s)^{k^2} G_k(s) \frac{X^s}{s} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\delta-iT}^{1-\delta+iT} \zeta(s)^{k^2} G_k(s) \frac{X^s}{s} ds \\
 & \quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\delta+iT}^{c_0+iT} \zeta(s)^{k^2} G_k(s) \frac{X^s}{s} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0-iT}^{1-\delta-iT} \zeta(s)^{k^2} G_k(s) \frac{X^s}{s} ds.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

ただし, $\delta = 4/\log T$ である. Riemann ゼータ関数は $s = 1$ で留数 1 の 1 位の極を持つことから, X^s とその他の要素に分けて積の微分公式で計算することで,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}_{s=1} \left(\zeta(s)^{k^2} G_k(s) \frac{X^s}{s} \right) &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{(k^2-1)!} \frac{d^{k^2-1}}{ds^{k^2-1}} \left((s-1)^{k^2} \zeta(s)^{k^2} G_k(s) \frac{X^s}{s} \right) \\
 &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{(k^2-1)!} (s-1)^{k^2} \zeta(s)^{k^2} G_k(s) s^{-1} \frac{d^{k^2-1}}{ds^{k^2-1}} X^s + O_k \left(X(\log X)^{k^2-2} \right) \\
 &= \frac{G_k(1)}{(k^2-1)!} X(\log X)^{k^2-1} + O_k \left(X(\log X)^{k^2-2} \right)
 \end{aligned}$$

が成り立つ. また, (5.4) の右辺第 2 項の積分路上では (4.14) を適用することで $\zeta(s) \ll \log T$ が成り立ち, かつ $G_k(s) \ll_k 1$ も成り立つので,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\delta-iT}^{1-\delta+iT} \zeta(s)^{k^2} G_k(s) \frac{X^s}{s} ds \ll_k X^{1-\delta} (\log T)^{k^2} \int_0^T \frac{dt}{1+t} \\
 & \ll_k X^{1-\delta} (\log T)^{k^2+1} \ll_k X^{1-\delta/2} = X e^{-\sqrt{\log X}}
 \end{aligned}$$

を得る. 同様に, (5.4) 右辺の後半二つの積分についても

$$\ll_k \frac{X^{c_0}}{T} (\log T)^{k^2} \ll_k X e^{-\sqrt{\log X}}$$

と評価される. 以上で, 命題 5.3 の証明が完了する. □

系 5.5 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $X \geq 3$ に対して,

$$\sum_{n \leq X} \frac{d_k(n)^2}{n^\sigma}$$

$$= \begin{cases} \frac{C_k}{1-\sigma} X^{1-\sigma} (\log X)^{k^2-1} + O_k\left(\frac{1}{(1-\sigma)^2} X^{1-\sigma} (\log X)^{k^2-2}\right) & (0 \leq \sigma < 1), \\ \frac{C_k}{k^2} (\log X)^{k^2} + O_k\left((\log X)^{k^2-1}\right) & (\sigma = 1), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)^2}{n^\sigma} + O_k\left(\frac{\sigma}{\sigma-1} X^{1-\sigma} (\log X)^{k^2-1}\right) & (\sigma > 1). \end{cases}$$

ここで C_k は命題 5.3 と同じ数である.

証明. まず, $0 \leq \sigma \leq 1$ の場合を考える. 命題 5.3 と部分和公式により,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \frac{d_k(n)^2}{n^\sigma} &= C_k X^{1-\sigma} (\log X)^{k^2-1} + \sigma C_k \int_3^X \xi^{-\sigma} (\log \xi)^{k^2-1} d\xi \\ &\quad + O_k\left(1 + \int_3^X \xi^{-\sigma} (\log \xi)^{k^2-2} d\xi\right). \end{aligned}$$

部分積分によって $0 \leq \sigma < 1$ のとき, $j \in \{1, 2\}$ に対して,

$$\begin{aligned} &\int_3^X \xi^{-\sigma} (\log \xi)^{k^2-j} d\xi \\ &= \frac{X^{1-\sigma}}{1-\sigma} (\log X)^{k^2-j} + O_k\left(\frac{1}{1-\sigma} + \frac{3}{1-\sigma} \int_1^X \xi^{-\sigma} (\log \xi)^{k^2-j-1} d\xi\right) \\ &= \frac{X^{1-\sigma}}{1-\sigma} (\log X)^{k^2-j} + O_k\left(\frac{1}{(1-\sigma)^2} X^{1-\sigma} (\log X)^{k^2-j-1}\right). \end{aligned}$$

また, $\sigma = 1$ のとき,

$$\int_3^X \xi^{-1} (\log \xi)^{k^2-j} d\xi = \frac{1}{k^2-j+1} (\log X)^{k^2-j+1} + O_k(1).$$

よって, $0 \leq \sigma \leq 1$ の場合の主張を得る.

一方で, $\sigma > 1$ のとき, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)^2}{n^\sigma}$ は収束し,

$$\sum_{n \leq X} \frac{d_k(n)^2}{n^\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)^2}{n^\sigma} - \sum_{n > X} \frac{d_k(n)^2}{n^\sigma}$$

と変形し, 命題 5.3 と部分和公式を用いることで,

$$\begin{aligned} \sum_{n>X} \frac{d_k(n)^2}{n^\sigma} &= \sigma \int_X^\infty \sum_{X< n \leq \xi} d_k(n)^2 \frac{d\xi}{\xi^{1+\sigma}} \ll_k \sigma \int_X^\infty (\log \xi)^{k^2-1} \frac{d\xi}{\xi^\sigma} \\ &\ll_k \frac{\sigma}{\sigma-1} X^{1-\sigma} (\log X)^{k^2-1} \end{aligned}$$

を得る. 従って, $\sigma > 1$ の場合の主張も成り立つ. $\square$

次に, 4 乗平均の証明のために, 以下の ζ^2 に関する近似公式を証明する. 以下の近似公式は, 鞍点法や指数和の議論を必要としない一見簡素なものであるが, これと定理 4.1 を組み合わせることで 4 乗平均の漸近公式を証明することができる.

補題 5.6 任意の $T \geq 3$ を取る. このとき, 任意の $0 < \sigma < 3/4$, $t \in [T, 2T]$ に対して,

$$\zeta(s)^2 = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) + F_4(s) + O(T^{-1}).$$

ただし,

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} e^{-n/T}, \\ F_2(s) &= -\chi(s)^2 \sum_{n \leq T} \frac{d(n)}{n^{1-s}}, \\ F_3(s) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{1/4-i\infty}^{1/4+i\infty} \chi(s+w)^2 \Gamma(w) \sum_{n \leq T} \frac{d(n)}{n^{1-s-w}} T^w dw, \\ F_4(s) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-3/4-i\infty}^{-3/4+i\infty} \chi(s+w)^2 \Gamma(w) \sum_{n > T} \frac{d(n)}{n^{1-s-w}} T^w dw, \\ \chi(s) &= 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s) \sin(\pi s/2). \end{aligned}$$

証明. ガンマ関数の Mellin 逆変換公式 (3.3) と Dirichlet 級数表示 $\zeta(z)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)n^{-z}$, ($\operatorname{Re} z > 1$) により,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta(s+w)^2 \Gamma(w) T^w dw = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) n^{-s} e^{-n/T}$$

が成り立つ. 一方, 留数定理より左辺の積分は

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{w=0}(\zeta(s+w)^2\Gamma(w)T^w) + \operatorname{Res}_{w=1-s}(\zeta(s+w)^2\Gamma(w)T^w) \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{-3/4-i\infty}^{-3/4+i\infty} \zeta(s+w)^2\Gamma(w)T^w dw \end{aligned}$$

と変形される. 最初の留数は, $\zeta(s)^2$ と一致する. また, 2 つ目の留数は, Stirling の公式より

$$\Gamma(w) \asymp (|\operatorname{Im} w| + 3)^{\operatorname{Re} w - 1/2} e^{-\pi |\operatorname{Im} w|/2} \quad (5.5)$$

が成り立つので, $0 < \sigma < 3/4$, $t \in [T, 2T]$ のとき,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{w=1-s}(\zeta(s+w)^2\Gamma(w)T^w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-(1-s)|=1} \zeta(s+w)^2\Gamma(w)T^w dw \\ &\ll \int_{|w-(1-s)|=1} T^{2-1/2} e^{-\pi T/2} T^2 |dw| \ll T^{-1} \end{aligned}$$

と評価される. さらに, 積分の項については関数等式を使うことで,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-3/4-i\infty}^{-3/4+i\infty} \zeta(s+w)^2\Gamma(w)T^w dw \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-3/4-i\infty}^{-3/4+i\infty} \chi(s+w)^2\zeta(1-s-w)^2\Gamma(w)T^w dw \end{aligned}$$

と変形できる. 再度 ζ^2 の Dirichlet 級数表示を用いて展開することで,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-3/4-i\infty}^{-3/4+i\infty} \chi(s+w)^2\zeta(1-s-w)^2\Gamma(w)T^w dw \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-3/4-i\infty}^{-3/4+i\infty} \chi(s+w)^2\Gamma(w) \sum_{n \leq T} \frac{d(n)}{n^{1-s-w}} T^w dw \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{-3/4-i\infty}^{-3/4+i\infty} \chi(s+w)^2\Gamma(w) \sum_{n > T} \frac{d(n)}{n^{1-s-w}} T^w dw \end{aligned}$$

となり, 前半部分は留数定理より,

$$\chi(s)^2 \sum_{n \leq T} \frac{d(n)}{n^{1-s}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{1/4-i\infty}^{1/4+i\infty} \chi(s+w)^2\Gamma(w) \sum_{n \leq T} \frac{d(n)}{n^{1-s-w}} T^w dw.$$

よって,

$$\zeta(s)^2 = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) + F_4(s) + O(T^{-1})$$

を得る. 以上で, 補題 5.6 の証明が完了する. $\square$

定理 5.1 の証明. 定理 5.1 の漸近公式の証明では任意の $T \geq 3$ に対して

$$\int_T^{2T} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^4 dt = \frac{1}{2\pi^2} T(\log T)^4 + O(T(\log T)^3) \quad (5.6)$$

を示せば十分である. 実際に, この評価と自明な評価 $\int_0^6 |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^4 dt \ll 1$ を用いることで,

$$\begin{aligned} \int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^4 dt &= \sum_{j \geq 0} \int_{T/2^{j+1}}^{T/2^j} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^4 dt \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{j \geq 0} \frac{T}{2^{j+1}} ((\log(T/2^{j+1}))^4 + O(\log(T/2^{j+1}))^3) + O(1) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} T(\log T)^4 + O(T(\log T)^3) \end{aligned}$$

が成り立つ. 以下 (5.6) を示す.

補題 5.6 により,

$$\begin{aligned} &\int_T^{2T} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^4 dt \quad (5.7) \\ &= \sum_{k=1}^4 \int_T^{2T} |F_k(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt + 2 \operatorname{Re} \sum_{1 \leq k < l \leq 4} \int_T^{2T} F_k(\tfrac{1}{2} + it) \overline{F_l(\tfrac{1}{2} + it)} dt \\ &\quad + O\left(\frac{1}{T} \sum_{k=1}^4 \int_T^{2T} |F_k(\tfrac{1}{2} + it)| dt\right). \end{aligned}$$

が成り立つ. 右辺の積分を定理 4.1 と系 5.5 を用いて計算する. まず, 定理 4.1 と系

5.5 より,

$$\begin{aligned}
 \int_T^{2T} |F_1(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt &= \sum_{n=1}^{\infty} (T + O(n)) d(n)^2 n^{-1} e^{-2n/T} \\
 &= \sum_{n \leq T} (T + O(n)) d(n)^2 n^{-1} \left(1 + O\left(\frac{n}{T}\right)\right) + O\left(\sum_{n > T} d(n)^2 e^{-2n/T}\right) \\
 &= T \sum_{n \leq T} \frac{d(n)^2}{n} + O\left(\sum_{n \leq T} d(n)^2\right) + O\left(T^2 \sum_{n > T} \frac{d(n)^2}{n^2}\right) \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} T(\log T)^4 + O(T(\log T)^3).
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

となることが分かる. ここで, $C_2 = 1/\pi^2$ であることを用いた. また, 関数等式により $\zeta(\frac{1}{2} + it) = \chi(\frac{1}{2} + it)\zeta(\frac{1}{2} - it)$ が成り立つことから, 両辺に絶対値を取り, $\zeta(\frac{1}{2} + it) = \overline{\zeta(\frac{1}{2} - it)}$ を用いることで, $|\chi(\frac{1}{2} + it)| = 1$ となることに注意し, $|F_1(\frac{1}{2} + it)|^2$ の積分と同様の計算することで,

$$\begin{aligned}
 \int_T^{2T} |F_2(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt &= \int_T^{2T} \left| \sum_{n \leq T} d(n) n^{-1/2+it} \right|^2 dt \\
 &= T \sum_{n \leq T} \frac{d(n)^2}{n} + O\left(\sum_{n \leq T} d(n)^2\right) = \frac{1}{4\pi^2} T(\log T)^4 + O(T(\log T)^3)
 \end{aligned}$$

が成り立つことも分かる. Cauchy-Schwarz の不等式により

$$\begin{aligned}
 |F_3(\tfrac{1}{2} + it)|^2 &\leq \frac{T^{1/2}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n \leq T} \frac{d(n)}{n^{1/4-it-iu}} \right|^2 |\Gamma(\tfrac{1}{4} + iu)| du \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(\tfrac{3}{4} + it + iu)^4 \Gamma(\tfrac{1}{4} + iu)| du
 \end{aligned}$$

が成り立ち, 後半の積分は (5.5) を用いることで, $t \in [T, 2T]$ に対して

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{\infty} |\chi(\tfrac{3}{4} + it + iu)^4 \Gamma(\tfrac{1}{4} + iu)| du \\
 &\ll \int_{-\infty}^{\infty} (|t + u| + 3)^{-1} (|u| + 3)^{-1/4} e^{-\pi|u|/2} du \\
 &\ll T^{-1} \int_{|u| \leq (\log T)^2} e^{-\pi|u|/2} du + \int_{|u| > (\log T)^2} e^{-\pi|u|/2} du \ll T^{-1}
 \end{aligned}$$

と評価される．従って，

$$|F_3(\tfrac{1}{2} + it)|^2 \ll T^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n \leq T} \frac{d(n)}{n^{1/4 - it - iu}} \right|^2 |\Gamma(\tfrac{1}{4} + iu)| du$$

を得る．この評価と定理 4.1, そして系 5.5 を用いることで，

$$\begin{aligned} \int_T^{2T} |F_3(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt &\ll T^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_T^{2T} \left| \sum_{n \leq T} \frac{d(n)}{n^{1/4 - it - iu}} \right|^2 dt \right) |\Gamma(\tfrac{1}{4} + iu)| du \\ &= T^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n \leq T} (T + n) \frac{|d(n)n^{iu}|^2}{n^{1/2}} \right) |\Gamma(\tfrac{1}{4} + iu)| du \\ &\ll T^{1/2} \sum_{n \leq T} \frac{d(n)^2}{n^{1/2}} \ll T(\log T)^3 \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．さらに $|F_4(t)|^2$ を含む積分も同様に，

$$|F_4(\tfrac{1}{2} + it)|^2 \ll T^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n > T} \frac{d(n)}{n^{5/4 - it - iu}} \right|^2 |\Gamma(-\tfrac{3}{4} + iu)| du$$

と評価され，

$$\int_T^{2T} |F_4(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt \ll T^{3/2} \sum_{n > T} (T + n) \frac{d(n)^2}{n^{5/2}} \ll T^{3/2} \sum_{n > T} \frac{d(n)^2}{n^{3/2}} \ll T(\log T)^3$$

が成り立つ．

次に，(5.7) の O -項を評価する．Cauchy-Schwarz の不等式と上記の $\int_T^{2T} |F_k(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt$ の評価たちにより，

$$\frac{1}{T} \int_T^{2T} |F_k(\tfrac{1}{2} + it)| dt \ll \frac{1}{T} \left(T \int_T^{2T} |F_k(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt \right)^{1/2} \ll (\log T)^2$$

を得る．

最後に (5.7) の右辺の 2 番目の和の積分たちを評価する．まず， $(k, l) = (1, 2)$ の場合を考える．対象の積分は， F_1, F_2 の定義の和を展開することで，

$$\begin{aligned} &\int_T^{2T} F_1(\tfrac{1}{2} + it) \overline{F_2(\tfrac{1}{2} + it)} dt \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d(m)}{m^{1/2}} e^{-m/T} \sum_{n \leq T} \frac{d(n)}{n^{1/2}} \int_T^{2T} \chi(\tfrac{1}{2} - it)^2 (mn)^{-it} dt \end{aligned}$$

と書ける. 右辺の積分を複素積分と見て, 積分路を変形することで,

$$\begin{aligned}
 & \int_T^{2T} \chi\left(\frac{1}{2} - it\right)^2 (mn)^{-it} dt \\
 &= \int_T^{2T} \chi\left(\frac{3}{4} - it\right)^2 (mn)^{1/4 - it} dt + \frac{1}{i} \int_{1/2 - iT}^{3/4 - iT} \chi(z)^2 (mn)^{z - 1/2} dz \\
 & \quad + \frac{1}{i} \int_{3/4 - 2iT}^{1/4 - 2iT} \chi(z)^2 (mn)^{z - 1/2} dz.
 \end{aligned}$$

Stirling の公式より, 右辺の水平線方向の積分たちは $\ll T^{-1/2} (mn)^{1/4}$ と評価される. よって,

$$\begin{aligned}
 & \int_T^{2T} F_1\left(\frac{1}{2} + it\right) \overline{F_2\left(\frac{1}{2} + it\right)} dt \\
 & \ll \int_T^{2T} |\chi\left(\frac{3}{4} - it\right)|^2 \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d(m)}{m^{1/4 + it}} e^{-m/T} \sum_{n \leq T} \frac{d(n)}{n^{1/4 + it}} \right| dt \\
 & \quad + T^{-1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d(m)}{m^{1/4}} e^{-m/T} \sum_{n \leq T} \frac{d(n)}{n^{1/4}}.
 \end{aligned}$$

後半の 2 重和については $d(n) \leq d(n)^2$ により, $d(m), d(n)$ を $d(m)^2, d(n)^2$ に替え, その後 (5.8) と同様の議論で $\ll T(\log T)^3$ と評価できることが分かる. そして前半の積分については, Stirling の公式と Cauchy-Schwarz の不等式を用い, さらに定理 4.1 を使うことで,

$$\begin{aligned}
 & \int_T^{2T} |\chi\left(\frac{3}{4} - it\right)|^2 \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d(m)}{m^{1/4 + it}} e^{-m/T} \sum_{n \leq T} \frac{d(n)}{n^{1/4 + it}} \right| dt \\
 & \ll T^{-1/2} \left(\int_T^{2T} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d(m)}{m^{1/4 + it}} e^{-m/T} \right|^2 dt \right)^{1/2} \times \left(\int_T^{2T} \left| \sum_{n \leq T} \frac{d(n)}{n^{1/4 + it}} \right|^2 dt \right)^{1/2} \\
 & \ll \left(\sum_{m=1}^{\infty} (T + m) \frac{d(m)^2}{m^{1/2}} e^{-2m/T} \right)^{1/2} \times \left(\sum_{n \leq T} \frac{d(n)^2}{n^{1/2}} \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

前半の和は (5.8) と同様の議論により $\ll T^{3/2} (\log T)^3$ と評価され, 後半の和は系 5.5 により, $T^{1/2} (\log T)^3$ と評価される. 従って,

$$\int_T^{2T} F_1\left(\frac{1}{2} + it\right) \overline{F_2\left(\frac{1}{2} + it\right)} dt \ll T(\log T)^3$$

を得る. この評価と同様に, 積分路を移動して $a \neq -1$ の場合の $\sum_{n \leq T} d(n)^2 n^a$ の評価に帰着させることで, $(k, l) \neq (1, 2)$ についての積分たちも $\ll T(\log T)^3$ と評価することができる. 以上をまとめると,

$$\sum_{k=1}^4 \int_T^{2T} |F_k(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt = \frac{1}{2\pi^2} T(\log T)^4 + O(T(\log T)^3),$$

$$\sum_{1 \leq k < l \leq 4} \int_T^{2T} F_k(\tfrac{1}{2} + it) \overline{F_l(\tfrac{1}{2} + it)} dt \ll T(\log T)^3,$$

$$\frac{1}{T} \sum_{k=1}^4 \int_T^{2T} |F_k(\tfrac{1}{2} + it)| dt \ll (\log T)^2.$$

これらを (5.8) に代入することで, (5.6) の証明が完了する. $\square$

6 定理 1.1, 2.6, 2.7 の証明

定理 1.1 の証明. 本稿では $c_1 = 6$ の場合, つまり

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log T)^6$$

を示す. ここで, Riemann-von Mangoldt の公式により, $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\log T}$ のとき,

$$N(\sigma, T) \leq N(\tfrac{1}{2}, T) \ll T \log T \ll T^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} \log T$$

が成り立つため, $\sigma \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{\log T}$ を仮定して良い.

命題 3.1 を用いて定理 1.1 を証明する. パラメータ X, Y は後で具体的に T に依存して決定するが, 一旦は $X \leq Y^2$ と $\log Y \leq T$ を仮定して議論を進める. まず, R_1 を評価する. 定義より

$$R_1 \leq \sum_{\rho \in \mathcal{Z}(\sigma, T)} \left| 3 \sum_{X < n \leq 2Y \log Y} a(n) n^{-\rho} e^{-n/Y} \right|^2$$

が成り立つことが分かる. 定理 4.2 を用いることで,

$$\sum_{\rho \in \mathcal{Z}(\sigma, T)} \left| \sum_{X < n \leq 2Y \log Y} a(n) n^{-\rho} e^{-n/Y} \right|^2 \ll \log Y \sum_{X < n \leq 2Y \log Y} (T+n) |a(n)|^2 n^{-2\sigma}$$

が成り立つ. さらに $|a(n)| \leq d(n)$ なので系 5.5 により, この右辺は

$$\begin{aligned} R_1 &\ll \log Y \left(T \sum_{X < n \leq 2Y \log Y} d(n)^2 n^{-2\sigma} + \sum_{X < n \leq 2Y \log Y} d(n)^2 n^{1-2\sigma} \right) \\ &\ll (\log Y)^5 (TX^{1-2\sigma} + (Y \log Y)^{2-2\sigma}) \end{aligned} \quad (6.1)$$

と評価される.

次に R_2 を評価する. Stirling の公式により, ガンマ関数は $\Gamma(\frac{1}{2} - \beta + iu) \ll 1$, $u \in \mathbb{R}, |u| \geq 1/2$ をみだし, なおかつ $z = 0$ で 1 位の極を持つことから, $|\Gamma(\frac{1}{2} - \beta + iu)| \ll 1/(\sigma - 1/2) \ll \log T$ か $\beta \geq \sigma \geq 1/2 + 1/\log T$, $u \in \mathbb{C}, |u| \leq 1/2$ に対して成り立つので,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\log(TY)}^{\log(TY)} \zeta(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu) M_X(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu) \Gamma(\tfrac{1}{2} - \beta + iu) Y^{1/2-\beta+iu} du \right|^{4/3} \\ &\ll (Y^{1/2-\sigma} \log T)^{4/3} \left| \int_{|u| \leq 1/2} \zeta(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu) M_X(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu) du \right|^{4/3} \\ &\quad + Y^{2(1-2\sigma)/3} \left| \int_{1/2 \leq |u| \leq \log(TY)} \zeta(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu) M_X(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu) du \right|^{4/3}. \end{aligned}$$

Hölder の不等式を用いることで, 任意の $a < b$ に対して,

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b \zeta(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu) M_X(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu) du \right|^{4/3} \\ &\leq (b-a)^{1/3} \int_a^b |\zeta(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu) M_X(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu)|^{4/3} du \end{aligned}$$

となる. 従って,

$$R_2 \leq \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{\rho \in \mathcal{Z}(\sigma, T)} \left| 3 \int_{-\log(TY)}^{\log(TY)} \zeta(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu) M_X(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu) \right. \\ &\quad \left. \times \Gamma(\tfrac{1}{2} - \beta + iu) Y^{1/2-\beta+iu} du \right|^{4/3} \\ &\ll (Y^{1/2-\sigma} \log T)^{4/3} \sum_{\rho \in \mathcal{Z}(\sigma, T)} \int_{-1/2}^{1/2} |\zeta(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu) M_X(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu)|^{4/3} du \\ &\quad + Y^{2(1-2\sigma)/3} (\log(TY))^{1/3} \end{aligned}$$

$$\sum_{\rho \in \mathcal{Z}(\sigma, T)} \int_{-\log(TY)}^{\log(TY)} |\zeta(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu) M_X(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu)|^{4/3} du.$$

集合 $\mathcal{Z}(\sigma, T)$ に属する 2 つの異なる零点の虚部は 1 以上離れているので, 任意の $B \geq 1/2$, $t \in [-(T+B), T+B]$ に対して, $t \in [\gamma - B, \gamma + B]$ となる $\rho \in \mathcal{Z}(\sigma, T)$ の個数は高々 $2B$ である. ゆえに, 不等式

$$\begin{aligned} & \sum_{\rho \in \mathcal{Z}(\sigma, T)} \int_{-B}^B |\zeta(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu) M_X(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu)|^{4/3} du \\ & \leq 2B \int_{-(T+B)}^{T+B} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it) M_X(\tfrac{1}{2} + it)|^{4/3} dt \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, $\log Y \leq T$ の下で,

$$\begin{aligned} R_2 & \ll (Y^{2(1-2\sigma)/3} (\log T)^{4/3} \sum_{\rho \in \mathcal{Z}(\sigma, T)} \int_{-1/2}^{1/2} |\zeta(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu) M_X(\tfrac{1}{2} + i\gamma + iu)|^{4/3} du \\ & \quad + Y^{2(1-2\sigma)/3} (\log(TY))^{4/3} \int_{-(T+\log(TY))}^{T+\log(TY)} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it) M_X(\tfrac{1}{2} + it)|^{4/3} dt \\ & \ll Y^{2(1-2\sigma)/3} (\log(TY))^{4/3} \int_{-3T}^{3T} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it) M_X(\tfrac{1}{2} + it)|^{4/3} dt \end{aligned} \quad (6.3)$$

が成り立つ. さらに Hölder の不等式により,

$$\begin{aligned} & \int_{-3T}^{3T} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it) M_X(\tfrac{1}{2} + it)|^{4/3} dt \\ & \ll \left(\int_{-3T}^{3T} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^4 dt \right)^{1/3} \left(\int_{-3T}^{3T} |M_X(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt \right)^{2/3} \end{aligned}$$

となり, 定理 4.1 と定理 5.1 を用いることで, 上記は

$$\begin{aligned} & \ll (T(\log T)^4)^{1/3} \times \left(T \sum_{n \leq X} \frac{|\mu(n)|}{n} + \sum_{n \leq X} |\mu(n)| \right)^{2/3} \\ & \ll T^{1/3} (\log T)^{4/3} (T \log X + X)^{2/3} \end{aligned}$$

と評価される. 以上より,

$$R_2 \ll T^{1/3} Y^{2(1-2\sigma)/3} (T \log X + X)^{2/3} (\log(TY))^{8/3}$$

を得る. 命題 3.1 に R_1, R_2 の評価を適用することで,

$$\begin{aligned} N(\sigma, T) &\ll (\log Y)^5 (TX^{1-2\sigma} + (Y \log Y)^{2-2\sigma}) \log T \\ &\quad + T^{1/3} Y^{2(1-2\sigma)/3} (T \log X + X)^{2/3} (\log(TY))^{8/3} \log T \\ &\quad + \log Y \log(\log Y). \end{aligned}$$

そして, $X = T, Y = T^{3/(4-2\sigma)}/\log T$ と選べば,

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log T)^6$$

となり, 定理 1.1 が成り立つ. □

定理 2.6 の証明. 定理 2.6 についても命題 3.1 を用いる. まず R_1 については, 評価 (6.1) を用いる. そして R_2 については, 不等式 (6.2) の $4/3$ を 2 に代え, その他は (6.3) を示す方法と同様の議論をすることで

$$R_2 \ll Y^{1-2\sigma} (\log(TY))^2 \int_{-3T}^{3T} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it) M_X(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt.$$

この積分に仮定の評価 (2.5) を用い, さらに定理 4.1 を適用することで

$$\begin{aligned} R_2 &\ll Y^{1-2\sigma} (\log(TY))^2 T^{2\vartheta} \int_{-3T}^{3T} |M_X(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt \\ &\ll Y^{1-2\sigma} (\log(TY))^2 T^{2\vartheta} (T \log X + X) \end{aligned}$$

を得る. 従って, 命題 3.1 により,

$$\begin{aligned} N(\sigma, T) &\ll (\log Y)^5 (TX^{1-2\sigma} + (Y \log Y)^{2-2\sigma}) \log T \\ &\quad + Y^{1-2\sigma} T^{2\vartheta} (\log(TY))^2 (T \log X + X) \log T + \log T \log \log T. \end{aligned}$$

よって, $X = T, Y = T^{1+2\vartheta}/\log T$ とすることで, (2.6) を得る. □

定理 2.7 の証明. おおまかな流れは定理 1.1 の証明と同様である. まず, R_1 については, 評価 (6.1) を用いる. そして R_2 については, 不等式 (6.2) の $4/3$ を $2k/(k+2)$ に代え, その他は (6.3) を示す方法と同様の議論をすることで

$$R_2 \ll Y^{(1-2\sigma)k/(k+2)} (\log(TY))^{2k/(k+2)} \int_{-3T}^{3T} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it) M_X(\tfrac{1}{2} + it)|^{2k/(k+2)} dt.$$

Hölder の不等式により,

$$\begin{aligned} & \int_{-3T}^{3T} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it) M_X(\tfrac{1}{2} + it)|^{2k/(k+2)} dt \\ & \leq \left(\int_{-3T}^{3T} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^k dt \right)^{2/(k+2)} \left(\int_{-3T}^{3T} |M_X(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt \right)^{k/(k+2)} \end{aligned}$$

が成り立つ. この右辺に, 仮定の評価 (2.9) を用い, さらに定理 4.1 を適用することで

$$R_2 \ll Y^{(1-2\sigma)k/(k+2)} (\log(TY))^{2(k+b)/(k+2)} T^{2a/(k+2)} (T \log X + X)^{k/(k+2)}$$

を得る. 従って, 命題 3.1 により,

$$\begin{aligned} N(\sigma, T) & \ll (\log Y)^5 (TX^{1-2\sigma} + (Y \log Y)^{2-2\sigma}) \log T \\ & \quad + Y^{(1-2\sigma)k/(k+2)} (\log(TY))^{2(k+b)/(k+2)} T^{2a/(k+2)} (T \log X + X)^{k/(k+2)} \log T \\ & \quad + \log T \log \log T. \end{aligned}$$

よって, $X = T$, $Y = T^{(k+2a)/(k+2(2-2\sigma))} / \log T$ とすることで, (2.6) を得る. $\square$

7 定理 1.2 の証明

定理 1.2 の証明では以下の Riemann ゼータ関数の 12 乗平均についての結果を用いる.

補題 7.1 任意の $T \geq 3$ に対して,

$$\int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^{12} dt \ll T^2 (\log T)^{21}$$

が成り立つ.

この補題は [19] の補題 3.9 であり, 証明は同文献を参照されたい. このような高次冪の平均値について, 初めて非自明な評価を証明したのは Heath-Brown [4] である. 実際, 彼は上記の 12 乗平均の上からの評価を, $\log T$ の冪が 17 に置き換わった評価を証明している.

定理 1.2 の証明. 本稿では, $c_2 = 3995$ の場合, つまり

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{3(1-\sigma)}{3\sigma-1}} (\log T)^{3995}$$

を証明する. 定理 1.2 についても命題 3.1 を用いて証明する. 定理 1.1 と同様に, X, Y は後に T に依存して決定されるが, 一旦は $\log Y \leq T$ のみを仮定して議論を進める. 最初に, R_2 を評価する. 不等式 (6.2) の $4/3$ を 12 に代えることで, (6.3) と同様に

$$R_2 \ll Y^{6-12\sigma} (\log(TY))^{12} \int_{-3T}^{3T} |\zeta(\tfrac{1}{2} + it) M_X(\tfrac{1}{2} + it)|^{12} dt$$

が成り立つ. さらに, $M_X(\tfrac{1}{2} + it) \ll \sum_{n \leq X} n^{-1/2} \ll X^{1/2}$ かつ補題 7.1 を用いることで,

$$R_2 \ll X^6 Y^{6-12\sigma} T^2 (\log(TY))^{12} (\log T)^{21}$$

を得る.

次に R_1 を評価する. 最初に $\mathcal{R}_1$ の条件式 (3.1) に現れる Dirichlet 多項式を, $X \leq N_j = 2^{-j} Y (\log Y)^2$, $j = 1, 2, \dots$ として

$$\sum_{N_j < n \leq 2N_j} a(n) n^{-\rho} e^{-n/Y}$$

と小区間の Dirichlet 多項式に分割する. このとき, j の取り得る範囲は広く考えても $1 \leq j \leq 2 \log Y$ なので, この分割の個数は高々 $\lfloor 2 \log Y \rfloor$ 個である. 従って, 任意の $\rho \in \mathcal{R}_1$ に対して, ある $1 \leq j \leq 2 \log Y$ が存在して,

$$\left| \sum_{N_j < n \leq 2N_j} a(n) n^{-\rho} e^{-n/Y} \right| \geq \frac{1}{6 \log Y}$$

となる. つまり

$$\mathcal{R}_1 = \bigcup_{1 \leq j \leq 2 \log Y} \left\{ \rho \in \mathcal{R}_1 : \left| \sum_{N_j < n \leq 2N_j} a(n) n^{-\rho} e^{-n/Y} \right| \geq \frac{1}{6 \log Y} \right\}$$

が成り立つ. よって,

$$\# \left\{ \rho \in \mathcal{R}_1 : \left| \sum_{N < n \leq 2N} a(n) n^{-\rho} e^{-n/Y} \right| \geq \frac{1}{6 \log Y} \right\} \geq \frac{R_1}{2 \log Y} \quad (7.1)$$

をみたす $X \leq N \leq \frac{1}{2}Y(\log Y)^2$ が存在することが分かる. 以下この N をひとつ固定する.

次に k は固定された正の整数とする. 後に k は具体的な有限区間内から選ばれるので, 以下 k についての要素は O -定数に吸収されるものとする. また, $M_1 = N^k$, $M_2 = 2^k M_1 = (2N)^k$ とする. 集合の条件の不等式を両辺 k 乗することで, 不等式 (7.1) は

$$\# \left\{ \rho \in \mathcal{R}_1 : \left| \sum_{M_1 < n \leq M_2} b(n)n^{-\rho} \right| \geq \frac{1}{(6 \log Y)^k} \right\} \geq \frac{R_1}{2 \log Y}$$

と書き換えることができる. ここで, 数論的関数 $b(n)$ は

$$b(n) = \sum_{\substack{N < n_1, \dots, n_k \leq 2N \\ n_1 \cdots n_k = n}} a(n_1) \cdots a(n_k) e^{-n_1/Y} \cdots e^{-n_k/Y}$$

と定義される. 特に, $|a(n)| \leq d(n)$ なので,

$$|b(n)| \leq \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \\ n_1 \cdots n_k = n}} d(n_1) \cdots d(n_k) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{2k} \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \\ n_1 \cdots n_{2k} = n}} 1 = d_{2k}(n)$$

が成り立つ. ここで, k を $N^k \leq Y^2(\log Y)^4 < N^{k+1}$ をみたす整数とする. この不等式をみたす k の範囲は $2 \leq k \leq \log(Y^2(\log Y)^4)/\log X$ であることに注意したい. またこのとき M_1 は不等式

$$\{Y^2(\log Y)^4\}^{2/3} < M_1 \leq Y^2(\log Y)^4 \quad (7.2)$$

をみたす. 系 5.5 により, $\sigma \geq 3/4$ に対して,

$$W := \sum_{M_1 < n \leq M_2} |b(n)|^2 n^{-2\sigma} \ll \sum_{n > M_1} d_{2k}(n)^2 n^{-2\sigma} \ll M_1^{1-2\sigma} (\log M_1)^{4k^2-1}$$

が成り立つ. よって, この W と $V = 1/(6 \log Y)^k$ に対して, Y が十分大かつ $\sigma \geq 3/4$ のときは $V \geq CW^{1/2}$ をみたすので, 系 4.5 を $M = 2^k$, $N = M_1$ として用いるこ

とで,

$$\begin{aligned} & \# \left\{ \rho \in \mathcal{R}_1 : \left| \sum_{M_1 < n \leq M_2} b(n)n^{-\rho} \right| \geq \frac{1}{(6 \log Y)^k} \right\} \\ & \ll M_2 T (\log Y)^{6k} M_1^{3(1-2\sigma)} (\log M_1)^{12k^2-3} (\log M_1)^2 \\ & \quad + M_2 (\log Y)^{2k} M_1^{1-2\sigma} (\log M_1)^{4k^2-1} \\ & \ll T M_1^{4-6\sigma} (\log Y)^{6k+2} (\log M_1)^{12k^2-3} + M_1^{2(1-\sigma)} (\log Y)^{2k} (\log M_1)^{4k^2-1} \end{aligned}$$

を得る. さらに (7.1) と (7.2) により, $\sigma \geq 3/4$ のとき,

$$R_1 \ll T Y^{8(2-3\sigma)/3} (\log Y)^{12k^2+6k-1} + Y^{4(1-\sigma)} (\log Y)^{4k^2+2k+1}$$

最後に最適化として, $X = T^{1/6(6\sigma-2)}$, $Y = T^{3/(12\sigma-4)}$ と選ぶことで, $k \leq 18$ となり,

$$\begin{aligned} R_1 & \ll T^{3(1-\sigma)/(3\sigma-1)} (\log T)^{12k^2+6k-2} + T^{3(1-\sigma)/(3\sigma-1)} (\log T)^{4k^2-1} \\ & \ll T^{3(1-\sigma)/(3\sigma-1)} (\log T)^{3994}, \end{aligned}$$

$$R_2 \ll T^{1/(6\sigma-2)} T^{(9-18\sigma)/(6\sigma-2)} T^2 (\log T)^{33} \ll T^{3(1-\sigma)/(3\sigma-1)} (\log T)^{33}$$

を得る. 従って, これら評価を命題 3.1 に適用することで, 定理 1.2 の証明が完了する. $\square$

謝辞

本稿は 2025 年度整数論サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」の報告集の一篇です. 整数論サマースクールの講師として招待いただいた鈴木正俊先生, 中村隆先生, 青木宏樹先生にこの場を借りて深くお礼申し上げます.

参考文献

- [1] P. X. Gallagher and J. H. Muller, Primes and zeros in short intervals, *J. Reine Angew. Math.* **303/304** (1978), 205–220.

- [2] L. Guth and J. Maynard, New large value estimates for Dirichlet polynomials, [arXiv:2405.20552](#), to appear in *Annals of Mathematics*.
- [3] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes, *Acta Math.* **41** (1916), 119–196.
- [4] D. R. Heath-Brown, The twelfth power moment of the Riemann zeta-function, *Quart. J. Math.* (2) **29** (1978), 443–462.
- [5] D. R. Heath-Brown, Gaps between primes and the pair correlation of zeros of the zeta-function, *Acta Arith.* **41** (1982), 85–99.
- [6] G. Hoheisel, Primzahlprobleme in der analysis, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.* **33** (1930), 3–11.
- [7] M. N. Huxley, On the difference between consecutive primes, *Invent. Math.* **15** (1972), 164–170.
- [8] A. E. Ingham, Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) **27** (1927), no.4, 273–300.
- [9] A. E. Ingham, On the difference between consecutive primes, *Quart. J. M.* **8** (1937), 255–266.
- [10] A. E. Ingham, On the estimation of $N(\sigma, T)$, *Quart. J. M.* **11** (1940), 291–292.
- [11] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, Vol. 53, American Mathematical Society Colloquium Publications, American Mathematical Society, 2004.
- [12] A. Ivic, *The Riemann Zeta-Function*, Wiley, 1985.
- [13] J. P. Keating and N. C. Snaith, Random matrix theory and $\zeta(1/2 + it)$, *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), 57–89.
- [14] 小林 弘京, Riemann ゼータ関数の零点の個数, Chebyshev の関数に対する明示公式, 第 32 回サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」報告集, 2025.
- [15] 松本 耕二, リーマンのゼータ関数, 朝倉書店, 2005.
- [16] 松本 耕二, 平均値定理, 第 32 回サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」報告集, 2025.
- [17] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, Hilbert’s inequality, *J. Lond. Math. Soc.* (2), **8** (1974), 73–82.

- [18] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory I. Classical Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University press, 2007.
- [19] 本橋 洋一, 素数分布論 I, 朝倉書店, 2009.
- [20] K. Ramachandra, Applications of a theorem of Montgomery and Vaughan, *J. Lond. Math. Soc.* (2) **10** (1975), 482–485.
- [21] 佐々木 義卓, 素数定理, 第 32 回サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」報告集, 2025.
- [22] 杉山 真吾, L 関数の subconvexity について, 第 32 回サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」報告集, 2025.
- [23] 武田 渉, ゼータ関数の非零領域, 第 32 回サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」報告集, 2025.
- [24] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Second Edition, Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

Riemann ゼータ関数の中心線上の零点について

宗野 恵樹（関東学院大学理工学部）

概要

本稿では Riemann ゼータ関数の中心線 $\Re(s) = 1/2$ 上の零点の割合評価に関する N. Levinson の研究 [5] と, M. P. Young による mollified モーメントの簡単な計算方法 [10] を解説する.

1 はじめに

現代の解析的整数論は, 1859 年に B. Riemann (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866) が歴史的な論文”Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse” ([7], 「与えられた数より小さい素数の個数について」) において, それまで Euler らにより実数の範囲でのみ定義されていたゼータ関数を複素関数に拡張し, それを素数を数えるという目的のために利用した瞬間から始まる. s を複素数とし, $\zeta(s)$ を Riemann ゼータ関数とする. 上述した論文において, Riemann は $\zeta(s)$ が全複素平面に有理型関数として解析接続されることと, $\zeta(s)$ の満たす関数等式を証明した. 彼はさらに臨界領域 $0 < \Re(s) < 1$ 内にある $\zeta(s)$ の零点 (これを「自明でない零点」という) のうち, 実軸に近い最初の 7 つを具体的に計算し, それらが全て関数等式の中心線 $\Re(s) = 1/2$ 上にあることを確認し, “ $\zeta(s)$ の自明でない零点はすべて $\Re(s) = 1/2$ 上に存在するであろう” という非常に大胆な予想を提示した. 今日ではこれをリーマン予想 (Riemann Hypothesis, 以降 Riemann 予想と記す) という. 以下, $T > 1$ は十分大きい実数とし, $\zeta(1/2 + it)$ の $0 < t < T$ における零点を重複度を込めて数えたものを $N_0(T)$ と表す. 尚, 本稿では零点を数える場合は断りがなければ重複度を込めて数えるものとする. $N(T)$ を, $\zeta(s)$ の $0 < \Im(s) < T$ における零点の個数とすると, $T \rightarrow \infty$ のとき

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

である. Riemann 予想は任意の $T > 1$ に対し $N_0(T) = N(T)$ が成り立つことと同値である. Riemann 予想に関する最初の大きな進展は G. H. Hardy による 1914 年の研究 [2] である. 彼は, 今日では Hardy の Z 関数と呼ばれる実数値関数を導入することで, $\zeta(s)$ は $\Re(s) = 1/2$ 上に無限個の零点を持つことを証明した. より具体的には, Hardy の結果は十分大きい $T > 1$ に対し $N_0(T) \gg T$ が成り立つ, というものである. 一方で $N(T)$ は $T \log T$ のオーダーなので,

Hardy の結果からは $N_0(T) \gg N(T)$ までは言えず, $\zeta(s)$ の自明でない零点全体のうちごく僅かのものに関しては Riemann 予想を満たすことは確かである, といった表現をせざるを得ない. これを「正の割合」まで改善したものが, 以下の A. Selberg による結果である.

定理 1.1 (Selberg, [8] (1942)) ある定数 $c > 0$ が存在して, 十分大きい任意の $T > 1$ に対し

$$N_0(T) \geq cN(T)$$

が成り立つ. すなわち, $\zeta(s)$ の自明でない零点全体のうち, $\Re(s) = 1/2$ 上にあるものは正の割合で存在する.

これ以降, 様々な数値改善がなされ, 「少なくとも $\dots\%$ の零点は Riemann 予想を満たす」という趣旨の主張がなされることになる. ただし Selberg は具体的に c としてどのような値が取れるかに関しては一切言及していない. 一説には, Szu-Hoa Min という数学者が Selberg の方法に忠実に係数を計算した結果, 少なくとも $c = 1/60000$ に対し上の定理が成り立つことを確認したと言われている [11]. いずれにせよ, Selberg のアイデアのみを用いて計算するならば, 多少の差があるにせよ c は非常に小さい値になることは間違いない. それから数十年のち, N. Levinson は Selberg の方法を大幅に改良し, Selberg の主張が $c = 1/3$ に対し成り立つことを証明した.

定理 1.2 (Levinson, [5] (1974)) 十分大きい任意の $T > 1$ に対し,

$$N_0(T) > \frac{1}{3}N(T)$$

が成り立つ. すなわち, Riemann ゼータ関数の自明でない零点全体のうち少なくとも $1/3$ は中心線 $\Re(s) = 1/2$ 上に存在する.

$L := \log \frac{T}{2\pi}$ と置く. 上の定理は次の主張 (短区間中の零点分布) から直ちに従う.

定理 1.3 (Levinson, [5]) $U = \frac{T}{L^{10}}$ とする. 十分大きい任意の $T > 1$ に対し,

$$N_0(T+U) - N_0(T) > \frac{1}{3} [N(T+U) - N(T)].$$

2 零点に関する基礎的な議論

以下, 定理 1.3 の証明の基礎部分について解説する. 複素数 $s \in \mathbb{C}$ を $s = \sigma + it$, $\sigma, t \in \mathbb{R}$ と表す.

$$h(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

と置くとき, 関数等式により,

$$h(s)\zeta(s) = h(1-s)\zeta(1-s). \quad (2.1)$$

Stirling の公式より, $|\arg s| \leq \pi - \delta$ ($\delta > 0$, 十分小), $|\Im \log \frac{s}{2\pi}| < \pi$ において,

$$\begin{aligned} h(s) &= \exp(f(s)), \\ f(s) &= \frac{1}{2}(s-1) \log \frac{s}{2\pi} - \frac{s}{2} + C_0 + O\left(\frac{1}{s}\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

が, ある定数 C_0 に対し成り立つ. 対数微分により,

$$\frac{h'}{h}(s) = f'(s) = \frac{1}{2} \log \frac{s}{2\pi} + O\left(\frac{1}{s}\right). \quad (2.3)$$

これより, $|\sigma| < 10$, $t > 1$ が十分大のとき,

$$f'(s) + f'(1-s) = \log \frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t}\right) \quad (2.4)$$

が成り立つ. (2.1) を微分すると,

$$h'(s)\zeta(s) + h(s)\zeta'(s) = -h'(1-s)\zeta(1-s) - h(1-s)\zeta'(1-s). \quad (2.5)$$

また, (2.1) より,

$$\zeta(1-s) = \frac{h(s)}{h(1-s)} \zeta(s) \quad (2.6)$$

であるから, (2.6) を (2.5) に代入して,

$$h'(s)\zeta(s) + h(s)\zeta'(s) = -\frac{h'(1-s)h(s)}{h(1-s)} \zeta(s) - h(1-s)\zeta'(1-s).$$

これより

$$h(s)\zeta(s) [f'(s) + f'(1-s)] = -h(s)\zeta'(s) - h(1-s)\zeta'(1-s) \quad (2.7)$$

が得られる. $s = 1/2 + it$ のとき, (2.7) の右辺は

$$-2\Re(h(\frac{1}{2} + it)\zeta'(\frac{1}{2} + it))$$

となるので, これが 0 になるのは,

$$\arg \left[(h\zeta')(\frac{1}{2} + it) \right] \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \quad (2.8)$$

のときである. $\sigma = 1/2$ 上, (2.4) より $f'(s) + f'(1-s) \neq 0$ であり, また $h(s) \neq 0$ であるから, (2.8) の零点は $\zeta(1/2 + it)$ の零点である.

$$\chi(s) := \frac{h(1-s)}{h(s)} \quad (2.9)$$

と置くと, (2.1) より

$$\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$$

と書けるので, これを微分して,

$$\begin{aligned}\zeta'(s) &= \chi'(s)\zeta(1-s) - \chi(s)\zeta'(1-s) \\ &= -\chi(s) \left\{ -\frac{\chi'(s)}{\chi(s)}\zeta(1-s) + \zeta'(1-s) \right\} \\ &= -\chi(s) \{ [f'(s) + f'(1-s)]\zeta(1-s) + \zeta'(1-s) \}\end{aligned}\tag{2.10}$$

を得る. よって (2.8) より, $\zeta(1/2 + it)$ の零点は, $\sigma = 1/2$ 上,

$$\arg(h(1-s) \{ [f'(s) + f'(1-s)]\zeta(1-s) + \zeta'(1-s) \}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \tag{2.11}$$

が成り立つようなものである. 共役を取ることににより, (2.11) は $\sigma = 1/2$ 上

$$\arg(h(s) \{ [f'(s) + f'(1-s)]\zeta(s) + \zeta'(s) \}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \tag{2.12}$$

と同値である. $\arg h(s)$ は (2.2) から得られる. これと (2.4) より, $\sigma = 1/2$ 上での関数

$$G(s) := \zeta(s) + \frac{\zeta'(s)}{f'(s) + f'(1-s)} \tag{2.13}$$

の偏角の変動を調べればよい.

D を, $1/2 + iT$, $3 + iT$, $3 + i(T+U)$, $1/2 + i(T+U)$ を頂点とする閉長方形とし, D の内部における $G(s)$ の零点の個数を $N_G(D)$ と表す. D の辺上の $G(s)$ の零点の影響を一旦忘れ

$$\Delta_{\partial D} \arg G(s) = 2\pi N_G(D)$$

である. D の右側では,

$$|G(3+it) - 1| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} + O\left(\frac{1}{L}\right) \leq \frac{1}{8} + \int_2^{\infty} \frac{dv}{v^3} + O\left(\frac{1}{L}\right) < \frac{1}{3}$$

となる. よって, ∂D の右側の G の偏角の変動は高々 π である. また, Jensen の方法により, D の上側, 下側での $\arg G$ の変動はいずれも $O(L)$ と評価できる. よって,

$$\arg G(1/2 + it)|_{t=T}^{T+U} = -2\pi N_G(D) + O(L). \tag{2.14}$$

3 $N_G(D)$ の計算

$N_G(D)$ の上からの評価は, Littlewood の補題の類似の方法による. $0 < a < 1/2$ とし,

$$\frac{1}{2} - a = O\left(\frac{1}{L}\right) \tag{3.1}$$

であるとする. D_1 は $a+iT$, $3+iT$, $3+i(T+U)$, $a+i(T+U)$ を頂点とする閉長方形とし, $F(s)$ は D_1 内で解析的とする. さらに,

$$F(3+it) \neq 0 \quad (T \leq t \leq T+U)$$

であるとする. $\arg F(\sigma+it)$ は $3+iT$ から左方向に連続的に定める. 上辺, 下辺で F が 0 になるときは, 各々 $F(\sigma+iT-i\varepsilon)$, $F(\sigma+i(T+U)+i\varepsilon)$ の $\varepsilon \rightarrow +0$ としての極限を考える. D_1 の周上の積分を考えることにより,

$$\begin{aligned} & \int_T^{T+U} \log |F(a+it)| dt - \int_T^{T+U} \log |F(3+it)| dt \\ & + \int_a^3 \arg F(\sigma+i(T+U)) d\sigma - \int_a^3 \arg F(\sigma+iT) d\sigma \\ & = 2\pi \sum \text{dist}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここで, $\sum \text{dist}$ は, $F(s)$ の D_1 内の零点と, D_1 の左辺との距離の和である. $y = T^{\frac{1}{2}}/L^{20}$ とし, $1 \leq j \leq y$ に対し,

$$b_j = \frac{\mu(j) \log \frac{y}{j}}{j^{\frac{1}{2}-a} \log y} \quad (3.3)$$

と置く. そして, mollifier(軟化子) $\psi(s)$ を,

$$\psi(s) = \sum_{1 \leq j \leq y} \frac{b_j}{j^s} \quad (3.4)$$

で定義する. (3.2) を $F(s) = (\psi G)(s)$ に対して適用する. Jensen の方法により

$$\arg G(\sigma+it), \arg G(\sigma+i(T+U)) = O(L)$$

であり, ψ についても同様の評価が成り立つので,

$$\int_a^3 \arg(\psi G(\sigma+iT)) d\sigma, \int_a^3 \arg(\psi G(\sigma+i(T+U))) d\sigma = O(L)$$

が成り立つ. 次に, (2.13) より,

$$\int_T^{T+U} \log G(3+it) dt = \int_T^{T+U} \log \zeta(3+it) dt + O\left(\frac{U}{L}\right) \quad (3.5)$$

であり, $\Re(s) > 1$ において

$$\log \zeta(s) = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s \log n}$$

であるから,

$$\int_T^{T+U} \log |\zeta(3+it)| dt = O\left(\frac{U}{L}\right)$$

となる. よって (3.5) の実部を取ると,

$$\int_T^{T+U} \log |G(3+it)| dt = O\left(\frac{U}{L}\right)$$

となる. 次に,

$$\psi(s) = 1 + \psi_1(s)$$

と分割する. $|b_j| \leq 1$ ($\forall j$) であるから, $\sigma \geq 3$ のとき,

$$|\psi_1(s)| \leq \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \int_3^\infty \frac{dv}{v^\sigma} \leq \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} \cdot \frac{5}{2} < \frac{2}{2^\sigma}$$

となる. よって, $\log \psi(s)$ は $\sigma \geq 3$ で解析的である. 経路 $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3$,

$$\mathcal{L}_1 : \{s = \sigma + iT \mid \sigma : +\infty \rightarrow 3\},$$

$$\mathcal{L}_2 : \{s = 3 + it \mid t : T \rightarrow T + U\},$$

$$\mathcal{L}_3 : \{s = \sigma + i(T + U) \mid \sigma : 3 \rightarrow +\infty\}$$

上の積分を考えることにより,

$$\left| \int_T^{T+U} \log \psi(3+it) dt \right| \leq 8 \int_3^\infty \frac{d\sigma}{2^\sigma} = O(1)$$

となるので,

$$\int_T^{T+U} \log |\psi(3+it)| dt = O(1)$$

が成り立つ. 以上により,

$$\int_T^{T+U} \log |\psi G(a+it)| dt + O\left(\frac{U}{L}\right) = 2\pi \sum \text{dist}. \quad (3.6)$$

ただし, 右辺は D_1 内の ψG の零点と, D_1 の左辺との距離の和である. これらの零点は $N_G(D)$ に数えられる零点の一部であり, 更に $N_G(D)$ に数えられる零点は $\sigma = a$ と少なくとも $1/2 - a$ 以上は離れているので, (3.6) より

$$\int_T^{T+U} \log |\psi G(a+it)| dt + O\left(\frac{U}{L}\right) \geq 2\pi \left(\frac{1}{2} - a\right) N_G(D). \quad (3.7)$$

左辺の積分は, 対数関数の凸性により

$$\begin{aligned} \int_T^{T+U} \log |\psi G(a+it)| dt &= \frac{1}{2} \int_T^{T+U} \log |\psi G(a+it)|^2 dt \\ &\leq \frac{1}{2} U \log \left(\frac{1}{U} \int_T^{T+U} |\psi G(a+it)|^2 dt \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

と上から押さえられる. mollifier ψ の役割は, ψG をなるべく定数に近づけることにより, (3.8) の不等式をなるべく等号に近付けることである. (3.8) の右辺の 2 乗平均を計算するために次の公式を用いる.

補題 3.1 (Riemann-Siegel の公式, [9] 第 4 章を参照) C と $\bar{C}$ はそれぞれ複素平面上で点 $w = 1/2$ を通り, 傾き $1, -1$ で $\Im w$ が減少する向きの直線とし,

$$f_1(s) = \frac{1}{2i} \int_C \frac{e^{\pi i w^2} w^{-s}}{\sin \pi w} dw, \quad (3.9)$$

$$f_2(s) = \frac{1}{2i} \int_{\bar{C}} \frac{e^{-\pi i w^2} w^{s-1}}{\sin \pi w} dw \quad (3.10)$$

と置く. $\chi(s)$ は (2.9) で定義される関数とする. そのとき,

$$\zeta(s) = f_1(s) + \chi(s)f_2(s). \quad (3.11)$$

(2.13), (3.11) および

$$\frac{\chi'(s)}{\chi(s)} = -\frac{h'(1-s)}{h(1-s)} = -\frac{h'(s)}{h(s)} = -(f'(s) + f'(1-s))$$

により,

$$\begin{aligned} G(s) &= \zeta(s) + \frac{\zeta'(s)}{f'(s) + f'(1-s)} \\ &= f_1(s) + \chi(s)f_2(s) + \frac{f_1'(s) + \chi'(s)f_2(s) + \chi(s)f_2'(s)}{f'(s) + f'(1-s)} \\ &= f_1(s) + \frac{f_1'(s) + \chi(s)f_2'(s)}{f'(s) + f'(1-s)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

を得る. 次に,

$$g_1(s) := \sum_{n \leq \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}} n^{-s} \quad (3.13)$$

と置くとき, $|\sigma| < 10$ において,

$$f_1(s) = g_1(s) + O(t^{-\frac{\sigma}{2}})$$

となる (saddle point method による). 同様に, 導関数に関しては,

$$g_2(s) := \sum_{n \leq \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}} n^{-s} \log n, \quad (3.14)$$

$$g_3(s) := \sum_{n \leq \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}} n^{s-1} \log n \quad (3.15)$$

と置くとき,

$$f'_1(s) = -g_2(s) + O(t^{-\frac{\sigma}{2}} \log t), \quad f'_2(s) = g_3(s) + O(t^{\frac{\sigma-1}{2}} \log t)$$

となる. 一方, Stirling の公式より, $|\sigma| < 10$ において

$$\chi(s) = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \exp\left[\frac{\pi i}{4} - it \log \frac{t}{2\pi e}\right] \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) \quad (3.16)$$

となる. そこで,

$$\chi_1(s) = \chi_1(\sigma, t) := \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \exp\left[\frac{\pi i}{4} - it \log \frac{t}{2\pi e}\right] \quad (3.17)$$

と置く. このとき, (3.12) により

$$G(a+it) = f_1(a+it) + \frac{f'_1(a+it) + (\chi f'_2)(a+it)}{f'(a+it) + f'(1-a-it)}$$

であり, f_1, f'_1, f'_2, χ をそれぞれ $g_1, -g_2, g_3, \chi_1$ で近似し, $f'(a+it) + f'(1-a-it)$ を $\log \frac{t}{2\pi}$ で近似すると,

$$G(a+it) = H(a+it) + H_1(t). \quad (3.18)$$

ここで,

$$H(s) := g_1(s) + \frac{-g_2(s) + \chi_1(t)g_3(s)}{\log \frac{t}{2\pi}}, \quad (3.19)$$

$$H_1(t) = O(t^{-\frac{1}{4}}). \quad (3.20)$$

(3.18) により,

$$\begin{aligned} \int_T^{T+U} |\psi G(a+it)|^2 dt &= \int_T^{T+U} |\psi H(a+it)|^2 dt + O\left(\int_T^{T+U} |H_1(t)\psi(a+it)|^2 dt\right) \\ &\quad + \left(\int_T^{T+U} |\psi H(a+it)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} O\left(\left(\int_T^{T+U} |H_1(t)\psi(a+it)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

今, $\psi(a+it)$ を級数に展開し, 2 乗平均を計算すると, 非対角項の寄与は Riemann ゼータ関数の 2 乗平均の計算 ([6], 第 9 章などを参照) の場合と同様に $O(T^{\frac{1}{2}} \log T)$ と評価でき,

$$\int_T^{T+U} |\psi(a+it)|^2 dt = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j^2}{j^{2a}} + O(T^{\frac{1}{2}} \log T) = O(UL)$$

となるので, これと (3.20) より

$$\int_T^{T+U} |H_1(t)\psi(a+it)|^2 dt = O(U^{\frac{1}{2}})$$

が得られる. よって (3.21) より

$$\begin{aligned} \int_T^{T+U} |\psi G(a+it)|^2 dt &= \int_T^{T+U} |\psi H(a+it)|^2 dt + O\left(U^{\frac{1}{2}}\right) \\ &\quad + O(U^{\frac{1}{4}}) \left(\int_T^{T+U} |\psi H(a+it)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

よって, (3.22) の右辺第 1 項の積分を計算すればよい. (3.19) より,

$$\int_T^{T+U} |\psi H(a+it)|^2 dt = I_{11} + I_{22} + I_{33} + I_{12} + I_{21} + 2\Re I_{13} + 2\Re I_{23}. \quad (3.23)$$

ここで,

$$I_{11} = \int_T^{T+U} |\psi g_1(a+it)|^2 dt, \quad (3.24)$$

$$I_{22} = \int_T^{T+U} |\psi g_2(a+it)|^2 \frac{dt}{\log^2 \frac{t}{2\pi}}, \quad (3.25)$$

$$I_{33} = \int_T^{T+U} |\chi_1 \psi g_2(a+it)|^2 \frac{dt}{\log^2 \frac{t}{2\pi}}, \quad (3.26)$$

$$I_{12} = - \int_T^{T+U} |\psi|^2 g_1 \overline{g_2}(a+it) \frac{dt}{\log \frac{t}{2\pi}} =: \overline{I_{21}}, \quad (3.27)$$

$$I_{13} = \int_T^{T+U} |\psi|^2 g_1 \overline{\chi_1 g_3}(a+it) \frac{dt}{\log \frac{t}{2\pi}}, \quad (3.28)$$

$$I_{23} = - \int_T^{T+U} |\psi|^2 g_2 \overline{\chi_1 g_3}(a+it) \frac{dt}{\log^2 \frac{t}{2\pi}}. \quad (3.29)$$

後はこれらの積分を計算すればよい.

4 いくつかの補題

補題 4.1 関数 $f(u)$ ($u \geq 1$) は連続微分可能関数で, $f(u) \rightarrow 0$ ($u \rightarrow \infty$) かつ, ある $x > 1$ (十分大) に対し, $u \geq x$ で単調であるとする. そのとき,

$$\sum_{1 \leq n \leq x} f(n) = \int_1^x f(u) du + \frac{1}{2} f(1) - \int_1^\infty f'(u) \left([u] + \frac{1}{2} - u \right) du + O(f(x)). \quad (4.1)$$

証明 オイラー・マクローリンの和公式より,

$$\sum_{1 \leq n \leq x} f(n) = \int_1^x f(u) du + J,$$

$$\begin{aligned}
J &= \int_{1-0}^x f(u) d\left([u] + \frac{1}{2} - u\right) \\
&= \frac{1}{2} f(1) + \left([x] + \frac{1}{2} - x\right) f(x) - \int_1^\infty f'(u) \left([u] + \frac{1}{2} - u\right) du \\
&\quad + \int_x^\infty f'(u) \left([u] + \frac{1}{2} - u\right) du.
\end{aligned}$$

$f'(u)$ は $u > x$ で定符号で, $f(\infty) = 0$ であるから, 最後の積分は $O(f(x))$ である. $\square$

補題 4.2 A_1, A_2 は $1 \leq A_1, A_2 \leq T^{\frac{1}{2}}$, $(A_1, A_2) = 1$ を満たす整数とする. $\sum$ は, j_1, j_2 が $1 \leq j_1, j_2 \leq T^{\frac{1}{2}}$, $j_1 A_1 \neq j_2 A_2$ を満たすものをわたる和とする. そのとき, (3.1) の a に対し,

$$\sum \frac{j_1^{-a} j_2^{-a}}{\left| \log \frac{j_2 A_2}{j_1 A_1} \right|} \leq 100 T^{1-a} \log T. \quad (4.2)$$

証明 $\sum_1$ は $\frac{j_2 A_2}{j_1 A_1} \leq \frac{1}{2}$ または $\frac{j_2 A_2}{j_1 A_1} \geq \frac{3}{2}$ の部分, $\sum_2$ はそれ以外の部分の和とし, $\sum = \sum_1 + \sum_2$ と分解する. まず,

$$\sum_1 \frac{j_1^{-a} j_2^{-a}}{\left| \log \left(\frac{j_2 A_2}{j_1 A_1} \right) \right|} < 4 \left(\sum_{j_1 \leq T^{\frac{1}{2}}} j_1^{-a} \right)^2 < 16 \left(\frac{T^{\frac{1}{2}-\frac{a}{2}}}{1-a} \right)^2 < 100 T^{1-a}. \quad (4.3)$$

次に,

$$\begin{aligned}
\sum_2 \frac{j_1^{-a} j_2^{-a}}{\left| \log \left(\frac{j_2 A_2}{j_1 A_1} \right) \right|} &\leq 2 \sum_2 \frac{j_1 A_1}{|j_2 A_2 - j_1 A_1|} \frac{1}{j_1^a j_2^a} \\
&\leq 4 \sum_2 \frac{(j_1 A_1 j_2 A_2)^{\frac{1}{2}}}{|j_2 A_2 - j_1 A_1|} \frac{1}{j_1^a j_2^a} \\
&\leq 4(A_1 A_2)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}-a} \sum_2 \frac{1}{|j_2 A_2 - j_1 A_1|}.
\end{aligned} \quad (4.4)$$

(4.4) において, $j_2 A_2 - j_1 A_1 \geq 1$ の項の寄与を評価する ($j_2 A_2 - j_1 A_1 \leq -1$ の項の寄与も同様). $m \geq 1$ とする. j'_2 を, $j'_1 \geq 1$ であって

$$j_2 A_2 - j'_1 A_1 = m$$

となるものが存在するような $j_2 \geq 1$ の最小値とする. $(A_1, A_2) = 1$ のとき, ある $n \in \mathbb{Z}$ により

$$j_2 = n A_1 + j'_2, \quad j_1 = n A_2 + j'_1 \quad (4.5)$$

と書ける. $n < 0$ なら j'_2 の定義より $j_1 \leq 0$ または $j_2 \leq 0$ となるので, $n \geq 0$ である.

$$A_M := \max\{A_1, A_2\}$$

と置く. (4.5) より $nA_M \leq T^{\frac{1}{2}}$ であるから, m を固定するとき,

$$j_2 A_2 - j_1 A_1 = m \quad (4.6)$$

を満たす $(j_1, j_2) \in \mathbb{N}^2$ は高々 $\frac{2T^{\frac{1}{2}}}{A_M}$ 個. よって,

$$\sum_2 \frac{1}{|j_2 A_2 - j_1 A_1|} \leq \frac{4T^{\frac{1}{2}}}{A_M} \sum_{m \leq 2T} \frac{1}{m} < \frac{5T^{\frac{1}{2}} L}{A_M}$$

となる. これを (4.4) に代入すると

$$\sum_2 \frac{j_1^{-a} j_2^{-a}}{\left| \log \frac{j_2 A_2}{j_1 A_1} \right|} \leq 20T^{1-a} L.$$

これと (4.3) より (4.2) が得られる. $\square$

補題 4.3 ある十分小さい定数 $c > 0$ が存在して, 十分大きい $r > 0$ と $1/2$ に十分近い a に対し,

$$I := \int_{r(1-c)}^{r(1+c)} \exp \left[it \log \frac{t}{er} \right] \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}-a} dt = (2\pi)^a r^{1-a} e^{-ir + \frac{\pi i}{4}} + O(r^{\frac{1}{2}-a}).$$

証明 $t = r(1+x)$ で変数変換するとき,

$$I = (2\pi)^{a-\frac{1}{2}} r^{\frac{3}{2}-a} e^{-ir} I_1.$$

ここで,

$$I_1 = \int_{-c}^c \exp [ir(1+x) \log(1+x) - irx] (1+x)^{\frac{1}{2}-a} dx.$$

そこで,

$$I_2 := \int_{-c}^c \exp [ir(1+x) \log(1+x) - irx] dx$$

と置くと, 部分積分により

$$I_1 - I_2 = O\left(\frac{1}{r}\right)$$

となるので, I_2 を計算すればよい. $\log(1+z)$ のマクローリン展開により,

$$(1+z) \log(1+z) - z = \frac{1}{2} z^2 \{1 + zg(z)\},$$

$g(z)$ は $|z| < 1$ で解析的な関数.

$$w = z\{1 + zg(z)\}^{\frac{1}{2}}$$

と置くとき, ある $c > 0$ に対し, $|z| \leq c$ において

$$z = w + w^2 g_4(w)$$

と書ける. ここで, $g_4(w)$ は解析的で, $w \in \mathbb{R}$ のとき, $g_4(w) \in \mathbb{R}$.

$$-c_1 := -c\{1 - cg(-c)\}^{\frac{1}{2}}, \quad c_2 = c\{1 + cg(c)\}^{\frac{1}{2}}$$

と置く. さらに

$$g_5(w) = 2g_4(w) + wg_4'(w)$$

と置くとき,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-c_1}^{c_2} e^{\frac{iru^2}{2}} (1 + ug_5(u)) du \\ &= \int_{-c_1}^{c_2} e^{\frac{iru^2}{2}} du + \int_{-c_1}^{c_2} e^{\frac{iru^2}{2}} g_5(u) d\left(\frac{u^2}{2}\right). \end{aligned}$$

部分積分により, 後者の積分は $O(\frac{1}{r})$ となる. よって,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{iru^2}{2}} du + J_1 + J_2 + O\left(\frac{1}{r}\right), \\ J_1 &= \int_{c_2}^{\infty} e^{\frac{iru^2}{2}} du, \quad J_2 = \int_{-\infty}^{-c_1} e^{\frac{iru^2}{2}} du. \end{aligned}$$

J_1, J_2 は $O(\frac{1}{r})$ となるので,

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{iru^2}{2}} du + O\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{2\pi}{r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}} + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

となる. 以上より求める公式を得る. $\square$

補題 4.4 A は十分大とし, $A \leq r \leq B \leq A + \frac{A}{\log A}$ とするとき, $A^{\frac{1}{2}-a} = O(1)$ となる a に対し,

$$\int_A^B \exp\left[it \log \frac{t}{er}\right] \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-a} dt = (2\pi)^a r^{1-a} e^{-ir + \frac{\pi i}{4}} + E(r), \quad (4.7)$$

$$E(r) = O(1) + O\left(\frac{A}{|A-r| + A^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(\frac{B}{|B-r| + B^{\frac{1}{2}}}\right). \quad (4.8)$$

$r < A$ または $r > B$ のときは,

$$\int_A^B \exp\left[it \log \frac{t}{re}\right] \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-a} dt = E(r)$$

となる.

証明

$$F(t, r) = \exp \left[it \log \frac{t}{re} \right] \quad (4.9)$$

と置く. $A + A^{\frac{1}{2}} \leq r \leq B - B^{\frac{1}{2}}$ とすると,

$$\int_A^B F(t, r) \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}-a} dt = \int_{r(1-c)}^{r(1+c)} F(t, r) \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}-a} dt + J_1 + J_2.$$

ここで,

$$J_1 := \int_{r(1-c)}^A F(t, r) \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}-a} dt, \quad J_2 := \int_B^{r(1+c)} F(t, r) \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}-a} dt.$$

部分積分により,

$$\begin{aligned} (2\pi)^{\frac{1}{2}-a} J_1 &= \left[F(t, r) t^{\frac{1}{2}-a} \frac{1}{i \log \frac{t}{r}} \right]_{r(1-c)}^A + O \left(\int_{r(1-c)}^A \frac{dt}{t \log^2 \frac{t}{r}} \right) + O \left(\frac{1}{\log \frac{r}{A}} \int_{r(1-c)}^A \frac{dt}{t} \right) \\ &= O \left(\frac{1}{\log \frac{r}{A}} \right). \end{aligned}$$

$A + A^{\frac{1}{2}} \leq r < \frac{3}{2}A$ のとき,

$$\log \frac{r}{A} \geq \frac{1}{4} \frac{r-A}{A} \geq \frac{1}{8} \frac{r-A}{A} + \frac{1}{8A^{\frac{1}{2}}}$$

となるので, $J_1, J_2 = E(r)$ となる. よって補題 4.3 より (3.20) が成り立つ.

$A - A^{\frac{1}{2}} < r < A + A^{\frac{1}{2}}$ のときは

$$\int_A^B F(t, r) t^{\frac{1}{2}-a} dt = O(A^{\frac{1}{2}}) + \int_{A+2A^{\frac{1}{2}}}^B F(t, r) t^{\frac{1}{2}-a} dt$$

(第 2 項は $B \leq A + 2A^{\frac{1}{2}}$ のときは現れない). $E(r) = O(A^{\frac{1}{2}})$ であることに注意すると, 右辺の積分は $E(r)$ となり, このときも主張は成り立つ. $B - B^{\frac{1}{2}} < r < B + B^{\frac{1}{2}}$ のときも同様である. $r < A - A^{\frac{1}{2}}$ や $r > B + B^{\frac{1}{2}}$ のときも部分積分により $E(r)$ と評価される. $\square$

補題 4.5 $m \in \{1, 2\}$, A は十分大きい実数, $A \leq r \leq B < A + \frac{A}{\log A}$ に対し,

$$\int_A^B \exp \left[it \log \frac{t}{er} \right] \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}-a} \frac{dt}{\log^m \frac{t}{2\pi}} = (2\pi)^a r^{1-a} e^{-ir + \frac{\pi i}{4}} \log^{-m} \frac{r}{2\pi} + \frac{E(r)}{\log^m A}.$$

ただし, $E(r)$ は (4.8) で定義されたものである. $r < A$ または $r > B$ のときは左辺は $E(r)/\log^m A$ となる.

証明 $m = 1$ の場合のみ示す ($m = 2$ の場合もほぼ同様). $A - A^{\frac{1}{2}} < r < B + B^{\frac{1}{2}}$ に対し,

$$\int_A^B F(t, r) \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}-a} \frac{dt}{\log \frac{t}{2\pi}} = \frac{1}{\log \frac{r}{2\pi}} \int_A^B F(t, r) \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}-a} dt - J.$$

ここで,

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}-a} J := \frac{1}{\log \frac{r}{2\pi}} \int_A^B F(t, r) \log \frac{t}{r} t^{\frac{1}{2}-a} \frac{dt}{\log \frac{t}{2\pi}} = O(\log^{-2} A).$$

これと補題 4.4 より, 上の r の範囲に関しては主張が成り立つ. $r < A - A^{\frac{1}{2}}$ のときは, 部分積分により

$$\int_A^B F(t, r) \log \frac{t}{r} t^{\frac{1}{2}-a} \frac{dt}{\log \frac{t}{2\pi}} = \frac{E(r)}{\log A}$$

となる. $r > B + B^{\frac{1}{2}}$ のときも同様. □

補題 4.6 $1 \leq k_1, k_2 \leq y$, $k = (k_1, k_2)$ とするとき,

$$\sum_{k_1, k_2=1}^y \frac{k}{k_1 k_2} = O(\log^3 y).$$

証明

$$\begin{aligned} \sum_{k_1, k_2=1}^y \frac{k}{k_1 k_2} &\leq \sum_{k_1, k_2=1}^y \frac{1}{k_1 k_2} \sum_{j|k} j = \sum_{j \leq y} j \left(\sum_{j|k_1} \frac{1}{k_1} \right)^2 \leq \sum_{j \leq y} \left(\sum_{n \leq \frac{y}{j}} \frac{1}{n} \right)^2 \\ &\leq \sum_{j \leq y} \frac{1}{j} \left(\log \frac{y}{j} + 10 \right)^2 = O(\log^3 y). \end{aligned}$$

□

補題 4.7 $K = \{(u, v)\}$ は第 1 象限の領域で, ある定数 $C_2 > C_1 > 0, C_4 > C_3 > 0$ に対し,

$$C_1 \leq uv \leq C_2, \quad C_3 u \leq v \leq C_4 u$$

を満たすものとする. f は, $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ が連続な関数とし, K の面積を $|K|$ と表す. u_M, v_M を, 各々 K 内の点の u 座標, v 座標の最大値とし, $n, m \in \mathbb{Z}$ とする. そのとき,

$$\sum_{(n, m) \in K} f(n, m) = \iint_K f(u, v) du dv + J,$$

$$|J| \leq 2|f|_M(u_M + v_M + 1) + (|K| + 2v_M) \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right|_M + |K| \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|_M.$$

ここで, $|f|_M, \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right|_M, \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|_M$ はそれぞれの関数の K 内での最大値.

証明は 2 変数のオイラー・マクローリン和公式による (詳細は省略する).

補題 4.8 (Möbius の反転公式, [4] p.13) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $m = 1, 2, 3, \dots$ に対し,

$$g(m) := \sum_{r|m} \mu(r) f\left(\frac{m}{r}\right)$$

とすると,

$$f(n) = \sum_{m|n} g(m).$$

自然数 n は, 1 より大きい平方数を約数に持たないとき, 平方自由 (square-free) であるという.

補題 4.9 j は十分大きい平方自由な自然数とする. そのとき,

$$\sum_{p|j} \frac{\log p}{p} = O(\log \log j).$$

証明 関数 $\frac{\log x}{x}$ は $x \geq 3$ で単調減少であり, $\frac{\log 2}{2} > \frac{\log 5}{5}$ である. $q_1 = 2, q_2 = 3, q_3 = 5, \dots$ を素数を小さい順に並べた数列とし, r を

$$q_1 q_2 \cdots q_r \leq j, \quad q_1 q_2 \cdots q_r q_{r+1} > j$$

を満たすように取る. そのとき, j が十分大きければ

$$\sum_{p|j} \frac{\log p}{p} \leq \sum_{i=1}^r \frac{\log q_i}{q_i}.$$

右辺は素数定理により

$$\sum_{i=1}^r \frac{\log q_i}{q_i} = \log q_r + O(1).$$

また,

$$\sum_{i=1}^r \log q_i \leq \log j$$

より, $q_r \leq 2 \log j$ である. よって,

$$\sum_{p|j} \frac{\log p}{p} \leq \log(2 \log j) + O(1).$$

□

補題 4.9 と同様にして次も成り立つ.

補題 4.10 十分大きい任意の平方自由な j に対し,

$$\sum_{p|j} \frac{\log^2 p}{p} = O((\log \log j)^2).$$

補題 4.11 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ は,

$$f(r) = \prod_{p|r} f(p), \quad f(p) = 1 + O(p^{-c}) \quad (4.10)$$

($c > 0$) を満たすものとし,

$$J(x) := \sum_{r \leq x} \frac{\mu^2(r) f(r)}{r}$$

とするとき,

$$J(x) = \prod_p \left(1 + \frac{f(p) - 1}{p + 1} \right) \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \log x + O(1).$$

積は全ての素数をわたる.

(以下同様, $\prod_p$ は常に p が全ての素数をわたる積を表すものとする.)

証明

$$A(p) = \frac{p(f(p) - 1)}{p + 1}, \quad B(p) = \frac{p + f(p)}{p(f(p) - 1)}$$

とすると,

$$f(p) = A(p)(1 + B(p)).$$

そのとき,

$$J(x) = \sum_{r \leq x} \frac{\mu^2(r)}{r^2} A(r) \sum_{m|r} B(m).$$

$r = jm$ と表したとき,

$$\begin{aligned} J(x) &= \sum_{jm \leq x} \frac{\mu^2(jm)}{jm} A(jm) B(m) \\ &= \sum_{m \leq x} \frac{\mu^2(m)}{m} A(m) B(m) \sum'_{j \leq \frac{x}{m}} \frac{\mu^2(j)}{j} A(j). \end{aligned} \quad (4.11)$$

ここで, 後ろの和は $(j, m) = 1$ である j をわたる和. (4.10) より, ある $M_1 > 0$ があって $|A(p)| \leq \frac{M_1}{p^c}$ となるので,

$$|A(r)| \leq \frac{M_1^{\omega(r)}}{r^c}. \quad (4.12)$$

ここで, $\omega(r)$ は r の相異なる素因数の個数を表す. さて,

$$\sum_{j \leq \frac{x}{m}}' \frac{\mu^2(j)}{j} A(j) = \sum_j' \frac{\mu^2(j)}{j} A(j) + R_1, \quad (4.13)$$

$$|R_1| \leq \sum_{j \geq \frac{x}{m}} \frac{\mu^2(j) M_1^{\omega(j)}}{j^{1+c}}.$$

r が十分大きいとき,

$$\omega(r) \leq \frac{2 \log r}{\log \log r}$$

が成り立つ. そこで, $j_1 \in \mathbb{N}$ を十分大きく取り, $r \geq j_1$ のとき上の不等式が成り立ち, かつ

$$\frac{2 \log M_1}{\log \log j} \leq \frac{c}{2} \quad (j \geq j_1)$$

が成り立つように取る. そのとき,

$$M_1^{\omega(j)} \leq j^{\frac{c}{2}} \quad (j \geq j_1)$$

となるので, ある $M_2 > 0$ があって, 任意の j に対し,

$$M_1^{\omega(j)} \leq M_2 j^{\frac{c}{2}} \quad (4.14)$$

が成り立つ. よって, ある $M_3 > 0$ に対し,

$$|R_1| \leq M_2 \sum_{j \geq \frac{x}{m}} j^{-1-\frac{c}{2}} \leq M_3 \left(\frac{m}{x} \right)^{\frac{c}{2}}$$

となる. (4.13) の右辺の和を積で表すと,

$$\sum_{j \leq \frac{x}{m}}' \frac{\mu^2(j)}{j} A(j) = \frac{\prod_p \left(1 + \frac{A(p)}{p} \right)}{\prod_{p|m} \left(1 + \frac{A(p)}{p} \right)} + R_1.$$

よって (4.11) より,

$$J(x) = \prod_p \left(1 + \frac{A(p)}{p} \right) \sum_{m \leq x} \frac{\mu^2(m)}{m} \prod_{p|m} \frac{A(p)B(p)}{1 + \frac{A(p)}{p}} + R_2,$$

$$|R_2| \leq M_3 x^{-\frac{c}{2}} \sum_{m \leq x} \frac{\mu^2(m)}{m^{1-\frac{c}{2}}} |A(m)B(m)|.$$

更に, $A(p)B(p) = 1 + \frac{A(p)}{p}$ であるから,

$$J(x) = \prod_p \left(1 + \frac{A(p)}{p} \right) \sum_{m \leq x} \frac{\mu^2(m)}{m} + R_2$$

であり,

$$|A(m)B(m)| = \prod_{p|m} \left| 1 + \frac{A(p)}{p} \right| \leq \prod_p \left(1 + \frac{M_1}{p^{1+c}} \right) =: M_4.$$

よって,

$$|R_2| \leq M_3 M_4 x^{-\frac{\epsilon}{2}} \sum_{m \leq x} m^{-1+\frac{\epsilon}{2}} = O(1)$$

となり, したがって

$$J(x) = \prod_p \left(1 + \frac{A(p)}{p} \right) \sum_{m \leq x} \frac{\mu^2(m)}{m} + O(1)$$

を得る. また,

$$\sum_{m \leq x} \frac{\mu^2(m)}{m} = \sum_{m \leq x} \frac{1}{m} \sum_{j^2|m} \mu(j) = \sum_{rj^2 \leq x} \frac{\mu(j)}{rj^2} = \sum_{r \leq x} \frac{1}{r} \sum_{j^2 \leq \frac{x}{r}} \frac{\mu(j)}{j^2}.$$

j の範囲を自然数全体に拡張することで, これは

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \sum_{r \leq x} \frac{1}{r} + R_3,$$

$$|R_3| \leq \sum_{r \leq x} \sum_{j^2 > \frac{x}{r}} \frac{1}{j^2} = O(1)$$

となる. これと $\sum_{r \leq x} \frac{1}{r} = \log x + O(1)$ を合わせて, 補題の等式を得る. □

同様にして, 次の 2 つの公式が得られる.

補題 4.12

$$J_2(x) := \sum_{r \leq x} \frac{\mu^2(r)f(r)}{r} \log \frac{x}{r}$$

とするとき,

$$J_2(x) = \frac{1}{2} \prod_p \left(1 + \frac{f(p)-1}{p+1} \right) \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \log^2 x + O(\log x).$$

補題 4.13

$$J_3(x) := \sum_{r \leq x} \frac{\mu^2(r)f(r)}{r} \log^2 \frac{x}{r}$$

とするとき,

$$J_3(x) = \frac{1}{3} \prod_p \left(1 + \frac{f(p)-1}{p+1} \right) \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \log^3 x + O(\log^2 x).$$

5 I_{ij} の計算

(3.24) より,

$$\psi(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{j^s}, \quad g_1(s) = \sum_{n \leq \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}} n^{-s}$$

と置くとき,

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_T^{T+U} \psi \bar{\psi} g_1 \overline{g_1}(a+it) dt \\ &= \int_T^{T+U} \sum_{k_1, k_2 \leq y} \frac{b_{k_1}}{k_1^{a+it}} \frac{b_{k_2}}{k_2^{a-it}} \sum_{j_1, j_2 \leq \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{j_1^{a+it}} \frac{1}{j_2^{a-it}} dt. \end{aligned}$$

和において, $2\pi j_1^2, 2\pi j_2^2 \leq t$ である. また, $t \geq T$. そこで,

$$T_1 := \max\{T, 2\pi j_1^2, 2\pi j_2^2\}$$

と置くと,

$$I_{11} = \sum_{k_1, k_2 \leq y} \frac{b_{k_1} b_{k_2}}{k_1^a k_2^a} \sum \frac{1}{j_1^a j_2^a} \int_{T_1}^{T+U} \exp\left(it \log \frac{j_2 k_2}{j_1 k_1}\right) dt. \quad (5.1)$$

ここで, 後ろの和は

$$1 \leq j_1, j_2 \leq \tau_1 := \left(\frac{T+U}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} < T^{\frac{1}{2}}$$

をわたるものである. $k = (k_1, k_2)$, $k_1 = kA_1$, $k_2 = kA_2$ と書くとき, $(A_1, A_2) = 1$. I_{11} を,

$$I_{11} = I'_{11} + I''_{11}$$

と分割する. ここで, I'_{11} は $j_1 A_1 = j_2 A_2$ の項, I''_{11} は $j_1 A_1 - j_2 A_2 \neq 0$ の項. I'_{11} においては, $j_1 = jA_2$, $j_2 = jA_1$ と書けるので, (5.1) より

$$I'_{11} = \sum_{k_1, k_2 \leq y} \frac{b_{k_1} b_{k_2}}{k_1^a k_2^a} \sum' \frac{1}{j^{2a} A_1^a A_2^a} (T+U-T_1).$$

ここで, $\sum'$ は $1 \leq j \leq \frac{\tau_1}{A_M}$ ($A_M = \max\{A_1, A_2\}$) をわたる和であり, $T_1 = \max\{T, 2\pi j^2 A_M^2\}$, $k_1 = kA_1$, $k_2 = kA_2$ であるから,

$$I'_{11} = \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{2a}}{k_1^{2a} k_2^{2a}} \sum' \frac{T+U-T_1}{j^{2a}}. \quad (5.2)$$

I'_{11} を,

$$I'_{11} = I_{11,1} + I_{11,2} \quad (5.3)$$

と分解する. ここで,

$$I_{11,1} = U \sum_{k_1, k_2 \leq y} \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{2a}}{k_1^{2a} k_2^{2a}} \sum \frac{1}{j^{2a}}, \quad (5.4)$$

$\sum$ は $1 \leq j \leq \frac{\tau}{A_M}$, $\tau = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ をわたる和. また,

$$I_{11,2} = \sum_{k_1, k_2 \leq y} \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{2a}}{k_1^{2a} k_2^{2a}} \sum'' \frac{T + U - 2\pi j^2 A_M^2}{j^{2a}},$$

$\sum''$ は, $\frac{\tau}{A_M} < j \leq \frac{\tau_1}{A_M}$ をわたる和. (3.1) より,

$$I_{11,2} = O(1) \sum_{k_1, k_2 \leq y} \frac{k}{k_1 k_2} \sum' \frac{U}{j^{2a}}$$

であり,

$$\sum' \frac{1}{j^{2a}} \leq \left(\frac{A_M}{\tau}\right)^{2a} \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{A_M} + 1\right) = O\left(\frac{\tau_1^2 - \tau_2^2}{\tau^{1+2a}}\right) + L^{-20} = O\left(\frac{U}{T}\right).$$

よって, 補題 4.6 より

$$I_{11,2} = O\left(\frac{U^2}{T}\right) \sum_{k_1, k_2 \leq y} \frac{k}{k_1 k_2} = O\left(\frac{U}{L^7}\right). \quad (5.5)$$

次に, I''_{11} を評価する. $|b_{k_i}| \leq 1$ であるから,

$$|I''_{11}| \leq \sum_{k_1, k_2 \leq y} \frac{1}{k_1^a k_2^a} \sum'' \frac{1}{j_1^a j_2^a} \frac{2}{\left|\log \frac{j_2 k_2}{j_1 k_1}\right|}.$$

ここで, $\sum''$ は $1 \leq j_1, j_2 \leq \tau_1$, $j_1 A_1 \neq j_2 A_2$ なる j_1, j_2 をわたる和. 補題 4.2 より,

$$I''_1 = O(T^{1-a} \log T) \sum_{k_1, k_2 \leq y} \frac{1}{k_1^a k_2^a} = O(T^{1-a} y^{2-2a} \log T). \quad (5.6)$$

$T^{\frac{1}{2}-a} = O(1)$ であるから,

$$I''_{11} = O(T^{\frac{1}{2}} y L) = O\left(\frac{T}{L^{19}}\right) = O\left(\frac{U}{L^9}\right). \quad (5.7)$$

よって, (5.6), (5.7), (5.3), (5.5) より

$$I_{11} = I_{11,1} + O\left(\frac{U}{L^7}\right).$$

補題 4.1 より, ある定数 C_1 があって

$$\sum_{1 \leq j \leq \frac{\tau}{A_M}} \frac{1}{j^{2a}} = \frac{1}{1-2a} \left(\frac{\tau}{A_M} \right)^{1-2a} - \frac{1}{1-2a} + C_1 + O\left(\frac{1}{L^{20}}\right).$$

(最後の項は, $A_M \leq y$ より $\frac{A_M}{\tau} = O(L^{-20})$ となることから.) これと (5.4) より, 以下の結論を得る.

命題 5.1

$$I_{11} = \frac{\tau^{1-2a} U}{1-2a} \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k}{k_M k_m^{2a}} - \left(\frac{1}{1-2a} - C_1 \right) U \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{2a}}{k_1^{2a} k_2^{2a}} + O\left(\frac{U}{\log^2 T}\right). \quad (5.8)$$

ここで,

$$k_m = \min\{k_1, k_2\}, \quad k_M = \max\{k_1, k_2\}. \quad (5.9)$$

※以下, I_{11} 以外の I_{ij} の計算結果のみを述べる. 計算方法は I_{11} の場合とほぼ同様であるため, 詳細は省略する. 引き続き k_m, k_M は (5.9) で定義されるものとする. また, 和は $k_1, k_2 \leq y$ をわたるものとする. C_i たちは絶対定数である.

命題 5.2

$$\begin{aligned} I_{22} = & \frac{U \tau^{1-2a}}{2L(1-2a)} \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k}{k_M k_m^{2a}} \log \frac{\tau k_m}{k_M} \\ & - \frac{U \tau^{1-2a}}{L^2(1-2a)^2} \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k}{k_M k_m^{2a}} \left(\frac{1}{2} L + \log \frac{\tau k_m}{k_M} \right) \\ & + \frac{2U \tau^{1-2a}}{L^2(1-2a)^3} \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k}{k_M k_m^{2a}} \\ & - \frac{U}{L^2} \left(\frac{1}{1-2a} - C_2 \right) \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{2a}}{k_1^{2a} k_2^{2a}} \log \frac{k_1}{k} \log \frac{k_2}{k} \\ & + \frac{U}{L^2} \left(\frac{2}{(1-2a)^2} + C_3 \right) \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{2a}}{k_1^{2a} k_2^{2a}} \log \frac{k_1}{k} \\ & - \frac{U}{L^2} \left(\frac{2}{(1-2a)^3} - C_4 \right) \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{2a}}{k_1^{2a} k_2^{2a}} \\ & + O\left(\frac{U}{L^7}\right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

命題 5.3

$$\begin{aligned}
I_{33} = & -\frac{U\tau^{1-2a}}{2L(1-2a)} \sum \frac{b_{k_1}b_{k_2}k}{k_M^{2a}k_m} \log \frac{\tau k_m}{k_M} - \frac{U\tau^{1-2a}}{L^2(1-2a)^2} \sum \frac{b_{k_1}b_{k_2}k}{k_M^{2a}k_m} \left(\frac{1}{2}L + \log \frac{\tau k_m}{k_M} \right) \\
& - \frac{2U\tau^{1-2a}}{L^2(1-2a)^3} \sum \frac{b_{k_1}b_{k_2}k}{k_M^{2a}k_m} + \frac{U\tau^{2-4a}}{L^2} \left(\frac{1}{1-2a} + C_5 \right) \sum \frac{b_{k_1}b_{k_2}k^{2-2a}}{k_1k_2} \log \frac{k_1}{k} \log \frac{k_2}{k} \\
& + \frac{U\tau^{2-4a}}{L^2} \left(\frac{2}{(1-2a)^2} + C_6 \right) \sum \frac{b_{k_1}b_{k_2}k^{2-2a}}{k_1k_2} \log \frac{k_1}{k} \\
& + \frac{U\tau^{2-4a}}{L^2} \left(\frac{2}{(1-2a)^3} + C_7 \right) \sum \frac{b_{k_1}b_{k_2}k^{2-2a}}{k_1k_2} \\
& + O\left(\frac{U}{L^7}\right).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

命題 5.4

$$\begin{aligned}
2I_{12} = & I_{12} + I_{21} \\
= & -\frac{U\tau^{1-2a}}{L(1-2a)} \sum \frac{b_{k_1}b_{k_2}k}{k_M k_m^{2a}} \left(\frac{1}{2}L + \log \frac{\tau k_m}{k_M} \right) + \frac{2U\tau^{1-2a}}{L(1-2a)^2} \sum \frac{b_{k_1}b_{k_2}k}{k_M k_m^{2a}} \\
& + \frac{U}{L} \left(\frac{2}{1-2a} - C_8 \right) \sum \frac{b_{k_1}b_{k_2}k^{2a}}{k_1^{2a}k_2^{2a}} \log \frac{k_1}{k} - \frac{U}{L} \left(\frac{2}{(1-2a)^2} + C_9 \right) \sum \frac{b_{k_1}b_{k_2}k^{2a}}{k_1^{2a}k_2^{2a}} \\
& + O\left(\frac{U}{L^7}\right).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

命題 5.5

$$\begin{aligned}
2I_{13} = & -\frac{U\tau^{1-2a}}{2(1-2a)} \sum \frac{b_{k_1}b_{k_2}k}{k_M k_m^{2a}} + \frac{U\tau^{1-2a}}{L(1-2a)} \sum \frac{b_{k_1}b_{k_2}k}{k_M^{2a}k_m} \log \frac{\tau k_m}{k_M} \\
& - \frac{\tau^{1-2a}U}{(1-2a)^2L} \sum \frac{b_{k_1}b_{k_2}k}{k_M k_m^{2a}} + \frac{\tau^{1-2a}U}{(1-2a)^2L} \sum \frac{b_{k_1}b_{k_2}k}{k_M^{2a}k_m} \\
& + O\left(\frac{U}{L^5}\right).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

命題 5.6

$$\begin{aligned}
2I_{23} = & \frac{U\tau^{1-2a}}{2L(1-2a)} \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k}{k_M k_m^{2a}} \log \frac{\tau k_m}{k_M} - \frac{U\tau^{1-2a}}{2L(1-2a)} \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k}{k_M^{2a} k_m} \log \frac{\tau k_m}{k_M} \\
& + \frac{U\tau^{1-2a}}{L^2(1-2a)^2} \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k}{k_M k_m^{2a}} \log \frac{\tau k_m}{k_M} \\
& - \frac{U\tau^{1-2a}}{2L(1-2a)^2} \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k}{k_M^{2a} k_m} - \frac{U\tau^{1-2a}}{2L(1-2a)^2} \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k}{k_M k_m^{2a}} \\
& + \frac{U\tau^{1-2a}}{L^2(1-2a)^2} \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k}{k_M^{2a} k_m} \log \frac{\tau k_m}{k_M} - \frac{2U\tau^{1-2a}}{L^2(1-2a)^3} \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k}{k_M k_m^{2a}} \\
& + \frac{2U\tau^{1-2a}}{L^2(1-2a)^3} \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k}{k_M^{2a} k_m} \\
& + O\left(\frac{U}{L^5}\right).
\end{aligned} \tag{5.14}$$

これらを (3.23) に代入して, mollified モーメント

$$\int_T^{T+U} |\psi H(a+it)|^2 dt$$

を計算する.

6 I_{ij} たちの和の計算

和 $I_{11} + I_{22} + I_{33} + 2(I_{12} + I_{13} + I_{23})$ において上で求めた漸近式を代入すると, 実に 24 個の項がキャンセルされる ([5], p.422). そして次の結論が得られる.

命題 6.1

$$S_0 := \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{2a}}{k_1^{2a} k_2^{2a}}, \tag{6.1}$$

$$S_1 := \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{2a}}{k_1^{2a} k_2^{2a}} \log \frac{k_1}{k}, \tag{6.2}$$

$$S_2 := \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{2a}}{k_1^{2a} k_2^{2a}} \log \frac{k_1}{k} \log \frac{k_2}{k}, \tag{6.3}$$

$$K_0 := \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{2-2a}}{k_1 k_2}, \tag{6.4}$$

$$K_1 := \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{2-2a}}{k_1 k_2} \log \frac{k_1}{k}, \tag{6.5}$$

$$K_2 := \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2} k^{2-2a}}{k_1 k_2} \log \frac{k_1}{k} \log \frac{k_2}{k} \tag{6.6}$$

と置くとき,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{U} \int_T^{T+U} |\psi H(a+it)|^2 dt \\
&= S_0 \left(-\frac{1}{1-2a} + C_1 - \frac{2}{L^2(1-2a)^3} + \frac{C_4}{L^2} - \frac{2}{L(1-2a)^2} - \frac{C_9}{L} \right) \\
&+ S_1 \left(\frac{2}{L^2(1-2a)^2} + \frac{C_3}{L^2} + \frac{2}{L(1-2a)} - \frac{C_8}{L} \right) \\
&+ S_2 \left(-\frac{1}{L^2(1-2a)} + \frac{C_2}{L^2} \right) + \frac{\tau^{2-4a}}{L^2} K_0 \left(\frac{2}{(1-2a)^3} + C_7 \right) \\
&+ \frac{\tau^{2-4a}}{L^2} K_1 \left(\frac{2}{(1-2a)^2} + C_6 \right) + \frac{\tau^{2-4a}}{L^2} K_2 \left(\frac{2}{1-2a} + C_5 \right) \\
&+ O\left(\frac{1}{L^5}\right).
\end{aligned} \tag{6.7}$$

後は $S_0, S_1, S_2, K_0, K_1, K_2$ を計算すればよい.

7 S_0 の計算

$$F(j, w) = \prod_{p|j} \left(1 - \frac{1}{p^w}\right) \tag{7.1}$$

と置くとき,

$$j^{2a} F(j, 2a) = \sum_{r|j} \mu(j) \left(\frac{j}{r}\right)^{2a}$$

であるから, 補題 4.8 より

$$k^{2a} = \sum_{j|k} j^{2a} F(j, 2a).$$

よって,

$$S_0 = \sum \frac{b_{k_1} b_{k_2}}{k_1^{2a} k_2^{2a}} \sum_{j|(k_1, k_2)} j^{2a} F(j, 2a) = \sum j^{2a} F(j, 2a) \left(\sum_{j|k_1} \frac{b_{k_1}}{k_1^{2a}} \right)^2 \tag{7.2}$$

($j \leq y, k_1 \leq y$). そこで,

$$S_{0,1} := \sum_{j|k_1} \frac{b_{k_1}}{k_1^{2a}} = \sum_{j|k_1} \frac{\mu(k_1) \log \frac{y}{k_1}}{k_1^{\frac{1}{2}+a} \log y}$$

と置く. $k_1 = nj$ と置くと, $n \leq \frac{y}{j}$ であり,

$$S_{0,1} = \frac{\mu(j)}{j^{\frac{1}{2}+a}} \frac{1}{\log y} S_{0,2},$$

$$S_{0,2} := \sum_{\substack{n \leq \frac{y}{j} \\ (n,j)=1}} \frac{\mu(n) \log \frac{y}{nj}}{n^{\frac{1}{2}+a}}. \quad (7.3)$$

このとき,

$$S_0 = \sum \frac{\mu^2(j) F(j, 2a)}{j \log^2 y} (S_{0,2})^2 \quad (7.4)$$

である. $x = \frac{y}{j}$ と置く. $x < T$ より, $x^{\frac{1}{2}-a} = O(1)$. $1/\zeta F$ の級数展開を用いると,

$$S_{0,2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^{w-\frac{1}{2}-a}}{(w-\frac{1}{2}-a)^2 \zeta(w) F(j, w)} dw. \quad (7.5)$$

積分路の変更により,

$$S_{0,2} = \sum_{i=0}^5 Q_i. \quad (7.6)$$

ここで, (7.5) の積分に対し,

$$Q_0 : w = \frac{1}{2} + a \text{ における留数,}$$

$$Q_1 : \{w = 1 + iv, v : -\infty \rightarrow -L^{10}\} \text{ 上の積分,}$$

$$Q_2 : \{w = u + iv, u : 1-b \rightarrow 1, v = L^{10}\} \text{ 上の積分,}$$

$$Q_3 : \{w = u + iv, u = 1-b, v : -L^{10} \rightarrow L^{10}\} \text{ 上の積分,}$$

$$Q_4 : \{\bar{w}, w \in Q_2\} \text{ 上の積分,}$$

$$Q_5 : \{\bar{w}, w \in Q_1\} \text{ 上の積分.}$$

ここで, $b = \frac{1}{M \log L}$ ($M > 0$, 十分大). ある $M_1 > 0$ があって, Q_2, Q_3, Q_4 の積分路では,

$$\left| \frac{1}{\zeta(w)} \right| \leq M_1 \log L$$

であり, Q_1, Q_5 の積分路では,

$$\frac{1}{\zeta(1+iv)} = O(\log |v|)$$

である.

$$F_1(j, w) := \prod_{p|j} \left(1 + \frac{1}{p^w}\right)$$

と置く. (3.1) により,

$$Q_1, Q_5 = O\left(\frac{1}{F(j, 1)}\right) \int_{L^{10}}^{\infty} \frac{\log v}{v^2} dv = O\left(\frac{\log L}{L^{10} F(j, 1)}\right) = O(F_1(j, 1) L^{-10} \log L).$$

同様に,

$$Q_2, Q_4 = O(F_1(j, 1-b)L^{-20} \log L),$$

$$Q_3 = O(F_1(j, 1-b)j^b y^{-b} \log^2 L)$$

が得られる. $Q_6 := Q_1 + Q_2 + Q_4 + Q_5$ と置くとき,

$$Q_6 = O(F_1(j, 1-b)L^{-10} \log L) \quad (7.7)$$

であり,

$$S_{0,2} = Q_0 + Q_3 + Q_6. \quad (7.8)$$

Q_0 を計算する.

$$Z(w) := \frac{1}{(w-1)\zeta(w)} \quad (Z(1) = 1)$$

とする. $Z(w)$ は $|w-1|$ が十分小さい範囲で解析的で, $Z(1/2+a) = 1 + O(1/2-a)$ となる. これを用いると,

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{d}{dw} \left(x^{w-\frac{1}{2}-a} (w-1) Z(w) \frac{1}{F(j, w)} \right) \Big|_{w=\frac{1}{2}+a} \\ &= \frac{1}{F(j, \frac{1}{2}+a)} \left[1 - \left(\frac{1}{2} - a \right) \log x + O\left(\frac{1}{2} - a \right) + O\left(\left(\frac{1}{2} - a \right)^2 \log x \right) \right. \\ &\quad \left. + O\left(\frac{1}{2} - a \right) \sum_{p|j} \frac{\log p}{p^{\frac{1}{2}+a}-1} \right]. \end{aligned}$$

補題 4.9 と $1/2-a = O(1/L)$ および $x = y/j$ より,

$$Q_0 = \left[1 - \left(\frac{1}{2} - a \right) \log \frac{y}{j} \right] \frac{1}{F(j, \frac{1}{2}+a)} + O\left(F_1\left(j, \frac{1}{2}+a \right) \frac{\log L}{L} \right).$$

これと (7.7), (7.8) より,

$$S_{0,2} = Q_{00} + Q_3 + Q_7. \quad (7.9)$$

ここで,

$$Q_{00} = \left[1 - \left(\frac{1}{2} - a \right) \log \frac{y}{j} \right] \frac{1}{F(j, \frac{1}{2}+a)}, \quad Q_7 = O\left(\frac{\log L}{L} F_1\left(j, \frac{1}{2}+a \right) \right).$$

Q_{00} は $O(F_1(j, 1/2+a)) = O(F_1(j, 1-b))$ と評価できるので,

$$S_{0,2}^2 = Q_{00}^2 + O(F_1(j, 1-b)(Q_3 + Q_7)) + O(Q_3^2 + Q_7^2).$$

これを (7.4) に代入すると,

$$S_0 \log^2 y = P_0 - (1-2a)P_1 + \left(\frac{1}{2} - a \right)^2 P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6. \quad (7.10)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 P_m &= \sum \frac{\mu^2(j)F(j, 2a)}{jF^2(j, \frac{1}{2} + a)} \log^m \frac{y}{j} \quad (m = 0, 1, 2), \\
 P_3 &= O\left(\frac{\log^2 L}{y^b} \sum \mu^2(j)F_1^2(j, 1-b)y^{b-1}\right), \\
 P_4 &= O\left(\frac{\log L}{L} \sum \mu^2(j)\frac{F_1^2(j, 1-b)}{j}\right), \\
 P_5 &= O\left(\frac{\log^2 L}{y^{2b}} \sum \mu^2(j)F_1^2(j, 1-b)y^{2b-1}\right), \\
 P_6 &= O\left(\frac{\log^2 L}{L^2} \sum \mu^2(j)\frac{F_1^2(j, 1-b)}{j}\right).
 \end{aligned}$$

そこで,

$$Y(a) := \prod_p \left(1 + \frac{2p^{\frac{1}{2}-a} - p^{1-2a} - p^{-2a}}{p(p+1) \left(1 - \frac{1}{p^{\frac{1}{2}+a}} \right)^2} \right)$$

と置くと, $Y(a)$ は $|a - \frac{1}{2}| < \frac{1}{4}$ で解析的である. また,

$$Y\left(\frac{1}{2}\right) = \prod_p \frac{p^2}{p^2 - 1}$$

であるから, 上の範囲で

$$Y(a) = \prod_p \frac{p^2}{p^2 - 1} + O\left(\frac{1}{2} - a\right) \quad (7.11)$$

となる. $m \in \{0, 1, 2\}$ に対し, 補題 4.11-4.13 より,

$$P_m = Y(a) \frac{(\log y)^{m+1}}{m+1} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) + O(\log^m y)$$

となり, これと (7.11) より

$$P_m = \frac{(\log y)^{m+1}}{m+1} + O(\log^m y) \quad (7.12)$$

となる. また, $P_3, \dots, P_6$ は各々

$$P_3 = O(\log^3 L), \quad P_4 = O(\log L), \quad P_5 = O(\log^5 L), \quad P_6 = O\left(\frac{\log^2 L}{L}\right)$$

となる. よって (7.10) より, 次の結論を得る.

命題 7.1

$$S_0 = \frac{1}{\log y} - \frac{1-2a}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - a \right)^2 \log y + O \left(\frac{\log^5 L}{L^2} \right). \quad (7.13)$$

※ S_1, S_2, K_0, K_1, K_2 も同様の方法で評価できる. 本稿では詳細は省略し, 結果のみ述べる.

命題 7.2

$$S_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - a \right) \log y + O \left(\frac{\log^5 L}{L} \right). \quad (7.14)$$

命題 7.3

$$S_2 = \frac{1}{3} \log y + O(\log^5 L). \quad (7.15)$$

命題 7.4

$$K_0 = \frac{1}{\log y} + \left(\frac{1}{2} - a \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - a \right)^2 \log y + O \left(\frac{\log^5 L}{L^2} \right), \quad (7.16)$$

$$K_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - a \right) \log y + O \left(\frac{\log^5 L}{L} \right), \quad (7.17)$$

$$K_2 = \frac{1}{3} \log y + O(\log^5 L). \quad (7.18)$$

8 定理 1.3 の証明の完結

(7.13)-(7.18) を (6.7) に代入すると,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{U} \int_T^{T+U} |\psi H(a+it)|^2 dt \\
&= \left[\frac{1}{\log y} - \left(\frac{1}{2} - a \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - a \right)^2 \log y \right] \left[-\frac{1}{1-2a} - \frac{2}{L(1-2a)^2} - \frac{2}{L^2(1-2a)^3} \right] \\
&+ \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - a \right) \log y \right] \left[\frac{2}{L(1-2a)} + \frac{2}{L^2(1-2a)^2} \right] - \frac{\log y}{3L^2(1-2a)} \\
&+ \left[\frac{1}{\log y} + \left(\frac{1}{2} - a \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - a \right)^2 \log y \right] \frac{2\tau^{2-4a}}{L^2(1-2a)^3} \\
&- \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - a \right) \log y \right] \frac{2\tau^{2-4a}}{L^2(1-2a)^2} + \frac{\tau^{2-4a} \log y}{3L^2(1-2a)} \\
&+ O\left(\frac{\log^5 L}{L}\right).
\end{aligned}$$

$R = (1/2 - a)L$ とする.

$$\log y = \frac{L}{2} + O(\log L)$$

であるから, 計算により,

$$\frac{1}{U} \int_T^{T+U} |\psi H(a+it)|^2 dt = F(R) + O\left(\frac{\log^5 L}{L}\right).$$

ここで,

$$F(R) = e^{2R} \left(\frac{1}{2R^3} + \frac{1}{24R} \right) - \frac{1}{2R^3} - \frac{1}{R^2} - \frac{25}{24R} + \frac{7}{12} - \frac{R}{12}. \quad (8.1)$$

$R > 0$ を固定するとき, $F(R)$ は有限であるから,

$$\int_T^{T+U} |\psi H(a+it)|^2 dt = O_R(U)$$

である. よって, (3.22) より,

$$\int_T^{T+U} |\psi G(a+it)|^2 dt = UF(R) + O\left(\frac{U \log^5 L}{L}\right). \quad (8.2)$$

(8.2) と (3.7), (3.8) により,

$$2\pi \left(\frac{1}{2} - a \right) N_G(D) \leq \frac{1}{2} U \log F(R) + O\left(\frac{U \log^5 L}{L}\right) \quad (8.3)$$

となる. $R = 1.3$ のとき, $F(1.3) < 2.3502$ となるので, 十分大きい任意の U に対し

$$2\pi \left(\frac{1}{2} - a \right) N_G(D) < 0.4275U$$

となる. $(1/2 - a)L = R = 1.3$ であるから,

$$2\pi N_G(D) < 0.3290UL \quad (8.4)$$

が得られる.

十分大きい $t_0 > 1$ に対し, $1/2 + it_0$ が $G(s)$ の零点ならば, (2.10) よりこれは $\zeta'(s)$ の零点 (少なくとも同じ重複度) である. よって (2.7) より, これは $\zeta(s)$ の零点 (少なくとも同じ重複度) である. D において,

$$N_1 : G \text{ の } \sigma = \frac{1}{2} \text{ における零点の個数 (重複度込み)}$$

$$N_2 : G \text{ の } \sigma > \frac{1}{2} \text{ における零点の個数 (重複度込み)}$$

とする. D の左辺にある零点から, その零点を中心とする $\sigma \geq 1/2$ 内の半径の十分小さい半円を切り取る. これらの零点を重複度を込めずに数えた個数を N'_1 とする. N'_1 個の半円のうち, $j-1$ 番目と j 番目のものの間にある D の左辺の区間を I_j とし, I_j における $\arg G$ の変動を V_j とする. D の上辺, 下辺における $\arg G$ の変動は Jensen の方法により $O(L)$ と評価できるので, 偏角の原理により

$$\sum_{j=1}^{N'_1} V_j - \pi N_1 = 2\pi N_2 + O(L) \quad (8.5)$$

である. I_j における

$$\arg(h(s)[f'(s) + f'(1-s)]G(s))$$

の変動を W_j とする. ただし, W_j は $t = \Im s$ が増加する方向で考える. V_j は t が減少する方向で考えていることに注意する. (2.2) と (8.5) より,

$$\sum_{j=1}^{N'_1} W_j = \frac{U}{2}L + O\left(\frac{U^2}{T}\right) - (2\pi N_2 + \pi N_1). \quad (8.6)$$

(2.12) は, I_j において少なくとも

$$\frac{W_j}{\pi} - 2$$

回達成される. よって (8.6) より $\zeta(1/2 + it)$ の $\cup_j I_j$ における零点の個数は, 少なくとも

$$\frac{UL}{2\pi} + O\left(\frac{U^2}{T}\right) - (2N_2 + N_1) - 2N'_1 = \frac{UL}{2\pi} - 2 \underbrace{N_G(D)}_{\frac{1}{2}N_1 + N_2} - 2N'_1 + O\left(\frac{U^2}{T}\right) \quad (8.7)$$

以上である. $G(s)$ の $\sigma = 1/2$ 上の零点 (D から取り除いたもの) は, $\zeta(1/2 + it)$ の零点で重複度が 1 だけ大きいものを与えるので, そのような零点は $N_1 + N'_1$ 個ある. これらの零点を (8.7) に加えることにより, $\zeta(1/2 + it)$ の $t \in [T, T + U]$ 上の零点は少なくとも

$$\frac{UL}{2\pi} - 2N_G(D) + N_1 - N'_1 + O\left(\frac{U^2}{T}\right) \quad (8.8)$$

個. また, $N_1 \geq N'_1$ である. よって (8.4) より, (8.8) は少なくとも

$$0.34 \frac{UL}{2\pi}$$

以上となる. これと

$$N(T + U) - N(T) \sim \frac{UL}{2\pi}$$

より定理 1.3 の結論を得る. □

9 $\zeta(s)$ の mollified モーメントの簡単な計算法

本章では M. P. Young による mollified モーメントの計算法 [10] を紹介する. 本章のみ, いくつかの概念を別の記号で表す.

9.1 設定

これまでと同様 $T > 1$ は十分大きい実数とし, $N(T)$ を $\zeta(s)$ の零点 $\rho = \beta + i\gamma$ であって $0 < \gamma < T$ であるものの個数, $N_0(T)$ はそのような零点のうち, $\beta = 1/2$ であるようなものの個数とする. ただし, これまで通り零点は原則として重複度を込めて数える.

$$\kappa := \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_0(T)}{N(T)}$$

と置く. Levinson の定理 (定理 1.2) により, $\kappa \geq 1/3$ である.

$L = \log T$ と置く. $Q(x)$ は実数係数多項式で, $Q(0) = 1$ を満たすものとし,

$$V(s) = Q\left(-\frac{1}{L} \frac{d}{ds}\right) \zeta(s)$$

と置く. 上述した Levinson の定理は, $Q(x) = 1 - x$ の場合の考察による結果である. 一方で B. Conrey は Q がより一般の多項式の場合を考察し, $\kappa > 2/5$ を証明した [1]. $R > 0$ は正定数, $\sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{R}{L}$, $M = T^\theta$ ($0 < \theta < \frac{1}{2}$) とし, $P(x) = \sum a_j x^j$ は $P(0) = 0$, $P(1) = 1$ をみたす多項式とする. ψ を,

$$\psi(s) := \sum_{h \leq M} \frac{\mu(h)}{h^{s+\frac{1}{2}-\sigma_0}} P\left(\frac{\log \frac{M}{h}}{\log M}\right)$$

で定める. (最終的には $P(x) = x$ と取る.) これらの V, ψ に対して, Conrey の議論の結論として

$$\frac{N_0(T)}{N(T)} \geq 1 - \frac{1}{R} \log \left(\frac{1}{T} \int_1^T |V\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt \right) + o(1) \quad (9.1)$$

が成り立つ. よって内側の計算を行えばよい.

定理 9.1 $T \rightarrow \infty$ のとき,

$$\frac{1}{T} \int_1^T |V\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt = c(P, Q, R, \theta) + o(1). \quad (9.2)$$

ここで,

$$c(P, Q, R, \theta) = 1 + \frac{1}{\theta} \int_0^1 \int_0^1 e^{2Rv} \left(\frac{d}{dx} e^{R\theta x} P(x+u) Q(v+\theta x) \Big|_{x=0} \right)^2 dudv. \quad (9.3)$$

$P(x) = x, Q(x) = 1 - x, R = 1.3, \theta = 0.5$ のとき,

$$c(P, Q, R, \theta) = 2.35 \dots, \quad \kappa \geq 0.34 \dots$$

が得られる.

9.2 ウェイト関数

次に, ウェイト関数 $w(t)$ を導入する. $w(t)$ は次の 3 条件をみたすものとする.

$$0 \leq w(t) \leq 1 \quad (\forall t \in \mathbb{R}). \quad (9.4)$$

$$\text{supp}(w) \subset \left[\frac{T}{4}, 2T \right] \quad (9.5)$$

$$w^{(j)}(t) \ll \Delta^{-j} \quad (\forall j = 0, 1, 2, \dots), \quad \Delta = \frac{T}{L}. \quad (9.6)$$

このとき, 次が成り立つ.

定理 9.2 $\sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{R}{L}$ とする. $R \ll 1$ において一様に,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |V\psi(\sigma_0 + it)|^2 w(t) dt = c(P, Q, R, \theta) \hat{w}(0) + O\left(\frac{T}{L}\right). \quad (9.7)$$

ここで, $\hat{w}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt$.

定理 9.1 はこの定理から直ちに従う.

(定理 9.2 を仮定した定理 9.1 の証明). w を上の 3 条件を満たし, $[\frac{T}{2}, T]$ で恒等的に 1 であり, $[\frac{T}{2} - \Delta, T + \Delta]$ に台を持つ関数とすると, (9.7) より,

$$\int_{\frac{T}{2}}^T |V\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt \leq c(P, Q, R, \theta) \hat{w}(0) + O\left(\frac{T}{L}\right)$$

が成り立つ. また, $\hat{w}(0) = \frac{T}{2} + O(\frac{T}{L})$. 同様にして逆向きの不等式も成り立つので,

$$\int_{\frac{T}{2}}^T |V\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt = c(P, Q, R, \theta) \frac{T}{2} + O\left(\frac{T}{L}\right)$$

となる. T を $\frac{T}{2}, \frac{T}{2^2}, \dots$ に置き換えて和を取ることで (9.2) を得る. $\square$

9.3 平均値に関する考察

mollified モーメントを計算するためには, Riemann ゼータ関数自身のみではなく, その導関数の積分平均の情報も必要となる. そのため, シフトパラメータ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を導入し, それらを変数に含むゼータ関数の積分平均を考え, その後に α, β に関する微分を計算する. $\alpha, \beta \ll L^{-1}$ に対し,

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \zeta\left(\frac{1}{2} + \alpha + it\right) \zeta\left(\frac{1}{2} + \beta - it\right) |\psi(\sigma_0 + it)|^2 dt \quad (9.8)$$

と置く.

補題 9.3

$$I(\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta) \hat{w}(0) + O\left(\frac{T}{L}\right) \quad (9.9)$$

が $\alpha, \beta \ll L^{-1}$ において一様に成り立つ. ここで, $M = T^\theta$ に対し

$$c(\alpha, \beta) = 1 + \frac{1}{\theta} \frac{d^2}{dx dy} M^{-\beta x - \alpha y} \int_0^1 \int_0^1 T^{-v(\alpha + \beta)} P(x + u) P(y + u) du dv \Big|_{x=y=0}. \quad (9.10)$$

(補題 9.3 $\Rightarrow$ 定理 9.2 の証明). (9.7) の左辺を I_{smooth} と表す. ψ の定義より,

$$I_{smooth} = Q\left(-\frac{1}{L} \frac{d}{d\alpha}\right) Q\left(-\frac{1}{L} \frac{d}{d\beta}\right) I(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha=\beta=-\frac{R}{L}}. \quad (9.11)$$

まず, $c(\alpha, \beta)$ に上の微分作用素を適用することで $c(P, Q, R, \theta)$ が得られることを確認する. $I(\alpha, \beta)$ と $c(\alpha, \beta)$ は十分 0 に近い α, β に対し正則であるから, (9.11) の微分は Cauchy の積分公式を用いて $-\frac{R}{L}$ の周りの半径 $\asymp L^{-1}$ の円周上の積分で実現できる. これらの積分路において誤差項は一様に評価されるので, $I(\alpha, \beta)$ の誤差項は I_{smooth} の誤差項になる.

$$Q\left(\frac{-1}{\log X} \frac{d}{d\alpha}\right) X^{-\alpha} = Q\left(\frac{\log X}{\log T}\right) X^{-\alpha}$$

を用いると,

$$\begin{aligned} & Q\left(-\frac{1}{L}\frac{d}{d\alpha}\right)Q\left(-\frac{1}{L}\frac{d}{d\beta}\right)c(\alpha,\beta) \\ &= 1 + \frac{1}{\theta}\frac{d^2}{dxdy}M^{-\beta x-\alpha y}\int_0^1\int_0^1T^{-v(\alpha+\beta)}P(x+u)P(y+u) \\ &\quad \times Q(v+x\theta)Q(v+y\theta)dudv\Big|_{x=y=0} \end{aligned}$$

となり, $\alpha = \beta = -\frac{R}{L}$ を代入すると, これは

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{\theta}\frac{d^2}{dxdy}e^{R(x+y)}\int_0^1\int_0^1e^{2Rv}P(x+u)P(y+u)Q(v+x\theta)Q(v+y\theta)dudv\Big|_{x=y=0} \\ &= c(P, Q, R, \theta) \end{aligned}$$

となるので, (9.3) が得られる. $\square$

9.4 2つの補題

通常, Riemann ゼータ関数の近似関数等式と言えば Hardy と Littlewood により発明された $\zeta(s)$ を2つの Dirichlet 級数で近似する公式 ([6], 第8章) を指すことが多いが, ここでは以下のより現代的な近似関数等式を用いる.

補題 9.4 (近似関数等式, [4], Theorem 5.3) $p(s) = \frac{(\alpha+\beta)^2-(2s)^2}{(\alpha+\beta)^2}$, $G(s) = e^{s^2}p(s)$ とし,

$$V_{\alpha,\beta}(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} \frac{G(s)}{s} g_{\alpha,\beta}(s,t) x^{-s} ds \quad (9.12)$$

と置く. ここで,

$$g_{\alpha,\beta}(s,t) := \pi^{-s} \frac{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+\alpha+s+it}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+\beta+s-it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+\alpha+it}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+\beta-it}{2}\right)}.$$

さらに,

$$X_{\alpha,\beta,t} := \pi^{\alpha+\beta} \frac{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}-\alpha-it}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}-\beta+it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+\alpha+it}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+\beta-it}{2}\right)}$$

と置くとき, $\Re(\alpha), \Re(\beta) < \frac{1}{2}$, $A \geq 0$ に対し,

$$\begin{aligned} & \zeta\left(\frac{1}{2}+\alpha+it\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+\beta-it\right) \\ &= \sum_{m,n} \frac{1}{m^{\frac{1}{2}+\alpha}n^{\frac{1}{2}+\beta}} \left(\frac{m}{n}\right)^{-it} V_{\alpha,\beta}(mn,t) + X_{\alpha,\beta,t} \sum_{m,n} \frac{1}{m^{\frac{1}{2}-\beta}n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \left(\frac{m}{n}\right)^{-it} V_{-\beta,-\alpha}(mn,t) \\ &\quad + O_A((1+|t|)^{-A}). \end{aligned} \quad (9.13)$$

補足. t が十分大, s が任意の (固定された) 帯領域に属するとき, Stirling の公式 ([6], p.55) により,

$$X_{\alpha,\beta,t} = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\alpha-\beta} (1 + O(t^{-1})), \quad (9.14)$$

$$g_{\alpha,\beta}(s,t) = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^s (1 + O(t^{-1}(1 + |s|^2))). \quad (9.15)$$

さらに, 任意の $A \geq 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$ に対し,

$$t^j \frac{\partial^j}{\partial t^j} V_{\alpha,\beta}(x,t) \ll_{A,j} \left(1 + \left|\frac{t}{x}\right|\right)^{-A} \quad (9.16)$$

が, x に関して一様に成り立つ.

補題 9.5 w は (9.4)-(9.6) を満たす関数とし, $\theta < \frac{1}{2}$, h, k は $hk \leq T^{2\theta}$ を満たす正整数, $\alpha, \beta \ll L^{-1}$ とする. そのとき,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \left(\frac{h}{k}\right)^{-it} \zeta\left(\frac{1}{2} + \alpha + it\right) \zeta\left(\frac{1}{2} + \beta - it\right) dt \\ &= \sum_{hm=kn} \frac{1}{m^{\frac{1}{2}+\alpha} n^{\frac{1}{2}+\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} V_{\alpha,\beta}(mn,t) w(t) dt \\ &+ \sum_{hm=kn} \frac{1}{m^{\frac{1}{2}-\beta} n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} V_{-\beta,-\alpha}(mn,t) X_{\alpha,\beta,t} w(t) dt \\ &+ O_{A,\theta}(T^{-A}). \end{aligned} \quad (9.17)$$

証明 補題 9.4 を左辺に適用する. 近似関数等式 (9.13) の前半部分は,

$$\sum_{m,n} \frac{1}{m^{\frac{1}{2}+\alpha} n^{\frac{1}{2}+\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \left(\frac{hm}{kn}\right)^{-it} V_{\alpha,\beta}(mn,t) dt$$

を与える. このうち, $hm = kn$ の項は (9.17) 右辺第 1 項を与える. (9.6) と (9.16) より, x に関し一様に

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} w(t) V_{\alpha,\beta}(x,t) \ll_{j,A} \left(1 + \left|\frac{x}{T}\right|\right)^{-A} \Delta^{-j}$$

となる. これを用いると, $hm \neq kn$ のとき, 部分積分により

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t) \left(\frac{hm}{kn}\right)^{-it} V_{\alpha,\beta}(mn,t) dt \ll_{j,A} \frac{(1 + \frac{mn}{T})^{-A}}{\Delta^j |\log \frac{hm}{kn}|^j}$$

が得られる. $hm \geq kn + 1$ としてよい. そのとき,

$$\left|\log \frac{hm}{kn}\right| \geq \log \left(1 + \frac{1}{kn}\right) \geq \frac{1}{2kn} \geq \frac{1}{2\sqrt{hkmn}}$$

である. $kn \geq hm + 1$ のときも同様. よって, 上の評価により, $hm \neq kn$ の項の寄与は $O_A(T^{-A})$ ($\forall A > 0$) と評価できる. $\square$

9.5 補題 9.3 の証明

ψ の定義より,

$$I(\alpha, \beta) = \sum_{h, k \leq M} \frac{\mu(h)\mu(k)}{\sqrt{hk}} P\left(\frac{\log \frac{M}{h}}{\log M}\right) P\left(\frac{\log \frac{M}{k}}{\log M}\right) \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \left(\frac{h}{k}\right)^{-it} \zeta\left(\frac{1}{2} + \alpha + it\right) \zeta\left(\frac{1}{2} + \beta - it\right) dt.$$

補題 9.5 より,

$$I(\alpha, \beta) = I_1(\alpha, \beta) + I_2(\alpha, \beta) + O(T^{-A}).$$

ここで,

$$I_1(\alpha, \beta) = \sum_{h, k \leq M} \frac{\mu(h)\mu(k)}{\sqrt{hk}} P\left(\frac{\log \frac{M}{h}}{\log M}\right) P\left(\frac{\log \frac{M}{k}}{\log M}\right) \\ \times \sum_{hm=kn} \frac{1}{m^{\frac{1}{2}+\alpha} n^{\frac{1}{2}+\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} V_{\alpha, \beta}(mn, t) w(t) dt \quad (9.18)$$

であり, $I_2(\alpha, \beta)$ は $I_1(\alpha, \beta)$ の (α, β) を $(-\beta, -\alpha)$ に置き換え, $X_{\alpha, \beta, t} = T^{-\alpha-\beta}(1 + O(L^{-1}))$ を掛けたものである. したがって,

$$I(\alpha, \beta) = I_1(\alpha, \beta) + T^{-\alpha-\beta} I_1(-\beta, -\alpha) + O\left(\frac{T}{L}\right).$$

補題 9.6 $\alpha, \beta \asymp L^{-1}$, $|\alpha + \beta| \gg L^{-1}$ に対し一様に

$$I_1(\alpha, \beta) = c_1(\alpha, \beta) \hat{w}(0) + O\left(\frac{T}{L}\right).$$

ここで,

$$c_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{(\alpha + \beta) \log M} \frac{d^2}{dx dy} M^{\alpha x + \beta y} \int_0^1 P(x+u) P(y+u) du \Big|_{x=y=0}. \quad (9.19)$$

注. 微分を計算することで $c_1(\alpha, \beta)$ は

$$c_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{(\alpha + \beta) \log M} \int_0^1 (P'(u) + \alpha \log M P(u))(P'(u) + \beta \log M P(u)) du \quad (9.20)$$

と書ける.

(補題 9.6 $\Rightarrow$ 補題 9.3 の証明).

$$I(\alpha, \beta) = [I_1(\alpha, \beta) + I_1(-\beta, -\alpha)] + I_1(-\beta, -\alpha)(T^{-\beta-\alpha} - 1) + O\left(\frac{T}{L}\right).$$

右辺の 2 つの項を計算する. $[\dots]$ の部分は補題 9.6 から計算できる. (9.20) より

$$c_1(\alpha, \beta) + c_1(-\beta, -\alpha) = \int_0^1 2P'(u)P(u)du = 1$$

である. 第 2 項は, (9.19) より

$$\begin{aligned} & (T^{-\alpha-\beta} - 1)c_1(-\beta, -\alpha) \\ &= \frac{1 - T^{-\alpha-\beta}}{(\alpha + \beta) \log M} \frac{d^2}{dx dy} M^{-\beta x - \alpha y} \int_0^1 P(x+u)P(y+u)du \Big|_{x=y=0}. \end{aligned}$$

また,

$$\frac{1 - T^{-\alpha-\beta}}{(\alpha + \beta) \log M} = \frac{1}{\theta} \int_0^1 T^{-v(\alpha+\beta)} dv.$$

これらを合わせると, $|\alpha + \beta| \gg L^{-1}$ のとき (9.10) が得られる. これと $c(\alpha, \beta)$, $I(\alpha, \beta)$ の $\alpha, \beta \ll L^{-1}$ における正則性より, 誤差項はこの領域で正則である. よって最大値原理より誤差項の評価は拡張された領域でも成立する. $\square$

9.6 補題 9.6 の証明

$1 \leq h \leq M$, $i = 1, 2, \dots$ に対し, Mellin 変換により

$$\left(\frac{\log \frac{M}{h}}{\log M} \right)^i = \frac{i!}{(\log M)^i} \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} \left(\frac{M}{h} \right)^v \frac{dv}{v^{i+1}}. \quad (9.21)$$

(9.21) と (9.12) を (9.18) に適用すると,

$$\begin{aligned} I_1(\alpha, \beta) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \sum_{i,j} \frac{a_i a_j i! j!}{(\log M)^{i+j}} \sum_{hm=kn} \frac{\mu(h)\mu(k)}{h^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}+\alpha} n^{\frac{1}{2}+\beta}} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^3 \int_{(1)} \int_{(1)} \int_{(1)} \frac{M^{u+v}}{h^v k^u} \frac{g_{\alpha,\beta}(s,t)}{(mn)^s} \frac{G(s)}{s} ds \frac{du}{u^{i+1}} \frac{dv}{v^{j+1}}. \end{aligned}$$

上式の h, k, m, n に関する和は,

$$\sum_{hm=kn} \frac{\mu(h)\mu(k)}{h^{\frac{1}{2}+v} k^{\frac{1}{2}+u} m^{\frac{1}{2}+\alpha+s} n^{\frac{1}{2}+\beta+s}} = \frac{\zeta(1+u+v)\zeta(1+\alpha+\beta+2s)}{\zeta(1+\alpha+u+s)\zeta(1+\beta+v+s)} A_{\alpha,\beta}(u, v, s) \quad (9.22)$$

となる. ここで, $A_{\alpha,\beta}(u, v, s)$ は原点を含むある半平面で絶対収束する Euler 積で表せる. 次に, 十分小さい $\delta > \varepsilon > 0$ に対し, 積分路を $\Re(u) = \Re(v) = \delta$ に移動し, その後 $\Re(s) = -\delta + \varepsilon$ に移動させる. そのとき, 通過する極は $s = 0$ のみである. $M \leq T^\theta$ ($\theta < \frac{1}{2}$), $t \geq \frac{T}{2}$ より, 新しい積分は $O(T^{1-\varepsilon})$ となる. よって,

$$I_1(\alpha, \beta) = \hat{w}(0)\zeta(1+\alpha+\beta) \sum_{i,j} \frac{a_i a_j i! j!}{(\log M)^{i+j}} J_{\alpha,\beta}(M) + O(T^{1-\varepsilon}). \quad (9.23)$$

ここで,

$$J_{\alpha,\beta}(M) := \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{(\varepsilon)} \int_{(\varepsilon)} M^{u+v} \frac{\zeta(1+u+v)A_{\alpha,\beta}(u,v,0)}{\zeta(1+\alpha+u)\zeta(1+\beta+v)} \frac{dudv}{u^{i+1}v^{j+1}}.$$

$J_{\alpha,\beta}(M)$ は次の式で与えられる.

補題 9.7 $\alpha, \beta \ll L^{-1}$ において一様に,

$$J_{\alpha,\beta}(M) = \frac{(\log M)^{i+j-1}}{i!j!} \frac{d^2}{dxdy} M^{\alpha x + \beta y} \int_0^1 (x+u)^i (y+u)^j du \Big|_{x=y=0} + O(L^{i+j-2}). \quad (9.24)$$

補題 9.7 で i, j に関する和を取り, $\zeta(1+\alpha+\beta)$ のローラン展開を用いることで補題 9.6 が従う. よって以降この補題の証明を目標とする.

(補題 9.7 の証明). $\zeta(1+u+v)$ をディリクレ級数展開し, 和の順序交換を行うと,

$$J_{\alpha,\beta}(M) = \sum_{n \leq M} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{(\varepsilon)} \int_{(\varepsilon)} \left(\frac{M}{n}\right)^{u+v} \frac{A_{\alpha,\beta}(u,v,0)}{\zeta(1+\alpha+u)\zeta(1+\beta+v)} \frac{dudv}{u^{i+1}v^{j+1}}.$$

$\zeta(s)$ の非零領域と, そこにおける $1/\zeta(s)$ の評価 ([9], Theorem 3.8 及び (3.11.8)) により,

$$J_{\alpha,\beta}(M) = (u=v=0 \text{ における留数}) + \sum_{n \leq M} \frac{1}{n} \left(1 + \log \frac{M}{n}\right)^{-2}$$

であり, 後ろの和は $\ll 1 \ll L^{i+j-2}$ と評価できる. 留数を計算するため, 半径 $\asymp L^{-1}$ の円周上の積分を考え,

$$\frac{A_{\alpha,\beta}(u,v,0)}{\zeta(1+\alpha+u)\zeta(1+\beta+u)} = (\alpha+u)(\beta+u)A_{0,0}(0,0,0) + O(L^{-3})$$

を用いる. 後に示すように, $A_{0,0}(0,0,0) = 1$ である. これを用いると,

$$J_{\alpha,\beta}(M) = \sum_{n \leq M} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left(\oint \left(\frac{M}{n}\right)^u (\alpha+u) \frac{du}{u^{i+1}} \right) \left(\oint \left(\frac{M}{n}\right)^v (\beta+v) \frac{dv}{v^{j+1}} \right) + O(L^{i+j-2})$$

($\oint$ は原点を中心とする半径 1 の円周上の積分を表す). $a > 0$ に対し,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint a^u (\alpha+u) \frac{du}{u^{l+1}} &= \frac{d}{dx} \left[e^{\alpha x} \frac{1}{2\pi i} \oint (ae^x)^u \frac{du}{u^{l+1}} \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{l!} \frac{d}{dx} e^{\alpha x} (x + \log a)^l \Big|_{x=0} \end{aligned}$$

であるから,

$$J_{\alpha,\beta}(M) = \frac{1}{i!j!} \frac{d^2}{dx dy} e^{\alpha x + \beta y} \sum_{n \leq M} \frac{1}{n} \left(x + \log \frac{M}{n} \right)^i \left(y + \log \frac{M}{n} \right)^j \Big|_{x=y=0} + O(L^{i+j-2}).$$

さらに,

$$\frac{d}{dx} e^{\alpha x} \left(x + \log \frac{M}{n} \right)^i \Big|_{x=0} = \frac{(\log M)^i}{\log M} \frac{d}{dx} M^{\alpha x} \left(x + \log \frac{M}{n} \right)^i \Big|_{x=0}$$

を用いると,

$$J_{\alpha,\beta}(M) = \frac{(\log M)^{i+j-2}}{i!j!} \frac{d^2}{dx dy} M^{\alpha x + \beta y} \sum_{n \leq M} \frac{1}{n} \left(x + \log \frac{M}{n} \right)^i \left(y + \log \frac{M}{n} \right)^j \Big|_{x=y=0} + O(L^{i+j-2}).$$

オイラー・マクローリンの和公式より, n に関する和を積分で書き直すと

$$J_{\alpha,\beta}(M) = \frac{(\log M)^{i+j-2}}{i!j!} \frac{d^2}{dx dy} M^{\alpha x + \beta y} \int_1^M r^{-1} \left(x + \log \frac{M}{r} \right)^i \left(y + \log \frac{M}{r} \right)^j dr \Big|_{x=y=0} + O(L^{i+j-2})$$

となる. $r = M^{1-u}$ で置換して (9.24) を得る. □

最後に, $A_{0,0}(0,0,0) = 1$ を証明しよう. (9.22) より

$$A_{0,0}(s, s, s) = \sum_{hm=kn} \frac{\mu(h)\mu(k)}{(hmk n)^{\frac{1}{2}+s}}$$

であり, $u = v = s$ のとき (9.22) 右辺のゼータ関数の比は 1 であるから, $\Re(s) > 0$ において

$$A_{0,0}(s, s, s) \equiv 1$$

となる. したがって $A_{0,0}(0,0,0) = 1$ が得られる.

以上で定理 9.1 の証明が完了した. □

10 謝辞

著者は本稿に沿った内容を第 32 回整数論サマースクール「ゼータ関数の解析的理論」(於越後湯沢東映ホテル, 2025 年 9 月 8 日(月)~9 月 12 日(金))において 2 時間の講演を行いました. この講演および原稿は日本学術振興会 科学研究費助成事業 基盤研究 (C) 24K06697 「L 関数と篩法による素数分布の研究」(研究代表者:宗野 恵樹) のサポートを受けております.

講演を熱心に聴講していただき、数々の有益なフィードバックを下さった参加者の方々に感謝いたします。本稿にも多数のフィードバックを反映させていただきました。また、筆者にお声掛けくださり、講演と原稿執筆を任せていただいた世話人の青木宏樹先生、鈴木正俊先生、中村隆先生にこの場をお借りして心からの感謝を申し上げます。

参考文献

- [1] J. B. Conrey, *More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line*, J. Reine Angew. Math. **399** (1989), 1-26
- [2] G. H. Hardy, *Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$* , Comp. Rend. Acad. Sci., **158** (1914), 1012-1014
- [3] H. Iwaniec *Lectures on the Riemann Zeta Function*, American Mathematical Society, University Lecture Series vol. 62
- [4] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory* (COLLOQUIUM PUBLICATIONS (AMER. MATHEMATICAL SOC.)) (2004)
- [5] N. Levinson, *More than one third of the zeros of Riemann's zeta function are on $\sigma = 1/2$* , Adv. Math. **13** (1974), 383-436
- [6] K. Matsumoto, リーマンのゼータ関数, 朝倉書店 (2005)
- [7] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (1859)
- [8] A. Selberg, *On the zeros of Riemann's zeta-function*, Skr. Norske Vid Akad. Oslo I. (1942), No. 10, 1-59
- [9] E. C. Titchmarsh, *THEORY RIEMANN ZETA-FUNCTION*, Oxford University Press (1987)
- [10] M. P. Young, *A short proof of Levinson's theorem*, Archiv der Mathematik, Volume 95, pages 539–548, (2010)
- [11] Y. Zhang, J. Liu, *Szu-Hoa-Min (1913-1973): a pioneer of analytic number theory in China*, ICCM Not. **6** (2018), No.2, 61-82

Kanto Gakuin University,
 Kanazawa, Yokohama,
 Kanagawa, Japan
 E-mail address: sono@kanto-gakuin.ac.jp

多重 L 値の収束性について

伊集 大貴（東京理科大学創域理工学研究科）

概要

$j \in \mathbb{Z}_{\leq 1}$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ とし, $f(n) := (1 - 2^{1-k}) + (-1)^n$ とおく. このとき 2 重 L 値 $L_*(j, k; 1, f)$ は $j + k \geq 3$ のとき収束する. これは [1] の命題の反例になっている.

1 導入

荒川-金子は [1] で 2 つの型の多重 L 値を定義した. 正整数 m を固定し, $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とおく. $\mathcal{F}(\mathfrak{R}; \mathbb{C})$ は, $\mathfrak{R}$ から $\mathbb{C}$ への写像全体からなるベクトル空間とする. 1 の原始 m 乗根 $\xi = \xi_m := \exp(2\pi i/m)$ を固定し, 各 $a \in \mathfrak{R}$ に対し関数 $\varphi_a \in \mathcal{F}(\mathfrak{R}; \mathbb{C})$ を

$$\varphi_a(x) = \xi^{ax} \quad (x \in \mathfrak{R}).$$

で定義する. 各写像 $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}(\mathfrak{R}; \mathbb{C})$, 正整数 $k_1, \dots, k_n$ (ただし $k_1 \geq 2$) に対し, 2 つの型の多重 L 値 $L_{\sqcup}(k_1, \dots, k_n; f_1, \dots, f_n)$ と $L_*(k_1, \dots, k_n; f_1, \dots, f_n)$ は以下のように定義される.

$$\begin{aligned} L_{\sqcup}(k_1, \dots, k_n; f_1, \dots, f_n) &= \sum_{m_1 > \dots > m_n > 0} \frac{f_1(m_1 - m_2) \cdots f_{n-1}(m_{n-1} - m_n) f_n(m_n)}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}, \\ L_*(k_1, \dots, k_n; f_1, \dots, f_n) &= \sum_{m_1 > \dots > m_n > 0} \frac{f_1(m_1) f_2(m_2) \cdots f_n(m_n)}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}. \end{aligned}$$

$k_1 \geq 2$ のとき, これらの級数は絶対収束する. $k_1 = 1$ のとき収束に関して [1] で以下のような命題がある.

命題 1.1 $k_1 = 1$ とする, このとき $L_{\sqcup}(k_1, \dots, k_n; f_1, \dots, f_n)$ と

$L_*(k_1, \dots, k_n; f_1, \dots, f_n)$ が収束するための必要十分条件は $\sum_{y \in \mathfrak{R}} f_1(y) = 0$ である.

2 主結果

[2] で命題 1.1 の反例として以下のような定理を提示した.

定理 2.1 整数 $j \leq 1$ と $f_1 = 1(\sum_{y \in \mathfrak{R}_2} f_1(y) \neq 0)$ とする. このとき, $L_*(j, k; f_1, f_2)$ が収束するような $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ と $f_2 \in \mathcal{F}(\mathfrak{R}_2; \mathbb{Q})$ が存在する.

$f_2(n) = (1 - 2^{1-k}) + (-1)^n$ とすると, $L_*(j, k; f_1, f_2)$ は $j + k \geq 3$ のとき収束する. これは $L_*(k; f_2) = 0$ となるためである. そのため以下のような予想を立てた.

予想 2.2 $1 \leq j \leq n$ に対して, $a_j \in \mathfrak{R}_m$ と φ_{a_j} とする. $k_2, \dots, k_n \geq 1$ と $k_1 \geq 2$ あるいは $k_1 = 1$ のとき $a_1 \neq 0$ とする. このとき, $L_{\sqcup}(k_1, \dots, k_n; \varphi_{a_1}, \dots, \varphi_{a_n}) \neq 0$ と $L_*(k_1, \dots, k_n; \varphi_{a_1}, \dots, \varphi_{a_n}) \neq 0$ である.

命題 1.1 の必要条件は正しい. しかし, 定理 2.1 より十分条件は正しくないことがわかる. それゆえ, 予想 2.2 が正しいと仮定し, $L_*(1, k_2, \dots, k_n; \varphi_{a_1}, \dots, \varphi_{a_n})$ と $L_{\sqcup}(1, k_2, \dots, k_n; \varphi_{a_1}, \dots, \varphi_{a_n})$ が収束する条件を次のように与える.

命題 2.3 $\varphi_{a_j} \in \mathcal{F}(R_m; \mathbb{C})$ は予想 2.2 と同じ条件で $m \geq 2$ とする. $k_3, \dots, k_n \geq 1, k_2 \geq 2$ あるいは $k_2 = 1$ のとき $a_2 \neq 0$ とする. 加えて, 予想 2.2 が正しいと仮定する. このとき $L_*(1, k_2, \dots, k_n; \varphi_{a_1}, \dots, \varphi_{a_n})$ が収束する必要十分条件は $a_1 \neq 0$ である. また, $L_{\sqcup}(k_1, \dots, k_n; \varphi_{a_1}, \dots, \varphi_{a_n})$ に対しては条件 $a_2 \neq 0$ は $a_2 \neq a_1$ と置き換えられる.

参考文献

- [1] T. Arakawa and M. Kaneko, *On Multiple L-values*. J. Math. Soc. Japan. **56** (2004), no. 4, 967–991.
- [2] K. Ageji, D. Iju and T. Nakamura. *On Convergence of Multiple L-values*. to appear in Proceedings of the Japan Academy, Ser. A.

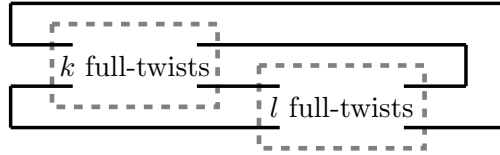
種数 1 の 2 橋結び目の liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現と奇数次巡回被覆

坂本 穂波（お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科）

概要

本稿は「2025 年度整数論サマースクール」の報告集に寄せたもので、丹下稜斗（工学院大学）と植木潤（お茶の水女子大学）との共同研究 [STU25] に基づく。

定義 0.1 種数 1 の 2 橋結び目はダブルツイスト結び目とも呼ばれ、ある $(0, 0) \neq (k, l) \in \mathbb{Z}^2$ に対し次の図式で与えられ、 $J(2k, 2l)$ と書かれる。



p を素数とし、 $\mathbb{Z}_p$ を p 進整数環とする。

定義 0.2 (cf. [Maz11, Section 19]) π を群とする。

- (1) 関数 $\chi: \pi \rightarrow \mathbb{Z}_p$ が $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標であるとは、 $\chi = \mathrm{tr} \rho$ となるような $\mathbb{Z}_p$ の正拡大上の SL_2 表現 ρ が存在することをいう。
- (2) $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標 χ が liminal であるとは、 χ が可約であり、かつ、そのすべての開近傍は既約な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつことをいう。

定理 0.3 (主結果, [STU25, Theorem 1.1]) $K = J(2k, 2l) \subset S^3$ とする。 $p \neq 2$ (resp. $p = 2$) で、 p (resp. 2^3) が結び目 K のある奇数次の巡回被覆の 1 次ホモロジー群の大きさを割るとき、 $\pi_1(S^3 - K)$ は liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ。

定理 0.4 ([STU25, Theorem 1.5]) $m \in \mathbb{Z}$ とする。 $t^2 - t + m = (t - a)(t - b)$ とし、任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $L_n = a^n + b^n$ と定める。

- (1) ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $2^3 | L_{2n+1}$ のとき, $4m^2 - m \equiv 1 \pmod{8}$ である.
 (2) $p \neq 2$ であり, かつ, ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $p | L_{2n+1}$ のとき, ルジャンドル記号について $\left(\frac{4m^2-m}{p}\right) = 1$ を満たす.

定理 0.3 の証明 (outline) $J(2k, 2l)$ のザイフェルト行列は $V = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & l \end{pmatrix}$ によって与えられ, アレクサンダー多項式は $\Delta_{J(2k, 2l)}(t) = \det(tV - V^\perp) = klt^2 + (1 - 2kl)t + kl$ となる. $m = kl$ とし, $\Delta_K(t) = mt^2 - (1 - 2m)t + m = (t - \alpha)(t - \beta)$, $t^2 - t + m = (t - a)(t - b)$ とする. Fox-Weber の公式により, $r_{2n+1} = |\text{Res}(t^n - 1, \Delta_K(t))| = m^{2n+1}(2 - \alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}) = L_{2n+1}^2$ となる. **定理 0.4** によって, $p \neq 2$ のとき, ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ があって $p | r_{2n+1}$ であるならば, ルジャンドル記号 $\left(\frac{4m^2-m}{p}\right) = 1$ を満たす. $p = 2$ のとき, ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $2^3 | L_{2n+1}$ ならば $4m^2 - m \equiv 1 \pmod{8}$ である. 一方, $S_*(z) \in \mathbb{Z}[z]$ を第 2 種チェビシエフ多項式とし, $f_{k,l}(x, y) = S_l(z) - (1 + (-x^2 + y + 2)S_{k-1}(y)(S_k(y) - S_{k-1}(y))S_{l-1}(z)$, $z = 2 + (y - 2)(-x^2 + y + 2)S_{m-1}^2(y)$ と定める. Tran の計算 [Tra18] とヘンゼルの補題により, liminal $\text{SL}_2 \mathbb{Z}_p$ 指標が曲線 $f_{k,l}(x, y) = 0$ と $y - 2 = 0$ の $\mathbb{Z}_p^2$ における交点 $(\pm\sqrt{4 - \frac{1}{kl}}, -\frac{1}{kl})$ に対応し, $4 - \frac{1}{m} = \frac{4m^2-m}{m^2}$ である. $\square$

注意 0.5 この研究は GL_1 表現と SL_2 表現の変形理論の交界りに位置する. 数論側での詳しい位置づけは今後の課題である (cf. [Mor24, Chapters 13, 14]).

参考文献

- [STU25] Honami Sakamoto, Ryoto Tange, and Jun Ueki, Liminal $\text{SL}_2 \mathbb{Z}_p$ - representations and odd-th cyclic covers of genus one two-bridge knots, preprint. arXiv:2501.00323, 2025.
 [Maz11] Barry Mazur, How can we construct abelian Galois extensions of basic number fields?, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 48 (2011), no. 2, 155–209. MR 2774089
 [Tra18] Anh T. Tran, Twisted Alexander polynomials of genus one two-bridge knots, Kodai Math. J. 41(2018), no. 1, 1, 86–97. MR 377388
 [Mor24] Masanori Morishita, Knots and primes, Universitext, Springer Singapore, 2024, An introduction to arithmetic topology, 2nd edition.

BSD 不変量を共有する同型でない楕円曲線の組 の無限族について

志賀 明日香（東北大学理学研究科）

概要

Birch-Swinnerton-Dyer(BSD) 予想は、楕円曲線 $E/\mathbb{Q}$ の L 関数の $s = 1$ におけるテイラー展開の先頭項係数が、曲線の BSD 不変量 (Mordell–Weil 群、Tate–Shafarevich 群、玉河数、レギュレーター、実周期) で書けることを予測している。本論文では、同じ BSD 不変量、すべての素数における同じ小平記号、同じ最小判別式を共有する非同型楕円曲線の $\mathbb{Q}$ 上の組が無限に存在することを証明する。これは、算術同値 (同一の Dedekind ゼータ関数を持つ数体の研究) の類似と見なすことができ、同時に、二次ツイストにわたる $\mathbb{Q}$ 上の稀な「判別式双子」 ([1]) に対して、他の不変量がどこまで一致するかの研究でもある。

1 主定理

定義 1.1 $E/\mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線とする。以下の 6 つ組をバーチ・スウィナートン＝ダイアー (BSD) データと定義する：

$$\text{BSD}(E/\mathbb{Q}) \stackrel{\text{def}}{=} (L(E, s), E(\mathbb{Q}), \text{Reg}(E/\mathbb{Q}), \Omega_E, (c_{E/\mathbb{Q}_p})_p, \text{III}(E/\mathbb{Q})).$$

ここで、各成分の定義は以下の通りである。

- $L(E, s)$: $E/\mathbb{Q}$ の L 関数。
- $E(\mathbb{Q})$: $E/\mathbb{Q}$ のモデル・ヴェイユ群。これは $\mathbb{Z}^{\text{rank}(E/\mathbb{Q})} \times E(\mathbb{Q})_{\text{tor}}$ と同型である。
- $\text{Reg}(E/\mathbb{Q})$: $E/\mathbb{Q}$ のレギュレーター。
- Ω_E : E の実周期。 $\Omega_E = \int_{E(\mathbb{R})} |\omega|$ で与えられる。ただし ω は $E/\mathbb{Q}$ の大域的
最小モデルの不変微分形式である。
- $c_{E/\mathbb{Q}_p}$: 素数 p における玉河数。

- $\text{III}(E/\mathbb{Q})$: $E/\mathbb{Q}$ のテイト・シャファレヴィッチ群。予想では有限である。

$E_1 \cong E_2$ が $\mathbb{Q}$ 上で成り立つとき、 $\text{BSD}(E_1/\mathbb{Q}) = \text{BSD}(E_2/\mathbb{Q})$ が成り立つ。ここで、群の間の「 $\cong$ 」は、群として同型であることを意味する。

定理 1.2 $\text{BSD}(E_1/\mathbb{Q}) = \text{BSD}(E_2/\mathbb{Q})$ を満たし、すべての素数における小平記号と最小判別式が同じである、 $\mathbb{Q}$ 上の非同型楕円曲線の組 (E_1, E_2) が無限に存在する。

証明 志賀 [3] を参照。 □

例として、BSD 不変量と最小判別式を共有する非同型な楕円曲線の組の表を与える。

Elliptic curve	$E_1^D : y^2 = x^3 + 25350Dx^2 + 2471625D^2x$	$E_2^D : y^2 = x^3 - 50700Dx^2 + 632736000D^2x$
j-invariant	257^3	17^3
Mordell–Weil group	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
Regulator	$\frac{1}{0.209 \dots}$	$\frac{1}{0.209 \dots}$
Real period	$\frac{\sqrt{D}}{0.209 \dots}$	$\frac{\sqrt{D}}{0.209 \dots}$
Tamagawa number	$2(p=3), 2(p=5), 2(p=13), 2(p=D)$	$2(p=3), 2(p=5), 2(p=13), 2(p=D)$
Kodaira symbol	$I_0^*(p=3), III^*(p=5), III^*(p=13), I_0^*(p=D)$	$I_0^*(p=3), III^*(p=5), III^*(p=13), I_0^*(p=D)$
$\text{III}(E_1^D/\mathbb{Q})[2^\infty]$	0	0
$\text{III}(E_2^D/\mathbb{Q})$	†	†

† について、Tate–Shafarevich 群の有限性を仮定せずとも、アーベル群として $\text{III}(E_1^D/\mathbb{Q}) \cong \text{III}(E_2^D/\mathbb{Q})$ が成り立つことに注意せよ。さらに、 $\text{III}(E_1^D/\mathbb{Q})$ は必ずしも 0 とは限らない。

参考文献

- [1] A. J. Barrios, M. Brucal-Hallare, A. Deines, P. Harris, M. Roy, Prime isogenous discriminant ideal twins, arXiv:2402.19183(2024).
- [2] J. Bell. Non-isomorphic abelian varieties with the same arithmetic. R Soc Open Sci. 2025 Oct 1;12(10):250310. doi: 10.1098/rsos.250310. PMID: 41035506; PMCID: PMC12483628.
- [3] A. Shiga, Infinitely many pairs of non-isomorphic elliptic curves sharing the same BSD invariants, arXiv:2507.18574(2025).

Stirling 数と多重ゼータ (スター) 関数の非正整数点における値

篠原 健 (名古屋大学多元数理科学研究科)

本稿では石井氏との共著論文 [2] の簡単な概略を述べる。

定義 0.1 自然数 r と複素変数 $s_1, \dots, s_r$ に対し**多重ゼータ関数** (MZF) $\zeta_r(s_1, \dots, s_r)$, **多重ゼータスター関数** (MZSF) $\zeta_r^*(s_1, \dots, s_r)$ を以下で定義する。

$$\zeta_r(s_1, \dots, s_r) = \sum_{m_1, \dots, m_r \geq 1} \frac{1}{m_1^{s_1} \cdots (m_1 + \cdots + m_r)^{s_r}},$$

$$\zeta_r^*(s_1, \dots, s_r) = \sum_{m_1 \geq 1, m_2, \dots, m_r \geq 0} \frac{1}{m_1^{s_1} \cdots (m_1 + \cdots + m_r)^{s_r}}.$$

MZF と MZSF はともに次の範囲で絶対収束する。

$$\mathcal{D}_r := \{(s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r \mid \operatorname{Re}(s_{r-k+1} + \cdots + s_r) > k, k = 1, \dots, r\}.$$

命題 0.2 (cf.[1]) MZF と MZSF は全空間 $\mathbb{C}^r$ への有理型接続を持ち、極の集合は次で与えられる。

$$s_r = 1, s_{r-1} + s_r = 2, 1, 0, -2, -4, \dots,$$

$$s_{r-k+1} + \cdots + s_r \in \mathbb{Z}_{\leq k}, (k = 3, \dots, r).$$

これより一般に MZF/MZSF の非正整数点における値は ill-defined であり、実際その値は考える点への極限の取り方によって異なる。例えば次が成り立つ。

$$\zeta_2^{\text{reg}}(0, 0) := \lim_{s_1 \rightarrow 0} \lim_{s_2 \rightarrow 0} \zeta_2(s_1, s_2) = \frac{1}{3}, \quad \zeta_2^{\text{rev}}(0, 0) := \lim_{s_2 \rightarrow 0} \lim_{s_1 \rightarrow 0} \zeta_2(s_1, s_2) = \frac{5}{12}.$$

前者の値を **regular 値**、後者の値を **reverse 値**という。また一般の場合も

$$\zeta_r^{\text{reg}}(-\mathbf{l}) = \zeta_r^{\text{reg}}(-l_1, \dots, -l_r) := \lim_{s_1 \rightarrow -l_1} \cdots \lim_{s_r \rightarrow -l_r} \zeta_r(s_1, \dots, s_r),$$

$$\zeta_r^{\text{rev}}(-\mathbf{l}) = \zeta_r^{\text{rev}}(-l_1, \dots, -l_r) := \lim_{s_r \rightarrow -l_r} \cdots \lim_{s_1 \rightarrow -l_1} \zeta_r(s_1, \dots, s_r).$$

と定義する ($l_1, \dots, l_r \in \mathbb{N}_0^r$, MZSF についても同様)。これらの値や一般に種々の MZF の非正整数点における極限値の計算は容易ではない (が、もちろん複数の素晴らしい先行研究がある)。今回組み合わせ論的な考察をもとに、reverse 値の Stirling 数を用いた簡明な明示式を与えることに成功した。

定理 0.3 ([2, Theorem 3.9]) $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_r) \in \mathbb{N}_0^r$ とおく。この時次が成り立つ。

$$\zeta_r^{\text{rev}}(-\mathbf{l}) = \sum_{\substack{0 \leq k_i \leq l_i \\ 1 \leq i \leq r}} \prod_{j=1}^r S(l_j, k_j, L_{j-1} + j) \frac{(K_j + j - 1)!}{(K_{j-1} + j - 1)!} \cdot \zeta_{r+K_r}^{\text{rev}}(\mathbf{0}).$$

ここで $S(n, m, X) := \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n}{n-k} S(n-k, m) X^k$, $S(n-k, m)$ は第 2 種 Stirling 数であり、 $K_i := k_1 + \dots + k_i$, $k_0 = 0$ とおいた。

注意 0.4 第 2 種 Stirling 数は $(X)^n = \sum_{m=0}^n S(n, m)(X)_m$, $(X)_0 := 1$, $(X)_m := X(X-1)\dots(X-m+1)$ と定義され、原点における reverse 値は

$$\zeta_k^{\text{rev}}(\mathbf{0}) = (-1)^k \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_k = k \\ m_i \geq 0}} \prod_{j=1}^k \frac{B_{m_j}}{m_j!}$$

と明示的に与えられる。 B_n は n 番目の **Bernoulli 数**である ($B_1 := -1/2$ とする)。

ちなみに MZSF についても同様に reverse 値を明示的に計算できる。Theorem 0.3 の応用や、Bernoulli 数を用いた regular 値、reverse 値、一般の極限値の明示式などその他の関連する話題は [2] を参照されたい。

謝辞 ポスター発表の機会を下さったサマースクールの世話人の先生方に感謝申し上げます。

参考文献

- [1] S. Akiyama, S. Egami, and Y. Tanigawa, *Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers*, Acta Arith., **98** (2001), no.2, 107–116.
- [2] Y. Ishii and T. Shinohara, Stirling polynomials and multiple zeta (star) functions at non-positive integers, arxiv:2508.12577.

Riemann 予想下での Apostol Möbius 関数の 部分和の評価

寺田怜央 (九州大学マス・フォア・イノベーション連係学府)

概要

Apostol [1] は 1970 年に Möbius 関数の一般化として Apostol Möbius 関数を定義し, その部分和の評価を与えた. 1977 年には, Suryanarayana [4] が Riemann 予想を仮定してこの評価を改良した. 2001 年に Bege [3] はこの関数を一般化した関数を定義し, その部分和を評価した. 一方, Banerjee–Fujisawa–Minamide–Tanigawa [2] は 2023 年に無条件で Apostol の評価を改良した. 本紙では Suryanarayana の評価のさらなる改良について述べる.

1 導入

Apostol [1] は 1970 年に次の関数を定義した.

定義 正の整数 k, n に対して

$$\mu_k(n) := \begin{cases} 1 & n = 1 \text{ のとき,} \\ 0 & \text{ある素数 } p \text{ に対して } p^{k+1} \mid n \text{ のとき,} \\ (-1)^r & n = (p_1 \cdots p_r)^k \prod_{i>r} p_i^{a_i}, (0 \leq a_i < k) \text{ のとき,} \\ 1 & \text{その他} \end{cases}$$

と定め, これを位数 k の Apostol Möbius 関数という.

1977 年に Suryanarayana [4] は次を示した.

命題 Riemann 予想を仮定するとき, ある絶対定数 $A > 0$ が存在して, 任意の $x \geq 3$ に対して

$$\sum_{n \leq x} \mu_k(n) = A_k x + O\left(x^{4k/(4k^2+1)} \exp\left(A \frac{\log x}{\log \log x}\right)\right)$$

が成り立つ. 但し

$$A_k = \prod_p (1 - 2p^{-k} + p^{-k-1})$$

である.

2 主結果

次の定理は Suryanarayana [4] の方法で証明できる.

定理 Riemann 予想を仮定するとき, ある絶対定数 $A > 0$ が存在して, 任意の $x \geq 3$ に対して

$$\sum_{n \leq x} \mu_k(n) = A_k x + O\left(kx^{2/(2k+1)} \exp\left(A \frac{\log x}{\log \log x}\right)\right)$$

が成り立つ.

これは Bege の予想 [3] の k 依存版の解決と言える.

参考文献

- [1] T. M. Apostol. “Möbius functions of order k ”. In: *Pacific J. Math.* 32 (1970), pp. 21–27. ISSN: 0030-8730,1945-5844. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102977519>.
- [2] D. Banerjee et al. “A note on the partial sum of Apostol’s Möbius function”. In: *Acta Math. Hungar.* 170.2 (2023), pp. 635–644. ISSN: 0236-5294,1588-2632. DOI: 10.1007/s10474-023-01363-1. URL: <https://doi.org/10.1007/s10474-023-01363-1>.
- [3] A. Bege. “A generalization of Apostol’s Möbius functions of order k ”. In: *Publ. Math. Debrecen* 58.3 (2001), pp. 293–301.
- [4] D. Suryanarayana. “On a theorem of Apostol concerning Möbius functions of order k ”. In: *Pacific J. Math.* 68.1 (1977), pp. 277–281. ISSN: 0030-8730,1945-5844. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102817384>.

モジュラー方程式と Hauptmodul の特殊値

富山 和樹（早稲田大学基幹理工学研究科）

概要

楕円モジュラー j -関数は虚 2 次数点 (CM 点) において代数的整数の値をとる. Chen-Yui は類似の現象を一部の McKay-Thompson 級数に対して証明した. 本研究では一般モジュラー方程式を用いることで, この結果をより一般の Hauptmodul に拡張した. 本発表は筆者によるプレプリント [T25] に基づく.

1 研究の背景と結果

数論的な離散部分群 $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{R})$ について, その複素上半平面 $\mathbb{H}$ の商空間のコンパクト化 $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ が種数 0 のコンパクト Riemann 面となるとき, 離散群 Γ のモジュラー関数体は 1 つのモジュラー関数で生成されることが知られている. このようなモジュラー関数 h を種数 0 の離散群 Γ の *Hauptmodul* (*principal modular function*) とよぶ. Hauptmodul が重要な役割を果たす数学としては, 位数最大の散在型有限単純群である Monster 群についての Moonshine などが知られている.

たとえば, 楕円モジュラー j -関数はモジュラー群 $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ についての Hauptmodul であり, 最も基本的な Hauptmodul であるといえるが, その虚 2 次数点 (CM 点) における値は代数的整数となり, 代数的整数論や楕円曲線の虚数乗法論などにおいて重要な役割を果たすことは古くから知られてきた.

本研究の動機は, より一般の Hauptmodul の CM 値がもつ数論的性質を調べることであり, このような方向性では, Monster 群の Moonshine に現れる Hauptmodul (McKay-Thompson 級数) のうちの一部が, Chen-Yui [CY93] において研究されていた. 本研究ではこの結果をより一般の (すべての McKay-Thompson 級数を含むような) Hauptmodul のクラスに拡張した. 主結果は次のとおりである.

定理 1.1 種数 0 の離散群 $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{R})$ はある整数 $N \geq 1$ について合同部分群 $\Gamma_0(N)$ を含み, その Hauptmodul $h(z)$ の Fourier 係数がある円分体の整数環にとれるものとする. このとき, $\tau \in \mathbb{H}$ を $a\tau^2 + b\tau + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}, (a, N) = 1$) となる CM 点とすると, $h(\tau)$ は代数的整数である.

2 証明のアイデア

楕円モジュラー j -関数は**モジュラー方程式**とよばれる代数関係式をみたし, それにより CM 点の代数的整数性が従う. 一般の Hauptmodul は j -関数のようなモジュラー方程式をみたすとは限らないが, Cummins-Gannon は Moonshine の研究を 1 つの動機として, モジュラー方程式を円分体の Galois 群の作用で捻ることにより, Hauptmodul がみたす**一般モジュラー方程式**の概念を導入した (cf. [CG97])

主結果の証明は基本的には j -関数の場合と同様に進むが, 考える Hauptmodul を不変にする群が $SL_2(\mathbb{Z})$ を含むとは限らないことや, 円分体の Galois 作用を考慮する必要があるなどの困難が生じる. 大まかには次のようなステップで証明ができる:

- (1) 考える Hauptmodul に対して, 一般モジュラー方程式を構成 ([CG97] による).
- (2) q -展開の表示を用いて, 一般モジュラー方程式の係数が円分整数であることを示し, 最高次係数を計算する.
- (3) CM 値が一般モジュラー方程式の零点になっていることを示す.

詳細はプレプリント [T25] をご覧いただきたい.

参考文献

- [CY93] I. Chen and N. Yui, *Singular values of Thompson series*, Groups, Difference Sets, and the Monster. (1993), 255–326.
- [CG97] C. Cummins and T. Gannon, *Modular equations and the genus zero property of moonshine functions*, Invent.Math. **129** (1997), 413–443.
- [T25] K. Tomiyama, *Generalized modular equations and singular values of Hauptmoduln*, arXiv:2505.05135, (2025).

シフトに関する普遍性定理

中井啓太（名古屋大学多元数理科学研究科）

1 主結果

複素数を $s = \sigma + it$ とする. Riemann ゼータ関数の普遍性定理とは, 1975 年に Voronin [3] により証明された次の Riemann ゼータ関数による近似定理である:

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

ここで, K を $1/2 < \sigma < 1$ 内の帯領域内のコンパクトで補集合が連結な集合, f を K 上非零な連続かつ K の内部で正則な関数とし, $\varepsilon > 0$ とする. 近年, $+i\tau$ ではなく, より一般的な関数 $+i\gamma(\tau)$ に対して普遍性定理が成り立つのか否かという研究がされている. 例えば, 2022 年に Laurinćikas [1] は多項式程度の発散速度を持つ関数の組 $(\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ に対して Riemann ゼータ関数の同時普遍性定理を証明した. 例えば, $(\tau \log \tau, \dots, \tau^r \log \tau)$ や $(\tau + 1, \tau^2 + \tau + 1, \dots, \tau^r + \tau^{r-1} + \dots + 1)$ に対して Riemann ゼータ関数の同時普遍性定理が成り立つ. しかしながら, 指数関数などの任意の多項式より発散速度が真に速い関数に対しては, Laurinćikas の結果からでは普遍性定理が成り立つか否かは不明である. このような背景から 2023 年に Laurinćikas は, $\gamma(\tau) = e^\tau$ としても普遍性定理が成り立つか否かという問題を提唱した. 本稿では, この Laurinćikas の問題が同時普遍性定理にまで拡張でき証明できることを記す.

まず, 関数の集合 $\mathcal{F}$ を定義する. 関数 γ が $\mathcal{F}$ に属するとは, 次の 3 つの条件を満たすときをいう.

- (F1) ある $T_0, T_1 > 0$ が存在し, γ は $[T_0, \infty)$ から $[T_1, \infty)$ への ∞ へ発散する狭義単調増加関数である.
- (F2) γ は連続的微分可能であり, γ' は $[T_0, \infty)$ において単調増加である.
- (F3) ある正の数 α が存在し, $\alpha\gamma(\tau) \leq \tau\gamma'(\tau)$ が $\tau \geq T_0$ で成り立つ.

さらに, $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \mathcal{F}$ とし, 任意の $(c_1, \dots, c_r) \in \mathbb{R}^r \setminus \{\bar{0}\}$ に対し, $T = T(c_1, \dots, c_r) > 0$ が存在し, $c_1\gamma'_1(\tau) + \dots + c_r\gamma'_r(\tau)$ は単調かつ

$$(A1) \quad \exists m = m(c_1, \dots, c_r) > 0 \text{ s.t. } \forall \tau > T, |c_1\gamma'_1(\tau) + \dots + c_r\gamma'_r(\tau)| > m.$$

$$(A2) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma'_j(\tau)/\gamma'_{j+1}(\tau) = 0 \text{ for } j = 1, \dots, r-1.$$

の少なくともどちらかを満たすとき, $(\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ を admissible という. このとき, 本稿の主結果は以下である. 証明等は, [2] を参照してほしい.

定理 1.1 ([2]) $(\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ を admissible とする. K を実部が $1/2 < \sigma < 1$ である帯領域内のコンパクトで補集合が連結な集合, f_j ($1 \leq j \leq r$) を K 上非零な連続かつ K の内部で正則な関数とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [T, 2T] : \max_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\gamma_j(\tau)) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

が成り立つ.

例えば, (τ^τ, e^τ) , e^τ , $(e^\tau, e^{\tau^2}, \dots, e^{\tau^r})$, (e^τ, e^{τ^τ}) は admissible である. したがって, 定理 1.1 は Laurinćikas の問題の同時普遍性定理への拡張である. なお, サマースクールではもう少し一般的なゼータ関数でこの同時普遍性定理が成り立つことをポスター発表をしたが, ページの都合上省略する. さらに, この結果では多項式程度, もしくは多項式より発散速度が速いシフトを扱っているが, シフトを $(\log \tau)^d$ ($d > 1$) にしても普遍性定理が成り立つことに注意する.

参考文献

- [1] A. Laurinćikas, Joint Universality in Short Intervals with Generalized Shifts for the Riemann Zeta-Function, *Mathematics*, 2022, **10**(10), 1652.
- [2] K. Nakai, Joint universality for the Riemann zeta-function with general shifts. arXiv preprint arXiv:2312.04269, 2023.
- [3] S. M. Voronin, Theorem on the universality of the Riemann zeta-function, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **39** (1975) 475–486 (in Russian); *Math. USSR Izv.* **9** (1975), 443–453.

書名	第 32 回整数論サマースクール報告集 「ゼータ関数の解析的理論」
編集・発行	鈴木正俊（東京科学大）、中村隆（東京理科大）、青木宏樹（東京理科大）
発行日	2026 年 1 月 31 日
連絡先	〒 152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京科学大学 理学院数学系 鈴木正俊
印刷・製本	協友株式会社
