

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	部分構造合成法による振動解析
Title(English)	
著者(和文)	大熊政明
Author(English)	MASAAKI OKUMA
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:乙第1673号, 授与年月日:1987年3月31日, 学位の種別:論文博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:乙第1673号, Conferred date:1987/3/31, Degree Type:Thesis doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

部分構造合成法
による振動解析

大熊政明

目 次

	ページ
第 1 章 緒 論	1
1. 1 部分構造合成法とはなにか	1
1. 2 従来の研究	3
1. 3 本研究の目的	6
1. 4 本研究の概要	7
第 2 章 伝達関数合成法	9
2. 1 緒言	9
2. 2 K l o s t e r m a n の方法	10
2. 3 縮小インピーダンス合成法	16
2. 3. 1 理論	17
2. 3. 2 検討	21
a. 一端固定平板モデル	21
b. L型板モデル	26
c. 箱型モデル	28
2. 4 多重縮小インピーダンス合成法	30
2. 4. 1 理論	31
2. 4. 2 検討	35
a. 一端固定平板モデル	35
b. ディーゼル発電 パッケージ台盤の模型	38
2. 5 結言	44
第 3 章 モード合成法	45
3. 1 緒言	45
3. 2 B e n f i e l d の方法	46
3. 2. 1 理論	46
3. 2. 2 検討	53
a. 両端固定平板モデル	53
b. 一端固定平板モデル	63
c. 箱型モデル	65

3. 3	区分モード合成法 (拘束モードを用いる方法)	6 8
3. 3. 1	理論	6 8
3. 3. 2	検討	7 6
	a. 一端固定平板モデル (その1)	7 6
	b. 一端固定平板モデル (その2)	8 1
	c. 箱型モデル	8 4
3. 4	多重区分モード合成法	8 8
3. 4. 1	理論	8 9
3. 4. 2	検討	9 7
3. 5	有限要素法の直接適用と区分モード合成法の比較	1 0 1
3. 5. 1	4シリンダのエンジンプロック模型	1 0 1
3. 5. 2	6シリンダのエンジンプロック模型	1 0 8
3. 5. 3	有限要素形状による差	1 1 2
3. 6	不拘束モード合成法	1 1 3
3. 6. 1	剰余コンプライアンス行列を 考慮しない不拘束モード合成法の方法	1 1 4
	a. 理論	1 1 4
	b. 検討	1 1 8
3. 6. 2	剰余コンプライアンス行列 を用いる不拘束モード合成法	1 2 2
	a. 理論	1 2 2
	b. 検討	1 2 5
3. 7	区分モード合成法と縮小インピーダンス合成法の 特徴の比較	1 3 1
3. 8	結言	1 3 3
第4章 特性行列合成法		1 3 4
4. 1	緒言	1 3 4
4. 2	超要素法 (スーパーエレメント法)	1 3 5
4. 3	結合部の特性行列を用いる方法	1 3 7
4. 4	検討	1 3 9
	4. 4. 1 平板モデル	1 3 9
	4. 4. 2 3自由度モデル	1 4 2
4. 5	結言	1 5 4

第5章	モード解析における高次モードの影響の補正	155
5.1	緒言	155
5.2	従来の方法	156
5.3	H a n s t e e nの方法	158
5.4	著者の方法	161
5.5	ばね・質量系による簡単な例	169
5.6	結言	173
第6章	特性行列による系の同定	174
6.1	緒言	174
6.2	モード特性から同定する方法	177
6.3	誤差を含まない(または誤差が無視できる程非常に小さい)データに対する同定法の理論	181
6.3.1	理論	181
6.3.2	検討	186
a.	計算機による実験解析	186
b.	4測定点による3次までの同定	188
c.	5測定点による3次までの同定	189
d.	6測定点による3次までの同定	190
e.	8測定点による3次までの同定	192
f.	13測定点による3次までの同定	193
g.	精度の検討	197
6.4	誤差を含むデータからの同定	205
6.4.1	理論	205
6.4.2	シミュレーションによる検討 (その1 6自由度モデル)	213
a.	用いるデータ数と初期値設定	213
b.	誤差を混入したデータに対する 精度と収束性	216
6.4.3	シミュレーションによる検討 (その2 平板モデル)	221
6.4.4	実測データを用いた検討	225
a.	実験計測方法	226
b.	1自由度モデル	228
c.	一端固定平板	231
d.	周辺自由の円板	236
e.	誘導電動機固定子鉄心	242

6. 5	結言	2 4 6
第7章	実機への適用	2 4 7
7. 1	緒言	2 4 7
7. 2	マシニングセンタ	2 4 8
7. 2. 1	実験方法	2 4 8
7. 2. 2	実験から得たモード特性の取り扱い	2 4 9
7. 2. 3	マシニングセンタの分割方法	2 6 1
7. 2. 4	部分構造の解析	2 6 4
	a. コラムの解析	2 6 4
	b. ベースの解析	2 6 9
7. 2. 5	ベースとサドルの結合系	2 7 7
7. 2. 6	コラム・ベース・サドルの結合系	2 8 9
7. 3	クランク軸・フライホイール系	2 9 8
7. 3. 1	モデル化	2 9 8
7. 3. 2	モード合成法による解析	3 0 0
7. 3. 3	特性行列合成法による解析	3 0 2
7. 4	縦型プロセスポンプ	3 0 7
7. 5	横型連続遠心分離機	3 2 1
7. 5. 1	実験方法	3 2 1
7. 5. 2	遠心分離機のモデル化	3 2 2
7. 5. 3	結果と検討	3 2 7
7. 6	結言	3 3 2
第8章	結 論	3 3 4
8. 1	本研究の結論	3 3 4
8. 2	今後の課題	3 3 8
[付録]		3 4 0
1.	使用した固有値計算用のサブルーチンについて	3 4 0
2.	モード特性の物理的意味の解釈	3 4 2
	謝 辞	3 5 3

本論文中で用いられている主な記号を記す。

なお、同じ文字でも誤解をまねかない箇所においては、他の意味を表す記号として、便宜的にそこでの記号の意味を記しながら用いているものもある。

J	: 虚数単位
$[K]$: 剛性行列
$[M]$: 質量行列
$[C]$: 減衰行列
$\{F\}$: 励振力ベクトル
$\{\delta\}$: 変位ベクトル
$\{\dot{\delta}\}$: 速度ベクトル
$\{\ddot{\delta}\}$: 加速度ベクトル
λ	: 固有値
$\{\phi\}$: 固有モードベクトル
ϕ_j	: 固有モード成分 (固有モードベクトルの上から j 番目成分)
$[\phi]$: 固有モード行列
$\{\xi\}$: 寄与率を表すベクトル
ω	: 角振動数
k_i	: 第 i 次のモード剛性
m_i	: 第 i 次のモード質量
c_i	: 第 i 次のモード減衰
ζ_i	: 第 i 次のモード減衰比
f_i	: 第 i 次の不減衰固有振動数
G	: 伝達関数

第1章 緒 論

1. 1 部分構造合成法とはなにか

有限要素法によって機械構造物の振動解析を行おうとすれば、解析対象物を適当な種類の有限要素の連続体としてモデル化し、その形状および材質などに関するデータ（節点の座標値、材料定数、有限要素の構成節点番号、境界条件など）を作成し、有限要素法のプログラムの実行手順のマニュアルどおりにコンピュータを操作するだけで解析結果を得ることができる。そのため、従来の古典的な解析手法に較べてはるかに実用的な振動解析が可能になり、従来はその専門家しかできなかった振動解析を、今ではあまり振動という物理現象を理解していない人でも一応結果を得ることができるようになった。このように有限要素法は、振動解析の分野にひじょうに大きな貢献をしてきた。

しかし、このような実用的な手法が登場すると、今まではあまりにも複雑で大規模な機械構造物であるために振動解析をするなどという考えがまったくうかばなかったような様々な機械構造物への適用も当然試みられるようになった。また、そのような要求もたいへん強くなった。その結果、近年ではその要求を満足させるには有限要素法の直接適用では困難となる場合もしばしば生じてきた。

その理由としては、複雑な形状の構造物を精密にモデル化するためには多くの節点と有限要素を必要とするので特性行列（質量行列と剛性行列）の自由度が大きくなり、計算機の必要容量が不足したり、計算時間がかかり過ぎることがあげられる。また、一般に機械は多くの部分構造（もしくは部品）からなりたっており、全体を一体として解析したのでは、動特性（振動特性）の改善への目安を立てにくいという問題点もある。

このような問題点を解決するための有望な方法として、著者は本研究で”部分構造合成法”と総称する一群の方法を提案する。そこで、まず以下に、部分構造合成法とは何かを説明する。

部分構造合成法の概略は次の通りである。まず、解析対象構造物全体（以下、全系と呼ぶ）をいくつかの部分構造（以下、分系と呼ぶ）に分割する。この際、全系を構成する実際の部品単体毎に分割してもよいし、本来は一体構造物であるものを解析上でいくつかに分けてもよい。

さて、このように分割された各分系毎の動特性を、有限要素法などの解析手法や振動試験によって求める。そして、それらの動特性を、分系が全系を構成している物理的結合状況に対応するように合成し、全系に対する運動方程式を作成して解けば、全系の固有振動数、固有モード、強制振動応答などが求められる。さらに、各分系の内部領域のくわしい解析が知りたい場合には、全系について得られた結果から分系内部の詳細計算を行う。

この解析過程からわかるように、分系への分割は何重にも繰り返すことができる。すなわち、全系を分割してできた分系の規模がまた有限要素法などを直接適用することが困難な場合には、その分系をさらにいくつかの小さな分系に再分割する。この行程を多重に繰り返して最小単位の m 次分系（ m 重の繰り返し分割で作成された分系）まで小規模化し、続いて m 次分系の解析結果を利用して次々に一段階規模の大きい分系の解析を行っていき、最終的に全系の解析を行うことができる。

部分構造合成法の主な特色として、次のような点をあげることができる。

まず第1の特色は計算時間が短いことである。有限要素法の汎用プログラムとして世界で信頼されているものの1つであるMSC-NASTRANを利用すれば、技術的には何万自由度の振動解析も可能であるが、現実的には膨大な計算時間と巨額の計算費用がかかってしまう。部分構造合成法は、本研究の中で行っている区分モード合成法とMSC-NASTRANとの計算時間の比較の例からもわかるように、この最も重要な問題点を相当大幅に改善できる。

第2の特色は計算機容量が少なくて済む点である。その結果、大型計算機を用いて行った従来の解析計算をミニコンピュータなどのより小型の計算機で処理できる。また、同一規模の計算機を使用する場合には、より大自由度系の解析が可能となる。

第3の特色は、分系の動特性を求める段階は有限要素法や伝達行列法などの従来の計算方法を用いてもよいし、実験的に行ってもよいことである。すなわち、ある分系は理論的に、他の分系は実験的に動特性を求め、それらを一体化して全系の解析を行うことができる。

第4は、一部分の分系の設計変更を伴う再計算の効率が非常に良い点である。各分系の動特性に関する情報はデータベース化して保存できるので、ある分系だけの設計変更に対しては、その分系だけについて動特性を求め直し、すでに保有する他の分系の情報と結合することによって設計変更後の全系の解析を行うことができる。この特徴から、部分構造合成法は設計段階で利用される解析手法として適している。

1. 2 従来の研究

部分構造合成法に関する従来の研究を大まかに整理すると、次のようになるようである。

まず、主な方法を大別すると3つのグループに分けられる。第1は伝達関数合成法と呼ばれる方法、第2はモード合成法と呼ばれる方法および第3は特性行列合成法と呼ばれる方法である。その他、これらのグループに属さない種類のいくつかの方法が研究開発されている。

伝達関数合成法とは、各分系単体について実験的もしくは理論的にその結合点間の伝達関数を求め、それらの伝達関数を統合することによって全系の振動挙動を把握しようとする方法である。この種の方法としては1969年にKlostermanが、"Building Block Approach"⁽¹⁾(以下、BBAと略記)と呼んでいる提案したものが最初であると思われる。この方法では、各分系の伝達関数を実験データから得たモード特性(モード剛性、モード質量、モード減衰比などのパラメータの総称)として入力利用するのに適している。この方法の理論(統合の仕方)は理解しやすく、部分構造合成法の基本的概念を理解するのに都合がよい。ただし陽解法では、分系の結合の仕方によって、全系の方程式の形が異なってくるので、使いやすい汎用プログラムを作成することは多少困難である。BBAの適用を試みる研究としてはいくつかあるが、例えば阪田らの報告⁽²⁾や村井らの研究^{(3)~(7)}をあげることができる。しかし、現在においても、実用上いくつかの重要な問題点があり、この方法を実際使用し満足する結果を得るのはひじょうに難しい、というのが世間の偽らざる評であろう。また、成功例を示す報告の中にも、例えば結合部分をこのように取り扱うとうまくいき、こうするとダメになる、というような細部のノウハウはほとんど述べられておらず、この方法を第三者が有効に利用できるための助けとはあまりないような気もする。

初めから理論的にすすめる伝達関数合成法としては、例えばBermanの方法⁽⁸⁾があった。この方法は、分系を主系と従系に分類し、従系の縮小インピーダンスを作成し、それを主系の自由度の該当するところに重合させて解析するというものである。また縮小インピーダンスを作成する行程で逆行列を用いている。このことから、少し複雑な系では、莫大な計算機容量と計算時間を必要とする。

モード合成法を大まかに説明すれば、各分系について求めたいいくつかの固有モードの一次結合の形で全系の変位場を表現し、解析する方法である。この種の考え方の源としては、部分構造合成法ではないが、1908年に発表されたRitzの方法をあげることができると思われる。初期のモード合成法としてはHunn,⁽⁹⁾ Macneal,⁽¹⁰⁾ Hurty,⁽¹¹⁾ Craig⁽¹²⁾らの方法があげられる。Craigらの方法はHurtyの方法を改善したものであり、さらにそれを改良した方法としてBenfield⁽¹³⁾らの方法が位置づけられる。これらの方法では、分系を主系と従系に分類し、主系の変位は従系を切り放した状態での固有モードで表現し、一方従系の変位は主系の

変位に伴って生じる変位と従系自身の固有モードの和で表す。そのため、主系同志または従系同志が直接結合することは許されず、汎用プログラムとしては不便である。Bajan⁽¹⁴⁾らも同様の方法を提案しており、この方法では分系の採用モードの選択の最適化を組み込んでいる。その他、伝達関数合成法のBBAに対応するモード型のBBAとでも呼ぶような方法としてKlostermanもモード合成法⁽¹⁵⁾を提案している。それ以外のモード合成法の研究としてはGladwell⁽¹⁶⁾、Goldman⁽¹⁷⁾、Hou⁽¹⁸⁾らの報告や、Macnealのハイブリッド法⁽¹⁹⁾などがある。モード合成法全体についての評論文としては、Hurtyらのもの⁽²⁰⁾や西村の報告⁽²¹⁾などがある。

さて、部分構造合成法に限らず、いわゆるモード解析全般において、強制振動応答に対する剰余成分の影響が大きいことは知られていたが、この影響を効率よく、かつ、精度よく補正する方法を、1979年にHansteen⁽²²⁾がはじめて発表している。それ以前は、解析対象周波数範囲よりはるかに高周波数域の固有モードまで計算し、余分に求められた高周波数域の固有モードを用いて、剰余成分を近似計算していた。この方法では、高次までの多くの固有モードを求める必要から、計算負荷が大きい。また、剰余コンプライアンス行列（不正確ではあるが、剰余剛性行列とも呼ばれる）の自由度より少ない数の固有モードを用いたのでは剰余コンプライアンス行列のランクが落ち、逆行列を計算できない。Hansteenは、解析対象周波数範囲内の固有モードのみを用いて、効率よくかつ精度よい剰余コンプライアンス行列を求める方法を提案した。その有効性を島らが報告⁽²³⁾している。ところが、部分構造合成法にこの技術を直接使用することは困難な場合が多い。なぜならば、Hansteenの方法は剛体運動の発生する境界条件下（周辺自由など）の構造物に対しては適用が困難であるが、部分構造合成法においては、ほとんどの分系は周辺自由境界条件となるからである。この点の改善も望まれていた。

特性行列合成法としては、純解析的な方法として超要素法（Super Element Method）があり、この方法を利用した適用例の報告の例としては、例えば西岡らの報告⁽²⁴⁾をあげることができる。この方法では、特性行列の縮小にGuyanの静縮小⁽²⁵⁾を用いており、かつ、その近似の補正対策を施していないので、残す自由度の選択方法などかなりのノウハウが必要であり、実用に際して難しい点がある。一方、実験データを利用する特性行列合成法は、著者の知る限りではまだ見当たらないようである。この理由としては、実験データから特性行列を同定することがひじょうに困難であったからであろう。実験から直接特性行列を同定する技術の研究としては、Leuridan⁽²⁶⁾ら⁽²⁶⁾をあげることができ、日本では花田らの報告⁽²⁷⁾がある。しかし、Leuridanらは、いくつかの報告は出したものの、結局は実測データから特性行列を同定することに成功しなかったと聞いている。実験データからの振動特性の抽出方法としては、広くモード特性を求める方法が研究され、曲線適合と呼ばれてきた。そして、その結果を利用する方法としては、前記の伝達関数型かモード合成法であった。モード特性から特性行列を導き出して特性行列合成法を利用するという考え方は、著者の知る限りではまだなかったようである。しかし、もし何らかの方法で分系の特性行列が準備で

できれば、特性行列合成法は合成のアルゴリズムが単純であり、大変有効な解析方法となることが期待される。

その他の種類の方法としては、羽根車などの周期対称構造物専用の効率良い解法として周期対称法⁽²⁸⁾、結合自由度を1つずつ次々に結合していく段階を高次代数方程式を利用して解いていき、最終的に全系の解析をするというダイヤコブティクス法⁽²⁹⁾などがある。

1. 3 本研究の目的

従来のモード解析は、有限要素法などによる強制振動応答を効率的に計算しようとするものに過ぎなかった。しかし、モード解析法を実験的振動解析に導入する動きが1970年代から始まり、実験モード解析という新しい分野が確立した。さらに、部分構造物についての振動実験結果からモード特性を求め、それらを重ね合わせることによって構造物全体の振動特性を求めようとする実験的方法が提案研究され始め、実験モード解析の新しい利用方法が始まった。

本研究では、部分構造の動特性から全体系の振動を理論や実験によって解析しようとする従来の方法を総合的に検討し、同時に、従来にはなかった新しいいくつかの方法を著者自身で開発する。そして、それらを図1-3-1に示すように体系的に分類し、部分構造合成法と総称する。大きなグループとしては、伝達関数型、モード型、特性行列型、およびその他の4グループに分類し、これらのグループ全般にわたって、従来の方法が有していたいろいろな問題点を解決改善するとともに、多くの新しい方法や手段を提案し、それらの実用性と有効性を検証する。そして、部分構造合成法を体系的な技術にまで発展させることが本研究の目的である。

なお、部分構造合成法は[1. 1]の「部分構造合成法とはなにか」において記したような特徴を有しているので、設計段階における動特性解析と設計変更シミュレーションに用いるのに適している。このことは、部分構造合成法がCAE (Computer Aided Engineering) と呼ばれるシステムチックな総合技術の中における解析部門の1単位として用いられるのにたいへん便利なことをしめしている。したがって部分構造合成法は、CAEの発展のためにも1つの重要な研究であるとの認識も本研究を行うための動機の1つとなっている。

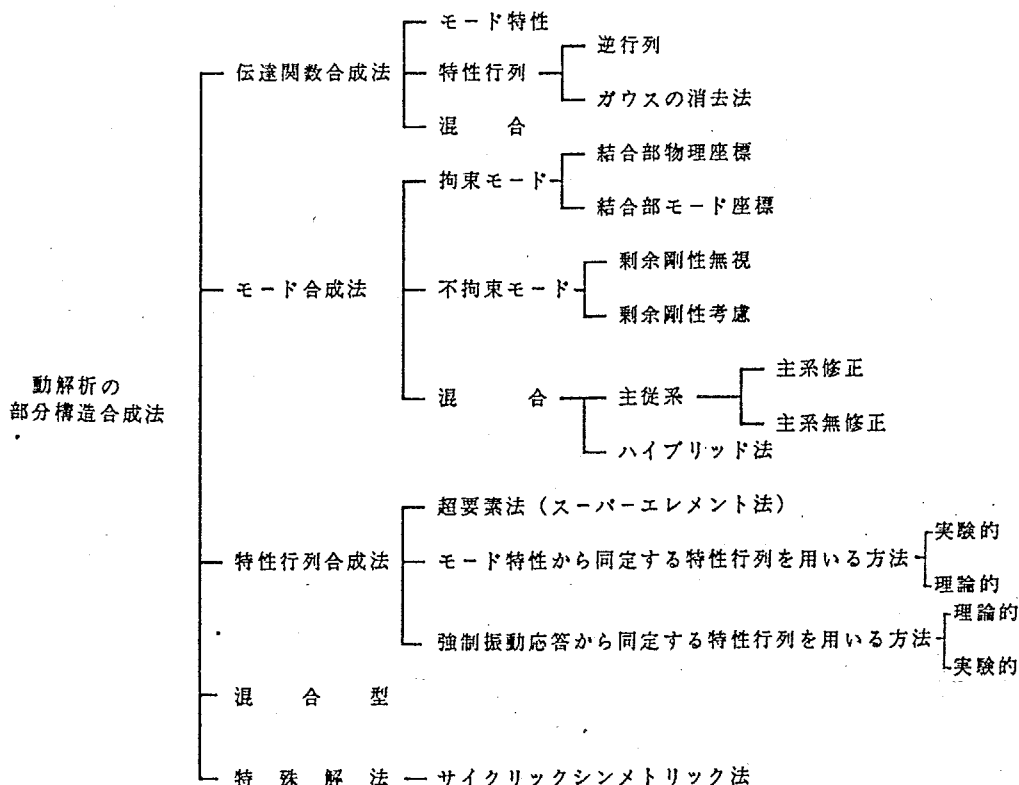


図1-3-1 動解析の主な部分構造合成法

1. 4 本研究の概要

機械構造物の振動解析分野における部分構造合成法に関する従来の研究および現状、さらに、それらと関連させて本研究の目的は前記したとおりである。ここでは、本研究の内容の概要を述べる。

第2章では、伝達関数合成法を提案している。

まず、この種の方法の基本的、かつ、代表的な方法の1つであるKlostermanの方法の理論説明を行う。これにより、伝達関数合成法の基本理論を容易に理解できる。また、この方法は第7章の”実機への適用”のなかで、マシニングセンターの主要構造物系の解析に利用する。

次に、有限要素法（質量行列と剛性行列を作成するプロセス）を利用するのに便利な伝達関数合成法の1つとして、縮小インピーダンス合成法（RIMと略記）と、そのアルゴリズムを多重化した多重縮小インピーダンス合成法（MRIMと略記）を開発し、提案する。両方法とも、その理論説明の後に、いくつかのモデルに適用することによって、その方法の妥当性（解析精度など）と有効性（計算時間や計算容量など）を検討する。

第3章では、モード合成法を提案している。

まず、拘束モード型で、主系従系の区別がある方法の1つであるBenfieldの方法の理論説明を行い、その方法の検討を行う。

次に、この方法の欠点であった”主系従系の区別”を全く無くすように改良した区分モード合成法（CMSと略記）を開発提案する。さらに、その方法のアルゴリズムを多重化することによって多重区分モード合成法（MCMSと略記）を開発し、提案する。そして、これらの方法の妥当性と有効性を明らかにするために、いくつかのモデルを用いて検討を行う。

不拘束モード型の方法では、剰余コンプライアンスの影響を考慮する方法と考慮しない方法をそれぞれ1つずつ取り上げ、その解析精度などを検討する。この検討のなかで、剰余コンプライアンスが解析精度に大きく影響することを明らかにし、剰余コンプライアンスを精度良く、かつ、効率良く見積る方法を開発する。この方法の開発によって、剰余コンプライアンスの影響を考慮する方法の解析精度を有限要素法や拘束モード型の方法と同一の高いレベルにまで向上させることができる。

第4章では、特性行列合成法を提案している。

この方法では、分系についてなんらかの方法によって求めたモード特性もしくは振動応答から、結合自由度に対応する小さな特性行列を作成し、それらを合成することによって全系の解析を行う方法である。大規模な構造物系の解析のプロセスのなかでこの方法を利用すると、解析プロセスをむやみに複雑にせず済み、有効であることを明らかにする。

第5章では、モード解析における高次モードの影響の新しい補正方法を提案している。従来の方法では、計算効率が悪く、かつ、計算精度も悪かった。そこで、Hansteenはこれらの欠点を改善した方法を考案した。しかし、この方法は部分構造合成法に利用することは困難な場合がほとんどである。なぜなら、この方法では周辺自由状態の構造物にはそのままでは適用できないからである。そこで、本章では、そのような境界条件の構造物の高次モードの補正方法（剰余コンプライアンス行列の求め方）を提案する。この方法は、不拘束モード型の部分構造合成法において利用されることで、特にその有効性が発揮される。

第6章では、特性行列（質量行列、減衰行列、および剛性行列の総称名）を決定することによって対象構造物の系の同定を行う実験的な方法を提案している。

同定方法としては、モード特性から特性行列を決定する方法と、振動実験結果（伝達関数や強制振動応答）から直接特性行列を決定する方法を提案する。そして、各提案方法について、計算機シミュレーションや実測データを用いて検討を行い、理論の妥当性や有用性を明らかにする。

第7章では、前章までにおいて提案してきた方法を実際の機械構造物の解析に適用した例を示す。そのなかで、それらの方法の実用上の有効性や実用化における考慮点などを検討する。

第8章は、本研究の結論である。

ここでは、本研究において得られた成果の結論を述べるとともに、部分構造合成法に関する今後の課題について述べる。

付録では、2つの事柄を記している。まず本研究において作成した部分構造合成法のなかで使用した固有値解析のサブルーチンの計算速度についてのデータをのせている。次に、モード質量、モード剛性およびモード減衰と呼ばれるモード特性の物理的な意味付けをしている。

第2章 伝達関数合成法

2.1 緒言

本章では、伝達関数合成法^{<1>}の一種である縮小インピーダンス合成法^{<2>}と多重縮小インピーダンス合成法^{<3>}を開発し、提案する。

また、伝達関数合成法とはどのような方法であるかを説明するために、Klosterman⁽¹⁾が提案した方法を説明する。この方法は伝達関数合成法の代表的な方法であり、理解が容易である。伝達関数合成法は、第7章の実機への適用で、工作機械の一種であるマシニングセンターの解析^{<13><14>}に利用されている。

第1章の緒論で述べているように、部分構造合成法は従来の有限要素法や伝達マトリックス法などでは解析が困難となるような複雑で大規模な系や構造物の振動解析を効率良く行う方法として研究開発されてきた。

部分構造合成法の中で、もっとも早くから研究開発された方法が伝達関数合成法である。

この方法では、各部分構造についてその結合自由度間の伝達関数をそれぞれ独立に求めておき、それらの伝達関数を結合することによって解析対象物の振動特性を計算する。伝達関数は周波数の関数となっているので、この方法では各周波数毎に強制振動応答を計算する。そこで、固有振動数や固有モードを直接求めることはできない。しかし、(1) 励振点と応答点さらに各部分構造の結合部の伝達関数が求まっているので結合自由度が少ない場合には少ない計算機容量と簡単な計算手順で全体系の振動解析ができる、(2) 実験で得られた伝達関数と解析的に求めた伝達関数を全く同等に混合して用いることができる、(3) 伝達関数の統合の過程では理論的に誤差を生じない、などの利点を有しているため、適切に用いればその有用性は大きいと思われる。

2.2 Klostermanの方法

説明を簡潔にするために、図2-2-1に示すような2つの分系からなる構造物について解析方法を示す。

分系Aと分系Bは領域Cで結合しており、その結合自由度をnとする。いま、周波数 ω での点iと点j間の伝達関数を G_{ij} で表すことにする。ただし、ここで取り扱う伝達関数はコンプライアンス（変位/励振力）とする。ちなみに、通常よく用いられるその他の伝達関数としてはモビリティ（速度変位/励振力）、アクセラランス（加速度変位/励振力）などがある。

さて、そこで点jを励振力 F_j で励振したときの点iの応答変位（振幅） X_i は、

$$X_i = G_{ij} F_j \quad (2-2-1)$$

と表される。（線形系であればマックスウェルの相反定理が成立するので点iを励振力 F_j で励振したときの点jの応答 X_j は $X_j = G_{ji} F_j = G_{ij} F_j$ となる。）

線形な系であれば重ね合わせの原理が成立するために、点jを励振力 F_j 、点kを励振力 F_k で励振したときの点iの応答は

$$X_i = G_{ij} F_j + G_{ik} F_k \quad (2-2-2)$$

と表される。

そこで、図2-2-1の構造物のうち分系A単体について考えてみる。励振力は点fに F_f の力で作用し、分系Bから結合部Cの自由度のところまで内力として受ける作用力（未知）を R_i ($i = 1 \sim n$) とすると、結合領域Cの変位 X_i ($i = 1 \sim n$) は

$$\begin{Bmatrix} X_1^A \\ X_2^A \\ \vdots \\ X_n^A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}^A & & & \\ & G_{21}^A & & \\ & & G_{22}^A & \\ & & \vdots & \ddots \\ G_{n1}^A & G_{n2}^A & \cdots & G_{nn}^A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} G_{1f}^A \\ G_{2f}^A \\ \vdots \\ G_{nf}^A \end{Bmatrix} F_f \quad (2-2-3)$$

と表される。ここで、伝達関数 G_{ij} の肩に付いている添字はその分系単体の伝達関数の値を意味する。すなわち、式(2-2-3)においては添字Aによって分系A単体について得た伝達関数を示す。

分系Bについても分系Aと同様に考える。ただし、分系Bには応答変位（振幅）を測定（観測）したい点 r が内部領域にあり、外力（励振力）は直接作用しないとする。すると、分系Bに作用する力は結合部Cを介して働く内力（分系Aとの間に生じる作用反作用関係の力）のみであり、結合部Cの変位は

$$\begin{Bmatrix} X_1^B \\ X_2^B \\ \vdots \\ X_n^B \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_{11}^B & & & \\ & G_{22}^B & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_{nn}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix} \quad (2-2-4)$$

SYM

と表され、観測点 r の変位は

$$X_r^B = - \left[G_{r1}^B \ G_{r2}^B \ \dots \ G_{rn}^B \right] \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix} \quad (2-2-5)$$

と表される。

以上で分系Aと分系Bについてそれぞれ単体の「力-変位」関係式ができたので、それらをつ結びつける。まず、剛結合の場合には分系Aの結合部Cの変位と分系Bの結合部Cの変位は等しいので、

$$\begin{Bmatrix} X_1^A \\ X_2^A \\ \vdots \\ X_n^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^B \\ X_2^B \\ \vdots \\ X_n^B \end{Bmatrix} \quad (2-2-6)$$

式(2-2-6)に式(2-2-3)と式(2-2-4)を代入し、未知ベクトルである内力ベクトル $\{R_1 \ R_2 \ R_3 \ \dots \ R_n\}^T$ の項を左辺にして整理すると、

$$\begin{bmatrix} G_{11}^A + G_{11}^B & & & \\ & G_{22}^A + G_{22}^B & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_{nn}^A + G_{nn}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} G_{1f}^A \\ G_{2f}^A \\ \vdots \\ G_{nf}^A \end{Bmatrix} F_f \quad (2-2-7)$$

SYM

のようになる。ここで $S_i = R_i / F_f$ (これを内外力比と呼ぶ) とすれば、式 (2-2-7) は

$$\begin{bmatrix} G_{11}^A + G_{11}^B & & & \\ G_{21}^A + G_{21}^B & G_{22}^A + G_{22}^B & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^A + G_{n1}^B & G_{n2}^A + G_{n2}^B & \cdots & G_{nn}^A + G_{nn}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} G_{1f}^A \\ G_{2f}^A \\ \vdots \\ G_{nf}^A \end{Bmatrix} \quad (2-2-8)$$

となる。この連立一次方程式を解くことによって内外力比ベクトル $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ を求める。ここで内外力比を用いる利点は、連立一次方程式 (2-2-8) の左辺係数行列の三角分解の結果 (もしくは逆行列) を一度計算し保存すれば、右辺ベクトルを換えるだけで異なる励振点に対する値 (内外力比) も簡単に短時間で求めることができる、という点である。

さて、式 (2-2-8) で内外力比ベクトルが求められたら、結合領域 C の変位は式 (2-2-3) もしくは式 (2-2-4) から

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X_1^A \\ X_2^A \\ \vdots \\ X_n^A \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} G_{11}^A & & & \\ G_{21}^A & G_{22}^A & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^A & G_{n2}^A & \cdots & G_{nn}^A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{Bmatrix} F_f + \begin{Bmatrix} G_{1f}^A \\ G_{2f}^A \\ \vdots \\ G_{nf}^A \end{Bmatrix} F_f \\ &= \begin{Bmatrix} X_1^B \\ X_2^B \\ \vdots \\ X_n^B \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_{11}^B & & & \\ G_{21}^B & G_{22}^B & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^B & G_{n2}^B & \cdots & G_{nn}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{Bmatrix} F_f \end{aligned} \quad (2-2-9)$$

のように求められる。さらに、分系 B の内部領域にある観測点 r の応答も

$$X_r^B = - \begin{bmatrix} G_{r1}^B & G_{r2}^B & \cdots & G_{rn}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{Bmatrix} F_f \quad (2-2-10)$$

によって簡単に求めることができる。分系A内の任意の点gの応答も簡単に求められることは以上のことから明白なので省略する。

次に結合部が弾性結合の場合を考える。ただしここでは最も基本的な結合として、バネ定数 k_i で表されるバネと、粘性減衰係数 c_i で表される減衰器が図2-2-2に示すように並列に結合している場合について述べる。それぞれの結合点(1~n)に取りつけられているバネ・減衰は互いに他の結合点に取りつけられているものと連成していないとすれば、

$$(k_i + j\omega C_i)(X_i^B - X_i^A) = R_i^A = R_i^B \quad (2-2-11)$$

のように結合自由度 i は表されるので、結合自由度 1~n についての式(2-2-11)を1つの式にまとめると、

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{k_1 + j\omega C_1} & & & \\ & \frac{1}{k_2 + j\omega C_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \frac{1}{k_n + j\omega C_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1^A \\ R_2^A \\ \vdots \\ R_n^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^B \\ X_2^B \\ \vdots \\ X_n^B \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} X_1^A \\ X_2^A \\ \vdots \\ X_n^A \end{Bmatrix} \quad (2-2-12)$$

となる。

そこで、式(2-2-12)に式(2-2-3)と式(2-2-4)を代入し整理すると、

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1 + j\omega C_1} & & & \\ & \frac{1}{k_2 + j\omega C_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \frac{1}{k_n + j\omega C_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11}^A & & & \\ G_{21}^A & G_{22}^A & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^A & G_{n2}^A & \dots & G_{nn}^A \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} G_{11}^B & & & \\ G_{21}^B & G_{22}^B & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^B & G_{n2}^B & \dots & G_{nn}^B \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} G_{1f}^A \\ G_{2f}^A \\ \vdots \\ G_{nf}^A \end{Bmatrix} \quad (2-2-13)$$

となる。式(2-2-13)の連立一次方程式を解いて未知内外力比ベクトルを

求めれば、それ以後の各点の応答を求める計算手順は剛体結合の場合に説明したのと全く同じである。

また、剛体結合が弾性結合の特別な場合であることは、式(2-2-13)において $k_i \rightarrow \infty$ 、 $c_i \rightarrow \infty$ の極限值にすれば式(2-2-7)に帰着することから理解できる。

結合部の自由度間に連成関係をつくり出す結合の仕方を行う場合には、式(2-2-12)に相当する式の係数行列は対角とはならず、多少複雑になる。しかし、このような場合についてもただ一部の係数行列の中身が複雑になるだけで計算手順上は全く前記どおりである。

または、このような場合には次のように考えると容易である。図2-2-3に示すように、結合部材が分系Aと分系Bの結合自由度の連成をつくり出す場合には、結合部材も1つの分系とみなし、3個の分系が互いに剛結合している系とみなして前記の剛結合の場合の説明を分系3個で展開すればよい。

分系の伝達関数を求める手段としては、実験で求める方法と計算で求める方法が考えられる。

実験で求める方法の場合には、測定された生データ(伝達関数)を直接用いることもできるが、通常は実験誤差の影響を取り除いたスムーズな伝達関数を用いられる。すなわち、測定されたデータから曲線適合の手段によってモード特性を求め、得られたモード特性を用いて計算し直された伝達関数を用いる。

計算で求める方法の場合には、有限要素法の連立方程式による解法や縮小インピーダンス合成法などを用いて各周波数において $(K - \omega M)\{X\} = \{F\}$ の連立一次方程式を解く形のインピーダンスを求める方法(インピーダンス型の方法)と、有限要素法の固有値解析・モード解析手法や区分モード合成法などを用いて求める方法(モード型の方法)が考えられる。

計算効率の点ではモード型の方法の方がインピーダンス型の方法よりはるかに優れている。特に、分系単体自体もかなり複雑な場合には分系単体について区分モード合成法などのモード型の部分構造合成法を用いて効率良く計算できるのでその優位差は大きくなる。

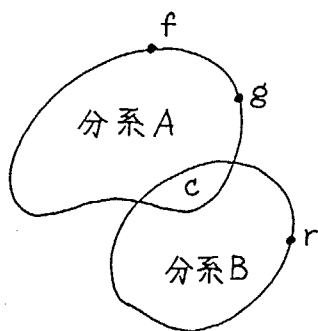


図 2 - 2 - 1 2分系から成る構造物 (剛結合)

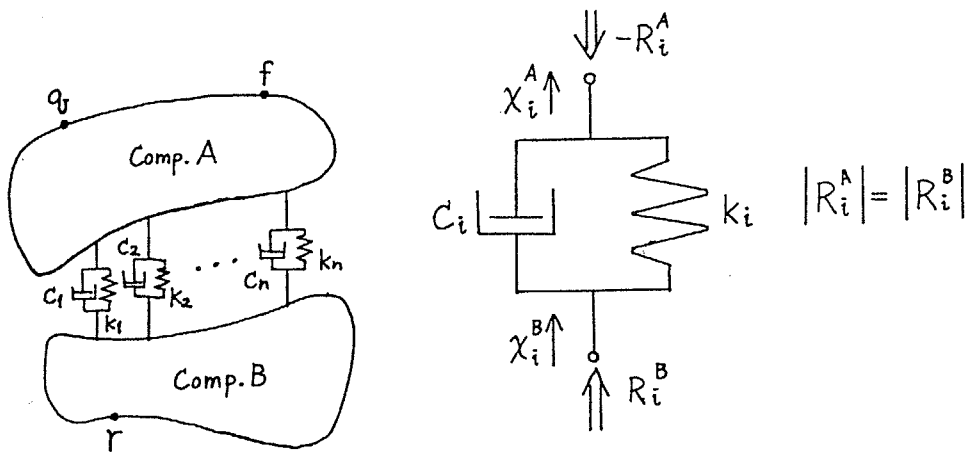


図 2 - 2 - 2 2分系から成る構造物 (弾性結合)

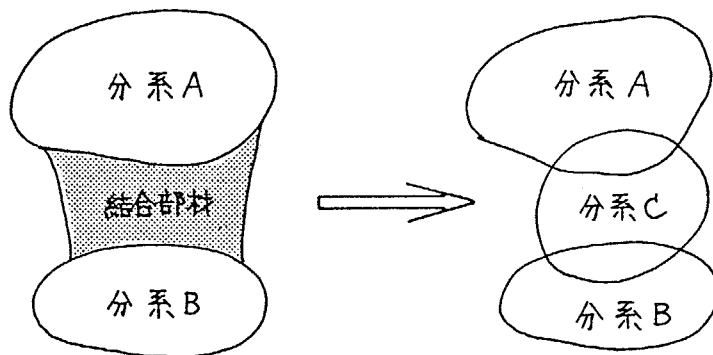


図 2 - 2 - 3 結合部材の扱い方の例

2. 3 縮小インピーダンス合成法

2. 2節では、いわゆるビルディングブロック法について述べた。この方法は、部分構造の機械インピーダンスを実物の振動試験により求めることを基本としているが、代わりにこれを有限要素法によって計算することも可能である。この場合には、まず部分構造を有限要素分割でモデル化して固有値解析を行い、つぎに算出した固有モードを用いてモード解析を行って強制振動応答を求め、その周波数スペクトル（伝達関数）から機械インピーダンスを計算すればよい。

しかし、このような計算を全部分構造について行うことは、比較的簡単な構造物でさえも大型計算機を用いることによってのみ可能であり、多くの場合かなりの計算費用を必要とする。そして、部分構造が少し複雑になると実用上この計算は困難になることも多いので、どうしても実験によるデータに頼らざるを得なかった。

そこで本節では、有限要素法の利用に適した伝達関数型の部分構造合成法の一つとして、縮小インピーダンス合成法を提案し、強制振動応答解析への適用を試みる。

この方法は、まず構造物全体（全系と呼ぶ）をいくつかの部分構造（分系と呼ぶ）に分離し、各分系を有限要素法などにより定式化して機械インピーダンスを求め、それらを縮小し結合することにより全系の振動応答を求めようとするものである。この方法では、従来の方法と異なり、分系の機械インピーダンスを求める際に固有値計算もモード解析も行う必要がない。すなわち、質量、減衰および剛性を表す分系の特性行列をガウスの消去法の前進過程を用いて縮小するだけで直接に、しかも簡単に分系同志の結合点間の動剛性（これを縮小インピーダンスと名づける）を求めることができる。しかもこれらを結合して全系の応答を求める際にも、同一の縮小過程を適用するだけでよい。つまり有限要素法のうち定式化の部分だけを用いるため、有限要素法とビルディングブロック法をそのまま結びつけた従来の方法よりもはるかに計算時間が少なくて済む。また、有限要素法以外の解析方法や振動試験で求めた分系の機械インピーダンスを縮小インピーダンス合成法に組み込むことも可能である。

2. 3. 1 理論

まず、複雑な構造物を有限要素法や伝達マトリックス法などの従来の解析方法により定式化が可能な程度の複雑さを有するいくつかの部分構造（分系）にわけ、そのうちの一つの分系だけに注目し、その分系のうち隣接する他の分系と接続する領域（点、線、面あるいはそれらの集合）を領域 b と呼ぶことにする。外部からの強制振動が作用する部分、それに対応する応答を知りたい部分あるいはそれらの部分を含む分系の領域も領域 b に含ませる。分系内の領域 b 以外の領域を領域 a と呼ぶことにする。

さて、この分系を他のすべての分系から切り離して、それに有限要素法を適用して運動方程式を作成すれば

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (2-3-1)$$

ここで $[M]$ 、 $[C]$ および $[K]$ は、それぞれ質量行列、減衰行列および剛性行列を表す。また、 $\{x\}$ は離散化した分系の変位を表し、 $\{F\}$ は作用力ベクトルを表す。

作用力 $\{F\}$ が角振動数 ω の調和関数

$$\{F\} = \{F_0\} e^{j\omega t} \quad (2-3-2)$$

で表されるとすれば、この分系の応答は定常状態になった時点では

$$\{x\} = \{x_0\} e^{j\omega t} \quad (2-3-3)$$

となる。ここで $\{F_0\}$ は、作用力の振幅ベクトル、 $\{x_0\}$ は応答の振幅ベクトル（複素数）を表す。式 (2-3-2) と式 (2-3-3) を式 (2-3-1) に代入すると

$$[A]\{x_0\} = \{F_0\} \quad (2-3-4)$$

$$\text{ただし } [A] = [K] - \omega^2[M] + j\omega[C]$$

全系の節点番号は、まず領域 a 内の節点、次に領域 b 内の節点の順につけると都合がよいが、そうでなくてもさほど不都合でない。式 (2-3-4) の行と列を入れ換える操作によって領域 a の自由度と領域 b の自由度を分けてしまう

のは簡単である。そこで、式(2-3-4)は結局

$$\begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{oa} \\ X_{ob} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{ob} \end{Bmatrix} \quad (2-3-5)$$

のように表すことができる。ここで、添字 a と b はそれぞれ領域 a と b に対応する自由度であることを示す。領域 a には作用力は働かないので零である。

式(2-3-5)から $\{X_{oa}\}$ を消去して領域 b のみに関する関係式を求めれば

$$[Z]\{X_{ob}\} = \{F_{ob}\} \quad (2-3-6)$$

ただし

$$[Z] = [A_{bb} - A_{ba}A_{aa}^{-1}A_{ab}] \quad (2-3-7)$$

式(2-3-7)で定義される行列 $[Z]$ をこの分系の縮小インピーダンスと呼ぶ(厳密には動剛性と呼ぶべきところであるが)。式(2-3-7)の A_{aa}^{-1}

の計算は一般にかなりめんどろ(計算時間がかかる)であり誤差を生じやすいので、実際の計算では式(2-3-5)の行列 $[A]$ のうち領域 a に属する自由度にだけ部分的にガウスの消去法の過程を適用して $[A_{ba}]$ の位置する部分を零行列にすれば式(2-3-5)は次のような形になる。

$$\begin{bmatrix} A'_{aa} & A'_{ab} \\ 0 & A'_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{oa} \\ X_{ob} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{ob} \end{Bmatrix} \quad (2-3-8)$$

式(2-3-8)の下半分は式(2-3-6)に等しく、したがって $[A'_{bb}] = [Z]$ となる。このように、ガウスの消去法によって縮小インピーダンスを簡単に求めることができる。

すべての分系の縮小インピーダンスを求めれば、次にそれらを合成する。合成の過程は、図 2-3-1 のように三つの分系からなる構造物を例にとり説明する。図 2-3-1 の斜線部が各分系の領域 b に相当する部分であり、b 1, b 2, b 3 はそれぞれ分系 1 と 2、分系 2 と 3、分系 3 と 1 の結合部、b 4 は外力が作用する部分、b 5 はそれに対する応答を知りたい部分を示す。領域 b 1 ~ b 5 は、図のようにそれぞれ一ヶ所ではなくいくつかに分かれていてもかまわない。

まず、分系 1 の領域 b は b 1, b 3 および b 5 からなるので、分系 1 に関す

る式 (2-3-6) は次のように表される。

$$\begin{bmatrix} \sum_{b_1 b_1}^{(1)} & \sum_{b_1 b_3}^{(1)} & \sum_{b_1 b_5}^{(1)} \\ \sum_{b_3 b_1}^{(1)} & \sum_{b_3 b_3}^{(1)} & \sum_{b_3 b_5}^{(1)} \\ \sum_{b_5 b_1}^{(1)} & \sum_{b_5 b_3}^{(1)} & \sum_{b_5 b_5}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{ob1} \\ X_{ob3} \\ X_{ob5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_{ob1} \\ F_{ob3} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-3-9)$$

つぎに、分系2の領域bはb1とb2よりなるから、分系2に関する式(2-3-6)は次のように表される。

$$\begin{bmatrix} \sum_{b_1 b_1}^{(2)} & \sum_{b_1 b_2}^{(2)} \\ \sum_{b_2 b_1}^{(2)} & \sum_{b_2 b_2}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{ob1} \\ X_{ob2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ob1} \\ -F_{ob2} \end{Bmatrix} \quad (2-3-10)$$

さらに、分系3の領域bはb2、b3およびb4よりなるから、分系3に関する式(2-3-6)は具体的に

$$\begin{bmatrix} \sum_{b_2 b_2}^{(3)} & \sum_{b_2 b_3}^{(3)} & \sum_{b_2 b_4}^{(3)} \\ \sum_{b_3 b_2}^{(3)} & \sum_{b_3 b_3}^{(3)} & \sum_{b_3 b_4}^{(3)} \\ \sum_{b_4 b_2}^{(3)} & \sum_{b_4 b_3}^{(3)} & \sum_{b_4 b_4}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{ob2} \\ X_{ob3} \\ X_{ob4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ob2} \\ -F_{ob3} \\ F_{oe} \end{Bmatrix} \quad (2-3-11)$$

ここで、結合部に作用する力は、それぞれ分系1→2、分系2→3、分系3→1の方向を正にとる。また{F_{oe}}は、外からの励振力の振幅を表す。式(2-3-9)、式(2-3-10)、式(2-3-11)を合成して全系に関する式を作成すれば、

$$\begin{bmatrix} \sum_{b_1 b_1}^{(1)} + \sum_{b_1 b_1}^{(2)} & \sum_{b_1 b_2}^{(2)} & \sum_{b_1 b_3}^{(1)} & 0 & \sum_{b_1 b_5}^{(1)} \\ \sum_{b_2 b_1}^{(2)} & \sum_{b_2 b_2}^{(2)} + \sum_{b_2 b_2}^{(3)} & \sum_{b_2 b_3}^{(3)} & \sum_{b_2 b_4}^{(3)} & 0 \\ \sum_{b_3 b_1}^{(1)} & \sum_{b_3 b_2}^{(3)} & \sum_{b_3 b_3}^{(1)} + \sum_{b_3 b_3}^{(3)} & \sum_{b_3 b_4}^{(3)} & \sum_{b_3 b_5}^{(1)} \\ \sum_{b_4 b_1}^{(1)} & \sum_{b_4 b_2}^{(3)} & \sum_{b_4 b_3}^{(3)} & \sum_{b_4 b_4}^{(3)} & 0 \\ \sum_{b_5 b_1}^{(1)} & 0 & \sum_{b_5 b_3}^{(1)} & 0 & \sum_{b_5 b_5}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{ob1} \\ X_{ob2} \\ X_{ob3} \\ X_{ob4} \\ X_{ob5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{oe} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-3-12)$$

式(2-3-12)から強制振動の応答を求めるには、これをさらにガウスの消去法によって縮小して

$$\begin{bmatrix} \sum_{b_4 b_4}^{\prime} & \sum_{b_4 b_5}^{\prime} \\ \sum_{b_5 b_4}^{\prime} & \sum_{b_5 b_5}^{\prime} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{ob4} \\ X_{ob5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{oe} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-3-13)$$

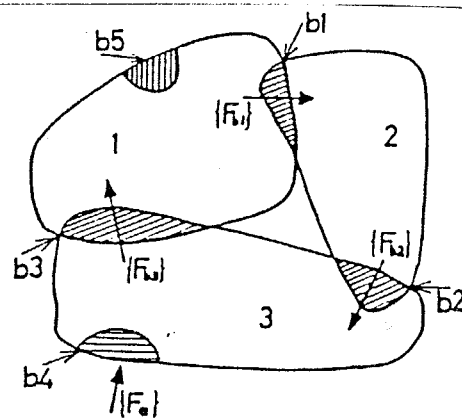
の形にしてから連立方程式を解けばよい。応答は

$$\begin{Bmatrix} X_{ob4} \\ X_{ob5} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \{F_{oe}\} \quad (2-3-14)$$

の形で得られる。式(2-3-14)の右辺の行列はコンプライアンス行列と呼ばれるものであり、 $[G_1]$ は領域4の自己コンプライアンス、 $[G_2]$ は領域4と領域5の間の相互コンプライアンスを表す行列である。

以上は外力 $\{F_e\}$ が調和励振力である場合の定常応答の解析方法であるが、衝撃力や不規則励振などの任意加振に対する応答を求める場合には次のようにする。まず、単位励振力を与え、角振動数 ω を変化させて式(2-3-14)の計算を行い、 $[G_1]$ 、 $[G_2]$ と ω の関係を求めておく。一方、励振力をフーリエ変換して周波数帯域になおし、 ω の必要な範囲内で式(2-3-14)を用いれば、周波数帯域における応答が算出できる。これを逆フーリエ変換すれば、時間帯域における応答が求められる。

式(2-3-7)の行列 $[Z]$ は有限要素法により求めたが、分系の種類によっては伝達マトリックス法を用いたりばね質点系に簡略化したりして、直接結合点間の機械インピーダンスを求める方がよい場合もある。また、ビルディングブロック法(第2章第2節参照)と同様に、振動試験により求めた結合点間の機械インピーダンスを用いることができる。実際の分系同志の結合は、ボルト、面接触、ピンなどで行われることも多いが、このような場合にはそれぞれの特性を表す個別の分系を想定し、インピーダンス $[Z]$ を実験などで求めて全系に関する式に組み込む。



- 1, 2, 3: 分系の番号
- b1: 分系1と分系2の結合部
- b2: 分系2と分系3の結合部
- b3: 分系3と分系1の結合部
- b4: 外力が作用する部分
- b5: 応答を求める部分
- $\{F_{ob1}\}, \{F_{ob2}\}, \{F_{ob3}\}$: 結合部を伝達する力
- $\{F_e\}$: 外力

図 2-3-1 3個の分系から成る構造物

2. 3. 2 検討

2. 3. 2. a 一端固定平板モデル

図2-3-2に示す一端固定平板（鋼製）を対象にして縮小インピーダンス合成法の解析精度の基礎検討を行う。計算においてはこの平板を2個の分系の結合体と考え、各々の分系に有限要素法を適用して3節点15自由度（1節点5自由度）の薄肉殻用平板三角形要素で分割する。各分系の分割方法は図2-3-2のB1～B6の6通りに変える。図2-3-2の点Fに振幅1kgfの励振力を加え、励振力の周波数を変化させながら平板の全節点の応答を計算する。

計算においては、供試体の減衰をどのように評価し減衰行列として表現するかがまず問題となる。減衰の定式化の方法として最も普通に用いられるのは、各固有モードごとにモード減衰比を実験的に決める方法と比例減衰を用いる方法である。このうちモード減衰比を用いる方法は、モード減衰比から減衰行列を作成する際に固有モードを必要とするので、固有モードを求めることなしに応答を求めようとする縮小インピーダンス合成法には適さない。そこで、ここでは比例減衰の考えを採用して

$$[C] = \alpha [M] \quad (2-3-15)$$

と仮定し、応答の振幅と位相を計算する。

他方、実際の供試体の点Fを励振して、有限要素分割の節点に相当するすべての位置の変位応答を測定し、コンプライアンスを実験的に求める。実験系の概略図を図2-3-3に示す。電磁加振器を用いた正弦波励振による実験である。

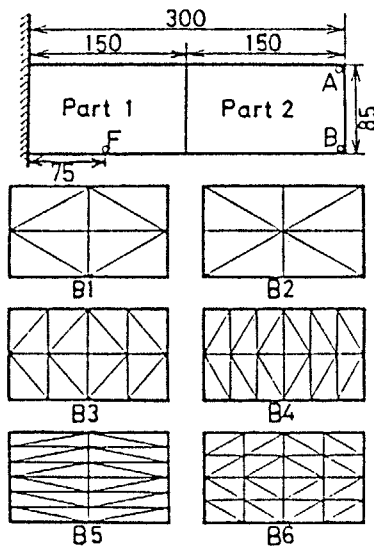
まず、上記の6通りの分割方法の各々について、減衰を無視して計算する。計算は、はじめ1Hz～691Hzまでの範囲を10Hzおきに計算し、次にその計算結果から各固有振動数と考えられる付近を1Hzおきに計算する。これら2段階の計算に要した時間を表2-3-1に示す。なお、使用計算機はHITAC-M180システムである。これから、この場合の計算時間は節点数の約2.4乗に比例することがわかる。同じ節点数の計算結果を比較すれば、B1よりB2の方が、またB4よりB5のほうが精度が悪い。B2はB1よりも各節点に集まる分割線の数のばらつきが大きく、またB5はB4よりも主振動方向（固定辺に垂直な長手方向）に要素が細長いために計算精度悪化をまねいていると推定できる。B4とB6を比べると、B4はB6より節点数は少し少ないが、主振動方向の分割数はB4の方が多く、そのためかB4の方がB6よりも節点数が少ないが精度はわずかに良いようだ。これらの精度の差はよく知られた有限要素法の要素分割方法による違いの精度変化の性質と一致しており、

いくつかの分系へ分割して解析する縮小インピーダンス合成法そのもののアルゴリズム内に発生する誤差ではないと推定される。

さて、これら三者の精度の差はわずかであるが、B4の場合が最も良いと思われるので、この項の以後の平板の計算ではB4の分割方法を採用する（ただし、5次の固有振動数の領域まで）。式(2-3-15)の係数を種々に変え、1次固有振動数付近である25 Hz～30 Hzについて詳しく計算した結果の1例(図2-3-2の点Aの応答)を図2-3-4に示す。1次の固有振動数では $\alpha = 3$ の場合が実験結果(点線)に最も良く一致しているが、共振のピークから少し離れると α の変化による差はほとんどなくなることがわかる。各固有振動数(1次～5次)付近で図2-3-4と同様の計算を行って α の最適値を求めると3(2次)、10(3次)、30(4次)および40(5次)であった。高次になるほど α は大きくなるが、このように α の最適値が異なることは、式(2-3-15)の比例減衰の過程が減衰の現象を十分に表現し得ないためではないかと考えられる。

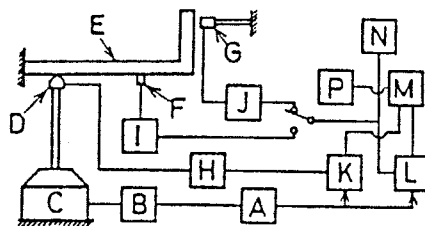
上記の α の値を使って表(2-3-1)の2段階の計算を行った結果の例(点Aの応答)が図2-3-5の実線であり、実験結果(点線)と比べると高次では共振点付近で計算結果が少し横方向(振動数の高い方向)にずれているが、低い振動数ではきわめて良い一致を示している。図2-3-5の丸印は、減衰を無視したときの計算結果であり、共振点ではもちろん振幅が無限大になるが、それ以外では実験結果と良く一致しており、このような一体構造で比較的減衰が小さい物体の共振点以外の応答を計算する場合には必ずしも減衰を考慮する必要がないと思われる。減衰を無視すれば、複素計算を行う必要がないため、計算に必要な計算機容量と時間が少なくて済む。

図2-3-6は点B(図2-3-2参照)の応答の計算結果(実線、減衰無視)と実験結果(点線)を比較したものであり、図2-3-5と同様に両者は良く一致している。



鋼, 板厚 2.9 mm, F: 加振点, A と B: 応答点

図 2 - 3 - 2 一端固定平板の分割方法



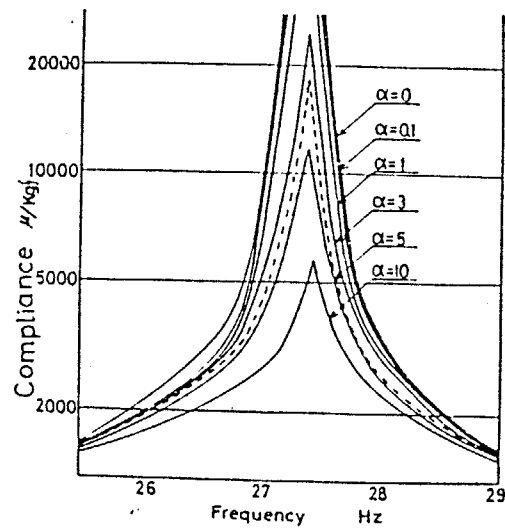
- | | |
|-------------|--------------------|
| A: 自動掃引形発振器 | I: 増幅器 |
| B: 増幅器 | J: 増幅器 |
| C: 電磁形加振器 | K: トラッキングフィルタ |
| D: 荷重計 | L: トラッキングフィルタ |
| E: 供試体 | M: 演算部 |
| F: 加速度計 | N: オシロスコープ |
| G: 非接触変位計 | P: 2チャンネル X-Y レコーダ |
| H: 増幅器 | |

図 2 - 3 - 3 実験系の概略図

表 2-3-1 一端固定平板の強制振動の計算時間と固有振動数 (Hz)

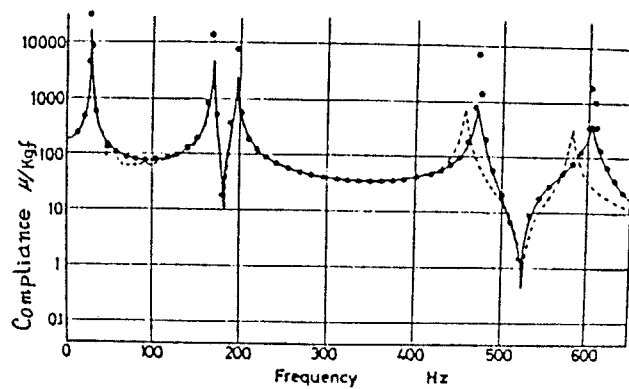
計算時間 { 1: 1~691 Hz の間で 10 Hz おきに計算
2: 各固有振動数付近を 1 Hz おきに計算

分割方法	B1	B2	B3	B4	B5	B6	
計算時間 1	10.4 s	10.4 s	37.5 s	88.0 s	73.9 s	109.2 s	
計算時間 2	8.1 s	8.1 s	26.2 s	65.1 s	51.8 s	80.7 s	
次	実験値	計 算 値					
1	27	27	27	27	27	25	27
2	167	181	182	169	167	186	172
3	196	194	209	194	195	204	194
4	456	561	562	476	470	603	496
5	580	623	685	605	606	653	608



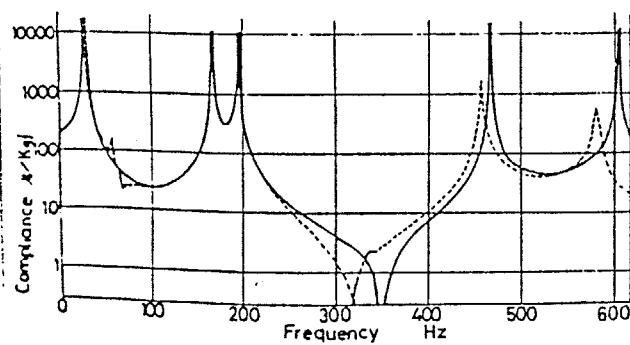
一次固有振動数付近, A 点
実線: 計算結果 $[C]=\alpha[M]$, 点線: 実験結果

図 2-3-4 一端固定平板の強制振動応答 (コンプライアンス)



実線：減衰を考慮した計算結果，点線：実験結果
丸印：減衰を無視した計算結果，A 点

図 2 - 3 - 5 一端固定平板の強制振動応答 (コンプライアンス)



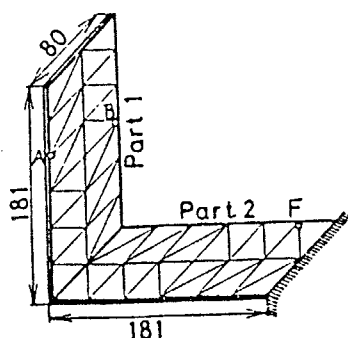
実線：計算結果 (減衰無視)，点線：実験結果，B 点

図 2 - 3 - 6 一端固定平板の強制振動応答 (コンプライアンス)

2. 3. 2. b L形板モデル

鋼製の平板を直角に曲げて図2-3-7に示すL形板を作成し、一端固定として計算と実験を行う。計算ではこれを2個の分系に分け、各分系を図のように薄肉三角形殻要素で分割する。固定端近くの点Fに振幅1kgfの励振力を加えたときの全節点の応答を計算する。減衰は無視し、振動数の範囲と間隔は平板の場合（[2.3.2.a]参照）と同一にとる。一方、強制振動実験を行いコンプライアンスを測定する。求めた固有振動数を表2-3-2に示す。1次の固有振動数の誤差は15%であるがそれ以外は5次の誤差が6%で、他の実験と計算は良く一致している。

図2-3-8と図2-3-9にそれぞれ点Aと点Bの応答の計算結果（実線）と実験結果（点線）を比較する。図2-3-8では100Hz～240Hzで両者に若干のずれがあるが、この部分の振幅は数 μ 以内であり、実験誤差である可能性もある。図2-3-8と図2-3-9では反共振点の位置が異なるが、これは固有モードが長手方向の単純な曲げだけでなくひねりを伴うものが混在していることに起因する。平板の場合よりわずかに誤差が大きいとはいえ、計算結果と実験結果は良く一致している。

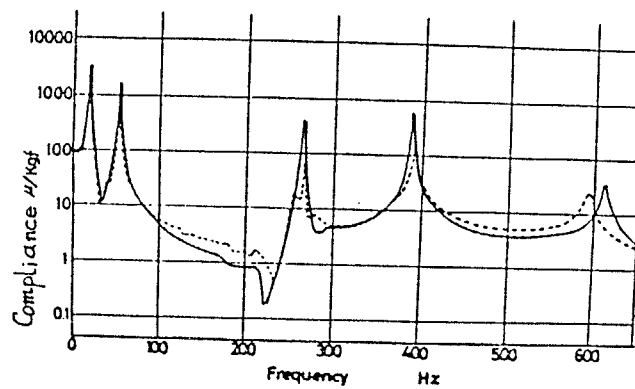


板厚 2.3 mm, F: 加振点, A と B: 応答点

図2-3-7 一端固定L形板の形状と分割

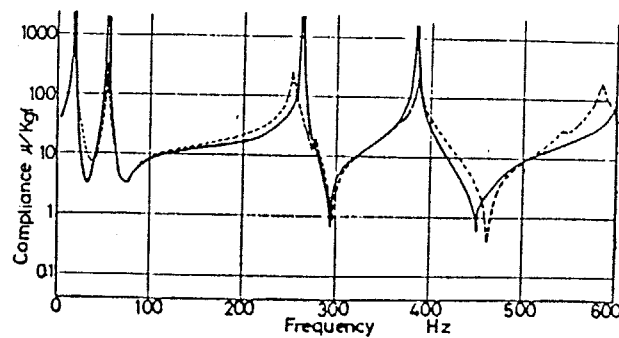
表 2-3-2 一端固定 L 形板の固有振動数 (Hz)

次	実験値	計算値
1	20	23
2	55	55
3	250	262
4	390	384
5	594	629



実線：計算結果（減衰無視），点線：実験結果，A 点

図 2-3-8 一端固定 L 形板の強制振動応答（コンプライアンス）



実線：計算結果（減衰無視），点線：実験結果，B 点

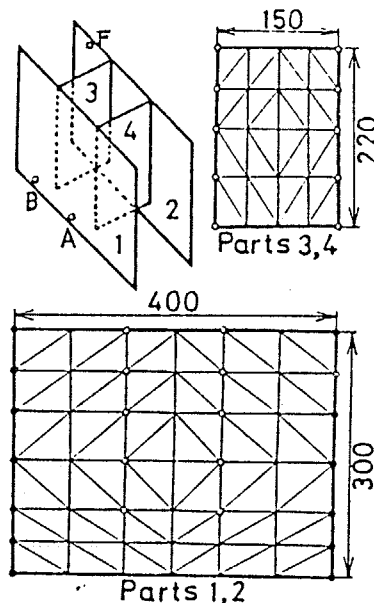
図 2-3-9 一端固定 L 形板の強制振動応答（コンプライアンス）

2. 3. 2. c 箱形モデル

2枚の隔壁を有し前後両端を固定した箱形モデルを考える。これを図2-3-10のように4個の分系に分ける。分系1と分系2は左右壁、分系3と分系4は隔壁であり、それぞれ二つは同一形状である。これらを三角形平板殻要素で図2-3-10のように分割する。

1 Hz から 691 Hz の範囲で計算を行い、点Fに1 kgf の励振力を加えたときの全系の応答を求める。この範囲では8個の固有モードが認められ、表2-3-3にその振動数を示す。このうち7次は実験で確認できず、また6次は6%の誤差を生じているが、他の計算結果は実験結果と良く合っている。固有モード形も良い一致を示した。

伝達関数の例として点Aと点Bのそれぞれの応答を図2-3-11と図2-3-12に示す。応答曲線の実験結果(点線)を見ると、固有振動数以外の場所でも小さい凹凸やガタが生じており、このため計算結果との差が平板やL形板の場合より若干増大している。箱形モデルは平板やL形板と異なり溶接構造なので溶接部の有する減衰や非線形的特性がこれらの原因ではないかと推定されるが、これらを考慮した計算は現時点では困難である。

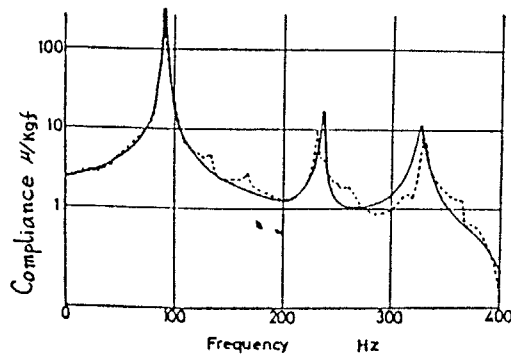


板厚 3mm. 左上図のように全体は4分系からなっており、分系1, 2と分系3, 4の有限要素分割をそれぞれ下図と右上図に示す。黒丸は固定節点。白丸は分系同志の結合節点。F: 加振点(分系2の上端)。AとB: 応答点(分系1の下端)。

図2-3-10 箱形モデルの形状と分割

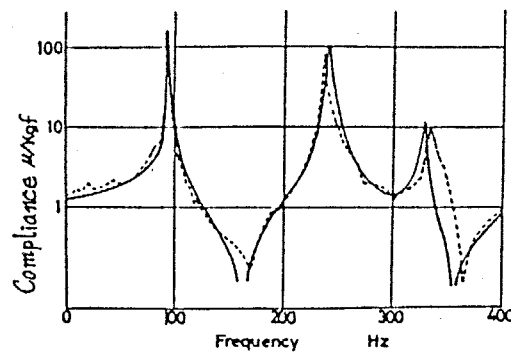
表 2-3-3 箱形モデルの固有振動数 (Hz)

次	実験値	計算値
1	92	93
2	234	238
3	330	327
4	436	449
5	494	501
6	566	531
7	—	554
8	633	628



実線：計算結果 (減衰無視)，点線：実験結果，A 点

図 2-3-1 1 箱形モデルの強制振動応答 (コンプライアンス)



実線：計算結果 (減衰無視)，点線：実験結果，B 点

図 2-3-1 2 箱形モデルの強制振動応答 (コンプライアンス)

2. 4 多重縮小インピーダンス合成法

縮小インピーダンス合成法では、全系に対する運動方程式の自由度をそれを構成する分系間に生じる結合領域の自由度と応答を知りたい自由度および励振力（外力）を受ける自由度の合計にまで小さくすることができる。そのために、全系の元の自由度でそのまま解くよりも計算時間および計算機容量の点で有利となる。

しかし、解析対象物がさらに大規模で複雑なものとなると、全系をいくつかの分系に分割しても、それらの分系はまだ有限要素法等を適用できる程度にまで小規模化できない場合がある。また、もし細かく分系への分割を行うと、各分系は小規模となり有限要素法などを直接適用できるようになるだろうが、一方でそれらの分系間に生じる結合領域の自由度が大きくなり、縮小インピーダンス合成法を適用できなくなる場合が発生する。

そこで、この問題を解決するために、縮小インピーダンス合成法の手法を多重に用いる多重縮小インピーダンス合成法を開発提案する。

2. 4. 1 理論

まず、複雑な構造物全体をいくつかの部分構造に分離する。次に各部分構造（第一次分系）をさらに有限要素法等の従来の方法により解析可能な程度の複雑さを有する小部分構造（第二次分系）に分離する。ある一つの分系に注目し、これを他の全ての分系から切り離してFEMにより運動方程式を作成すれば

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (2-4-1)$$

励振力 $\{F\}$ が角振動数 ω の調和関数として

$$\{F\} = \{F_0\} e^{j\omega t} \quad (2-4-2)$$

で表されるとすれば、この分系の変位ベクトル $\{x\}$ は

$$\{X\} = \{X_0\} e^{j\omega t} \quad (2-4-3)$$

と表される。ここで、 $\{F_0\}$ は励振力ベクトルの振幅を表し、 $\{x_0\}$ は応答変位の複素振幅を表すベクトルである。式 (2-4-2) と式 (2-4-3) を式 (2-4-1) に代入すれば

$$([K] - \omega^2 [M] + j\omega [C])\{X_0\} = \{F_0\} \quad (2-4-4)$$

ここで左辺の係数行列を便宜的に $[A_0]$ と置き換えると

$$[A_0]\{X_0\} = \{F_0\} \quad (2-4-5)$$

以下のように領域 a と領域 d に対応する自由度がそれぞれ連続に並ぶようにこの方程式を入れ換える。領域 d とは隣接する他の分系と結合する領域であり、これには励振点および応答点も含める。領域 a はその分系の領域のうち領域 d 以外の所である。そこで、式 (2-4-5) は次のように表される。

$$\begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ad} \\ A_{da} & A_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{oa} \\ X_{od} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{od} \end{Bmatrix} \quad (2-4-6)$$

領域 a には作用力が働かないので右辺は零の成分となる。式 (2-4-6) にガウスの消去法の前進過程を部分的に適用して A_{aa} の左下三角形部分と A_{da} の部分を零とすれば

$$\begin{bmatrix} A'_{aa} & A'_{ad} \\ 0 & A'_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{oa} \\ X_{od} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{od} \end{Bmatrix} \quad (2-4-7)$$

このようにして、領域 d の縮小インピーダンス $[A'_{dd}] = [Z]$ を簡単に求めることができる。

さて、次は分系の縮小インピーダンス $[Z]$ を合成していく。ここでは図 2-4-1 の構造物モデルについて具体的に示す。この構造物は、まず 4 個の分系に分けると、各分系は有限要素法等を直接適用できる程度の自由度になるが、それらの間に生じる結合領域と励振力の作用する領域および応答を知りたい領域の自由度の合計は、直接連立方程式で解くのが困難な大きさになると仮定しよう。そこで、まず全系を 2 個の分系 (第一次分系と呼ぶ。SUB.1 と SUB.2) に分け、そしてそれらをさらに 2 個ずつの小さな分系 (第二次分系) に分けることによって最終的に 4 個の分系に分けたと考える。

まず、第一次分系 (SUB.1) についての縮小インピーダンスを求める。第一次分系 (SUB.1) に属する第二次分系 (Part 1 of SUB.1) の縮小インピーダンスは

$$[Z_{11}] = \begin{bmatrix} Z_{b1b1}^{(1)} & Z_{b1c1}^{(1)} & Z_{b1c3}^{(1)} \\ Z_{c1b1}^{(1)} & Z_{c1c1}^{(1)} & Z_{c1c3}^{(1)} \\ Z_{c3b1}^{(1)} & Z_{c3c1}^{(1)} & Z_{c3c3}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2-4-8)$$

の形で表される。また、もう一つの第二次分系 (Part 2 of SUB.1) の縮小インピーダンスは

$$[Z_{12}] = \begin{bmatrix} Z_{b1b1}^{(2)} & Z_{b1c2}^{(2)} \\ Z_{c2b1}^{(2)} & Z_{c2c2}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2-4-9)$$

そこで、式 (2-4-8) と式 (2-4-9) を合成することによって第一次分系の縮小インピーダンスが次のように表される。

$$[\bar{Z}_1] = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{b_1 b_1}^{(1)} + \bar{Z}_{b_1 b_1}^{(2)} & \bar{Z}_{b_1 c_1}^{(1)} & \bar{Z}_{b_1 c_2}^{(2)} & \bar{Z}_{b_1 c_3}^{(1)} \\ \bar{Z}_{c_1 b_1}^{(1)} & \bar{Z}_{c_1 c_1}^{(1)} & 0 & \bar{Z}_{c_1 c_3}^{(1)} \\ \bar{Z}_{c_2 b_1}^{(2)} & 0 & \bar{Z}_{c_2 c_2}^{(2)} & 0 \\ \bar{Z}_{c_3 b_1}^{(1)} & \bar{Z}_{c_3 c_1}^{(1)} & 0 & \bar{Z}_{c_3 c_3}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2-4-10)$$

さて、この段階では領域 b_1 で作用する内力は作用反作用の法則により打ち消し合ってしまうので

$$[\bar{Z}_1] \begin{Bmatrix} X_{b_1} \\ X_{c_1} \\ X_{c_2} \\ X_{c_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_{c_1} \\ R_{c_2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-4-11)$$

のような運動方程式となるので、ここで再びガウスの消去法の前進過程を適用して領域 c_1, c_2, c_3 のみの縮小インピーダンス $[Z_{R1}]$ を求める。 $[Z_{R1}]$ は次のような形で表される。

$$[\bar{Z}_{R1}] = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{c_1 c_1}^{(1)} & \bar{Z}_{c_1 c_2}^{(1)} & \bar{Z}_{c_1 c_3}^{(1)} \\ \bar{Z}_{c_2 c_1}^{(1)} & \bar{Z}_{c_2 c_2}^{(1)} & \bar{Z}_{c_2 c_3}^{(1)} \\ \bar{Z}_{c_3 c_1}^{(1)} & \bar{Z}_{c_3 c_2}^{(1)} & \bar{Z}_{c_3 c_3}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2-4-12)$$

もう一つの第一次分系についても同様の過程をたどれば領域 c_1, c_2, b_2 のみの自由度の縮小インピーダンス $[Z_{R2}]$ が求まる。

$$[\bar{Z}_{R2}] = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{c_1 c_1}^{(2)} & \bar{Z}_{c_1 c_2}^{(2)} & \bar{Z}_{c_1 c_4}^{(2)} \\ \bar{Z}_{c_2 c_1}^{(2)} & \bar{Z}_{c_2 c_2}^{(2)} & \bar{Z}_{c_2 c_4}^{(2)} \\ \bar{Z}_{c_4 c_1}^{(2)} & \bar{Z}_{c_4 c_2}^{(2)} & \bar{Z}_{c_4 c_4}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2-4-13)$$

そこで、最後に式 (2-4-12) と式 (2-4-13) を合成することによって全系に関する伝達行列 $[Z_g]$ が求められる。

$$[\bar{Z}_g] = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{c_1 c_1}^{(1)} + \bar{Z}_{c_1 c_1}^{(2)} & \bar{Z}_{c_1 c_2}^{(1)} + \bar{Z}_{c_1 c_2}^{(2)} & \bar{Z}_{c_1 c_3}^{(1)} & \bar{Z}_{c_1 c_4}^{(2)} \\ \bar{Z}_{c_2 c_1}^{(1)} + \bar{Z}_{c_2 c_1}^{(2)} & \bar{Z}_{c_2 c_2}^{(1)} + \bar{Z}_{c_2 c_2}^{(2)} & \bar{Z}_{c_2 c_3}^{(1)} & \bar{Z}_{c_2 c_4}^{(2)} \\ \bar{Z}_{c_3 c_1}^{(1)} & \bar{Z}_{c_3 c_2}^{(1)} & \bar{Z}_{c_3 c_3}^{(1)} & 0 \\ \bar{Z}_{c_4 c_1}^{(2)} & \bar{Z}_{c_4 c_2}^{(2)} & 0 & \bar{Z}_{c_4 c_4}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2-4-14)$$

そして、連立方程式は

$$[\Sigma_g] \begin{Bmatrix} X_{c1} \\ X_{c2} \\ X_{c3} \\ X_{c4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{oe} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-4-15)$$

のようになるので、ガウスの消去法によって式 (2-4-16)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ \hline & & & 1 \\ & & & & 1 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} X_{c3} \\ X_{c4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{c3} \\ R_{c4} \end{Bmatrix} \quad \text{式 (2-4-16)}$$

のように計算を行えば $\{R_{c3} R_{c4}\}^T$ が知りたい応答変位振幅となる。以上は二重縮小インピーダンス合成法の説明であるが、同様の手法によって三重以上に用いることも容易である。

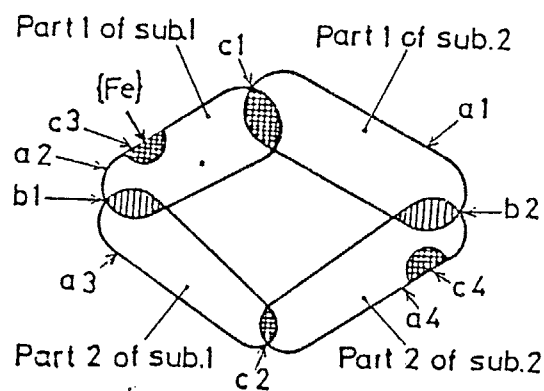


図 2-4-1 それぞれ 2 分系を有する 2 個の部分構造から成る全系

2. 4. 2 検討

ここでは、二重縮小インピーダンス合成法について検討することによって多重化の効果を調べる。

2. 4. 2. a 一端固定平板モデル

図2-4-2に示すように、一端を固定した鋼製の長方形平板を2個の部分構造（第一次分系）に分割する。次に各部分構造をそれぞれ4個の分系（第二次分系）に分割する。こうすると、全系内の分系数は8となる。

この供試体に多重縮小インピーダンス合成法（MRIM、今は二重）を適用して計算した固有振動数を表2-4-1で実験結果と比較する。低次の固有振動数は両者が良く一致しているが、高次になるほど計算結果の方が実験結果より高い周波数になる傾向がある。しかし、5次でも誤差は6.9%であり、二重化することによって生じる誤差はないことがわかる（理論的にも数値計算上の丸め誤差以外は混入しない）。

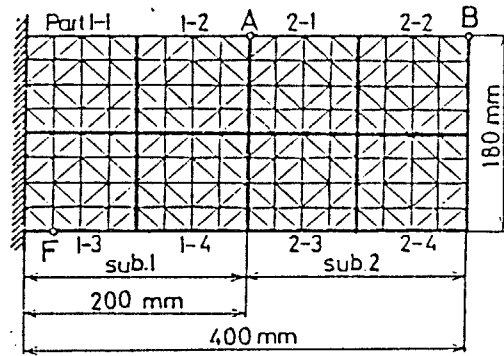
誤差の原因は、実験では板を同じ鋼製のブロックで強くはさみ込むことによって固定端を実現しているために理想的固定条件とはわずかに異なること、近似解法であるFEMを解析の基礎としたことであろう（各分系の特性行列をFEMで作成した）。

図2-4-3と図2-4-4の実線は図2-4-2の点Fを励振した時の点Aと点Bの不減衰応答をMRIMで計算した結果である。実線は固有振動数で無限大になっているが、これは計算において減衰を省略したためである。計算結果と実験結果（点線）を比較すると、計算結果の方が周波数の高い方へ少しずれているものの、両者は十分一致しているといえる。

分割要素数および節点数の位置と数を図2-4-2と同一とし、図2-4-2の固定端に平行な3本の太線で区切った4つの部分を分系として、通常のRIMによる計算を行ってみた。その結果、固有振動数は一次が14Hzであったほかは、表2-4-1のMRIMによる結果と完全に一致した。

応答は、図2-4-3と図2-4-4の一点鎖線に示すごとく低い周波数域を除いてはMRIMによる結果と全く区別できない程良く一致している。低い周波数域では通常のRIMによる方がMRIMによる結果よりも若干誤差が大きいようであるが、その原因はよくわからない。

1個の周波数点の応答を求めるための計算時間は、RIMで4.7秒、MRIMで4.3秒であった（HITAC-M200H使用）。また、必要とする記憶容量はRIMで約400KB、MRIMでは約200KBであった。MRIMは構造物が複雑な場合に特に有利であると思われるが、この程度の簡単な形状の構造物で自由度が同一の場合でも、通常のRIMよりもMRIMの方が計算時間、記憶容量共に有利であることがわかる。



まず2部分構造に、次にそれぞれを4分系に分割する。F：励振点，AとB：応答点，板厚：2.0 mm.

図 2 - 4 - 2 一端固定長方形平板の分割方法

表 2 - 4 - 1 一端固定長方形平板の固有振動数

次 数	MRIM Hz	実 験 Hz	誤 差 %
1	11	11	0.0
2	50	51	-2.0
3	66	62	6.5
4	161	157	2.5
5	185	173	6.9

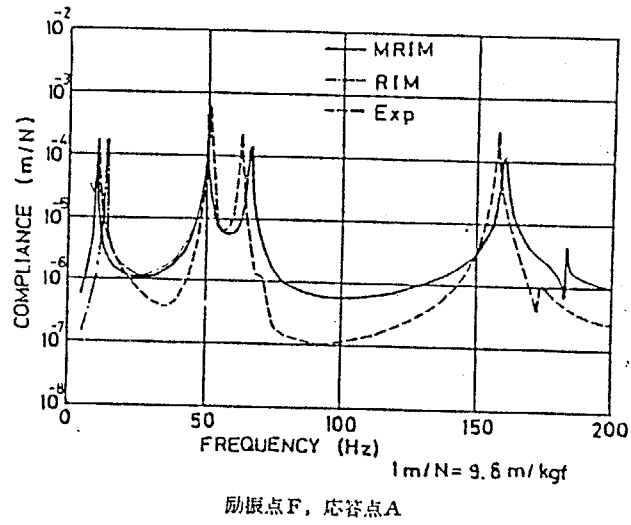


図 2 - 4 - 3 一端固定長方形平板の伝達関数

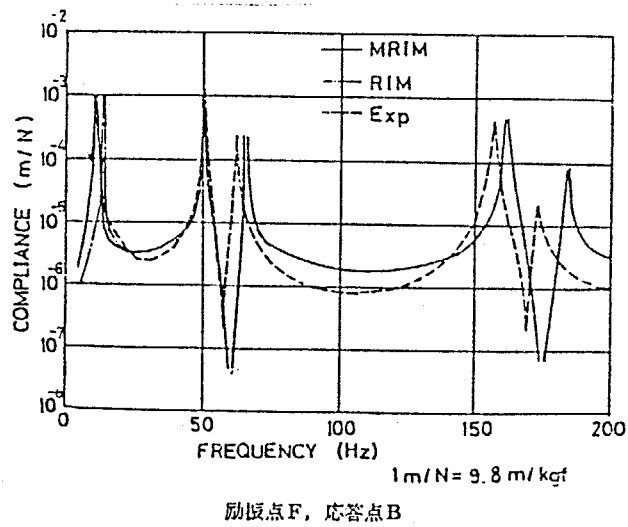


図 2 - 4 - 4 一端固定長方形平板の伝達関数

2. 4. 2. b ディーゼル発電パッケージ台盤の模型

計算および実験の対象となるディーゼル発電パッケージ共通台盤の縮尺1/5模型を図2-4-5に図示する。

これを図2-4-6に示すように4個の部分構造にモデル化し、さらに各部分構造をいくつかの第一次分系に分割する。

第一次分系はA, B, Cの3種類の形状のもの、これらのX-Z平面に関して対称な形のもの3種類およびDの計7種類を用いる。例えば部分構造3は、第一次分系B(図2-4-7)とこれとX-Z平面に関して対称な分系および3個の分系Dから形成される。

図2-4-6の点P1が励振点であり、点P1とP2は応答を測定する点を示す。また図2-4-6の白丸印は部分構造や分系同志の結合点を示す。

図2-4-7はA, B, C, Dの4種類の第一次分系の有限要素分割図であり、それらを構成するいくつかの小さい部分構造を第二次分系として計算を行う。

有限要素は、一端固定長方形平板の場合と同様に3節点18自由度の三角形平面殻要素を用いている。

各第一次分系の節点数を表2-4-2に示す。全系の節点数と要素数は288と626であり、全自由度は1728である。

この台盤模型を対象にし、MRIMによる固有振動数、固有モード及び応答(伝達関数)の周波数スペクトルを計算する。同時にMRIMと同一の有限要素分割を用いて、通常のRIMによる計算も行う。また、鋼板を溶接して図2-4-5の模型を実際に製作し、調和励振による掃引振動試験を行うことにより、固有振動数、固有モード及び伝達関数の周波数スペクトルを実験的に求める。MRIM及びRIMによる計算では不減衰伝達関数の周波数スペクトルを求め、次に曲線適合によって各固有モードの不減衰固有振動数及びモード剛性、モード質量を求める。さらに実験によって得たモード減衰比を適用することによって、減衰振動の伝達関数を再構成する。

本計算で採用したモード減衰比の値を表2-4-3に示す。表2-4-3はいずれも後述の実験結果(図2-4-8と図2-4-9の破線)の特性分離を行うことによって得た値であるが、2次のモード減衰比だけは応答の実験値がはっきりした共振峰を形成しなかったため、およその値として0.1を用いる。

表2-4-4に固有振動数のMRIMによる計算結果を実験結果と比較する。固有振動数の誤差は4次までで最大12.4%であり、先の一端固定平板の場合(表2-4-1)よりかなり大きくなっている。これはモデル化および分系の有限要素分割がかなり粗いためであると考えられる。しかし、この程度の誤差は計算の実用性を害する程ではないと思われる。

一方、通常のRIMによる計算結果は表2-4-4のMRIMによる結果と少なくとも4次までは完全に一致した。

図2-4-8と図2-4-9に、MRIMによる伝達関数の計算結果を実験結果と比較する。計算結果は実験結果より周波数の高い方へずれているが、曲線の形状は両者が互いに類似している。特に工学上重要な応答曲線の共振峰の大きさは、両者が良く一致している。

1個の周波数点の応答を求めるための計算時間はRIMで27秒、MRIMで17秒であった(HITAC-M200H使用)。そこで、これまでの解析例を参考にすると、RIMとMRIMそのもののアルゴリズムの中には周波数帯域の違いによる解析精度の変化はないので、挟帯域の応答を計算するには有効であると思われる。しかし、1周波数毎に同じ計算を繰り返すので広帯域の伝達関数を求めたり、固有振動数を直接求めるためには少し向いていない。この点に関しては伝達関数が他の解析方法では飛躍的改善は望めない所以他の解析方法を考案する必要を感じる。

また、必要とする計算機容量は、RIMで約1400KB、MRIMでは約300KBであった。

この適用例からも、MRIMの方がRIMよりも計算時間と計算機容量の両面について有利であることがわかる。特に、本台盤模型の計算の場合には、必要な計算機容量は、一端固定平板の場合について比べて、RIMでは3.5倍になっているのに対して、MRIMでは1.5倍にすぎず、解析対象物が複雑になるほどMRIMの有用性が著しくなる。

図2-4-10には1次、3次、および4次の固有モードの概略を示す。モード形に関しても計算結果と実験結果は良く一致した。なお、2次のモード形は実験でははっきり検出できなかったので省略する。

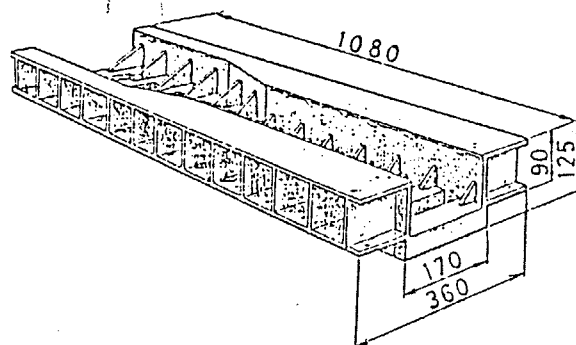


図 2 - 4 - 5 共通台盤の 1 / 5 縮尺模型の概形
(単位 mm)

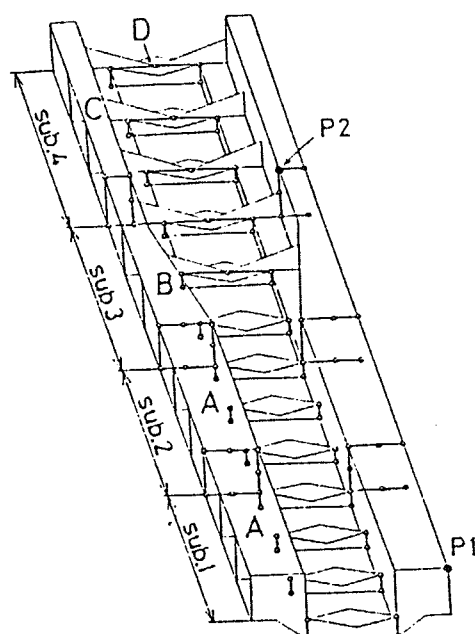
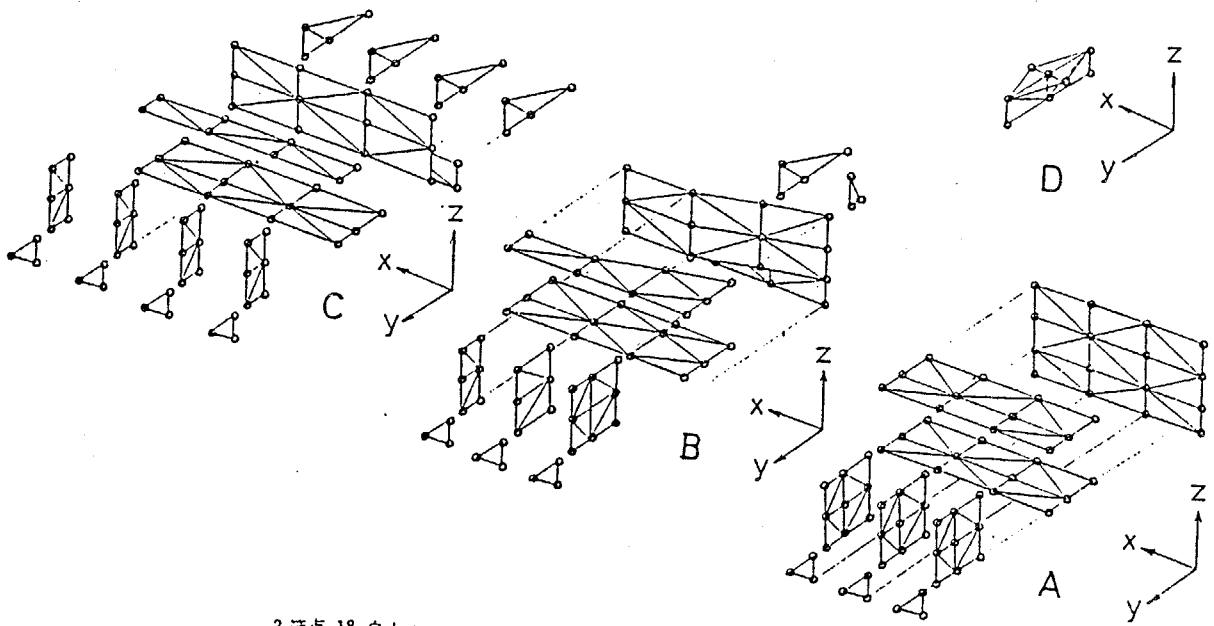


図 2 - 4 - 6 共通台盤の部分構造および分系への分割



3 節点 18 自由度の三角形平面殻要素を用いる。白丸は節点を表す。

図 2 - 4 - 7 各分系の有限要素分割

表 2 - 4 - 2 分系の有限要素分割における節点数と要素数

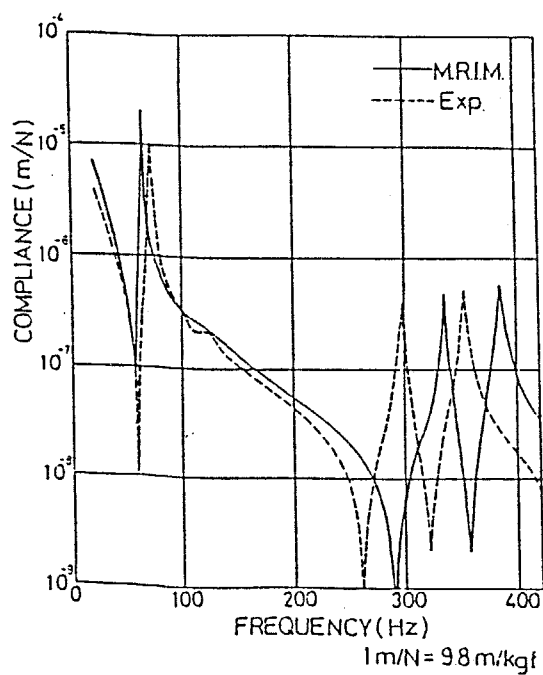
分 系	節 点 数	要 素 数
A	38	69
B	34	59
C	36	64
D	8	8

表 2-4-3 計算に採用するモード減衰比の値

次 数	モ ー ド 減 衰 比
1	0.0043
2	0.1000
3	0.0031
4	0.0043

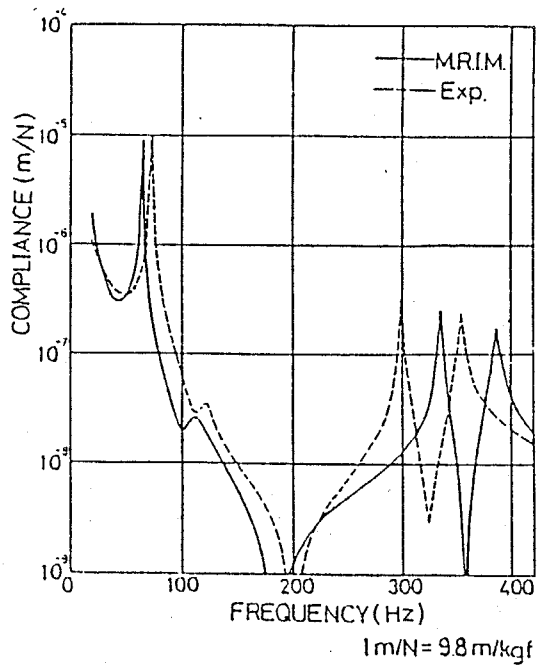
表 2-4-4 共通台盤 1/5 縮尺模型の固有振動数

次 数	MRIM Hz	実 験 Hz	誤 差 %
1	64	71	-9.9
2	103	120	-10.0
3	335	298	12.4
4	386	353	9.3



振動点 P1, 応答点 P1

図 2-4-8 共通台盤模型の伝達関数



励振点 P 1, 応答点 P 2

図 2 - 4 - 9 共通台盤模型の伝達関数

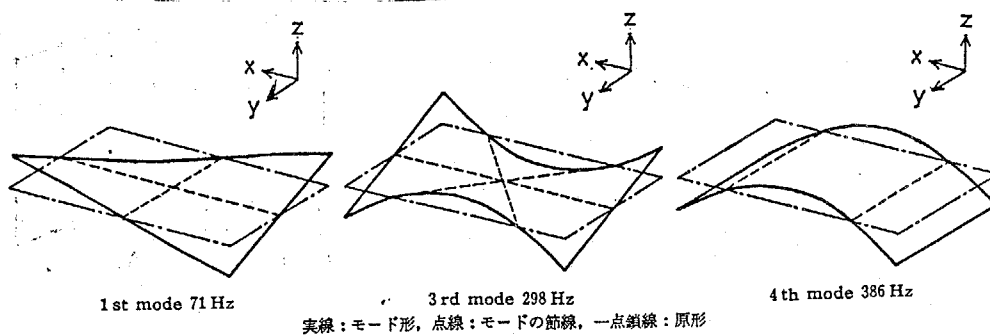


図 2 - 4 - 10 共通台盤模型の固有モードの概形

2.5 結言

- (1) 伝達関数合成法的一种として縮小インピーダンス合成法 (RIM と略記) を開発提案した。
- (2) さらに、その方法の有用性を増大させるために、RIM のアルゴリズムを多重化することによって多重縮小インピーダンス合成法 (MRIM と略記) を開発提案した。
- (3) それらの方法によっていくつかの供試体を解析し、その結果を検討した結果、両方法とも計算精度はほぼ有限要素法と同等であり、かつ必要計算機容量は少なく済むことがわかった。また、全体系を一体として直接解くよりも計算時間も短くて済むことが判明した。
- (4) また、多重縮小インピーダンス合成法は縮小インピーダンス合成法よりも同規模の解析を行うにも計算機容量が少なく済み、計算時間も短くなることを実例で示した。
- (5) 縮小インピーダンス合成法と多重縮小インピーダンス合成法は複雑で大型の機械構造物の強制振動応答を直接解析するのに有用であることがわかった。

第3章 モード合成法

3.1 緒言

モード合成法の主なものは、不拘束モード型、拘束モード型および混合型に大別できる。不拘束モード型では、結合部分を自由とした固有モードを用いる。拘束モード型では、分系の採用モードとして、他の分系との結合部分を拘束した状態の固有モードを用いる。混合型はそれら二者を混合した方法である。

モード合成法の主な特徴は、解析対象物の固有振動数、固有モードおよび強制振動応答を直接スマートに求めることができ、計算時間が短いことである。

不拘束モード型の方法には、採用する固有モードより高次の固有モードの影響を近似的に補正するための剰余コンプライアンス行列を用いる方法と、それを用いない方法がある。現在市販されているモード合成法のプログラムの主流は、これらの不拘束モード型の解法を用いている。

拘束モード型の代表的な方法としては、ここで提案する区分モード合成法^{<6>~<8>}をあげることができる。また、混合型の方法としてはBenfieldらが提案した方法などをあげることができる。

本章では、これらのモード合成法をとりあげる。そして、区分モード合成法とそのアルゴリズムを多重化した多重区分モード合成法^{<9>}を提案し、それらの有効性を示す。また、代表的な不拘束モード合成法の理論を示す。さらに、区分モード合成法と、剰余コンプライアンス行列を用いたモード合成法およびそれを用いない方法の三者の比較^{<5>}を行い、それぞれの特長を明らかにする。その際に、周辺自由の境界条件下の構造物^{<11>}に対する剰余コンプライアンス行列を精度良くかつ効率良く計算で求める方法(第5章で提案)を組み込むことによって、剰余コンプライアンスを考慮する不拘束モード法の精度が格段に良くなることを示す。

3.2 Benfieldの方法

3.2.1 理論

説明を簡単にするために、図3-2-1に示すように全系が3分系からなる系について本解析方法を説明する。

まず、分系1と2を主系とし、分系3を従系に分類する。そして、それぞれの内部領域をa、主系と従系の結合領域中の任意の点をcとする。本説明では、主系1と従系との結合領域中にcを選ぶ。その他の結合部をbとする。主系と従系への分類の仕方は、主系同志または従系同志が直接連結しないという条件下で任意である。

主系の全領域の変位は、従系を切り離し、結合領域を自由として得られる主系単独の固有モードの一次結合で表す。すなわち、それぞれの領域の変位を δ で表し、 $[\phi_1]$ 、 $[\phi_2]$ をそれぞれ主系1、2単独の一次モードから n_1 次、 n_2 次の固有モードまで並べたモード行列とすれば、主系1に対して

$$\begin{Bmatrix} \delta_{1a} \\ \delta_{1b} \\ \delta_{1c} \end{Bmatrix} = [\phi_1] \{ \xi_1 \} = \begin{bmatrix} \phi_{1a} \\ \phi_{1b} \\ \phi_{1c} \end{bmatrix} \{ \xi_1 \} \quad (3-2-1)$$

また、主系2に対しては

$$\begin{Bmatrix} \delta_{2a} \\ \delta_{2b} \end{Bmatrix} = [\phi_2] \{ \xi_2 \} = \begin{bmatrix} \phi_{2a} \\ \phi_{2b} \end{bmatrix} \{ \xi_2 \} \quad (3-2-2)$$

ここで、 $\{ \xi_1 \}$ 、 $\{ \xi_2 \}$ はそれぞれ主系1、2の係数ベクトルを表す。式(3-2-1)と(3-2-2)で主系の変位を精度良く表すことが困難な場合には、従系の質量行列と剛性行列をグヤンの提案した縮小方法で主系との結合領域部の自由度のみに縮小し、それらを主系の質量行列と、剛性行列の結合領域部に付加して求める固有モードを用いることができる。従系の変位は、主系の変位に伴って生じるc点の変位で代表できる剛体変位と、結合領域bのc点に対する相対変位、さらに主系との結合領域bとcを固定したときの従系の内部領域aについて得られる固有モード $\{ \phi_{3ai} \}$ ($i = 1 \sim n_3$, n_3 は分系3の採用固有モード数)の一次結合で表す変位の三者の重ね合わせで表す。すなわち、

$$\begin{aligned} \{ \delta_{3a} \} &= [S_{3a}] \{ \delta_{1c} \} + \begin{bmatrix} T_{1b} & T_{1c} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \delta_{1b} \\ \delta_{1c} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{1b} \\ I \end{bmatrix} \{ \delta_{1c} \} \right) \\ &+ \begin{bmatrix} T_{2b} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \delta_{2b} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{2b} \end{bmatrix} \{ \delta_{1c} \} \right) + [\phi_{3a}] \{ \xi_3 \} \end{aligned} \quad (3-2-3)$$

式(3-2-3)において、右辺の第1項がc点の変位で表現する剛体変位、第2項がc点に対する主系1と従系の結合領域のc点に対する相対変位による影響、第4項は従系の結合領域を固定にして得られる固有モードの一次結合である。さて、c点の変位によって分系の剛体変位を表す行列 $[S_{3a}]$ 、 $[S_{1b}]$ および $[S_{2b}]$ の求め方を示す。いまc点がx方向に Δx_c 、y方向に Δy_c 、z方向に Δz_c 変位し、同時にx軸まわりに $\Delta\theta_{xc}$ 、y軸まわりに $\Delta\theta_{yc}$ 、z軸まわりに $\Delta\theta_{zc}$ 回転するとすれば、それに伴う従系内の任意の点nの剛体変位 Δx_n 、 Δy_n 、 Δz_n は、明らかに、

$$\begin{Bmatrix} \Delta x_n \\ \Delta y_n \\ \Delta z_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x_c \\ \Delta y_c \\ \Delta z_c \end{Bmatrix} \quad (3-2-4)$$

次に、c点回転変位 $\Delta\theta_{zc}$ によって生じる点の変位を求める。c点を原点とした点nの相対座標を (α, β, γ) とすれば、変位後の点nの座標 $(\alpha', \beta', \gamma')$ は

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \alpha \cos \Delta\theta_{zc} - \beta \sin \Delta\theta_{zc} \\ \beta' &= \alpha \sin \Delta\theta_{zc} + \beta \cos \Delta\theta_{zc} \\ \gamma' &= \gamma \end{aligned} \right\} \quad (3-2-5)$$

ここで、 $\Delta\theta_{zc}$ は微小であるとする、式(3-2-5)の上2式は

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \alpha - \beta \Delta\theta_{zc} \\ \beta' &= \alpha \Delta\theta_{zc} + \beta \end{aligned} \right\} \quad (3-2-6)$$

よって

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_n &= \alpha' - \alpha = -\beta \Delta\theta_{zc} \\ \Delta y_n &= \beta' - \beta = \alpha \Delta\theta_{zc} \end{aligned} \right\} \quad (3-2-7)$$

と表される。また、 $\Delta\theta_{zn} = \Delta\theta_{zc}$ 、 $\Delta\theta_{yn} = \Delta\theta_{xn} = \Delta z_n = 0$ の関係は明らかに成立する。以上より、 $\Delta\theta_{zc}$ に対する点nの変位が次のように求められる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta X_n \\ \Delta Y_n \\ \Delta Z_n \\ \Delta \theta_{xn} \\ \Delta \theta_{yn} \\ \Delta \theta_{zn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta \\ -\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \{\Delta \theta_{zc}\} \quad (3-2-8)$$

$\Delta \theta_{xc}$ と $\Delta \theta_{yc}$ についても、式(3-2-8)と同様の関係を求めることができる。これらの関係を総合すれば、c点の変位による点nの剛体変位は次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \Delta X_n \\ \Delta Y_n \\ \Delta Z_n \\ \Delta \theta_{xn} \\ \Delta \theta_{yn} \\ \Delta \theta_{zn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \gamma & -\beta \\ 0 & 1 & 0 & -\gamma & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \beta & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta X_c \\ \Delta Y_c \\ \Delta Z_c \\ \Delta \theta_{xc} \\ \Delta \theta_{yc} \\ \Delta \theta_{zc} \end{Bmatrix} \quad (3-2-9)$$

このようにして従系の内部領域a、主系1との結合領域、および主系2と従系との結合領域の3部分のすべてについて、式(3-2-9)に示すような変位成分を求めれば $[S_{3a}]$ 、 $[S_{1b}]$ および $[S_{2b}]$ を作成できる。

次に行列 $[T_{1b}]$ 、 $[T_{1c}]$ および $[T_{2b}]$ の求め方を示す。従系に対してグヤンの縮小過程を適用すると、

$$\begin{bmatrix} K_{3a3a}^{(3)} & K_{3a1b}^{(3)} & K_{3a1c}^{(3)} & K_{3a2b}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{3a} \\ \delta_{1b} \\ \delta_{1c} \\ \delta_{2b} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3-2-10)$$

式(3-2-10)より $\{\delta_{3a}\}$ を $\{\delta_{1b}\}$ 、 $\{\delta_{1c}\}$ 、 $\{\delta_{2b}\}$ で表せば、

$$\begin{aligned} \{\delta_{3a}\} &= \begin{bmatrix} -K_{3a3a}^{(3)-1} & K_{3a1b}^{(3)} \end{bmatrix} \{\delta_{1b}\} \\ &+ \begin{bmatrix} -K_{3a3a}^{(3)-1} & K_{3a1c}^{(3)} \end{bmatrix} \{\delta_{1c}\} \\ &+ \begin{bmatrix} -K_{3a3a}^{(3)-1} & K_{3a2b}^{(3)} \end{bmatrix} \{\delta_{2b}\} \end{aligned} \quad (3-2-11)$$

を得る。式 (3-2-11) の右辺の各行列を書き換えて、

$$\left. \begin{aligned} [T_{1b}] &= [-K_{3a3a}^{(3)-1} K_{3a1b}^{(3)}] \\ [T_{1c}] &= [-K_{3a3a}^{(3)-1} K_{3a1c}^{(3)}] \\ [T_{2b}] &= [-K_{3a3a}^{(3)-1} K_{3a2b}^{(3)}] \end{aligned} \right\} \quad (3-2-12)$$

式 (3-2-3) の右辺を変形し、主系 1 の影響を示す項、主系 2 の影響を示す項および従系内部領域の自由度の項に整理すると、

$$\begin{aligned} \{\delta_{3a}\} &= [T_{1b}, S_{3a} - T_{1b}S_{1b} - T_{2b}S_{2b}] \begin{Bmatrix} \delta_{1b} \\ \delta_{1c} \end{Bmatrix} \\ &+ [T_{2b}] \{\delta_{2b}\} + [\phi_{3a}] \{\xi_3\} \end{aligned} \quad (3-2-13)$$

式 (3-2-13) に式 (3-2-1) と (3-2-2) を代入して

$$\begin{aligned} \{\delta_{3a}\} &= [T_{1b}, S_{3a} - T_{1b}S_{1b} - T_{2b}S_{2b}] \begin{bmatrix} \phi_{1b} \\ \phi_{1c} \end{bmatrix} \{\xi_1\} \\ &+ [T_{2b}] [\phi_{2b}] \{\xi_2\} + [\phi_{3a}] \{\xi_3\} \end{aligned} \quad (3-2-14)$$

式 (3-2-1) と (3-2-2) および (3-2-14) で全系の変位を表現すれば

$$\begin{Bmatrix} \delta_{1a} \\ \delta_{1b} \\ \delta_{1c} \\ \delta_{2a} \\ \delta_{2b} \\ \delta_{3a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1a} & 0 & 0 \\ \phi_{1b} & 0 & 0 \\ \phi_{1c} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{2a} & 0 \\ 0 & \phi_{2b} & 0 \\ T_{1b}\phi_{1b} + (S_{3a} - T_{1b}S_{1b} - T_{2b}S_{2b})\phi_{1c}, & T_{2b}\phi_{2b}, & \phi_{3a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = [T_0] \{\xi\} \quad (3-2-15)$$

ここで、 $\{\xi_1\}$ 、 $\{\xi_2\}$ および $\{\xi_3\}$ は、それぞれ各固有モードの寄与率を示す係数ベクトルである。式 (3-2-15) で示される座標変換行列 $[T_0]$ を用いて全系の質量行列と剛性行列を変換したものを、それぞれ $[M_g]$ 、 $[K_g]$ とすれば、

$$[M_g] = [T_0]^T \begin{bmatrix} M_{1a1a}^{(1)} & M_{1a1b}^{(1)} & M_{1a1c}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ M_{1b1a}^{(1)} & M_{1b1b}^{(1)} + M_{1b1b}^{(3)} & M_{1b1c}^{(1)} + M_{1b1c}^{(3)} & 0 & M_{1b2b}^{(3)} & M_{1b3a}^{(3)} \\ M_{1c1a}^{(1)} & M_{1c1b}^{(1)} + M_{1c1b}^{(3)} & M_{1c1c}^{(1)} + M_{1c1c}^{(3)} & 0 & M_{1c2b}^{(3)} & M_{1c3a}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & M_{2a2a}^{(2)} & M_{2a2b}^{(2)} & 0 \\ 0 & M_{2b1b}^{(3)} & M_{2b1c}^{(3)} & M_{2b2a}^{(2)} & M_{2b2b}^{(2)} + M_{2b2b}^{(3)} & M_{2b3a}^{(3)} \\ 0 & M_{3a1b}^{(3)} & M_{3a1c}^{(3)} & 0 & M_{3a2b}^{(3)} & M_{3a3a}^{(3)} \end{bmatrix} [T_0]$$

(3-2-16)

$$[K_g] = [T_0]^T \begin{bmatrix} K_{1a1a}^{(1)} & K_{1a1b}^{(1)} & K_{1a1c}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{1b1a}^{(1)} & K_{1b1b}^{(1)} + K_{1b1b}^{(3)} & K_{1b1c}^{(1)} + K_{1b1c}^{(3)} & 0 & K_{1b2b}^{(3)} & K_{1b3a}^{(3)} \\ K_{1c1a}^{(1)} & K_{1c1b}^{(1)} + K_{1c1b}^{(3)} & K_{1c1c}^{(1)} + K_{1c1c}^{(3)} & 0 & K_{1c2b}^{(3)} & K_{1c3a}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{2a2a}^{(2)} & K_{2a2b}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{2b1b}^{(3)} & K_{2b1c}^{(3)} & K_{2b2a}^{(2)} & K_{2b2b}^{(2)} + K_{2b2b}^{(3)} & K_{2b3a}^{(3)} \\ 0 & K_{3a1b}^{(3)} & K_{3a1c}^{(3)} & 0 & K_{3a2b}^{(3)} & K_{3a3a}^{(3)} \end{bmatrix} [T_0]$$

(3-2-17)

これらの $[M_g]$ と $[K_g]$ を用いて、全系に関する一般的固有値問題

$$([K_g] - \omega^2 [M_g]) \{\xi\} = \{0\} \quad (3-2-18)$$

を解けば、全系についての固有振動数 ω_{oi} と、各分系の固有モードを一般化座標とする全系の固有モード $\{\xi_{oi}\}$ を得る。この $\{\xi_{oi}\}$ を式 (3-2-15) に代入すれば、全系の固有モードが得られる。

つぎに、調和強制振動に対する定常応答を求める方法を示す。式 (3-2-8) で得られた $\{\xi_{oi}\}$ ($i = 1 \sim m$, m はモード解析に用いる全系の採用モード数) を用いてモード解析を行う。各分系の固有モードを一般化座標とする強制振動方程式は、

$$([K_g] - \omega^2 [M_g]) \{\xi\} = [T_0]^T \{F\} \quad (3-2-19)$$

ここで、 $\{F\}$ は励振力振幅ベクトルを表す。 $\{\xi\}$ が式 (3-2-18) で得られた固有モード $\{\xi_{oi}\}$ の一次結合で表されるとすれば

$$\{\xi\} = [\xi_o] \{d\} \quad (3-2-20)$$

ここで、 $[\xi_0]$ は $\{\xi_{0,i}\}$ ($i = 1 \sim m$) から形成される $(n+n+n)$ 行 m 列のモード行列である。式 (3-2-20) を式 (3-2-19) に代入し、すべての項に左辺から $[\xi_0]^T$ をかけると

$$\begin{aligned} & ([\xi_0]^T [K_g] [\xi_0] - \omega^2 [\xi_0]^T [M_g] [\xi_0]) \{d\} \\ & = [\xi_0]^T [T_0]^T \{F\} \end{aligned} \quad (3-2-21)$$

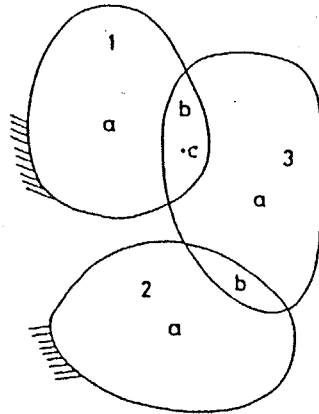
左辺で $[\xi_0]^T [K_g] [\xi_0]$ と $[\xi_0]^T [M_g] [\xi_0]$ は、固有モードの直交性より対角行列となる。

励振力の角振動数 ω とその振幅ベクトル $\{F\}$ を代入し、 $\{d\}$ について解けば、

$$\{d\} = ([\xi_0]^T [K_g] [\xi_0] - \omega^2 [\xi_0]^T [M_g] [\xi_0])^{-1} [\xi_0]^T [T_0]^T \{F\} \quad (3-2-22)$$

右辺の逆行列は対角行列なので、容易に求めることができる。ただし、減衰を考慮していないので、 ω が固有振動数 $\omega_{0,i}$ に一致する場合は、この逆行列が求まらず、 $\{d\}$ を求めることは不可能となる。

さて、式 (3-2-22) で求めた $\{d\}$ を式 (3-2-20) に代入し $\{\xi\}$ を求め、それをさらに式 (3-2-15) に代入すると、全系の定常応答振動の振幅を求めることができる。これから動的応力やひずみを求めることも容易である。



- 1, 2, 3: 各分系の番号 (1, 2: 主系, 3: 従系)
 a: 各分系の内部領域
 b: c 点以外の結合領域
 c: 結合領域中の任意の1点

図 3 - 2 - 1 3分系からなる構造物

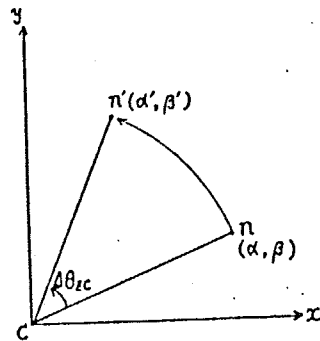


図 3 - 2 - 2 $\Delta\theta_{zc}$ にもなう剛体変位

3. 2. 2 検討

3. 2. 2. a 両端固定平板モデル

図3-2-3に示すように、相対する2端を固定し、他の2端は自由の長方形平板を対象にして本方法による固有振動数の計算を行い、その結果を実験結果および有限要素法の直接使用による解析結果と比較する。本方法では、長方形板を3分系に分け、固定端に接する2分系を主系、両主系に挟まれた1分系を従系とする。そして、各分系をさらに3節点18自由度の三角形平板殻要素で分割する。図3-2-3に示す5通りの分割方法について、一般化座標として採用する各分系の最低次からの固有モード数、縮小した従系の質量行列と剛性行列を用いた両主系の固有モードの修正の有無および縮小係数 α を種々に変化させて計算を行う。

図3-2-3をみると、従系は分割3が最大であり、1、4、2の順に小さくなることを意味する。分割5は4と従系の大きさは同一であるが、分割5は上下の主系の大きさが異なる非対称分割である。有限要素への分割は、分割3~5が等しく1と2は異なるが、各分系のレベルではすべて異なる要素分割となる。

有限要素法を直接適用する場合には、長方形板全体を一体とみなし、要素への分割方法は図3-2-3の1を採用する。有限要素法では、10次までの固有モードの計算に390秒(使用計算機HITAC-M180)を要し、10次以上では計算時間が急増するので計算しなかった。それに対して区分モード合成法では、3分系および全系の固有モードをすべて20次まで計算しても504秒であり、計算機容量も計算時間も有限要素法の直接使用よりはるかに有利である。そして、この利点は全系の構造が複雑になるほど顕著になり、有限要素法を直接用いても困難である構造物の振動解析が、区分モード合成法の適用により比較的簡単に可能になる。

表3-2-1は分割1について各分系の採用固有モード数と主系の固有モード修正の有無を変化させたときの固有振動数である。 N_1 は主系1、 N_2 は主系2、 N_3 は従系の採用モード数である。区分モード合成法による計算のうち斜線部は誤差が急増するため省いた。表3-2-1の最後の3列は、採用する分系の固有モードのうち最高次の振動数がほぼ等しくなるように振動数の上限をもうけて採用次数を決めたものである。表3-2-2は、全分系の採用モード数20、主系のモード修正有りのとき、分割方法を2~5に変えた静縮小の固有振動数である。表3-2-3は、分割方法1、全分系の採用モード数20、主系のモード修正有りのとき、縮小係数 α を0~0.4に変えた場合の固有振動数である。

図3-2-4から図3-2-9は、静縮小による固有振動数の誤差(%)と各分系の採用モード数の関係である。図3-2-4は主系の修正なし、図3-

2-5～図3-2-9は有りである。分割方法は、図3-2-4と図3-2-5が1、図3-2-6～図3-2-9はそれぞれ2～5に対応する。区分モード合成法は各分系を独立させたときの固有モードを全系の一般化座標としている点で近似解法であり、そのうえ実際には各分系の全固有モードでなく最低次からわずかの数しか採用しないので、当然いくぶんかの誤差を生じる。したがって、分系の固有モードを有限要素法で求める場合には、近似解法である有限要素法が元来有する誤差と、区分モード合成法を用いるための誤差をわけて考える方が妥当である。このうち後者の誤差を調べるために、図3-2-4～3-2-9は実験値ではなく有限要素法による計算値を誤差の基準とする。有限要素法による計算自身の誤差は、表3-2-1から明らかなように、少なくとも10次までは実験値に対して5%以内である。ただ、実験は細心の注意を払っているが、理想系と実際のモデルの固定条件のわずかの相違、測定中の誤差などにより、実験値自身のなかにもわずかの誤差の混入は避けられない。したがって、この5%以内の誤差のすべてが有限要素法によるものであるとは限らない。

実験、有限要素法および区分モード合成法の3通りの方法によって求めた固有モード（1～10次）を比較したところ、三者はよい一致を示した。図3-2-10にその例を示す。

分割方法の検討を行う。表3-2-2と比較すべき分割1の結果は表3-2-1の右から4列目である。これら5通りの分割方法による計算結果を有限要素法による計算結果ならびに実験結果と比較すれば、13次くらいまではいずれの分割でも区分モード合成法の計算精度はたいへん良いが、それより高次になると、固有振動数が低くなる傾向にある。これは静縮小を用いたためである。ただ分割1は、かなり高次まで実験値と比較的良く一致している。しかし、いずれの分割でも誤差は全体的に最大10%程度であり、極端な分割をしない限り、区分モード合成法の解析精度は良いといえる。図3-2-5～図3-2-9はいずれも主系のモード修正をした結果であり、各分系の採用モード数を増加させて一定値にしゅうれんしたときの有限要素法に対する誤差は、分割1で零に近く他も分割2以外はほぼ2.5%以内におさまっている。これは、有限要素法の計算を分割1で行ったからであるが、収束後の誤差は小さく、むしろ収束の速さが問題であろう。収束は分割3がもっとも早く、つづいて1、4、5、2の順に遅くなっており、図3-2-3における従系の大きさの順に等しい。すなわち、主系と従系の基本振動数の比の大きさの順と一致しており、従系の基本振動数が主系に比べ低い程よいのではないかと思われる。これは近似縮小過程によって導き誤差の原因の1つである拘束モードの寄与率が低下し、分系の振動が分系単体の拘束固有モード（採用モード）によってかなり正しく表現されるからであると思われる。特に、この比が最小になる分割2は、収束が遅いだけでなく収束後の誤差も大きい。分割4は5よりいくぶん精度が良い

がその差は小さく、非対称性は小さい。

分系の採用固有モードの次数の検討を行う。全系の固有振動数を少なくとも6次まで求めるために必要な分系の採用モードの次数は、分割3では5、分割1では10であり、各分系について最低次から15次までとれば、分割方法によらず十分である(図3-2-5から図3-2-9)。

本方法においては一般化座標として採用するモード数が少ないほど固有振動数は高くなる(表3-2-1参照)が、これは、有限要素法において自由度を少なく(すなわち要素分割を粗く)するほど原則として振動数が高くなるというよく知られた傾向と同一の現象である。

採用モード数を主系で多く従系で少なく(表3-2-1の右から10列目)したときとその逆(同13列目)を比べると、前者の方が計算精度は良く、これから本方法では主系の固有モードの方が従系より重要な役割をはたしていると思われる。各分系の採用モード数をあらかじめ同数に決める場合と採用モードの振動数の上限を決める場合を比較する(表3-2-1右から4~6列目と1~3列目)と、両者には差がなく、振動数の上限を決める方法の方が採用モード数が少なくても良い結果を導くようである。

主系の固有モード修正の検討を行う。少なくとも低次の固有振動数は、修正を行う方がはるかに計算精度が良い(図3-2-4と図3-2-5を比較)。また、採用モードの次数にかかわらず、修正を行わない方が行う方より固有振動数が高くなる(表3-2-1)。これは、主系単独の無修正モードは全系の振動モードを正しく表現していないにもかかわらず、これを一般化座標として用いるためであり、レーリ-法で正しい振動モードを用いない場合の誤差と同一の性質を有する。

高次の固有振動数のうちいくつかの無修正の方が実験値に近いが、これは無修正の方が精度が良いためではなく、無修正のために振動数を高く計算する誤差と後述の静縮小の影響が相殺したためである。以上より、主系の固有モードの修正はできるだけ行った方がよい。

次に、縮小方法の検討を行う。まず静縮小($\alpha = 0$)について考える。本方法では、高精度の計算を行う目的で分系の採用モード数を増すほど固有振動数は低下し、有限要素法より低い解を導く(図3-2-5~10)。また表3-2-1の計算値を実験値と比較すると、高次になるほど計算値が低くなる傾向が顕著である。全結果を検討し、静縮小を用いる場合には、低次の固有振動数は精度良く計算できるが、高次になるほど正しい値より低い方に誤差が増大することが判明した。

これはグヤンの静縮小で慣性力の項を省略したためであると考えられるので、

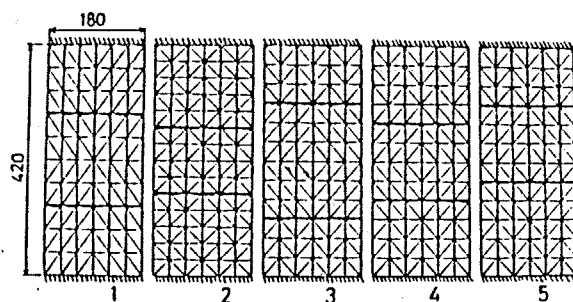
これを改良するために、縮小係数 α を0～0.4の間で変化させて計算した(表3-2-3)。これによれば、 α を増加させれば固有振動数が全体的に高くなり、高次の計算精度が最良となる零以外の α の値が存在するが、低次の計算値は大きく乱れ精度が著しく悪化することがわかる。ただ、本解析では自由度約500(図3-2-3参照)の全系の固有振動数のうち工学的に重要な低次20個についてのみの結果であり、もし振動数の高い方を計算すれば、動縮小($\alpha=1$)の方が正確な解を導き、静縮小ではきわめて低く誤差の大きい解を導くと思われる。

図3-2-11に示す点Fを励振したときの点Rの応答(伝達関数)を図3-2-12に示す。図3-2-12中で、点線は実験結果、実線と一点鎖線はそれぞれ本方法(主系従系区別有りの区分モード合成法)と縮小インピーダンス合成法(RIM)による計算結果である。本方法とRIMによる両計算結果は、ほとんど区別できないほど良い一致を示している。周波数が大きくなるにしたがい、計算結果は実験結果よりやや周波数が大きい方向にずれるが、両者は全体的にかなり良く一致しているといえる。

この計算において、1周波数の応答を求めるために必要な時間は、本方法で0.75秒(修正および無修正の両者とも)、RIMでは5.44秒であった(使用計算機はHITAC-M180)。

固有振動数と固有モードを求める計算時間を比較するために本供試体をFEM(サブスペース反復法)のプログラムを実行させた。すると、10次までの固有値計算に、本方法では280秒、FEMでは430秒を要した。

本方法による計算は、このような単純な供試体に対してさえFEMによる一体計算より速いことから、さらに複雑な構造物に対しては、計算機容量のみならず、計算時間の面でも、FEMよりはるかに有利であると推測できる。



板厚2mm, 上下端固定, 太線部で上中下の3分系に分割し, そのうち上下の2分系を主系, 中央を従系とする. 3節点18自由度三角形平板かく要素を使用.

図3-2-3 2端固定長方形平板の分割方法(5通り)

表3-2-2 固有振動数

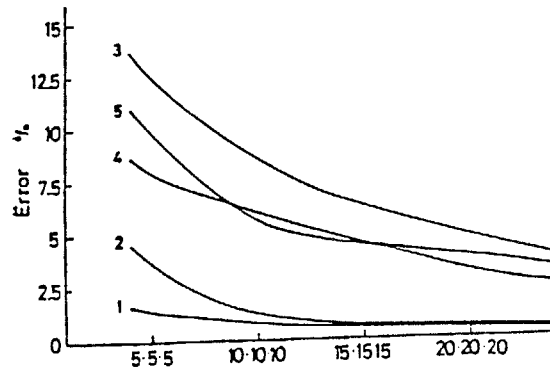
(単位Hz、 $\alpha = 0$ 、全分系の
採用固有モード数はすべて20、
主系の固有モードの修正は有)

次数	実験	有限要素法	分割2	分割3	分割4	分割5
1	61	62	63	62	62	62
2	115	113	112	112	112	112
3	167	174	169	171	171	171
4	245	256	248	250	250	250
5	347	348	334	338	339	339
6	395	389	391	389	389	389
7	461	445	429	433	433	433
8	525	525	526	528	528	528
9	576	591	556	566	566	566
10	685	698	658	667	667	667
11	747		723	724	724	724
12	844		830	854	853	853
13	941		939	961	960	960
14	1029		969	969	968	969
15	1081		976	971	972	973
16	1148		1093	1081	1081	1082
17	1246		1168	1205	1205	1204
18	1297		1253	1266	1267	1266
19	1382		1270	1269	1268	1266
20	1502		1274	1300	1299	1300

表3-2-3 固有振動数

(単位Hz、分割1、全分系の
採用固有モード数はすべて20、
主系の固有モードの修正は有)

次数	α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
1		62	173	265	293	302
2		113	209	321	372	389
3		175	300	400	458	489
4		257	336	429	373	498
5		348	358	460	523	561
6		389	429	477	531	563
7		445	452	511	583	629
8		526	573	666	736	763
9		591	619	722	746	773
10		698	715	733	867	977
11		724	726	776	886	1000
12		907	940	1022	1073	1124
13		963	981	1030	1153	1226
14		980	1000	1059	1158	1252
15		1010	1040	1120	1187	1266
16		1079	1099	1140	1224	1286
17		1268	1271	1277	1298	1387
18		1283	1303	1325	1365	1418
19		1295	1309	1371	1450	1488
20		1403	1409	1424	1461	1560



有限要素法の解に対する誤差(%), 横軸の数字 N_1, N_2, N_3 はそれぞれ各分系の採用固有モードの数を表す。図中の数字は全系の固有モードの次数を示す。

図 3 - 2 - 4 固有振動数の計算誤差
(分割 1、主系の固有モードの修正は無、 $\alpha = 0$)

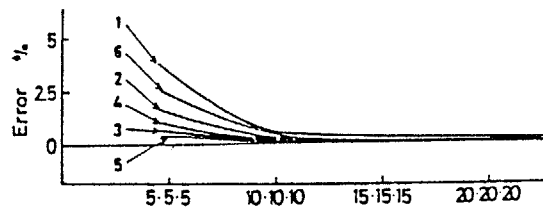


図 3 - 2 - 5 固有振動数の計算誤差
(分割 1、主系の固有モードの修正は有、 $\alpha = 0$)

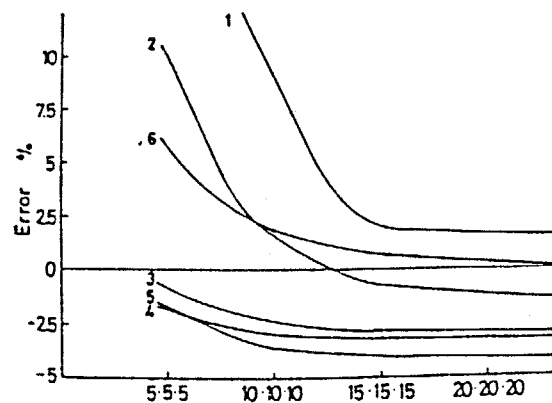


図 3 - 2 - 6 固有振動数の計算誤差
(分割 2、主系の固有モードの修正は有、 $\alpha = 0$)

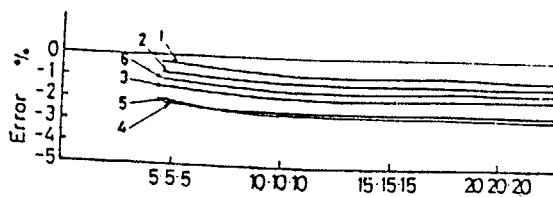


図 3 - 2 - 7 固有振動数の計算誤差
(分割 3、主系の固有モードの修正は有、 $\alpha = 0$)

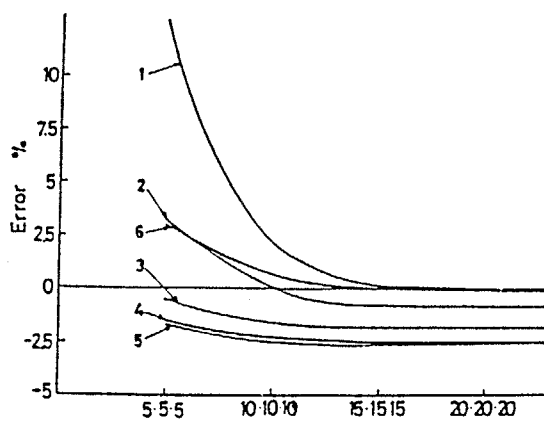


図 3 - 2 - 8 固有振動数の計算誤差
(分割 4、主系の固有モードの修正は有、 $\alpha = 0$)

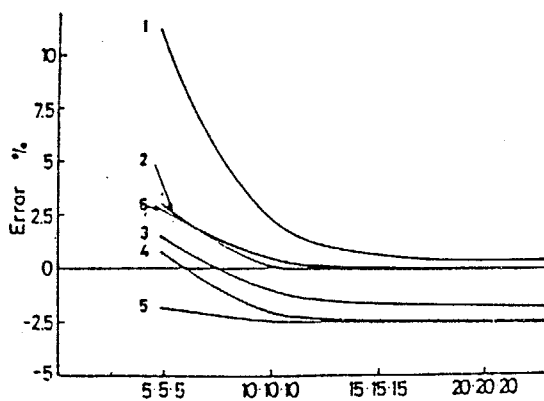


図 3 - 2 - 9 固有振動数の計算誤差
(分割 5、主系の固有モードの修正は有、 $\alpha = 0$)

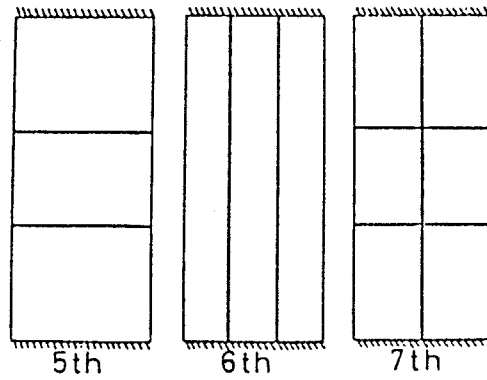
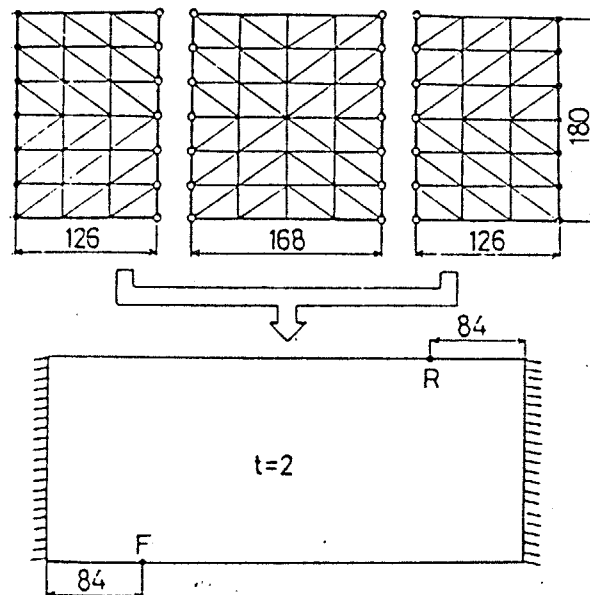


図 3 - 2 - 1 0 固有モードの例 (図中の太線は振動の節を示す)



3節点18自由度三角形平板かく要素使用。白丸は分系間の結合節点。黒丸は固定節点。F:加振点。R:応答点。

図 3 - 2 - 1 1 両端固定長方形板の分割方法

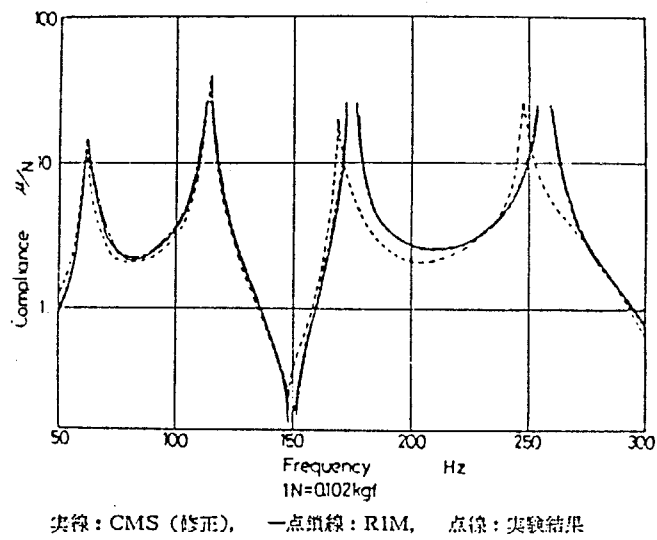


図 3 - 2 - 1 2 両端固定長方形板の強制振動応答
(コンプライアンス)

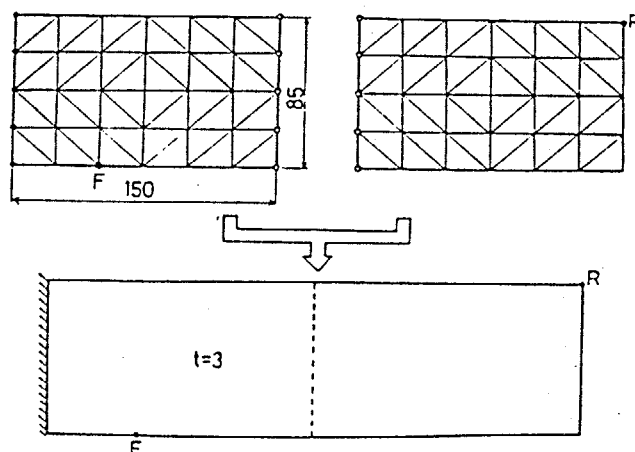
3. 2. 2. b 一端固定平板モデル

図3-2-13に示す一端固定の長方形平板を本方法で解析する。全系を2分系にわけ、固定端を有する分系を主系、他方を従系に分類する。RIMでも同一の2分系にし、各分系の有限要素分割も同一にする。

表3-2-4に本供試体の実験、本方法、およびRIMによる固有振動数の結果を示す。本方法においては主系および従系の採用モード数はともに20とした。この表からも本方法の計算では、主系の採用モードを無修正とした結果は、修正した固有モードを採用したものより、精度が明らかに悪く、大部分は振動数の高い方にずれている。

図3-2-14には、図3-2-13中の点Fを励振するときの点Rにおける応答（伝達関数）を示す。図中の点線は実験結果、実線は本方法（修正モード使用）による計算結果、一点鎖線は本方法の無修正モード使用の場合の結果である。高周波数域では、計算結果は実験結果より周波数の高い方へ多少ずれる（たとえば4次の固有振動数で5.5%）が、全体的には両者は一致しているといえる。この図には示していないが、RIMによる計算結果は、図中の実線とほとんど区別できないほど良い一致を示した。実験では、供試体鋼板を2個の鋼ブロックで強くはさみこむことによって固定条件をつくっているが、この方法では固定を完全には実現していないと思われる。その結果、固定端付近の曲げモーメントが大きくなる高次モードでは、完全固定よりも応答曲線が少し周波数の低い方向にずれる可能性がある。このことと、RIMと本方法による両計算結果がきわめて良い一致を示していることから、計算結果と実験結果のずれの主な原因は、計算誤差よりもむしろ実験誤差であると推定される。

なお、図3-2-14において1周波数あたりに要した計算時間は、修正および無修正の本方法が0.28秒、RIMが4.2秒であった（使用計算機はHITAC-M180）。



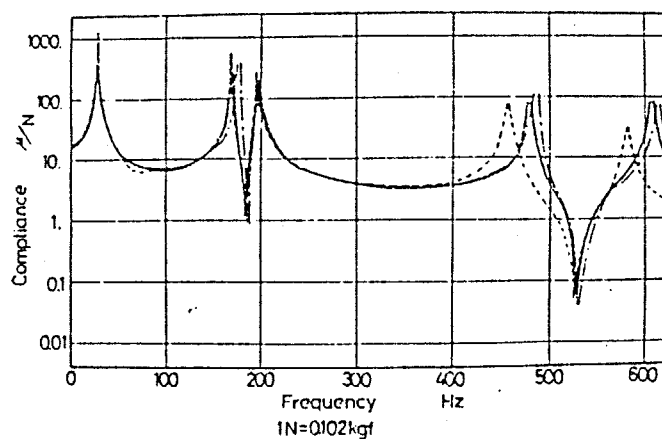
3節点18自由度三角形平板かく要素使用。白丸は結合節点。黒丸は固定節点。F：加振点。R：応答点。

図3-2-13 一端固定長方形板の分割方法

表 3-2-4 一端固定長方形板の固有振動数
(CMSは主系、従系の採用固有モード数を20次とした)

次数	実験	CMS 修正	CMS 無修正	RIM
1	27	27	27	27
2	167	169	177	167
3	196	195	196	195
4	456	481	483	470
5	580	609	616	606
6	829	821	902	821
7	955	953	996	954
8	1080	1087	1091	1087
9	1460	1591	1603	1590
10	1622	1660	1705	1658
11	2179	2164	2166	2162
12	2358	2356	2364	2353
13	2409	2375	2426	2372
14	2520	2475	2550	2471
15	2850	2911	2920	2907
16	3190	3183	3305	3181
17	3460	3406	3446	3401
18	3551	3572	3603	3568
19	4055	4055	4190	4036
20	4248	4186	4387	4158

(Hz)



実線：CMS（修正），一点鎖線：CMS（無修正），点線：実験結果

図 3-2-14 一端固定長方形板の強制振動応答
(コンプライアンス)

3. 2. 2. c 箱型モデル

図3-2-15に示すような長方形平板（各2枚）から組み立てた図3-2-16の箱型供試体を解析する。本方法では、これを4分系に分割し、固定端を有する部材1、2を主系、それらを結合する部材3、4を従系とする。RIMでも同一の4分系に分割し、各分系の有限要素分割も同一にする。

表3-2-5に固有振動数の結果を示す。本区分モード合成法では全分系の採用固有モード数をすべて20とした。この供試体についても、先の例と同様に主系の採用固有モードを修正した計算結果の方が無修正の結果より明らかに精度が良いことがわかる。実験値に対して少なくとも15次ぐらいまではたいへん精度が良いといえる。ただし、実験に際しては、供試体の製作および測定に細心の注意をはらっているが、固定条件や部材間の結合条件に理想系とわずかの相違は生じてしまう（部材結合は溶接）し、測定からも多少の誤差は含まれてしまうことは考慮に入れている。

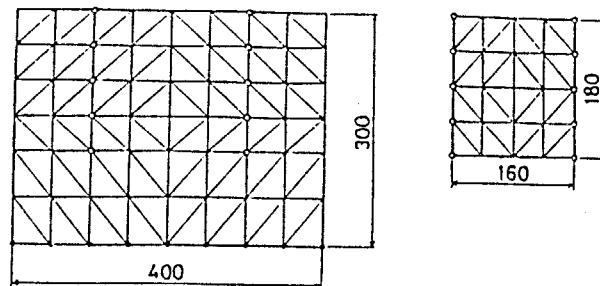
本方法は、全系の変位を主系と従系の最低次からある次数のモードの一次結合で表す近似解法の一つである。そのために、連続体を離散系にするための有限要素分割による誤差の上に、さらにこの近似による誤差が重なる。それを調べるために、直接解法の一つであり、有限要素分割以外には原理的に誤差を生じないRIMの結果と比較すると、本方法はRIMよりわずかに高めの固有振動数を出力しているが最高でも約3%の誤差であり、その誤差はかなり小さく実用上は問題ない程度である。

図3-2-17と3-2-18は、本供試体の点F（図3-2-16参照）を励振したときの点Rの応答曲線である。図3-2-17では、実線が修正モードを用いた本区分モード合成法により計算結果、点線は実験結果である。一方、図3-2-18では、実線と一点鎖線はそれぞれ修正モードと無修正モードを用いた区分モード合成法による計算結果であり、点線はRIMによる計算結果である。

図3-2-17から、高周波域における実験結果と計算結果の差が図3-2-12や図3-2-14よりいくぶん大きいことがわかる。これは、箱型供試体の固定条件の実現の困難さ、溶接時に生ずる不完全接合や形状誤差や残留応力などが主因となるためではないかと考えられる。

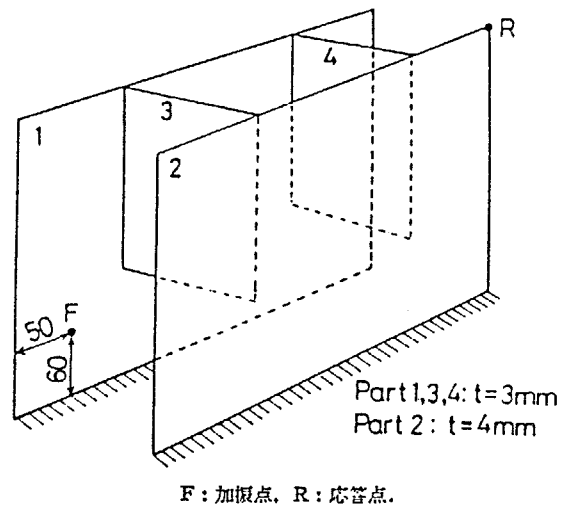
図3-2-18から、修正モードを用いた本方法の結果はRIMによる結果ときわめて良く一致しているが、無修正モードを用いると誤差が若干増大することがわかる。

一方、図3-2-18の計算時間は、1周波数あたり、区分モード合成法で3.62秒、RIMで16.7秒であった（使用計算機HITAC-M180システム）。



3 節点 18 自由度三角形平板かく要素使用。白丸は結合節点、黒丸は固定節点。

図 3 - 2 - 1 5 箱形供試体の部材の分割方法



F: 加振点, R: 応答点。

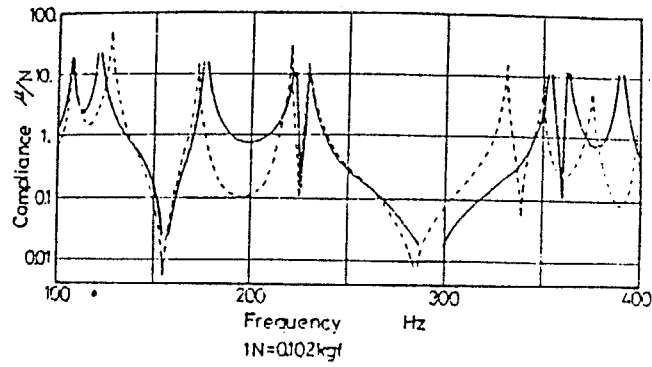
図 3 - 2 - 1 6 箱形供試体

表 3 - 2 - 5 箱形供試体の固有振動数

(CMS は主系、従系の採用固有モード数を 20 次とした)

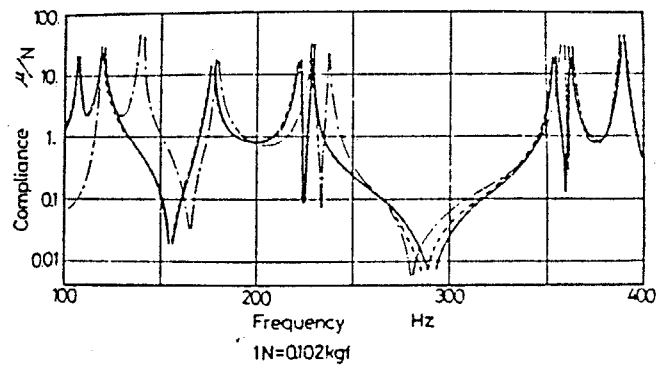
次数	実験	CMS 修正	CMS 無修正	RIM
1	103	104	123	103
2	127	123	147	122
3	170	175	180	175
4	220	221	224	221
5	229	228	239	225
6	330	353	358	352
7	350	361	368	361
8	376	390	386	389
9	397	391	404	390
10	452	464	471	464
11	470	488	501	488
12	486	509	526	507
13	524	546	552	532
14	576	581	599	572
15	588	614	640	610
16	631	662	679	653
17	650	666	682	656
18	688	683	692	678
19	720	711	756	704
20	751	712	769	709

(Hz)



実線：CMS（修正），点線：実験結果

図 3 - 2 - 1 7 箱形供試体の強制振動応答（コンプライアンス）



実線：CMS（修正），一点鎖線：CMS（無修正），点線：RIM

図 3 - 2 - 1 8 箱形供試体の強制振動応答（コンプライアンス）

3.3 区分モード合成法 (拘束モードを用いる方法)

[3.2.1]で主系従系の区別ありのモード合成法 (Benfieldの方法) を説明したが、この方法では分系を主系と従系に分類する必要がある。この点は実用上大きい欠点となる。すなわち、複数の分系を主系と従系にどのように分類すべきか、ということを考えて解析対象物のモデル化と分系への分割を行わなければならない。そこで、主系従系の区別をなくし、かつその方法の持つ有効性をそのまま保持する区分モード合成法を開発提案する。

3.3.1 理論

まず、複雑な機械構造物 (全系) を有限要素法により定式化できる程度の複雑さを有するいくつかの分系に分割する。先の方法とは異なり、分系はすべて平等であり、分割の制限はまったくない。

たとえば、図3-3-1に示すような構造物系では、全系は3つの分系に分割されており、分系1、分系2、分系3の内部領域はそれぞれ添字1a、2a、3aで表す。また分系1と分系2の間の結合領域はb、分系1と分系3の間の結合領域はc、分系2と分系3の間の結合領域はdの添字で表す。本解析方法では全系の変位を分系の内部領域の変位と分系間の結合領域の変位に区分し、それぞれの変位をいくつかの固有モードで表現する。

まず、結合領域について述べる。この部分の変位は、各分系の質量行列と剛性行列をグヤンの静縮小で結合領域のみの自由度に縮小し、それらを重ね合わせて得られる固有モードの一次結合で表す。

分系1についてグヤンの静縮小を適用する。静的釣り合いの方程式は、

$$\begin{bmatrix} K_{aa}^{(1)} & K_{ab}^{(1)} & K_{ac}^{(1)} \\ K_{ba}^{(1)} & K_{bb}^{(1)} & K_{bc}^{(1)} \\ K_{ca}^{(1)} & K_{cb}^{(1)} & K_{cc}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{1a} \\ \delta_b \\ \delta_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (3-3-1)$$

ここで、Xは結合領域b上での分系2から受ける作用力、Yは結合領域c上での分系3から受ける作用力を表す。式(3-3-1)の最上段より

$$[K_{aa}^{(1)}]\{\delta_{1a}\} + [K_{ab}^{(1)}]\{\delta_b\} + [K_{ac}^{(1)}]\{\delta_c\} = \{0\} \quad (3-3-2)$$

式(3-3-2)を変形すると

$$\{\delta_{1a}\} = -[K_{aa}^{(1)}]^{-1}[K_{ab}^{(1)}]\{\delta_b\} - [K_{aa}^{(1)}]^{-1}[K_{ac}^{(1)}]\{\delta_c\} \quad (3-3-3)$$

そこで、式(3-3-3)を次のように書き改める。

$$\{\delta_{1a}\} = [T_{1b}]\{\delta_b\} + [T_{1c}]\{\delta_c\} \quad (3-3-3')$$

すると、分系1の内部領域の変位は結合領域の変位で表すことができるので、分系1の全変位は

$$\begin{Bmatrix} \delta_{1a} \\ \delta_b \\ \delta_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1b} & T_{1c} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_b \\ \delta_c \end{Bmatrix} = [R_1] \begin{Bmatrix} \delta_b \\ \delta_c \end{Bmatrix} \quad (3-3-4)$$

分系1の質量行列と剛性行列の前後から行列 $[R_1]^T$ と $[R_1]$ をかけると、結合領域のみの自由度を有する質量行列と剛性行列になる。このように縮小された質量行列と剛性行列はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{bb}^{(1)} & \bar{M}_{bc}^{(1)} \\ \bar{M}_{cb}^{(1)} & \bar{M}_{cc}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1b}^T M_{aa}^{(1)} T_{1b} + T_{1b}^T M_{ab}^{(1)} + M_{ba}^{(1)} T_{1b} + M_{bb}^{(1)} & T_{1b}^T M_{aa}^{(1)} T_{1c} + T_{1b}^T M_{ac}^{(1)} + M_{ba}^{(1)} T_{1c} + M_{bc}^{(1)} \\ T_{1c}^T M_{aa}^{(1)} T_{1b} + T_{1c}^T M_{ab}^{(1)} + M_{ca}^{(1)} T_{1b} + M_{cb}^{(1)} & T_{1c}^T M_{aa}^{(1)} T_{1c} + T_{1c}^T M_{ac}^{(1)} + M_{ca}^{(1)} T_{1c} + M_{cc}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3-3-5)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{bb}^{(1)} & \bar{K}_{bc}^{(1)} \\ \bar{K}_{cb}^{(1)} & \bar{K}_{cc}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1b}^T K_{aa}^{(1)} T_{1b} + T_{1b}^T K_{ab}^{(1)} + K_{ba}^{(1)} T_{1b} + K_{bb}^{(1)} & T_{1b}^T K_{aa}^{(1)} T_{1c} + T_{1b}^T K_{ac}^{(1)} + K_{ba}^{(1)} T_{1c} + K_{bc}^{(1)} \\ T_{1c}^T K_{aa}^{(1)} T_{1b} + T_{1c}^T K_{ab}^{(1)} + K_{ca}^{(1)} T_{1b} + K_{cb}^{(1)} & T_{1c}^T K_{aa}^{(1)} T_{1c} + T_{1c}^T K_{ac}^{(1)} + K_{ca}^{(1)} T_{1c} + K_{cc}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3-3-6)$$

分系2、分系3についても分系1に対する式(3-3-1)から式(3-3-6)のような行程を実行し、式(3-3-5)と(3-3-6)と同様の縮小された質量行列と剛性行列が得られる。

そこで、それらを結合領域の重なり状態と同じに重ね合わせ、一般的固有値問題、

$$\left(\begin{bmatrix} \bar{K}_{bb}^{(1)} + \bar{K}_{bb}^{(2)} & \bar{K}_{bc}^{(1)} & \bar{K}_{bd}^{(2)} \\ \bar{K}_{cb}^{(1)} & \bar{K}_{cc}^{(1)} + \bar{K}_{cc}^{(3)} & \bar{K}_{cd}^{(3)} \\ \bar{K}_{db}^{(2)} & \bar{K}_{dc}^{(3)} & \bar{K}_{dd}^{(2)} + \bar{K}_{dd}^{(3)} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \bar{M}_{bb}^{(1)} + \bar{M}_{bb}^{(2)} & \bar{M}_{bc}^{(1)} & \bar{M}_{bd}^{(2)} \\ \bar{M}_{cb}^{(1)} & \bar{M}_{cc}^{(1)} + \bar{M}_{cc}^{(3)} & \bar{M}_{cd}^{(3)} \\ \bar{M}_{db}^{(2)} & \bar{M}_{dc}^{(3)} & \bar{M}_{dd}^{(2)} + \bar{M}_{dd}^{(3)} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \chi_b \\ \chi_c \\ \chi_d \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3-3-7)$$

を解くことによって、1次からk次までの固有モードを求める。そして、結合領域 b、c、dの変位は、これらの固有モードの一次結合で表す。すなわち、

$$\begin{Bmatrix} \delta_b \\ \delta_c \\ \delta_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_b \\ \phi_c \\ \phi_d \end{bmatrix} \{\xi_c\} \quad (3-3-8)$$

ここで、 $\begin{bmatrix} \phi_b \\ \phi_c \\ \phi_d \end{bmatrix}$: 式(3-3-7)の1次からk次までの固有モードを各列に並べたモード行列

$\{\xi_c\}$: 各固有モードの変位への寄与率を示すベクトル

次に、各分系の内部領域について述べる。この領域は、式(3-3-8)で表現する結合領域の変位に伴って生じる変位と、結合領域を固定とした固有モードの一次結合の和で表す。

まず、分系1の内部領域の変位について考える。分系1は結合領域 b、cを有しているので、結合領域 b、cの変位によって生じる変位は式(3-3-3')のように表現する。そして、さらにその変位に結合領域 b、cを固定とした場合の一般的固有値問題

$$(\{K_{aa}^{(1)}\} - \omega^2 \{M_{aa}^{(1)}\})\{\chi\} = \{0\} \quad (3-3-9)$$

より得られる固有モードの一次結合を加えることにより、内部領域の変位を表す。すなわち、

$$\{\delta_{1a}\} = [T_{1b}]\{\delta_b\} + [T_{1c}]\{\delta_c\} + [\phi_{1a}]\{\xi_1\} \quad (3-3-10)$$

ここで、行列 $[\phi_{1a}]$ は式(3-3-9)より得られた1次からl次までの固有モード行列、 $\{\xi_1\}$ はそれぞれの固有モードの変位への寄与率を示す。

式(3-3-10)に式(3-3-8)の $\{\delta_b\}$ 、 $\{\delta_c\}$ に関する部分を代入し、整理すると、

$$\{\delta_{1a}\} = [T_{1b}\phi_b + T_{1c}\phi_c, \phi_{1a}]\begin{Bmatrix} \xi_c \\ \xi_1 \end{Bmatrix} \quad (3-3-11)$$

となり、この式 (3-3-11) が分系1の内部領域の変位を表す式となる。

次に、分系2の内部領域の変位について分系1と同様の式の展開を行えば、分系1に関する式 (3-3-11) に対応した式として次式が得られる。

$$\{\delta_{2a}\} = [T_{2b}\phi_b + T_{2d}\phi_d, \phi_{2a}] \begin{Bmatrix} \xi_c \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \quad (3-3-12)$$

ここで、 $[\phi_{2a}]$ は分系2の結合領域を固定とした分系2の内部領域に関する一般的固有値問題

$$([\mathbf{K}_{aa}^{(2)}] - \omega^2 [\mathbf{M}_{aa}^{(2)}]) \{\chi\} = \{0\} \quad (3-3-13)$$

より得られる1次からm次までの固有モード行列である。

分系3の内部領域の変位の表現も同様に行う。 $[\phi_{3a}]$ を分系3の結合領域を固定とした内部領域に関する一般的固有値問題

$$([\mathbf{K}_{aa}^{(3)}] - \omega^2 [\mathbf{M}_{aa}^{(3)}]) \{\chi\} = \{0\} \quad (3-3-14)$$

より得られる1次からn次までの固有モード行列とすると、 $\{\delta_{3a}\}$ は次式のように表される。

$$\{\delta_{3a}\} = [T_{3c}\phi_c + T_{3d}\phi_d, \phi_{3a}] \begin{Bmatrix} \xi_c \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad (3-3-15)$$

そこで、全系の変位は式 (3-3-8)、式 (3-3-11)、式 (3-3-12)、式 (3-3-15) より

$$\begin{Bmatrix} \delta_b \\ \delta_c \\ \delta_d \\ \delta_{1a} \\ \delta_{2a} \\ \delta_{3a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_b & 0 & 0 & 0 \\ \phi_c & 0 & 0 & 0 \\ \phi_d & 0 & 0 & 0 \\ T_{1b}\phi_b + T_{1c}\phi_c & \phi_{1a} & 0 & 0 \\ T_{2b}\phi_b + T_{2d}\phi_c & 0 & \phi_{2a} & 0 \\ T_{3c}\phi_c + T_{3d}\phi_d & 0 & 0 & \phi_{3a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_c \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad (3-3-16)$$

$$(\mu^2[\hat{M}] + \mu[\hat{C}] + [\hat{K}])\{\xi_0\} = \{0\} \quad (3-3-19)$$

で μ と $\{\xi_0\}$ を解き、 μ の虚数部が固有振動数となり、 $\{\xi_0\}$ を式(3-3-16)に代入すれば固有モードとなる。

また、強制振動を求めるには、式(3-3-19)で減衰を省略した固有モードを用いてモード解析法を実行する。

すなわち、 $[\xi_0]$ を式(3-3-19)で減衰を省略して求めた固有モードを並べたモード行列とすると、 $\{\xi\}$ は、

$$\{\xi\} = [\xi_0]\{d\} \quad (3-3-20)$$

と表される。これを式(3-3-18)に代入し、各項に左辺から $[\xi_0]^T$ をかけてできる式

$$\begin{aligned} &(-\omega^2[\xi_0]^T[\hat{M}][\xi_0] + j\omega[\xi_0]^T[\hat{C}][\xi_0] \\ &+ [\xi_0]^T[\hat{K}][\xi_0])\{d\} = [\xi_0]^T[A]^T\{F\} \end{aligned} \quad (3-3-21)$$

より $\{d\}$ を解き、式(3-3-20)に代入し $\{\xi\}$ を求め、さらにこの $\{\xi\}$ を式(3-3-16)に代入すれば、全系の応答が求められる。ただし、式(3-3-21)において $[\xi_0]^T[\hat{M}][\xi_0]$ と $[\xi_0]^T[\hat{K}][\xi_0]$ は対角行列であるから、 $[\xi_0]^T[\hat{C}][\xi_0]$ の非対角成分を対角成分に比べて無視できる場合は式(3-3-21)は

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_p \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_p \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_3 \end{Bmatrix} \quad (3-3-22)$$

となる。したがって $\{d\}$ の成分はそれぞれ独立に解くことができ、

$$d_i = \frac{z_i}{k_i - \omega^2 m_i + j\omega c_i} \quad (3-3-23)$$

設計段階で図面だけから減衰行列を求めることができれば、上記の式の展開によって、減衰の影響を完全に考慮した振動解析ができる。しかし、現実には、減衰行列を求めることは不可能にちかひので、何らかの近似的手法によらざるを得ない。

第1の方法は、比例減衰の仮定の導入である。すなわち、減衰行列 [C] を質量行列 [M] と剛性行列 [K] により

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (3-3-23)$$

と表す。 α と β は任意係数であり、実際の解析における α と β の値は、供試体の試験結果に比例減衰を用いたモード特性分離法(カーブフィット)を適用して求めた多くのモード減衰比 ζ_i から最小二乗法を利用して算出する。モード特性分離法では、実験で得られた点rを励振した場合の点sの伝達関数を、

$$\frac{\delta_s}{F_r} = -\frac{1}{\omega^2 Y} + \sum_{i=1}^{n'} \frac{\phi_s^i \phi_r^i}{k_i \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right)^2 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\Omega_i} \right\}} + \frac{1}{W} \quad (3-3-24)$$

Y : 等価質量

W : 剰余剛性

k_i : 第i次のモード剛性

j : 虚数単位

ϕ^i : 第i次の固有モード

Ω_i : 第i次の不減衰固有角振動数

で最もよく表現するように、 Y 、 $(\phi_s^i \phi_r^i / k)$ 、 ζ_i 、 W 、および Ω_i を決定する。モード減衰比 ζ_i と α 、 β の関係は、その定義より

$$2\zeta_i = \frac{\alpha}{\Omega_i} + \beta \Omega_i \quad (3-3-25)$$

である。そこで、多くの実験結果に対して式(3-3-24)を用いたモード特性分離法を適用して得られた ζ_i と Ω_i に式(3-3-25)が最も良く一致するように α 、 β を求める。すると、式(3-3-22)は次のようになる。

$$d_i = \frac{\zeta_i}{k_i \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right)^2 + j\omega \left(\frac{\alpha}{\Omega_i^2} + \beta \right) \right\}} \quad (3-3-26)$$

通常の構造物では、 α の値は0～10程度の範囲に入ることが多い。また、 β の値は、 β [K]の対角成分の値の位が [M]の対角成分の値の位とほぼ同じになるような範囲に入ることが多いようだ。

第2の方法は、モード特性分離法で求めたモード減衰比 ζ_i を直接用いる方法である。この場合には式 (3-3-22) を

$$d_i = \frac{\zeta_i}{k_i \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right)^2 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\Omega_i} \right\}} \quad (3-3-27)$$

のように置き換えて、 ζ_i を代入して解析する。設計段階などで、直接供試体のモード減衰比を測定できない場合には、過去に蓄積した多くのモード減衰比のデータベースより、その供試体の ζ_i の値を推定し、それを用いるようにすればよい。

第3の方法は、供試体の部分構造の中にオイルダンパなどの減衰機構がある場合に対する方法である。この場合、構造物全体の減衰にはこれらのダンパによる減衰効果が支配的となる。オイルダンパや軸受部の油膜による減衰値は理論的に算出できることが多いので、それらのみによって減衰行列 [C] を作成し、それを式 (3-3-17) の減衰行列として式 (3-3-21) まで式の展開を行う。そして、 $[k_i][C][k_i]$ の非対角成分を対角上成分と比較して無視できる場合には式 (3-3-22) により、またそれらが無視できない場合には式 (3-3-21) の連立方程式により {d} を求め、強制振動応答を計算することができる。

設計段階で減衰効果を精度よく考慮するには、減衰行列を純理論的に計算することが困難な現在、多くの試験データによって減衰に関するデータベースを構築し、その情報を利用できるようにすることが重要であり、経験的技術力が大きく支配する。

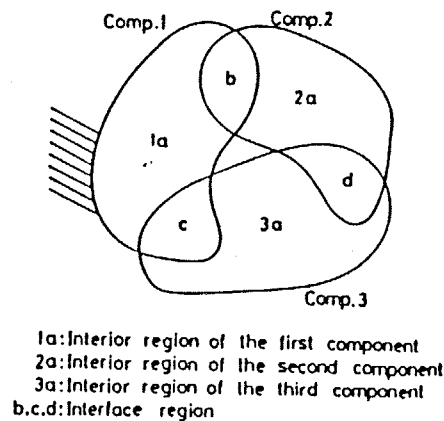


図 3-3-1 3分系からなる構造物

3.3.2 検討

本節で記すCMSは、主系従系の区別なしの区分モード合成法を意味する。

3.3.2.a 一端固定平板モデル (その1)

図3-3-2に示す厚さ3mm長さ300mm幅85mmの一端固定鋼平板を供試体として、分系への分割の仕方と採用モード数の影響を検討する。なお、実験方法は通常行われている定常励振試験による。すなわち、定常正弦波で供試体を励振し、供試体の応答はそれに取りつけた小形加速度計で検出する方法である。

分系への分割方法の影響について検討する。図3-3-2に示すように、一端を固定とした長方形平板をDiv. 1~Div. 8のように8通りの方法で、それぞれ2個ないし3個の分系に分割する。個々の分系に用いる有限要素分割(3節点18自由度三角形平板殻要素)は、すべての分割方法で同一とする。各々の分割方法について、本CMSにより固有振動数と固有モードを求める。表3-3-1は固有振動数の結果を示し、左側から実験結果(EXP.)、縮小インピーダンス合成法(RIM)による計算結果、そして、Div. 1からDiv. 8までがCMSによる結果であり、どの分割方法の場合でも結合領域の変位を表すための採用固有モード数は17、分系の内部領域の採用固有モード数は各々20とし、同一条件にする。空白部分は解析結果の実験結果からの誤差が30%以上になったところである。

これを比較すると、Div. 1, Div. 2, Div. 7がたいへん精度良く15次まで求められており、つづいてDiv. 3の順になる。これらに共通する分系の分割の仕方は、板の対称性を考慮し、しかも結合領域を単純な直線にしている点である。解析方法の説明([3.3.1]参照)で示したように、結合領域の変位を表す採用固有モードは、各分系の剛性行列と質量行列を縮小したものを重ね合わせてできる剛性行列と質量行列から得られる。その1次から17次までの固有モードの一次結合で供試体の該当部分の変位をどれほど精度良く表現できるか、という点によって解析精度は大きく左右されると考えられる。対称性を保持し、しかも分系間の結合領域が単純な形状である場合(Div. 1, 2, 7など)がもっとも良くこの条件を満足すると推定できる。そこで、分系の分割の仕方については、結合領域の形状をできるだけ単純にし、各分系を極端に細長い形状や凹凸部分の多い形状にならないようにすることが良い精度を得るひとつの要点であると思われる。これは有限要素法において要素形状が極端に悪い場合に解析精度が悪化するというよく知られた性質と似た現象であろう。

しかし、表3-3-1においては10次程度までは、どの分割方法の結果も、

実用的にはかなり良い精度であるといえそうである。そこで、分系への分割に際しては、極端に不自然な分割をしなければ、あまり分割方法を気にしなくてすむようである。この点は実用上の取り扱いが容易となるので都合がよい。

採用固有モード数の影響について検討する。本CMSでは、全系の変位を表すために、すべての分系の質量行列と剛性行列を結合領域部のみに縮小し重ね合わせて作成した質量行列と剛性行列から得られる固有モードと、各分系の内部領域の固有モード（結合領域は固定）を用いる。そこで、それらの採用固有モードの数が計算結果の精度に与える影響をみる。

図3-3-3はそのための供試体の分割の仕方を示す。この分割方法で採用固有モード数を種々に変えて求めた固有振動数を表3-3-2に示す。表3-3-2の中でM1は結合領域の採用固有モード数、M2は分系1の内部領域の採用固有モード数、M3は分系2の内部領域の採用固有モード数を示す。またEXP.は実験結果、RIMは縮小インピーダンス合成法による結果を示す。表3-3-2の空白部分は、採用固有モード数の和が小さいために全系の運動方程式の自由度が小さくなり、求めることができない部分である。

表3-3-2では、3次までは採用モード数の差による影響はまったくない。また、高次の固有振動数になるほど、採用固有モード数を多くした解析結果の方が精度良くなる傾向にある。全体的にかなり少ない採用固有モード数で相当高次まで精度良く解析できるので、実用上は各分系の内部領域も結合領域も、求めたい全系の固有モードの次数と同程度の採用固有モード数を採用しておけば十分であろう。

図3-3-4には、固有モード形の例を示す。これらは実験結果、縮小インピーダンス合成法による結果、本CMSの結果ともに良く一致した。

なお、表3-3-2のM1=17、M2=20、M3=20とした場合のCMSの計算時間は195秒（著者作成のプログラムでHITAC-M200H使用）であった。

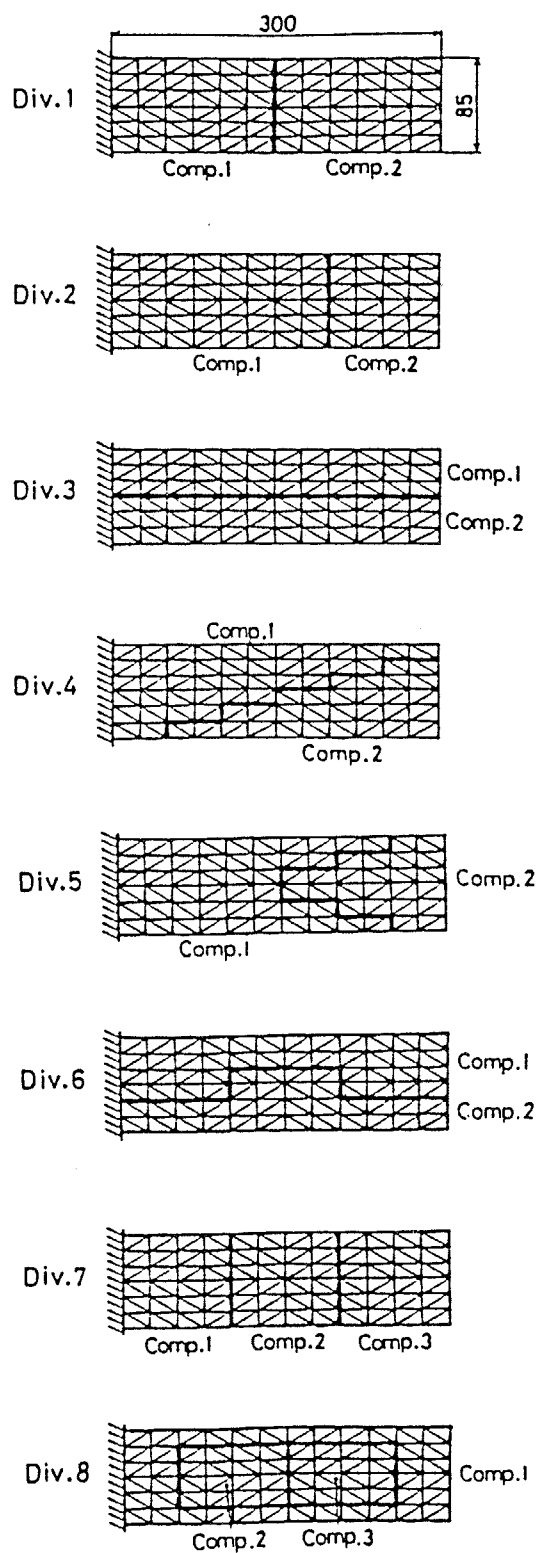


図 3 - 3 - 2 分系への分割図

表 3 - 3 - 1 固有振動数

(CMS では, すべての分割方法において結合領域の採用固有モード数 17, 分系の内部領域の採用固有モード数 20)

NO.	EXP.	RIM	Div.1	Div.2	Div.3	Div.4	Div.5	Div.6	Div.7	Div.8
1	27	27	26	27	29	31	30	30	27	30
2	167	167	176	176	176	177	176	176	176	176
3	196	195	201	201	200	201	201	201	201	202
4	456	470	501	501	501	501	501	501	501	501
5	580	606	627	626	626	627	626	626	627	627
6	829	821	798	797	800	799	799	800	798	799
7	955	954	1002	1002	1002	1002	1003	1002	1002	1002
8	1080	1087	1125	1125	1125	1126	1126	1125	1126	1125
9	1460	1590	1688	1689	1688	1694	1717	1690	1694	1701
10	1622	1658	1731	1731	1730	1769	1733	1745	1807	1738
11	2179	2162	2239	2243	2305	2403	2245	2464	2236	↗
12	2358	2353	2475	2473	2565	2634	2476	2893	2507	↗
13	2409	2372	2502	2502	2984	2721	2732	↗	2622	↗
14	2520	2471	2616	2616	3038	3031	2891	↗	2827	↗
15	2850	2907	3019	3004	↗	3514	3546	↗	3090	↗

(Hz)

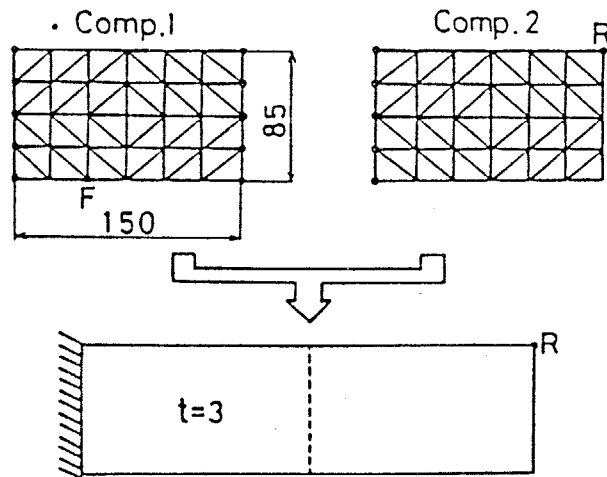


図 3 - 3 - 3 供試体の分割の仕方

表 3 - 3 - 2 固有振動数

M1	EXP.	RIM	17	17	17	17	17	17	17	10	10	10	10	5	5	5	5	
M2			20	17	10	5	20	20	10	5	20	15	10	5	20	15	10	5
M3			20	17	10	5	10	5	20	20	20	15	10	5	20	15	10	5
NO.																		
1	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	
2	167	167	175	175	175	175	175	175	175	175	175	175	175	175	175	175	175	
3	196	195	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	
4	456	470	496	496	496	496	496	496	496	496	496	496	496	496	501	501	501	
5	580	606	625	625	625	625	626	625	625	625	625	625	625	626	625	625	625	
6	829	821	822	822	822	851	822	851	822	822	822	822	822	851	822	822	822	
7	955	954	982	982	983	985	983	984	983	984	983	983	983	986	984	984	984	
8	1080	1087	1119	1119	1119	1122	1119	1122	1119	1119	1119	1119	1120	1123	1119	1120	1120	
9	1460	1590	1642	1642	1643	1649	1643	1647	1643	1645	1643	1643	1643	1650	1645	1645	1646	
10	1622	1658	1709	1709	1713	1731	1712	1724	1710	1715	1710	1711	1714	1732	1712	1712	1715	
11	2179	2162	2265	2265	2270	2507	2269	2480	2265	2271	2271	2272	2276	2349	2349	2350	2350	
12	2358	2353	2424	2424	2431	2546	2431	2515	2424	2424	2427	2428	2434	2428	2429	2435	2435	
13	2409	2372	2474	2474	2483	2697	2480	2693	2478	2500	2479	2480	2488	2519	2520	2527	2527	
14	2520	2471	2559	2560	2567	2567	2564	3262	2561	2580	2560	2561	2567	2826	2826	2826	2826	
15	2850	2907	3010	3011	3029	3029	3026	3863	3011	3023	3030	3035	3049	3284	3291	3291	3291	
16	3190	3181	3272	3274	3320	3320	3306	4278	3283	3349	3275	3282	3282	3351	3351	3351	3351	
17	3460	3401	3519	3519	3536	3536	3527	4533	3529	3886	3521	3522	3522	3540	3541	3541	3541	
18	3551	3568	3667	3671	3704	3704	3697	4719	3673	3902	3668	3676	3676	4015	4015	4015	4015	
19	4055	4036	4015	4015	4130	4130	4015	4759	4130	4130	4015	4015	4015	4363	4363	4363	4363	
20	4248	4158	4308	4336	4719	4719	4719	5957	4308	4308	4308	4363	4363	4363	4363	4363	4363	

(Hz)

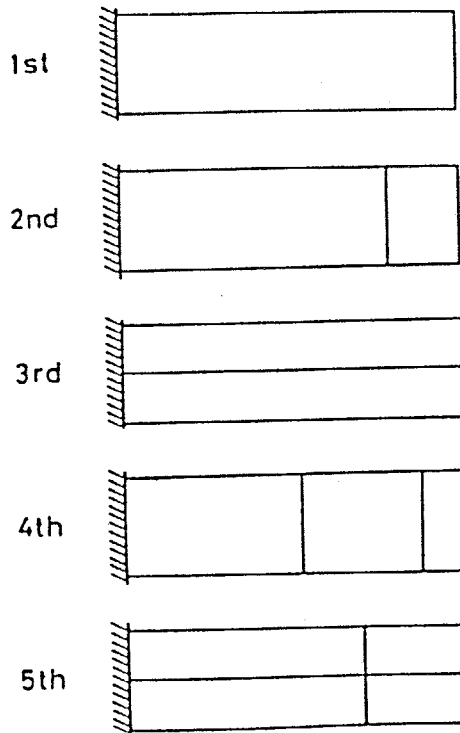


図 3 - 3 - 4 長方形板の固有モード形の例

3. 3. 2. b 一端固定平板モデル (その2)

別の形状の平板モデルとして図3-3-5に示すような、厚さ2.5mm、一辺200mmの一端固定正方形平板について解析する。

計算では、これを2つの分系に分割する。図3-3-5中でFは励振点、Rは応答点を示す。CMSの計算に用いた採用固有モード数は、分系1と分系2の内部領域に関するモード数が20次まで、結合領域に関しても20次までの合計60である。

実験および計算より得られた固有振動数を表3-3-3に示す。CMSによる計算結果は実験値と良い一致を示しており、この解析方法の精度の良さを示している。

図3-3-6に点Fを励振したときの点Rの応答を示す。破線が実験結果、実線がモード減衰比(平均化したもの)を用いたCMSの計算結果であり、そのモード減衰比の値は表3-3-4に示す。両者の結果は共振峰山頂の値も含めて全体的にかなり良い一致を示している。

図3-3-7は、表3-3-5に示すような比例粘性減衰を用いた場合のCMSの計算結果と実験結果を比較したものである。これも全体的には両者がかなり良く一致しているといえるが、図3-3-6と比較すると、共振峰山頂の値の誤差が若干大きいようである。この原因は、モード減衰比を使用する場合はモード特性分離法(曲線適合)により実験的に得られたモード減衰比をそのまま使用するのに対して、比例減衰として係数 α と β を用いる場合には、実験から得られたモード減衰比の分布に最小二乗法を適用するので、全体的にはかなり良い精度が得られるものの、各共振周波数ごとについては必ずしも良い一致を示さないためである。

なお、CMSによる本供試体の計算時間は、固有振動数と固有モードを求めて、さらに全節点に対して0Hzから600Hzまで0.5Hzおきに1201周波数点の応答を求めるのに約277秒であった(著者作成のプログラムでHITAC-M200H使用)。

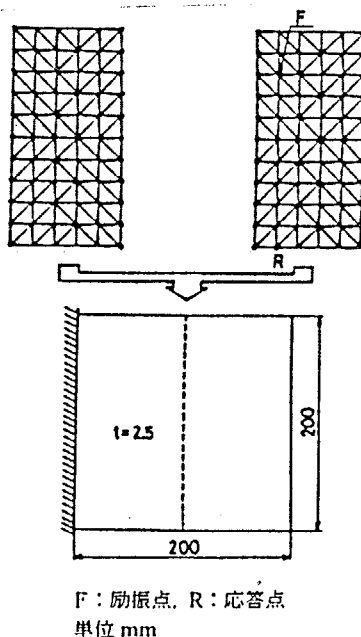


図3-3-5 一端固定長方形板の供試体

表 3 - 3 - 3 固有振動数

NO.	EXP.	CMS
1	49	51
2	115	126
3	308	319
4	428	409
5	463	469

(Hz)

表 3 - 3 - 4 モード減衰比

NO.	FREQ.	Modal Damping Ratio
1	49	2.86×10^{-3}
2	115	1.16×10^{-3}
3	308	1.48×10^{-3}
4	428	2.38×10^{-4}
5	463	7.83×10^{-4}

表 3 - 3 - 5 比例減衰係数

α	1.729
β	3.173×10^{-7}

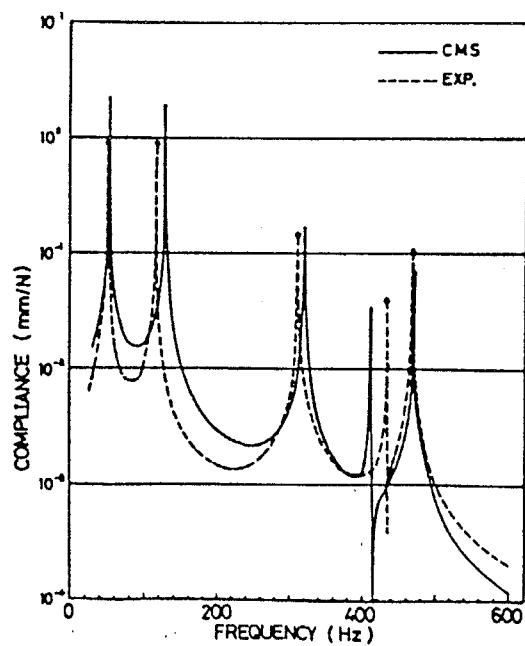


図 3 - 3 - 6 モード減衰比を使用した場合の応答

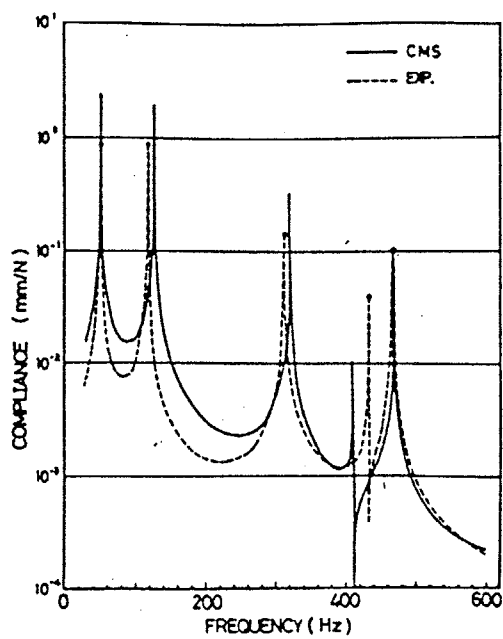


図 3 - 3 - 7 比例減衰係数を使用した場合の応答

3. 3. 2. c 箱形モデル

図3-3-8に示す箱形の供試体について解析する。計算では図3-3-9に示すように5つの分系に分割する。CMSで用いる採用固有モード数は、各分系の内部領域に関してそれぞれ15次まで、結合領域に関しては20次までの合計95である。図3-3-9中の点Fが励振点、点Rが応答点である。

表3-3-6は固有振動数の結果である。EXP.が実験結果、CMSが区分モード合成法による計算結果、RIMは縮小インピーダンス合成法による計算結果である。

表3-3-6をみると、CMSとRIMによる両計算結果はたいへん良く一致しているが、実験結果はこれら二者の計算結果に対して少しずれが大きい。この原因は、計算結果の精度が悪いのではなく、実験結果が理想的条件からずれているのが主な原因であると思われる。すなわち、実験に用いた供試体の製作上発生する形状寸法の狂い、非対称性、溶接による内部残留応力や溶接結合の不均一性、および固定条件の不十分さなどが実験誤差として現われてしまうと思われる。

図3-3-10はCMSとRIMによる強制振動応答を比較したものであり、固有振動数と同様に、両者は良く一致している。RIMは有限要素法と同じ解析精度を有する直接解法であるから、図3-3-10はCMSが精度の良い解析方法であることを示している。

図3-3-11は表3-3-7に示す比例減衰係数 α 、 β を用いたCMSの計算結果と実験結果を示す。

図3-3-12は表3-3-8に示すようなモード減衰比（平均化された値）を直接用いたCMSの計算結果と実験結果を示す。

両図とも計算結果と実験結果はかなり良く合っている。また、各共振峰山頂の値の精度に関しては、[3. 3. 2. b]の供試体のところで検討したのと同じことがいえる。すなわち、減衰に関しては、比例減衰係数 α 、 β を用いてもかなり良い精度は得られるものの、より良い精度を望むにはモード減衰比を直接利用した方がよいことがわかる。

ただし、製品の改良や開発に際して、実物実験が不可能な場合には、モード減衰比を直接使用することができないので、過去の多くの減衰データの蓄積から α 、 β をもとめて用いる方が有効である。

本供試体のCMSによる計算時間は固有振動数と固有モードを求め、さらに全節点に対して0 Hzから600 Hzまで0.5 Hzごとに1201周波数点の応答を求めて約491秒であった（著者作成のプログラムでHITAC-M200Hシステム使用）。

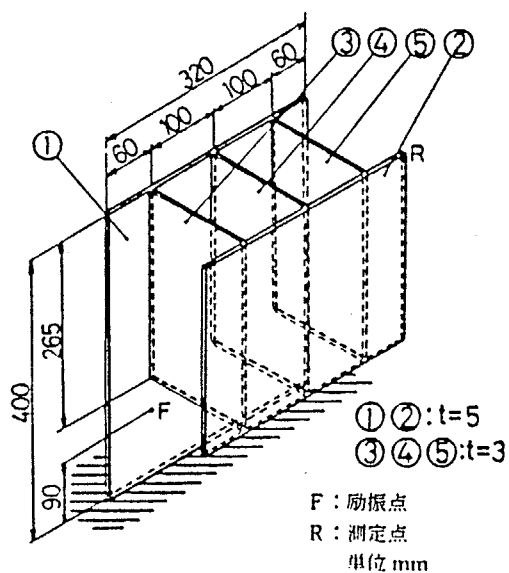


図 3 - 3 - 8 箱形モデル

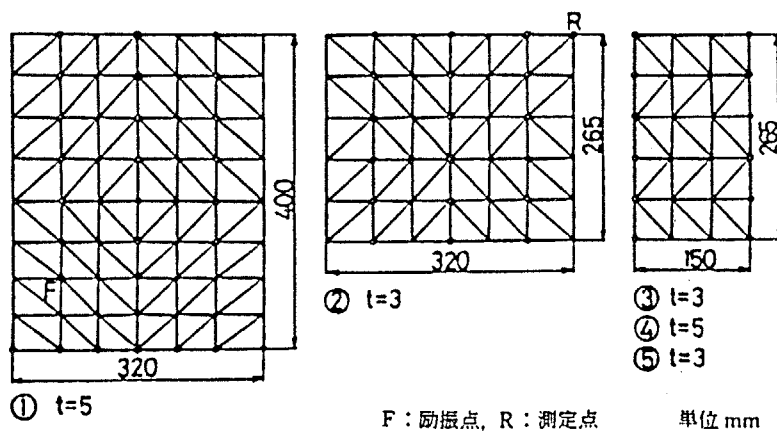


図 3 - 3 - 9 箱形モデルの分系

表 3 - 3 - 6 箱形モデルの固有振動数

NO.	EXP.	CMS	RIM
1	53	54	48
2	160	152	155
3	181	176	175
4	225	220	221
5	325	300	301
6	442	419	420
7	476	435	436
8	524	517	518
9	543	520	521

(Hz)

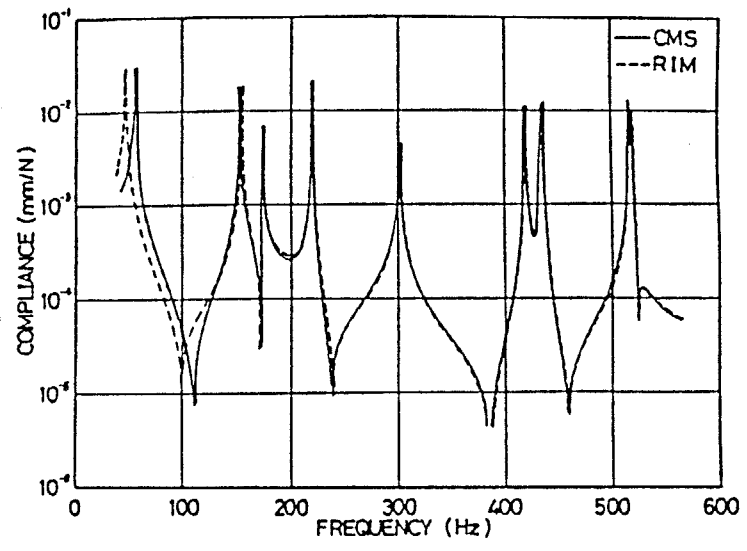


図 3 - 3 - 1 0 CMS と R I M による 応答

表 3 - 3 - 7 比例減衰係数

α	2.405
β	1.058×10^{-4}

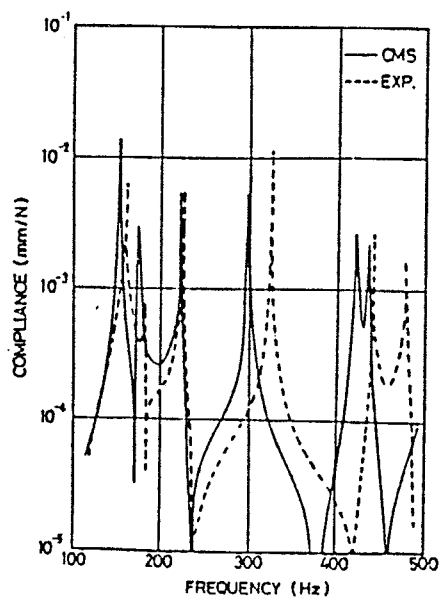


図 3 - 3 - 1 1 比例減衰係数を使用した場合の 応答

表 3 - 3 - 8 モード減衰比

NO.	FREQ.	Modal Damping Ratio
2	152	3.78×10^{-3}
3	176	6.49×10^{-3}
4	220	1.69×10^{-2}
5	300	7.06×10^{-3}
6	419	1.97×10^{-2}
7	435	3.46×10^{-2}

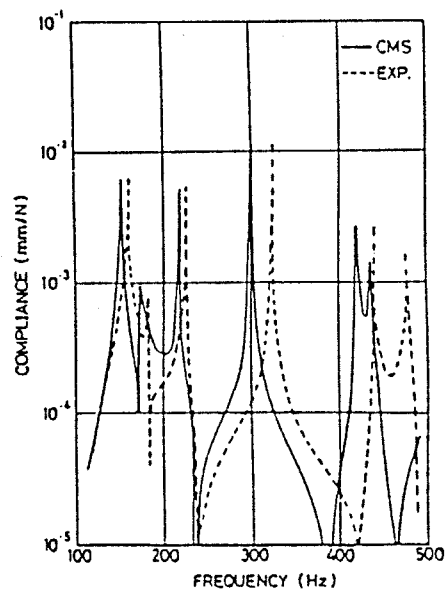


図 3 - 3 - 1 2 モード減衰比を使用した場合の応答

3. 4 多重区分モード合成法

主系従系の区別がない区分モード合成法（[3. 3] 参照）は汎用的であり、大規模構造物の振動解析に実用上便利であることがわかった。しかし、全系の自由度がきわめて大きく、全系を構成する分系の数があまりに多くなると、必然的に結合領域の自由度も各分系の採用モード数の和も大きくなる。他方、企業における大型計算機は時間分割（Time Sharing System）で運用されることがおおいので、個々の計算容量に対する制限が厳しい場合がある。また、ミニコンピュータやマイクロコンピュータによる現場での実時間解析を可能にするためにも、結合領域の自由度や全分系の採用モード数の和が大きくなるのは不利となる。

そこで、区分モード合成法のアルゴリズムを多重化することによって、この問題点を解決する。この多重区分モード合成法（MCMSと略記）の概略は次のとおりである。まず、全系をいくつかの分系（第1次分系と呼ぶ）に分割する。次に、それらの第1次分系をそれぞれいくつかの分系（第2次分系と呼ぶ）に分割する。これを繰り返すことにより、最終的に有限要素法などの従来の方法で容易に解析できる程度の自由度を有する第 n 次分系まで細分割する。そして、各第 $(n-1)$ 次分系についてそれを構成する第 n 次分系を用いてCMSの手法で解析する。次に、この解析された第 $(n-1)$ 次分系を用いて、それらで構成される第 $(n-2)$ 次分系についてCMSの手法で解析する。このようにして、次々により大きい分系の解析へとCMSの手法をすすめ、最終的に全系を解析する。

この方法によれば、通常CMSよりも、計算機容量の点ではるかに有利となる。すなわち、MCMSでは、通常CMSより少ない計算機容量で構造物の解析ができるとともに、通常CMSでは困難であるきわめて大規模な構造物の解析が可能になる。また、各段階の固有値問題の自由度もCMSの場合より小さくなるので、けた落ちなどによる誤差も少なくなる可能性がある。さらに、計算時間の点でも通常CMSと同程度であり、有限要素法を直接適用するよりはるかに有利である。

3. 4. 1 理論

簡単のために、図3-4-1に示す構造物について、二重区分モード合成法で解析する方法を説明する。

まず、全系を2個の第1次分系に分割する。各々の第1次分系をさらに2つずつの第2次分系に分割する。各分系の名称および各分系内の領域を示す記号は、図3-4-1のとおりである。なお減衰は省略する。

Comp. A1にグヤンの静縮小を適用する。すなわち、静的釣り合い方程式

$$\begin{bmatrix} K_{aa}^{A1} & K_{ab}^{A1} \\ K_{ba}^{A1} & K_{bb}^{A1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_a \\ \chi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_b \end{Bmatrix} \quad (3-4-1)$$

\$R_b\$: 領域bの作用力

の上半分から

$$\{\chi_a\} = -[K_{aa}^{A1}]^{-1} [K_{ab}^{A1}] \{\chi_b\} = [T_a] \{\chi_b\} \quad (3-4-2)$$

式(3-4-2)から、Comp. A1の変位は次式のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \chi_a \\ \chi_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a \\ I \end{bmatrix} \{\chi_b\} \quad (3-4-3)$$

式(3-4-3)の右辺の係数行列を用いれば、Comp. A1の剛性行列と質量行列は領域bのみの自由度に縮小できる。縮小された行列を\$[\bar{K}_{bb}^{A1}]\$、\$[\bar{M}_{bb}^{A1}]\$とすると、

$$[\bar{K}_{bb}^{A1}] = [T_a^T \quad I] \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_a \\ I \end{bmatrix} \quad (3-4-4)$$

$$[\bar{M}_{bb}^{A1}] = [T_a^T \quad I] \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_a \\ I \end{bmatrix} \quad (3-4-5)$$

同様に、Comp. A2についても静的釣り合い方程式

$$\begin{bmatrix} K_{bb}^{A2} & K_{bc}^{A2} \\ K_{cb}^{A2} & K_{cc}^{A2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_b \\ \chi_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R_b \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-4-6)$$

の下半分から

$$\{\chi_c\} = -[K_{cc}^{A2}]^{-1}[K_{cb}^{A2}]\{\chi_b\} = [T_c]\{\chi_b\} \quad (3-4-7)$$

式(3-4-7)から、Comp. A2の変位は

$$\begin{Bmatrix} \chi_b \\ \chi_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ T_c \end{bmatrix} \{\chi_b\} \quad (3-4-8)$$

と表される。式(3-4-8)の右辺の係数行列を用いれば、Comp. A2の剛性行列と質量行列は領域bのみの自由度に縮小できる。それらを $[\bar{K}_{bb}^{A2}]$ 、 $[\bar{M}_{bb}^{A2}]$ とすると、

$$[\bar{K}_{bb}^{A2}] = [I \quad T_c^T] \begin{bmatrix} K_{bb}^{A2} & K_{bc}^{A2} \\ K_{cb}^{A2} & K_{cc}^{A2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ T_c \end{bmatrix} \quad (3-4-9)$$

$$[\bar{M}_{bb}^{A2}] = [I \quad T_c^T] \begin{bmatrix} M_{bb}^{A2} & M_{bc}^{A2} \\ M_{cb}^{A2} & M_{cc}^{A2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ T_c \end{bmatrix} \quad (3-4-10)$$

式(3-4-4)と(3-4-9)および式(3-4-5)と(3-4-10)を、それぞれ重ね合わせてできる剛性行列と質量行列を用いて、一般化固有値問題

$$([\bar{K}_{bb}^{A1} + \bar{K}_{bb}^{A2}] - \omega^2 [\bar{M}_{bb}^{A1} + \bar{M}_{bb}^{A2}])\{\chi\} = \{0\} \quad (3-4-11)$$

より、1次から n_b 次までの固有モード $\{\phi_b\}$ を求め、それらを各列に並べた行列を $[\Phi_b]$ とする。領域bの変位は、この固有モードの一次結合で表す。すなわち、

$$\{\delta_b\} = [\Phi_b]\{\xi_b\} \quad (3-4-12)$$

次に、領域 a と c の変位は、結合領域 b の変位に伴って生じる変位と、領域 b を固定として得られる固有モードの一次結合の和で表す。領域 b の変位に伴って生じる領域 a の変位は、式 (3-4-12) を式 (3-4-2) に代入して求めることができる。また、領域 b を固定とした固有モードは、

$$([K_{aa}^{A1}] - \omega^2 [M_{aa}^{A1}])\{\chi\} = \{0\} \quad (3-4-13)$$

より、1次から n_c 次まで求める。式 (3-4-13) で得られる固有モード行列を $[\phi_a]$ とすれば、領域 a の変位 $\{\delta_a\}$ は

$$\{\delta_a\} = [T_a][\phi_b]\{\xi_b\} + [\phi_a]\{\xi_a\} \quad (3-4-14)$$

領域 c についても同様である。すなわち、領域 b の変位に伴って生じる変位は、式 (3-4-12) を式 (3-4-7) に代入して得られ、領域 b を固定とした固有モードは、

$$([K_{cc}^{A2}] - \omega^2 [M_{cc}^{A2}])\{\chi\} = \{0\} \quad (3-4-15)$$

より、1次から n_c 次まで求める。式 (3-4-15) で求められる固有モード行列を $[\phi_c]$ とすると、領域 c の変位 $\{\delta_c\}$ は式 (3-4-14) と同様に

$$\{\delta_c\} = [T_c][\phi_b]\{\xi_b\} + [\phi_c]\{\xi_c\} \quad (3-4-16)$$

式 (3-4-12)、(3-4-14)、(3-4-16) より Comp. A の領域 a, b, c の変位は次式のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \\ \delta_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a \phi_b & \phi_a & 0 \\ \phi_b & 0 & 0 \\ T_c \phi_b & 0 & \phi_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_b \\ \xi_a \\ \xi_c \end{Bmatrix} = [T_A] \begin{Bmatrix} \xi_b \\ \xi_a \\ \xi_c \end{Bmatrix} \quad (3-4-17)$$

Comp. A についての運動方程式

$$\left(\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} & K_{ac} \\ K_{ba} & K_{bb} & K_{bc} \\ K_{ca} & K_{cb} & K_{cc} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} & M_{ac} \\ M_{ba} & M_{bb} & M_{bc} \\ M_{ca} & M_{cb} & M_{cc} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \\ \delta_c \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3-4-18)$$

に式(3-4-17)を代入し、各項に左辺から $[T_A]^T$ をかけると、

$$\left(\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} & K_{ac} \\ K_{ba} & K_{bb} & K_{bc} \\ K_{ca} & K_{cb} & K_{cc} \end{bmatrix} [T_A]^T - \omega^2 [T_A]^T \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} & M_{ac} \\ M_{ba} & M_{bb} & M_{bc} \\ M_{ca} & M_{cb} & M_{cc} \end{bmatrix} [T_A] \right) \begin{Bmatrix} \xi_b \\ \xi_a \\ \xi_c \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3-4-19)$$

となる。式(3-4-19)を解くことによって、Comp. Aの領域dを固定とした場合の固有振動数とそれに対応するモード座標上での固有モードが求められる。その1次から n_A 次までの固有モードを各列に並べた固有モード行列を $[\xi_A]$ とする。

次に、第1次分系のComp. Bについて、Comp. Aについての式(3-4-1)から式(3-4-19)と同様の手順を実行すれば、Comp. Bの領域dを固定とした場合のモード座標上での固有モードを求めることができる。すなわち、Comp. B1とComp. B2について縮小変換行列をそれぞれ $[T_e]$ 、 $[T_g]$ とし、領域fのみの自由度に縮小された剛性行列と質量行列をそれぞれ $[\bar{K}_{ff}^{B1}]$ 、 $[\bar{K}_{ff}^{B2}]$ 、 $[\bar{M}_{ff}^{B1}]$ 、 $[\bar{M}_{ff}^{B2}]$ とする。また、Comp. B1について、領域dとfを固定として求められる1次から n_g 次までの固有モードを並べた行列を $[\phi_g]$ とする。領域fの変位は、

$$\left([\bar{K}_{ff}^{B1} + \bar{K}_{ff}^{B2}] - \omega^2 [\bar{M}_{ff}^{B1} + \bar{M}_{ff}^{B2}] \right) \{\chi\} = \{0\} \quad (3-4-20)$$

より求められる1次から n_f 次までの固有モードの一次結合で表す。この固有モードを並べた行列を $[\phi_f]$ とすると、Comp. Bの領域e, f, gの変位は、Comp. Aについての式(3-4-17)と同様に

$$\begin{Bmatrix} \delta_e \\ \delta_f \\ \delta_g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_e \phi_f & \phi_e & 0 \\ \phi_f & 0 & 0 \\ T_g \phi_f & 0 & \phi_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_f \\ \xi_e \\ \xi_g \end{Bmatrix} = [T_B] \begin{Bmatrix} \xi_f \\ \xi_e \\ \xi_g \end{Bmatrix} \quad (3-4-21)$$

と表すことができる。Comp. Bについての運動方程式に代入し、各項に左側から $[T_B]^T$ をかけると、Comp. Aについての式(3-4-19)に対応する式として

$$\left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} K_{ee} & K_{ef} & K_{eg} \\ K_{fe} & K_{ff} & K_{fg} \\ K_{ge} & K_{gf} & K_{gg} \end{array} \right] \\ [T_B]^T \end{array} \right) \left[\begin{array}{c} [T_B] \\ -\omega^2 [T_B]^T \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} M_{ee} & M_{ef} & M_{eg} \\ M_{fe} & M_{ff} & M_{fg} \\ M_{ge} & M_{gf} & M_{gg} \end{array} \right] \\ [T_B] \end{array} \right) \begin{Bmatrix} \xi_f \\ \xi_e \\ \xi_g \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3-4-22)$$

が得られる。この式 (3-4-22) を用いて、Comp. B について領域 d を固定とした場合の一般化座標上での 1 次から n_B 次までの固有モードを求め、それを並べた固有モード行列を $[\xi_A]$ とする。以上より、領域 d を固定とした場合の Comp. A の 1 次から n_A 次までの固有モードは、

$$\begin{Bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a \phi_b & \phi_a & 0 \\ \phi_b & 0 & 0 \\ T_c \phi_b & 0 & \phi_c \end{bmatrix} [\xi_A] = [T_A] [\xi_A] \quad (3-4-23)$$

また、Comp. B についての 1 次から n_B 次までの固有モードは

$$\begin{Bmatrix} \psi_e \\ \psi_f \\ \psi_g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_e \phi_f & \phi_e & 0 \\ \phi_f & 0 & 0 \\ T_g \phi_f & 0 & \phi_g \end{bmatrix} [\xi_B] = [T_B] [\xi_B] \quad (3-4-24)$$

以上で第 1 次分系についての情報が求められたので、全系に対する解析段階に入る。Comp. A と Comp. B との結合領域 d の変位は、Comp. A と Comp. B の剛性行列と質量行列を領域 d の自由度のみに縮小したものを用いた固有値問題を解いて得られる固有モードの一次結合で表す。すなわち、Comp. A と Comp. B の領域 d のみの自由度に縮小した剛性行列と質量行列を、それぞれ $[\bar{K}_{dd}^A]$ 、 $[\bar{K}_{dd}^B]$ 、 $[\bar{M}_{dd}^A]$ 、 $[\bar{M}_{dd}^B]$ とすれば、

$$\left([\bar{K}_{dd}^A + \bar{K}_{dd}^B] - \omega^2 [\bar{M}_{dd}^A + \bar{M}_{dd}^B] \right) \{\chi\} = \{0\} \quad (3-4-25)$$

より、1 次から n_d 次までの固有モードを求め、それらを並べた固有モード行列を $[\phi_d]$ とする。領域 d の変位は

$$\{\delta_d\} = [\phi_d] \{\eta_d\} \quad (3-4-26)$$

で表わす。また、Comp. Aの縮小変換行列を $[P_A]$ 、Comp. Bの縮小変換行列を $[P_B]$ とすると、領域 d の変位に伴って生じる Comp. A の内部領域 a, b, c の変位 $\{\delta'_A\}$ は、

$$\{\delta'_A\} = \begin{Bmatrix} \delta'_a \\ \delta'_b \\ \delta'_c \end{Bmatrix} = [P_A]\{\delta_d\} \quad (3-4-27)$$

また、Comp. B の内部領域 e, f, g の変位 $\{\delta'_B\}$ は、

$$\{\delta'_B\} = \begin{Bmatrix} \delta'_e \\ \delta'_f \\ \delta'_g \end{Bmatrix} = [P_B]\{\delta_d\} \quad (3-4-28)$$

式 (3-4-23)、式 (3-4-24)、式 (3-4-27)、式 (3-4-28) のモードの一次結合で全系の変位を表す。すなわち、

$$\{\delta_{all}\} = \begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \\ \delta_c \\ \delta_d \\ \delta_e \\ \delta_f \\ \delta_g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [P_A][\phi_d] & [T_A][\xi_A] & 0 \\ [\phi_d] & 0 & 0 \\ [P_B][\phi_d] & 0 & [T_B][\xi_B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_d \\ \eta_A \\ \eta_B \end{Bmatrix} = [Q]\{\eta\} \quad (3-4-29)$$

物理座標上での全系の運動方程式

$$[M_{all}]\{\ddot{\delta}_{all}\} + [K_{all}]\{\delta_{all}\} = \{F\} \quad (3-4-30)$$

に式 (3-4-29) を代入し、各項に左側より $[Q]^T$ をかけることによって、一般化座標上での全系に対する運動方程式

$$[Q]^T[M_{all}][Q]\{\ddot{\eta}\} + [Q]^T[K_{all}][Q]\{\eta\} = [Q]^T\{F\} \quad (3-4-31)$$

が得られる。式 (3-4-31) の自由度は $(n_d + n_A + n_B)$ であり、物

理座標上での自由度よりはるかに小さい。

Comp. A1, Comp. A2, Comp. B1, Comp. B2の4つの分系を用いて、各分系の採用モード数をMCMSと同じにして、通常のカムサで解析する場合は、一般化座標上での全系の運動方程式の自由度 ($n_a + n_c + n_e + n_g + n_{bdf}$) となる (ただし、 n_{bdf} は結合領域 b, d, f を1つの結合領域として採用するモード数を示す)。MCMSでの自由度 ($n_d + n_A + n_B$) は ($n_a + n_c + n_e + n_g + n_{bdf}$) よりはるかに小さくできるので、通常のカムサよりも容量の点で有利である。また、通常のカムサでは結合領域 b, d, f の物理座標上での自由度の和に相当する大きさの固有値解析を行わなければならないが、MCMSでは、領域 b, d, f のそれぞれ単独の自由度の固有値解析を行えばよいので、この点についても有利といえる。

さて、全系に対する固有振動数と固有モードを求めるには、式 (3-4-31) より

$$([Q]^T[K_{all}][Q] - \omega^2[Q]^T[M_{all}][Q])\{\eta\} = \{0\} \quad (3-4-32)$$

の固有値解析を行えばよい。式 (3-4-32) から得られる固有振動数 ω_i が全系に対する固有振動数であり、それに対応して得られる一般化座標上での固有モード $\{\eta_i\}$ を式 (3-4-29) に代入すれば、物理座標上での固有モードが求められる。

強制振動応答は、式 (3-4-31) を解いて $\{\eta\}$ を求め、その解を式 (3-4-29) に代入すれば、求めることができる。

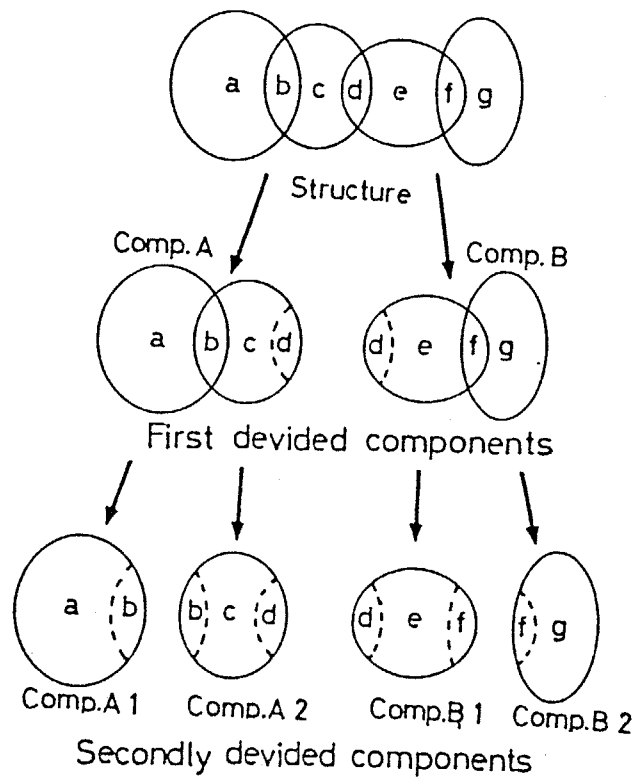


図 3 - 4 - 1 構造物の分割

3. 4. 2 検討

図3-4-2のような周辺自由平板の二重区分モード合成法による解析結果を示す。これを、図3-4-3に示す4個の第一次分系に分割し、さらにそれぞれの第一次分系を、図3-4-4に示すように4個ないしは2個の第二次分系に細分割して、MCMSを適用する。なお、実験は定常励振試験により行う。図3-4-2の点Fは励振点、点RとSは応答点を示す。全系の節点数は286点で、3節点18自由度の三角形殻要素を用いて有限要素分割する。

有限要素法によってこの分割方法のままで直接全系の解析を行う場合は、節点数286点、三角形要素数504個分に対応する入力データを作成する必要がある。しかし、MCMSでは第二次分系に関する入力データだけを作成すればよく、図3-4-4に示すようにすべての第二次分系が同一形状である場合には、節点数28点、要素数36個分に対応する入力データを一組作成するだけでよい。このときMCMSに用いる入力データ量は、有限要素法を直接用いる場合の10分の1以下になる。このようにMCMSでは、分系への分割を工夫すると、入力データの量はかなり少なくなる場合が多い。解析に用いる入力データの作成に要する労力や時間が少なくなることは、計算機の容量が減少したり演算時間が短くなることと同様に、実用上大きい利点である。

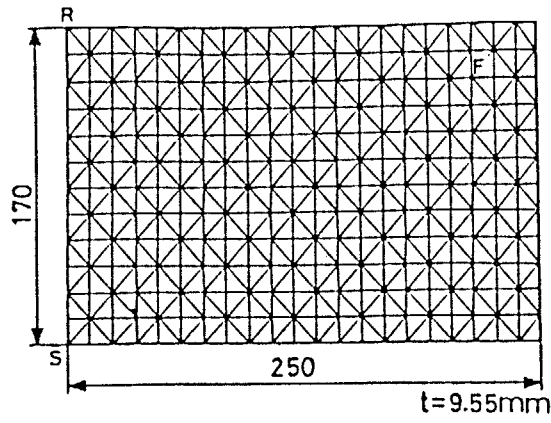
MCMSでは、第二次分系の内部領域の節点数の最大値が18、第一次分系を構成するための第二次分系の結合点の最大値が18、全系を構成するための第一次分系間の結合点が39点なので、固有値解析の最大自由度は234（節点数で39点に相当）である。通常のCMSで図3-4-4に示す14個の分系を用いて解析する場合には、結合点数が94点なので、最大自由度564の固有値解析をする必要がある。また、通常のCMSで図3-4-3に示す分系を用いても、分系の内部領域の節点数の最大値が78なので、自由度468の固有値解析を行う必要がある。直接有限要素法で解析する場合には、図3-4-2の全節点数286点に対応する自由度1716の固有値解析を行う。このようにMCMSでは、有限要素法や通常のCMSより固有値解析の自由度を小さくすることができるので、計算機容量の面で有利である。また、固有値解析の数値計算では、自由度の増大と共にけた落ちなどによる誤差が発生する確率が増えるので、自由度の増大にしたがって単精度計算から倍精度計算へ、さらには4倍精度へと計算精度を上げる必要がある。これは計算機容量の面で大きい負担になる。MCMSでは、固有値解析の自由度が非常に小さくなるので、同一精度の計算ならば計算機容量が小さくなるし、計算機容量に余裕があれば、その容量を利用してより高精度の計算を行うことができる。

実験、MCMS、有限要素法で求めた固有振動数を表3-4-1に示す。ただし図3-4-2の分割のままでは有限要素法を直接適用することが困難なので、分割を粗くして節点数56点、要素数84個に減少した。有限要素法とMCMSの結果は非常に良く一致しているが、有限要素法の方がわずかに固有振動数が大きい傾向を有する。これは、有限要素法では分割を粗くしたためと考

えられる。MCMSの計算では、各分系の採用モード数と結合領域の採用モード数はそれぞれ20とした。MCMSは、この程度の少ない採用モード数でも、有限要素法の直接適用と同程度の良い計算精度を得ることができる。実験結果が計算結果より少し低いほうにずれるのは、薄肉理論に基づく三角形要素を用いるためでもあろうが、平板の寸法誤差や実験誤差の影響によるものと考えられる。

図3-4-5と3-4-6は、点Fを励振した時の点RとSの応答点を示す。なお、有限要素法による結果はMCMSの結果と識別できない程良く一致した。これは、図3-4-5と3-4-6における計算誤差は有限要素法分割特有のものであり、MCMSを用いたためではないことがわかる。これらの図からMCMSは強制振動周波数応答も、少なくとも有限要素法と同程度の精度で求められることがわかる。

MCMSで固有振動数と固有モードを20次まで求め、さらに650Hzから2500Hzまで1Hz間隔で周波数応答を求めるのに要した計算時間は35秒であった(著者作成のMCMS汎用プログラムを用い、計算機はHITAC-M200Hシステムによった)。一方、有限要素法で直接計算すると、上記のように自由度を5分の1以下に減少した場合でも11秒かかった。もし、節点数286点の細かい分割のまま有限要素法を適用すれば、480秒以上かかると推定できる(付録1を参照)。このことから、MCMSは計算時間に関しても非常に有利な解析方法であることがわかる。



点 F : 励振点 点 R, S : 応答点

図 3 - 4 - 2 周辺自由平板

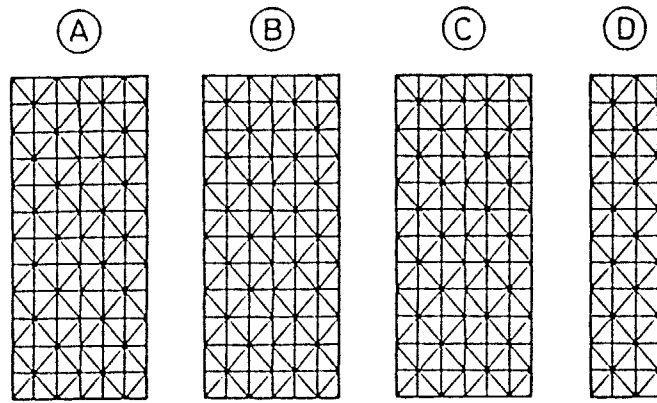


図 3 - 4 - 3 第 1 次分系への分割図

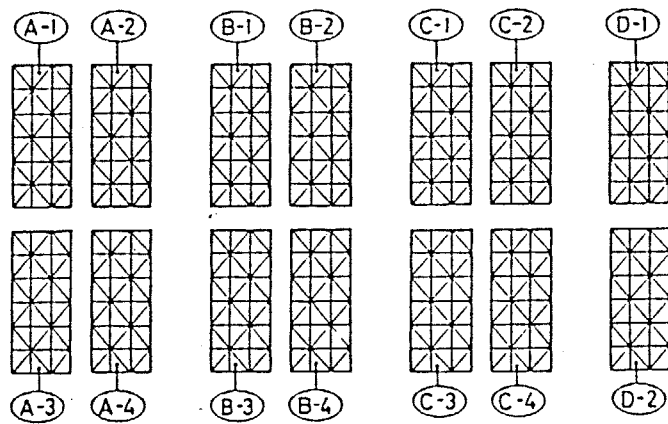


図 3 - 4 - 4 第 2 次分系への分割図

表 3 - 4 - 1 周辺自由平板の固有振動数

Order	Exp.	MCMS	FEM
1	700	740	742
2	785	795	802
3	1620	1710	1717
4	1725	1789	1765
5	2065	2136	2144
6	2315	2440	2447

(Hz)

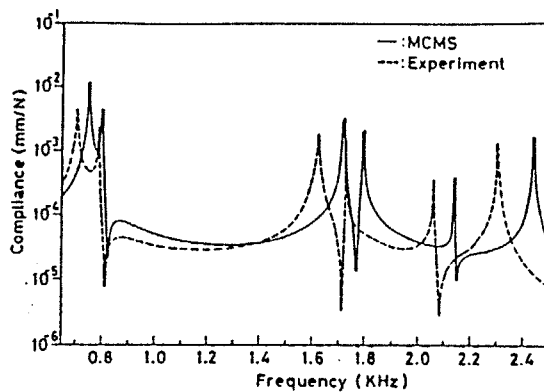


図 3 - 4 - 5 点 R の周波数応答 (励振点 : F)

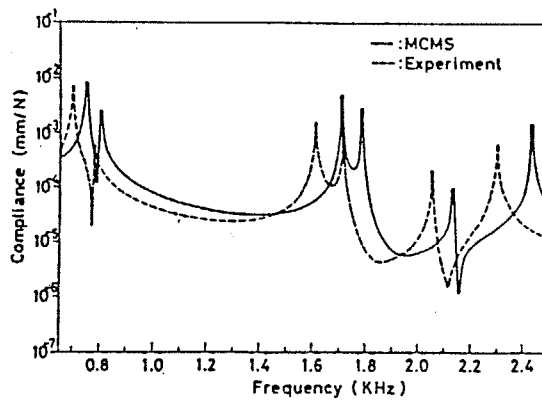


図 3 - 4 - 6 点 S の周波数応答 (励振点 : F)

3.5 有限要素法の直接適用と区分モード合成法の比較^{<10>}

本章では、区分モード合成法（CMSと略記）による固有振動数と固有モードおよび強制振動の計算方法、多重区分モード合成法（MCMSと略記）の研究を行ってきた。そしてこれらをまとめて汎用プログラムを作成した。このCMSとMCMSの汎用プログラムの実用化を図るために、世界で最も権威があり、また最も普及している有限要素法の汎用プログラムであるMSC-NASTRANとの比較検討を行う必要があると考える。そこで両方で2種類の供試体に関する同一の計算を行って、計算の時間と精度を比較する。減衰は省略する。

MSC-NASTRANはIBM3801D、またCMSとMCMSはHITAC-M200Hの計算機をそれぞれ使用する。両計算機システム演算速度は共に10MIPSであり、ほぼ同じ性能なので計算速度の比較をある程度定量的に行うことができる。

NASTRANでは、できるだけ四辺形要素を用い、それを用いることができない部分のみに三角形要素を用いる。両者における使用要素の違いは計算時間にはほとんど影響しない。

3.5.1 4シリンダのエンジンブロック模型

第一の供試体は、図3-5-1に示す4シリンダエンジンブロックの模型であり、厚さは4mm均一とする。全系は節点数219点で構成する。計算に用いる材料定数は、密度 $7.86 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ 、縦弾性係数 $2.058 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ 、ポアソン比0.3とする。

a. NASTRAN用の分割と計算

NASTRANでは、図3-5-1のように全系をすべて四辺形要素で分割する。そして、修正ギブンス法による固有値計算を行い、続いてモード解析で周波数応答を求める。固有値解析を行う際には、全系の自由度を10まで縮小する方法と、1314のままの方法の2通りを行う。自由度の縮小はNASTRANによる大自由度解析によく用いられる。

b. CMS用の分割と採用モード数

CMSでは、分系への分割を2通り試みる。第1は図3-5-2のように全系を9個の分系に分割する。そして、各分系と結合領域の採用モード数と求める全系のモード数の違いによる4通りの計算を行う。それらを表3-5-1の

方法1, 1', 1'', 1'''で示す。第2は図3-5-3に示すように全系を13個の分系に分割する。そして、各分系と結合領域の採用モード数により3通りの計算を行う。それらは表3-5-1の方法2, 2', 2''で示す。

c. MCMS用の分割と採用モード数

MCMSでは、第一次分系への分割方法を2通り行う。第一の分割方法は図3-5-4のように7個の第一次分系に分割し、さらにそれらの第一次分系を図3-5-5に示すように第二次分系に分割する。第二の分割方法(表3-5-2の4)は、図3-5-6に示すように、5個の第一次分系に分ける。そして、それらの第一次分系をさらに図3-5-5に示すように第二次分系に分割する。第一の分割方法については採用モード数を2通り(表3-5-2の3と3')に変えて計算を行う。

d. 計算時間の比較

NASTRANによる計算時間は、表3-5-3に示すように、10次までの固有振動数を求め、50Hzから800Hzまで0.5Hz間隔で周波数応答を求めるのに、全系の自由度を10に縮小した場合で121秒、自由度の縮小を行わない場合は255秒かかった。一方、CMSとMCMSによる計算時間は、表3-5-1と3-5-2に示すようにほとんどの場合20秒以内で済んだ。MCMSの分割方法4だけは34秒かかったが、これは分系形状の対称性を考慮せず計算したためである。対称性を考慮して同一の計算をすると17秒に短縮される。このようにCMSとMCMSの計算時間は、NASTRANに比較してかなり短いことがわかる。

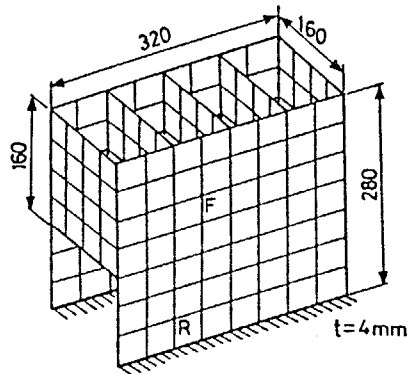
CMSとMCMSの汎用プログラムは、著者によって作成されたもので、そのプログラミング技術は、専門家からみればはなはだ低次元である。プログラミング専門家によって作成もしくは改良すれば、CMSとMCMSの計算時間はさらに大幅に短縮できると想像される。

一方、MSC-NASTRANは、世界で最高レベルのプログラミング技術で作成されているものの1つである。このことから、CMSとMCMSの解析方法は、計算時間の点で非常に有利な方法であることがわかる。MCMSとCMSの計算時間はほぼ同じ程度であり、MCMSはCMSに対して計算時間の面で不利にならないこともわかる。MCMSでの計算機の使用容量は、分割方法3と3'の場合でCMSの2, 2', 2''の場合の65%であり、分割方法4では31%で済む。計算機の容量の面では、MCMSの方がCMSよりかなり有利である。

e. 固有振動数と周波数応答の精度

表3-5-4に得られた固有振動数を比較する。CMSで採用モード数を10次までとした場合(1"と2")は、9次、10次の固有振動数の精度が悪化するが、他の結果はすべてNASTRANと良い一致を示す。NASTRANとCMS、MCMSの誤差には、使用される有限要素法の違いによるものが含まれるので、CMSとMCMSの解析方法自体の誤差はこれよりさらに小さいと思われる。CMSとMCMSは、分系の採用モード数を15~20次程度で、少なくとも全系の10次まで十分良い精度で解を求めることが出来る。

図3-5-7と3-5-8は、図3-5-1の点Fを励振したときの点Rと点Fの応答を示す。MCMSの結果はCMSの結果と区別できない程良く一致した。これらの図から、周波数応答も、三者の結果が良い一致を示すことがわかる。



点F: 励振点、点R: 応答点

図3-5-1 4シリンダのエンジンブロック模型

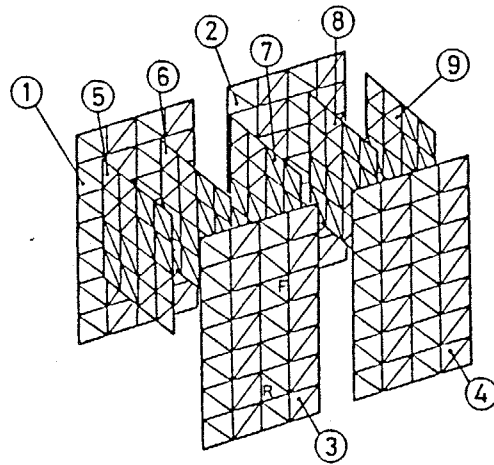


図3-5-2 CMS用の第1番目の分割方法

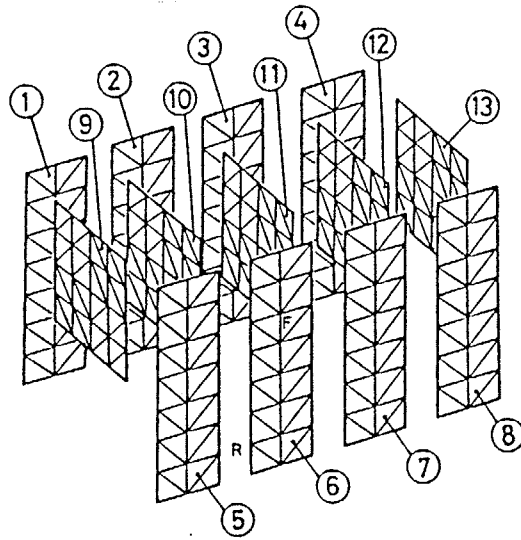


図 3 - 5 - 3 CMS用の第2番目の分割方法

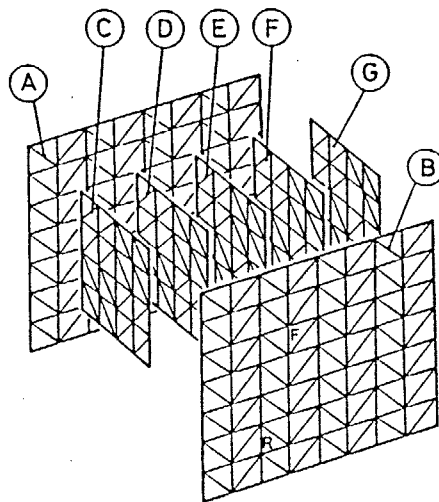


図 3 - 5 - 4 MCMS用の第1番目の第1次分系への分割方法

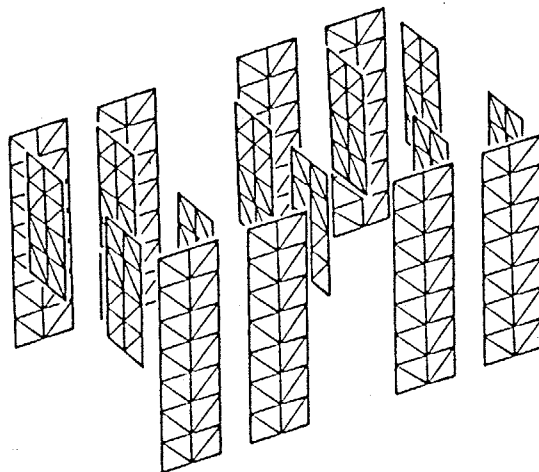


図 3 - 5 - 5 MCMS用の第2次分系への分割方法

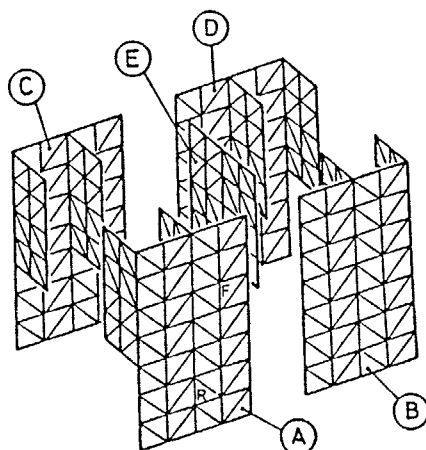


図 3 - 5 - 6 MCMC用の第2番目の第1次分系への分割方法

表 3 - 5 - 1 CMSによる計算時間

Division	C M S							
	1	1'	1''	1'''	2	2'	2''	
Number of components	9	9	9	9	13	13	13	
Number of adopted modes of each component	20	15	20	10	20	10	10	
Number of adopted modes of interface region	20	15	20	10	20	20	10	
Number of demanded modes	20	20	10	10	10	10	10	
CPU time for getting natural frequency and natural mode (sec.)	18.0	16.1	17.6	14.7	20.5	16.5	15.7	
CPU time for solving forced vibration response (sec.)	1.5							

表 3 - 5 - 2 MCMSによる計算時間

M C M S (double)			
Division	3	3'	4
Number of second grade components	18	18	18
Number of first grade components	7	7	5
Number of adopted modes of each component	20	10	20
Number of adopted modes of interface region	20	15	20
Number of demanded modes	10	10	10
CPU time for getting natural frequency and natural mode (sec.)	18.7	16.1	32.1
CPU time for solving forced vibration response (sec.)	1.5		

表 3 - 5 - 3 NASTRANによる計算時間

N A S T R A N	
CPU time in case of 10 degree of freedom	121.1 sec.
CPU time in case of 1314 degree of freedom	254.9 sec.

表 3 - 5 - 4 4シリンダのエンジンブロック模型の固有振動数

DIVISION ORDER	NASTRAN	C M S							MCMS(double)		
		1	1'	1''	1'''	2	2'	2''	3	3'	4
1	112	108	108	108	108	108	108	108	108	108	108
2	166	163	163	163	163	163	163	163	163	163	163
3	311	310	310	310	310	310	310	310	310	310	310
4	521	525	525	525	525	525	525	525	524	525	525
5	592	589	589	589	589	589	589	589	590	591	591
6	607	606	606	606	606	606	606	606	608	608	608
7	674	675	675	675	675	675	675	675	677	677	677
8	715	719	719	719	719	719	719	719	721	722	720
9	720	720	720	720	790	720	720	790	723	724	724
10	777	790	790	790	826	790	790	821	789	790	790

(Hz)

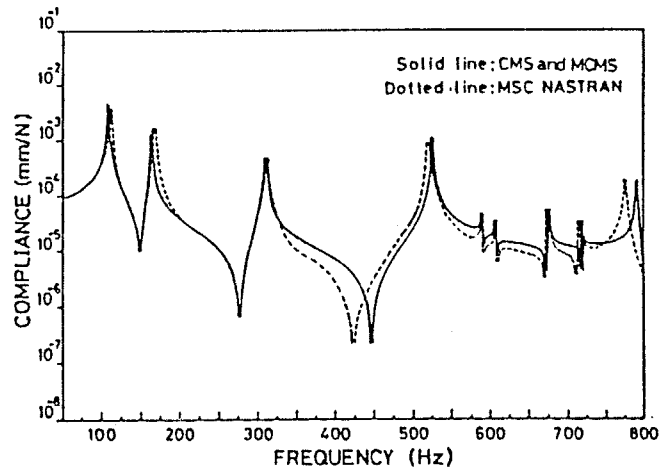


図 3 - 5 - 7 点 R の周波数応答
(励振点 : F)

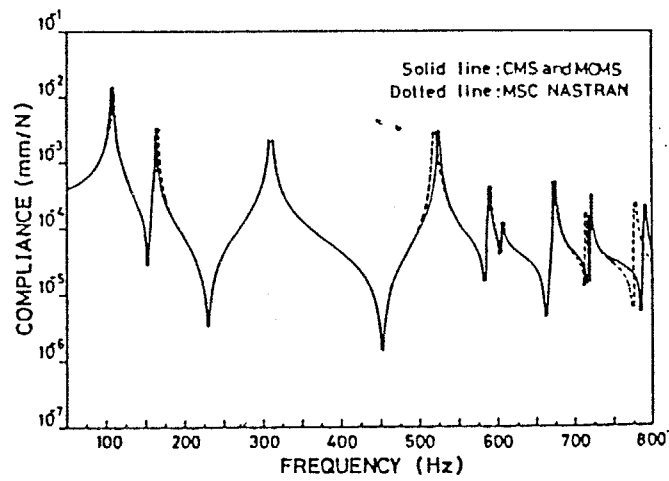


図 3 - 5 - 8 点 F の周波数応答
(励振点 : F)

3.5.2 6シリンダのエンジンプロック模型

第2の供試体は、図3-5-9に示す6シリンダのエンジンプロック模型である。厚さ5mm均一とし、左右の外壁の間にシリンダライナを有し二重壁構造になっている。全系の節点数は684点である。計算に用いる材料定数は、密度 $7.96 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ 、縦弾性係数 $9.8 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ 、ポアソン比0.3とする。境界条件は自由とする。

a. NASTRAN用の分割と計算

NASTRANでは、図3-5-9に示すように、左右両外壁部分とライナ部分はすべて四辺形要素、隔壁部分とライナと外壁を結ぶ上面壁と中間壁の一部のみに三角形要素を用いた。すなわち、四辺形要素626個、三角形要素112個を用いる。

計算は修正ギブンス法によって、自由度を16と75に縮小して解析する方法と逆反復法によって自由度を縮小せず三次まで求める方法の3通り行う。前者の方法で自由度を縮小せず10次（剛体モードは除く）まで求めようとする、計算時間が100分間を超えてしまうので中止した。

b. MCMS用の分割と計算

図3-5-9のモデルを図3-5-10に示すように4個の第一次分系を分割し、さらに図3-5-11と3-5-12に示すように、2通りの第二次分系への分割を行う。採用モード数は、すべての分系と結合領域について40とする。なお、本供試体にCMSを適用するのは、必要記憶容量が大きくなるので行わなかった。

c. 計算時間の比較

NASTRANによる計算時間は、表3-5-6に示すように、10次まで求めるのに、自由度を16に縮小した場合で480秒、75まで縮小した場合で726秒、逆反復法で縮小せず三次まで求めて952秒かかった。一方、MCMSでは、表3-5-5に示すように、第二次分系への2通りの分割方法とも、14次まで求めるのに、採用モード数をすべての分系と結合領域について40とした場合で206秒、採用モード数を20とした場合が176秒であった。このように、MCMSが計算時間の点で有効であることが、この供試体についても明らかになった。

d. 固有振動数

NASTRANとMCMSによって得られた固有振動数を表3-5-7に示す。MCMSでは、第二次分系への2通りの分割方法に対する解は完全に一致した。このことから、分系への分割方法の違いによる影響はほとんどないことがわかる。第一の供試体に関する結果(表3-5-4)に比べて両者の結果はかなりずれているが、これは、本供試体が多く凹凸部分を有しており、三角形要素と四辺形要素自体の解析精度の差が著しく発生してしまったためであり、MCMS自体の誤差はかなり小さいのではないかと思われる。

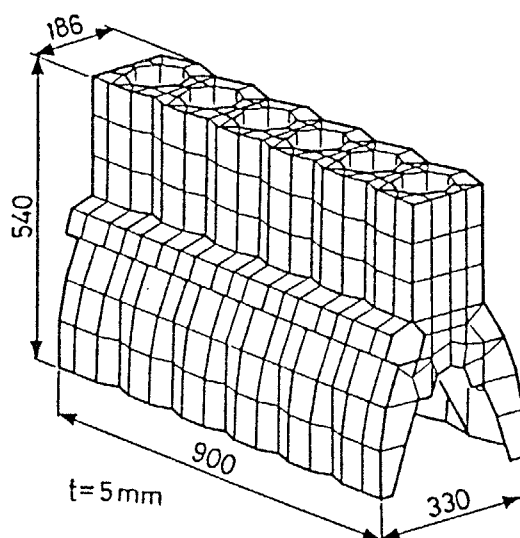


図3-5-9 6シリンダのエンジンブロック模型

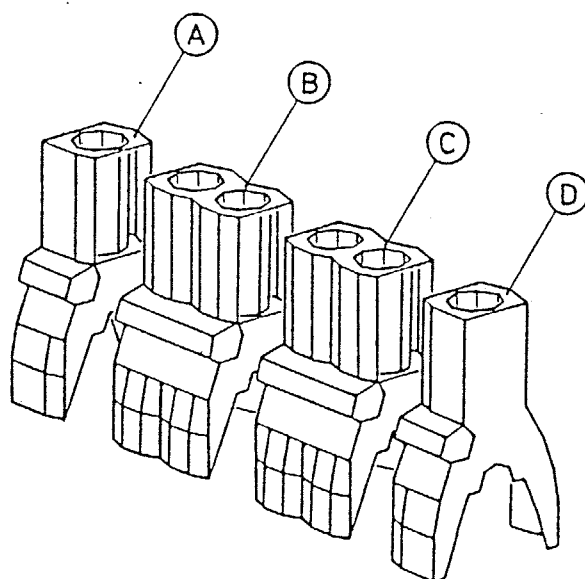


図3-5-10 MCMS用の第1次分系への分割方法

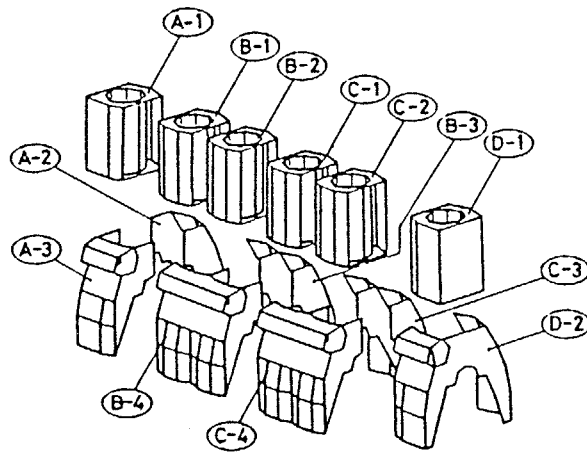


図 3 - 5 - 1 1 第 2 次分系への分割方法 (第 2 次分系の数 1 3)

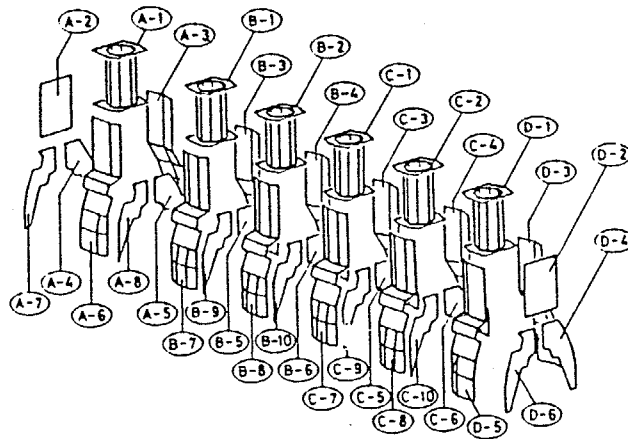


図 3 - 5 - 1 2 第 2 次分系への分割方法 (第 2 次分系の数 3 4)

表 3-5-5 MCMSによる計算時間

M C M S		
Number of adopted modes of each component and interface region	Demanded modes	CPU time(sec.)
20	14	176
40	14	206

表 3-5-6 NASTRANによる計算時間

N A S T R A N		
Calculation	Demanded modes	CPU time(sec.)
In case of 16 degree of freedom by Modified Gevens Method	10	480
In case of 75 degree of freedom by Modified Gevens Method	10	726
In case of 4104 degree of freedom by Inverse Power Method	3	952

表 3-5-7 6シリンダのエンジンプロック模型の固有振動数

Order	NASTRAN	M C M S
1	221	238
2	266	282
3	292	322
4	295	326
5	327	358
6	331	363
7	336	369
8	336	369
9	354	391
10	369	394

(Hz)

3. 5. 3 有限要素形状による差

振動解析においては、計算時間の大部分は固有値解析の過程に費やされているので、有限要素の種類の違いによる計算時間の差は少ないと思ひ、上記のように要素の種類が異なるままで比較検討を行った。しかし、このことは具体的解析結果によって確認する必要があると判断し、表3-5-8に示すとおり、3種類の四辺形要素のプログラムを作成し、CMSとMCMSで追加計算を行ってみた。第1は、Gallagherの本に載っているもので、曲げに16項高次多項式を用いたものである。第2は、四辺形を2個の三角形の結合とし、2通りの結合特性を平均したものである。第3は、四辺形の内部に1節点を設け、4個の三角形の結合とし、結合した後に内部の節点自由度を消去したものである。現在世の中で使われている四辺形各要素はほとんどがこの3種類であり、したがってNASTRANの四辺形要素もこのうちのどれかであろうと思われるが、NASTRANの中身がブラックボックスなのでわかりかねる。しかし、表3-5-8から明らかなように、計算時間も計算精度も、[3. 5. 1]と[3. 5. 2]で示した三角形要素を用いたものと同程度であった。そこで、本節での計算時間の比較は意味があると思われる。

<Model of a cylinder block with 4 cylinders>

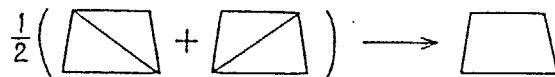
	NASTRAN	C M S		
		A	B	C
1	112	117	108	106
2	166	164	164	162
3	311	307	313	308
4	521	523	530	519
5	592	567	598	571
6	607	580	614	584
7	674	636	682	646
8	715	669	725	685
9	720	671	728	686
10	777	761	793	771
CPU time sec.	121.1 254.9	18.32	18.26	17.91

<Model of a cylinder block with 6 cylinders>

	NASTRAN	M C M S		
		A	B	C
CPU time sec.	480 726 952	220	216	221

A: Quadrilateral element of a polynomial expression with 16 terms with regard to bending.

B: Quadrilateral element made from triangular elements.



C: Quadrilateral element made from triangular elements.

The degree of freedom of the nodal point at the centroid is reduced.

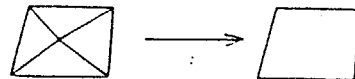


表3-5-8 | 有限要素の違いによる固有振動数と計算時間

3. 6 不拘束モード合成法

モード合成法の主なものは、拘束モード型、不拘束モード型および混合型に大別できる。拘束モード型では、分系の採用モードとして、他の分系との結合部分を拘束した状態の固有モードを用いる。不拘束モード型は、結合部分を自由端とした固有モードを用いる。混合型はそれら二者を混合した方法である。第3章第3節では、拘束モード型の方法の1つである区分モード合成法を開発し、その有効性を示した。

一方、不拘束モード型には、採用モードより高次のモードの影響を近似的に補正するための剰余コンプライアンス行列を用いる方法と、それを用いない方法がある。現在市販されているモード合成法のプログラムの主流は、これらの不拘束モード型の解法を用いている。

そこで本節では、これらの代表的な不拘束モード合成法の理論を示し、第3節で提案した区分モード合成法と、剰余コンプライアンス行列を用いたモード合成法およびそれを用いない方法の三者の比較を行い、それぞれの特長を明らかにする。その際に、周辺自由の境界条件下の構造物に対する剰余コンプライアンス行列を精度良くかつ効率良く計算で求める方法（この方法の提案と理論の説明は第5章に記す）によって剰余コンプライアンスを考慮する不拘束モード法の精度が格段に良くなることを示す。

3. 6. 1 剰余コンプライアンス行列を考慮 しない不拘束モード合成法の理論

3. 6. 1. a 理論

図3-6-1に示す系について説明を行う。図3-6-1では2つの分系(Comp.1とComp.2)が2つの分系を結合させる要素(剛性と減衰をもった要素)によって領域bとcにおいて結合されている。実際の結合要素(ボルトやリベットなど)は質量があるが、一般に分系の大きさと比較して無視できる場合も多い。また、もし無視できない場合にはその質量をb, c領域の付加質量として離散分配することができる。

さて、分系1単体について考える。分系1単体について結合領域を自由端とした場合の固有モードを1次から r_1 次まで求めたとする。そして、それらの固有モードの一次結合で解析対象周波数範囲内の振動挙動はほぼ十分な精度で表されるとすれば、その周波数範囲内の任意の変位は

$$\begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{Bmatrix} = [\phi^{(1)}] \{\xi_1\} = \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{bmatrix} \{\xi_1\} \quad (3-6-1)$$

と表せる。ここで、行列 $[\phi^{(1)}]$ は1次から r_1 次までの固有モードを各列に並べて作成するモード行列である。

同様に、分系2についても任意の変位は

$$\begin{Bmatrix} \delta_c \\ \delta_d \end{Bmatrix} = [\phi^{(2)}] \{\xi_2\} = \begin{bmatrix} \phi_c \\ \phi_d \end{bmatrix} \{\xi_2\} \quad (3-6-2)$$

と表されるとする。

すると、式(3-6-1)と(3-6-2)より、図3-6-1の全系の変位は

$$\begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \\ \delta_c \\ \delta_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_a & 0 \\ \phi_b & 0 \\ 0 & \phi_c \\ 0 & \phi_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \quad (3-6-3)$$

のように表される。

分系1と分系2の剛性行列、質量行列と減衰行列をそれぞれ

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} C_{aa} & C_{ab} \\ C_{ba} & C_{bb} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{cd} \\ K_{dc} & K_{dd} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} M_{cc} & M_{cd} \\ M_{dc} & M_{dd} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} C_{cc} & C_{cd} \\ C_{dc} & C_{dd} \end{bmatrix}$$

で表し、結合要素部材の剛性行列と減衰行列を

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{bb} & \bar{K}_{bc} \\ \bar{K}_{cb} & \bar{K}_{cc} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{C}_{bb} & \bar{C}_{bc} \\ \bar{C}_{cb} & \bar{C}_{cc} \end{bmatrix}$$

と表す。すると、全系の特性行列はこれらの重ね合わせで

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} & 0 & 0 \\ K_{ba} & K_{bb} + \bar{K}_{bb} & \bar{K}_{bc} & 0 \\ 0 & \bar{K}_{cb} & K_{cc} + \bar{K}_{cc} & K_{cd} \\ 0 & 0 & K_{dc} & K_{dd} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_{aa} & C_{ab} & 0 & 0 \\ C_{ba} & C_{bb} + \bar{C}_{bb} & \bar{C}_{bc} & 0 \\ 0 & \bar{C}_{cb} & C_{cc} + \bar{C}_{cc} & C_{cd} \\ 0 & 0 & C_{dc} & C_{dd} \end{bmatrix} \quad (3-6-4)$$

$$\begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} & 0 & 0 \\ M_{ba} & M_{bb} + \bar{M}_{bb} & \bar{M}_{bc} & 0 \\ 0 & \bar{M}_{cb} & M_{cc} + \bar{M}_{cc} & M_{cd} \\ 0 & 0 & M_{dc} & M_{dd} \end{bmatrix}$$

となるので、式(3-6-3)の右辺の係数行列によってこれらの特性行列を各分系の固有モードを用いた一般化座標上に変換する。すなわち

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} \phi_a^T & \phi_b^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_c^T & \phi_d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} & 0 & 0 \\ K_{ba} & K_{bb} + \bar{K}_{bb} & \bar{K}_{bc} & 0 \\ 0 & \bar{K}_{cb} & K_{cc} + \bar{K}_{cc} & K_{cd} \\ 0 & 0 & K_{dc} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_a & 0 \\ \phi_b & 0 \\ 0 & \phi_c \\ 0 & \phi_d \end{bmatrix}$$

$$[\hat{C}] = \begin{bmatrix} \phi_a & \phi_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_c & \phi_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{aa} & C_{ab} & 0 & 0 \\ C_{ba} & C_{bb}+C_{bb} & C_{bc} & 0 \\ 0 & C_{cb} & C_{cc}+C_{cc} & C_{cd} \\ 0 & 0 & C_{dc} & C_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_a & 0 \\ \phi_b & 0 \\ 0 & \phi_c \\ 0 & \phi_d \end{bmatrix} \quad (3-6-5)$$

$$[\hat{M}] = \begin{bmatrix} \phi_a^T & \phi_b^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_c^T & \phi_d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} & 0 & 0 \\ M_{ba} & M_{bb}+M_{bb} & M_{bc} & 0 \\ 0 & M_{cb} & M_{cc}+M_{cc} & M_{cd} \\ 0 & 0 & M_{dc} & M_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_a & 0 \\ \phi_b & 0 \\ 0 & \phi_c \\ 0 & \phi_d \end{bmatrix}$$

これらの特性行列を用いると一般化座標上での全系の運動方程式は

$$[\hat{M}]\{\ddot{\xi}\} + [\hat{C}]\{\dot{\xi}\} + [\hat{K}]\{\xi\} = \{g\} \quad (3-6-6)$$

のように表される。式(3-6-6)における外力ベクトル $\{g\}$ は一般化座標上での外力ベクトルであり、物理座標上での外力ベクトルを $\{F_a^T \quad F_b^T \quad F_c^T \quad F_d^T\}$ とすると

$$\{g\} = \begin{bmatrix} \phi_a^T & \phi_b^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_c^T & \phi_d^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_a \\ F_b \\ F_c \\ F_d \end{Bmatrix} \quad (3-6-7)$$

によって表される。

さて、式(3-6-6)の方程式の自由度は分系1と2の採用モードの数の和 $(r_1 + r_2)$ であり、この自由度は一般に物理座標上での自由度よりはるかに小さくするので、計算時間と計算機容量の面で効率良く振動計算できる。式(3-6-6)によって求められる $\{\xi\}$ を式(3-6-3)に代入すれば、物理座標上での応答変位を求めることができる。

上記の説明で明らかのように、この方法のアルゴリズムはひじょうに単純であり、汎用プログラムを作成することが容易である。ただし、全系の変位を、式(3-6-3)に示すように、比較的少ない各分系単体での固有モードで表現しようとするので、解析精度が他の方法(例えばCMS)より劣る。特に、結合部材の剛性が高い場合や、直接分系1と2が剛結合で結ばれる場合にその

傾向が顕著となる。この方法は各分系が互いに比較的柔らかい結合部材によって結合されている構造物に対しての適用に向いていると思われる。これらの事については、後の検討の項で示す。

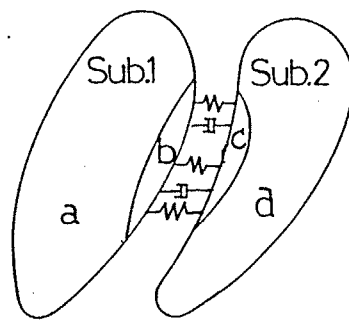


図3-6-1 2分系からなる構造物（弾性結合）

3. 6. 1. b 検討

図3-6-2のAに示す両端固定平板を対象にして、前記の不拘束モード合成法の検討を行う。厳密解としては、有限要素法で全系を解析した結果を用いる。すなわち、伝達関数の厳密解は、有限要素法で全ての固有モードを求め、それらを用いてモード解析した結果である。CMSの特性についての検討は以前に報告したので、厳密解およびCMSの結果と比較しながら検討を行う。

この方法では、剛結合で直接分系を結びつけると、解析精度が悪くなる。また、結合領域の自由度より少ない採用モード数では、解を求めることが困難となる。そこで、図3-6-2Cに示すように、分系1と分系2の間に、結合分系と呼ぶ結合点のみから構成される分系を用いて解析する。こうすれば、一体構造物も本方法で解析できる。

表3-6-1に採用モード数を変化させて解析した結果を示す。分系1と2の自由度はそれぞれ210と180である。そこで、分系1と2の採用モード数をそれぞれ210と180にした場合の解析結果は、当然厳密解と完全に一致する。しかし、かなり大きい採用モード数と思われる100次までの採用の場合の結果でも、1次の固有振動数ですらかなり精度が悪いことがわかる。この原因は、剰余成分の影響を考慮していないからである。通常解析では分系の採用モード数を100以上にするには困難であるから、本方法では精度の悪いことは覚悟する必要があると思われる。

剰余成分が大きく影響するのは大きな作用力が結合部に作用するためであるので、結合分系の剛性が小さい結合（柔らかい結合）の場合には精度が向上することが推測できる。そこで、採用モード数は同一として、結合分系の厚さを4mmから2mm, 1mm, 0.5mmと薄くした系について解析して、この事を調べる。

表3-6-2に示すように、結合分系の厚さが薄くなるに従って精度が向上している。この事実から、本方法は、剛な結合の系の解析には適さず、柔らかい結合の系の場合のみ用いるべきである。

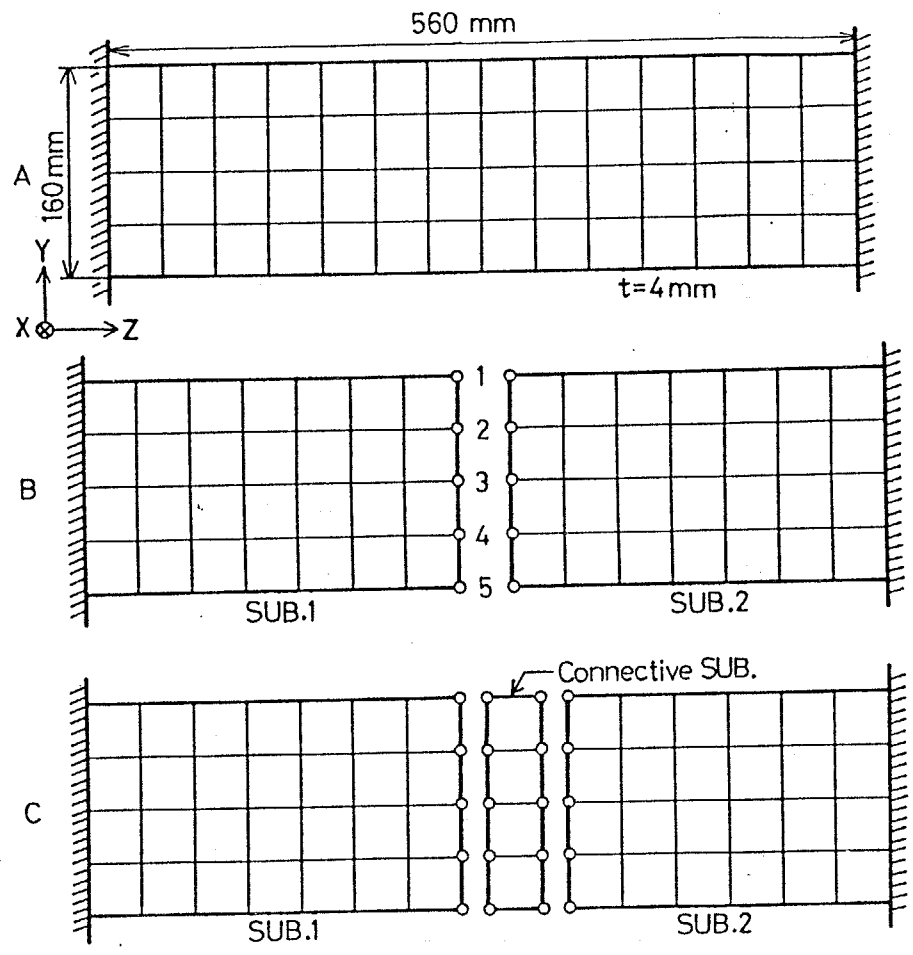


図 3 - 6 - 2 両端固定平板モデル

表 3-6-1 剰余コンプラインズ行列を用いない方法
による平板の固有振動数 (Hz)

Number of adopted natural modes of Sub.1	10		50		100		180		210	
	Freq.	Error%	Freq.	Error%	Freq.	Error%	Freq.	Error%	Freq.	Error%
1	73.9	7.26	71.5	3.92	71.2	3.48	70.1	1.74	68.8	0.0
2	170.8	1.54	169.1	0.53	168.9	0.41	168.5	0.17	168.2	0.0
3	193.7	2.10	191.8	1.05	191.6	0.94	189.8	0.05	189.7	0.0
4	389.3	8.92	366.9	2.65	363.7	1.73	357.6	0.06	357.4	0.0
5	407.7	9.33	390.4	4.66	388.4	4.12	383.0	2.68	372.9	0.0
6	625.2	7.14	597.4	2.39	594.7	1.93	589.8	1.07	583.4	0.0
7	651.9	5.45	635.3	2.74	633.6	2.47	618.5	0.04	618.2	0.0
8	930.5	8.67	879.4	2.69	874.3	2.10	856.9	0.07	856.2	0.0
9	934.2	1.40	926.1	0.53	925.5	0.41	923.2	0.20	921.2	0.0
10	1005.1	8.54	961.5	3.83	957.0	3.35	953.0	2.91	926.0	0.0
11	1137.4	4.71	1105.9	1.82	1100.0	1.27	1086.9	0.07	1086.1	0.0
12	1312.4	11.06	1217.1	2.99	1209.9	2.39	1203.1	1.81	1181.6	0.0
13	1385.8	6.91	1341.3	3.47	1336.0	3.08	1297.5	0.10	1296.1	0.0
14	1388.2	4.28	1351.9	1.55	1346.5	1.14	1337.7	0.49	1331.1	0.0
15	1895.0	21.23	1614.3	3.26	1605.2	2.68	1555.2	0.12	1553.2	0.0
16	1638.9	3474.4	1687.4	2.97	1674.4	2.16	1641.4	0.14	1638.9	0.0
17	1729.2	3977.0	1793.3	3.70	1785.2	3.23	1781.6	3.03	1729.2	0.0
18	1933.8	4306.2	2046.1	5.80	1999.9	3.41	1933.8	0.0	1933.8	0.0
19	2001.5	5324.4	2059.5	2.89	2039.7	1.90	2019.9	0.91	2001.6	0.00
20	2002.9	13178.5	2071.9	3.44	2060.1	2.85	2048.5	2.27	2002.9	0.0

表3-6-2 結合分系の厚さ変化による固有振動数の精度比較

Thickness of the connective-Sub. (mm)	4.0		2.0		1.0		0.5	
	order	Freq.	Error%	Freq.	Error%	Freq.	Error	Freq.
1	71.9	4.50	61.3	1.32	51.8	0.0	49.9	0.0
2	169.3	0.65	173.4	0.05	171.0	0.58	114.0	0.17
3	192.1	1.26	186.7	0.80	175.4	0.05	171.6	0.0
4	368.0	2.96	329.1	1.85	269.0	0.97	210.5	0.04
5	393.0	5.39	333.9	0.90	306.8	0.19	280.1	0.03
6	600.7	2.96	574.9	0.59	490.3	1.19	378.8	0.02
7	638.4	3.26	598.3	1.90	562.3	0.16	548.1	0.0
8	882.7	3.09	817.7	2.05	710.4	0.43	669.0	0.0
9	927.2	0.65	855.8	0.84	784.6	0.31	747.9	0.0
10	967.2	4.44	907.0	0.49	902.6	0.05	906.4	0.01
11	1107.6	1.97	1040.4	1.13	948.1	0.17	916.1	0.0
12	1225.5	3.70	1141.9	1.17	1074.5	0.28	1041.5	0.0
13	1349.9	4.15	1242.5	2.29	1083.0	0.17	1069.1	0.0
14	1358.6	2.05	1317.2	0.69	1297.2	0.06	1296.3	0.0
15	1624.5	3.92	1502.6	2.09	1364.1	0.18	1347.6	0.01
16	1692.7	3.27	1554.4	1.54	1450.2	0.09	1443.8	0.0
17	1803.8	4.30	1662.6	2.60	1497.1	0.13	1485.2	0.01
18	2082.7	7.69	1922.0	1.94	1794.3	0.13	1793.9	0.03
19	2086.5	4.24	1961.6	1.13	1918.7	0.11	1926.9	2.31
20	2204.5	0.06	2139.1	8.60	2002.5	2.83	1967.0	2.10

3. 6. 2 剰余コンプライアンス行列 を用いる不拘束モード合成法

3. 6. 2. a 理論

図3-6-3に示す系について考えることにする。分系 i ($i = 1, 2$) について運動方程式

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} M_{aa}^{(i)} & M_{ab}^{(i)} \\ M_{ba}^{(i)} & M_{bb}^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{aa}^{(i)} & K_{ab}^{(i)} \\ K_{ba}^{(i)} & K_{bb}^{(i)} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \chi_a^{(i)} \\ \chi_b^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_b^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (3-6-8)$$

の質量行列と剛性行列を用いて固有値解析し、1次から l_i 次 (または p_i 次、 $p_i > l_i$) までの固有モードを求める。ここで得られる固有モードは、分系 i が他の分系と切り離され、結合領域を自由端とした状態のものなので、不拘束モードと呼ぶ。また、 l_i 次より高次の固有モードが低周波数域の伝達関数に与える影響を表現するための剰余コンプライアンス行列 $[Z]$ を計算する。

剰余コンプライアンス行列の求め方には次の3種類がある。まず、 $(l_i + 1)$ 次から p_i 次までの固有モードを用いて求める従来の方法、次に、1次から l_i 次の固有モードを用いて $(l_i + 1)$ 次以上のすべてのモードの影響を考慮できる Hansteen の方法、そして、Hansteen の方法では周辺自由状態の系に対しては直接適用できないので、その場合に対する著者の提案した方法である。なお、これらの方法についての説明は第5章に記されている。

以上より分系 i の変位は

$$\begin{Bmatrix} \chi_a^{(i)} \\ \chi_b^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_a^{(i)} \\ \phi_b^{(i)} \end{bmatrix} \{ \xi_i \} + \begin{bmatrix} Z_{aa}^{(i)} & Z_{ab}^{(i)} \\ Z_{ba}^{(i)} & Z_{bb}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ R_b^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (3-6-9)$$

で表されたとする。式 (3-6-9) の下側の関係式から

$$\{ R_b^{(i)} \} = [Z_{bb}^{(i)}]^{-1} \{ \chi_b^{(i)} \} - [Z_{bb}^{(i)}]^{-1} [\phi_b^{(i)}] \{ \xi_i \} \quad (3-6-10)$$

式 (3-6-9) を式 (3-6-8) に代入し、各項に左側から $[\phi_a^{(i)T}, \phi_b^{(i)T}]$ をかけると、固有モードの直交性より、

$$\left(\Gamma_k^{(i)} - \omega^2 \Gamma_m^{(i)} \right) \{ \xi_i \} = \{ f_m \} \quad (3-6-11)$$

ここで、 $\Gamma_k^{(i)}$ と $\Gamma_m^{(i)}$ はそれぞれモード剛性行列、モード質量行列と呼

ばれる対角行列であり、ベクトル $\{f_m\}$ は次のように表されるベクトルである。

$$\{f_m\} = [\phi_b^{(i)T}][z_{bb}^{(i)}]^{-1}\{\chi_b^{(i)}\} - [\phi_b^{(i)T}][z_{bb}^{(i)}]^{-1}[\phi_b^{(i)}]\{\xi_i\} \quad (3-6-12)$$

そこで、分系 i に関して、式 (3-6-10), (3-6-11) および (3-6-12) より、次の方程式が得られる。

$$\left(\begin{bmatrix} [K_b^{(i)} + [\phi_b^{(i)T}][z_{bb}^{(i)}]^{-1}[\phi_b^{(i)}] & -[\phi_b^{(i)T}][z_{bb}^{(i)}]^{-1} \\ -[z_{bb}^{(i)}]^{-1}[\phi_b^{(i)}] & [z_{bb}^{(i)}]^{-1} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [m_b^{(i)}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \chi_b^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_i \end{Bmatrix} \quad (3-6-13)$$

分系 1 と分系 2 についての式 (3-6-13) を結合すると全系に対する方程式ができる。すなわち、

$$\left(\begin{bmatrix} K_{\xi\xi} & K_{\xi\chi} \\ K_{\chi\xi} & K_{\chi\chi} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{\xi\xi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \xi \\ \chi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-6-14)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし、} [K_{\xi\xi}] &= \begin{bmatrix} [K_b^{(1)} + [\phi_b^{(1)T}][z_{bb}^{(1)}]^{-1}[\phi_b^{(1)}] & 0 \\ 0 & [K_b^{(2)} + [\phi_b^{(2)T}][z_{bb}^{(2)}]^{-1}[\phi_b^{(2)}] \end{bmatrix} \\ [K_{\chi\xi}] &= [K_{\xi\chi}]^T = \begin{bmatrix} -[z_{bb}^{(1)}]^{-1}[\phi_b^{(1)}] & , & -[z_{bb}^{(2)}]^{-1}[\phi_b^{(2)}] \end{bmatrix} \\ [K_{\chi\chi}] &= \begin{bmatrix} [z_{bb}^{(1)}]^{-1} + [z_{bb}^{(2)}]^{-1} \end{bmatrix} \\ \{\xi\}^T &= (\{\xi_1\}^T, \{\xi_2\}^T) \quad [M_{\xi\xi}] = \begin{bmatrix} [m_b^{(1)}] & 0 \\ 0 & [m_b^{(2)}] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

結合領域での作用力 $\{R_b^{(1)}\}$ と $\{R_b^{(2)}\}$ は作用反作用の法則から打ち消し合う。

一般には式 (3-6-14) を解いて全系に対する固有振動数を求める。しかし、剛結合もしくは結合部材 (パネ等) の質量を無視できる場合には、自由度を採用モード数の和まで小さくできる。式 (3-6-14) の下側の関係式より、

$$\{\chi_b\} = -[K_{\chi\chi}]^{-1}[K_{\chi\xi}]\{\xi\} = [B]\{\xi\} \quad (3-6-15)$$

式 (3-6-15) の関係を用いて式 (3-6-14) を縮小すると、

$$\left([K_{\xi\xi}] - [K_{\xi x}] [K_{xx}]^{-1} [K_{x\xi}] - \omega^2 [M_{\xi\xi}] \right) \{\xi\} = \{0\} \quad (3-6-16)$$

式(3-6-16)を解いて固有振動数が得られる。それに対応する固有モード $\{\xi\}$ を式(3-6-15)に代入して結合領域の部分の固有モードが、また式(3-6-9)の上側の関係式に式(3-6-10)を代入してできる式

$$\{\chi_a^{\phi}\} = \left([\phi_a^{\phi}] - [\alpha_{ab}^{\phi}] [\alpha_{bb}^{\phi}]^{-1} [\phi_b^{\phi}] \right) \{\xi_i\} + [\alpha_{ab}^{\phi}] [\alpha_{bb}^{\phi}]^{-1} \{\chi_b^{\phi}\} \quad (3-6-17)$$

で各分系の内部領域部の固有モード成分が求められる。

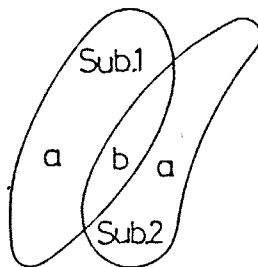


図3-6-3 2分系からなる構造物(剛結合)

3. 6. 2. b 検討

図3-6-2のAに示す両端固定平板を対象にして、前記の不拘束モード合成法の検討を行う。厳密解としては、有限要素法で全系を解析した結果を用いる。すなわち、伝達関数の厳密解は、有限要素法で全ての固有モードを求め、それらを用いてモード解析した結果である。CMSの特性についての検討は以前に報告したので、厳密解およびCMSの結果と比較しながら検討を行う。

図3-6-2Bのように2つの分系に分割して解析する。表3-6-3には、従来の方法による剰余コンプライアンス行列を用いて計算した結果を示す。採用モード数が同じでも、剰余コンプライアンス行列を計算するのに用いるモードの数を増やすと精度が良くなる。しかし、剰余コンプライアンス行列に用いるモード数を減らした分だけ採用モード数を増やしても精度は改善されない。

そこで、剰余コンプライアンス行列の計算方法としてHansteenの方法を用いて計算した結果を表3-6-4に示す。Hansteenの方法によれば、採用モードのみを用いて、採用モードより高次のすべての固有モードの影響を含んだ精度の良い剰余コンプライアンス行列が得られる。採用モード数が10の結果ですら表3-6-3の結果より精度が良い。

このように本方法では、剰余コンプライアンス行列が重要な働きをすることがわかる。そこで、例として図3-6-2Bの分系1単体について節点1を面外方向に励振した時の励振点自身のY軸回りの回転角変位の伝達関数を示しながら、その理由を考察する。

まず図3-6-4で、30次までの固有モードを用いた結果を厳密解と比較する。下側の図はボード線図（位相省略）であり、実線が厳密解であり、破線が30次までの固有モードを使用した結果である。上側の図は、破線で示すゲインが実線のゲインに対して何倍ずれているかを示す。30次より高次の固有モードを無視したための誤差は低周波数域まで及んでいることがわかる。同様に図3-6-5は180次（残り30次）までの固有モードを用いた結果である。図3-6-6は、採用モード数は30次までとしてHansteenの方法による剰余コンプライアンス行列を用いて計算した結果を示す。図3-6-5と図3-6-6を比較すると180次採用のモード解析の結果より、ほんの30次の採用モードでもHansteenの剰余コンプライアンス行列を用いた結果の方が精度良いことがわかる。剰余成分は、このように低次側の周波数域まで影響を及ぼすために、本方法の解析精度が左右されるのである。

部分構造合成法に利用するという観点からは、実験モード解析で行われている曲線適合の精度判定はボード線図上でゲインを対数表示した状態でどれだけ適合しているかを調べればよい。そして、すそ部分の適合具合が重要である。そこで、図3-6-4、3-6-5、3-6-6の上部に用いたようなゲインの倍率図を用いると便利である。たとえば、図3-6-5と図3-6-6を較

べた場合、ボード線図上では精度の差ははっきり視覚的にわからないが、上部の倍率図を較べるとよくわかる。

一方、CMSでは、剰余成分は考慮されないが、表3-6-3の固有振動数を見れば明らかなように、精度が良い。この理由は、各分系の採用モードとして拘束固有モードを用いるためである。拘束モードでは結合部を固定とするので、その振動モードに対しては結合部を通して他の分系からの作用力の影響が働かないのである。

表3-6-5に結合点のうちの1点に対する剰余コンプライアンス行列成分を省略（零にする）して全系の解析を行った結果を示す。剰余コンプライアンス行列の一部の成分を省略しただけでも相当精度が悪化することがわかる。そこで、各分系の情報として実験モード解析の曲線適合で求めたモード特性を本モード合成法に用いようとする場合、結合点となる点はすべて励振点として振動試験（他点同時励振の必要はない）し、必要な剰余コンプライアンス行列成分はすべて求めるべきであり、できるだけ省略すべきではない。

次に、計算時間の比較を行う。すべて解析プログラムは著者作成のものを使用したので、プログラミングの技術レベルは同一のものであり、計算時間を比較すれば解析方法自体の効率を比較することになる。

モデルの幾何学的対称性は考慮せず計算した。表3-6-3において、CMSでは6.38秒、有限要素法での一体計算は10.13秒、剰余コンプライアンス行列（従来の方法使用）を用いる方法では左側から7.70秒、7.77秒、9.82秒、16.41秒、7.85秒、10.69秒であった。一方、表3-6-4に示す計算では、左側から11.96秒、13.55秒、14.59秒、採用モード数30で対称性を考慮すると8.19秒であった。表3-6-1の計算では、左側から4.50秒、7.27秒、12.08秒、24.44秒であった。

計算時間のみの比較では、剰余コンプライアンス行列を用いない方法が一番速く、次にCMS、そして剰余コンプライアンス行列を用いる方法の順になる。しかし、計算精度を考慮しながら比較すると、CMSが最も良く、次は剰余コンプライアンス行列を用いる方法である。

表 3-6-3 剰余コンプライアンス行列を用いる
モード合成法による平板の固有振動数
(従来の方法による剰余コンプライアンス行列使用)

Number of adopted natural modes of Sub.1 and Sub.2	10						20						30						CMS						
	40			30			80			180			20			70			Error%			Error%			
	Freq.	Error%	Exact Result	Freq.	Error%	Exact Result	Freq.	Error%	Exact Result	Freq.	Error%	Exact Result	Freq.	Error%	Exact Result	Freq.	Error%	Exact Result	Freq.	Error%	Exact Result	Freq.	Error%	Exact Result	
1	74.0	7.41	68.8	74.0	7.41	68.8	71.9	4.36	69.9	1.59	74.0	7.41	71.9	4.36	71.9	4.36	68.8	68.8	0.0	68.8	0.0	68.8	0.0	68.8	0.0
2	171.4	1.84	168.2	171.4	1.84	168.2	169.4	0.71	168.8	0.35	171.8	2.08	169.4	0.71	169.4	0.71	168.2	168.2	0.0	168.2	0.0	168.2	0.0	168.2	0.0
3	191.3	0.79	189.7	191.3	0.79	189.7	190.2	0.21	189.7	0.0	191.3	0.79	190.2	0.21	190.2	0.21	189.7	189.7	0.0	189.7	0.0	189.7	0.0	189.7	0.0
4	390.4	9.20	357.4	390.3	9.17	368.4	368.4	3.04	357.6	0.05	390.2	9.17	368.4	3.04	368.4	3.04	357.4	357.4	0.0	357.4	0.0	357.4	0.0	357.4	0.0
5	418.3	12.17	372.9	418.1	12.09	398.1	398.1	6.75	382.1	2.46	418.0	12.09	398.1	6.75	398.1	6.75	373.0	373.0	0.03	373.0	0.03	373.0	0.03	373.0	0.03
6	627.5	7.55	583.4	627.4	7.54	605.2	605.2	3.71	595.9	2.12	627.3	7.52	605.0	3.70	605.0	3.70	584.1	584.1	0.11	584.1	0.11	584.1	0.11	584.1	0.11
7	632.8	2.34	618.2	630.3	1.94	620.6	620.6	0.38	618.4	0.01	630.2	1.94	620.6	0.38	620.6	0.38	618.3	618.3	0.02	618.3	0.02	618.3	0.02	618.3	0.02
8	924.8	8.00	856.2	922.6	7.74	874.3	874.3	2.11	857.3	0.12	922.5	7.74	874.2	2.10	874.2	2.10	856.6	856.6	0.04	856.6	0.04	856.6	0.04	856.6	0.04
9	954.1	3.56	921.2	951.7	3.31	928.4	928.4	0.77	921.3	0.01	951.7	3.31	928.4	0.77	928.4	0.77	922.6	922.6	0.14	922.6	0.14	922.6	0.14	922.6	0.14
10	1067.5	15.28	926.0	1059.9	14.46	996.3	996.3	0.75	950.6	2.64	1059.2	14.37	995.9	0.73	995.9	0.73	927.1	927.1	0.11	927.1	0.11	927.1	0.11	927.1	0.11
11	1132.4	4.26	1086.1	1129.7	4.00	1110.2	1110.2	2.22	1086.6	0.03	1129.2	3.95	1109.9	2.18	1109.9	2.18	1086.1	1086.1	0.0	1086.1	0.0	1086.1	0.0	1086.1	0.0
12	1325.7	12.18	1181.6	1317.6	11.50	1253.1	1253.1	6.04	1225.6	3.72	1315.8	11.35	1250.6	5.83	1250.6	5.83	1188.8	1188.8	0.61	1188.8	0.61	1188.8	0.61	1188.8	0.61
13	1444.1	11.41	1296.1	1432.0	1.99	1302.9	1302.9	0.51	1297.0	0.06	1321.0	1.92	1302.6	0.50	1302.6	0.50	1297.2	1297.2	0.07	1297.2	0.07	1297.2	0.07	1297.2	0.07
14	1484.0	11.47	1331.1	1433.2	7.67	1360.4	1360.4	2.19	1336.9	0.43	1433.0	7.64	1359.9	2.15	1359.9	2.15	1335.7	1335.7	0.34	1335.7	0.34	1335.7	0.34	1335.7	0.34
15	2131.1	36.36	1563.2	1651.4	5.64	1588.7	1588.7	1.62	1568.2	0.31	1650.6	5.58	1587.1	1.52	1587.1	1.52	1570.3	1570.3	0.44	1570.3	0.44	1570.3	0.44	1570.3	0.44
16	2494.0	52.16	1638.9	1774.2	8.25	1705.9	1705.9	4.08	1641.5	0.15	1771.4	8.08	1703.8	3.95	1703.8	3.95	1639.8	1639.8	0.05	1639.8	0.05	1639.8	0.05	1639.8	0.05
17	2546.5	47.25	1729.2	1991.0	15.13	1874.6	1874.6	8.40	1776.3	2.72	1984.2	14.74	1871.2	8.20	1871.2	8.20	1737.7	1737.7	0.48	1737.7	0.48	1737.7	0.48	1737.7	0.48
18	2651.4	37.10	1933.8	2131.1	10.19	2070.7	2070.7	7.07	1973.7	2.05	2064.1	6.73	2015.9	4.24	2015.9	4.24	1933.8	1933.8	0.05	1933.8	0.05	1933.8	0.05	1933.8	0.05
19	4093.9	104.54	2001.5	2238.3	11.83	2083.3	2083.3	4.08	2034.3	1.63	2237.1	11.76	2079.8	3.91	2079.8	3.91	2033.1	2033.1	1.57	2033.1	1.57	2033.1	1.57	2033.1	1.57
20	—	—	2002.9	2276.2	13.64	2171.5	2171.5	8.41	2112.2	5.45	2270.2	13.34	2150.1	7.34	2150.1	7.34	2078.6	2078.6	3.77	2078.6	3.77	2078.6	3.77	2078.6	3.77

表 3 - 6 - 4 平板の固有振動数 (Hansteenの方法使用)

Number of adopted natural modes of Sub.1 and Sub.2		10		20		30	
order	Exact Result	Freq.	Error%	Freq.	Error%	Freq.	Error%
1	68.8	68.8	0.0	68.8	0.0	68.8	0.0
2	168.2	168.2	0.0	168.2	0.0	168.2	0.0
3	189.7	189.7	0.0	189.7	0.0	189.7	0.0
4	357.4	357.6	0.02	357.4	0.0	357.4	0.0
5	372.9	373.1	0.05	372.9	0.0	372.9	0.0
6	583.4	584.1	0.10	583.4	0.0	583.4	0.0
7	618.2	618.5	0.03	618.2	0.0	618.2	0.0
8	856.2	861.4	0.56	856.4	0.01	856.2	0.0
9	921.2	921.7	0.05	921.3	0.01	921.2	0.0
10	926.0	930.0	0.43	926.3	0.02	926.1	0.01
11	1086.1	1093.0	0.62	1086.3	0.02	1086.2	0.01
12	1181.6	1198.4	1.42	1182.6	0.08	1181.7	0.01
13	1296.1	1302.4	0.48	1296.3	0.02	1296.1	0.0
14	1331.1	1332.9	0.12	1331.2	0.01	1331.1	0.0
15	1563.2	1785.2	14.20	1565.3	0.13	1563.3	0.01
16	1638.9	1973.7	20.43	1640.4	0.09	1639.4	0.03
17	1729.2	2008.0	16.12	1731.2	0.11	1729.7	0.03
18	1933.8	2227.2	15.16	1973.7	2.05	1937.6	0.19
19	2001.5	3646.4	82.17	2002.5	0.05	2001.9	0.02
20	2002.9	6140.6	206.59	2010.0	0.35	2003.4	0.02

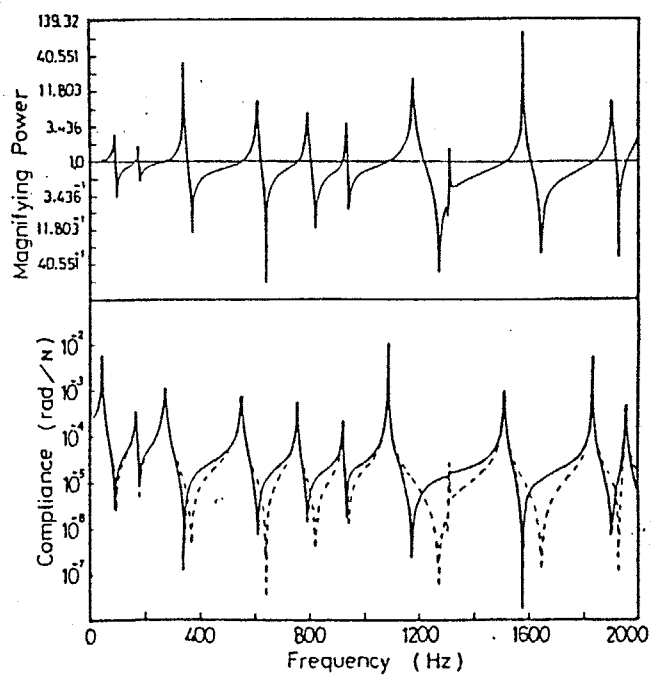


図 3 - 6 - 4 分系 1 単体の伝達関数 (30 次モード使用)

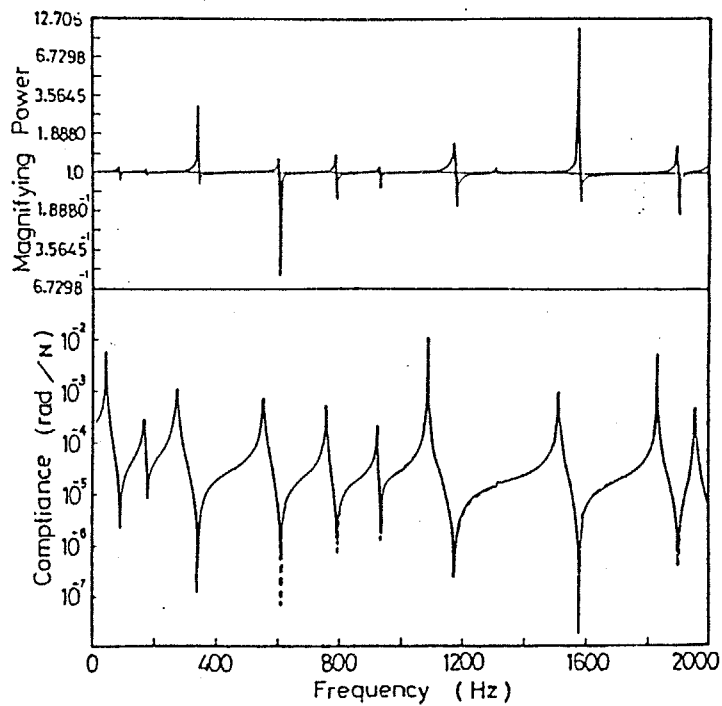


図 3 - 6 - 5 分系 1 単体の伝達関数 (180 次モード使用)

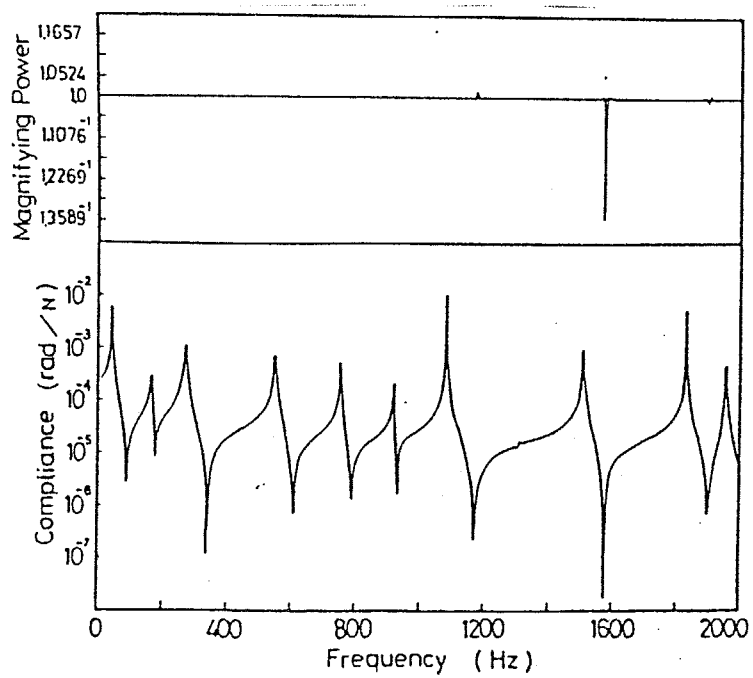


図 3 - 6 - 6 分系 1 単体の伝達関数 (30 次モード使用)
(Hansteenの方法による剰余コンプライアンス行列使用)

表3-6-5 剰余成分の一部を省略した場合の固有振動数
(採用モード数30)

order	Exact Result	A		B		C	
		Freq.	Error%	Freq.	Error%	Freq.	Error%
1	68.8	67.4	2.03	68.0	1.16	67.6	1.74
2	168.2	167.9	0.18	167.8	0.24	167.5	0.42
3	189.7	189.6	0.05	188.7	0.53	188.3	0.74
4	357.4	357.2	0.06	343.9	3.78	337.4	5.60
5	372.9	362.1	2.90	366.5	1.72	363.5	2.52
6	583.4	577.7	0.98	576.4	1.20	571.7	2.01
7	618.2	615.6	0.42	610.4	1.26	606.4	1.91
8	856.2	853.3	0.34	819.1	4.33	799.4	6.63
9	921.2	897.4	2.58	909.4	1.28	902.1	2.07
10	926.0	921.9	0.44	921.4	0.50	921.4	0.50

A: Calculation on condition that the degrees of freedom at the nodal point 4 of the residual compliance matrix of Sub.2 are omitted.

B: Calculation on condition that the degrees of freedom at the nodal point 1 of the residual compliance matrix of Sub.2 are omitted.

C: Calculation on condition that the degrees of freedom at the nodal points 1 of the residual compliance matrices of Sub.1 and Sub.2 are omitted.

3.7 区分モード合成法と縮小インピーダンス合成法の特徴の比較

本章で提案する区分モード合成法も、第2章で提案した縮小インピーダンス合成法(RIM)も、FEMを直接適用することが困難な大規模構造物の動的解析を可能にするために開発された一般解法である。両者とも、構造系全体をFEMや伝達行列法などの従来の方法が適用できる程度の大きさの自由度を有するいくつかの分系にわけ、各分系を個別に定式化し、自由度を縮小した後に、結合して全系の運動方程式を求めて解く、という共通した手法を用いる。しかし、両者には分系の定式化と結合方法に相違があり、そのために両者は互いに異なる特色を有するので、以下に両者の比較を行う。

まず、区分モード合成法(CMS)の法がRIMよりも優れている点は、次のようである。

(1) 固有値の計算時間—— CMSでは、サブスペース法など、通常FEMで用いるすべての解法が利用できるのもので、複雑な構造物ではもちろんのこと、両端固定長方形板のような簡単な構造物でも、前述のように、FEMより計算時間が短くてすむ。それに対してRIMは、デターミナントサーチ法を用いるか、または応答の周波数スペクトルから固有振動数を決定しなければならないので、複雑な構造物では明らかにFEMよりRIMの方が有利であるが、簡単な構造物ではFEMより計算時間がかかる場合がある。

(2) 強制振動の計算時間—— 前述の3例では、CMSによる計算時間はRIMのそれぞれ7.3倍、15倍、4.6倍であった。分系の数や各分系の自由度によって両者の計算時間は異なるが、CMSの方が有利な場合は多い。

(3) 自由度—— CMSにおける全系の自由度は各分系の採用モード数の和になり、分系同志の結合部の数や自由度の大きさには無関係であるのに対し、RIMにおける全系の自由度は、各結合部の自由度の和になる。したがって、CMSの方が複雑な構造物をより少ない自由度で解析できる。ただし、CMSもRIMもFEMより有利であり、構造物が複雑になるほどその有利性は増大する。

(4) 固有モードの寄与率—— CMSでは、全系の振動に対する各分系の各固有モードの寄与率を直接算出するので、振動特性の改善や最適設計への方法や方向の選択に対する見通しが容易である。

これに対して、RIMの法がCMSより優れている点は次のとおりである。

(1) 精度—— R I Mはガウスの消去法の前進消去の過程のみからなり、論理が簡単な直接解法なので、要素分割による近似以外に本方法のアルゴリズム上からの誤差は発生しない(数値計算誤差のみ)。

これに対して、C M Sでは、要素分割以外に静縮小の過程、固有値解析やモード解析の段階でも誤差が混入する可能性があるうえに、各分系の採用モード数や結合部の剛体変位を代表する点の選択の仕方によって精度が変化する。

(2) 周波数帯域—— R I Mでは任意の周波数の任意帯域を選択して解析できる。特に高周波数域でも精度がよいので、騒音対策などに適している。一方C M Sでは、前述のような低次の固有振動数や低次モードが支配する応答はR I Mと同程度に精度よく解析できるが、静縮小の過程を採用するために、高次の固有振動数や高次モードが支配する高周波数の応答の計算誤差が増大する可能性がある。

(3) 他のシステムとの結合—— R I Mでは、分系の定式化を隣接分系との結合領域間の伝達関数の形で行うので、伝達行列法などF E M以外の解法や、ビルディングブロック法、実験モード解析の振動試験を基礎とした処理システムなどとの結合がC M Sよりも容易である。

3.8 結言

- (1) 混合型の方法に類する方法であるBenfieldの方法について従系の特性を主系に結合する過程を改良し、その解析精度や有効性を検討した。
- (2) 拘束型のモード合成法に類する方法として、区分モード合成法を提案した。
- (3) そのアルゴリズムを多重化することによって、多重区分モード合成法を提案した。
- (4) 提案したこれら2つの方法をいくつかの供試体に適用して計算精度や計算速度などを検討した。その結果、解析精度は有限要素法の結果とほぼ同等であり、計算時間は短いことがわかった。
- (5) 計算時間についてMSC-NASTRANと比較し、区分モード合成法の方が計算時間が短いことを明らかにした。
- (6) 2つの代表的な不拘束モード合成法を説明し、区分モード合成法と比較しながら、それらの有効性を検討した。
- (7) その結果、不拘束モード合成法では、剰余コンプライアンスの影響が解析精度に大きく作用していることがわかった。
- (8) そのため、第5章で著者が提案する方法によって求めた剰余コンプライアンス行列を用いると、不拘束モード合成法でも区分モード合成法とまったく同等の良い精度の解を得ることができると明らかとなった。

第4章 特性行列合成法

4.1 緒言

特性行列合成法は、分系の動特性を小自由度の特性行列（質量行列、減衰行列および剛性行列）の形で表現するものである。

特性行列合成法の考え自体は別に新しいものではなく、従来から超要素法（スーパーエレメント法）と呼ばれる方法がこれに該当する。超要素法では、有限要素法によって作成した分系の特性行列をギャンの静縮小によって近似的に縮小する方法である。本章で提案する方法は、この超要素法とは異なり、振動試験や理論解析により求めた動特性を用いて小自由度の特性行列を同定する。用いる動特性としては、伝達関数とモード特性が考えられる。モード特性または伝達関数から特性行列を同定するには、第6章で提案する方法を用いればよい。

一旦分系の特性行列が求められれば、その分系は有限要素法における1つの要素とまったく同一の扱いをし、通常の有限要素法と同一の手順で全系の小自由度運動方程式を作成して解けばよい。

特性行列合成法には、（1）モード解析など通常の有限要素法に用いられるすべての解法を用いることができる、（2）有限要素法や他の部分構造合成法と自由に一体化でき、互いの長所を生かした解析ができる、（3）同定した特性行列は分系の結合状態を変えても有効であるからデータベース化に適している、（4）分系の入力伝達関数でもモード特性でもよい、（5）実験との結合が簡単である、などの特徴がある。しかし、他方では、同定する自由度の選定が不適当であれば特性行列が求まらないことがある、という欠点があり、今後検討を要する。

本章では、まず超要素法、次に結合部の特性行列を用いる方法の2種類の特性行列合成法の理論を簡潔に説明する。なお、特性行列の同定方法の理論については第6章で詳しく説明している。次に、平板モデルと3自由度モデルにこれらの特性行列合成法を適用し、相互に比較すると共に、精度や有用性に関する検討を行う。

4. 2 超要素法 (スーパーエレメント法)

ある部分構造の質量行列を $[M]$ 、剛性行列を $[K]$ とし、超要素法の縮小過程で消去される自由度を添字 a 、残される自由度を添字 b で表す。自由度 a には外力が作用しないとすれば、不減衰振動の運動方程式は、周波数領域で次のようになる。

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_a \\ \chi_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_a \\ \chi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_b \end{Bmatrix} \quad (4-2-1)$$

式 (4-2-1) において、 $\{x\}$ は変位振幅ベクトル、 $\{f_b\}$ は外力ベクトルを表す。式 (4-2-1) において慣性項を省略し、上半分の関係式から消去される自由度の変位 $\{x_a\}$ を残される自由度の変位 $\{x_b\}$ で表す。すなわち、

$$\{\chi_a\} = -[K_{aa}]^{-1}[K_{ab}]\{\chi_b\} = [T]\{\chi_b\} \quad (4-2-2)$$

式 (4-2-2) の関係を用いて元の質量行列と剛性行列を $\{x_b\}$ の自由度に等しい行列に縮小する。縮小後の質量行列を $[\bar{M}_{bb}]$ 、剛性行列を $[\bar{K}_{bb}]$ とすれば、

$$[\bar{M}_{bb}] = [T^T \quad I] \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ I \end{bmatrix} \quad (4-2-3)$$

$$[\bar{K}_{bb}] = [T^T \quad I] \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ I \end{bmatrix} \quad (4-2-4)$$

これらの行列で表現される分系モデルを超要素と呼ぶ。分系の超要素法による特性行列を構造物の結合状態のように重ね合わせ、全系の縮小した運動方程式を作成して解く。

上記の説明からわかるように、この方法は縮小過程で慣性項を無視し、その補正も行わないので、剛性項が支配的となる低次周波数領域でのみ適用できる。また、残す自由度の選び方 (どの節点の自由度を残すか) によって解析精度がかなり変化する。隣接分系との結合部自由度は必ず残す必要があるが、精度の良い解析を行うためには、その他に、振幅の大きくなる自由度、質量の大きい自由度および減衰の大きい自由度は残す必要がある。また、残す自由度は分系

全体になるべく均等に分布している方がよい。しかし、これらを同時に満足されるのは、一般にかなり困難である。

4. 3 結合部の特性行列を用いる方法

各分系についてその結合部に対応した小さな自由度の特性行列を同定する技術は別と考えると、特性行列合成法そのものの理論はたいへん易しいものである。まさに、FEMにおける1つ1つの有限要素の特性行列（剛性行列と質量行列）を統合していき、モデル全体の特性行列を作成する工程とまったく同じである。例えば、今図4-3-1に示すように、3つの分系からなる系を考えることにする。それぞれの分系についてはなんらかの方法によって特性行列が求まり、準備できているとする。

すなわち、分系1については、

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & K_{44}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & M_{13}^{(1)} & M_{14}^{(1)} \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} & M_{23}^{(1)} & M_{24}^{(1)} \\ M_{31}^{(1)} & M_{32}^{(1)} & M_{33}^{(1)} & M_{34}^{(1)} \\ M_{41}^{(1)} & M_{42}^{(1)} & M_{43}^{(1)} & M_{44}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & C_{13}^{(1)} & C_{14}^{(1)} \\ C_{21}^{(1)} & C_{22}^{(1)} & C_{23}^{(1)} & C_{24}^{(1)} \\ C_{31}^{(1)} & C_{32}^{(1)} & C_{33}^{(1)} & C_{34}^{(1)} \\ C_{41}^{(1)} & C_{42}^{(1)} & C_{43}^{(1)} & C_{44}^{(1)} \end{bmatrix}$$

分系2については、

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} \\ K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} M_{11}^{(2)} & M_{12}^{(2)} & M_{13}^{(2)} & M_{14}^{(2)} \\ M_{21}^{(2)} & M_{22}^{(2)} & M_{23}^{(2)} & M_{24}^{(2)} \\ M_{31}^{(2)} & M_{32}^{(2)} & M_{33}^{(2)} & M_{34}^{(2)} \\ M_{41}^{(2)} & M_{42}^{(2)} & M_{43}^{(2)} & M_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & C_{13}^{(2)} & C_{14}^{(2)} \\ C_{21}^{(2)} & C_{22}^{(2)} & C_{23}^{(2)} & C_{24}^{(2)} \\ C_{31}^{(2)} & C_{32}^{(2)} & C_{33}^{(2)} & C_{34}^{(2)} \\ C_{41}^{(2)} & C_{42}^{(2)} & C_{43}^{(2)} & C_{44}^{(2)} \end{bmatrix}$$

分系3については、

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} M_{11}^{(3)} & M_{12}^{(3)} \\ M_{21}^{(3)} & M_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} C_{11}^{(3)} & C_{12}^{(3)} \\ C_{21}^{(3)} & C_{22}^{(3)} \end{bmatrix}$$

のように特性行列が求まっているとする。

そこで、特性行列合成法の統合工程はそれらを分系が結合しているのと同じように重ね合わせてゆけばよいので、全系に関する特性行列 $[K_{all}]$ 、 $[M_{all}]$ および $[C_{all}]$ は、

$$[K_{all}] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{34}^{(1)} + K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} & 0 \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} + K_{21}^{(2)} & K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$[M_{all}] = \begin{bmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & M_{13}^{(1)} & M_{14}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} & M_{23}^{(1)} & M_{24}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ M_{31}^{(1)} & M_{32}^{(1)} & M_{33}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{34}^{(1)} + M_{12}^{(2)} & M_{13}^{(2)} & M_{14}^{(2)} & 0 \\ M_{41}^{(1)} & M_{42}^{(1)} & M_{43}^{(1)} + M_{21}^{(2)} & M_{44}^{(1)} + M_{22}^{(2)} & M_{23}^{(2)} & M_{24}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & M_{31}^{(2)} & M_{32}^{(2)} & M_{33}^{(2)} & M_{34}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & M_{41}^{(2)} & M_{42}^{(2)} & M_{43}^{(2)} & M_{44}^{(2)} + M_{11}^{(3)} & M_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{21}^{(3)} & M_{22}^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$[C_{all}] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & C_{13}^{(1)} & C_{14}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}^{(1)} & C_{22}^{(1)} & C_{23}^{(1)} & C_{24}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31}^{(1)} & C_{32}^{(1)} & C_{33}^{(1)} + C_{11}^{(2)} & C_{34}^{(1)} + C_{12}^{(2)} & C_{13}^{(2)} & C_{14}^{(2)} & 0 \\ C_{41}^{(1)} & C_{42}^{(1)} & C_{43}^{(1)} + C_{21}^{(2)} & C_{44}^{(1)} + C_{22}^{(2)} & C_{23}^{(2)} & C_{24}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & C_{31}^{(2)} & C_{32}^{(2)} & C_{33}^{(2)} & C_{34}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & C_{41}^{(2)} & C_{42}^{(2)} & C_{43}^{(2)} & C_{44}^{(2)} + C_{11}^{(3)} & C_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{21}^{(3)} & C_{22}^{(3)} \end{bmatrix}$$

のように得られる。

そこで、これらの行列を用いて通常の固有値解析プログラムなどによって振動解析ができる。このような理論のために、特性行列合成法では振動解析段階においてはあらゆる数学的手段を利用することができるのでたいへん便利である。ただし、実験的アプローチにおける各分系の特性行列の同定技術が十分に発展し実用化することも重要である。

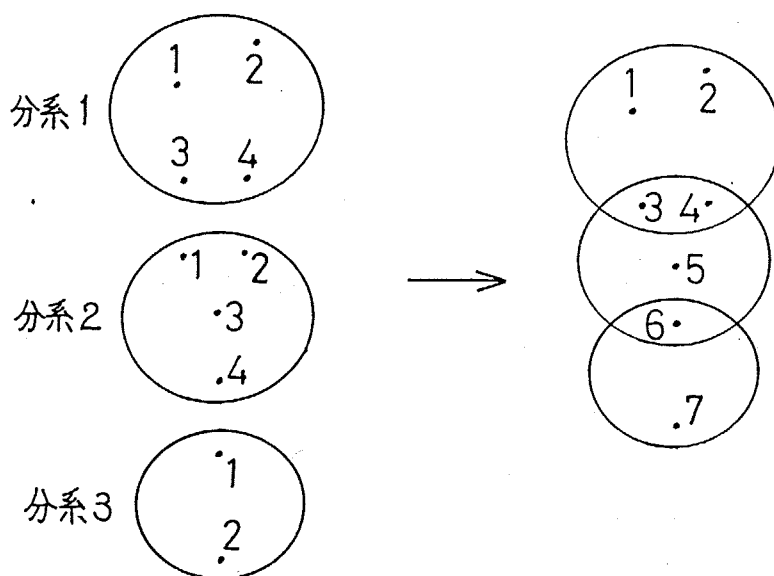


図 4-3-1

4. 4 検討

ここでは、二種類の解析例を示す。第1は図4-4-1に示すように、三角形平板3枚が並進成分のみで結合するモデルである。第2に、3自由度モデルを対象にする例を示す。

4. 4. 1 平板モデル

図4-4-1に示すように3枚の三角形平板が白丸印の節点で並進成分のみの結合をしている系の5kHzまでの面外(曲げ)振動を解析する。

まず、この系を構成する二種類の三角形平板についてそれぞれ解析する。図4-4-1の平板Aについて解析した固有振動数を表4-4-1に示す。解析対象周波数範囲内には3次までの固有振動数が含まれている。有限要素法を全体に直接適用する場合を、FEMの欄に示す。図4-4-1中で、平板Aの黒丸と白丸の4点を選択してS. E. (超要素法)で計算した結果を、「S. E.」の欄に示す。「CMS」の欄は区分モード合成法の結果である。次に、FEMで求めたモード特性から、黒丸と白丸4点の面外方向成分を抜き出して特性行列を同定し、その同定された特性行列の固有値解析から得た固有振動数を「MK from modal P.」の欄に示す。また、同じ4点の面外方向成分の6kHzまでの伝達関数をFEM応答解析で求め、それから特性行列を同定し、得られた特性行列から求めた固有振動数を「MK from response」の欄に示す。

三角形平板Bについても、平板Aと同様に、それぞれの解析を行う。固有振動数の結果を表4-4-2に示す。平板Bの方は、解析周波数範囲内に5次までの固有振動数が入るので、同定の際に選択する節点は、図4-4-1に示すように黒丸と白丸を合わせて6点とする。

表4-4-1と表4-4-2を見ると、まず超要素法で求めた結果は高次になるにつれて精度が悪くなることがわかる。残す節点を4点とした平板Aについては、S. E. では1次のみしか十分な精度が得られていない。そして、誤差は周波数の高い方が大きくなる。この原因は、[4. 2]で説明したように、超要素法への自由度の縮小の際に慣性項を無視する、いわゆるギャンの静縮小を行い、その補正手段を何も用いていないからである。

一方、CMSでは、分系の計算過程の中でギャンの静縮小を用いているものの、内部領域(図4-4-1中の丸印で示した節点以外)についての振動モードを用いてその補正を行っているので、精度が良い。

さて、本章で提案する、モード特性から特性行列を同定する方法では、明かにFEMの結果とほぼ完全に一致している。これは、FEMで求めたモード特性を利用するので当然ではあるが、このようにして同定した特性行列が有用となる場合がしばしばあると思われる。

伝達関数(6kHz以下)から同定された特性行列では、用いた伝達関数の周波数領域範囲内にある固有振動数については、FEMと良く一致する。それ

より高次の固有振動数と固有モードは、伝達関数に含まれている剰余成分の影響を見積る役目をはたしており、正解に一致しなくてよい。なお、この剰余成分についても、測定点数を増やせば、正解に近づいていくことがわかっている。

以上で二種類の分系となる三角形平板単体の解析を終え、自由度の小さい特性行列が同定されたので、それらを重ね合わせて全体系の解析を行う。解析結果の固有振動数を表4-4-3に示す。

モード特性から同定した特性行列を用いた方法とCMSの結果は、解析周波数範囲全域で、基準となるFEMの結果によく似ている。

伝達関数から同定された特性行列を用いた結果は、低次でかなり大きな誤差を生じている。この原因は、各平板単体の同定に用いた周波数範囲の伝達関数が多少の誤差を含んでいるためである。これは剰余成分の影響であり、同定に用いる伝達関数の周波数範囲をもっと高域まで広げ、測定点数を増やすことによって改善される。

超要素法では、各平板単体についての結果と同様に、高次になるにつれて精度が大きく悪化している。

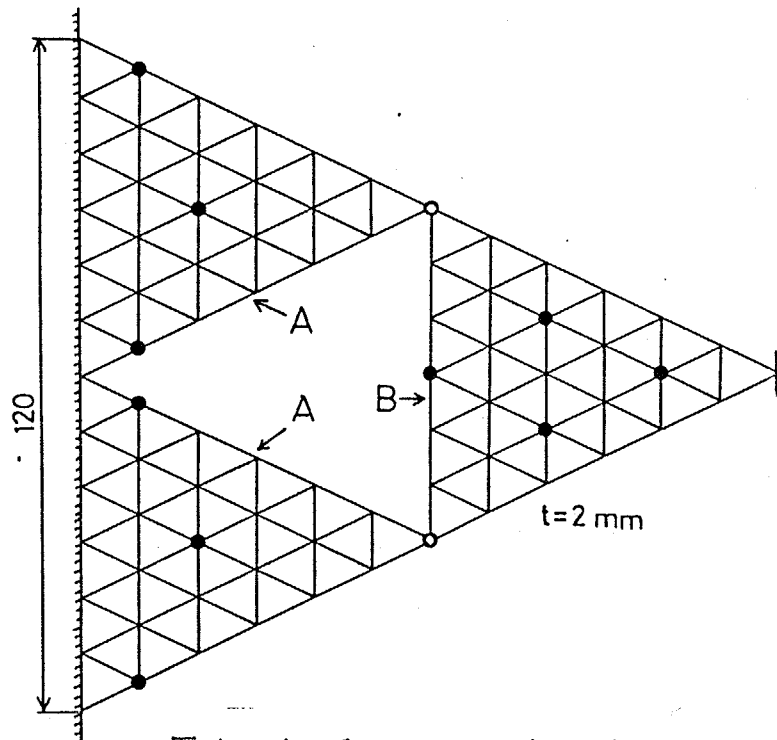


図4-4-1 三角形平板モデル

表 4 - 4 - 1 三角形平板 A の固有振動数

Order	FEM	CMS	S.E.	M K from modal P.	M K from response
1	1218	1219	1238	1218	1231
2	4720	4722	5609	4718	4751
3	5211	5228	6147	5205	5201
---	---	---	---	---	---
4	12058	12114	15994	12031	13876

(Hz)

表 4 - 4 - 2 三角形平板 B の固有振動数

Order	FEM	CMS	S.E.	M K from modal P.	M K from response
1	236	236	236	236	236
2	620	620	621	620	620
3	2827	2834	2864	2825	2825
4	4836	4895	4979	4832	4832
5	5321	5335	5599	5318	5317
---	---	---	---	---	---
6	9062	9600	9635	9055	8195

(Hz)

表 4 - 4 - 3 三角形平板モデル全系の固有振動数

Order	FEM	CMS	S.E.	M K from modal P.	M K from response
1	621	621	622	631	422
2	976	976	982	981	790
3	2102	2106	2175	2177	2481
4	2942	2943	3136	3232	3066
5	3170	3174	3270	3239	3173
6	4720	4723	5329	4718	4751
7	4720	4723	5603	4718	4751
8	5035	5075	6147	5034	4935
9	5276	5291	6147	5272	5293

(Hz)

4. 4. 2 3自由度モデル

実験データから同定した特性行列を用いた特性行列合成法の最も簡単な例として図4-4-2に示すような3自由度モデルの振動を解析する。

図4-4-2中でa, b, cの部材はゴムマウントであり、NO. 1から6は鋼製の円柱状のブロックである。

この系を図4-4-3から図4-4-5に示すような3つの分系にわけ、それぞれの分系について[6. 4. 4. a]で説明するような打撃試験により伝達関数を計測する。その結果からパーソナルコンピュータを用いて特性行列（この場合は1自由度なのでスカラーである）を同定する。

まず、図4-4-3の系についての特性値を同定すると表4-4-4に示す値が得られた。実験伝達関数とこれらの特性値から計算された伝達関数の適合具合を図4-4-6に示す。

図4-4-4と図4-4-5の系については上下を入れ換えて特性値を求める。それぞれの結果を表4-4-5と表4-4-6に示す。また、表4-4-5の同定特性値(A, B)の適合具合を図4-4-7(A, B)に、表4-4-6の同定特性値(A, B)の適合具合を図4-4-8(A, B)にそれぞれ示す。

最上部の円柱ブロック(NO. 6)の質量の測定方法については[6. 4. 4. b]に記すので、そこを参照されたい。上下を入れ換えて同定した1自由度の分系(片方を固定ベッドに接着して測定する)の特性値が多少違う原因の主なものは次のような点であると思われる。

- 1) 実験が打撃試験であるので、どうしてもデータ精度が悪い。
- 2) ゴムマウントは非線形性がかなり強く存在するので、上下を入れ換えて設定したときに特性が多少変化する。
- 3) ゴムマウント内にある締結用のボルトや鋼円柱ブロックに多少の不均一性やばらつきがある。

さて、以上で各分系の特性値が求まったので、上下を入れ換えた特性値はその平均値をもってその分系の特性値とする。そして、3自由度系の全系に対する特性行列を重畳の原理で作成すれば表4-4-7のようになる。

これらの全系に対する特性行列を用いて、図4-4-2の最上部を上下方向に単位力で励振したときの各ブロックの上下方向振動の伝達関数を計算する。一方、実際に作製した図4-4-2のモデルを打撃試験し、最上部と各ブロックの伝達関数を測定する。計算結果(実線)と実験結果(破線)を図4-4-9から図4-4-11に示す。

実験においては、実験方法自体の誤差の他に対象物が長いために上下方向だけの振動を与えようとしても多少横揺れ振動を起こしてしまう。また、ゴムマウントの特性(剛性、減衰)には非線形性がかなり強く、1自由度のときの初期ひずみと3自由度にしたときの初期ひずみ状態(静的平衡位置)の違いによ

って線形化する特性値に変化があるなどの推定される要因のために、計算結果と実験結果のずれが生じているものと思われる。しかし、実用的にはかなり良い結果であると思われる。

もし、これと同じ解析をモード特性を利用する曲線適合を用いて伝達関数合成法や何らかの不拘束モード合成法で行うとすれば、分系2、3については周辺自由状態で実験しなければならない。また、その場合剛体振動（慣性項）を正確に同定することは難しい。しかし、今回のように特性行列を同定する方法によれば、一端を固定した状態での実験からでも周辺自由状態すなわち異なる境界条件の特性を簡単に計算できるのである。この点は、対象物が大型である場合などに実用上の大きな利点となる。

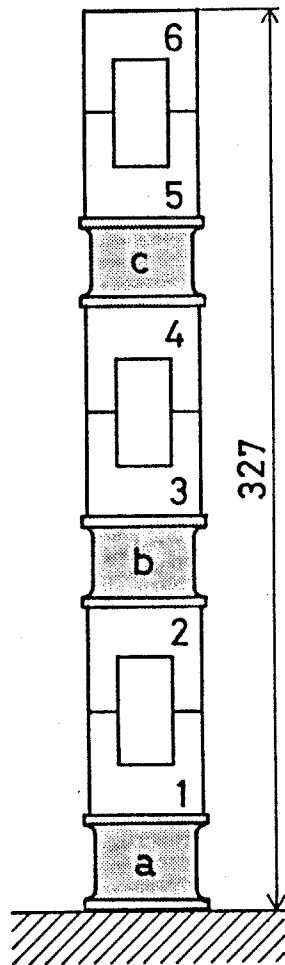


図4-4-2 ゴムマウントを用いた3自由度モデル

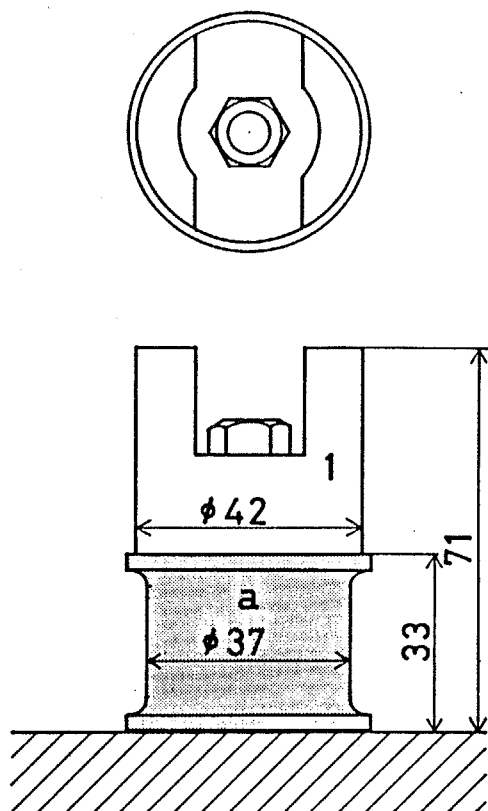


図 4 - 4 - 3 分系 1 の概略図

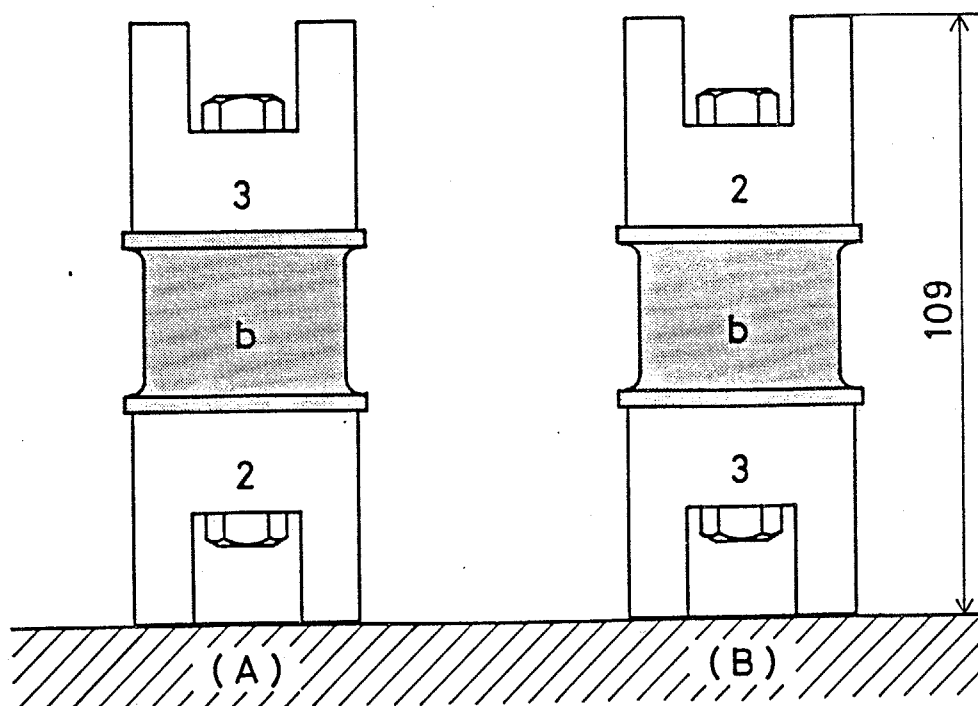


図 4 - 4 - 4 分系 2 の概略図

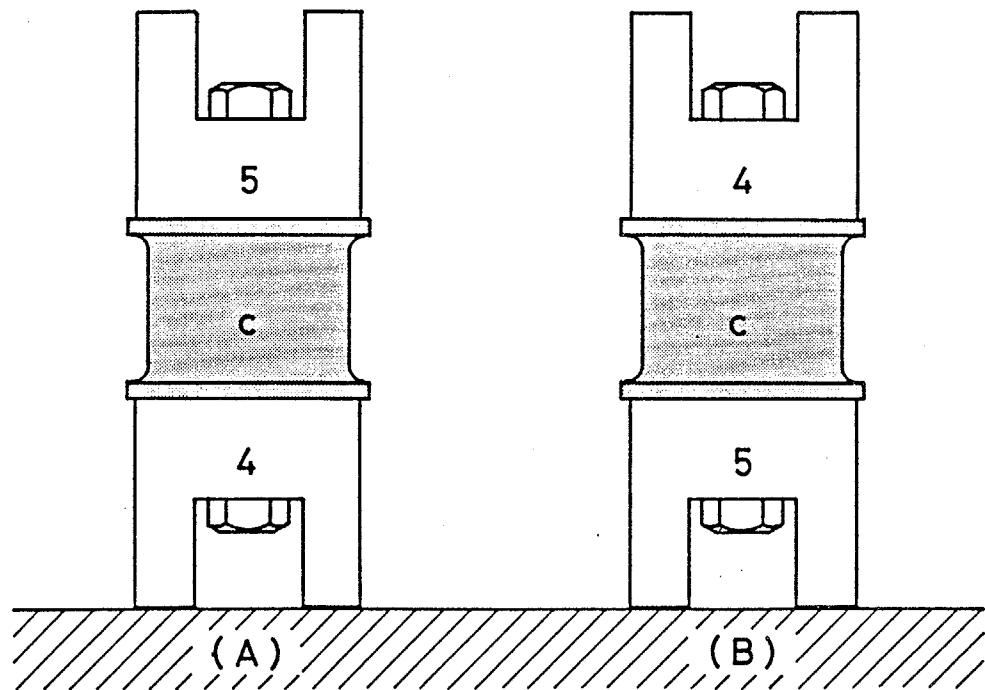


図 4 - 4 - 5 分系 3 の概略図

表 4 - 4 - 4 分系 1 の特性値

Stiffness	(N/mm)	4.22600E 02
Damping	(Ns/mm)	5.38665E-02
Mass	(Ns /mm)	4.24909E-04

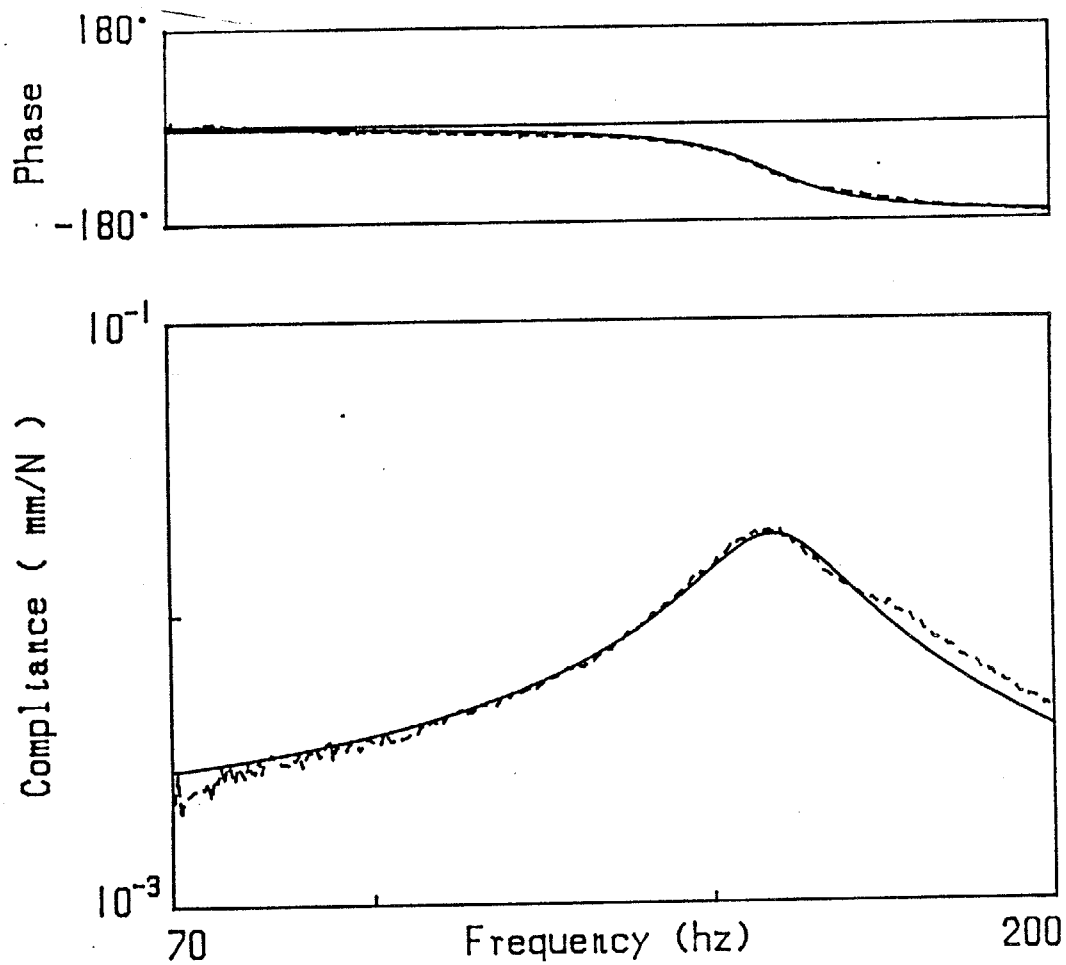


図 4 - 4 - 6 分系 1 についての同定結果

表 4 - 4 - 5 分系 2 の特性値

Setting	(A)	(B)
Stiffness (N/mm)	2.91262E 02	3.14833E 02
Damping (Ns/mm)	2.33921E-02	2.49846E-02
Mass (Ns /mm)	3.76945E-04	4.01628E-04

表 4 - 4 - 6 分系 3 の特性値

Setting	(A)	(B)
Stiffness (N/mm)	2.98111E 02	2.89924E 02
Damping (Ns/mm)	2.54523E-02	2.83140E-02
Mass (Ns /mm)	3.81372E-04	3.59342E-04

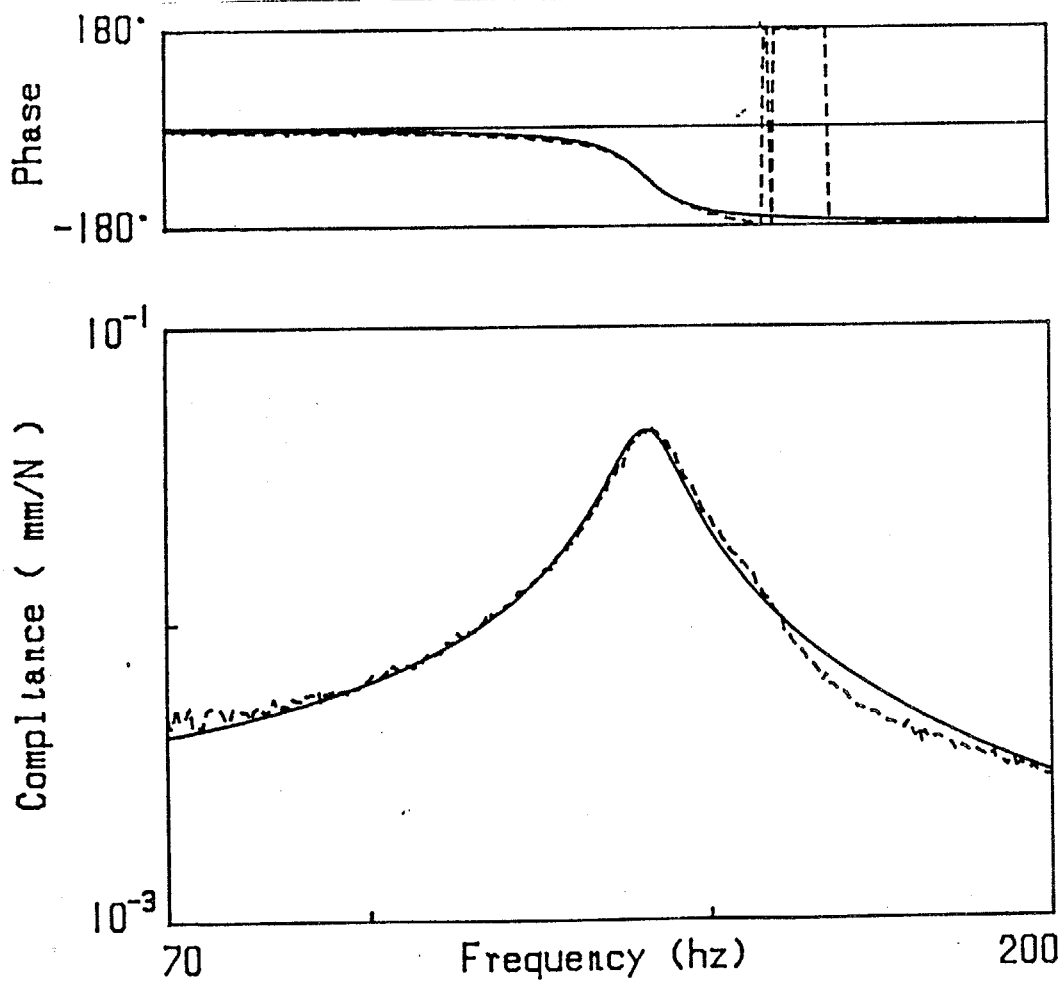


図 4 - 4 - 7 分系 2 についての同定結果 (A)

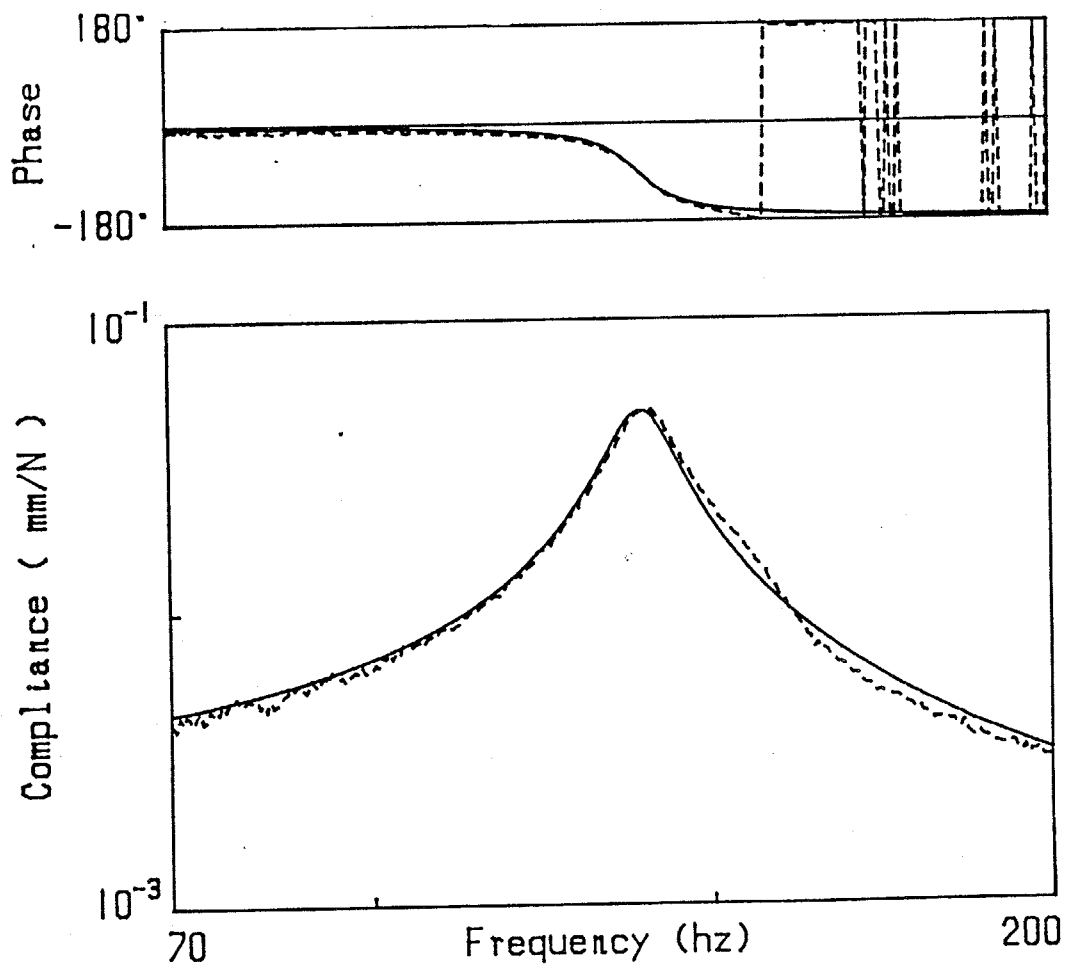


図 4 - 4 - 7 分系 2 についての同定結果 (B)

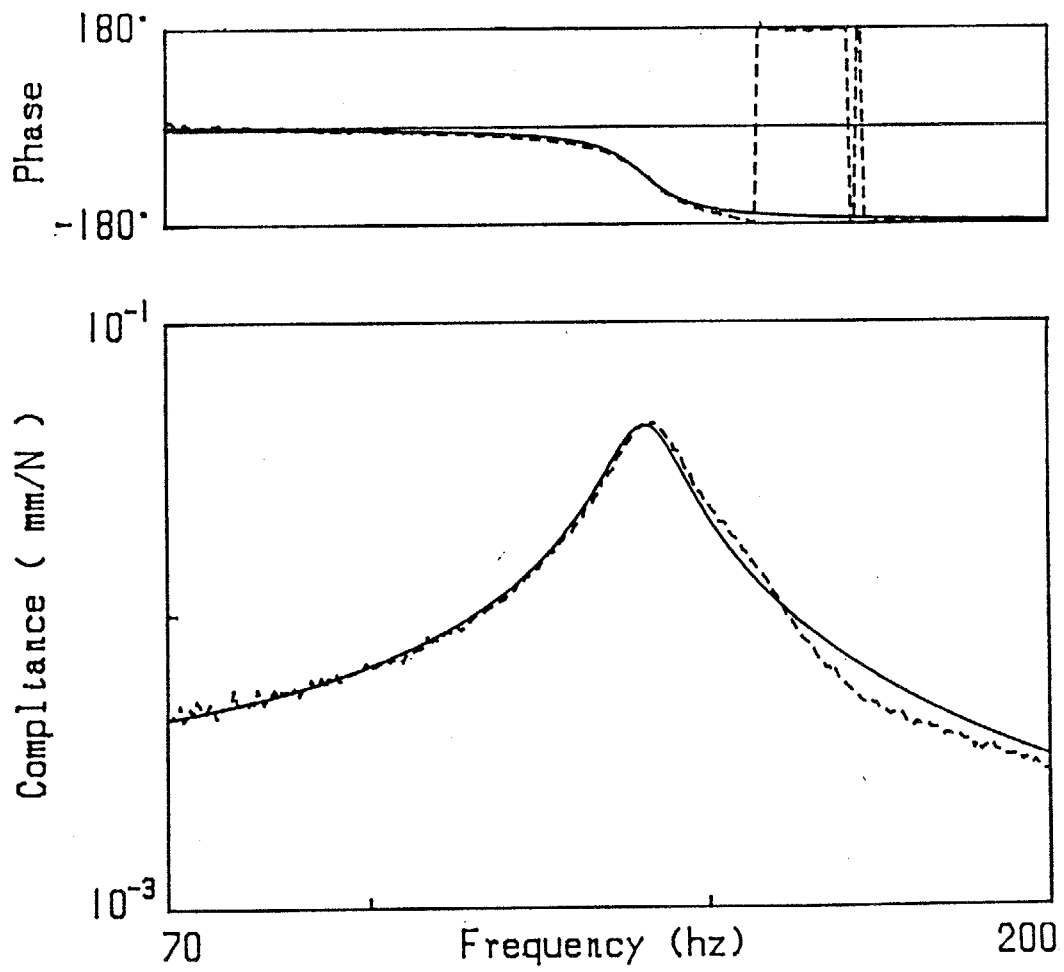


図 4-4-8 分系 3 についての同定結果 (A)

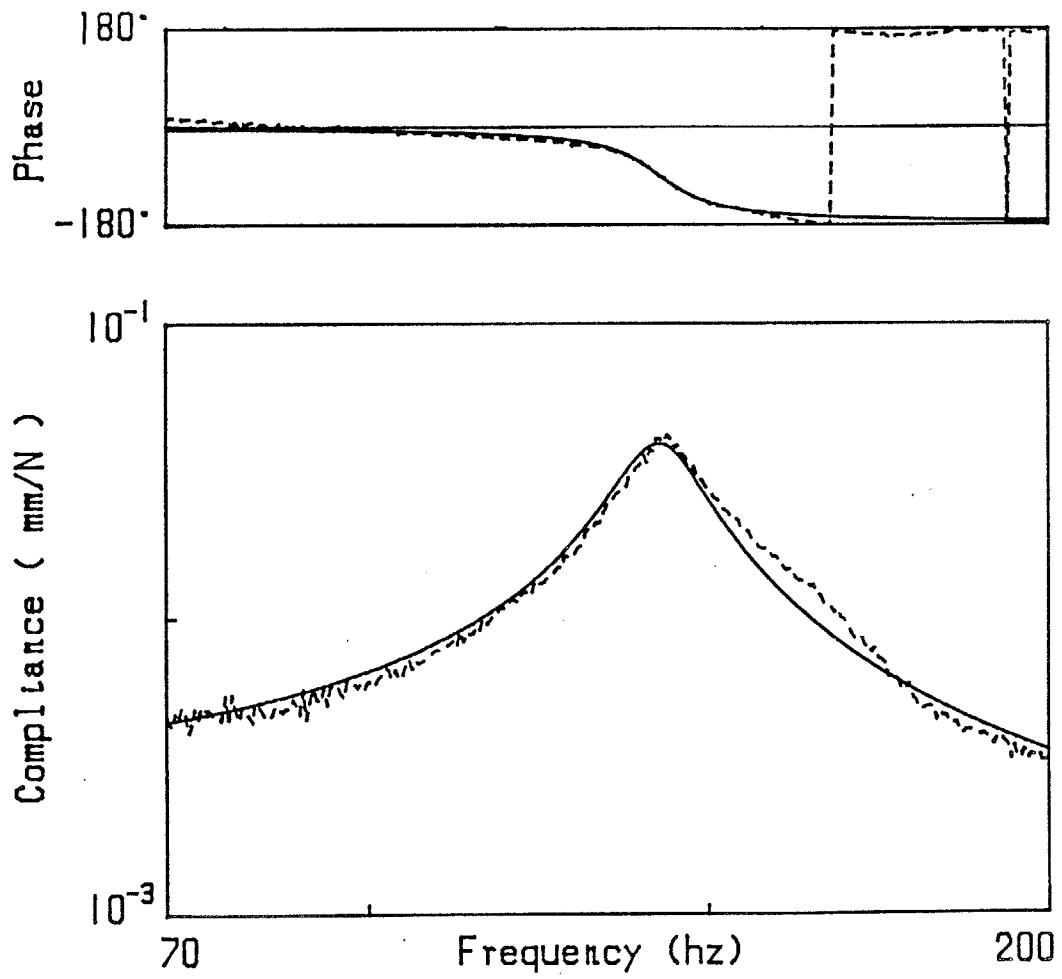


図 4 - 4 - 8 分系 3 についての同定結果 (B)

表 4 - 4 - 7 3 自由度の特性行列

$$[K] = \begin{bmatrix} 7.26079E 02 & -3.03048E 02 & 0.0 \\ -3.03048E 02 & 5.97066E 02 & -2.94018E 02 \\ 0.0 & -2.94018E 02 & 2.94018E 02 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 7.80549E-02 & -2.41883E-02 & 0.0 \\ -2.41883E-02 & 5.10715E-02 & -2.68832E-02 \\ 0.0 & -2.68832E-02 & 2.68832E-02 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 8.01854E-04 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 7.60970E-04 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 6.480364E-04 \end{bmatrix}$$

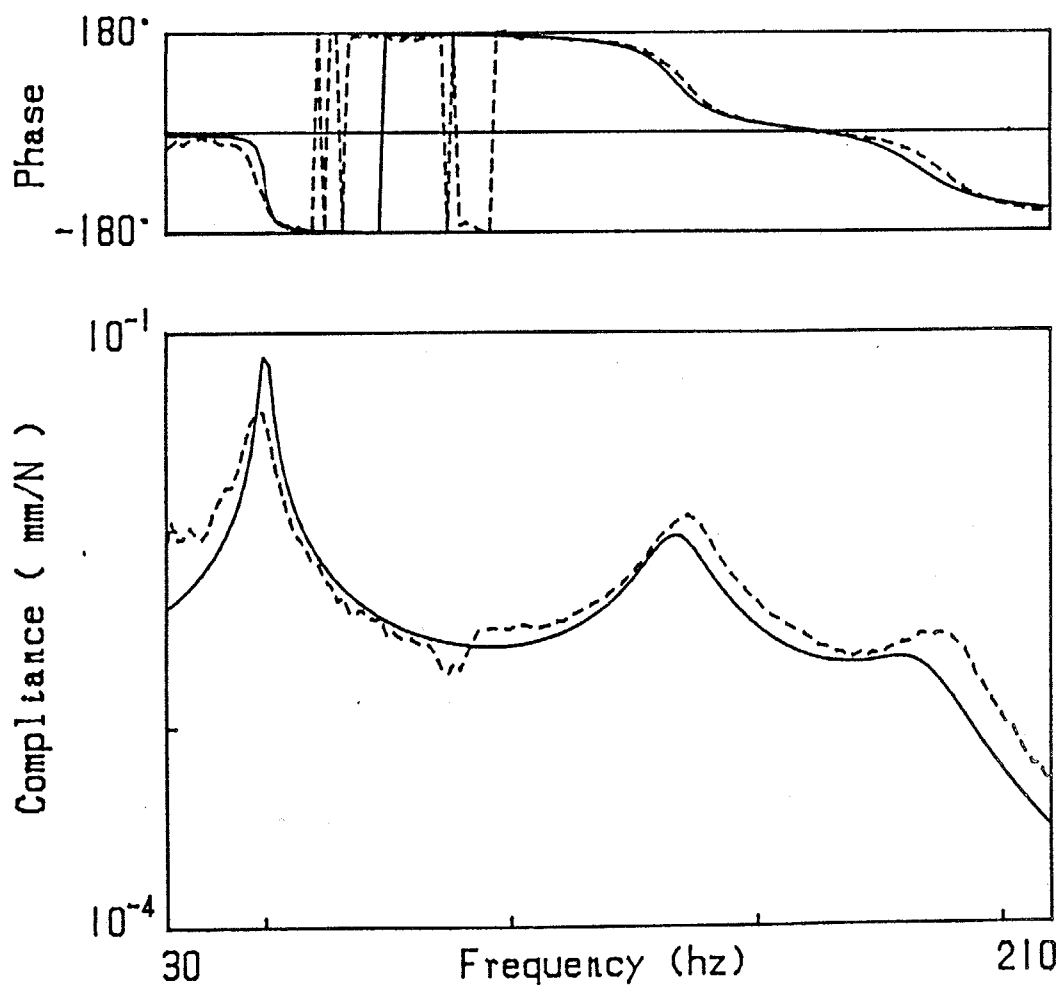


図 4 - 4 - 9 ブロック 1 の応答

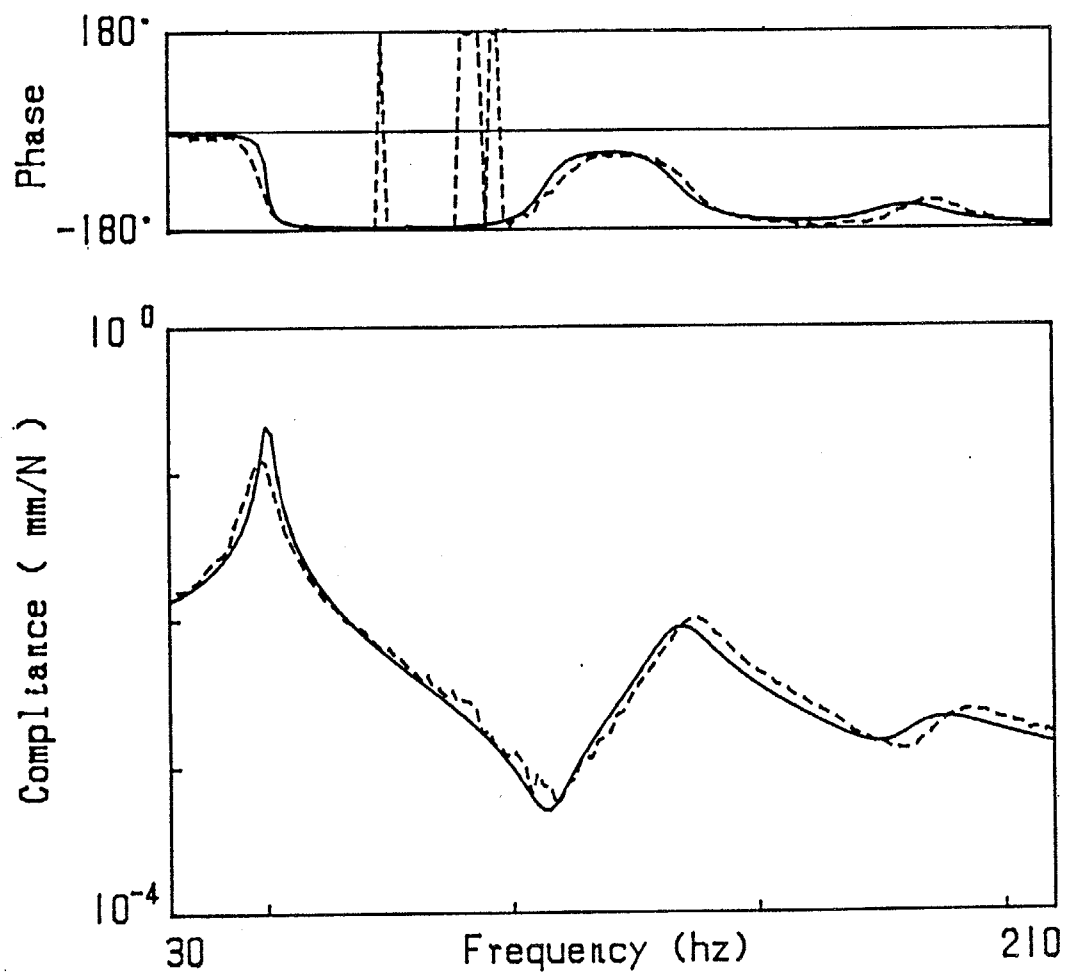


図4-4-10 ブロック5の応答

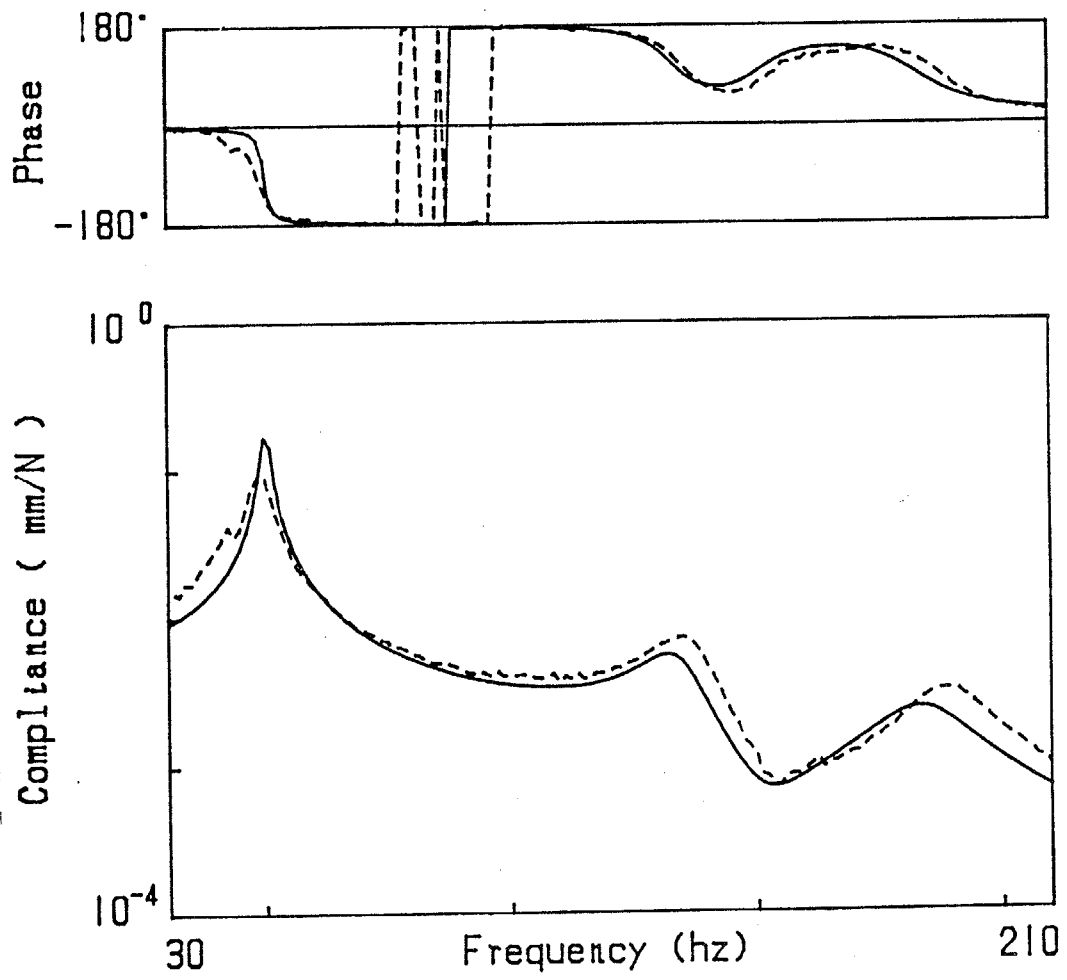


図4-4-11 ブロック3の応答

4.5 結言

- (1) 各部分構造について理論的もしくは実験的に得られたモード特性または伝達関数から結合部間の特性行列を同定し、それらを統合することによって全体系の解析を行う特性行列合成法を提案した。
- (2) 3種類の特性行列合成法（すなわち、超要素法、モード特性から特性行列を決定する方法および振動応答から直接特性行列を決定する方法）を2種類のモデルに適用し、それらの特徴や有効性を比較検討した。
- (3) その結果、超要素以外の2方法は、何らかの方法で解析された機械構造物の振動解析結果（もしくは実験結果）から結合部間の小さな特性行列を同定することにより、その構造物の結合部間の動特性のデータベースを構築できるとともに、それらの構造物がさらに結合されてできる大規模構造物系の解析を行うのに適していることがわかった。

第5章 モード解析における高次モードの補正^{<11>}

5.1 緒言

振動試験で得られた実験データを曲線適合すると、解析対象周波数範囲より高周波固有モード成分の影響を見積るための剰余コンプライアンスを実験的に求めることができる。しかし、有限要素法などの理論解析では効率よく精度の良い剰余コンプライアンス行列を理論的に求める方法がなかった。一方、剰余コンプライアンス行列の精度は、[3. 6]で説明する不拘束モード合成法の解析精度に重要な働きをしていることがわかった。そこで、不拘束モード合成法の精度向上のためには、従来の方法より高精度の剰余コンプライアンス行列を効率良く求める必要がある。部分構造合成法における多くの分系は、他の分系との結合をはずされると周辺自由になるために、そのような境界条件のもとでは構造物の精度良い剰余コンプライアンス行列を効率良く求める方法が重要となる。

そこで、ここでは有限要素法による剰余コンプライアンス行列の求め方として、従来の方法、Hansteenの方法および著者が提案する方法¹²⁾を示す。著者の提案する方法を不拘束モード合成法に利用した場合の有用性は[3. 6]と[7. 3. 2]に記されている。

本章で提案する方法は、直接には部分構造合成法の精度向上のために開発したものであるが、有限要素法の応答計算のためのモード解析においても、精度向上のために有効利用できるもので、すべての構造解析の汎用有限要素法プログラムに組み込むことを勧める。

5.2 従来の方法

離散系のN自由度にモデル化した系の周波数応答は

$$([K] - \omega^2[M])\{\delta\} = \{F\} \quad (5-2-1)$$

で表される。この系に関する固有値問題

$$([K] - \lambda[M])\{\chi\} = \{0\} \quad (5-2-2)$$

を解いて、固有振動数と、質量行列について正規化した固有モードを求める。そして、1次からp次 ($p < N$) までの固有モードを並べた固有モード行列を $[\phi_l]$ とし、それより高次の固有モードからなる行列を $[\phi_h]$ とする。また、1次からp次までの固有振動数の二乗を対角上に並べた対角行列を「 Ω_l^2 」それより高次のものを並べた対角行列を「 Ω_h^2 」とする。変位ベクトル $\{\delta\}$ は固有モードの一次結合であるから

$$\{\delta\} = [\phi_l]\{\xi_l\} + [\phi_h]\{\xi_h\} \quad (5-2-3)$$

式 (5-2-3) を式 (5-2-1) に代入すると、

$$\begin{aligned} & ([K][\phi_l] - \omega^2[M][\phi_l])\{\xi_l\} \\ & + ([K][\phi_h] - \omega^2[M][\phi_h])\{\xi_h\} = \{F\} \end{aligned} \quad (5-2-4)$$

式 (5-2-4) の各項に左から $[\phi_h]^T$ をかけると、固有モードの直交性より左辺第1項は零となり

$$([\Omega_h^2] - \omega^2[I])\{\xi_h\} = [\phi_h]^T\{F\} \quad (5-2-5)$$

ゆえに

$$\{\xi_h\} = ([\Omega_h^2] - \omega^2[I])^{-1}[\phi_h]^T\{F\} \quad (5-2-6)$$

p次より高次モードの影響による変位 (式 (5-2-3) の右辺第2項) を

$\{\delta'_h\}$ とすると

$$\{\delta'_h\} = [\phi_h] (\Gamma \Omega_h^2 - \omega^2 \Gamma I_h)^{-1} [\phi_h]^T \{F\} \quad (5-2-7)$$

解析対象周波数範囲は $(p+1)$ 次の固有振動数より十分低いとすると、式 (5-2-7) は近似的に

$$\{\delta'_h\} = [\phi_h] \Gamma \Omega_h^2^{-1} [\phi_h]^T \{F\} \quad (5-2-8)$$

と表される。剰余コンプライアンス行列 $[Z]$ は、式 (5-2-8) より、

$$[Z] = [\phi_h] \Gamma \Omega_h^2^{-1} [\phi_h]^T \quad (5-2-9)$$

式 (5-2-9) の計算を厳密に実行するためには、 p 次より高次のすべての固有モードを必要とする。しかし、系の自由度 N は大変大きいので、式 (5-2-2) の固有値解析で N 次までのすべての固有振動数と固有モードを求めることは困難な場合が多い。そこで実際には、行列 $[\phi_h]$ として $(p+1)$ 次から計算可能な範囲内のある次数 q より高次のものは省略して、式 (5-2-9) による剰余コンプライアンス行列を近似的に計算する。この方法は、前途のように、あまり効率の良い方法とはいえない。

5.3 Hansteenの方法⁽²²⁾

Hansteenは採用モード数 p 次までの固有モードを用いるだけで、それより高次の影響を表すことのできる方法を提案した。この方法による剰余コンプライアンス行列は以下のようにして求められる。

採用モードを p 次までとし、式(5-2-2)の固有値解析は p 次まで実行するとする。そこで、 $[\phi_h]$ 、 $[\Omega_h^2]$ は未知の行列である。変位ベクトルは、式(5-2-3)と同様に

$$\{\delta\} = [\phi_l \quad \phi_h] \begin{Bmatrix} \xi_l \\ \xi_h \end{Bmatrix} \quad (5-3-1)$$

と表される。

式(5-3-1)を式(5-2-1)に代入して、各項に左から $[\phi_l \quad \phi_h]^T$ をかけると、固有モードの直交性より

$$\begin{pmatrix} \Gamma \Omega_l^2 & & & \\ & \Omega_h^2 & & \\ & & -\omega^2 & \Gamma \\ & & & \mathbf{I} \\ & & & & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_l \\ \xi_h \end{Bmatrix} = [\phi_l \quad \phi_h]^T \{F\} \quad (5-3-2)$$

ここで、

$$[\phi_l \quad \phi_h]^T \{F\} = \begin{Bmatrix} f_l \\ f_h \end{Bmatrix} \quad (5-3-3)$$

とおく、式(5-3-3)の $\{f_l\}$ は1次から p 次までのモード成分を励振するモード座標上での外力ベクトルを表し、 $\{f_h\}$ は $(p+1)$ 次以上の高次モードを励振するモード座標上での外力ベクトルである。

固有モードは、質量行列 $[M]$ について正規化してあるので、

$$[\phi_l \quad \phi_h]^T [M] [\phi_l \quad \phi_h] = \Gamma \mathbf{I} \quad (5-3-4)$$

が成り立っている。

式(5-3-3)は、

$$[\phi_l \quad \phi_h]^T \{F\} = \Gamma \mathbf{I} \begin{Bmatrix} f_l \\ f_h \end{Bmatrix} \quad (5-3-5)$$

と書けるので、この式 (5-3-5) に式 (5-3-4) を代入すると、

$$[\phi_l \phi_h]^T \{F\} = [\phi_l \phi_h]^T [M] [\phi_l \phi_h] \begin{Bmatrix} f_l \\ f_h \end{Bmatrix} \quad (5-3-6)$$

ゆえに、式 (5-3-6) からベクトル $\{F\}$ は、

$$\begin{aligned} \{F\} &= [M] [\phi_l \phi_h] \begin{Bmatrix} f_l \\ f_h \end{Bmatrix} \\ &= [M] [\phi_l] \{f_l\} + [M] [\phi_h] \{f_h\} = \{F'\} + \{F_h'\} \end{aligned} \quad (5-3-7)$$

式 (5-3-7) は、外力ベクトル $\{F\}$ は、1次から p 次までのモード成分を励振する外力ベクトル $\{F_l'\}$ と、 $(p+1)$ 次以上の高次モード成分を励振する外力ベクトル $\{F_h'\}$ の和で表されることを意味している。ゆえに、式 (5-3-7) を $\{F_h'\}$ について解けば

$$\begin{aligned} \{F_h'\} &= \{F\} - \{F_l'\} \\ &= \{F\} - [M] [\phi_l] \{f_l\} \end{aligned} \quad (5-3-8)$$

式 (5-3-3) から

$$\{f_l\} = [\phi_l]^T \{F\} \quad (5-3-9)$$

であるので、式 (5-3-9) を式 (5-3-8) に代入すれば、

$$\begin{aligned} \{F_h'\} &= \{F\} - [M] [\phi_l] [\phi_l]^T \{F\} \\ &= (\Gamma_{I_1} - [M] [\phi_l] [\phi_l]^T) \{F\} \end{aligned} \quad (5-3-10)$$

式 (5-3-10) は、1次から p 次までの固有モードがわかれば、それ以上のモード成分を励振する外力成分を計算できることを表している。ゆえに、 $\{F_h'\}$ によって生じる変位 $\{\delta_h'\}$ は、

$$\{\delta_h'\} = ([K] - \omega^2 [M])^{-1} \{F_h'\} \quad (5-3-11)$$

となる。解析対象周波数範囲は、 $(p+1)$ 次の固有振動数より十分低いとすると、近似的に、

$$\{\delta'_h\} = [K]^{-1} \{F'_h\} \quad (5-3-12)$$

と表される。式(5-3-12)に式(5-3-10)を代入すると、

$$\{\delta'_h\} = [K]^{-1} (\{I\} - [M][\phi_e][\phi_e]^T) \{F\} \quad (5-3-13)$$

Hansteenが、モード解析の高次成分の影響を補正するために提案した式が式(5-3-13)である。そこで、剰余コンプライアンス行列[Z]は、

$$[Z] = [K]^{-1} (\{I\} - [M][\phi_e][\phi_e]^T) \quad (5-3-14)$$

となる。

この方法によれば、固有値解析では採用モード数の p 次までの固有モードを求めるだけで、 p 次より高次のすべてのモード成分の影響を表す剰余コンプライアンス行列を求めることができる。そこで、[5.2]に記した従来の方法より有利である。

しかし、式(5-3-14)では剛性行列の逆行列を用いるために、系が周辺自由境界条件の場合には行列[Z]を求めることができない。したがって、不拘束固有モードの剰余コンプライアンスは計算できない。そこで次に、この欠点をなくすることを試み、新しい計算方法を提案する。

5. 4 著者の方法 (不拘束固有モードの剰余 コンプライアンス行列の計算方法)

1 節点 6 自由度で節点数 n からなる系を考える。この系の周辺自由境界条件での剛性行列を $[K]$ 、質量行列を $[M]$ とすれば、この系の運動方程式は、

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F\} \quad (5-4-1)$$

今、固有値問題

$$([K] - \lambda[M])\{X\} = \{0\} \quad (5-4-2)$$

を解いて得られる固有モードは、周辺自由境界条件下の不拘束固有モードなので、1 次から 6 次までの固有モードは振動数 0 Hz の剛体変位モードであり、7 次以上のモードが系の弾性変形変位モードである。剰余コンプライアンス行列 $[Z]$ は、採用モード数 p 次 ($p \geq 7$) より高次のモード成分を励起する外力 $\{F'_h\}$ を与えた時、静的方程式

$$[K]\{\delta'_h\} = \{F'_h\} \quad (5-4-3)$$

を解けば得られる。式 (5-4-3) の $\{\delta'_h\}$ は、 $(p+1)$ 次から $6n$ 次までの固有モードの一次結合で表すことができる。一般に自由振動している物体には、外力が作用していないから、任意の瞬間における重心の空間的位置

(振動前の物体に固定された物体上の重心の位置ではない) は、重心運動の法則により明らかに不動である。したがって、 $\{\delta'_h\}$ の変位に対しても、系の重心の空間的位置は不動である。式 (5-4-3) は見かけ上自由度 $6n$ の方程式であるが、実際には $(6n-6)$ であるために、 $\{\delta'_h\}$ について解くことができない。しかしこのように重心の空間的位置が不動である性質を用いれば、 $\{\delta'_h\}$ の任意の 6 個の未知数は他の未知数で表すことができ、式 (5-4-3) を自由度 $(6n-6)$ に縮小することができる。ここでは、節点番号 n の点の自由度の成分を他の成分で表すことにする。6 行 $(6n-6)$ 列からなるある行列 $[S]$ を用いると

$$\{\delta'_h\} = \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} \{\Psi\} \quad (5-4-4)$$

と書ける。ここで、 I は $(6n-6)$ 行の単位行列であり、また $\{\Psi\}$ は節点

番号1番から(n-1)番までの節点自由度の変位ベクトルである。行列[S]の求め方は後述する。

式(5-4-4)を式(5-4-3)に代入し、両辺各項に[I S^T]をかけると、

$$[I \ S^T][K] \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} \{\psi\} = [I \ S^T]\{F_h'\} \quad (5-4-5)$$

ここで、

$$[K'] = [I \ S^T][K] \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} \quad (5-4-6)$$

と置き換えると、

$$[K']\{\psi\} = [I \ S^T]\{F_h'\} \quad (5-4-7)$$

式(5-4-7)は自由度(6n-6)の式である行列[K']は剛体変位を消去した系の剛性行列であり、正定値行列となるので、逆行列を求めることができる。

$$\{\psi\} = [K']^{-1}[I \ S^T]\{F_h'\} \quad (5-4-8)$$

式(5-4-8)を式(5-4-4)に代入すると、

$$\{\delta_h'\} = \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} [K']^{-1} [I \ S^T] \{F_h'\} \quad (5-4-9)$$

この式(5-4-9)に式(5-4-10)を代入すると

$$\{\delta_h'\} = \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} [K']^{-1} [I \ S^T] \left({}^T I_L - [M][\phi_e][\phi_e]^T \right) \{F\} \quad (5-4-10)$$

が得られる。そこで、剰余コンプライアンス行列[Z]は、

$$[Z] = \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} [K']^{-1} [I \ S^T] \left({}^T I_L - [M][\phi_e][\phi_e]^T \right) \quad (5-4-11)$$

と表される。周辺自由境界条件下の系については、式(5-3-14)の代わりに式(5-4-11)を用いればよい。

次に行列[S]の求め方を示す。[S]は、系の重心は不動であることを満足するように変位ベクトル $\{\delta'_h\}$ を拘束することによって求められる。

まず、重心のx軸方向の並進変位 Δx_g は、任意の変位ベクトルを $\{x\}$ とすると

$$\Delta x_g = \frac{\{D_x\}^T [M] \{x\}}{\{D_x\}^T [M] \{D_x\}} \quad (5-4-12)$$

で求められる。ここで右辺の分母は系の質量を表す。ベクトル $\{D_x\}$ は、各節点のx方向並進成分を1、他の成分を零としたものである。今、変位が $\{\delta'_h\}$ ならば $\Delta x_g = 0$ になるから

$$\{D_x\}^T [M] \{\delta'_h\} = 0 \quad (5-4-13)$$

$\{\delta'_h\}$ のy軸方向とz軸方向についても同様に重心の並進方向がないから

$$\{D_y\}^T [M] \{\delta'_h\} = 0 \quad (5-4-14)$$

$$\{D_z\}^T [M] \{\delta'_h\} = 0 \quad (5-4-15)$$

ここで、 $\{D_y\}$ は、各節点のy方向並進成分を1、他の成分を零とした自由度の6nのベクトルである。また、 $\{D_z\}$ は、各節点のz方向並進成分のみ1とし、他を零としたベクトルである。

次に、重心を通るx軸と平行な軸回りの重心の回転角変位 $\Delta \theta_{xg}$ は

$$\Delta \theta_{xg} = \frac{\{R_x\}^T [M] \{x\}}{\{R_x\}^T [M] \{R_x\}} \quad (5-4-16)$$

と表される。式(5-4-16)の右辺の分母は、その軸回りの回転慣性を示す。 $\{R_x\}$ は、重心を通過してx軸と平行な軸回りに単位角回転させたときの系の各節点の変位を表す。すなわち、1節点の自由度を、x方向並進、y方向並進、z方向並進、x軸回りの回転変位、y軸回りの回転変位、z軸回りの回

転変位成分の順に並べれば、

$$\begin{aligned} \{R_x\}^T = & (0, -r_{iz}, r_{iy}, 1, 0, 0, \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots 0, -r_{nz}, r_{ny}, 1, 0, 0) \end{aligned} \quad (5-4-17)$$

と表される。重心に対する r_{iz} は節点 i の相対 z 座標であり、 r_{iy} は相対 y 座標である。

入力データとして剛性行列と質量行列しか与えられない場合には、次のようにして $\{R_x\}$ を決めることができる。式 (5-4-17) から明らかなように、 $\{R_x\}$ はすでに x 方向並進および y 軸と z 軸回りの重心変位は生じないように定義されているので、残りの3条件、すなわち、系にひずみを生じないための条件

$$[K]\{R_x\} = \{0\} \quad (5-4-18)$$

重心の y 軸方向並進変位がないための条件

$$\{D_y\}^T [M] \{R_x\} = 0 \quad (5-4-19)$$

および重心の z 軸方向並進変位がないための条件

$$\{D_z\}^T [M] \{R_x\} = 0 \quad (5-4-20)$$

の3式に式 (5-4-17) を代入し、連立して解けば求められる。

系が $\{\delta'_h\}$ の変位をした場合 $\Delta \theta_{x\varphi} = 0$ となるので、

$$\{R_x\}^T [M] \{\delta'_h\} = 0 \quad (5-4-21)$$

重心を通る y 軸と平行な軸回りの重心の回転角変位 $\Delta \theta_{y\varphi}$ についても、系の変位 $\{\delta'_h\}$ のときは $\Delta \theta_{y\varphi} = 0$ が成り立つので、

$$\{R_y\}^T [M] \{\delta'_h\} = 0 \quad (5-4-22)$$

ここで、ベクトル $\{R_y\}$ は、式 (5-4-17) の $\{R_x\}$ に対応させると、

$$\{R_y\}^T = (r_{1z}, 0, -r_{1x}, 0, 1, 0, \dots \dots \dots \\ \dots \dots r_{nz}, 0, -r_{nx}, 0, 1, 0) \quad (5-4-23)$$

式 (5-4-23) の未知数成分は、式 (5-4-18), (5-4-19), (5-4-20) に対応する式として、

$$[K]\{R_y\} = \{0\} \quad (5-4-24)$$

$$\{D_x\}^T[M]\{R_y\} = 0 \quad (5-4-25)$$

$$\{D_z\}^T[M]\{R_y\} = 0 \quad (5-4-26)$$

の3式に式 (5-4-23) を代入して求めることができる。ただし、 r_{iz} は先に式 (5-4-18), (5-4-19), (5-4-20) で求めてしまえば、ここでは求める必要はない。

最後に、重心を通る z 軸と平行な軸回りの重心の回転角変位 $\Delta \theta_{zG}$ についても同様に考えると、変位 $\{\delta'_h\}$ に対して $\Delta \theta_{zG} = 0$ より

$$\{R_z\}^T[M]\{\delta'_h\} = 0 \quad (5-4-27)$$

ベクトル $\{R_z\}$ は、

$$\{R_z\}^T = (-r_{1y}, r_{1x}, 0, 0, 0, 1, \dots \dots \dots \\ \dots \dots -r_{ny}, r_{nx}, 0, 0, 0, 1) \quad (5-4-28)$$

とおける。式 (5-4-28) の成分はすべて既知となっているが、もしこの段階で求めれば、

$$[K]\{R_z\} = \{0\} \quad (5-4-29)$$

$$\{D_x\}^T[M]\{R_z\} = 0 \quad (5-4-30)$$

$$\{D_y\}^T[M]\{R_z\} = 0 \quad (5-4-31)$$

の3式より求めることができる。また、入力データとして各節点の座標値が利用できる場合には、 r_{ix} , r_{iy} , r_{iz} には節点 i の x , y , z 座標値を代入すればよく、 r_{ix} 等を求めるための上記の計算はまったくない。

さて、以上で変位 $\{\delta'_k\}$ は系の重心の位置を不動とする変位ベクトルとして拘束できた。ここで、式 (5-4-13) ~ (5-4-15), (5-4-21), (5-4-22), (5-4-27) を一つの式にまとめる。

$$[Y]^T = [\{D_x\} \{D_y\} \{D_z\} \{R_x\} \{R_y\} \{R_z\}] \quad (5-4-32)$$

とおくと、それら6個の式は

$$[Y][M]\{\delta'_k\} = \{0\} \quad (5-4-33)$$

と表される。行列 $[Y]$ のうち、節点番号1番から $(n-1)$ 番までの自由度に対応する部分行列を $[Y_b]$ 、節点番号 n 番の自由度に対応する部分行列を $[Y_n]$ とし、変位ベクトル $\{\delta'_k\}$ も同様に $\{\delta'_b\}$ と $\{\delta'_n\}$ とすると、式 (5-4-33) は、

$$[Y_b \ Y_n] \begin{bmatrix} M_{bb} & M_{bn} \\ M_{nb} & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta'_b \\ \delta'_n \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (5-4-34)$$

となる。式 (5-4-34) を $\{\delta'_n\}$ について解くと

$$\{\delta'_n\} = -([Y_b][M_{bn}] + [Y_n][M_{nn}])^{-1} \times ([Y_b][M_{bb}] + [Y_n][M_{nb}]) \{\delta'_b\} \quad (5-4-35)$$

式 (5-4-35) は、節点番号 n 番の6自由度成分が他の節点自由度の成分で表されたことを示す。そこで、行列 $[S]$ は、

$$[S] = -([Y_b][M_{bn}] + [Y_n][M_{nn}])^{-1} \times ([Y_b][M_{bb}] + [Y_n][M_{nb}]) \quad (5-4-36)$$

で得られる。

Hansteenの方法は、モード解析における高次モードの影響を式 (5-3-13) に補正しているが、前にも述べたように、剛体変位を生じ得る自由状態の系では剛性行列の逆行列を求めることができないので、この方法を直接用いる

ことができない。ここでは、部分構造合成法に必要な剰余コンプライアンス行列を求めるための方法を提案した。新しい方法では、式(5-3-13)の代わりに式(5-4-10)を用いるので、通常のモード解析において自由状態の系に対しても高次モードの影響を補正することが可能である。FEMによる応答解析のほとんどはモード解析によっているので、どのような境界条件下の系に対しても高次モードの補正が可能になったことは、重要であると思われる。

以上が不拘束固有モードの剰余コンプライアンス行列の計算方法の説明であるが、式(5-4-3)で示す変位ベクトル $\{\delta'_h\}$ の変位では、物体の重心の位置が不動となる理由を補足説明しておく。

式(5-4-3)の $\{F'_h\}$ は、周辺自由な系について式(5-4-2)を解いて得られるp次より高次数の固有モード成分のみを励起する外力ベクトルなので、それによって生じる変位 $\{\delta'_h\}$ は、

$$\begin{aligned}\{\delta'_h\} &= \alpha_{p+1}\{\phi_{p+1}\} + \alpha_{p+2}\{\phi_{p+2}\} + \dots + \alpha_{6n}\{\phi_{6n}\} \\ &= [\phi_h]\{\alpha_h\}\end{aligned}\quad (5-4-37)$$

と表現できる。

例えば、x方向への重心の移動について考えてみると、各節点のx方向並進成分を1、他の成分をすべて零とした自由度6nのベクトルを $\{D_x\}$ とすると、変位 $\{\delta'_h\}$ によって生じる重心の移動量は、式(5-4-12)に示すように、

$$\Delta X_G = \frac{\{D_x\}^T [M] \{\delta'_h\}}{\{D_x\}^T [M] \{D_x\}} \quad (5-4-38)$$

のように求めることができる。

ところで、 $\{D_x\}$ は式(5-4-2)で得られた1次から6次までの剛体固有モードの重ね合わせで表現できるから、

$$\begin{aligned}\{D_x\} &= \alpha_1\{\phi_1\} + \alpha_2\{\phi_2\} + \dots + \alpha_6\{\phi_6\} \\ &= [\phi_r]\{\alpha_r\}\end{aligned}\quad (5-4-39)$$

式(5-4-37)と(5-4-39)を式(5-4-38)に代入すると、

$$\Delta X_G = \frac{\{\alpha_r\}^T [\phi_r]^T [M] [\phi_h] \{\alpha_h\}}{\{\alpha_r\}^T [\phi_r]^T [M] [\phi_r] \{\alpha_r\}} \quad (5-4-40)$$

となる。

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{6n} = 0$ 以外の場合を考えると、式 (5-4-40) は固有モードの直交性より

$$\Delta \chi_q = 0 \quad (5-4-41)$$

となる。すなわち、 $\{\delta'_h\}$ の変位に対しては重心が x 方向に不動であることがわかる。

同様にして、y 方向、z 方向、x 軸回り、y 軸回り、z 軸回りに関しても重心が不動であることは明白なので省略する。

5.5 ばね・質量系による簡単な例

本論文で提案する方法による剰余コンプライアンス行列を求める簡単な例として、図5-5-1に示す4個の質点をばねで直列に結合した系の剰余コンプライアンス行列を計算する。採用モード数は2次までとする。

〔厳密解〕……この系に対する剛性行列と質量行列は

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-5-1)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-5-2)$$

となる。またこの系の固有角振動数 (rad/s) と固有モードは、

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= 0, \Omega_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \Omega_3 &= \sqrt{2}, \Omega_4 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} -0.25\sqrt{4+2\sqrt{2}} \\ -0.25(\sqrt{2}-1)\sqrt{4+2\sqrt{2}} \\ 0.25(\sqrt{2}-1)\sqrt{4+2\sqrt{2}} \\ 0.25\sqrt{4+2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\phi_3 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \phi_4 = \begin{bmatrix} -0.25\sqrt{4-2\sqrt{2}} \\ 0.25(\sqrt{2}+1)\sqrt{4-2\sqrt{2}} \\ -0.25(\sqrt{2}+1)\sqrt{4-2\sqrt{2}} \\ 0.25\sqrt{4-2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (5-5-3)$$

である。採用モード数より高次の3次と4次のモードの影響を表す剰余コンプライアンスがその厳密解となるから、式(5-5-3)の3次と4次の値を式(5-2-9)に代入すると、剰余コンプライアンス行列は

$$[Z] = \begin{bmatrix} \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{-2+\sqrt{2}}{8} & \frac{-1+\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{-2+\sqrt{2}}{8} \\ \frac{-2+\sqrt{2}}{8} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{8} \\ \frac{-1+\sqrt{2}}{4} & \frac{-2+\sqrt{2}}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \quad (5-5-4)$$

が厳密解となる。

【従来の方法】……従来の方法では、採用モードより高次のすべての固有モードを用いれば厳密解を得られるが、一般に大自由度の場合は、いくつかのモードしか用いられない。そこで、ここでは3次の固有モードを用い、それより高次の4次モードは無視して計算する。式(5-5-3)の3次だけを式(5-2-9)に代入すると

$$[Z]=\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad (5-5-5)$$

となる。4次のモードを無視したので、式(5-5-4)の厳密解に対して式(5-5-5)は誤差を生じている。

【本報告で提案する方法】……式(5-5-1)の剛性行列は正定値でないので、そのままHansteenの方法を適用する。式(5-5-3)の3次と4次の固有モードは未知であるとする。しかし、2次以上の固有モードの変位に対しては重心が不動であるから、式(5-4-33)に対応する式として

$$[1, 1, 1, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (5-5-6)$$

式(5-5-6)を x について解けば、式(5-4-35)に対応する式として、

$$(x_i) = [-1, -1, -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (5-5-7)$$

ゆえに、式(5-4-36)で示す行列[S]は、

$$[S] = [-1, -1, -1] \quad (5-5-8)$$

そこで、式(5-5-1)と式(5-5-8)を式(5-4-6)に代入すれば、

$$[K'] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad (5-5-9)$$

式 (5-5-9) の $[K']$ は正定値行列であり、

$$[K']^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (5-5-10)$$

式 (5-5-2), (5-5-8), (5-5-10) および式 (5-5-3) の1次と2次の固有モードを式 (5-4-11) に代入すれば剰余コンプライアンス行列 $[Z]$ は式 (5-5-4) と正確に一致する行列として求められる。

このように、本方法によれば、採用モード数の次数まで固有モードを求めるだけで、それより高次のすべてのモードの影響を正しく含む剰余コンプライアンス行列を周辺自由境界条件下でも簡単に求めることができる。

表 5-5-1 には、図 5-5-1 の系の質点 m_3 を励振点とし単位励振力で励振したときの励振点自身の変位振幅をモード解析によって求めた結果を示す。採用モード数を2次までとした解析有効範囲内で、本方法による剰余コンプライアンス行列を用いた結果は、従来の方法による剰余コンプライアンス行列〔式 (5-5-5)〕を用いた結果や剰余コンプライアンスを考慮しない場合の結果より精度が良いことがわかる。このように、本方法によれば、高次モードの影響を精度良く補正してモード解析を実行できる。

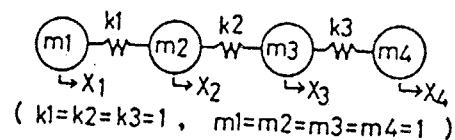


図 5-5-1 ばね・質量系

表5-5-1 ばね・質量系の周波数応答

〔励振点: m_1 (単位励振力), 応答点: m_1 〕

Frequency (Hz)	Exact result	Modal Analysis with the first and the second natural modes		
		A	B	C
0.01	-62.95	-62.95	-63.07	-63.20
0.02	-15.45	-15.45	-15.58	-15.70
0.03	-6.650	-6.653	-6.778	-6.903
0.04	-3.561	-3.568	-3.693	-3.818
0.05	-2.122	-2.133	-2.258	-2.383
0.06	-1.329	-1.344	-1.469	-1.594
0.07	-0.8348	-0.8557	-0.9807	-1.106
0.08	-0.4916	-0.5197	-0.6447	-0.7697
0.09	-0.2198	-0.2565	-0.3815	-0.5065
0.10	0.04719	0.0001062	-0.1249	-0.2499
0.11	0.4636	0.4040	0.2790	0.1540
0.12	4.118	4.043	3.918	3.793
0.13	-0.9313	-1.024	-1.149	-1.274

- A: with the residual compliance matrix (Eq.(65)) calculated by the proposed method.
 B: with the residual compliance matrix (Eq.(66)) calculated with the third natural mode
 by the former method.
 C: without the residual compliance.

5.6 結言

- (1) 有限要素法による振動解析における剰余コンプライアンス行列の求め方として、周辺自由境界条件下の構造物に対して採用モード数よりも高次の固有モードを必要とせずに効率良くかつ精度良い剰余コンプライアンス行列を求める方法を提案した。この方法を用いれば、不拘束モード型の部分構造合成法の解析精度を大幅に改善することができる（第3章第6節参照）。
- (2) 剰余コンプライアンス行列を求める方法として、従来の方法、Hansteenの方法および著者が提案する方法の理論説明を行った。
- (3) 簡単なばね・質量系のモデルを用いて、手計算により著者の方法を従来の方法と比較しながら検討した。その結果、著者の方法によれば、周辺自由境界条件下の構造物について効率良く精度良い剰余コンプライアンス行列を計算できることがわかる。

第6章 特性行列による系の同定 <12><20><22>

6.1 緒言

機械や構造物の動特性を決定し、それを表現する数学モデルを設定することを、系の同定という。系の同定は、振動解析のうちで最も重要であり同時に最も困難な部分である。系の同定には、理論的方法と実験的方法があり、前者では特性行列を、一方後者ではモード特性を用いて同定を行うのが普通であった。特性行列とは、質量行列 [M]、減衰行列 [C] および剛性行列 [K] の総称である。一方モード特性は、固有振動数、固有モード、モード減衰比、モード質量、モード剛性などの総称である。

特性行列を用いる普通の理論的同定法としては、質量を粘性減衰およびばねで連結した離散モデルを用いる方法があり、形状が簡単で自由度が少ない場合や略式計算によく用いられる。かなり複雑な構造物に対しても、例えば高層ビルのいわゆる串団子モデルのように、この方法が有効な場合もあるが、その際の諸定数の決定には高度のノウハウを必要とする。複雑な構造物に対しては、有限要素法 (FEM) を用いて連続系を離散化し、[M] と [K] を決める同定法が一般的であり、大型計算用の構造解析プログラムが市販され普及している。しかし、特性行列を用いる理論的同定法には、[C] を決定できないという重要な難点がある。また、ほとんどの実機の構造は複雑であり、FEMなどの従来の方法を直接適用することが困難な場合が多い。

一方、実験的方法では、普通モード特性を用いて同定している。すなわち、振動試験により得た伝達関数の周波数スペクトルや時刻歴応答曲線に適合するようにモード特性を決定する方法であり、曲線適合⁽⁴¹⁾ (カーブフィット) という。種々の曲線適合ソフトをミニコンピュータに組み込んだ現場向きのモード解析装置が市販され普及している。しかし、モード特性は構造物の物理特性 (質量、減衰および剛性) を直接表現する量ではないので、FEMとの直接結合が困難であるなど、振動解析に制限を受ける。また、振動解析によりモード特性の最適値が見つかったとしても、設計の寸法形状をどう決めたら良いか判断しにくいという難点がある。さらに、モード特性の定義自身が、比例粘性、一般粘性およびヒステリシスという減衰の仮定によって変化するというあいまいさを有するので、特性行列を用いる振動解析に比べて信頼性が薄くなる。

以上のように、特性行列を用いる理論的同定法とモード特性を用いる実験的同定法は、それぞれ欠点を有するので、両者を補う手段が必要になる。また、CADが計算機援用製図 (Drafting) から計算機援用設計 (Design) に移行する変革期にある現在、理論解析と実験解析がこん然一体となった振動解析方法の開発と実用化が急務である。そのためには、まず理論的同定法と実験的同定法が共通言語すなわち同一の基本特性を用いて行われなければならない。その手段としては、現在のところ、次の3通りが考えられる。第1は、FEMなど

で決めた $[M]$ と $[K]$ を用い、固有値解析を行ってモード特性を理論的に決定する方法である。第2は、FEMなどで決めた $[M]$ と $[K]$ 、および比例粘性の仮定等で決めた $[C]$ を、振動試験により決めたモード特性を用いて修正する方法である。第3は、モード特性を用いることなく、振動試験により特性行列を直接決定する方法である。このうち第3の方法は、

- (1) FEMではモデル化できない複雑な構造物の物理特性を直接決定できる。
- (2) FEMと直接結合できる。
- (3) FEMで用いるすべての数値解法を用いて振動解析ができる。
- (4) 静解析と一体化できる。

などの利点を有し、最も望ましい方法であると考えられる。ただし、この方法の難しさは、構造物の動特性を表現するのに必要な点の数は測定できる振動モードの数（せいぜい10程度）に比べてかなり多く、いかえれば、対象の構造についてのほんのわずかの知識から多くを引き出そうということになってしまう、という点である。この問題は、数学的には非常に難しいものである（構造上の点と測定された振動モードの数が等しければ一義的に変換できるのだが）。

特性行列の実験的決定に関しては、これまでに、対角行列法や擬逆行列などが提案されている⁽⁹⁷⁾。しかし、これらの方法は、今日の大自由度系の計算には実用性が乏しい。一方、Leuridan⁽²⁶⁾は、大自由度系の計算に適した特性行列の決定法を提案している。しかし、これは複素計算を行っており、解が不安定になり、結果を求めることができない場合があることを述べている。

著者は、FEMの直接適用よりも計算時間も計算機容量も少なくて済み、FEMでは困難な複雑構造物の計算ができる振動解析方法として、縮小インピーダンス合成法と区分モード合成法を提案した。これらの新しい方法に実験による部分構造を組み込むことを直接の目的として、振動試験による特性行列の直接決定法を新しく開発し、本章で提案し、検討を行う。この方法は、上記の第3の方法に関して示した(1)～(4)のほかに次の利点を有する。

- (5) 縮小インピーダンス合成法と区分モード合成法を用いて、理論解析と実験解析を一体化した振動解析が可能である。
- (6) 従来のモード特性を用いる同定では、構造物を空中に浮かした自由状態(air ride または free-free)で実験する必要がある、この点が大形構造物の振動試験を困難にしていた。しかし本方法によれば、特性行列が既知の支持構造（簡単なわく組みや台など、これらの特性行列はFEMや実験により容易に求められる）で対象構造物を固定またはバネ支持して実験し、得られた結果から支持構造の特性行列を差引くだけで、対象構造物の自由状態における特性行列を得られる。
- (7) 得られた特性行列から、回転慣性の大きさと主軸方向、重心の位置および剛体モードを簡単に求めることができる。

- (8) 特性行列は物理特性を直接表現するから、モデル化の評価や、FEMにより得た特性行列の実験的修正が容易にできる。
- (9) 大自由度系の計算システムの作成に適している。

6. 2 モード特性から同定する方法

本方法は、本章で提案する方法の1つである。本方法で必要な入力データは、固有振動数と固有モードである。これらはどのような方法で準備してもよい。例えば、モード解析の曲線適合により、実験データから得たものでもよいし、有限要素法などの計算で求めたものでもよい。ここでは、これらのデータを有限要素法で求めるとして説明する。

準備段階として、分系を節点数 n で有限要素分割し、剛性行列 $[K]$ と質量行列 $[M]$ を有限要素法で作成する。ここでは、1節点の自由度を6とする。これらの特性行列を用いて固有値解析し、1次から p 次 ($p < 6n$) までの固有振動数 f_i ($i = 1 \sim p$) と、質量行列に関して正規化された自由度 $6n$ の固有モード $\{\underline{\Phi}_i\}$ ($i = 1 \sim p$) を求める。

さて、1次から $6n$ 次までのすべての固有モードを求め、それらを各列に並べた自由度 $6n$ のモード行列 $[\Phi]$ (正方行列) を作成すれば、この行列 $[\Phi]$ は正則行列 (逆行列の存在する行列) であり、元の特性行列である剛性行列 $[K]$ と質量行列 $[M]$ は、

$$[K] = ([\Phi]^{-1})^T \Gamma_{k_i} [\Phi]^{-1} \quad (6-2-1)$$

$$[M] = ([\Phi]^{-1})^T \Gamma_I [\Phi]^{-1} \quad (6-2-2)$$

ここで、 Γ_{k_i} は自由度 $6n$ の対角行列であり、その対角成分は $k_i = (2\pi f_i)^2$ である。また、式 (6-2-2) 中の Γ_I は自由度 $6n$ の単位行列である。

こうして構造物は n 点の全自由度を用いて解析されるが、その結果の出力情報として必要なものは、一般に観測点や他の分系と後で結合する点のような特別な節点間の伝達関数や振動モードの比率 (固有モード形) および固有振動数のみである。そして、そのような自由度数は一般に少ない場合が多い。そこで解析対象周波数範囲内の振動特性を十分な精度で表現することができる自由度の小さい特性行列をはじめから同定して利用することは有効である。

解析対象周波数範囲の振動を1次から r 次 ($r \leq p$) までのモード特性で十分良く近似表現できる場合を考える。自由度 $6n$ の固有モード $\{\underline{\Phi}_i\}$ ($i = 1 \sim r$) から残しておきたい自由度のみの成分 $\{\Psi_i\}$ を抜き出し、各次数についてのそれらの成分を列に並べた部分固有モード行列 $[\Psi]$ を作成する。残しておきたい自由度の合計が r より小さい場合には、行列 $[\Psi]$ は列数の方が行数より大きくなるので、別の自由度の成分を加えて行列 $[\Psi]$ を正方行列にする。逆に、残しておきたい節点の合計が r より大きい場合には、 r 次より高次のいくつかの固有モード成分を行列 $[\Psi]$ に加えて正方行列とする。このように追加される固有モードは、解析対象周波数以内の伝達関数の精度に悪影響

をあまり与えない限り、必ずしも十分な精度を有する必要はない。もちろん精度の良い固有モードを利用することができれば、好ましいことは明らかである。

このようにしてできた部分固有モード行列 $[\Psi]$ に逆行列が存在すれば、

$$[\bar{K}] = ([\Psi]^{-1})^T \Gamma \Omega_i^2 \Gamma [\Psi]^{-1} \quad (6-2-3)$$

$$[\bar{M}] = ([\Psi]^{-1})^T \Gamma I \Gamma [\Psi]^{-1} \quad (6-2-4)$$

によって小さい自由度の特性行列を同定することができる。なお、式(6-2-3)中の行列「 Ω_i^2 」は自由度 r (行列 $[\Psi]$ に r 次より高次の固有モードも加わる場合はそれぞれをも加えた合計次数) の対角行列であり、 $\Omega_i = 2\pi f_i$ は、 i 次の固有角振動数である。

式(6-2-3)と(6-2-4)で求められる特性行列の自由度は、重要な節点の自由度のみとなり小さく、かつ、振動特性は解析周波数範囲内では元の系と一致しているので、分系の特性行列データとして保存利用することができる。

ただし、次の点に注意する必要がある。それは、式(6-2-3)と(6-2-4)で用いる逆行列 $[\Psi]^{-1}$ をうまく求めることができない場合があり、そのために特性行列を同定できない場合が生ずる、ということである。現在の所これは、次のような場合に生じることがわかっている。(i) 振動モードの節となる点の自由度や無意味な方向自由度成分ばかり選択してしまう場合(例えば、平板の振動において、面外振動となる曲げモードを解析するにもかかわらず、面内自由度ばかりを選択してしまう場合)(ii) 部分的な場所の連続した点ばかりを選択したり、選択した自由度成分の固有モードが同じような振幅比になり、行列 $[\Psi]$ が数値計算上特異に近くなる場合、などである。そのような場合には、選択して残す節点の自由度の数を変えたり、組み合わせを変えて同定し直す。それでも同定が困難な場合には、本方法の適用は避ける。物理的性質として、あらゆる境界条件において同定剛性行列 $[K]$ は非負定値、質量行列 $[M]$ は正定行列とならなければならない。そこで、式(6-2-3)で求められる剛性行列(剛体モードを生じない境界条件下)と式(6-2-4)の質量行列が必ず正定行列となること(証明1)と、それらの行列 $[K]$ 、 $[M]$ を用いた固有値問題から求められる第 i 次の固有振動数が f_i となり、それに対応する固有モードが $\{\psi_i\}$ (行列 $[\Psi]$ の第 i 列)となること(証明2)を、以下に証明する。

(証明1) 行列 $[\Psi]$ は正則行列(逆行列の存在する行列)と仮定しているので、自由度が行列 $[\Psi]$ と等しい任意のベクトル $\{X\}$ は、次のよ

うに行列 $[\Psi]$ の一次結合で表すことができる (この事は証明3で証明する)。

$$\{x\} = [\Psi] \{\xi\} \quad (6-2-5)$$

ベクトル $\{\xi\}$ は行列 $[\Psi]$ の各列の $\{x\}$ への寄与率を示すベクトルである。行列 $[\bar{K}]$ が正定値行列であることを示すには、次の二次形式の値が必ず正になることを示せばよい。

$$\{x\}^T [\bar{K}] \{x\} \quad (6-2-6)$$

式 (6-2-6) に式 (6-2-3) と式 (6-2-5) を代入して変形すると、

$$\begin{aligned} \{x\}^T [\bar{K}] \{x\} &= \{\xi\}^T [\Psi] \left(([\Psi]^{-1})^T \Omega_i^2 [\Psi]^{-1} \right) [\Psi] \{\xi\} \\ &= \{\xi\}^T \Omega_i^2 \{\xi\} \\ &= \sum_{j=1}^S \Omega_j^2 \xi_j^2 > 0 \end{aligned} \quad (6-2-7)$$

ここで、 S はベクトル $\{x\}$ と行列 $[\Psi]$ の自由度数、 ξ_j はベクトル $\{\xi\}$ の第 j 成分を表す。式 (6-2-7) から、式 (6-2-5) の $\{x\}$ が零でない限り同定特性行列は正定値になることがわかる。

同定質量行列 $[M]$ が必ずしも正定値行列になることは、式 (6-2-7) において $[K]$ を $[M]$ に、また、 $\Omega_i^2 = 1$ とすれば証明できる。

(証明2) 次 の固有値問題を解く。

$$([\bar{K}] - \lambda [\bar{M}]) \{x\} = \{0\} \quad (6-2-8)$$

式 (6-2-8) に式 (6-2-3)、(6-2-4) を代入し、左側から $[\Psi]^T$ を乗ずれば

$$(\Omega_i^2 - \lambda I_i) \{\xi\} = \{0\} \quad (6-2-9)$$

式 (6-2-9) から、固有値は S 個求められ、第 i 次の固有振動数は $\Omega_i / 2\pi$ 、すなわち f_i となる。また、式 (6-2-9) の λ に Ω_i^2 を代入すれば $\xi_i =$

1、 $\xi_j (j \neq 1) = 0$ となるので、 $\lambda = \Omega^2$ に対応する固有モードは、式 (6-2-5) から行列 $[\Psi]$ の第 1 列のベクトルに外ならない。

(証明 3) 行列 $[\Psi]$ は正則行列であるからその逆行列はただ 1 つ存在する。そこで、その逆行列を $[\Psi]^{-1}$ で表せば、

$$[\Psi] [\Psi]^{-1} = \text{「I」} \quad (6-2-10)$$

自由度 S の任意のベクトル $\{x\}$ は、明らかに

$$\{x\} = \text{「I」} \{x\} \quad (6-2-11)$$

と表現できるから、式 (6-2-11) に式 (6-2-10) を代入すれば

$$\{x\} = [\Psi] [\Psi]^{-1} \{x\} \quad (6-2-12)$$

ここで、

$$\{\xi\} = [\Psi]^{-1} \{x\} \quad (6-2-13)$$

と書き変えると、式 (6-2-12) は

$$\{x\} = [\Psi] \{\xi\} \quad (6-2-14)$$

すなわち、任意ベクトル $\{x\}$ は行列 $[\Psi]$ の一次結合で一義的に表すことができる。

6.3 誤差を含まない（または誤差が無視できる程非常に小さい）データに対する同定法の理論

6.3.1 理論

誤差を含まないデータ、または誤差の混入が無視できる程度に小さい場合には、次のような簡単な方法で特性行列を同定できる。

定常励振を受ける多自由度系（ n 自由度）の運動方程式は、一般粘性減衰系を仮定すると、

$$([K] - \omega_i^2[M] + j\omega_i[C])\{\delta_i\} = \{F_i\} \quad (6-3-1)$$

ここで、 ω_i は励振周波数、 $\{\delta_i\}$ は応答変位ベクトル、 $\{F_i\}$ は励振ベクトルである。

ω_l から ω_h までの周波数範囲の N 周波数点 ($\omega_1 \sim \omega_N$) について、それぞれ励振力 $\{F_1\} \sim \{F_N\}$ を与えるときの応答を $\{\delta_1\} \sim \{\delta_N\}$ とすると、各周波数において式 (6-3-1) が成立するから、それらをひとまとめに行列表示でき、次のようになる。

$$[K][\delta] - [M][\delta]^T \omega^2 + j[C][\delta]^T \omega = [F] \quad (6-3-2)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} [\delta] &= [\{\delta_1\} \{\delta_2\} \cdots \{\delta_N\}] \\ [F] &= [\{F_1\} \{F_2\} \cdots \{F_N\}] \\ \omega^2 &= \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix} \\ \omega &= \begin{bmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (6-3-3)$$

行列 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ が対称行列であることを考慮して、式 (6-3-2) を転置すると、

$$[\delta]^T [K] - \omega^2 [\delta]^T [M] + j\omega [\delta]^T [C] = [F]^T \quad (6-3-4)$$

振動試験により得られるデータは、測定点の変位応答と励振力の周波数なので、式(6-3-4)の未知数は、行列[M]、[C]、[K]の成分のみである。そこで、式(6-3-4)を次のように表す。

$$\begin{bmatrix} [\delta]^T & -\omega^2 [\delta]^T & j\omega [\delta]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [K] \\ [M] \\ [C] \end{bmatrix} = [F]^T \quad (6-3-5)$$

行列 $[\delta]^T$ と $[F]^T$ は、複素行列となるので、

$$[\delta]^T = [\delta_R]^T + j[\delta_I]^T \quad (6-3-6)$$

$$[F]^T = [F_R]^T + j[F_I]^T \quad (6-3-7)$$

のように、実数部と虚数部に分解して表示できる。ただし、変位応答は励振力を基準にして複素表示になるので、式(6-3-7)において $[F_I] = 0$ としても一般性を失わない。式(6-3-6)と(6-3-7)を(6-3-5)に代入して、その実数部を取り出すと

$$\begin{bmatrix} [\delta_R]^T & -\omega^2 [\delta_R]^T & -\omega [\delta_I]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [K] \\ [M] \\ [C] \end{bmatrix} = [F_R]^T \quad (6-3-8)$$

この式(6-3-8)により得られたデータ $[\omega]$ 、 $[\omega^2]$ 、 $[\delta_R]^T$ 、 $[\delta_I]^T$ および $[F_R]^T$ を入力する。

虚数部に関しては、

$$\begin{bmatrix} [\delta_I]^T & -\omega^2 [\delta_I]^T & \omega [\delta_R]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [K] \\ [M] \\ [C] \end{bmatrix} = [F_I]^T \quad (6-3-9)$$

となり、これらの方程式を測定したデータから構成することができる。

式(6-3-8)と式(6-3-9)を合わせて表示すると、

$$\begin{bmatrix} [\delta_R]^T & -r\omega^2[\delta_R]^T & -r\omega[\delta_I]^T \\ [\delta_I]^T & -r\omega^2[\delta_I]^T & r\omega[\delta_R]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [K] \\ [M] \\ [C] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_R]^T \\ [F_I]^T \end{bmatrix} \quad (6-3-10)$$

式(6-3-10)の左辺の2個の行列は、それぞれ2N行3n列と3n行n列であり、また右辺の行列は2N行n列であるから、これを便宜的に、

$$\begin{bmatrix} \{\varphi_1\} \\ \{\varphi_2\} \\ \dots \\ \{\varphi_{3n}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [K] \\ [M] \\ [C] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{f_1\} \\ \{f_2\} \\ \dots \\ \{f_n\} \end{bmatrix} \quad (6-3-11)$$

のように書き換える。そして、[K]、[M]、[C]の各行列の成分をそれぞれ k_{ij} 、 m_{ij} 、 c_{ij} (i 行列目の成分)と表す。それらの行列が対称行列であることを考慮すると、未知数の数は $3n(n+1)/2$ 個となるから、自由度 $3n(n+1)/2$ の未知ベクトル $\{x\}$ を

$$\begin{aligned} \{x\}^T = & (k_{11}, k_{21}, k_{22}, k_{31}, k_{32}, k_{33}, \dots, k_{nn}, \\ & m_{11}, m_{21}, m_{22}, m_{31}, m_{32}, m_{33}, \dots, m_{nn}, \\ & c_{11}, c_{21}, c_{22}, c_{31}, c_{32}, c_{33}, \dots, c_{nn}) \end{aligned} \quad (6-3-12)$$

とし、式(6-3-11)を

$$[A]\{x\} = \{g\} \quad (6-3-13)$$

の形に変形する。式(6-3-13)において、例えば、行列[A]の第1列目は、未知数 k_{11} にかかる係数ベクトルであるから、式(6-3-11)の $\{\varphi_1\}$ からできている。また、第2列目は、未知数 k_{21} にかかる係数ベクトルであるから、式(6-3-11)の $\{\varphi_2\}$ と k_{12} ([K]が対称行列なので k_{21} と同じ値)にかかる $\{\varphi_1\}$ からできている。このようにして行列[A]は作成され、2Nn行3n(n+1)/2列の行列となる。これと対応して、式(6-3-13)の右辺のベクトル $\{g\}$ は $\{f_1\}$ 、 $\{f_2\}$ 、 \dots 、 $\{f_n\}$ を次々に並べたベクトルとなる。すなわち、

$$\{g\}^T = (\{f_1\}^T, \{f_2\}^T, \dots, \{f_n\}^T) \quad (6-3-14)$$

式 (6-3-13) が解けるためには、 $[A]$ が行数 (方程式の数) の方が列数 (未知数の数) より大きい行列となる必要があるから

$$N \geq 3(n+1)/4 \quad (6-3-15)$$

を満足する測定周波数点 N を採用すればよいことがいえる。

このようにすれば、式 (6-3-13) の連立方程式の解法に最小二乗法を用いることができる。

誤差ベクトルを $\{E\}$ とすると、

$$\{E\} = \{g\} - [A]\{x\} \quad (6-3-16)$$

重み関数行列 $[W]$ をはさんで、誤差の二乗和を求め、その誤差関数を λ とすると、

$$\lambda = \{E\}^T [W] \{E\} \quad (6-3-17)$$

λ をベクトル $\{x\}$ で偏微分すると、

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \{x\}} = 2[A]^T [W] ([A]\{x\} - \{g\}) \quad (6-3-18)$$

となるので、誤差が最小になるのは $\delta \lambda / \delta \{x\} = 0$ より、

$$[A]^T [W] [A]\{x\} - [A]^T [W]\{g\} = 0 \quad (6-3-19)$$

となり、求める $\{x\}$ は、

$$\{x\} = ([A]^T [W] [A])^{-1} [A]^T [W]\{g\} \quad (6-3-20)$$

となる。標準的に重みをつけなくてもよい。すなわち、重み関数 $[W]$ は単位行列としてよいので、

$$\{x\} = ([A]^T[A])^{-1}[A]^T\{\delta\} \quad (6-3-21)$$

を解けばよい。

式(6-3-21) [または式(6-3-20)によって、対称の構造物の質量行列[M]、減衰行列[C]、剛性行列[K]が決定できるが、励振点を測定点のうちのある一点とした場合の測定データのみを用いて式(6-3-21)を計算すると、逆行列が求まらない場合が生じる。この現象は、一般に測定点の数の方が振動モードの数(伝達関数の山の数)よりかなり多い場合に起きる。まえがきで述べたように、実験による特性行列の決定における最も困難な点の一つは、この点であった。しかし、励振点を種々の測定点に換えて得られる測定データをすべて用いて計算を行うと、上記のような状況の場合にも式(6-3-21)の逆行列を求めることができることを著者が見出した。この理由は次のようなことであると推測できる。

測定範囲内で得られた応答は、測定周波数範囲内にある固有モード成分のほか、その範囲外にある固有モード成分も含んだ応答値(連続体であり無限に近い数の固有モード成分の和)であるから、もし、測定点nに対して、励振点のある一点に固定した場合のある周波数 ω においては、n個の互いに独立なデータしか得られないが、励振点を変えて測定すれば、 $n(n+1)/2$ 個の互いに独立なデータが得られる。このデータは複素数であることから、実数部と虚数部に分けて考えれば、 $n(n+1)$ 個の互いに独立なデータが得られることになる。そして、測定を ω_1 から ω_N までN周波数について行なえば、式(6-3-21)の逆行列を求めるのに十分な互いに独立なデータを得ることができるからであると思われる。

また、先に述べたが、従来は、たとえ[M]、[C]および[K]が求められたとしても、それらが正定値行列になっているとは限らなかった。むしろ、正定値行列でない状態の行列として求められる場合が多い。このことは物理現象と矛盾する。この点に関しては、式(6-3-8)と式(6-3-9)の両方によって式(6-3-10)を作成し、未知数{x}についての式(6-3-13)を構成し{x}を求めると、[M]、[C]、[K]行列は、著者の試算した範囲内では、必ず正定値行列として求まる。ある周波数 ω (正值)における応答値を得た段階で同時に $-\omega$ の周波数における応答値も得たことになるので、 $\omega_l \sim \omega_h$ までの測定で、 $\omega_l \sim \omega_h$ と $-\omega_h \sim -\omega_l$ の二つの領域についてデータを得たことを意味する、とも解釈できる。

以上より、本方法によれば、測定点数のほうが振動モード数より多い状況下においても、実数形連立方程式を1回解くだけで、正定値行列の特性を求めることができる。

6.3.2 検討

6.3.2.a 計算機による実験解析

図6-3-1に示す一端固定平板について、四辺形要素で節点数40、要素数28で有限要素分割(自由度210)し、計算機による実験解析を行い、その実験解析で得られるいくつかの節点(測定点)の面外方向変位成分のみを用いて、本節で提案する方法により供試体の面外方向変位に関する特性行列を求め、その精度の検討を行う。

すなわち、一端固定平板についての自由度210の質量行列と剛性行列を有限要素法(四辺形要素)で作成し、固有値解析で210次までの固有振動数と固有モード(面外と面内のすべての自由度)を求める。つぎに、対象とするいくつかの測定点を選ぶ。そして、210次すべての固有モードを用いてモード解析を行い、測定点として選んだ点のうちある一点を励振した時の各測定点の面外方向変位応答を計算する。励振点を次々に測定点上で移していき、求めた面外方向応答変位データをあたかも実験によって得られたデータとして、本節で提案する方法によるプログラムに入力し、特性行列を求める。そして、求められた特性行列を用いて、固有値解析(求められる特性行列はすべて正定値行列なので固有値解析が可能)および、モード解析で固有振動数、固有モード、応答を計算し、先の実験解析の結果と比較することによって、本方法による系の同定方法の精度を検討する。

なお、実験解析においては、供試体の減衰を比例減衰($\alpha = 8 \text{ s}^{-1}$ または 16 s^{-1} 、 $\beta = 7 \times 10^{-6} \text{ s}$ または $14 \times 10^{-6} \text{ s}$)として生じさせているが、本同定法での減衰行列の決定に際しては、一般粘性減衰とし、重み関数は用いない。材料定数は密度 $7.86 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ 、縦弾性係数 $2.058 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ とした。

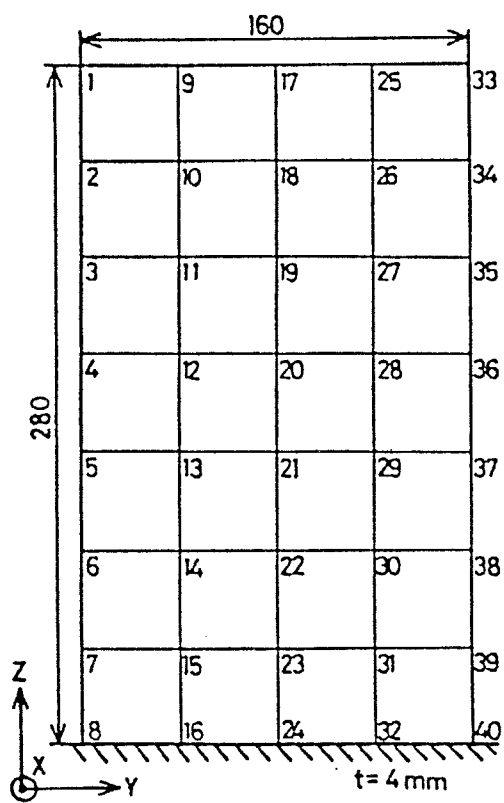


図 6 - 3 - 1 一端固定平板モデル

6・3・2. b 4測定点による3次までの同定

図6-3-1に示す供試体の節点1、7、20、35の4点の面外方向変位成分について5Hzから400Hzまで2Hz間隔に得たデータを用いて同定した質量行列、減衰行列、剛性行列の上三角形部分の成分を表6-3-1に示す。なお、この場合のシミュレーションでは、比例減衰係数を $\alpha=8$ 、 $\beta=7 \times 10$ とした。また、表6-3-1、2、3、4、5、8、9における単位は、[M]については $N \cdot s^2/mm$ 、[C]は Ns/mm 、[K]は N/mm である。

M(1,1)= 0.9649527E-04	C(1,1)= 0.2022124E-02	K(1,1)= 0.8525066E+02
M(1,2)=-0.2880371E-04	C(1,2)=-0.4087808E-03	K(1,2)=-0.2454744E+01
M(1,3)=-0.3730166E-05	C(1,3)=-0.2127995E-02	K(1,3)=-0.2549344E+03
M(1,4)= 0.6877065E-04	C(1,4)= 0.1012376E-02	K(1,4)= 0.5576656E+02
M(2,2)= 0.1589591E-03	C(2,2)= 0.2471182E-01	K(2,2)= 0.3157892E+04
M(2,3)= 0.1471062E-03	C(2,3)=-0.2015412E-02	K(2,3)=-0.5647206E+03
M(2,4)=-0.1052912E-03	C(2,4)= 0.9228427E-03	K(2,4)= 0.2634733E+03
M(3,3)= 0.4866825E-03	C(3,3)= 0.1645453E-01	K(3,3)= 0.1392154E+04
M(3,4)=-0.1220524E-03	C(3,4)=-0.5057461E-02	K(3,4)=-0.5199055E+03
M(4,4)= 0.2387892E-03	C(4,4)= 0.3994941E-02	K(4,4)= 0.2826344E+03

表6-3-1 測定点4点による同定特性行列
(単位: $M = Ns^2/mm$ 、 $C = Ns/mm$ 、 $K = N/mm$)

6. 3. 2. c 5測定点による三次までの同定

[6. 3. 2. a]と同じ条件のシミュレーションによって得られた節点1、17、20、35の5節点のデータで同定すると表6-3-2に示す各行列が得られた。

表6-3-2 測定点5点による同定特性行列
(単位: $M = \text{Ns}^2/\text{mm}$ 、 $C = \text{Ns}/\text{mm}$ 、 $K = \text{N}/\text{mm}$)

$M(1,1) = 0.4755788\text{E}-04$	$C(1,1) = 0.2493188\text{E}-02$	$K(1,1) = 0.2723539\text{E}+03$
$M(1,2) = 0.1125050\text{E}-04$	$C(1,2) = -0.6885154\text{E}-03$	$K(1,2) = -0.7425197\text{E}+02$
$M(1,3) = -0.1096832\text{E}-05$	$C(1,3) = -0.2295798\text{E}-02$	$K(1,3) = -0.2932503\text{E}+03$
$M(1,4) = 0.5882655\text{E}-04$	$C(1,4) = -0.1384523\text{E}-02$	$K(1,4) = -0.2570535\text{E}+03$
$M(1,5) = -0.2635682\text{E}-04$	$C(1,5) = 0.1575031\text{E}-02$	$K(1,5) = 0.2286118\text{E}+03$
$M(2,2) = 0.1593135\text{E}-03$	$C(2,2) = 0.2440920\text{E}-01$	$K(2,2) = 0.3222971\text{E}+04$
$M(2,3) = 0.4308205\text{E}-05$	$C(2,3) = 0.1141409\text{E}-02$	$K(2,3) = 0.1150612\text{E}+03$
$M(2,4) = 0.1595344\text{E}-03$	$C(2,4) = -0.2653972\text{E}-02$	$K(2,4) = -0.5417689\text{E}+03$
$M(2,5) = -0.5930414\text{E}-04$	$C(2,5) = 0.6654822\text{E}-03$	$K(2,5) = 0.1812170\text{E}+03$
$M(3,3) = 0.1262247\text{E}-03$	$C(3,3) = 0.4745742\text{E}-02$	$K(3,3) = 0.4880972\text{E}+03$
$M(3,4) = 0.3990451\text{E}-05$	$C(3,4) = -0.1407216\text{E}-03$	$K(3,4) = -0.2092087\text{E}+02$
$M(3,5) = 0.3904526\text{E}-04$	$C(3,5) = -0.2029466\text{E}-02$	$K(3,5) = -0.2985374\text{E}+03$
$M(4,4) = 0.5905690\text{E}-03$	$C(4,4) = 0.1483274\text{E}-01$	$K(4,4) = 0.1483531\text{E}+04$
$M(4,5) = -0.5205029\text{E}-04$	$C(4,5) = -0.4051464\text{E}-02$	$K(4,5) = -0.5284698\text{E}+03$
$M(5,5) = 0.1397438\text{E}-03$	$C(5,5) = 0.4636835\text{E}-02$	$K(5,5) = 0.4928500\text{E}+03$

6. 3. 2. d 6測定点による3次までの同定

節点1、7、17、20、35、39の6点について、シミュレーションで $\alpha = 8 \text{ s}^{-1}$ 、 $\beta = 7 \times 10^{-6}$ とし5 Hz から400 Hz まで2 Hz の間隔で得たデータより同定した質量、減衰、剛性の各行列を表6-3-3に示す。また、シミュレーションで $\alpha = 16$ 、 $\beta = 14 \times 10^{-6}$ とした場合の各行列を表6-3-4に示す。

表6-3-3 測定点6点による同定特性行列

$$\alpha = 8 \text{ s}^{-1}$$

$$\beta = 14 \times 10^{-6} \text{ s}$$

(単位 : $M = \text{Ns}^2/\text{mm}$ 、 $C = \text{Ns}/\text{mm}$ 、 $K = \text{N}/\text{mm}$)

M(1,1)= 0.4606619E-04	C(1,1)= 0.2428349E-02	K(1,1)= 0.2711478E+03
M(1,2)= 0.1238576E-04	C(1,2)=-0.5558185E-03	K(1,2)=-0.6892774E+02
M(1,3)=-0.7612230E-06	C(1,3)=-0.2175151E-02	K(1,3)=-0.2880479E+03
M(1,4)= 0.5971574E-04	C(1,4)=-0.1441093E-02	K(1,4)=-0.2617475E+03
M(1,5)=-0.2573274E-04	C(1,5)= 0.1465235E-02	K(1,5)= 0.2222658E+03
M(1,6)=-0.6294931E-05	C(1,6)= 0.6571570E-03	K(1,6)= 0.6237673E+02
M(2,2)= 0.1484296E-03	C(2,2)= 0.2416060E-01	K(2,2)= 0.3219571E+04
M(2,3)=-0.4512327E-05	C(2,3)= 0.8989475E-03	K(2,3)= 0.1100554E+03
M(2,4)= 0.1669472E-03	C(2,4)=-0.2560118E-02	K(2,4)=-0.5446944E+03
M(2,5)=-0.5023255E-04	C(2,5)= 0.8059046E-03	K(2,5)= 0.1775563E+03
M(2,6)=-0.4198864E-04	C(2,6)= 0.2635562E-03	K(2,6)= 0.1232122E+03
M(3,3)= 0.1192993E-03	C(3,3)= 0.4538773E-02	K(3,3)= 0.4844352E+03
M(3,4)= 0.6497881E-05	C(3,4)=-0.1392786E-03	K(3,4)=-0.2956805E+02
M(3,5)= 0.4702189E-04	C(3,5)=-0.1881985E-02	K(3,5)=-0.2992613E+03
M(3,6)=-0.3443527E-04	C(3,6)= 0.2043991E-03	K(3,6)= 0.9935350E+02
M(4,4)= 0.5909582E-03	C(4,4)= 0.1498164E-01	K(4,4)= 0.1505625E+04
M(4,5)=-0.5505443E-04	C(4,5)=-0.3966272E-02	K(4,5)=-0.5092450E+03
M(4,6)=-0.1730225E-04	C(4,6)=-0.2130908E-02	K(4,6)=-0.2851769E+03
M(5,5)= 0.1288031E-03	C(5,5)= 0.4564867E-02	K(5,5)= 0.5010099E+03
M(5,6)= 0.3623155E-04	C(5,6)=-0.1269310E-02	K(5,6)=-0.2223951E+03
M(6,6)= 0.2020887E-03	C(6,6)= 0.2706957E-01	K(6,6)= 0.3395680E+04

表6-3-4 測定点6点による同定特性行列

$$\alpha = 16 \text{ s}^{-1}$$

$$\beta = 14 \times 10^{-6} \text{ s}$$

(単位: $M = \text{Ns}^2/\text{mm}$ 、 $C = \text{Ns}/\text{mm}$ 、 $K = \text{N}/\text{mm}$)

$M(1,1) = 0.4615287\text{E}-04$	$C(1,1) = 0.4863016\text{E}-02$	$K(1,1) = 0.2709648\text{E}+03$
$M(1,2) = 0.1240672\text{E}-04$	$C(1,2) = -0.1104513\text{E}-02$	$K(1,2) = -0.6881715\text{E}+02$
$M(1,3) = -0.5216974\text{E}-06$	$C(1,3) = -0.4333535\text{E}-02$	$K(1,3) = -0.2877196\text{E}+03$
$M(1,4) = 0.5966605\text{E}-04$	$C(1,4) = -0.2867816\text{E}-02$	$K(1,4) = -0.2616995\text{E}+03$
$M(1,5) = -0.2584531\text{E}-04$	$C(1,5) = 0.2920150\text{E}-02$	$K(1,5) = 0.2220364\text{E}+03$
$M(1,6) = -0.6471297\text{E}-05$	$C(1,6) = 0.1296081\text{E}-02$	$K(1,6) = 0.6192300\text{E}+02$
$M(2,2) = 0.1482006\text{E}-03$	$C(2,2) = 0.4831260\text{E}-01$	$K(2,2) = 0.3219121\text{E}+04$
$M(2,3) = -0.4499291\text{E}-05$	$C(2,3) = 0.1798010\text{E}-02$	$K(2,3) = 0.1101103\text{E}+03$
$M(2,4) = 0.1664848\text{E}-03$	$C(2,4) = -0.5128614\text{E}-02$	$K(2,4) = -0.5455423\text{E}+03$
$M(2,5) = -0.5017156\text{E}-04$	$C(2,5) = 0.1607664\text{E}-02$	$K(2,5) = 0.1778688\text{E}+03$
$M(2,6) = -0.4182446\text{E}-04$	$C(2,6) = 0.5282921\text{E}-03$	$K(2,6) = 0.1235384\text{E}+03$
$M(3,3) = 0.1192314\text{E}-03$	$C(3,3) = 0.9076566\text{E}-02$	$K(3,3) = 0.4838714\text{E}+03$
$M(3,4) = 0.6648653\text{E}-05$	$C(3,4) = -0.2723549\text{E}-03$	$K(3,4) = -0.2918182\text{E}+02$
$M(3,5) = 0.4703304\text{E}-04$	$C(3,5) = -0.3757464\text{E}-02$	$K(3,5) = -0.2991321\text{E}+03$
$M(3,6) = -0.3438130\text{E}-04$	$C(3,6) = 0.4092215\text{E}-03$	$K(3,6) = 0.9978630\text{E}+02$
$M(4,4) = 0.5897778\text{E}-03$	$C(4,4) = 0.2994053\text{E}-01$	$K(4,4) = 0.1503710\text{E}+04$
$M(4,5) = -0.5491319\text{E}-04$	$C(4,5) = -0.7945584\text{E}-02$	$K(4,5) = -0.5086531\text{E}+03$
$M(4,6) = -0.1685238\text{E}-04$	$C(4,6) = -0.4243275\text{E}-02$	$K(4,6) = -0.2845419\text{E}+03$
$M(5,5) = 0.1288206\text{E}-03$	$C(5,5) = 0.9130021\text{E}-02$	$K(5,5) = 0.5007461\text{E}+03$
$M(5,6) = 0.3624312\text{E}-04$	$C(5,6) = -0.2535691\text{E}-02$	$K(5,6) = -0.2226871\text{E}+03$
$M(6,6) = 0.2008434\text{E}-03$	$C(6,6) = 0.5408613\text{E}-01$	$K(6,6) = 0.3392633\text{E}+04$

6. 3. 2. e 8測定点による3次までの同定

節点1、7、10、17、20、30、35、39の8点について、シミュレーションで $\alpha = 8 \text{ s}^{-1}$ 、 $\beta = 7 \times 10^{-6} \text{ s}$ を用いた400 Hzまでのデータより同定した各行列を表6-3-5に示す。

表6-3-5 測定点8点による同定特性行列

(単位: $M = \text{Ns}^2/\text{mm}$ 、 $C = \text{Ns}/\text{mm}$ 、 $K = \text{N}/\text{mm}$)

M(1, 1)= 0.1979161E-04	C(1, 1)= 0.5339619E-02	K(1, 1)= 0.7225669E+03
M(1, 2)=-0.1172643E-04	C(1, 2)=-0.3772585E-03	K(1, 2)=-0.1998439E+02
M(1, 3)=-0.5687800E-05	C(1, 3)=-0.9516738E-02	K(1, 3)=-0.1339880E+04
M(1, 4)=-0.8431753E-05	C(1, 4)= 0.4682629E-03	K(1, 4)= 0.8455072E+02
M(1, 5)=-0.1946584E-04	C(1, 5)= 0.3389933E-02	K(1, 5)= 0.5210022E+03
M(1, 6)= 0.1593192E-04	C(1, 6)=-0.5303130E-03	K(1, 6)=-0.1216215E+03
M(1, 7)=-0.6793975E-05	C(1, 7)= 0.7083153E-03	K(1, 7)= 0.1044896E+03
M(1, 8)= 0.1796420E-05	C(1, 8)= 0.1791153E-03	K(1, 8)= 0.1655630E+02
M(2, 2)= 0.1397340E-03	C(2, 2)= 0.2410574E-01	K(2, 2)= 0.3221503E+04
M(2, 3)= 0.6297791E-04	C(2, 3)=-0.3333269E-03	K(2, 3)=-0.1204816E+03
M(2, 4)=-0.2996158E-04	C(2, 4)= 0.7882491E-03	K(2, 4)= 0.1329415E+03
M(2, 5)= 0.1101589E-03	C(2, 5)=-0.2436054E-02	K(2, 5)=-0.4941428E+03
M(2, 6)=-0.2358591E-05	C(2, 6)=-0.2684304E-03	K(2, 6)=-0.9627219E+00
M(2, 7)=-0.3394227E-04	C(2, 7)= 0.9799695E-03	K(2, 7)= 0.1813721E+03
M(2, 8)=-0.2223646E-04	C(2, 8)= 0.6255605E-03	K(2, 8)= 0.1312986E+03
M(3, 3)= 0.2401387E-03	C(3, 3)= 0.2950206E-01	K(3, 3)= 0.3928355E+04
M(3, 4)=-0.4350761E-04	C(3, 4)=-0.7772539E-02	K(3, 4)=-0.1058251E+04
M(3, 5)= 0.1204897E-03	C(3, 5)=-0.1551727E-01	K(3, 5)=-0.2361177E+04
M(3, 6)=-0.4532300E-04	C(3, 6)= 0.4339479E-02	K(3, 6)= 0.6993301E+03
M(3, 7)=-0.2648597E-04	C(3, 7)= 0.1913220E-02	K(3, 7)= 0.3011907E+03
M(3, 8)=-0.2748949E-05	C(3, 8)=-0.6456934E-03	K(3, 8)=-0.9545238E+02
M(4, 4)= 0.1172933E-03	C(4, 4)= 0.6465595E-02	K(4, 4)= 0.7800605E+03
M(4, 5)=-0.4010387E-04	C(4, 5)= 0.3176085E-02	K(4, 5)= 0.4985989E+03
M(4, 6)=-0.1359598E-04	C(4, 6)= 0.2197031E-03	K(4, 6)= 0.5257478E+02
M(4, 7)= 0.6394699E-04	C(4, 7)=-0.2264826E-02	K(4, 7)=-0.3863743E+03
M(4, 8)=-0.9080316E-06	C(4, 8)= 0.3127045E-04	K(4, 8)= 0.1660748E+02
M(5, 5)= 0.3087046E-03	C(5, 5)= 0.2683505E-01	K(5, 5)= 0.3469810E+04
M(5, 6)= 0.3812225E-04	C(5, 6)=-0.1425918E-01	K(5, 6)=-0.2069782E+04
M(5, 7)=-0.8665254E-05	C(5, 7)=-0.3989376E-02	K(5, 7)=-0.5595076E+03
M(5, 8)=-0.2539529E-04	C(5, 8)= 0.4422139E-02	K(5, 8)= 0.6685085E+03
M(6, 6)= 0.2157036E-03	C(6, 6)= 0.3605801E-01	K(6, 6)= 0.4838145E+04
M(6, 7)= 0.6872468E-05	C(6, 7)=-0.1617871E-02	K(6, 7)=-0.2396144E+03
M(6, 8)= 0.1128556E-04	C(6, 8)=-0.1710591E-01	K(6, 8)=-0.2459626E+04
M(7, 7)= 0.1080857E-03	C(7, 7)= 0.4528224E-02	K(7, 7)= 0.5215376E+03
M(7, 8)= 0.9251247E-05	C(7, 8)=-0.5749722E-03	K(7, 8)=-0.9770834E+02
M(8, 8)= 0.3707304E-04	C(8, 8)= 0.3207166E-01	K(8, 8)= 0.4515207E+04

6. 3. 2. f 13測定点による同定

シミュレーションにおいて比例減衰係数 $\alpha = 8 \text{ s}^{-1}$ 、 $\beta = 7 \times 10^{-6} \text{ s}$ とするときの、節点1、4、7、10、14、17、20、23、26、30、33、35、39の13点における5 Hzから400 Hz（1次から3次までを含む）まで2 Hz間隔に取ったデータによって同定した。また、5 Hzから1000 Hz（1次から6次までを含む）まで2 Hz間隔で取ったデータを用いて同定した。結果はそれぞれ表6-3-6と表6-3-7に示す。

表6-3-6 13自由度での同定特性行列（400 Hzまで）

MC (1, 1) = 0.1279372E-04	CC (1, 1) = 0.5417056E-02	KC (1, 1) = 0.7570398E+03
MC (1, 2) = -0.3780169E-06	CC (1, 2) = 0.3624514E-03	KC (1, 2) = 0.5406509E+02
MC (1, 3) = 0.5215029E-06	CC (1, 3) = 0.2789462E-04	KC (1, 3) = 0.2941990E+01
MC (1, 4) = 0.6890212E-05	CC (1, 4) = -0.9936206E-02	KC (1, 4) = -0.1425088E+04
MC (1, 5) = -0.7153753E-06	CC (1, 5) = -0.2442792E-03	KC (1, 5) = -0.3317145E+02
MC (1, 6) = 0.1865481E-05	CC (1, 6) = -0.7634042E-03	KC (1, 6) = -0.1124018E+03
MC (1, 7) = -0.4412968E-05	CC (1, 7) = 0.2943815E-02	KC (1, 7) = 0.4250811E+03
MC (1, 8) = -0.2645198E-05	CC (1, 8) = 0.6456055E-05	KC (1, 8) = 0.7616787E+01
MC (1, 9) = -0.5899366E-05	CC (1, 9) = 0.3659291E-02	KC (1, 9) = 0.5316584E+03
MC (1, 10) = 0.5038100E-05	CC (1, 10) = -0.3854472E-03	KC (1, 10) = -0.6663306E+02
MC (1, 11) = 0.5292397E-06	CC (1, 11) = -0.3863859E-03	KC (1, 11) = -0.5528755E+02
MC (1, 12) = 0.1464794E-05	CC (1, 12) = -0.6913228E-03	KC (1, 12) = -0.1010301E+03
MC (1, 13) = -0.1032341E-05	CC (1, 13) = 0.5156652E-04	KC (1, 13) = 0.9070291E+01
MC (2, 2) = 0.4976896E-04	CC (2, 2) = 0.9110775E-02	KC (2, 2) = 0.1241225E+04
MC (2, 3) = 0.2239996E-05	CC (2, 3) = -0.7082385E-03	KC (2, 3) = -0.1050602E+03
MC (2, 4) = 0.2119155E-04	CC (2, 4) = -0.7087711E-02	KC (2, 4) = -0.1035546E+04
MC (2, 5) = 0.2206505E-04	CC (2, 5) = -0.7460710E-02	KC (2, 5) = -0.1090838E+04
MC (2, 6) = -0.6593311E-05	CC (2, 6) = 0.2795673E-02	KC (2, 6) = 0.4070212E+03
MC (2, 7) = 0.1441324E-04	CC (2, 7) = -0.4178904E-02	KC (2, 7) = -0.6126165E+03
MC (2, 8) = -0.5157548E-05	CC (2, 8) = 0.3248567E-02	KC (2, 8) = 0.4704558E+03
MC (2, 9) = -0.1316666E-05	CC (2, 9) = 0.1762491E-02	KC (2, 9) = 0.2509397E+03
MC (2, 10) = -0.9234198E-05	CC (2, 10) = 0.2522858E-02	KC (2, 10) = 0.3727949E+03
MC (2, 11) = 0.1730297E-05	CC (2, 11) = -0.5509600E-03	KC (2, 11) = -0.8134570E+02
MC (2, 12) = -0.5997306E-05	CC (2, 12) = 0.8155489E-03	KC (2, 12) = 0.1237371E+03
MC (2, 13) = -0.5455065E-06	CC (2, 13) = -0.4650024E-03	KC (2, 13) = -0.6452446E+02
MC (3, 3) = 0.2442597E-04	CC (3, 3) = 0.3253137E-01	KC (3, 3) = 0.4616352E+04
MC (3, 4) = -0.3348381E-05	CC (3, 4) = 0.1017654E-03	KC (3, 4) = 0.2079266E+02
MC (3, 5) = 0.1258655E-04	CC (3, 5) = -0.1903498E-01	KC (3, 5) = -0.2731346E+04
MC (3, 6) = 0.6033941E-06	CC (3, 6) = -0.5874438E-04	KC (3, 6) = -0.9377563E+01
MC (3, 7) = -0.4578518E-05	CC (3, 7) = 0.3826085E-02	KC (3, 7) = 0.5523450E+03
MC (3, 8) = -0.5626544E-05	CC (3, 8) = 0.5637992E-02	KC (3, 8) = 0.8123694E+03
MC (3, 9) = 0.2600306E-05	CC (3, 9) = -0.3099374E-03	KC (3, 9) = -0.4957095E+02
MC (3, 10) = -0.6388623E-06	CC (3, 10) = 0.2751368E-02	KC (3, 10) = 0.3919150E+03
MC (3, 11) = -0.8107525E-06	CC (3, 11) = 0.1055060E-03	KC (3, 11) = 0.1651318E+02
MC (3, 12) = 0.8868967E-06	CC (3, 12) = -0.4013092E-03	KC (3, 12) = -0.5777956E+02
MC (3, 13) = 0.6300598E-06	CC (3, 13) = -0.8429827E-03	KC (3, 13) = -0.1201233E+03
MC (4, 4) = 0.1412360E-03	CC (4, 4) = 0.3608799E-01	KC (4, 4) = 0.4985480E+04
MC (4, 5) = -0.1079075E-04	CC (4, 5) = 0.4423451E-02	KC (4, 5) = 0.6471433E+03
MC (4, 6) = -0.7246441E-05	CC (4, 6) = -0.9034388E-02	KC (4, 6) = -0.1277800E+04
MC (4, 7) = 0.2017712E-04	CC (4, 7) = -0.1076186E-01	KC (4, 7) = -0.1559395E+04
MC (4, 8) = 0.1336907E-04	CC (4, 8) = -0.1307977E-02	KC (4, 8) = -0.2118896E+03
MC (4, 9) = 0.1469146E-04	CC (4, 9) = -0.8329980E-02	KC (4, 9) = -0.1207393E+04
MC (4, 10) = -0.1866359E-04	CC (4, 10) = 0.2498842E-02	KC (4, 10) = 0.3845649E+03
MC (4, 11) = -0.2923549E-05	CC (4, 11) = 0.3113038E-02	KC (4, 11) = 0.4482256E+03
MC (4, 12) = -0.4741664E-05	CC (4, 12) = 0.2370408E-02	KC (4, 12) = 0.3426064E+03
MC (4, 13) = 0.4363332E-05	CC (4, 13) = -0.2638910E-03	KC (4, 13) = -0.4707805E+02

次のページに続く

前のページから続く

表 6 - 3 - 6 13自由度での同定特性行列 (400 Hzまで)

M(5, 5)= 0.1394005E-03	C(5, 5)= 0.4963482E-01	K(5, 5)= 0.6915273E+04
M(5, 6)= 0.3594379E-05	C(5, 6)=-0.1181117E-02	K(5, 6)=-0.1747274E+03
M(5, 7)= 0.1882022E-04	C(5, 7)=-0.1122070E-01	K(5, 7)=-0.1624429E+04
M(5, 8)= 0.3924564E-05	C(5, 8)=-0.3198814E-01	K(5, 8)=-0.4573617E+04
M(5, 9)=-0.6567597E-05	C(5, 9)= 0.1461099E-02	K(5, 9)= 0.2177758E+03
M(5,10)=-0.3326189E-05	C(5,10)=-0.3546086E-02	K(5,10)=-0.4955066E+03
M(5,11)= 0.2712332E-05	C(5,11)=-0.4038722E-03	K(5,11)=-0.6352295E+02
M(5,12)=-0.6476506E-05	C(5,12)= 0.1656311E-02	K(5,12)= 0.2451964E+03
M(5,13)=-0.3182011E-05	C(5,13)= 0.3122089E-02	K(5,13)= 0.4479319E+03
M(6, 6)= 0.3280988E-04	C(6, 6)= 0.1436015E-01	K(6, 6)= 0.2010633E+04
M(6, 7)=-0.2756636E-05	C(6, 7)= 0.3486384E-02	K(6, 7)= 0.5005417E+03
M(6, 8)=-0.4732795E-05	C(6, 8)= 0.4349276E-03	K(6, 8)= 0.7340987E+02
M(6, 9)= 0.7496834E-05	C(6, 9)=-0.1323031E-01	K(6, 9)=-0.1896163E+04
M(6,10)= 0.6126374E-05	C(6,10)=-0.7694704E-03	K(6,10)=-0.1204159E+03
M(6,11)= 0.6068838E-06	C(6,11)=-0.8157252E-03	K(6,11)=-0.1172023E+03
M(6,12)=-0.2795984E-05	C(6,12)= 0.4816417E-02	K(6,12)= 0.6911985E+03
M(6,13)=-0.9295476E-06	C(6,13)=-0.2461157E-04	K(6,13)=-0.2483135E+00
M(7, 7)= 0.1661505E-03	C(7, 7)= 0.3501035E-01	K(7, 7)= 0.4807609E+04
M(7, 8)=-0.1681865E-04	C(7, 8)= 0.4156612E-02	K(7, 8)= 0.6189609E+03
M(7, 9)= 0.1535822E-04	C(7, 9)=-0.1062355E-01	K(7, 9)=-0.1532677E+04
M(7,10)= 0.5221898E-04	C(7,10)=-0.1398168E-01	K(7,10)=-0.2060542E+04
M(7,11)=-0.7294194E-05	C(7,11)= 0.3187496E-02	K(7,11)= 0.4639971E+03
M(7,12)= 0.2505355E-04	C(7,12)=-0.3105327E-02	K(7,12)=-0.4723877E+03
M(7,13)=-0.5092604E-05	C(7,13)= 0.3637560E-02	K(7,13)= 0.5281128E+03
M(8, 8)= 0.9625916E-04	C(8, 8)= 0.1309335E+00	K(8, 8)= 0.1856426E+05
M(8, 9)= 0.4241197E-05	C(8, 9)=-0.1159097E-02	K(8, 9)=-0.1793103E+03
M(8,10)=-0.2755472E-04	C(8,10)=-0.2987105E-01	K(8,10)=-0.4222859E+04
M(8,11)= 0.1329456E-05	C(8,11)=-0.1455338E-03	K(8,11)=-0.2126472E+02
M(8,12)=-0.1084374E-04	C(8,12)= 0.2178698E-02	K(8,12)= 0.3251343E+03
M(8,13)= 0.4834833E-06	C(8,13)= 0.5949188E-02	K(8,13)= 0.8426494E+03
M(9, 9)= 0.1041050E-03	C(9, 9)= 0.4748978E-01	K(9, 9)= 0.6654812E+04
M(9,10)=-0.1419558E-04	C(9,10)= 0.3780807E-02	K(9,10)= 0.5648960E+03
M(9,11)= 0.7037739E-05	C(9,11)=-0.9412926E-02	K(9,11)=-0.1350493E+04
M(9,12)= 0.7491139E-05	C(9,12)=-0.1376925E-01	K(9,12)=-0.1973265E+04
M(9,13)=-0.1109755E-05	C(9,13)= 0.3044023E-04	K(9,13)= 0.4255630E+01
M(10,10)= 0.1870493E-03	C(10,10)= 0.4566137E-01	K(10,10)= 0.6288160E+04
M(10,11)=-0.3859831E-05	C(10,11)= 0.8856512E-04	K(10,11)= 0.1760327E+02
M(10,12)= 0.3420639E-04	C(10,12)=-0.4055899E-02	K(10,12)=-0.6198948E+03
M(10,13)= 0.1534286E-04	C(10,13)=-0.1960007E-01	K(10,13)=-0.2814656E+04
M(11,11)= 0.1288165E-04	C(11,11)= 0.5390514E-02	K(11,11)= 0.7526628E+03
M(11,12)=-0.2840717E-05	C(11,12)=-0.1606475E-03	K(11,12)=-0.1839969E+02
M(11,13)=-0.5221080E-06	C(11,13)= 0.4170564E-04	K(11,13)= 0.7136372E+01
M(12,12)= 0.5075755E-04	C(12,12)= 0.1118778E-01	K(12,12)= 0.1538140E+04
M(12,13)= 0.4354639E-05	C(12,13)=-0.3516315E-03	K(12,13)=-0.5557619E+02
M(13,13)= 0.2674508E-04	C(13,13)= 0.3255693E-01	K(13,13)= 0.4615172E+04

表6-3-7 13自由度での同定特性行列 (1000 Hz まで)

M(1, 1)= 0.1402542E-04	C(1, 1)= 0.5862266E-02	K(1, 1)= 0.7882903E+03
M(1, 2)=-0.1150318E-05	C(1, 2)= 0.3072105E-03	K(1, 2)= 0.5082201E+02
M(1, 3)=-0.3943821E-06	C(1, 3)=-0.1893064E-04	K(1, 3)= 0.5289268E+01
M(1, 4)= 0.4486441E-05	C(1, 4)=-0.1061725E-01	K(1, 4)=-0.1482686E+04
M(1, 5)= 0.8253202E-06	C(1, 5)= 0.7719414E-04	K(1, 5)=-0.1315012E+02
M(1, 6)= 0.1282575E-05	C(1, 6)=-0.7378247E-03	K(1, 6)= -0.9779942E+02
M(1, 7)=-0.4490435E-05	C(1, 7)= 0.3089985E-02	K(1, 7)= 0.4219592E+03
M(1, 8)=-0.1278423E-05	C(1, 8)= 0.1689500E-03	K(1, 8)= 0.1944715E+01
M(1, 9)=-0.6131666E-05	C(1, 9)= 0.3443562E-02	K(1, 9)= 0.5258840E+03
M(1,10)= 0.4911599E-05	C(1,10)= 0.6127619E-05	K(1,10)=-0.4801291E+02
M(1,11)= 0.6411681E-06	C(1,11)=-0.4347139E-03	K(1,11)=-0.6197440E+02
M(1,12)= 0.2955232E-05	C(1,12)=-0.3078375E-03	K(1,12)=-0.8513866E+02
M(1,13)= 0.3681783E-06	C(1,13)= 0.2493591E-03	K(1,13)= 0.1463739E+02
M(2, 2)= 0.5238075E-04	C(2, 2)= 0.9469517E-02	K(2, 2)= 0.1262041E+04
M(2, 3)= 0.1828656E-05	C(2, 3)=-0.5194512E-03	K(2, 3)=-0.9982001E+02
M(2, 4)= 0.2521015E-04	C(2, 4)=-0.6891139E-02	K(2, 4)=-0.1032693E+04
M(2, 5)= 0.2226884E-04	C(2, 5)=-0.7709019E-02	K(2, 5)=-0.1122233E+04
M(2, 6)=-0.8428246E-05	C(2, 6)= 0.2775128E-02	K(2, 6)= 0.4079038E+03
M(2, 7)= 0.1620255E-04	C(2, 7)=-0.4553765E-02	K(2, 7)=-0.6194456E+03
M(2, 8)=-0.6484235E-05	C(2, 8)= 0.3008054E-02	K(2, 8)= 0.4491736E+03
M(2, 9)=-0.3710730E-05	C(2, 9)= 0.1312245E-02	K(2, 9)= 0.2290317E+03
M(2,10)=-0.6705933E-05	C(2,10)= 0.2980969E-02	K(2,10)= 0.4249639E+03
M(2,11)= 0.3219859E-05	C(2,11)=-0.3626454E-03	K(2,11)=-0.6995905E+02
M(2,12)=-0.5462368E-05	C(2,12)= 0.1053779E-02	K(2,12)= 0.1219924E+03
M(2,13)= 0.9040080E-06	C(2,13)=-0.3296139E-03	K(2,13)=-0.7039053E+02
M(3, 3)= 0.3300257E-04	C(3, 3)= 0.3468131E-01	K(3, 3)= 0.4725266E+04
M(3, 4)=-0.3461452E-05	C(3, 4)=-0.4158879E-04	K(3, 4)= 0.7324118E+01
M(3, 5)= 0.8550937E-05	C(3, 5)=-0.2017444E-01	K(3, 5)=-0.2821928E+04
M(3, 6)= 0.3098409E-05	C(3, 6)= 0.7089770E-03	K(3, 6)= 0.2015076E+02
M(3, 7)=-0.2266032E-05	C(3, 7)= 0.3565019E-02	K(3, 7)= 0.5663062E+03
M(3, 8)=-0.1243369E-04	C(3, 8)= 0.4185561E-02	K(3, 8)= 0.7308467E+03
M(3, 9)=-0.2970117E-05	C(3, 9)=-0.1518428E-02	K(3, 9)=-0.1071705E+03
M(3,10)= 0.1067904E-04	C(3,10)= 0.4357286E-02	K(3,10)= 0.5305820E+03
M(3,11)=-0.5515672E-06	C(3,11)= 0.5963152E-04	K(3,11)= 0.2279688E+02
M(3,12)= 0.5754131E-05	C(3,12)= 0.2929433E-03	K(3,12)=-0.4655461E+02
M(3,13)=-0.2739716E-05	C(3,13)=-0.1853690E-02	K(3,13)=-0.1911325E+03
M(4, 4)= 0.1567682E-03	C(4, 4)= 0.3810593E-01	K(4, 4)= 0.5170984E+04
M(4, 5)=-0.2252709E-04	C(4, 5)= 0.3044048E-02	K(4, 5)= 0.5509563E+03
M(4, 6)=-0.1229616E-04	C(4, 6)=-0.1006514E-01	K(4, 6)=-0.1355821E+04
M(4, 7)= 0.2055010E-04	C(4, 7)=-0.1088126E-01	K(4, 7)=-0.1576192E+04
M(4, 8)= 0.9150554E-05	C(4, 8)=-0.1886801E-02	K(4, 8)=-0.2128556E+03
M(4, 9)= 0.1411740E-04	C(4, 9)=-0.8217297E-02	K(4, 9)=-0.1225507E+04
M(4,10)=-0.1724712E-04	C(4,10)= 0.2779593E-02	K(4,10)= 0.3698979E+03
M(4,11)=-0.5193059E-06	C(4,11)= 0.3579794E-02	K(4,11)= 0.4754883E+03
M(4,12)=-0.7342847E-05	C(4,12)= 0.1846847E-02	K(4,12)= 0.3329895E+03
M(4,13)= 0.2419055E-05	C(4,13)=-0.2664630E-03	K(4,13)=-0.3324945E+02

次のページに続く

前のページから続く

表6-3-7 13自由度での同定特性行列 (1000 Hz まで)

M(5, 5)= 0.1633765E-03	C(5, 5)= 0.5255365E-01	K(5, 5)= 0.7250797E+04
M(5, 6)= 0.5544652E-05	C(5, 6)=-0.7756564E-03	K(5, 6)=-0.1519895E+03
M(5, 7)= 0.1262267E-04	C(5, 7)=-0.1130945E-01	K(5, 7)=-0.1662285E+04
M(5, 8)= 0.4124281E-06	C(5, 8)=-0.3359631E-01	K(5, 8)=-0.4573566E+04
M(5, 9)=-0.5894517E-06	C(5, 9)= 0.2389263E-02	K(5, 9)= 0.3109597E+03
M(5, 10)=-0.1573360E-04	C(5, 10)=-0.3952071E-02	K(5, 10)=-0.6625913E+03
M(5, 11)= 0.1661710E-05	C(5, 11)=-0.5296567E-03	K(5, 11)=-0.8009744E+02
M(5, 12)=-0.1327953E-04	C(5, 12)= 0.1041521E-02	K(5, 12)= 0.2205960E+03
M(5, 13)=-0.3467542E-05	C(5, 13)= 0.3118966E-02	K(5, 13)= 0.4904058E+03
M(6, 6)= 0.3772126E-04	C(6, 6)= 0.1563850E-01	K(6, 6)= 0.2078301E+04
M(6, 7)=-0.1233265E-05	C(6, 7)= 0.3202941E-02	K(6, 7)= 0.4980483E+03
M(6, 8)=-0.8202958E-05	C(6, 8)=-0.4144346E-03	K(6, 8)= 0.3331010E+02
M(6, 9)= 0.5638601E-05	C(6, 9)=-0.1370563E-01	K(6, 9)=-0.1926654E+04
M(6, 10)= 0.1228641E-04	C(6, 10)=-0.4151301E-03	K(6, 10)=-0.4270183E+02
M(6, 11)=-0.1292491E-06	C(6, 11)=-0.1173141E-02	K(6, 11)=-0.1290354E+03
M(6, 12)=-0.2001082E-08	C(6, 12)= 0.5135663E-02	K(6, 12)= 0.7018455E+03
M(6, 13)=-0.2365990E-05	C(6, 13)=-0.8468030E-03	K(6, 13)=-0.3684413E+02
M(7, 7)= 0.1730139E-03	C(7, 7)= 0.3574943E-01	K(7, 7)= 0.4881934E+04
M(7, 8)=-0.1359173E-04	C(7, 8)= 0.6665219E-02	K(7, 8)= 0.6970522E+03
M(7, 9)= 0.1414526E-04	C(7, 9)=-0.9910960E-02	K(7, 9)=-0.1504852E+04
M(7, 10)= 0.4903394E-04	C(7, 10)=-0.1617535E-01	K(7, 10)=-0.2152186E+04
M(7, 11)=-0.8107765E-05	C(7, 11)= 0.2877012E-02	K(7, 11)= 0.4492263E+03
M(7, 12)= 0.2719504E-04	C(7, 12)=-0.3067583E-02	K(7, 12)=-0.4789209E+03
M(7, 13)=-0.6413391E-05	C(7, 13)= 0.3775862E-02	K(7, 13)= 0.5227590E+03
M(8, 8)= 0.1415740E-03	C(8, 8)= 0.1408316E+00	K(8, 8)= 0.1921969E+05
M(8, 9)= 0.1229366E-04	C(8, 9)= 0.2892294E-03	K(8, 9)=-0.8419995E+02
M(8, 10)=-0.6004078E-04	C(8, 10)=-0.3437917E-01	K(8, 10)=-0.4630402E+04
M(8, 11)= 0.1859717E-05	C(8, 11)= 0.1947393E-03	K(8, 11)=-0.2691278E+02
M(8, 12)=-0.2209096E-04	C(8, 12)= 0.5905635E-03	K(8, 12)= 0.2857622E+03
M(8, 13)= 0.8024073E-05	C(8, 13)= 0.8263413E-02	K(8, 13)= 0.1012756E+04
M(9, 9)= 0.1141200E-03	C(9, 9)= 0.4939098E-01	K(9, 9)= 0.6798273E+04
M(9, 10)=-0.3396139E-04	C(9, 10)= 0.1559867E-02	K(9, 10)= 0.3668147E+03
M(9, 11)= 0.5941451E-05	C(9, 11)=-0.9761892E-02	K(9, 11)=-0.1378364E+04
M(9, 12)= 0.3591704E-06	C(9, 12)=-0.1477979E-01	K(9, 12)=-0.2022232E+04
M(9, 13)= 0.1831485E-05	C(9, 13)= 0.9242787E-03	K(9, 13)= 0.4954773E+02
M(10, 10)= 0.2340270E-03	C(10, 10)= 0.4983823E-01	K(10, 10)= 0.6766695E+04
M(10, 11)=-0.3224221E-05	C(10, 11)= 0.4016880E-03	K(10, 11)= 0.3525853E+02
M(10, 12)= 0.5155956E-04	C(10, 12)=-0.2449361E-02	K(10, 12)=-0.5364932E+03
M(10, 13)= 0.9167792E-05	C(10, 13)=-0.2105933E-01	K(10, 13)=-0.2957669E+04
M(11, 11)= 0.1379140E-04	C(11, 11)= 0.5713407E-02	K(11, 11)= 0.7734399E+03
M(11, 12)=-0.3302987E-05	C(11, 12)=-0.1441824E-03	K(11, 12)=-0.1852159E+02
M(11, 13)=-0.9589858E-06	C(11, 13)= 0.2817493E-03	K(11, 13)= 0.3888660E+01
M(12, 12)= 0.5881925E-04	C(12, 12)= 0.1196865E-01	K(12, 12)= 0.1568555E+04
M(12, 13)= 0.2480243E-05	C(12, 13)=-0.9292879E-03	K(12, 13)=-0.6133618E+02
M(13, 13)= 0.3427907E-04	C(13, 13)= 0.3480474E-01	K(13, 13)= 0.4744855E+04

6. 3. 2. g 精度の検討

表6-3-8に、測定点数4点、5点、6点、8点、13点のそれぞれで400Hzまでのデータを用いて同定して得られた剛性行列と質量行列（いずれも正定値行列。表6-3-1~6-3-3、および表6-3-5参照）から求めた固有振動数を示す。同定周波数範囲内の固有振動数（1次から3次まで）に関してはすべて良く一致している。測定範囲より高い部分についても、測定点が多くなるに従って低次側から正解値に近い値として得られることがわかる。

表6-3-9には、測定点13点の1000Hzまでの同定で得た剛性行列と質量行列によって得た固有振動数を示す。この場合も同定周波数範囲の固有振動数は良く一致している。

図6-3-2には、4点、6点および13点の同定により求めた特性行列を用いて、節点7番を励振したときの自己応答（節点7番の応答）を示す。実線がシミュレーションの結果、破線は表6-3-1に示す4節点同定の行列を用いた結果、二点鎖線が表6-3-3に示す6節点同定の行列を用いた結果、そして、一点鎖線が13節点同定の行列を用いた結果である。これから、測定点の多い同定行列の方が良いことがわかる。特に13点で同定した行列を用いた結果は、ほぼ完全にシミュレーション結果と一致している。

図6-3-3は、13節点で1000Hzまでの同定によって得られた行列を用いた場合の周波数応答である。実線がシミュレーションの結果であり、破線が同定された行列を用いた結果である。両者は、図上では区別できないほど完全に一致している。

表6-3-3と表6-3-4を比較すると、表6-3-4の減衰行列の各成分は、それに対応する表6-3-3の成分のほぼ2倍の数値となっている。また、質量行列と剛性行列の各成分に関しては、両表の値はほぼ一致している。これからシミュレーションにおいて比例減衰係数を $\alpha = 8 \text{ s}^{-1}$ 、 $\beta = 7 \times 10^{-6} \text{ s}$ とした場合の結果（表3）と $\alpha = 14 \text{ s}^{-1}$ 、 $\beta = 14 \times 10^{-6} \text{ s}$ （前者の2倍）とした場合の結果（表6-3-4）は、ほぼ完全にその物理特性の変化を同定できることがわかる。

図6-3-4には、表6-3-4を用いたときの節点7番の自己応答を示す。実線がシミュレーションの結果、破線が同定された行列を用いた結果である。両者は良く一致している。

たとえデータ数が十分多くとも、式(6-1-8)と式(6-1-9)を両方用いなければ、特性行列が正定値行列となることは保証できない。そこで、式(6-1-9)を用いることによる効果を検討する。式(6-1-9)を用いずに、式(6-1-8)のみを用いて5測定点（節点番号1、7、17、20、35）によって同定した特性行列の上三角形部分の成分を表6-3-10に示す。また、同じく6測定点（節点番号1、7、17、20、35、39）による結果を表6-3-11に示す。表6-3-10と6-3-11の行列の

性質を調べると、剛性行列は正定値行列として求まっているが質量行列と減衰行列は正定値行列でない。特に質量行列が正定値行列として求まっていないことは、物理現象と矛盾しており、あまり良い同定結果とはいえない。図6-3-5と図6-3-6にはこれら表6-3-10、6-3-11に示す行列を用いて節点7番を励振した時の節点1番の応答（面外変位）の伝達関数と節点7番の応答の伝達関数（自己伝達関数）を、それぞれ示す。どちらの図においても、実線がシミュレーションの結果、一点鎖線が5点による同定行列（表6-3-10）を用いた結果、破線が6点同定の行列（表6-3-11）を用いた結果である。図6-3-6と図6-3-2を比較すればわかるように、式（6-1-9）を用いない場合には、行列が正定値として求まらないだけでなく、応答の精度も悪化する。また、図6-3-5と図6-3-6より、著しく精度の悪い位置は、反共振の谷の部分になることがわかる。この原因は決定した行列が表現する固有モードのうち、測定範囲外となる高次モードに対応するものが精度良く求まっていないことによる。以上より本システム同定法において、式（6-1-9）を加えることは、同定行列を正定値行列として求めることができる、という点と、それらの行列の対象物についての動特性の表現精度が向上する、という2点において有効であることがわかる。

次に、本方法で求められた行列を用いて、境界条件を変えた場合の応答を計算してみる。13節点の1000Hzまで同定した行列を用いて、節点1番と33番の二箇所面の面外変位に相当する自由度を固定した場合の応答を計算する。

図6-3-7に、節点7番を励振した時の節点7番の応答の伝達関数（自己伝達関数）を示す。実線がシミュレーションの結果、破線が同定した行列を用いて境界条件変更後の応答を計算した結果である。両者はたいへん良く一致している。このように、提案する同定法で求めた特性行列を用いれば、境界条件の違う状態の動特性も精度良く解析できることがわかる。このことは、ある対象物について、一度だけ精度良く実験し、システム同定法で特性行列を求めて、それらをデータベースの情報として保存することによって、その対象物に関する各種境界条件下の各種計算に利用できることを意味する。また、大形大重量構造物などに対して特に有効と思われるが、何らかの支持状態で実験し、システム同定法で特性行列を求め、その行列から支持装置分の成分を差引くことによって、周辺自由状態での対象物自体の特性行列を求めることができる。

なお、計算時間については、400Hzまでの同定において、4節点の場合（表6-3-1）で0.49s、5節点の場合（表6-3-2）では0.93s、6節点の場合（表6-3-3または表6-3-4）においては1.72s、8節点の場合（表6-3-5）で5.41s、13節点の場合では49.1sであった。また1000Hzまで13節点同定の場合では106sであった（ただし、著者作成のプログラムで HITAC-M280H システム使用）。

本方法においては、大自由度の連立方程式を精度良く、できるだけ小さな計

算機容量で、しかもできるだけ短い計算時間で解けるアルゴリズムを開発し、そのモジュールプログラムを作成することが重要である。

表 6-3-8 400 Hz まで同定の固有振動数

Order	Exact	MK4	MK5	MK6	MK8	MK13A
1	43	43	43	43	43	43
2	166	166	166	166	166	166
3	271	269	270	270	270	270
4	551	1027	632	583	592	556
5	757		1095	887	816	769
6	908			1130	1133	967
7	1086				1475	1154
8	1283				2352	1521
9	1521					1634
10	1527					2143
11	1826					2470
12	1912					2679
13	2373					3075

(Hz)

MK4~MK13A: Analyzed with mass and stiffness matrices identified with data from 5 Hz to 400 Hz.

MK4: 4 nodal points (1,7,20,35).

MK5: 5 nodal points (1,7,7,20,35).

MK6: 6 nodal points (1,7,17,20,35,39).

MK8: 8 nodal points (1,7,10,17,20,30,35,39)

MK13A: 13 nodal points (1,4,7,10,14,17,20,23,26,30,33,35,39)

表 6 - 3 - 9 1000 Hz まで同定の固有振動数

Order	Exact	MK13B
1	45	43
2	166	166
3	271	270
4	551	550
5	757	755
6	908	919
<hr/>		
7	1086	1097
8	1283	1416
9	1521	1573
10	1527	1913
11	1826	2135
12	1912	2504
13	2373	2513

MK13B: Analyzed with mass and stiffness matrices identified with data from 5 Hz to 1000 Hz at 15 nodal points (1, 4, 7, 10, 14, 17, 20, 25, 26, 30, 35, 35, 59).

(Hz)

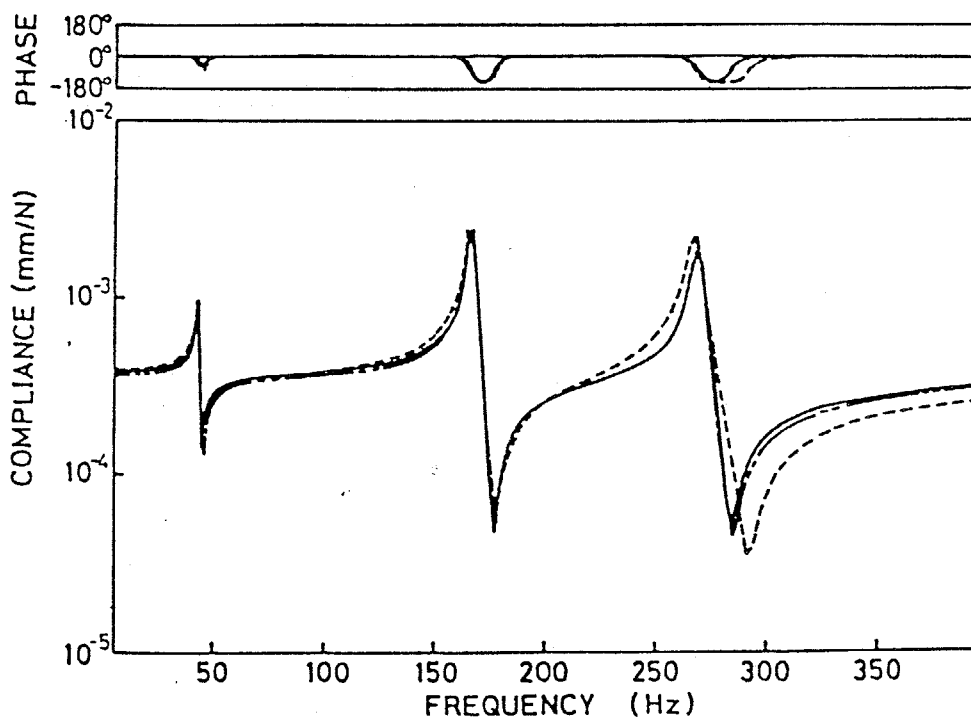


図 6 - 3 - 2 節点 7 番の自己応答 (400 Hz まで)

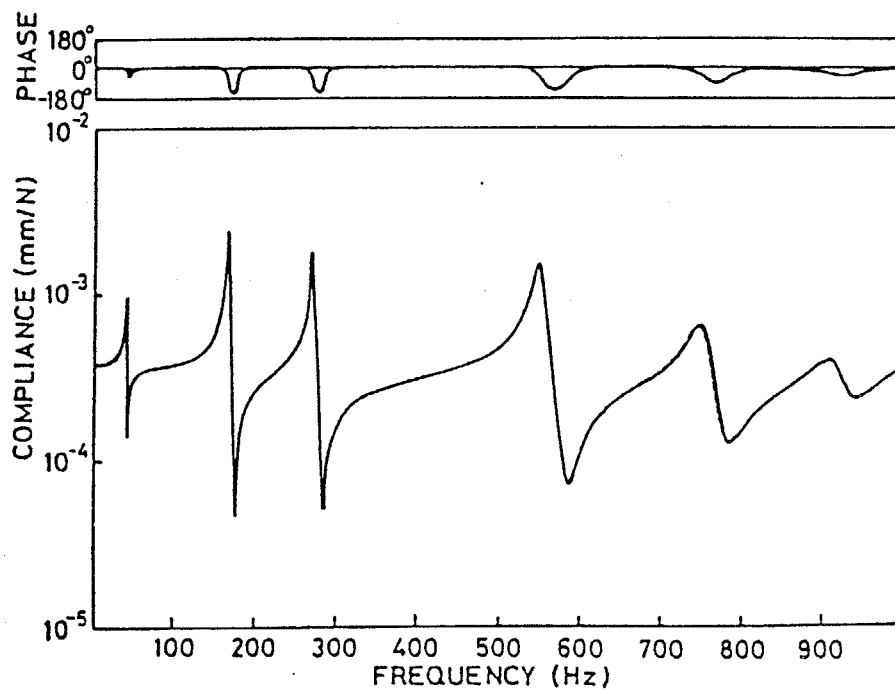


図 6 - 3 - 3 節点 7 番の自己応答 (1000 Hz まで)

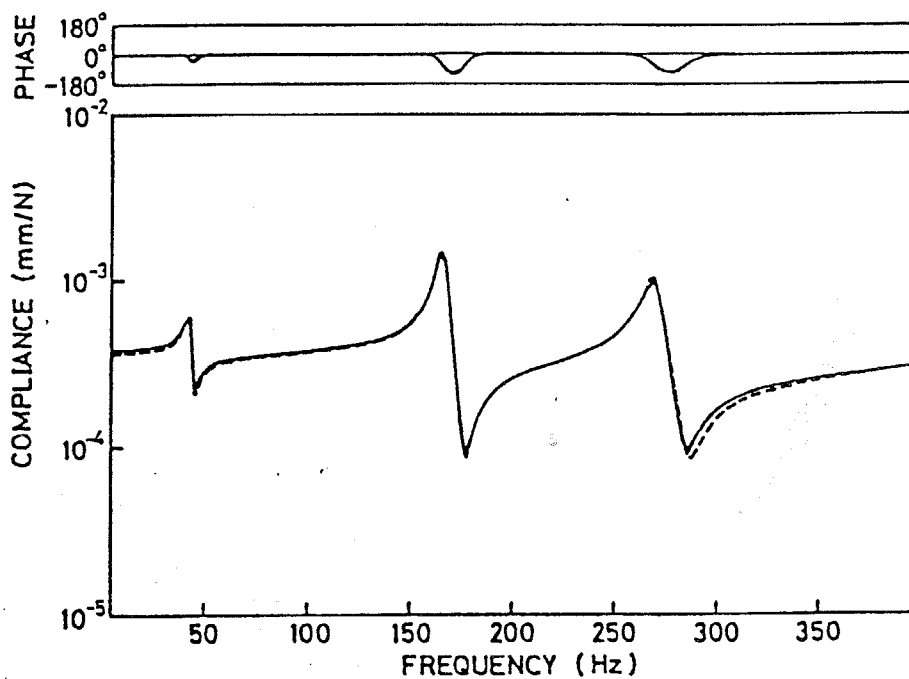


図 6 - 3 - 4 節点 7 番の自己応答 (表 4 使用)

表6-3-10 測定点5点による同定特性行列 (式(9)不使用)
(単位: $M = \text{Ns}^2/\text{mm}$ 、 $C = \text{Ns}/\text{mm}$ 、 $K = \text{N}/\text{mm}$)

$M(1,1) = 0.2161568\text{E}-04$	$C(1,1) = -0.2215916\text{E}+01$	$K(1,1) = 0.2617787\text{E}+03$
$M(1,2) = 0.1012140\text{E}-03$	$C(1,2) = 0.9331534\text{E}+01$	$K(1,1) = -0.5358193\text{E}+02$
$M(1,3) = 0.3479129\text{E}-04$	$C(1,3) = 0.2995809\text{E}+01$	$K(1,3) = -0.2779121\text{E}+03$
$M(1,4) = 0.6306277\text{E}-04$	$C(1,4) = -0.1483886\text{E}+00$	$K(1,4) = -0.2532060\text{E}+03$
$M(1,5) = -0.4869518\text{E}-04$	$C(1,5) = -0.1614156\text{E}+01$	$K(1,6) = 0.2170640\text{E}+03$
$M(2,2) = 0.2165851\text{E}-03$	$C(2,2) = 0.1162169\text{E}+02$	$K(2,2) = 0.3194238\text{E}+04$
$M(2,3) = -0.1042534\text{E}-03$	$C(2,3) = -0.1093784\text{E}+02$	$K(2,3) = 0.8704628\text{E}+02$
$M(2,4) = 0.3371846\text{E}-04$	$C(2,4) = -0.1472211\text{E}+02$	$K(2,4) = -0.5550356\text{E}+03$
$M(2,5) = 0.5711700\text{E}-04$	$C(2,5) = 0.1264823\text{E}+02$	$K(2,5) = 0.2041161\text{E}+03$
$M(3,3) = 0.7826144\text{E}-04$	$C(3,3) = -0.3992040\text{E}+01$	$K(3,3) = 0.4663216\text{E}+03$
$M(3,4) = -0.5807365\text{E}-05$	$C(3,4) = -0.3062324\text{E}+00$	$K(3,4) = -0.2701851\text{E}+02$
$M(3,5) = 0.7077521\text{E}-04$	$C(3,5) = 0.2374137\text{E}+01$	$K(3,5) = -0.2722043\text{E}+03$
$M(4,4) = 0.6228230\text{E}-03$	$C(4,4) = 0.4630481\text{E}+01$	$K(4,4) = 0.1483463\text{E}+04$
$M(4,5) = -0.6059050\text{E}-04$	$C(4,5) = -0.1875286\text{E}+01$	$K(4,5) = -0.5240725\text{E}+03$
$M(5,5) = 0.1256764\text{E}-03$	$C(5,5) = -0.4994179\text{E}+00$	$K(5,5) = 0.4807440\text{E}+03$

表6-3-11 測定点6点による同定特性行列 (式(9)不使用)
(単位: $M = \text{Ns}^2/\text{mm}$ 、 $C = \text{Ns}/\text{mm}$ 、 $K = \text{N}/\text{mm}$)

$M(1,1) = 0.2459239\text{E}-04$	$C(1,1) = -0.1864435\text{E}+01$	$K(1,1) = 0.2629613\text{E}+03$
$M(1,2) = 0.8029700\text{E}-04$	$C(1,2) = 0.6879708\text{E}+01$	$K(1,2) = -0.5294976\text{E}+02$
$M(1,3) = 0.2733016\text{E}-04$	$C(1,3) = 0.2441621\text{E}+01$	$K(1,3) = -0.2776506\text{E}+03$
$M(1,4) = 0.6654153\text{E}-04$	$C(1,4) = 0.2197470\text{E}+00$	$K(1,4) = -0.2570561\text{E}+03$
$M(1,5) = -0.4300062\text{E}-04$	$C(1,5) = -0.1402365\text{E}+01$	$K(1,5) = 0.2152385\text{E}+03$
$M(1,6) = -0.2171093\text{E}-04$	$C(1,6) = -0.5888254\text{E}+00$	$K(1,6) = 0.4698156\text{E}+02$
$M(2,2) = -0.4434880\text{E}-04$	$C(2,2) = -0.2063700\text{E}+02$	$K(2,2) = 0.3178374\text{E}+04$
$M(2,3) = -0.1067766\text{E}-03$	$C(2,3) = -0.1092899\text{E}+02$	$K(2,3) = 0.9183458\text{E}+02$
$M(2,4) = 0.1547038\text{E}-03$	$C(2,4) = 0.2850520\text{E}-01$	$K(2,4) = -0.5582096\text{E}+03$
$M(2,5) = 0.2977674\text{E}-04$	$C(2,5) = 0.8700591\text{E}+01$	$K(2,5) = 0.1926355\text{E}+03$
$M(2,6) = -0.2143898\text{E}-03$	$C(2,6) = -0.2377974\text{E}+02$	$K(2,6) = 0.1222761\text{E}+03$
$M(3,3) = 0.8010871\text{E}-04$	$C(3,3) = -0.3626959\text{E}+01$	$K(3,3) = 0.4712968\text{E}+03$
$M(3,4) = 0.5822649\text{E}-05$	$C(3,4) = 0.6923743\text{E}+00$	$K(3,4) = -0.3570607\text{E}+02$
$M(3,5) = 0.7164199\text{E}-04$	$C(3,5) = 0.2145056\text{E}+01$	$K(3,5) = -0.2900500\text{E}+03$
$M(3,6) = -0.5410353\text{E}-04$	$C(3,6) = -0.3839653\text{E}+01$	$K(3,6) = 0.1123510\text{E}+03$
$M(4,4) = 0.5767838\text{E}-03$	$C(4,4) = -0.1306136\text{E}+01$	$K(4,4) = 0.1504419\text{E}+04$
$M(4,5) = -0.5998655\text{E}-04$	$C(4,5) = -0.1111205\text{E}+01$	$K(4,5) = -0.5063494\text{E}+03$
$M(4,6) = 0.9294233\text{E}-04$	$C(4,6) = 0.1198728\text{E}+02$	$K(4,6) = -0.2624456\text{E}+03$
$M(5,5) = 0.1160977\text{E}-03$	$C(5,5) = -0.9233347\text{E}+00$	$K(5,5) = 0.4948783\text{E}+03$
$M(5,6) = 0.4672681\text{E}-04$	$C(5,6) = 0.1968839\text{E}+01$	$K(5,6) = -0.2282157\text{E}+03$
$M(6,6) = -0.2482747\text{E}-03$	$C(6,6) = -0.4709224\text{E}+02$	$K(6,6) = 0.3254596\text{E}+04$

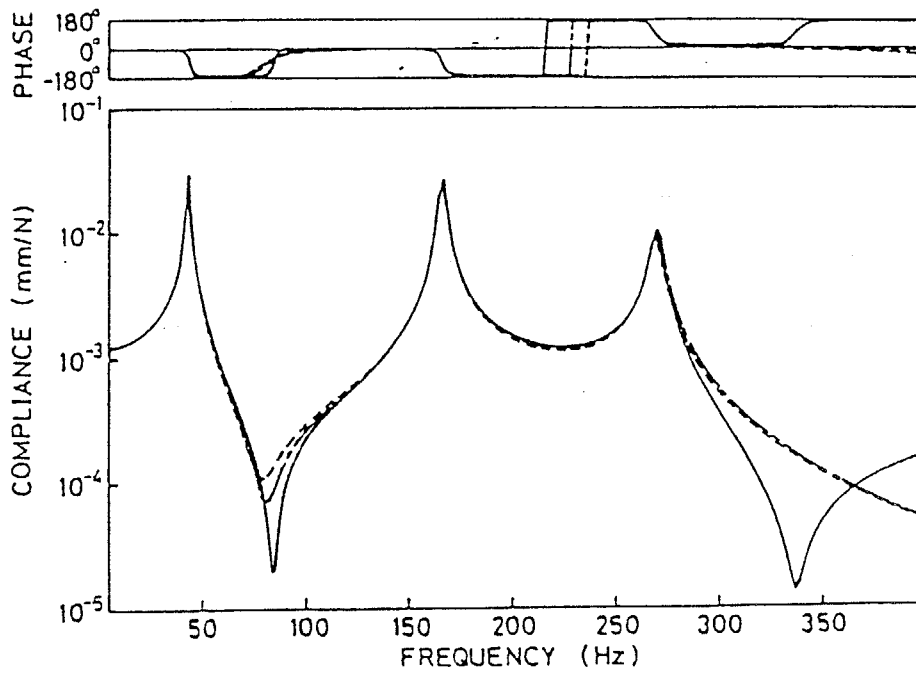


図6-3-5 節点1番の伝達関数
(励振点7番) (表8、9使用)

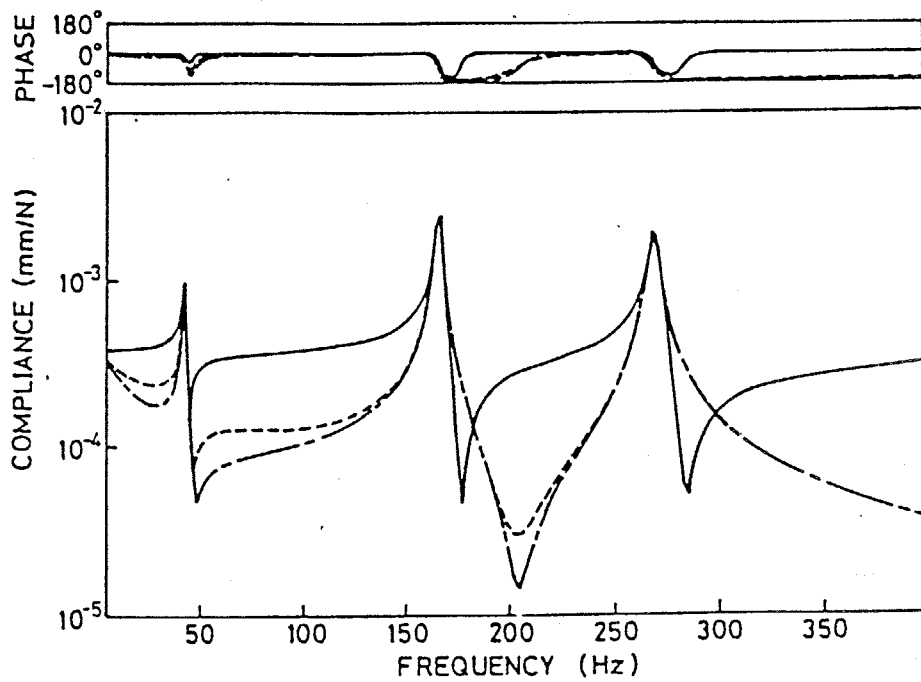


図6-3-6 節点7番の自己応答 (表8、9使用)

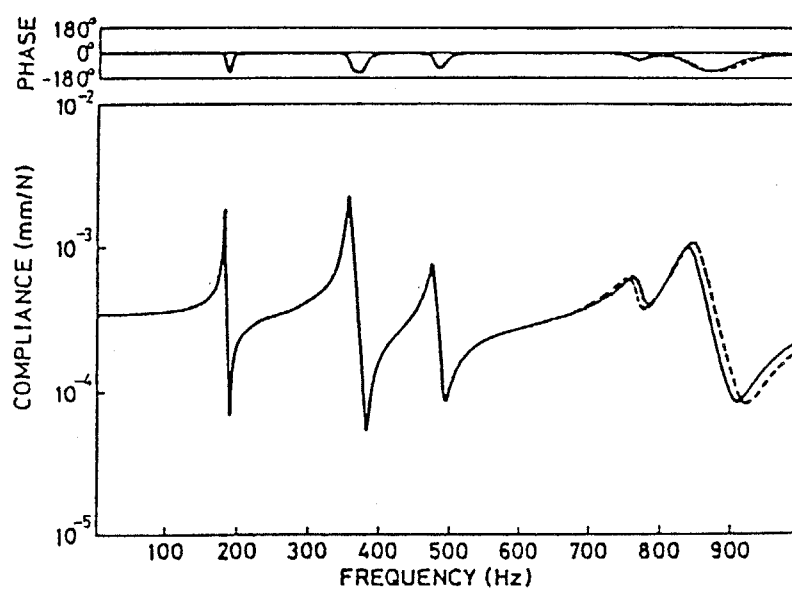


図6-3-7 節点7番の自己応答
(節点1、33の面外方向変位を拘束)

6.4 誤差を含むデータからの同定

6.4.1 理論

定常励振を受ける多自由度系（ n 自由度）について考える。励振周波数 ω_i で励振力ベクトル $\{F^{(i)}\}$ によって振動試験を行い、変位応答 $\{Y^{(i)}\}$ を得たとする。この振動測定結果のうち、励振周波数 ω_i と励振力 $\{F^{(i)}\}$ は誤差を持たず、変位応答 $\{Y^{(i)}\}$ のみが誤差を含んで測定されるものと仮定する。振動試験において生じる誤差の主なものとしては2種類考えられる。1つは系統誤差、もう1つは偶然誤差である。

系統誤差としては、計測器の不具合や感度校正のずれによって生じる誤差などがある。たとえばセンサの感度校正にずれを生じたまま測定しても、得られる測定データのみからは、この種の誤差の混入を発見することは困難であり、通常は測定者の経験等によって判明する。しかし、系統誤差は実験技術の向上や作業者の注意により除くことができる。そこで、ここでは、変位応答 $\{Y^{(i)}\}$ は系統誤差を含んでいないと仮定する。

偶然誤差は、外乱などによって生じる誤差であり、通常白色雑音とみなせる。この種の雑音の混入を完全になくすことは困難である。そこで、変位応答 $\{Y^{(i)}\}$ には、この偶然誤差が混入していると仮定する。

仮に、励振周波数 ω_i で励振力 $\{F^{(i)}\}$ に対する応答を無限回測定すると、測定変位応答 $\{Y^{(i)}\}$ は正規分布になる（誤差は偶然誤差のみだから）。そこで、その分布の母平均を $\{y^{(i)}\}$ 、母分散を $\{\sigma^2(y^{(i)})\}$ とする（ただし、母平均と母分散は共に、実際には知り得ない値である）。

一般的には励振力も応答も複素数となるので、それらを実部と虚部に分離して実数で表現すると、

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \Phi^{(i)} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \left\{ Y_R^{(i)} \right\} \\ \left\{ Y_I^{(i)} \right\} \end{array} \right\} \\ \left\{ \Gamma^{(i)} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \left\{ F_R^{(i)} \right\} \\ \left\{ F_I^{(i)} \right\} \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6-4-1)$$

実数ベクトル $\{\Phi^{(i)}\}$ は自由度が $2n$ で、上部 n 自由度に $\{Y^{(i)}\}$ の実部の成分、下部 n 自由度に $\{Y^{(i)}\}$ の虚部の成分をあてはめた応答変位ベクトルである。励振力についても同様に $\{\Gamma^{(i)}\}$ で表す。これに伴って、母平均 $\{y^{(i)}\}$ と母分散 $\{\sigma^2(y^{(i)})\}$ も次のように実部と虚部に分散して表現する。

$$\left. \begin{aligned} \{\varphi^{(i)}\} &= \left\{ \begin{array}{l} \{y_R^{(i)}\} \\ \{y_I^{(i)}\} \end{array} \right\} \\ \{\sigma^2(\varphi^{(i)})\} &= \left\{ \begin{array}{l} \{\sigma^2(y_R^{(i)})\} \\ \{\sigma^2(y_I^{(i)})\} \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6-4-2)$$

励振周波数 ω_i で励振力 $\{\Gamma^{(i)}\}$ を供試体に加えることによって応答変位 $\{\Phi^{(i)}\}$ が測定されたとする。この測定行為を数学的に表現し直せば、母平均が $\{\varphi^{(i)}\}$ で母分散が $\{\sigma^2(\varphi^{(i)})\}$ の正規分布から取り出した1つの標本が $\{\Phi^{(i)}\}$ であるとなる。そこで、応答変位の標本 $\{\Phi^{(i)}\}$ が得られる確率密度 $Q^{(i)}$ は⁽³²⁾

$$Q^{(i)} = \prod_{j=1}^{2n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(\varphi_j^{(i)})} \exp\left\{-\frac{(\Phi_j^{(i)} - \varphi_j^{(i)})^2}{2\sigma^2(\varphi_j^{(i)})}\right\} \right] \quad (6-4-3)$$

ここで、式(6-4-3)において添字 j は各ベクトルの上から j 番目の成分を意味する。たとえば $\Phi_j^{(i)}$ は、応答変位ベクトル $\{\Phi^{(i)}\}$ の上から j 番目の成分である。

振動試験で、励振周波数を ω から ω まで変化させて、励振力 $\{\Gamma^{(i)}\}$ に対する応答変位 $\{\Phi^{(i)}\}$ ($i=1\sim N$)を得たとすると、それらのデータが得られる確率密度 R は式(6-4-3)の i を1から N まで変えた値をすべて乗ずることによって得られる。すなわち、

$$R = \prod_{i=1}^N \left[\prod_{j=1}^{2n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(\varphi_j^{(i)})} \exp\left\{-\frac{(\Phi_j^{(i)} - \varphi_j^{(i)})^2}{2\sigma^2(\varphi_j^{(i)})}\right\} \right) \right] \quad (6-4-4)$$

変位応答として $\{\Phi^{(i)}\}$ ($i=1\sim N$)が得られた理由としては、その測定時点において式(6-4-4)で示される確率密度が極大であったから、と考えるのが妥当である。そこで、得られた応答変位 $\{\Phi^{(i)}\}$ ($i=1\sim N$)を式(6-4-4)に代入して R の値を極大にするような $\{\varphi^{(i)}\}$ ($i=1\sim N$)を求めれば、その $\{\varphi^{(i)}\}$ は真実の応答変位としての最もよい推定値である(真の応答変位は決してわからない)。

式(6-4-4)を極大にするには、次式を極小にすればよい。

$$S = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^{2n} \frac{(\Phi_j^{(i)} - \varphi_j^{(i)})^2}{2\sigma^2(\varphi_j^{(i)})} \right) \quad (6-4-5)$$

そこで、式(6-4-5)の値を極小にする $\{\varphi^{(i)}\}$ ($i = 1 \sim N$) を求める。ただし、求めるべき $\{\varphi^{(i)}\}$ は任意のベクトルではなく、次に示すような関係式を満足するベクトルでなければならない。

$$\begin{bmatrix} [K] - \omega_i^2 [M] & -\omega_i [C] \\ \omega_i [C] & [K] - \omega_i^2 [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi^{(i)} \\ \Gamma^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6-4-6)$$

以上から、特性行列の実験的決定による系の同定法の理論は、式(6-4-6)を常に満足し、かつ式(6-4-5)の値を極小にする $\{\varphi^{(i)}\}$ ($i = 1 \sim N$) と特性行列 $[K]$ 、 $[M]$ および $[C]$ を求める、という数学的問題に帰着させることができる。

ここでは、以下に説明するように、ラグランジュの乗数法⁽³⁹⁾を利用してこの問題を解く。式(6-4-6)の制約条件のもとで、式(6-4-5)の S の値を極小にするには、

$$\begin{aligned} T = \sum_{i=1}^N & \left[\sum_{j=1}^{2n} \frac{(\Phi_j^{(i)} - \varphi_j^{(i)})^2}{2\sigma^2(\varphi_j^{(i)})} - \zeta^{(i)} \right]^t \\ & \times \left\{ \begin{bmatrix} [K^{(1)}] & 0 \\ 0 & [K^{(2)}] \end{bmatrix} - \omega_i^2 \begin{bmatrix} [M^{(1)}] & 0 \\ 0 & [M^{(2)}] \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \omega_i \begin{bmatrix} 0 & -[C^{(1)}] \\ [C^{(2)}] & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \varphi^{(i)} \\ \Gamma^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (6-4-7) \end{aligned}$$

で表わされる T の値を極小にすればよい。すなわち、式(6-4-7)を極小にするような $\{\varphi^{(i)}\}$ ($i = 1 \sim N$) と特性行列 $[K]$ 、 $[M]$ 、 $[C]$ を求めれば、それらは式(6-4-5)を式(6-4-6)の制約条件を満たしながら極小にする。

(6-4-7)において、各特性行列の肩につけた添字は計算の便宜上用いているものであり、 $[K] = [K^{(1)}] = [K^{(2)}]$ 、 $[M] = [M^{(1)}] = [M^{(2)}]$ 、 $[C] = [C^{(1)}] = [C^{(2)}]$ となる。

さて、式(6-4-7)を極小にするように $\{\varphi^{(i)}\}$ ($i = 1 \sim N$) と全特性行列を求めることにする。式(6-4-7)が極小となるには、以下に示す式

(6-4-8) から式 (6-4-14) が同時に満足されればよい。

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial T}{\partial \{\varphi^{(i)}\}} &= \left[\frac{1}{\sigma^2(\varphi^{(i)})} \right] \left\{ \Phi^{(i)} - \varphi^{(i)} \right\} + \left(\begin{bmatrix} [K^{(1)}]^T & 0 \\ 0 & [K^{(2)}]^T \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. - \omega_i^2 \begin{bmatrix} [M^{(1)}]^T & 0 \\ 0 & [M^{(2)}]^T \end{bmatrix} + \omega_i \begin{bmatrix} 0 & [C^{(2)}]^T \\ -[C^{(1)}]^T & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &\quad \times \left\{ \zeta^{(i)} \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad (6-4-8)
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial T}{\partial k_{uw}^{(1)}} = \sum_{i=1}^N \zeta_u^{(i)} \varphi_w^{(i)} = 0 \quad (6-4-9)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial m_{uw}^{(1)}} = -\sum_{i=1}^N \omega_i^2 \zeta_u^{(i)} \varphi_w^{(i)} = 0 \quad (6-4-10)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial c_{uw}^{(1)}} = -\sum_{i=1}^N \omega_i \zeta_u^{(i)} \varphi_{w+n}^{(i)} = 0 \quad (6-4-11)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial k_{uw}^{(2)}} = \sum_{i=1}^N \zeta_{u+n}^{(i)} \varphi_{w+n}^{(i)} = 0 \quad (6-4-12)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial m_{uw}^{(2)}} = -\sum_{i=1}^N \omega_i^2 \zeta_{u+n}^{(i)} \varphi_{w+n}^{(i)} = 0 \quad (6-4-13)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial c_{uw}^{(2)}} = \sum_{i=1}^N \omega_i \zeta_{u+n}^{(i)} \varphi_w^{(i)} = 0 \quad (6-4-14)$$

式 (6-4-8) から (6-4-14) において、 $k_{uw}^{(1)}$ 、 $k_{uw}^{(2)}$ 、 $m_{uw}^{(1)}$ 、 $m_{uw}^{(2)}$ 、 $c_{uw}^{(1)}$ 、 $c_{uw}^{(2)}$ はそれぞれ特性行列 $[K^{(1)}]$ 、 $[K^{(2)}]$ 、 $[M^{(1)}]$ 、 $[M^{(2)}]$ 、 $[C^{(1)}]$ 、 $[C^{(2)}]$ の u 行 w 列の成分を表す。また $\zeta_u^{(i)}$ と $\varphi_w^{(i)}$ はそれぞれベクトル $\{\zeta^{(i)}\}$ と $\{\varphi^{(i)}\}$ の第 u 成分と第 w 成分を表す。

特性行列が対角であることや $[K] = [K^{(1)}] = [K^{(2)}]$ 等の関係を考慮に入れなければ、未知数の数は、特性行列の成分として $6n^2$ 個、 $\{\varphi^{(i)}\}$ ($i=1 \sim N$) の成分として $2nN$ 個、さらに式 (6-4-7) の中で用いた係数ベクトル $\{\xi^{(i)}\}$ ($i=1 \sim N$) の成分として $2nN$ 個、の合計 ($4nN + 6n^2$) 個である。他方それらの未知数を求めるための方程式の数は、式 (6-4-8) から $2nN$ 個、式 (6-4-9) から式 (6-4-14) において $6n^2$ 個、さらに式 (6-4-6) から $2nN$ 個、の合計 ($4nN + 6n^2$) 個である。そこで原理的には連立方程式によって解くことはできるが、非線形の連立方程式となり、かつ、未知数の数が多いので、直接求めることは困難である。

そこで反復法⁽⁴⁰⁾でこれを解く。まず、それぞれの未知数を次のように示す。

$$\{\varphi^{(i)}\} = \{\bar{\varphi}^{(i)}\} + \{d\varphi^{(i)}\} \quad (i=1 \sim N) \quad (6-4-15)$$

$$[K] = [\bar{K}] - [dK] \quad (6-4-16)$$

$$[M] = [\bar{M}] - [dM] \quad (6-4-17)$$

$$[C] = [\bar{C}] - [dC] \quad (6-4-18)$$

$\{\bar{\varphi}^{(i)}\}$ 、 $[\bar{K}]$ 、 $[\bar{M}]$ および $[\bar{C}]$ は、それぞれの初期値であり、 $\{d\varphi^{(i)}\}$ 、 $[dK]$ 、 $[dM]$ 、 $[dC]$ は増分を表す。

式 (6-4-15) を式 (6-4-8) に代入し、未知の特性行列には初期値を代入して、 $\{d\varphi^{(i)}\}$ を求める。

$$\begin{aligned} \{d\varphi^{(i)}\} = & \{\Phi^{(i)}\} - \{\bar{\varphi}^{(i)}\} + \sigma^2(\varphi^{(i)}) \left(\begin{array}{c} [\bar{K}^{(1)}]^T \quad 0 \\ 0 \quad [\bar{K}^{(2)}]^T \end{array} \right) \\ & - \omega_i^2 \begin{bmatrix} [\bar{M}^{(1)}]^T & 0 \\ 0 & [\bar{M}^{(2)}]^T \end{bmatrix} + \omega_i \begin{bmatrix} -[C^{(1)}]^T & [C^{(2)}]^T \end{bmatrix} \left. \right) \{\xi^{(i)}\} \quad (6-4-19) \end{aligned}$$

一方、式 (6-4-6) を $\{\bar{\varphi}^{(i)}\}$ 、 $[\bar{K}]$ 、 $[\bar{M}]$ 、 $[\bar{C}]$ の近くでテイラ-展開して一次の項までとると、

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [\bar{K}^{(1)}] - \omega_i^2 [\bar{M}^{(1)}] & -\omega_i [\bar{C}^{(1)}] \\ \omega_i [\bar{C}^{(2)}] & [\bar{K}^{(2)}] - \omega_i^2 [\bar{M}^{(2)}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}^{(i)} \\ \Gamma^{(i)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}^{(i)} \\ \Gamma^{(i)} \end{Bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} [\bar{K}^{(1)}] - \omega_i^2 [\bar{M}^{(1)}] & -\omega_i [\bar{C}^{(1)}] \\ \omega_i [\bar{C}^{(2)}] & [\bar{K}^{(2)}] - \omega_i^2 [\bar{M}^{(2)}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\bar{\varphi}^{(i)} \\ \Gamma^{(i)} \end{Bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} [dK^{(1)}] - \omega_i^2 [dM^{(1)}] & -\omega_i [dC^{(1)}] \\ \omega_i [dC^{(2)}] & [dK^{(2)}] - \omega_i^2 [dM^{(2)}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}^{(i)} \\ \Gamma^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6-4-20)
\end{aligned}$$

式(6-4-19)を式(6-4-20)に代入して $\{\xi^{(i)}\}$ を求める。ここでは、便宜的に、

$$[A] = \begin{bmatrix} [\bar{K}^{(1)}] - \omega_i^2 [\bar{M}^{(1)}] & -\omega_i [\bar{C}^{(1)}] \\ \omega_i [\bar{C}^{(2)}] & [\bar{K}^{(2)}] - \omega_i^2 [\bar{M}^{(2)}] \end{bmatrix}^{-1} \quad (6-4-21)$$

を用いて $\{\xi^{(i)}\}$ を表すと、

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \xi^{(i)} \end{Bmatrix} &= [A]^T \Gamma \frac{1}{\sigma^2(\varphi^{(i)})} [A] \begin{Bmatrix} \Gamma^{(i)} \\ \Phi^{(i)} \end{Bmatrix} - [A]^T \Gamma \frac{1}{\sigma^2(\varphi^{(i)})} \begin{Bmatrix} \Phi^{(i)} \\ \Gamma^{(i)} \end{Bmatrix} \\
&+ [A]^T \Gamma \frac{1}{\sigma^2(\varphi^{(i)})} [A] \begin{bmatrix} [dK^{(1)}] - \omega_i^2 [dM^{(1)}] & -\omega_i [dC^{(1)}] \\ \omega_i [dC^{(2)}] & [dK^{(2)}] - \omega_i^2 [dM^{(2)}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}^{(i)} \\ \Gamma^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (6-4-22)
\end{aligned}$$

式(6-4-22)を式(6-4-9)から式(6-4-14)に代入して $[dK]$ 、 $[dM]$ および $[dC]$ に関する連立方程式を作成して解く。そして、求められた $[dK]$ 、 $[dM]$ および $[dC]$ を式(6-4-16)、(6-4-17)、(6-4-18)にそれぞれ代入すれば、初期値よりは正しい特性行列が得られる。また、これらの増分を式(6-4-22)に代入すれば $\{\xi\}$ が求まり、さらにその $\{\xi^{(i)}\}$ を式(6-4-19)に代入することによって $\{d\varphi^{(i)}\}$ を求めることができるので、式(6-4-15)より新しい $\{\varphi^{(i)}\}$ を得る。

このようにして、新しい特性行列を求めることができるが、1度の計算ではまだ最適な値になっているとは限らないので、それらを新たな初期値として、収束するまで反復する。

さて、上記の計算の中で使用する母分散として用いる値の理論的設定方法を記す。説明を簡潔にするために、周波数 ω_i における測定点 j の応答の実部の値に関する母分散の推定を例にとる。いま、 m 回の測定で点 j の応答の実部の値として a_k ($k=1 \sim m$)が得られ、それらには、偶然誤差のみが混入され

ているとすれば、これらは、未知の母平均 \bar{a} 、母分散 $\bar{\sigma}^2$ の正規分布から取り出した m 個の標本といえる。すると、これらのデータの組み合わせが得られる確率密度 B は、

$$B = \prod_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi} \bar{\sigma}} \exp\left\{-\frac{(a_k - \bar{a})^2}{2\bar{\sigma}^2}\right\} \quad (6-4-23)$$

となる。 a_k ($k=1 \sim m$) のデータが得られたのは、その時点で式(6-4-23)で表わす確率が最大だったからであると考え。そこで、式(6-4-23)を極大にするような \bar{a} と $\bar{\sigma}^2$ を求める。まず、 $\partial B / \partial \bar{a} = 0$ を計算することによって次の式が得られる。

$$\bar{a}' = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m a_k \quad (6-4-24)$$

\bar{a} は母平均の推定値として最も良い推定値である。 $\partial B / \partial \bar{\sigma} = 0$ を計算すると式(6-4-25)が得られる。

$$\bar{\sigma}'^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (a_k - \bar{a})^2 \quad (6-4-25)$$

さらに式(6-4-25)を変形すると、

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}'^2 &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \{(a_k - \bar{a}') + (\bar{a}' - \bar{a})\}^2 \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (a_k - \bar{a}')^2 + (\bar{a}' - \bar{a})^2 \end{aligned} \quad (6-4-26)$$

式(6-4-26)中の $(\bar{a}' - \bar{a})^2$ は、決して知り得ない \bar{a} を含んでいるので、 m を無限とした場合の期待値に置き換える。すると、それは a_k の標本分散($a_1 \sim a_m$ における分散)の m 分の1の値となるので、式(6-4-26)は、

$$\bar{\sigma}'^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (a_k - \bar{a}')^2 + \frac{1}{m} \bar{\sigma}'^2 \quad (6-4-27)$$

となる。そこで、

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (a_k - \bar{a}')^2 \quad (6-4-28)$$

が得られる。すなわち、母分散の推定値としては、測定データ a_k ($k=1 \sim m$) を用いて式 (6-4-28) によって求められる標本分散を用いるのが理論的に最も適している。ただし、測定を1回 ($m=1$) しかしない場合には式 (6-4-28) を計算することができないので、解析者の判断で適当に定義する。

この方法で注意する点としては、次のような事項がある。

- (1) 物理学的には特性行列は対称行列となるので、この性質を上記の式の展開に利用したくなるが、それを行うと収束しなくなる。その理由は、ラグランジュの乗数法において用いる複数個の制約条件式は互いに一次独立でなければならない、からである。対称行列の特性行列を求めるには、使用するデータの方で考慮するのがよい。すなわち、線形系のデータであれば成立する Maxwell の相反定理の性質を利用するのである。
- (2) 物理的には、特性行列は一般的に正定値行列となる（剛性行列と減衰行列は周辺自由状態では非負定値行列である）。このような物理的に正しい特性行列を得るためには、励振点をすべての測定点に換えて得られる測定データをすべて用いて計算を行う必要がある。
- (3) その場合、励振自由度は、式 (6-4-1) の $\{\Gamma^{(i)}\}$ でわかるように、 $2n$ となるが、この対処方法は次のように行う。すなわち、たとえば測定点 P のみを $f_R + 0j$ で励振した時の応答変位ベクトルが $\Phi_R + j\Phi_I$ のように得られたならば、同じ点 P のみを $0 + jf_R$ で励振すれば応答変位は $-\Phi_I + j\Phi_R$ のようになることは明らかであるので、この性質を利用して、計算過程でデータ数を2倍にして用いる。

6. 4. 2 シミュレーションによる検討 (その1 6自由度モデル)

[6. 4. 1] で提案する同定法の解析精度について基礎検討を行う。供試モデルの振動応答はシミュレーションして求め、それに任意の大きさのノイズを加えることによって作成する。このノイズを加えた振動応答データから本方法によって特性行列を同定する。

図6-4-1に示すモデルを対象にし、 k_i ($i = 1 \sim 6$) = 1×10 N/mm, m_i ($i = 1 \sim 6$) = 1 N s^2 /mm, C_i ($i = 1 \sim 6$) = 20 N s/mmとして振動応答のシミュレーションを行う。

6. 4. 2. a. 用いるデータ数と初期値設定

質点1に励振力1Nを加える時の応答変位を6Hzから1.5Hz間隔で330Hzまで計算し、これを入力データとして本同定法で特性行列を同定する。

ノイズを混入しない場合には、どのような初期値からも、使用データ(質点1を励振した時の質点1~6の応答)に完全に適合する応答を再現する特性行列が同定できた。しかし、初期値の違いによって同定される特性行列の値は違うことがわかった。

表6-4-1は、ある初期値から同定した特性行列である。質点1, 2および3を励振した時の応答データを用いてもまったく同じ現象が起きる。表6-4-2はその一例の特性行列である。この特性行列によれば、質点1, 2または3を励振する時の応答は正しく求められるが、他の点を励振する場合の応答は正しく求められない。このことは、入力データとして用いるすべての応答は完全に再現できる特性行列が同定されるが、それらは初期値の違いによって多種類(おそらく無限に)存在することを意味する。

それに対して、質点1~6までを励振した時の応答データをすべて用いる場合には、初期値をどのように選んでも真の特性行列と完全に一致する特性行列を1回の計算(反復無し)で同定できた。このことから、物理的に正しい特性行列を同定するためには、測定点のすべてをそれぞれ励振(多点同時励振でもよい)した時の応答データを用いる必要があることがわかる。そこで、以後の検討においては、すべての測定点をそれぞれ励振した時のデータをすべて用いる。

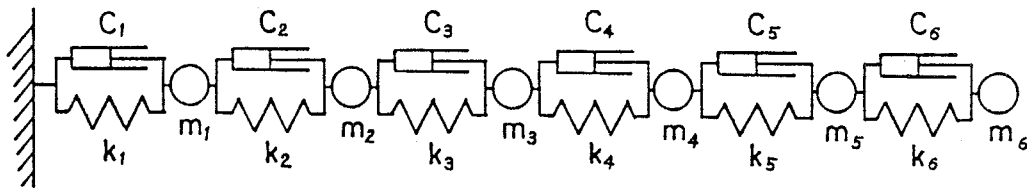


図 6 - 4 - 1 6 自由度系モデル

表 6 - 4 - 1 質点 1 を励振したときのデータのみ
から同定された特性行列

(K MATRIX)					
0.1716043D+07	-0.2544715D+06	-0.5298901D+06	-0.3497884D+05	-0.2408703D+06	0.3441697D+06
0.6142945D+06	-0.1468467D+07	0.1847248D+07	-0.1581422D+07	0.5239998D+06	0.6434716D+05
-0.1525853D+05	0.1129457D+05	0.3972581D+04	0.1524155D+06	-0.2854249D+06	0.1330007D+06
-0.2245766D+06	0.5413530D+06	-0.5096026D+06	0.4919289D+06	-0.4927393D+06	0.1936369D+06
-0.8712279D+05	-0.1047930D+06	0.3986890D+06	0.4444650D+06	-0.1079576D+07	0.4283377D+06
-0.6072984D+06	0.8138470D+06	-0.2320231D+07	0.5549615D+07	-0.5935171D+07	0.2499233D+07
(M MATRIX)					
0.1000002D+01	0.2839613D+00	-0.1776094D+00	-0.1092886D+00	-0.5990136D-02	0.3381794D+00
-0.2199217D-06	-0.6142975D+00	0.2398759D+00	-0.7532009D+00	-0.1648541D+00	-0.1005076D+00
0.1857826D-06	0.1525851D-01	0.1922261D-01	0.1921380D-01	-0.1332103D+00	-0.2096588D-03
0.5961950D-06	0.2245772D+00	-0.9219861D-01	0.1006277D+00	-0.1984745D+00	-0.4837626D-02
0.1120088D-05	0.8712308D-01	0.2790397D+00	0.7226560D-01	-0.5789721D+00	-0.1506348D+00
-0.3551082D-05	0.6073003D+00	0.4007436D+00	0.2514425D+01	-0.9215136D+00	0.1577720D+01
(C MATRIX)					
0.3432042D+02	-0.5089437D+01	-0.1059764D+02	-0.6999407D+00	-0.4817185D+01	0.6883218D+01
0.1228573D+02	-0.2936875D+02	0.3694395D+02	-0.3162749D+02	0.1047934D+02	0.1287137D+01
-0.3051847D+00	0.2259590D+00	0.7935749D-01	0.3048417D+01	-0.5708556D+01	0.2660041D+01
-0.4491573D+01	0.1082717D+02	-0.1019215D+02	0.9838703D+01	-0.9854835D+01	0.3872780D+01
-0.1742503D+01	-0.2095608D+01	0.7973370D+01	0.8889766D+01	-0.2159178D+02	0.8566860D+01
-0.1214492D+02	0.1627457D+02	-0.4640088D+02	0.1109890D+03	-0.1187010D+03	0.4998400D+02

表6-4-2 質点1、2、3を励振したときの
データのみから同定された特性行列

```
( K MATRIX )
0.2000003D+07 -0.9999998D+06 0.5830658D+04 -0.1303683D+06 -0.1208880D+05 0.1366248D+06
-0.9999993D+06 0.2000002D+07 -0.9884299D+06 -0.1987276D+06 0.5406933D+06 -0.3535369D+06
-0.7694941D+01 -0.1000004D+07 0.1832750D+07 0.1335694D+06 -0.5621809D+07 0.4655494D+07
-0.1042424D+02 -0.7055315D+01 0.1313700D+07 -0.5564643D+06 -0.8459103D+07 0.7701878D+07
0.2545746D+01 -0.2814281D+01 -0.7545635D+06 0.3754178D+07 -0.3396888D+07 0.3972769D+06
0.5897710D+03 0.4709438D+03 -0.6065495D+08 0.3591297D+07 0.5172154D+09 -0.4601523D+09

( M MATRIX )
0.1000002D+01 0.6678562D-06 -0.1531792D-05 -0.5833501D-02 0.1187017D+00 0.2553262D+00
0.1599547D-05 0.1000002D+01 0.1826423D-05 -0.1156872D-01 0.1755878D+00 -0.1779489D+00
-0.6201660D-05 -0.5378586D-05 0.9999966D+00 0.1672561D+00 -0.7990611D+00 0.3856431D+01
-0.9373705D-05 -0.9507318D-05 -0.3150714D-05 -0.1313690D+01 -0.2070917D+01 0.5630957D+01
0.4167725D-05 0.4714472D-05 0.1007562D-04 0.7545706D+00 -0.2245038D+01 -0.1847761D+01
0.5579691D-03 0.5961249D-03 0.2232441D-03 0.6065438D+02 0.1177176D+03 -0.3424345D+03

( C MATRIX )
0.3999999D+02 -0.1999995D+02 0.1168390D+00 -0.2607521D+01 -0.2416441D+00 0.2732333D+01
-0.1999999D+02 0.3999993D+02 -0.1976867D+02 -0.3974401D+01 0.1081397D+02 -0.7070612D+01
-0.2439409D-03 -0.1999962D+02 0.3665510D+02 0.2670712D+01 -0.1124354D+03 0.9310950D+02
-0.3561666D-03 0.3543782D-03 0.2627415D+02 -0.1112971D+02 -0.1691815D+03 0.1540375D+03
0.2299664D-03 -0.2631013D-03 -0.1509189D+02 0.7508476D+02 -0.6793867D+02 0.7945787D+01
0.2208115D-01 -0.2353344D-01 -0.1213110D+04 0.7185701D+02 0.1034427D+05 -0.9203040D+04
```

6. 4. 2. b. 誤差を混入したデータに対する精度と収束の速さ

応答変位データ（伝達関数）にいく通りかの大きさのノイズを加え、それを入力データとして特性行列を同定し、解析精度と収束の速さを調べる。ノイズの大きさは、真の伝達関数の絶対値の平均値に対する比率で表すことにする。

図6-4-2、6-4-3および6-4-4には、それぞれ10%、20%、30%のノイズを混入した応答データを用いて同定した特性行列によって再計算された伝達関数を示す（図6-4-2と6-4-4は質点1励振の質点2応答、図6-4-3は質点1励振の質点5応答）。実線は真の伝達関数、破線は同定に使用したノイズ混入の伝達関数である。一点鎖線が[6. 4. 1]で提案する方法によって同定した特性行列から計算した伝達関数である（図6-4-2、6-4-3、6-4-4においては実線で表す真の伝達関数とほぼ完全に一致している）。また、二点鎖線は同じ入力データを用いて[6. 3. 1]で提案した方法によって同定された特性行列から求めた伝達関数である。

図6-4-2から6-4-4を見ると、ノイズ混入データを用いても[6. 4. 1]で提案する方法はほぼ完全に正しい特性行列を同定できていることがわかる。他方、[6. 3. 1]で提案した方法では、解析精度がたいへん悪い。これからわかるように、[6. 4. 1]で提案する方法によれば、混入ノイズが正規分布するデータについては、理論説明でも述べたように、ほぼ完全にノイズ除去が行われ、正しい特性行列を同定することができる。

図6-4-5は、本方法の計算中において特性行列がどのように収束していくか、を示している。図の縦軸目盛は、式(6-4-5)で表現する自乗誤差の値である。実線は10%ノイズ混入の場合の計算、破線と一点鎖線はそれぞれ20%、30%のノイズ混入データを用いた場合の計算である。本方法ではほぼ指数関数的に収束していくことがわかる。

計算時間は、6 Hz から 1.5 Hz 間隔で 330 Hz までのデータを用いた本計算において、反復1回が約 17.36 秒であった（著者作成のプログラム、HITAC-M280Hシステム使用）。計算時間は、収束判定の厳しさの設定値にもよる。この場合の約10%のノイズ混入データに対しては、適当に与えた初期値から6回の反復計算で収束し、104秒かかった。それに対して、初期値として[6. 3. 1]の方法で求めた特性行列を用いると、反復回数が4回に減少した。なお、[6. 3. 1]の方法では、解析精度は悪いが、計算時間は短く、約1.9秒であった。このように本方法では、計算時間がかかることが欠点であり、今後の改良点の1つである。この点に関しては、収束の加速法の導入、プログラム上での計算過程の改良などの工夫を加えれば、今後かなり改善が期待できるのではないかと思われる。

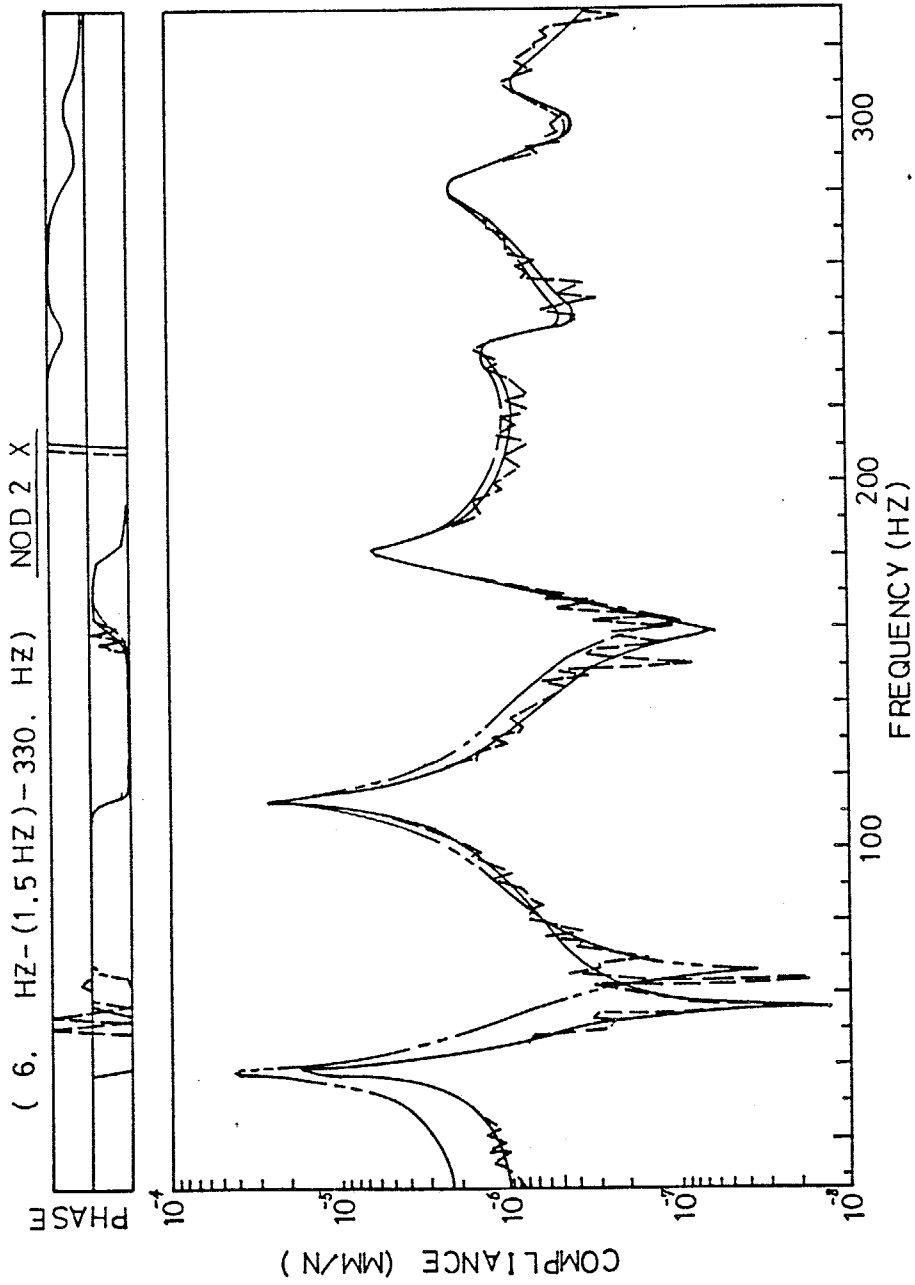


図6-4-2 同定特性行列から計算した伝達関数(ノイズ10%)

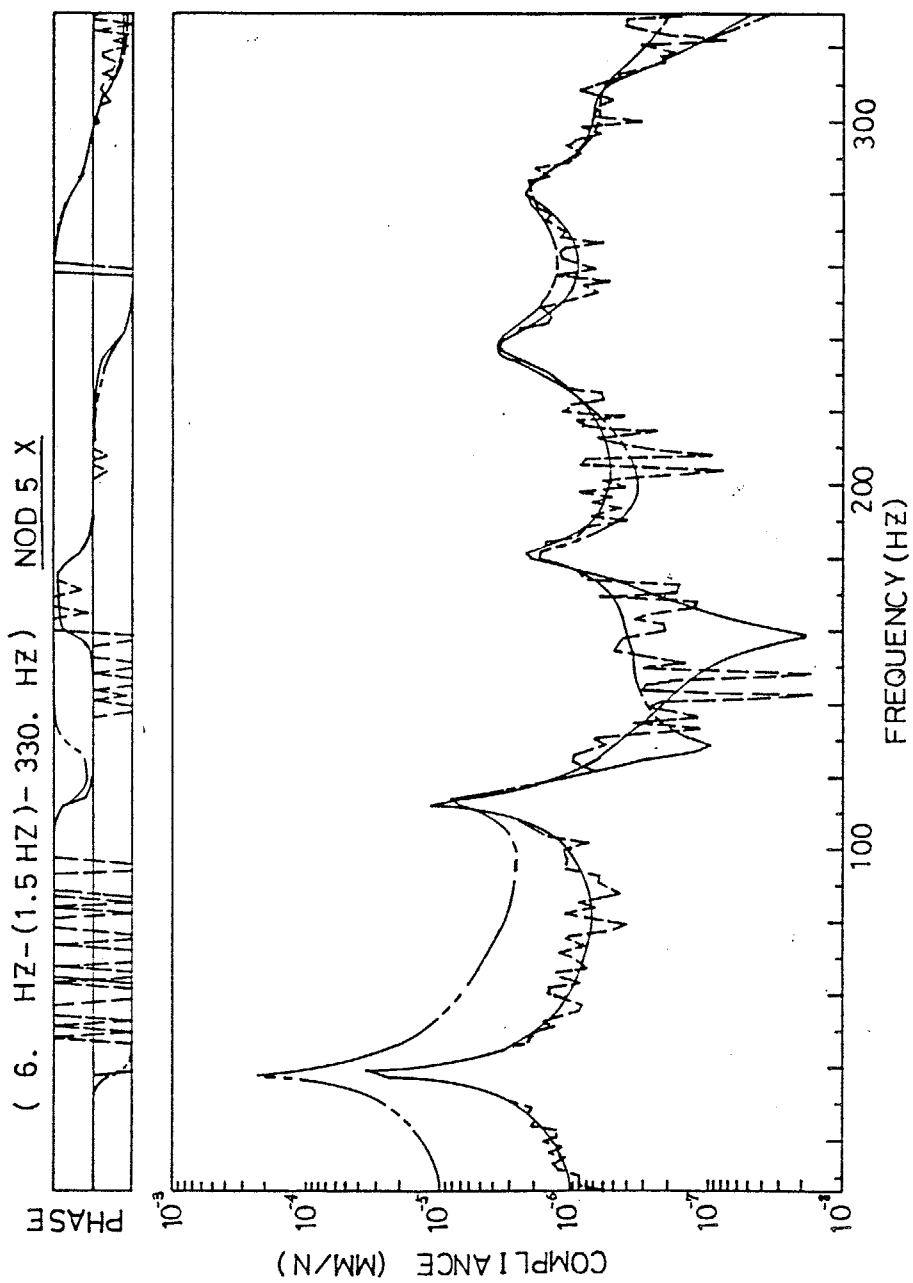


図6-4-3 同定特性行列から計算した伝達関数 (ノイズ20%)

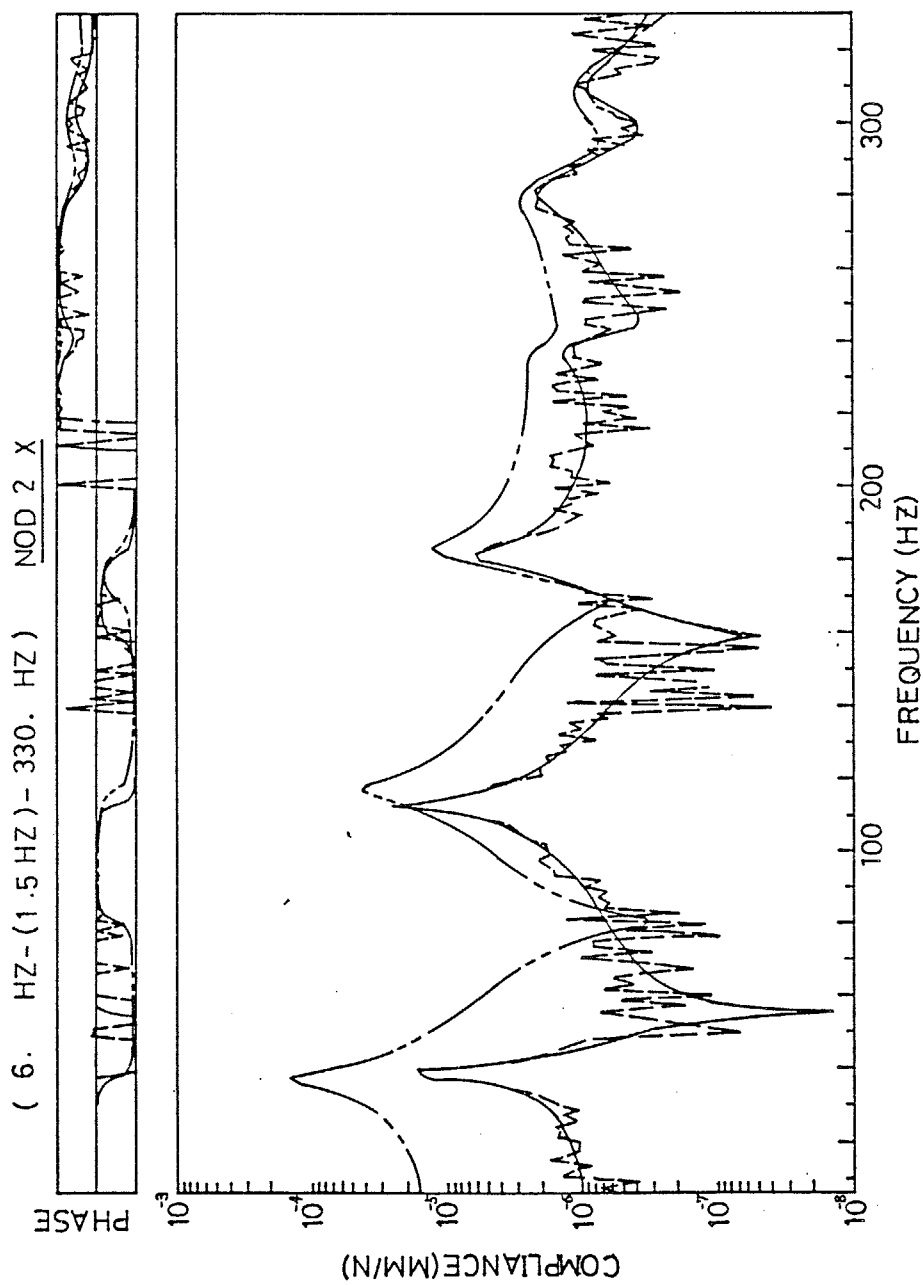


図 6 - 4 - 4 同定特性行列から計算した伝達関数 (ノイズ 30%)

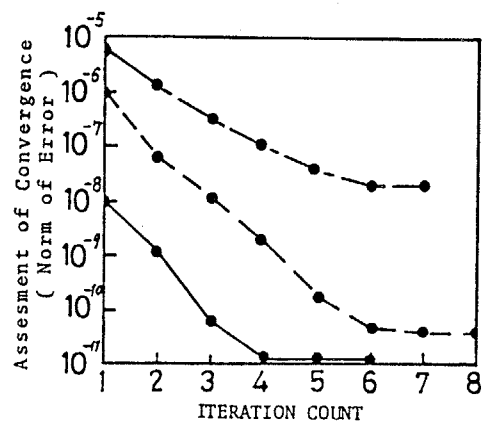


図 6 - 4 - 5 反復計算の収束していく様子

6. 4. 3 シミュレーションによる検討 (その2 平板モデル)

図6-4-6に示す平板モデルを用いて本方法の解析精度を検討する。[6. 4. 2]のモデルの場合には実際の系の自由度と同定の自由度が一致していたが、一般的には、本モデルのように連続体を対象に同定するために、両方の自由度は一致しない。

図6-4-6の平板を面外方向の並進成分6自由度のみで同定してみる。測定点としては、節点1、7、17、20、35、39の6点を選ぶ。

まず、有限要素法で10Hzから2Hz間隔で300Hzまでの伝達関数を計算し、約4%のノイズを混入させる。そのデータを入力データ値として、まず、[6. 3. 1]の方法で同定し、得られた特性行列を本方法の初期値として用いる。

図6-4-7は、節点1を励振したときの節点39の応答である。節点39は固定端に近いために変位が小さく、全体の平均変位の4%のノイズを混入するだけで、破線のような応答になる。この破線を入力データとして用いる。なお、ノイズを混入しない真の応答は実線で示す。本方法による同定特性行列から計算した応答は一点鎖線である。また、[6. 3. 1]の方法によるものは二点鎖線で示す。

本提案方法による同定が精度良く行われていることは、実線と一点鎖線のよい一致からわかる。一方、同じく著者によって提案された方法([6. 3. 1]参照)では、二点鎖線が示しているように、正しく同定されていない。このように、真の振動系の自由度と異なった自由度で、ノイズの混入したデータを入力データとして用いても、本方法では、精度良く特性行列を同定することができる。

表6-4-3は、得られた特性行列から固有振動数を計算した結果であり、表6-4-4は、その特性行列の自由度うち節点1に相当する自由度を拘束して計算した固有振動数を示す。

図6-4-8と図6-4-9は、その境界条件下において節点7を励振したときの節点17と20の応答をそれぞれ示す。図6-4-8と図6-4-9では、実線が真の値で、破線が同定された特性行列から計算した値である。これらの図や表から、解析対象周波数範囲内の振動特性は、境界条件を変えても、同定された特性行列から精度良く求められることがわかる。

以上のことから、ノイズの混入がある周波数領域データから、多くの有用な使い方ができる特性行列を精度良く同定するために提案する本方法の理論の正当性を示すことができたと思う。

なお、本供試体モデルの計算時間は、1回の反復計算に約11.8秒かった。そして、8回の反復で収束したので、94.1秒で計算が終了した。

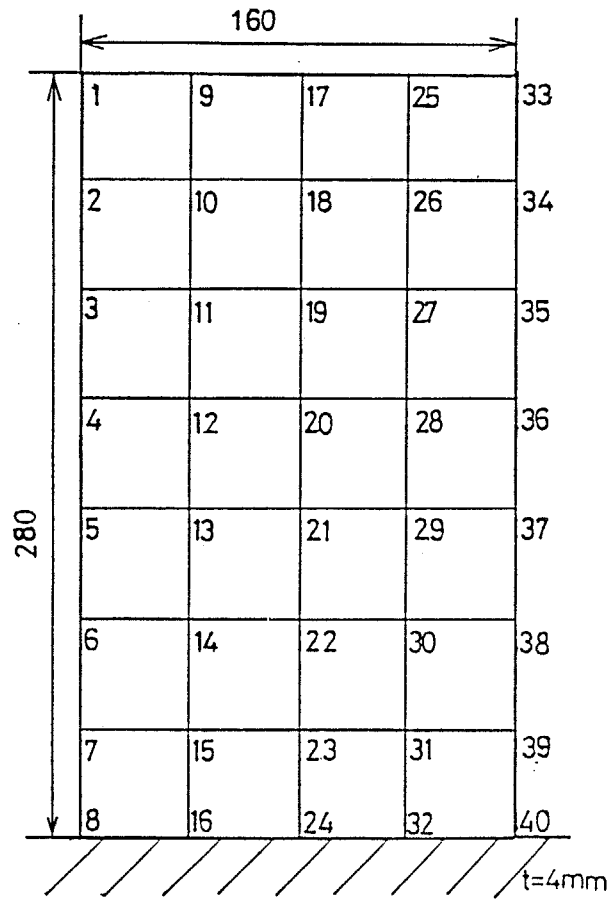


図 6 - 4 - 6 平板モデル

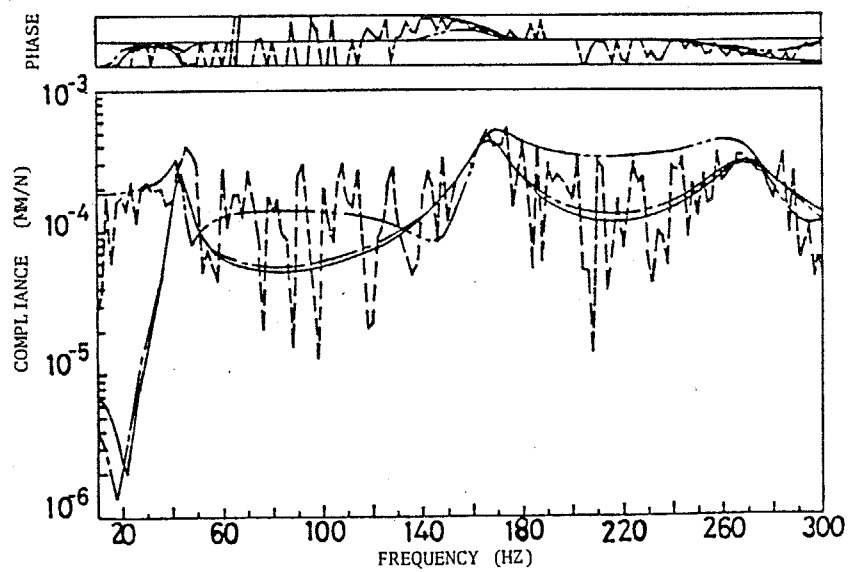


図 6 - 4 - 7 平板モデルの同定特性行列から計算した伝達関数

表 6 - 4 - 3 同定特性行列による固有振動数

Order	Exact	Identified KMC
1	43.3	43.3
2	166.4	166.4
3	269.9	269.9
4	549.9	574.0
5	753.4	770.7
6	918.8	1069.6

(HZ)

表 6 - 4 - 4 境界条件を変えた場合の固有振動数

Order	Exact	Identified KMC
1	96.2	96.5
2	238.9	239.3
3	398.2	399.4
4	684.9	647.8
5	774.0	1051.4

(HZ)

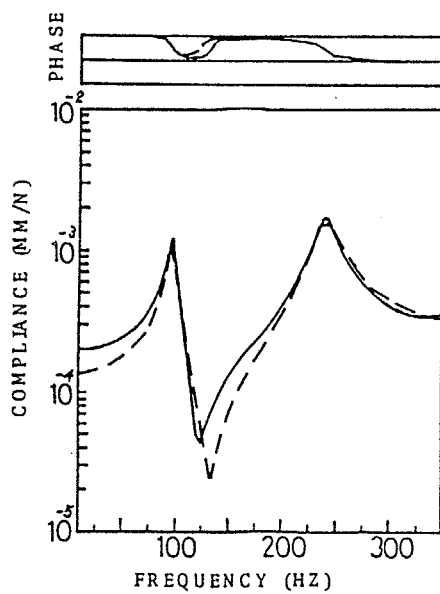


図6-4-8 境界条件を変えた場合の伝達関数 (節点17番)

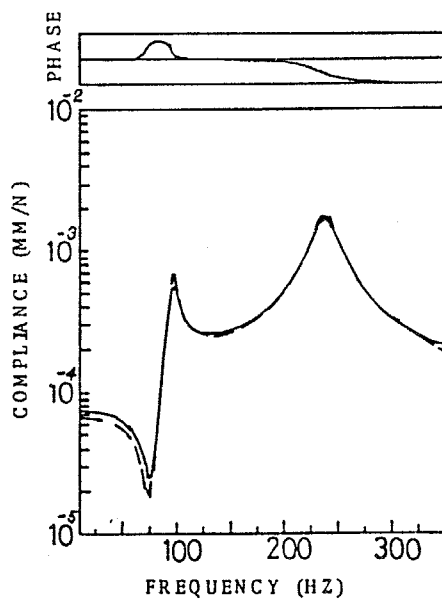


図6-4-9 境界条件を変えた場合の伝達関数 (節点20番)

6. 4. 4 実測データを用いた検討

実測データから実用上十分な精度であると認められる特性行列を直接同定できたという報告は、著者の知る限りでは、まだない。そこで、実測データから特性行列を同定し報告するのはこれが初めてであると思われる。そのために、同定によって得られた特性行列を明示する必要があると考えるので、ここでは小さな自由度の特性行列の同定を試み、本同定法の基本的性質の検討を行うことにする。

このような理由から、ここでは次のような供試体を取り上げることにする。まず、最も単純な振動系として1自由度のモデルを取り上げる。この場合、剛性、減衰および質量はすべてスカラー値で表現されるので行列とはならないが、この単純なモデルによって本同定法の理論の正当性を簡潔に示すことができる。次に、一端固定平板モデルを測定点4点で同定する。境界条件として固定部分を有する供試体の振動には剛体振動成分が存在しないので、計測が比較的安定であると思われ、特性行列を同定する最初の試みとして適していると考えられる。第3には、周辺自由の円板モデルを取り上げる。これは第2の供試体とは対称的に剛体振動を伴う振動データからでも特性行列を同定できることを示す例である。最後に実機の構造物の特性行列同定として重量約3.4tの誘導電動機固定子鉄心について8つの測定点から8自由度の特性行列を同定した結果を示す。この例では、振動の高周波領域の一部だけを対象とした特性行列の同定が可能であることを示す。以下に各供試体についての結果および検討を行う。

6. 4. 4. a 実験計測方法

実験方法は図6-4-10に示すような実験系による打撃試験である。すなわち、供試体の点*i*を打撃試験用ハンマーで打撃し、その時の点*j*の応答を小型加速度計で検出する。打撃力と応答信号は2チャンネルFFTアナライザに入力し、フーリエ変換して測定点*i*～*j*間の伝達関数を求める。打撃は8回行い平均化処理をする。得られた伝達関数はGPIB接続によりパーソナルコンピュータに転送され、フロッピーディスクに記録される。ここまでの行程は実験現場で行う。このようにして必要なすべての伝達関数を測定し終えたら、それらのデータを特性行列同定法のプログラムの入力書式にデータ変換し、同定解析を行うためのミニコンピュータへ転送すれば、特性行列が同定できる。使用機器は次の通りである。

打撃試験用ハンマー	PCB208A03
小型加速度計	PCB303A02
FFTアナライザ	アドバンテスト TR9406A
パーソナルコンピュータ	NEC PC9801
ミニコンピュータ	MASSCOMP MC500 (16ビット)

ここで実験を打撃試験とした理由について述べる。まず、本特性行列同定法では、物理的に妥当な特性行列を同定するには、すべての測定点を次々に励振したときの応答を必要とする（多点同時励振の必要はない）。例えば、測定点数を4点とする場合には表6-4-5に示すような丸印の伝達関数10個を計測する必要がある。このように励振点を次々に変えて伝達関数を測定するには打撃試験が最も適している。次に、従来はFFTアナライザを用いて打撃試験を行う場合に矩形窓関数を用いてデータの平滑化を行っていた。しかし、この窓関数を用いたのでは十分な精度の伝達関数を計測することができなかった。特に、伝達関数のすそ部や谷部分の精度がひどく悪くなり、本特性行列同定法に限らず、通常のモード特性を同定する曲線適合にも利用し難い状態であったと著者は感じている。ところが、その欠点を改善するために用いられるようになったフォース関数とレスポンス関数によれば計測精度がかなり向上するために、同定法に利用できるようになった。

インパルスはパワーが小さく、ノイズ成分の影響を受けやすいので、インパルス以外の部分とその平均値で置き換えることによってノイズ成分を取り除こうとするのがフォース関数である。一方、レスポンス関数では、インパルス応答がフレームタイム内で減衰しないときに生じるリーケージを除去するために指数関数を乗ずることによってフレームタイム内で応答を減衰させる。

このような理由により打撃試験を採用したのである。その実験系で慎重な実験を行うことによって得られるデータから実用上十分な精度の特性行列を同定することができるようになった。

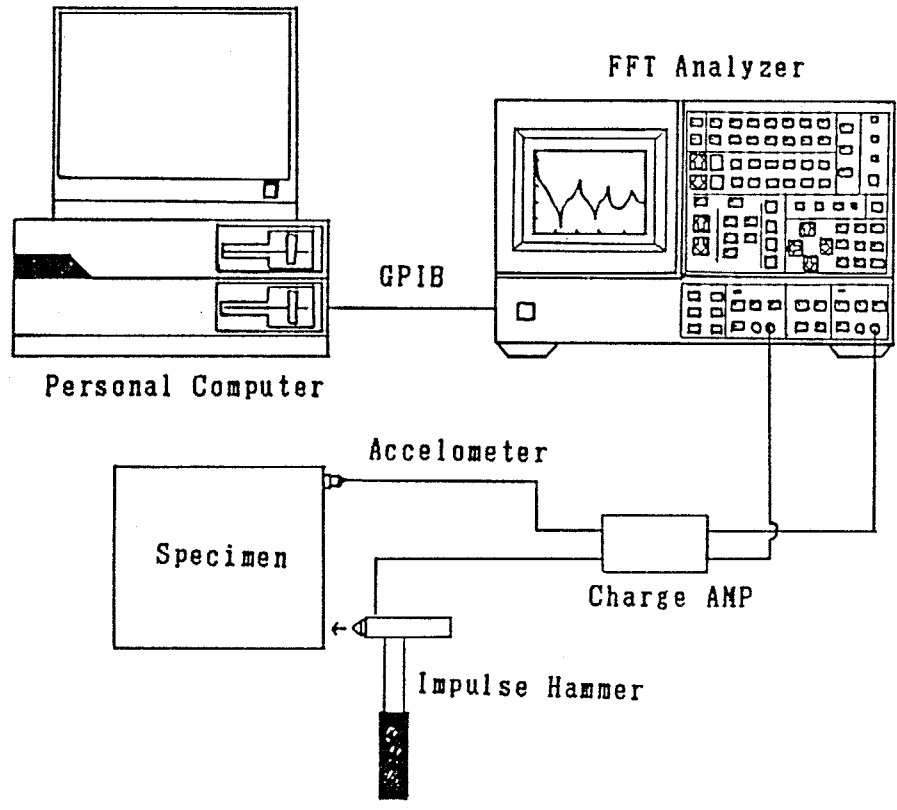


図 6 - 4 - 1 0 打撃試験実験回路

表 6 - 4 - 5 入力伝達関数

		Excitation point			
		1	2	3	4
Measurement point	1	○	○	○	○
	2		○	○	○
	3			○	○
	4				○

6. 4. 4. b 1自由度モデル

最も単純な例として、図6-4-11の(A)に示すようなゴムマウント上に剛円柱ブロックを取りつけた1自由度の振動系モデルの剛性、減衰および質量を同定する(特性値はスカラー値となる)。

同定手順としては、まず[6. 3. 1]で提案した方法(以下、これを便宜的に古い方法とも呼ぶことにする)により特性値を計算し、その特性値を初期値として、[6. 4. 1]で提案した方法で、さらに精度の良い特性値を求める。表6-4-6の(A)欄にその結果を示す。一般に入力データに誤差が含まれる場合には、[6. 3. 1]の方法では、特性行列の成分が真の値より小さくなり、入力データ中の誤差が大きいほどその傾向が強い。表6-4-11では、[6. 4. 1]の方法(以下、これを便宜的に新しい方法とも呼ぶことにする)で得られた特性値の方が[6. 3. 1]の方法の結果より大きくなっており、[6. 4. 1]の方法の信頼性を示している。

これらの特性値の物理的妥当性と精度を検討するために、図6-4-11の(B)に示すように剛円柱ブロックを上部に1つ付加した系の特性値を同定し、得られた特性値のうちの質量の値から、図6-4-11(A)の値を差し引くことによって、上部に付加された剛円柱ブロックの質量を推定する。図6-4-11の(B)の系について得られた特性値は表6-4-11の(B)欄に示す。新しい方法によって推定される質量は267gとなり、古い方法では249gとなる。一方、付加ブロック単体を秤で実測したところ、265gであった。これらの数値から[6. 4. 1]の方法の方が精度が良いことがわかる。また、剛性値や減衰値は系の非線形性や実験誤差を無視できれば一定値と考えられるが、[6. 4. 1]の方法の方がそれらの値の変化が小さくなっており、より妥当であると思われる。

伝達関数を比較検討すると、図6-4-11の(B)の系に関しては図6-4-12のようになる。図中において破線が実験結果であり、これを入力データとして古い方法で同定した特性値から再計算した伝達関数を一点鎖線で示す。さらに、その古い方法で同定された値を初期値として反復計算の[6. 4. 1]の方法により実験データ(入力データ)との間の誤差ノルムが最小(数学的には極小)となった特性値から計算された伝達関数を実線で示す。図6-4-12を一見しただけでは視覚的には両者の精度の差はわかりづらいが、誤差ノルムが[6. 4. 1]の方法による結果の方が小さいことや、一点鎖線の方は実線より全体的に上に位置していることから、[6. 4. 1]の方法によって[6. 3. 1]の方法で得られた結果を精度向上していることが理解される。

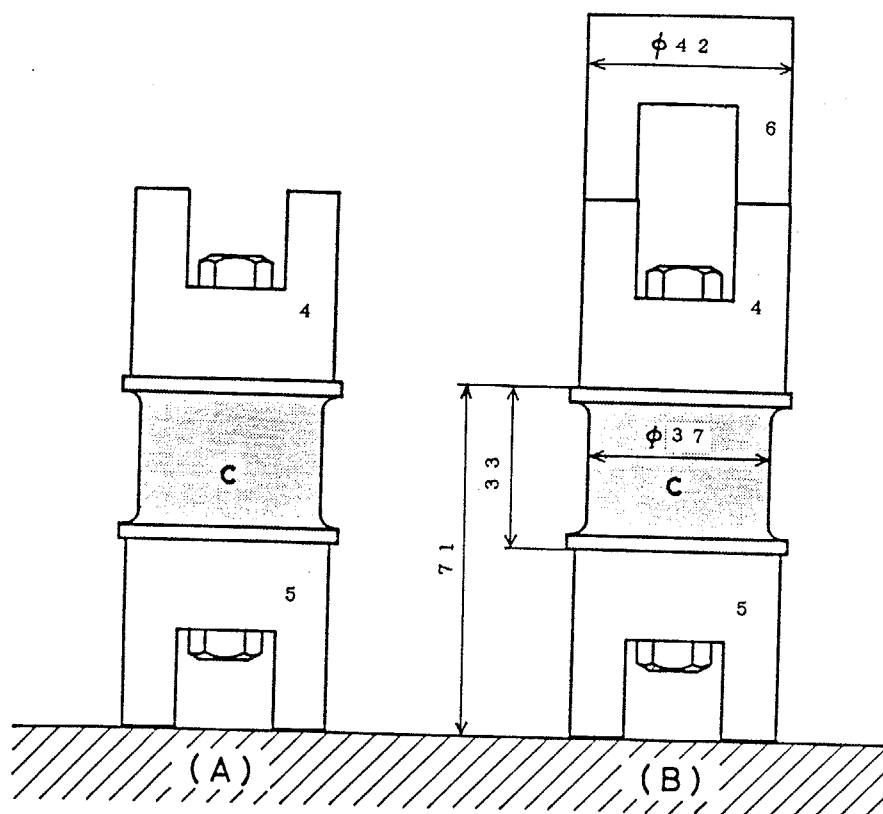


図 6 - 4 - 1 1 自由度モデル

表 6 - 4 - 6 同定された特性値

	Setting	(A)	(B)
New Method	Stiffness (N/mm)	2.89924E 02	2.80147E 02
	Damping (Ns/mm)	2.83140E-02	3.34469E-02
	Mass (Ns ² /mm)	3.59342E-04	6.26005E-04
Old Method	Stiffness (N/mm)	2.91078E 02	2.69220E 02
	Damping (Ns/mm)	2.42707E-02	3.24680E-02
	Mass (Ns ² /mm)	3.57347E-04	6.05808E-04

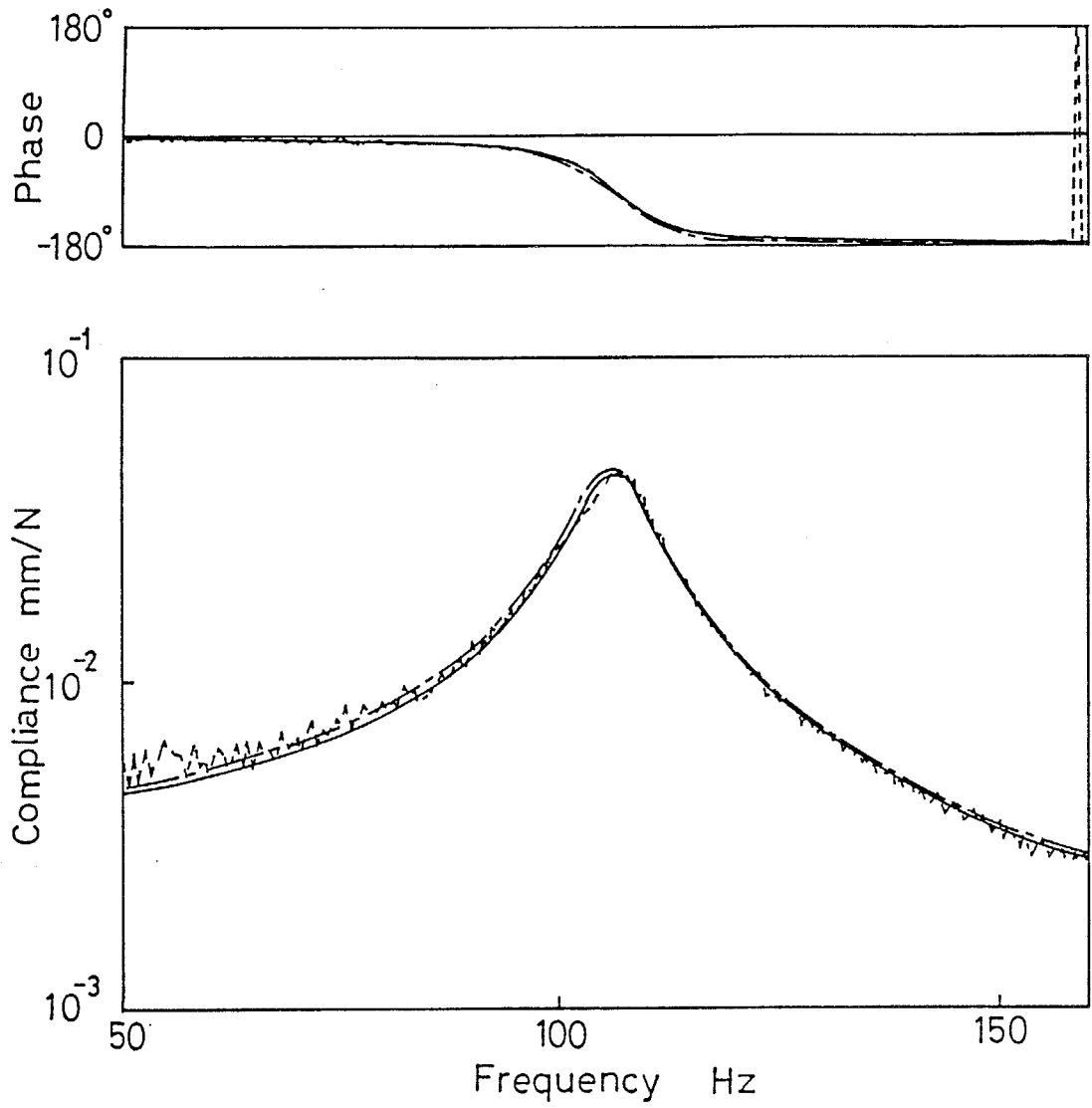


図 6 - 4 - 1 2 同定伝達関数の適合度 (B)

6. 4. 4. c 一端固定平板

実測伝達関数から多自由度系の特性行列を同定する最初の試みとして、図6-4-13に示す一端固定平板を取り上げる。この平板の4点において面外曲げ振動を計測し、4自由度の特性行列を同定する。

まず、周波数35 Hzから250 Hzまでの伝達関数から特性行列を同定する。[6. 4. 1]の方法の理論展開では、応答に正規分布する誤差の混入を許しているが、実測のデータに含まれる誤差は、正規分布する傾向が強いものの、正規分布とは異なる性質の誤差成分（系統誤差や統計誤差）も多少含まれているはずである。特に、コヒーレンスが悪い周波数点のデータのばらつきは正規分布から外れる傾向が強い。そこで、実験ではできるだけ細心の注意を払い、実験段階でできるだけ誤差を少なくして精度良いデータを得るようにこころがける方がよい。また、得られたデータについては再度計測し直すとか、その部分のデータは使用しないようにすることが精度良いパラメータを同定するための基本である。

表6-4-7に[6. 4. 1]の方法によって同定された特性行列を示す。剛性行列、質量行列および減衰行列の単位はそれぞれ N/mm 、 Ns/mm 、 Ns/mm である。

これらの特性行列から計算される伝達関数の例を図6-4-14と図6-4-15に示す。図中において、破線が実験結果（同定の入力データ）、実線は[6. 4. 1]の方法による結果、さらに一点鎖線は[6. 3. 1]の方法によって同定された特性行列から計算した結果である。一点鎖線に比べて実線は実験結果である破線に良く一致している。

[6. 4. 2と3]で行ったシミュレーションで明らかにしたように、もし入力データに誤差が含まれていない場合や混入誤差が無視できるほど小さければ、[6. 3. 1]の方法でも十分良い精度で同定できるはずである。図6-4-14と図6-4-15から、本供試体のように比較的精度良く実験できるような供試体でも、かなりの実験誤差の混入を避けることはできないことがわかる。

図6-4-15の相互伝達関数（励振点と応答点が異なる）に比べて図6-4-14の自己伝達関数（励振点と応答点が同一）では谷部分での破線と実線のずれが多少大きい。この原因としてはまず、1) 固有ピーク3つを含む領域の同定を4自由度で行っているため、剰余成分の影響として1自由度分を割り当てているけれども、完全には剰余成分の影響を表現しきれない。そして、剰余成分の影響が最も激しく現われるのが自己伝達関数である。次に2) 実験結果は誤差を含んでいるので、同定結果からの伝達関数とのずれが生じたからといって、同定の方だけに誤差があると考えすることはできない。もし真の値（決してわからないけれども）と比較できるとすれば、実験結果の方が誤差が大きい場合もあるだろう。

さて、そこで上記1)の要因を確かめるために、周波数35 Hzから450

Hzの伝達関数から特性行列を同定してみる。450Hzまでには4つの固有振動が含まれており、4自由度の特性行列で同定を行おうとすれば剰余成分の影響の見積りを行うことができないので、適合精度が相当悪化することが予想される。表6-4-8にその特性行列を示す。また、図6-4-16と図6-4-17にそれらの特性行列から計算される伝達関数の適合具合を示す。破線で示される実験結果に対して実線で示される[6.4.1]の方法による同定結果のずれがかなり大きく、固有振動ピークの横ずれも生じていることがわかる。また、[6.3.1]の方法による結果はまったく精度を欠いている。

以上の事から、特性行列を同定する際には、剰余成分の見積り(補正)のために、同定周波数領域内に含まれる固有振動の数よりも大きい自由度(測定点数または測定自由度)の特性行列を同定することが精度良い同定のための要点の1つである。

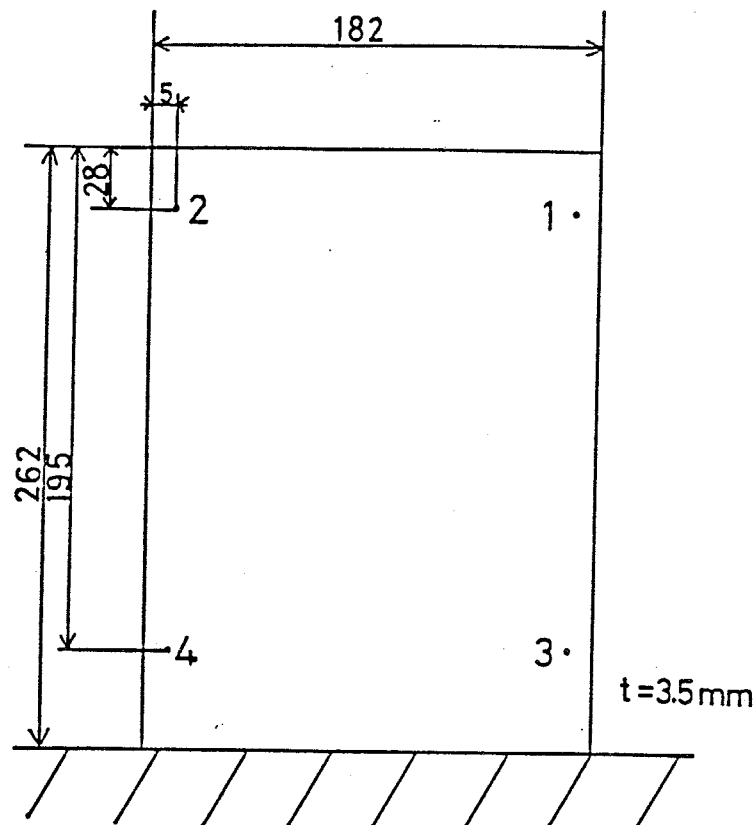


図6-4-13 一端固定平板モデル

表6-4-7 35 Hz ~ 250 Hz までのデータから同定した特性行列

K matrix

$$\begin{bmatrix} 9.343544D+02 & & & & \text{Sym.} \\ -9.307003D+02 & 9.824612D+02 & & & \\ -3.743444D+03 & 3.704140D+03 & 1.598807D+04 & & \\ 3.727129D+03 & -3.967360D+03 & -1.502368D+04 & 1.707293D+04 & \end{bmatrix}$$

M matrix

$$\begin{bmatrix} 1.745516D-03 & & & & \text{Sym.} \\ -1.581313D-03 & 1.895378D-03 & & & \\ -6.394280D-03 & 6.819945D-03 & 2.713936D-02 & & \\ 6.813715D-03 & -6.993712D-03 & -2.747169D-02 & 2.957101D-02 & \end{bmatrix}$$

C matrix

$$\begin{bmatrix} 3.304010D-01 & & & & \text{Sym.} \\ -3.467112D-01 & 3.646320D-01 & & & \\ -1.304846D+00 & 1.356396D+00 & 5.052299D+00 & & \\ 1.411224D+00 & -1.495007D+00 & -5.571575D+00 & 6.062995D+00 & \end{bmatrix}$$

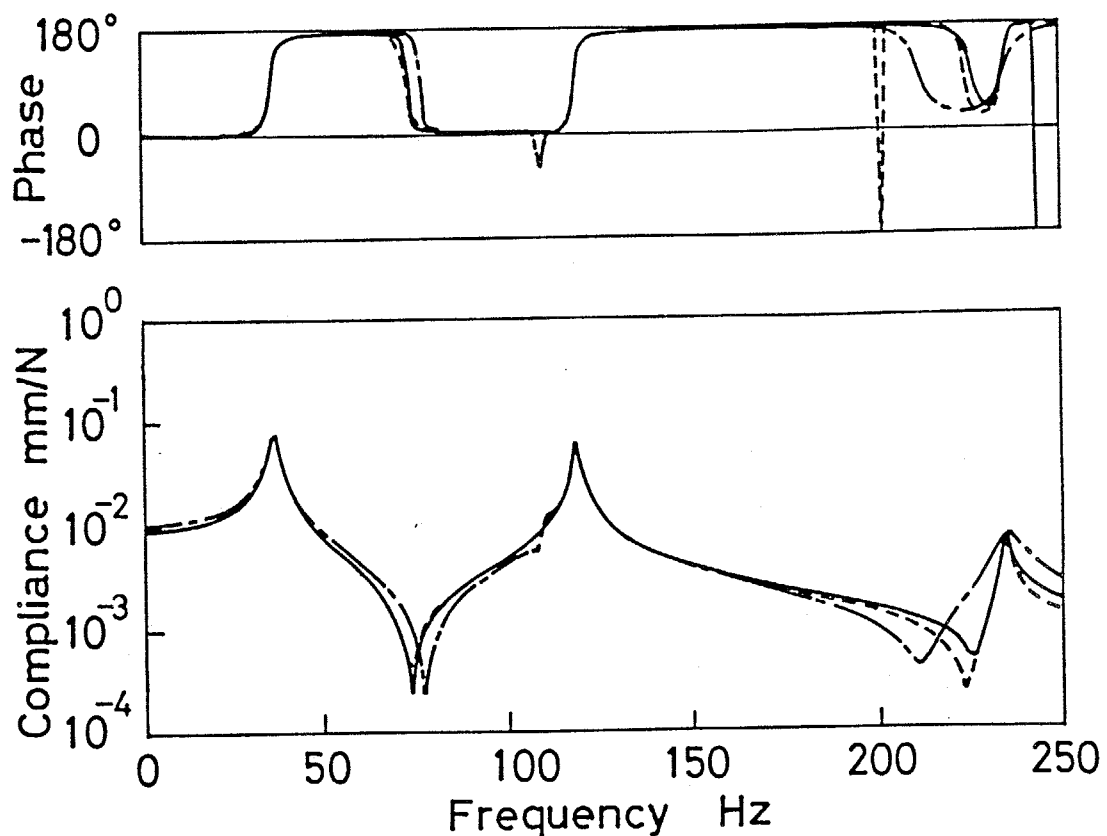


図6-4-14 伝達関数 (励振点: 1 応答点: 1)

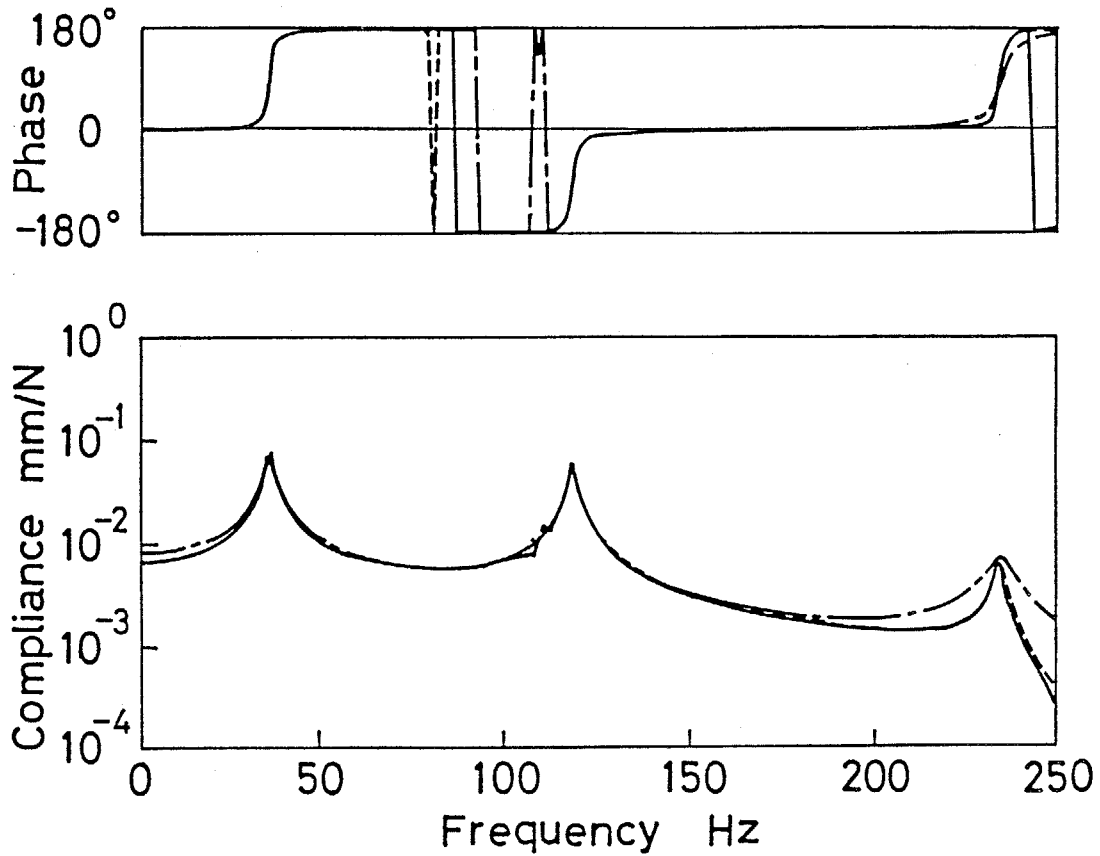


図 6 - 4 - 1 5 伝達関数 (励振点 : 1 応答点 : 2)

表 6 - 4 - 8 35 Hz ~ 450 Hz までのデータから同定した特性行列

K matrix

$$\begin{bmatrix} 5.810926\text{D}+01 & & & & \text{Sym.} \\ -3.505473\text{D}+01 & 6.591434\text{D}+01 & & & \\ -9.676940\text{D}+01 & -2.312796\text{D}+01 & 8.519191\text{D}+02 & & \\ 2.020727\text{D}+01 & -1.368859\text{D}+02 & 5.297291\text{D}+02 & 1.109212\text{D}+03 & \end{bmatrix}$$

M matrix

$$\begin{bmatrix} 1.876253\text{D}-04 & & & & \text{Sym.} \\ 9.795031\text{D}-05 & 1.919679\text{D}-04 & & & \\ 1.303494\text{D}-04 & 6.079169\text{D}-05 & 4.861565\text{D}-04 & & \\ 1.092306\text{D}-04 & 1.264247\text{D}-04 & 4.211868\text{D}-04 & 5.767207\text{D}-04 & \end{bmatrix}$$

C matrix

$$\begin{bmatrix} -7.529693\text{D}-03 & & & & \text{Sym.} \\ -5.532465\text{D}-03 & 5.070853\text{D}-03 & & & \\ -1.406687\text{D}-03 & 9.417531\text{D}-03 & -1.381887\text{D}-02 & & \\ -1.383120\text{D}-02 & -1.582890\text{D}-02 & -4.355961\text{D}-03 & -2.826389\text{D}-02 & \end{bmatrix}$$

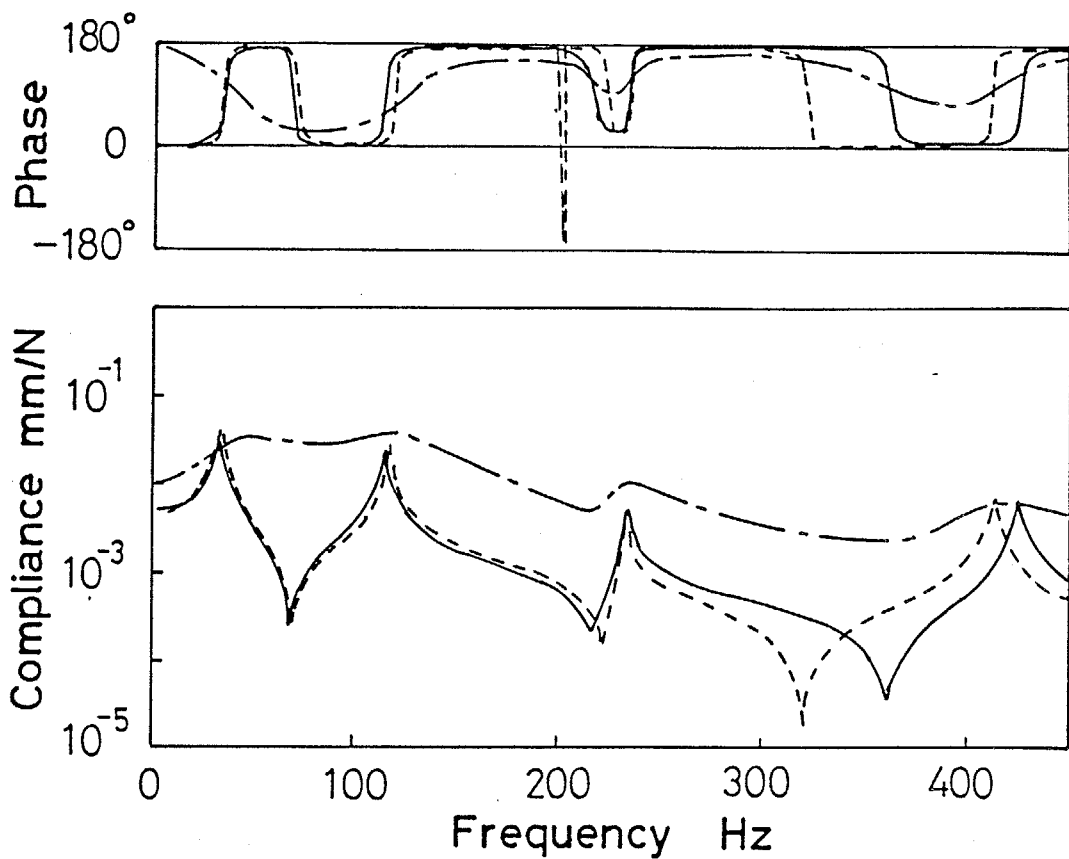


図6-4-16 伝達関数 (励振点: 1 応答点: 1)

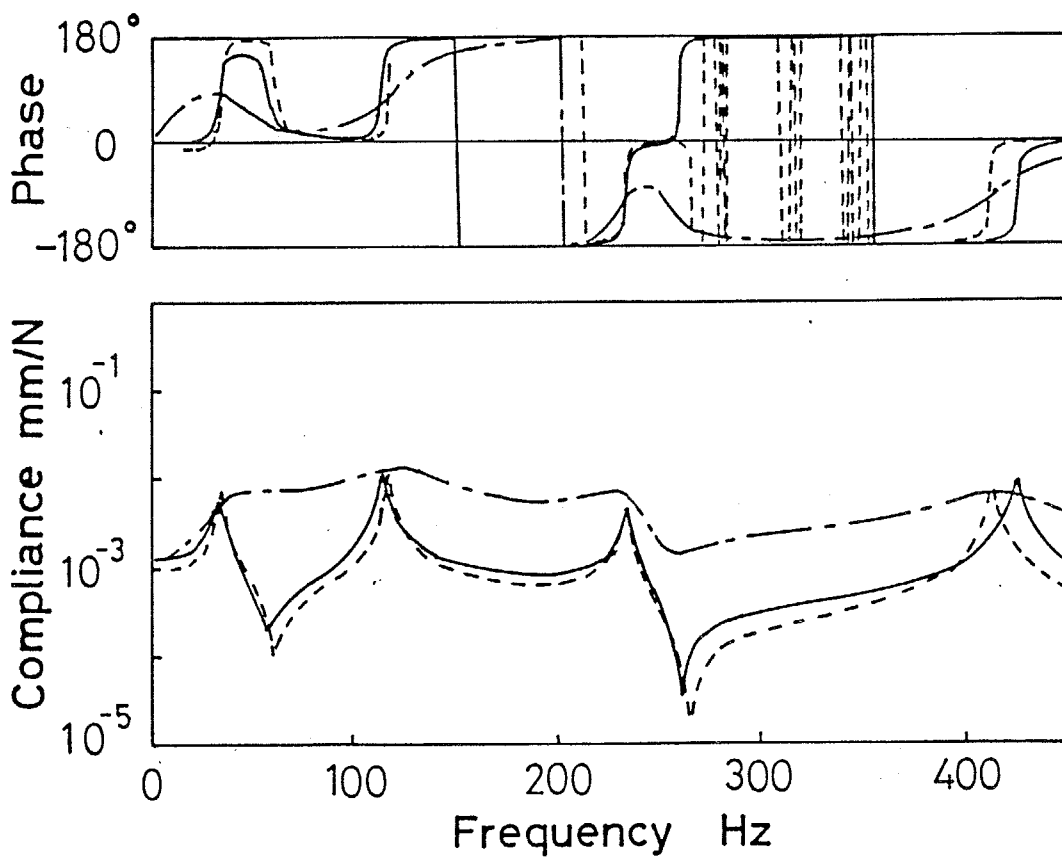


図6-4-17 伝達関数 (励振点: 1 応答点: 3)

6. 4. 4. d 周辺自由の円板

周辺自由境界条件下の構造物に対する特性行列の直接同定の最初の例として、図6-4-18に示す剛円板を取り上げる。この円板を数本のひもで空中に支持し、測定点5点で面外方向の曲げ振動を測定する。

上記のようにひもで空中に支持しているので、完全な周辺自由状態ではないが、かなりそれに近いことは実験時に確認できた。そこで、この系の面外方向剛体振動（運動）の自由度は3となるので、弾性振動1次のピークまでの周波数領域には4つの固有振動数が存在していることになる。

さて、この点を考慮に入れて、100 Hz から750 Hz までの伝達関数から特性行列を同定する。[6. 4. 1]の方法によって得られた特性行列を表6-4-9に示す。図6-4-19と図6-4-20にはそれらの特性行列から計算された伝達関数を実線で示す。なお、図中で破線は実験結果、一点鎖線は古い方法で同定した特性行列から計算された伝達関数である。両図とも、

[6. 4. 1]の方法による結果の方が[6. 3. 1]の方法の結果より精度良く実験結果に適合していることがわかる。

さて、本供試体の同定でも剰余成分の影響の補正が重要であることを示すために、5自由度の特性行列で弾性振動の2次まで含む周波数領域の同定を行う。すなわち、100 Hz から1100 Hz の周波数領域で特性行列の同定を行う。表6-4-10に[6. 4. 1]の方法による同定特性行列を示す。さらに、それらの特性行列から計算される伝達関数の例を図6-4-21と図6-4-22に実線で表す。破線は実験結果（同定のための入力データ）であり、図6-4-19や図6-4-20の場合に比べて適合精度が悪いことがはっきりわかる。ただし、一点鎖線で表されている[6. 3. 1]の方法によって同定された特性行列から計算された伝達関数と比べれば、格段に精度向上されている。

以上のように伝達関数で定量的に適合精度を観察すると、多少の精度悪化が認められる。しかし、新しい方法によって求めた特性行列から固有モードを計算し図示すると、図6-4-23のように、3つの剛体振動（運動）モードと2つの弾性振動モードが定性的に精度良く求められている。

以上の事より、[6. 4. 1]の方法によれば、周辺自由境界条件下の構造物についても実測データから特性行列を精度良く同定できる。また、それらの特性行列から剛体振動モードも簡単に求められる。さらに、このような場合にも、剰余成分の影響を見積ることができるよう特性行列の自由度を決定することが大切であることが判明した。

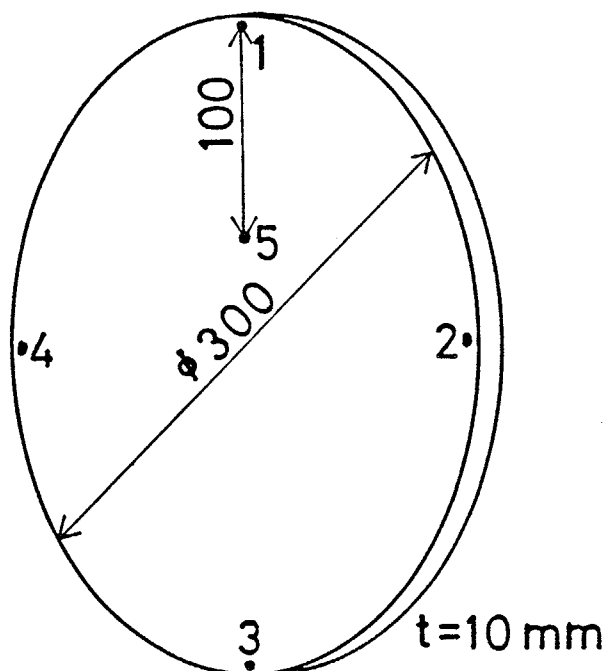


図6-4-18 円板モデル

表6-4-9 100 Hz ~ 750 Hz の範囲で同定された特性行列

K matrix

2.842070D+03									
3.166164D+02	2.001953D+03								Sym.
1.508699D+03	-6.499101D+02	1.229528D+03							
1.379302D+02	1.727366D+03	-6.479205D+02	1.546694D+03						
-4.549161D+03	-3.433894D+03	-1.064049D+03	-2.757174D+03	1.210920D+04					

M matrix

2.794081D-04									
-7.056417D-05	6.985141D-04								Sym.
-2.643049D-04	1.847314D-04	7.995487D-04							
-9.589901D-05	-1.781457D-04	1.690294D-04	6.362636D-04						
4.036584D-04	4.477926D-04	6.011581D-04	5.918735D-04	1.090335D-03					

C matrix

-3.964471D-02									
-1.644783D-01	-1.863683D-01								Sym.
1.203686D-02	-5.964083D-02	7.177979D-02							
1.449357D-01	3.566368D-02	1.035816D-01	2.296093D-01						
4.432265D-02	4.549525D-01	2.236865D-01	-1.962461D-01	8.682959D-01					

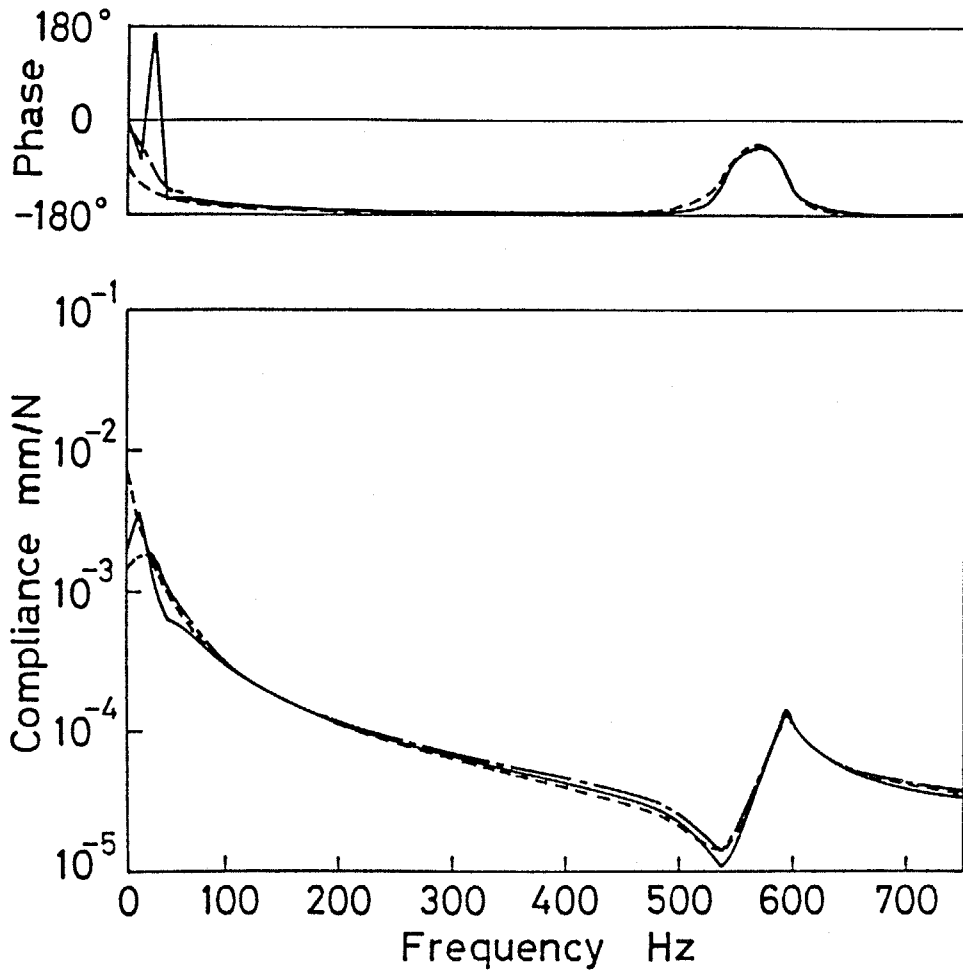


图 6-4-19 伝達関数 (励振点: 1 応答点: 5)

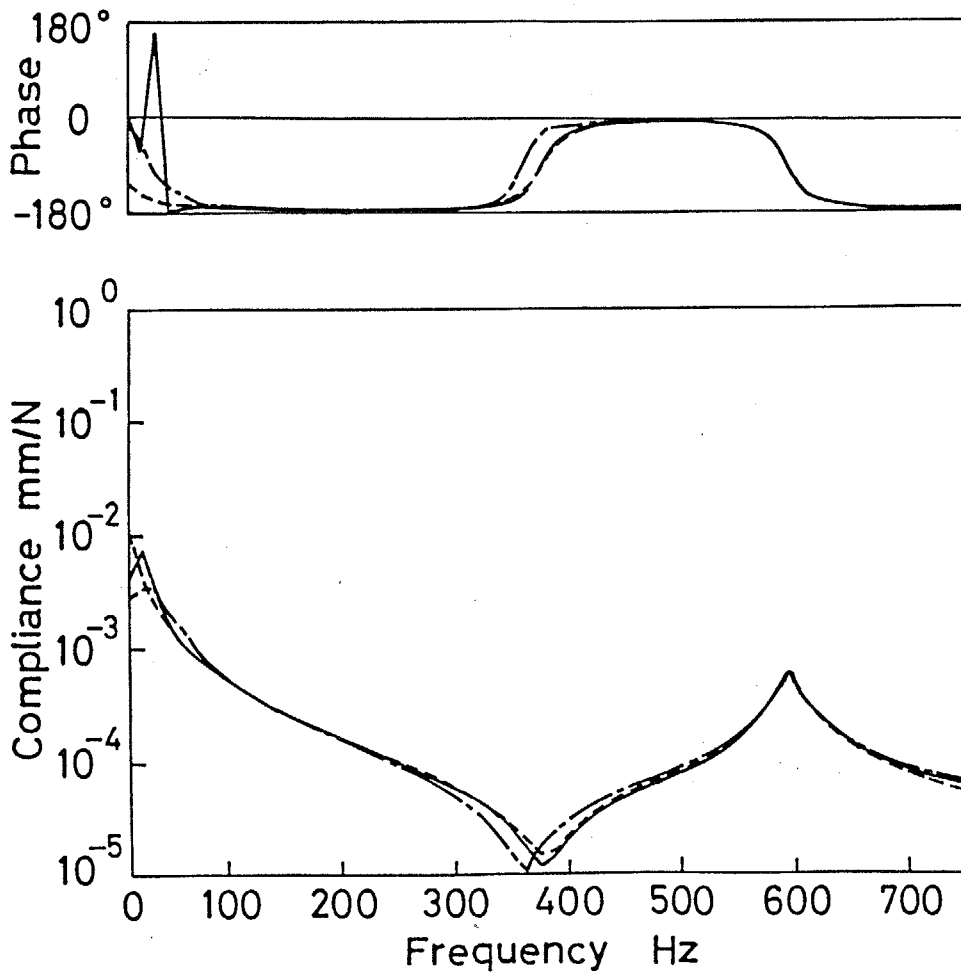


图 6-4-20 伝達関数 (励振点: 1 応答点: 1)

表6-4-10 100Hz~1100Hzの範囲で同定された特性行列

K matrix

5.996304D+03									
1.823168D+03	2.680881D+03								
2.650579D+03	-1.053189D+02	1.649649D+03							
1.419297D+03	2.307503D+03	-1.828172D+02	2.048783D+03						
-1.100939D+04	-6.473830D+03	-3.402225D+03	-5.346218D+03	2.530775D+04					

Sym.

M matrix

6.012543D-04									
1.728052D-05	6.760500D-04								
-2.487367D-04	1.528022D-04	7.754459D-04							
2.357931D-05	-1.515831D-04	1.704199D-04	6.790799D-04						
-2.120978D-04	2.803808D-04	5.862414D-04	3.932133D-04	2.270702D-03					

Sym.

C matrix

1.726579D-02									
1.462583D-02	1.057936D-02								
5.735307D-02	1.651909D-02	9.773209D-02							
5.682981D-02	5.145464D-02	8.595495D-02	1.214505D-01						
7.205080D-02	1.281311D-01	1.824587D-01	7.433405D-02	4.807033D-01					

Sym.

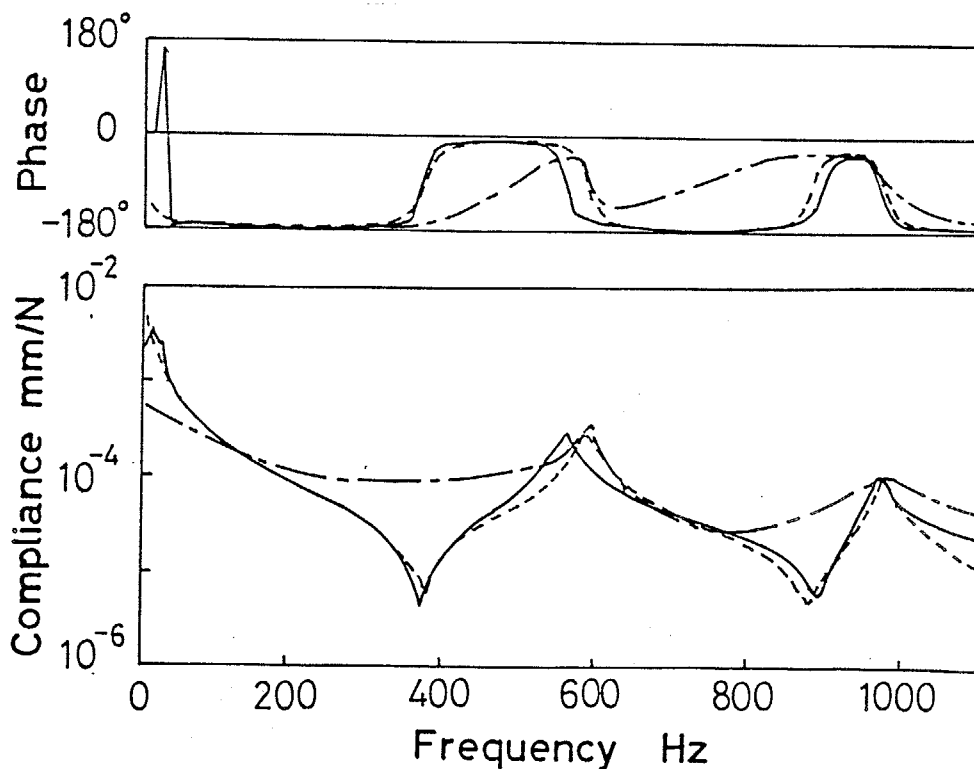


図6-4-21 伝達関数 (励振点: 1 応答点: 1)

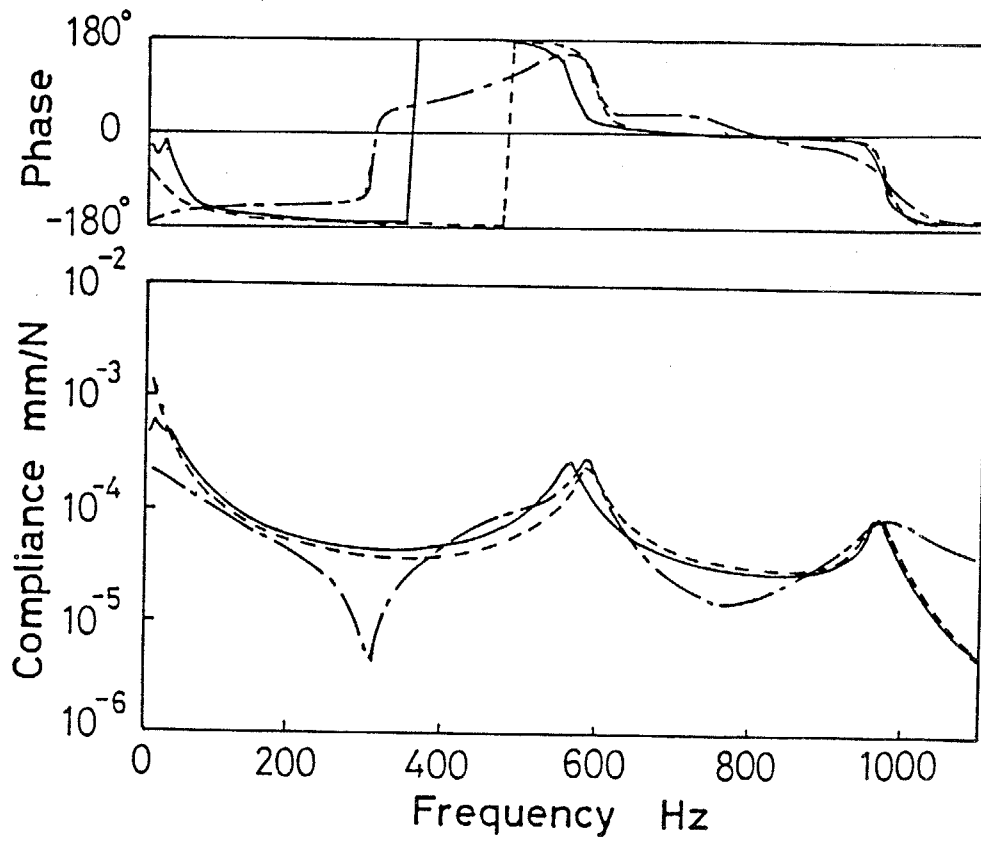


図 6 - 4 - 2 2 伝達関数 (励振点 : 1 応答点 : 2)

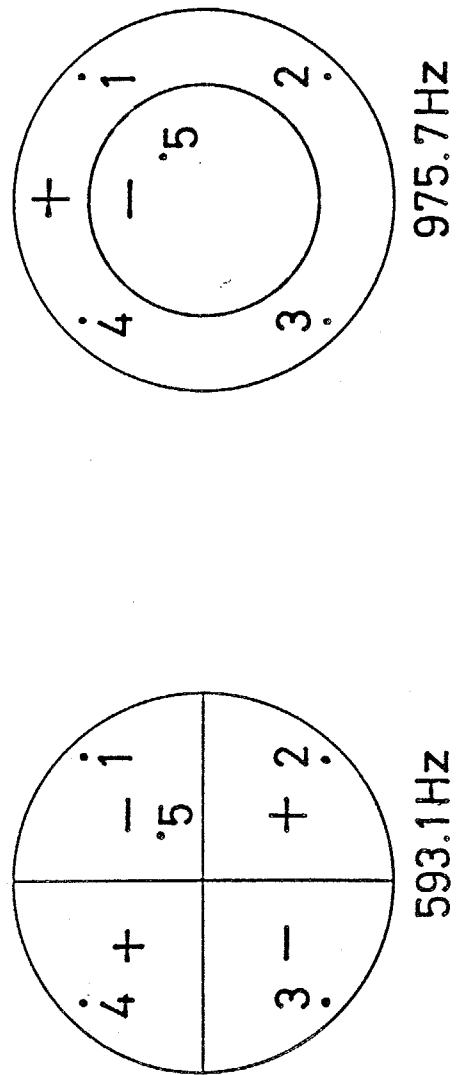
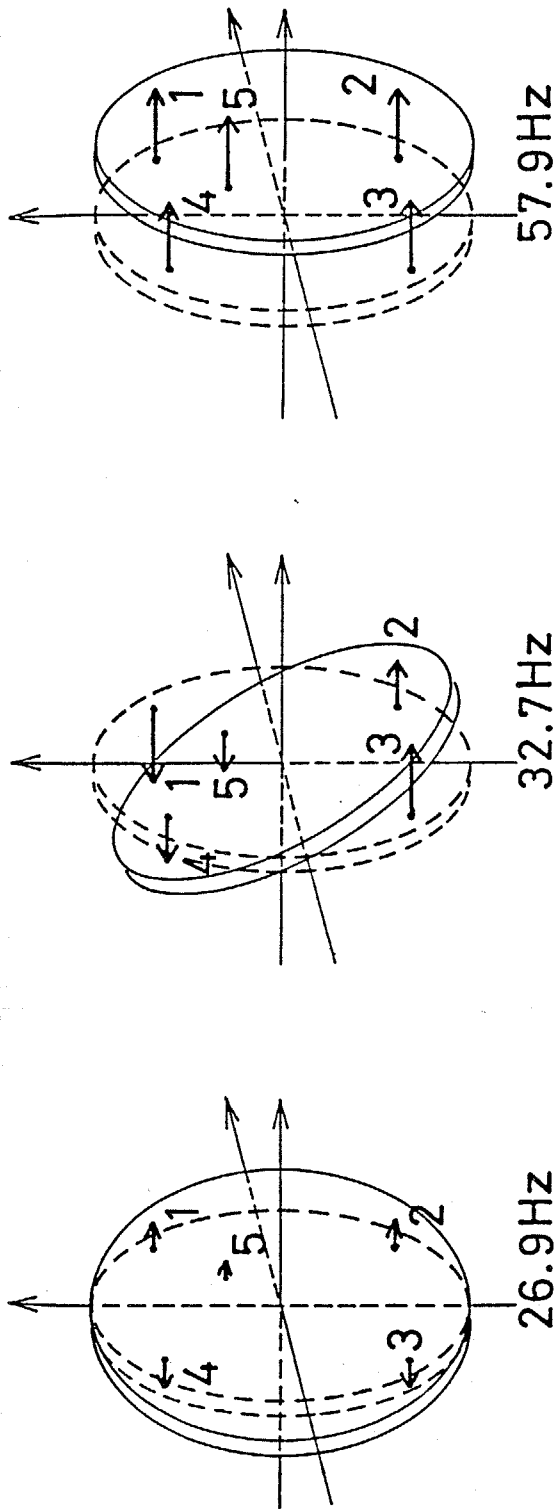


図6-4-23 固有モード形

6. 4. 4. e 誘導電動機固定子鉄心

実機の機械構造物についての特性行列を同定する最初の試みとして図6-4-24の概略図で示すような重量約3.4tの誘導電動機固定子鉄心を取り上げる。

誘導電動機の振動においては、特に騒音に大きく影響し問題視される1000Hzから2000Hzあたりの周波数領域が重要である。ところが、この周波数領域は振動としてはかなりの高次振動領域であること（本供試体の設定境界条件下における基本振動数は約130Hzである）、また対象物が多くのコイルを締付スタットや押板で固定した構造のために非常に複雑な構造であること、などの問題点により、有限要素法でモデル化することは大自由度となり実用上困難である。電動機の固定子フレームとの結合系など、より大規模な結合系の解析を将来行おうとする目的から考えると、この固定子はできるだけ小さな自由度の特性行列で表現することが望ましい。このような観点から、実験により小さな自由度の特性行列を同定する。ここで実証したいことは次の2点である。

- 1) あまり測定精度が良くないことが予想される実機の振動試験データを用いても特性行列が同定できる可能性
- 2) 振動の高次周波数領域のみの部分区間についても特性行列を精度良く同定できる可能性

さて、実験時の供試体の境界条件は、床に置かれた3個の鋼製H形台の上に鉄心の軸線が鉛直になるようにのせた状態である。測定は上端の円周上6点と下端の円周上の2点の合計8点とし、半径方向の振動を測定する。

8自由度の特性行列を同定するので、同定周波数領域より低周波成分の影響と高周波側からの剰余成分の影響を見積れるように考慮し、かつ、実験データでコヒーレンスの値がかなりよい周波数領域を対象にすることとして、1100Hzから1300Hzの領域についての伝達関数から特性行列を同定する。表6-4-11に[6.4.1]の方法によって同定された特性行列を示す。さらに、これらの特性行列から計算される伝達関数の例を図6-4-25と図6-4-26に実線で示す。両図において破線は実験結果であり、一点鎖線は[6.3.1]の方法で同定した特性行列から計算された伝達関数である。一点鎖線は実験結果を示す破線に対して大きくずれており、古い方法による同定は困難であることがわかる。しかし、その精度の悪い結果を初期値として[6.4.1]の方法で特性行列を求めると、反復回数9回目で実線で示すような精度良い伝達関数を表現する特性行列が求められた。なお、図6-4-25と図6-4-26において図の両側の暗部の周波数領域は同定対象周波数に隣接する部分であり、このように同定対象周波数範囲外になると同定精度が大幅に悪くなることわかる。

以上の結果から、本供試体の適用に際しての上記の2つの実証目的は達せられたと思われる。

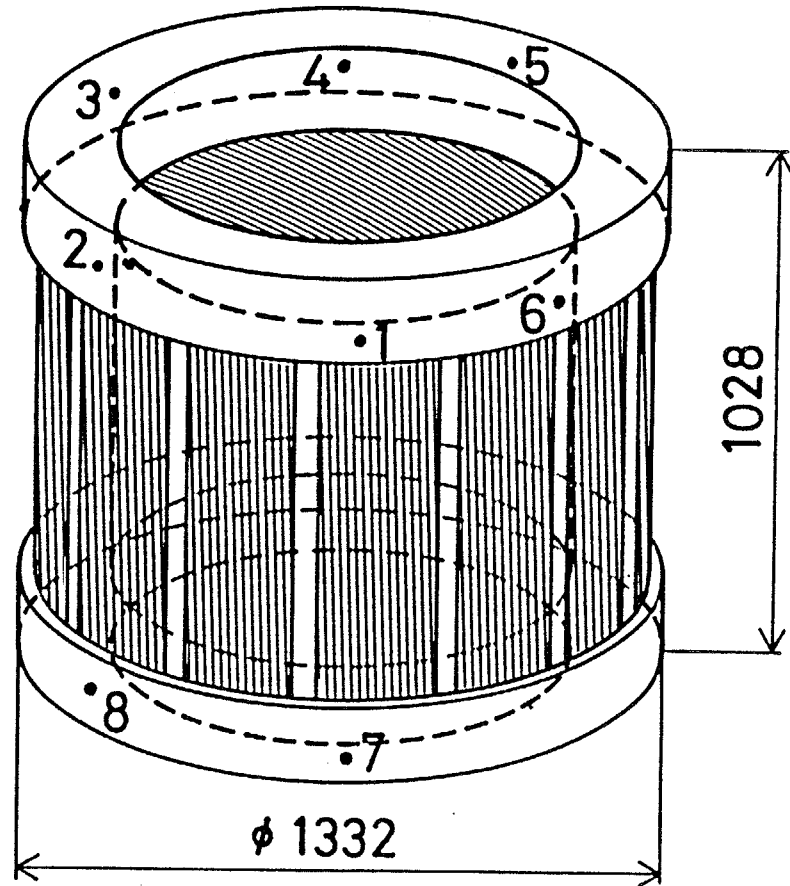


圖 6 - 4 - 2 4 誘導電動機固定子鉄心

表6-4-11 1100Hz ~ 1300Hz の範囲で同定された特性行列

K matrix

1.529644D+07									
-2.365184D+06	2.757605D+07								
4.544545D+05	-1.855779D+07	5.181234D+07							
5.580690D+06	-1.634912D+07	1.730961D+07	2.503587D+07						
-1.792884D+05	-5.565560D+06	1.368802D+07	6.385774D+06	1.436172D+07					
-1.923266D+06	-1.657570D+06	1.785747D+07	2.968807D+06	5.393431D+06	1.813589D+07				
7.340932D+06	-1.212954D+06	-9.004276D+06	5.270743D+05	-1.929711D+06	-9.744664D+06	2.002577D+07			
-1.211973D+06	3.311088D+07	-5.720000D+07	-3.031643D+07	-2.063899D+07	-1.827699D+07	8.608204D+06	8.797561D+07		

Sym.

M matrix

2.679083D-01									
-2.738303D-02	4.700754D-01								
2.113597D-02	-3.064505D-01	9.145099D-01							
1.111796D-01	-2.773673D-01	2.996894D-01	4.388035D-01						
3.841337D-03	-7.584286D-02	2.228976D-01	1.038100D-01	2.396214D-01					
-2.073024D-02	-7.188406D-03	3.062191D-01	3.375241D-02	8.236131D-02	3.138638D-01				
1.202216D-01	-2.106775D-02	-1.376711D-01	2.357839D-02	-1.553040D-02	-1.637004D-01	3.437077D-01			
-2.849079D-02	5.501816D-01	-9.894786D-01	-5.127553D-01	-3.298587D-01	-2.852579D-01	1.360011D-01	1.492296D+00		

Sym.

C matrix

2.726633D+01									
-1.399145D+01	3.309035D+01								
3.748771D+00	-4.047627D+01	1.400622D+02							
1.170374D+01	-2.278404D+01	4.939320D+01	4.374968D+01						
-1.856712D+00	-6.903274D+01	3.965066D+01	1.068869D+01	3.980182D+01					
3.745987D-01	-2.736336D+01	7.287262D+01	1.768460D+01	2.669973D+01	7.185352D+01				
4.083529D+00	1.287882D+01	-4.155132D+01	-1.257449D+01	-2.798512D+01	-3.642426D+01	6.480651D+01			
-1.753467D+01	4.274780D+01	-1.531982D+02	-5.694191D+01	-4.763629D+01	-9.251678D+01	4.878290D+01	1.934126D+02		

Sym.

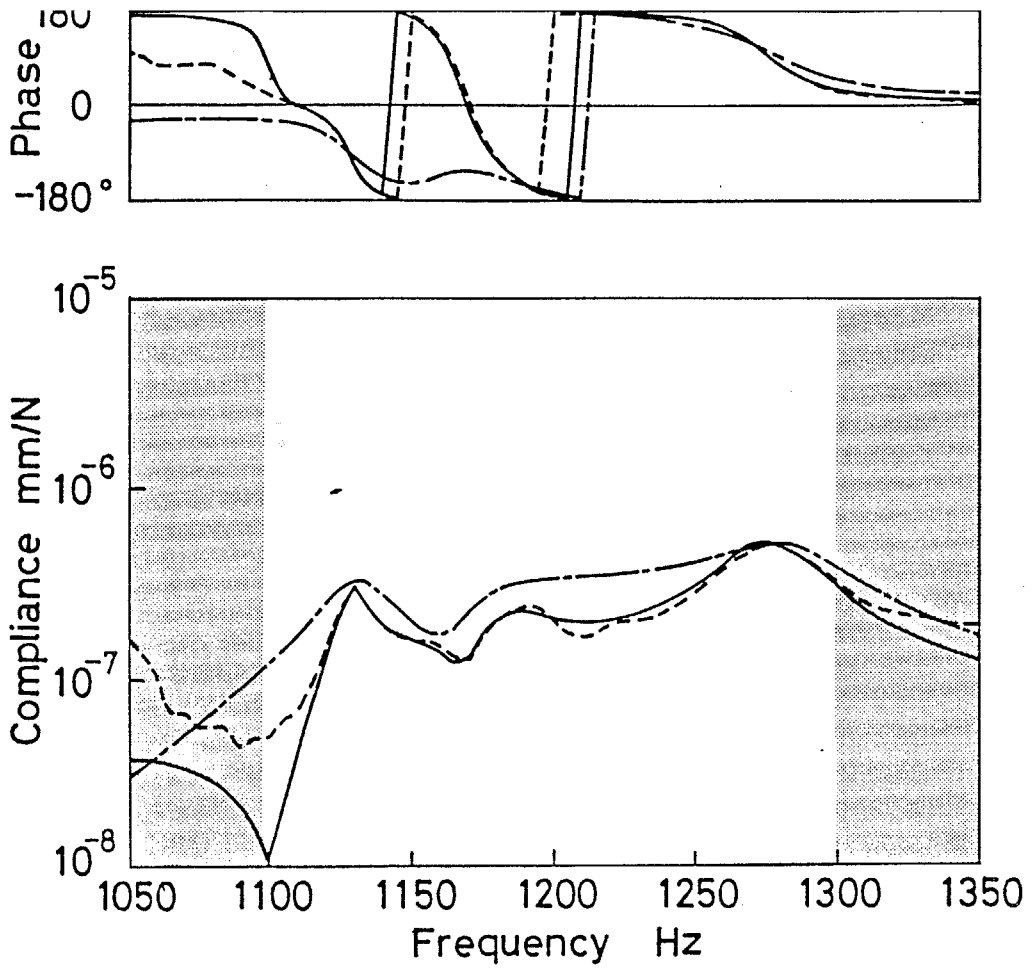


図6-4-25 伝達関数 (励振点: 1 応答点: 3)

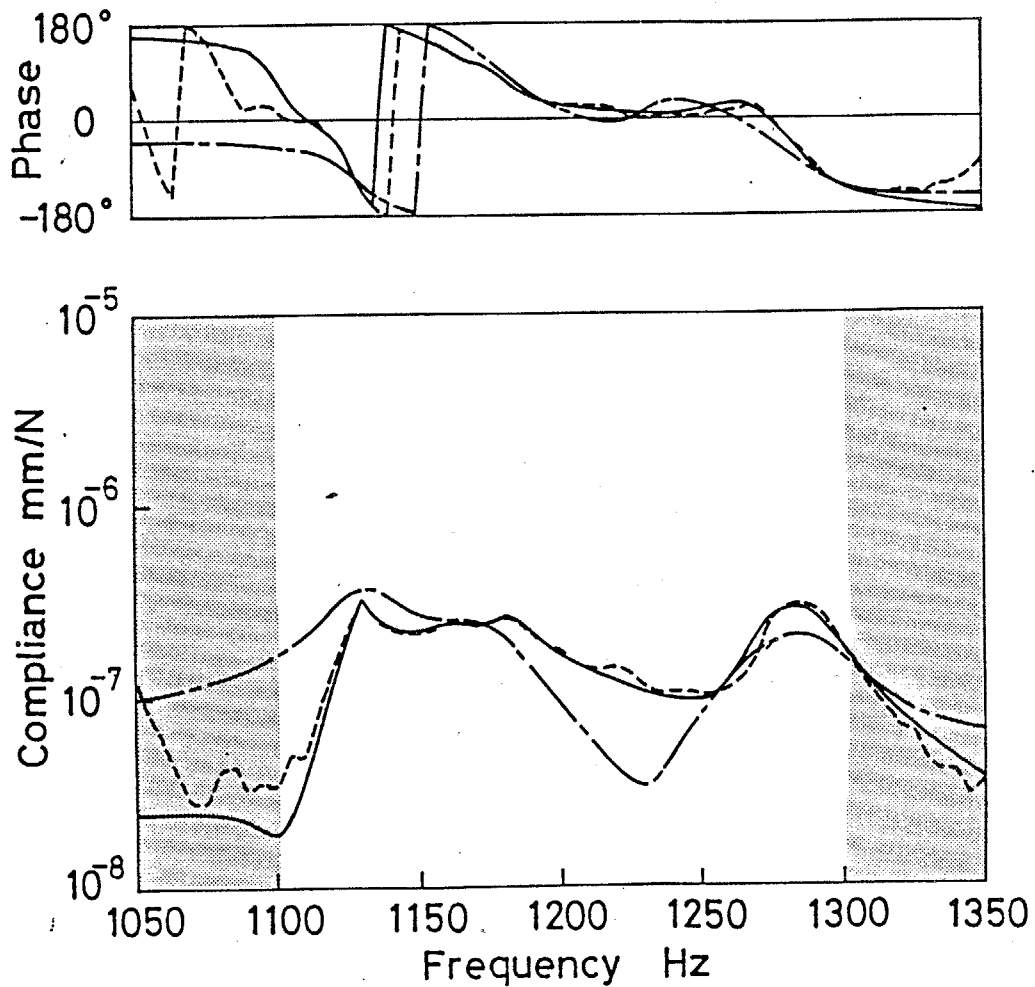


図6-4-26 伝達関数 (励振点: 1 応答点: 4)

6.5 結言

- (1) 誤差を含まない（もしくは誤差が無視できる程度に小さい）振動応答データから特性行列を同定する方法を提案し、シミュレーションによってその理論の正当性を示した。
- (2) 部分構造合成法に利用する目的でモード特性値から特性行列を同定する方法を示した。
- (3) 誤差を含む場合（もしくは誤差が無視できないほど大きい場合）の振動応答データについては統計推定学の理論を利用することによって特性行列を同定する方法を提案した。
- (4) 1自由度系、一端固定平板、周辺自由円板、誘導電動機固定子鉄心についての実測データを用いて、特性行列の同定を行い、その結果、本提案方法の妥当性を明らかにした。

第7章 実機への適用

7.1 緒言

本研究では、第2章から第6章までで各種の部分構造合成法の提案やそれに関連する一連の方法の開発研究を行ってきた。また、各種の方法の比較検討を行ってきた。当然ながら、それらの方法は実用上で有用な働きを期待されるものであるので、実機の機械や機械構造物への適用を行い、その有効性や問題点を明らかにし、改善していくことが重要である。

そこで、本章では、それらの方法の実機への適用例として、工作機械の一種であるマシニングセンター^{<13><14>}、クランク軸・フライホイール系^{<15><16>}、縦型プロセスポンプ^{<17>}および横型連続遠心分離機^{<8>}をとりあげ、それらの解析結果を示し、検討を行う。それらの解析例により、本研究で開発提案する各種の方法の実用上での有用性を示すことができると思われる。

マシニングセンターの解析では、区分モード合成法の実用性を検討するとともに、実験で得られたデータと区分モード合成法で求められた結果を利用して伝達関数合成法によってコラム・ベース・サドルの結合系についての解析を試みる。そして、コラムとベース間のボルト結合部のモデル化とベースとサドルの結合すべり面のモデル化についての実用的な検討を行う。

クランク軸は、区分モード合成法、剰余コンプライアンス行列を用いる不拘束モード合成法、特性行列合成法によって解析する。第5章で提案した方法を利用することによって、不拘束モード合成法の解析精度が結合剛性が大きい実機を対象とした場合においても有限要素法や区分モード合成法と同程度の高いレベルに達することを示す。特性行列合成法による解析は、複雑な実機のクランク軸もひじょうに小さな自由度の解析で精度良く解析され、解析結果はデータベース化による保存利用に便利であるという例として取り上げる。

縦型プロセスポンプは、多重区分モード合成法の実機への適用例として取り上げる。この例から多重区分モード合成法は、区分モード合成法でも解析が困難なさらに大自由度のモデルの解析を効率良く行うことができることを示す。

横型連続円遠心分離機の解析では、区分モード合成法によって台盤とロータの連成振動を効率良くかつ精度良く解くことによって台盤の固有振動数の低下傾向を見積る。このことによって、台盤の設計においては連成振動を十分考慮して振動特性を設定することが重要であることを示すとともに、このような解析に対しても部分構造合成法は有効であることを述べる。

7. 2 マシニングセンター

7. 2. 1 実験方法

ここで取り上げた工作機械のマシニングセンタに対して行った実験方法について述べる。

実験は、モード解析装置を利用した打撃励振実験により行う。すなわち、解析対象物上の測定点に小形加速度計を取りつけておき、先端にロードセルが取り付けられた打撃試験用のインパルスハンマで構造物を励振する。そのときの打撃の衝撃力と、各小形加速度計で検出される加速度応答をA/D変換器を通し、高速フーリエ変換器で周波数領域の離散データとして記憶し、その両者からコンプライアンス(変位/力)を求めてモード解析装置内にある磁気ディスクに保存する。このようにして、励振点の位置と加速度計を取りつける測定点の位置を次々に変えて測定を繰り返すことによって必要な量の実験データを採取する。

区分モード合成法と伝達関数合成法による解析は東京工業大学総合情報処理センタ内の計算機システム内に作成したプログラムで行うのであるが、このようにして実験現場で得たデータは印刷以外の手段によって伝送できないので、モード解析装置で起動できる市販のプログラム(S D R C社 MODAL P L A S Ver.6.0 pre-release = M P L 6 E)により伝達関数をできるだけ忠実に再現できるように曲線適合し、得られたモード特性を印刷し、そのリストを介して計算機センタ内のディスク上に伝達関数を再現し計算精度評価に使用した。

さて、すべての構造物の支持条件は、構造物を防振用ゴム板を何枚か重ねたものの上にのせて、ほぼ周辺自由状態とした。使用した実験装置を以下に示す。

モード解析装置	Gen Rad社 GR2502
インパルスハンマ	PCB205-M08 (#381)
	PCB208-A03 (#2711)
加速度計	PCB308-B02 (#7542, #7544)他
チャージアンプ	PCB480D06

7. 2. 2 実験から得たモード特性の取り扱い

7. 2. 1で記したようにマシニングセンタに対する実験においては市販のモード解析装置を用いて実験データを曲線適合しモード特性を求め、モード特性という形で実験結果を実験現場から研究室へ持って来た。そして、そのモード特性から再現した伝達関数を実験結果とした。そこで、実験から得たモード特性の取り扱いについて述べる。

まず、準備として一般粘性減衰系の伝達関数の定式化について説明する。質量行列を、 $[M]$ 減衰行列を $[C]$ 、剛性行列を $[K]$ とすれば、一般粘性減衰系の運動方程式は

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (7-2-1)$$

となる。ただし、ここで $\{X\}$ は変位ベクトル、 $\{F\}$ は励振力ベクトル、ドットは時間微分を表す。そこで、式 (7-2-2)

$$[M]\{\dot{X}\} - [M]\{\dot{X}\} = \{0\} \quad (7-2-2)$$

と一緒に表すと、

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \dot{X} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ X \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \quad (7-2-3)$$

が得られる。

行列 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ の自由度を n とし、本研究で扱う線形系についてはそれらの行列が実対称行列となることを考慮すれば、式 (7-2-3) の係数行列も実対称行列 (自由度 $2n$) となる。便宜的に、

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ X \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \end{Bmatrix}$$

と書き換えると、式 (7-2-3) は

$$[A]\{\dot{z}\} + [B]\{z\} = \{f\} \quad (7-2-4)$$

と表される。

そこで、式 (7-2-4) の同次式

$$[A]\{\dot{z}\} + [B]\{z\} = \{0\} \quad (7-2-5)$$

を考えて、その解を $\{z\} = \{Y\} e^{st}$ とすれば、次の固有値問題となる。

$$(s[A] + [B])\{Y\} = \{0\} \quad (7-2-6)$$

式 (7-2-6) を解くことによって得られる r 次の固有値を S_r 、それに対応する固有ベクトルを $\{\phi_r\}$ とする。ただし、一般的に固有値は複素数となり、 S の共役な固有値 S_r^* も存在する。また、固有モード $\{\phi_r\}$ も複素数ベクトルとなり、

$$\left. \begin{aligned} \{\phi_r\} &= \begin{Bmatrix} S_r \varphi_r \\ \varphi_r \end{Bmatrix} \\ \{\phi_r^*\} &= \begin{Bmatrix} S_r^* \varphi_r^* \\ \varphi_r^* \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (7-2-7)$$

のような形になる。ここでアスタリスク (*) は共役を意味する。ここで重要な性質として固有モードの直交性が存在することから、

$$\{\phi_r\}^T [A] \{\phi_r\} = \begin{Bmatrix} S_r \varphi_r \\ \varphi_r \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_r \varphi_r \\ \varphi_r \end{Bmatrix} = \varphi_r^T (2S_r[M] + [C]) \varphi_r = a_r \quad (7-2-8)$$

$$\{\phi_r\}^T [B] \{\phi_r\} = \begin{Bmatrix} S_r \varphi_r \\ \varphi_r \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_r \varphi_r \\ \varphi_r \end{Bmatrix} = \varphi_r^T (-S_r^2[M] + [K]) \varphi_r = b_r$$

となる。そして S_r は a_r と b_r のレイリー-商となる性質がある。

$$S_r = - \frac{b_r}{a_r} \quad (7-2-9)$$

今、式(7-2-4)の強制振動の方程式において励振力を $\{f\} = \{f_0\} e^{j\omega t}$ として、その解(応答)を $\{z\} = \{z_0\} e^{j\omega t}$ とすると、これらを式(7-2-4)に代入すれば、

$$j\omega[A]\{z_0\} + [B]\{z_0\} = \{f_0\} \quad (7-2-10)$$

となる。ベクトル $\{z\}$ は1次から $2n$ 次(ただし n 個は残りの n 個のベクトルと互いに共役関係)の固有モード(r 次については式(7-2-7))の一次結合で表されるから

$$\{z_0\} = [\phi]\{\xi\} = \sum_{i=1}^{2n} \xi_i \{\phi_i\} \quad (7-2-11)$$

と表現でき、これを式(7-2-10)に代入し、各項の左辺より $[\phi]^T$ をかければ式(7-2-8)に示す固有モードの直交性によって

$$\left(j\omega \begin{bmatrix} a_r \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_r \\ \vdots \\ b_r \end{bmatrix} \right) \{\xi\} = [\phi]^T \{f\} \quad (7-2-12)$$

のように $2n$ 個の非連成の方程式が成立する。そこで式(7-2-12)からベクトル $\{\xi\}$ の i 番目の成分 ξ_i は

$$\xi_i = \frac{\{\phi_i\}^T \{f\}}{(j\omega a_i + b_i)} \quad (7-2-13)$$

のように簡単に求められる。

これを式(7-2-11)に代入すれば、

$$\{z_0\} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\{\phi_i\}^T \{f\} \{\phi_i\}}{j\omega a_i + b_i} \quad (7-2-14)$$

さらに、式 (7-2-14) に式 (7-2-9) の関係を代入すれば、

$$\{\bar{x}_0\} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\{\phi_i\}^T \{f\} \{\phi_i\}}{a_i(j\omega - s_i)} \quad (7-2-15)$$

となる。

そこで、励振点を j 、応答点を k としたときの $j-k$ 間の伝達関数 G_{kj} は

$$G_{kj} = \frac{X_k}{F_j} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\varphi_k^{(i)} \varphi_j^{(i)}}{a_i(j\omega - s_i)} \quad (7-2-16)$$

となる。ここで、

$$A_{kj}^i = \frac{\varphi_k^{(i)} \varphi_j^{(i)}}{a_i} \quad (7-2-17)$$

を留数 (Residue) と呼び、一般的には式 (7-2-16) は

$$G_{kj} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{A_{kj}^i}{j\omega - s_i} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{A_{kj}^i}{j\omega - s_i} + \frac{A_{kj}^{i*}}{j\omega - s_i^*} \right\} \quad (7-2-18)$$

のように記されていることが多い。

式 (7-2-18) において $i=k$ の成分を $B_{kj}(h)$ で表すと

$$B_{kj}(h) = \frac{A_{kj}^h}{j\omega - s_h} + \frac{A_{kj}^{h*}}{j\omega - s_h^*} \quad (7-2-19)$$

留数 $A_{kj}^h = u_h + j v_h$ のように複素表示すると、

$$B_{kj}(h) = \frac{2}{\Omega_h} \times \frac{u_h \zeta_h - v_h \sqrt{1 - \zeta_h^2} + j u_h \left(\frac{\omega}{\Omega_h}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_h}\right)^2 + 2j \zeta_h \left(\frac{\omega}{\Omega_h}\right)} \quad (7-2-20)$$

のように変形できる。ただし、ここで

$$s_h = -\Omega_h \zeta_h + j \Omega_h \sqrt{1 - \zeta_h^2} \quad (7-2-21)$$

としている。 s_h をこのように表す理由は、多自由度の運動方程式は 1 自由度の重ね合わせで表現できる、ということからである。すなわち、1 自由度系の

運動方程式

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (7-2-22)$$

で解 x を $x = e^{st}$ とすれば、

$$s^2m + sc + k = 0 \quad (7-2-23)$$

この2次方程式から s の値は

$$\begin{aligned} s &= \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \\ &= -\frac{c}{2\sqrt{km}} \sqrt{\frac{k}{m}} \pm j \sqrt{\frac{k}{m}} \times \sqrt{1 - \left(\frac{c}{2\sqrt{km}}\right)^2} \\ &= -\zeta\Omega \pm j\Omega \sqrt{1 - \zeta^2} \end{aligned} \quad (7-2-24)$$

Ω : 不減衰固有角振動数

ζ : 減衰比

$\Omega\sqrt{1-\zeta^2}$: 減衰固有角振動数

となる。そこで、多自由度の系の場合の第 h 次の固有値 S_h も式 (7-2-24) と同じ形で表す。ただし、その場合減衰比 ζ は第 h 次のモード減衰比として ζ_h 、不減衰固有角振動数 Ω は第 h 次の不減衰固有角振動数 Ω_h という具合に添字 h をそえて表す。こうして S_h を表現したのが式 (7-2-21) である。

以上で一般粘性減衰系の定式化ができた。なお、不減衰系と比例粘性減衰系 (粘性減衰行列を剛性行列と質量行列の線形和で表現する系) の場合の定式化も簡単にできるが、ここでは省略する。結果だけ示せば、不減衰系については、

$$B_{kj}(h) = \frac{\phi_k^h \phi_j^h}{k_h \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_h}\right)^2 \right\}} \quad (7-2-25)$$

比例粘性減衰系は、 $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ のように表現すれば、

$$B_{kj}(h) = \frac{\phi_k^h \phi_j^h}{k_h \left[\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_h} \right)^2 \right\} + j \left(\beta + \alpha \frac{1}{\Omega_h^2} \right) \omega \right]} \quad (7-2-26)$$

のようになり、共に固有モードは実数モードとなる。

さて、本実験（マシニングセンタの振動試験）において使用した曲線適合は、時間領域での多自由度曲線適合（MDOF）として最も標準的な手法である「プロニーの方法」と呼ばれるものである。この方法を簡単に述べる。⁽⁴¹⁾

単位衝撃応答は

$$R(t) = \sum_{i=1}^n (a_i e^{s_i t} + a_i^* e^{s_i^* t}) \quad (7-2-27)$$

そこで、測定で得られた単位衝撃応答のデータは式（7-2-27）の関数上にのるはずであるので、それらのデータを用いて式（7-2-27）中の係数 a_i 、 a_i^* 、指数部の係数 s_i 、 s_i^* の最適値を決定すればよいのである。

測定によって等間隔 Δt ごとにデータをとれば、第 k 番目のデータを取り込む時刻（開始時刻を基準）は

$$t_k = (k-1)\Delta t \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

となる。しかし、ここでは便宜上

$$t_k = k\Delta t \quad (k=0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (7-2-28)$$

のように書き表すことにする。そして、 $t_k = k\Delta t$ の時点で得られる応答値を $r(t_k)$ とすると、それは式（7-2-27）を満足するはずであるから

$$r(t_k) = \sum_{i=1}^n (a_i e^{s_i k\Delta t} + a_i^* e^{s_i^* k\Delta t}) \quad (7-2-29)$$

ここで、 $x_i = e^{s_i \Delta t}$ 、 $x_i^* = e^{s_i^* \Delta t}$ とすれば、式（7-2-29）は

$$r(t_k) = \sum_{i=1}^n (a_i x_i^k + a_i^* x_i^{*k}) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i^k \right\} \quad (7-2-30)$$

式（7-2-27）中の決定すべき未知数は $4n$ 個の（ a_i の実部と虚部および s_i の実部と虚部）であるので、最低で $4n$ 個のデータがあればそれらを決定することができる。しかし、式（7-2-27）は未知数に関して線形な式ではないので簡単には計算できない。通常やり方では反復法によるだろう。しかし、それでは計算時間が多くかかってしまうおそれがある。そこで、次に示すようなプロニーの方法と呼ばれる方法を用いている。

x_i と x_i^* ($i = 1 \sim n$) を根とする $2n$ 次の多項式を考えると、

$$\prod_{i=1}^n (X - x_i)(X - x_i^*) = \sum_{i=0}^{2n} b_i X^i = 0 \quad (7-2-31)$$

(b_i は実数, $b_{2n} = 1$)

そこで、式 (7-2-30) の両辺に b_i を乗じて辺々加えれば、

$$b_0 r(0) = 2b_0 a_1 x_1^0 + 2b_0 a_2 x_2^0 + \dots + 2b_0 a_n x_n^0$$

$$b_1 r(\Delta t) = 2b_1 a_1 x_1^1 + 2b_1 a_2 x_2^1 + \dots + 2b_1 a_n x_n^1$$

$$\vdots$$

$$+ \quad b_{2n} r(2n\Delta t) = 2b_{2n} a_1 x_1^{2n} + 2b_{2n} a_2 x_2^{2n} + \dots + 2b_{2n} a_n x_n^{2n}$$

$$\sum_{i=0}^{2n} b_i r(i\Delta t) = 2a_1 \sum_{i=1}^{2n} b_i x_1^i + 2a_2 \sum_{i=1}^{2n} b_i x_2^i + \dots + 2a_n \sum_{i=1}^{2n} b_i x_n^i \quad (7-2-32)$$

x_i ($i = 1 \sim n$) は式 (7-2-31) の根であるから式 (7-2-32) の右辺はすべて零になる。そこで、式 (7-2-32) は

$$\sum_{i=0}^{2n-1} b_i r(i\Delta t) = -r(2n\Delta t) \quad (7-2-33)$$

となり、 $(2n+1)$ 個のデータ列 $r(i\Delta t)$ ($i = 0 \sim 2n$) が $2n$ 組あれば式 (7-2-33) から b_i ($i = 0 \sim 2n-1$) を求めることができる。ただし、実際のデータには誤差が必ず含まれているので、この過程は最小二乗法の手法により $2n$ 組よりも多くのデータを用いて b_i ($i = 0 \sim 2n-1$) を決定する。すなわち、誤差関数を入とすると、

$$\lambda = \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ \sum_{i=0}^{2n-1} b_i r((j+i)\Delta t) + r((j+2n)\Delta t) \right\}^2 \quad (7-2-34)$$

偏微分 $\partial\lambda / \partial b_i = 0$ より次の $2n$ 組の式が成り立つ。

$$\sum_{i=0}^{2n-1} b_i \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} r((j+i)\Delta t) \cdot r((j+k)\Delta t) \right\} + \sum_{j=0}^{m-1} r((j+2n)\Delta t) \cdot r((j+k)\Delta t) = 0 \quad (7-2-35)$$

($k = 0 \sim 2n-1$)

便宜的に

$$R_{ik} = \sum_{j=1}^m r((j+i)\Delta t) \cdot r((j+k)\Delta t) \quad (7-2-36)$$

とおく。すると R_{ik} は時系列データにおける自動相関関数 $R(|i-k|)$ に等しくなる。すなわち、 m が十分大きければ R は $|i-k|$ だけの関数になり、例えば $R_{13} = R_{31} = R_{42} = R_{24}$ のようになる。すると、式 (7-2-35) は

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(2n-1) \\ R(1) & R(0) & & R(2n-2) \\ R(2) & R(1) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R(2n-1) & R(2n-2) & \cdots & R(0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{2n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R(2n) \\ R(2n-1) \\ \vdots \\ R(1) \end{Bmatrix} \quad (7-2-37)$$

のように表される。この連立方程式を解くことによって b_i ($i=0 \sim 2n-1$) を求める。そうすれば式 (7-2-31) の $2n$ 次実数多項式を数値解析で求めれば n 組の共役根 (x_i, x_i^*) ($i=1 \sim n$) が求まる。この場合の多項式の解法としてはベアストア-ヒッチコック法が計算過程も簡単であり計算速度も速いので適していると思われる。 x_i が求めれば $x_i = e^{s_i \Delta t}$ の関係があるから、

$$\operatorname{Re}(x_i) + j \operatorname{Im}(x_i) = e^{-\sigma_i \Delta t} (\cos \omega_i \Delta t + j \sin \omega_i \Delta t) \quad (7-2-38)$$

と表現して、

$$\sigma_i = \frac{-\ln \sqrt{|x_i|^2}}{\Delta t} \quad (7-2-39)$$

$$\omega_i = \frac{1}{\Delta t} \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im}(x_i)}{\operatorname{Re}(x_i)} \quad (7-2-40)$$

のように求められる。ここで $\operatorname{Re}(x_i)$ は x_i の実部、 $\operatorname{Im}(x_i)$ は x_i の虚部を示す。あとは、 a_i と a_i^* を求めればよい。そこで $a_i = U_i + j V_i$ と表すと式 (7-2-30) は次のように変形できる。

$$r(t_k) = 2 \sum_{i=1}^n \{ \operatorname{Re}(\chi_i^k) U_i - \operatorname{Im}(\chi_i^k) V_i \} \quad (7-2-41)$$

そこで、測定データを式(7-2-41)に代入して、最小二乗法で U_i と V_i ($i=1 \sim n$)を簡単に求めることができる。

以上が本実験結果のモード解析に使用した時間領域の曲線適合のアルゴリズムの説明である。

実際のプログラムでは、このアルゴリズムに次に示す剰余項と慣性項の便宜的な考慮過程が組み込まれている。

この曲線適合で得られるものは固有角振動数 Ω_i 、モード減衰比 ζ_i および留数 $A_{kj}^{(i)}$ である。そこで、これらを式(7-2-18)に示す周波数領域上の伝達関数の式に代入し、実験で得られている元の生データ(伝達関数の形にFFT変換したもの)と比較することによって次式に示す慣性拘束 Y_{kj} と剰余コンプライアンス Z_{kj} の最適値を求める。

$$G_{kj} = -\frac{Y_{kj}}{\omega^2} + \sum_{i=1}^n \frac{2(U_i \zeta_i - V_i \sqrt{1-\zeta_i^2}) \Omega_i + 2j U_i \omega}{\Omega_i^2 - \omega^2 + 2j \zeta_i \omega \Omega_i} + Z_{kj} \quad (7-2-42)$$

なお、慣性拘束 Y_{kj} は剛体モード成分のみと考え実数、また剰余コンプライアンスについても虚部の値は実部の値に較べて十分小さいと考えられるので無視し、 Z_{kj} も実数値とする。

次に、固有モードの求め方について記す。固有モードはベクトルである。そこで、第 i 次の固有モードベクトルの自由度 k に対応する成分を $\psi_k^{(i)}$ 、自由度 j に対応する成分を $\psi_j^{(i)}$ とすると、留数 $A_{kj}^{(i)}$ とこれらの関係は

$$A_{kj}^{(i)} = \frac{\psi_k^{(i)} \psi_j^{(i)}}{a_i} \quad (7-2-43)$$

$A_{kj}^{(i)}$ は既知の値と次元($[T]^{-1}[M]^{-1}$)をもっているために、正規化は a_i の取り扱い方による。 a_i は任意の複素数をとることが可能であり、これによって $\psi_k^{(i)}$ の値は決定される。ここでは比例粘性減衰との互換性を考慮し、

$$a_i = j 2 \frac{k_i}{\Omega_i} \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (\text{純虚数}) \quad (7-2-44)$$

とする。さらに、式(7-2-44)で k_i の値は不定であるので $k_i = 1$ と設定する。このように定める利点は

(1) 比例粘性減衰、もしくは不減衰に近い場合、固有モード成分の位相は0または π に近くなり、その値の実部が虚部の値に較べて大きくなるのでモード形の確認上、同位相か逆位相であるかを簡潔に行える。

(2) 固有モード係数の積の次元がコンプライアンスと等しくなる。

さて、次のようにして複数の測定点の留数 A_{kj} から固有モードの成分を計算することができる。すなわち、

$$|a_i| = \frac{2}{\Omega_i} \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (7-2-45)$$

として、まず基準となる自己応答伝達関数(励振点の自由度に対応する)の留数

$$A_{kk}^i = \frac{\psi_k^{(i)} \psi_k^{(i)}}{a_i} \quad (7-2-46)$$

から、

$$\left. \begin{aligned} |\psi_k^{(i)}| &= \sqrt{|A_{kk}^i| \times |a_i|} \\ \arg|\psi_k^{(i)}| &= \frac{1}{2} \left(\arg|A_{kk}^i| + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7-2-47)$$

ここで、記号 $| \quad |$ は絶対値、 \arg は偏角を示す。もしも減衰が小さければ、 $\arg|A_{kk}^i| = -\pi/2$ となるので $\arg|\psi_k^{(i)}| = 0$ となる。

次に、励振点以外の自由度に対応する固有モードの成分は $A_{jk}^i = \psi_k^{(i)} \psi_j^{(i)} / a_i$ だから

$$\left. \begin{aligned} |\psi_j^{(i)}| &= |a_i| \times \frac{|A_{jk}^i|}{|\psi_k^{(i)}|} \\ \arg|\psi_j^{(i)}| &= \arg|A_{jk}^i| - \arg|\psi_k^{(i)}| + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (7-2-48)$$

として求められる。この解析を行うには、振動試験から十分良好なデータ（測定精度が良く、かつすべての次数の固有モード）を得て、さらに曲線適合も精度良く行う必要がある。

7. 2. 3 マシニングセンタの分割方法

解析対象のマシニングセンタの概略図を図7-2-1と図7-2-2に示す。本マシニングセンタの主要構造はコラム、ベース、サドル、テーブルおよびスピンドルヘッドの5つである。しかし、スピンドルヘッドとテーブルはその内部に多くの歯車や軸受や油圧装置を有しており、有限要素分割等によるモデル化が困難であるので解析対象から除き、振動の主要な伝達経路である、コラム・ベース・サドルの結合系について解析を行う。

工作機械が工作物を加工中に発生することのある、いわゆるビビリ振動はたいへん重要な問題であり、その物理現象の解明と対策は必ずなされなければならない問題である。しかし、残念ながら現時点での技術（研究）レベルではそこまでは困難であると思われる。

コラムとベースは図7-2-3に示すように、10本のボルト（M20）により結合されており、ベースとサドルは平行な2本のすべり面とそれらの中間位置にある送りねじにより結合している。材質は3つの部分構造物とも同一であり、以下に示す。

材 料 名	: ミーハナイト鋳鉄
縦弾性係数	: $1.00 \times 10^5 \text{ N/mm}$
密 度	: $7.22 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}$
ポアソン比	: 0.29

以後の説明上の便宜から座標系は図7-2-1に示すように定義する。

各構造物単体の動特性を計算で求める時には、図7-2-1に示すように有限要素分割する。

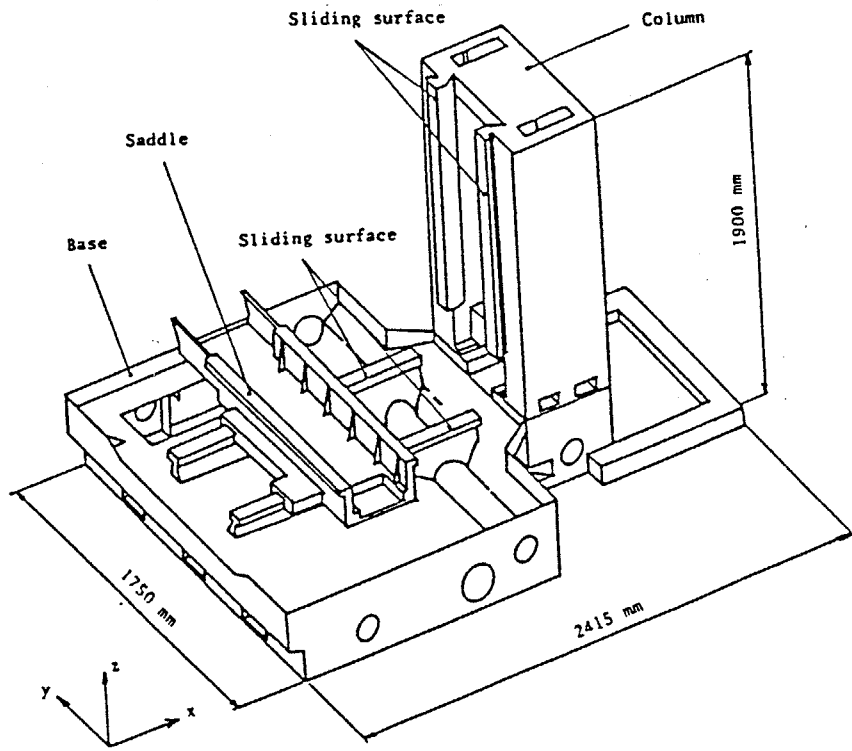


図7-2-1 コラム・ベース・サドルの結合系概略図

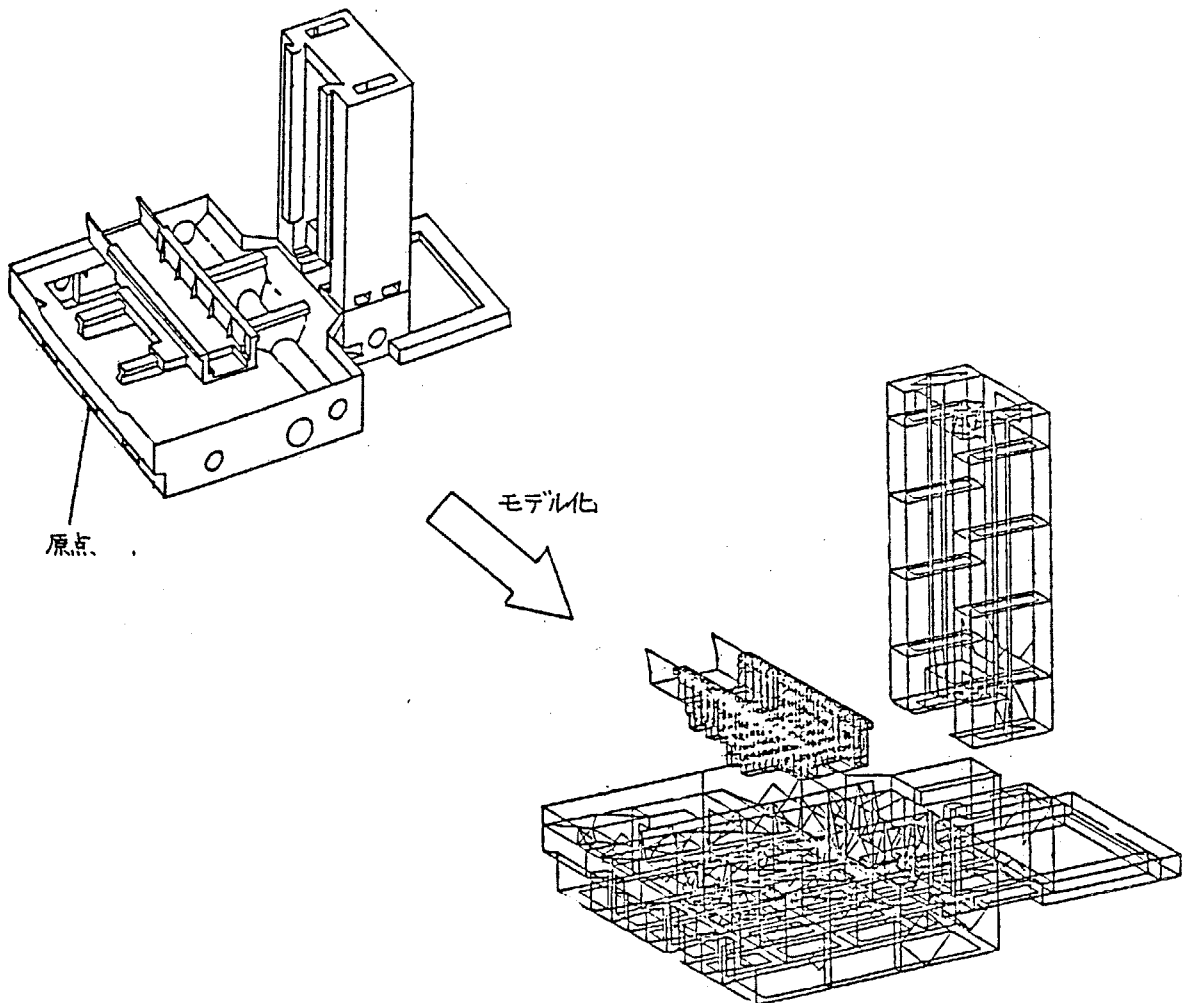


図7-2-2 コラム・ベース・サドルのモデル化の概略

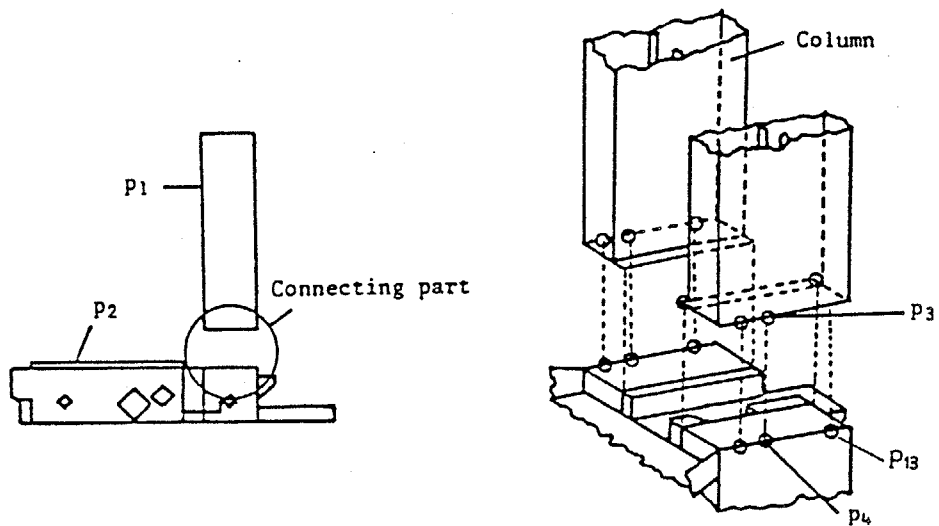


図7-2-3 ベースとコラム間の結合部

7. 2. 4 部分構造の解析

CMSの実機に対する適用例の一つとして、マシニングセンタの主要部分構造（コラム・ベース・サドル）単体について振動解析を試みる。

7. 2. 4. a. コラムの解析

図7-2-4に示すようにコラム単体を全系とし、これを6個の分系に分ける。各分系は1節点6自由度の平面三角形殻要素とはり要素により有限要素分割を行う。各分系の結合領域bと内部領域aの節点数ならびに要素数を表7-2-1に示す。また、図7-2-5は分系2と4の有限要素分割例である。これらの分割により作成した質量行列から算出したコラムの質量は772.5kgである。一方、設計質量は745kgであり、両者を比較すれば本有限要素分割は妥当であると思われる。

採用モード数は、各分系の内部領域が10、結合領域が30（剛体モード6個も含む）である。したがってモード座標上における全系の自由度は90になり、30次までの固有モードを計算する。

伝達関数の計算に必要な9次以上のモード減衰比は $\alpha = 0.603$ 、 $\beta = 0.779 \times 10^{-5}$ として式3-3-25により決定する。

計算時間は、6分系の内部領域の固有モード50.73秒、静縮小58.11秒、結合領域の固有モード27.45秒、全系の固有モード2.66秒、物理座標への変換と伝達関数3.57秒の合計142.52秒であった（著者作成のプログラムでHITAC-M200Hシステム使用）。有限要素法でコラムを計算した経験はないが、他の供試体による比較例や企業の設計担当者の経験によれば、この計算時間は、NASTRAN等により有限要素法を直接適用するよりもはるかに短いと考えられる。

表7-2-2に、計算と実験の固有モードの対応がついた8次までの固有振動数とモード減衰比を示す。固有振動数の計算誤差は、8次を除いては4%以内であり、良く合っていると見える。

図7-2-6は、1次と2次の固有モードの比較図である。実験のモード形はコラム表面の測定点の振幅を直線で結んだものである。1次は全体のねじれ、2次は全体のふくらみのモード形であり、計算結果は実験結果と一致している。8次までの固有モードのすべてについて、両者は図7-2-6と同程度の一致を示した。

図7-2-7は図7-2-5の点P1の自己伝達関数であり、図7-2-8は図7-2-5の点P1とP2の間の相互伝達関数である。いずれも実線が計算結果（CMS）、点線が実験結果である。図7-2-7の実線と点線を比較すると、両者は450Hz以下では良く一致しているが、450Hz以上では相違が大きくなる。そこで、実験結果（曲線適合による再構成曲線）から剰余

コンプライアンスを除いて伝達関数を再構成すると、図7-2-7の一点鎖線のようになり450 Hz以上でも計算結果に近くなる。このことから、450 Hz以上での両者の相違は、区分モード合成法による計算では剰余コンプライアンスを計算できないためであることがわかる。しかし、図7-2-8ではこのような高周波領域の誤差は図7-2-7ほど顕著ではない。剰余コンプライアンスは高次モードの影響を近似するから、それが相互伝達関数より自己伝達関数の方に顕著に現われるのである。その理由は次のように推定できる。すなわち、自己応答では高次モードがすべて同位相で重なり合って蓄積されるのに対し、相互応答では高次モードに同位相と逆位相がほぼ同じ割合で存在し重なり合うために相殺されるからであると思われる。他の部分の伝達関数についても、計算結果と実験結果は図7-2-7、7-2-8と同程度に一致した。

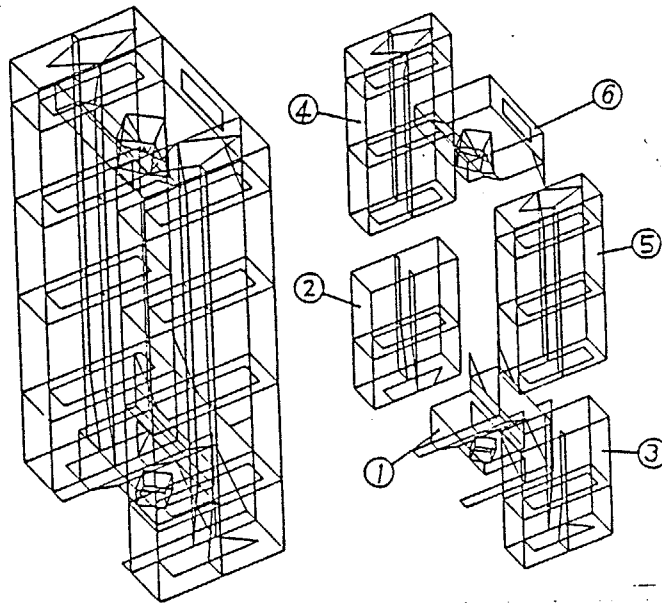


図 7 - 2 - 4 コラムの分系への分割図

表 7 - 2 - 1 コラムの有限要素分割

Component No.	Number of nodal points			Number of finite elements	
	A	B	C	D	E
1	51	27	24	78	0
2	70	27	43	131	2
3	73	28	45	137	2
4	90	22	68	193	5
5	90	23	67	193	5
6	38	17	21	61	0
Total	340	72	268	793	14

A: Each component.
 B: Interface region.
 C: Interior region.
 D: Triangular elements.
 E: Beam elements.

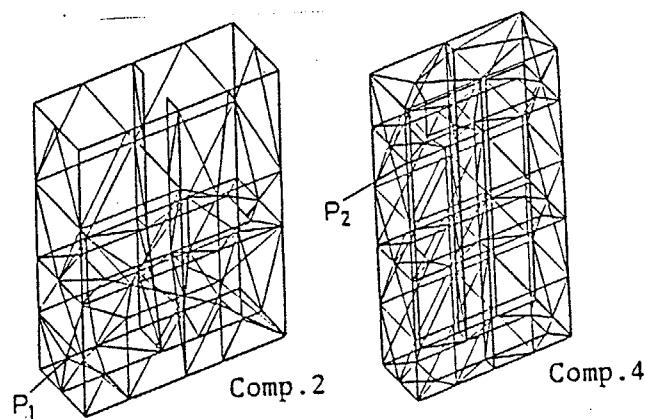


図 7-2-5 分系 2 と 4 の有限要素分割

表 7-2-2 コラムの固有振動数

Order	CMS(Hz)	EXP.(Hz)	Error(%)	Modal damping ratio
1	195	203	-3.5	0.0020
2	234	242	-3.1	0.0014
3	260	260	0.0	0.0039
4	364	372	-2.1	0.0016
5	421	423	-0.41	0.0026
6	478	497	-3.8	0.0024
7	551	550	0.13	0.0011
8	560	606	-7.6	0.0043

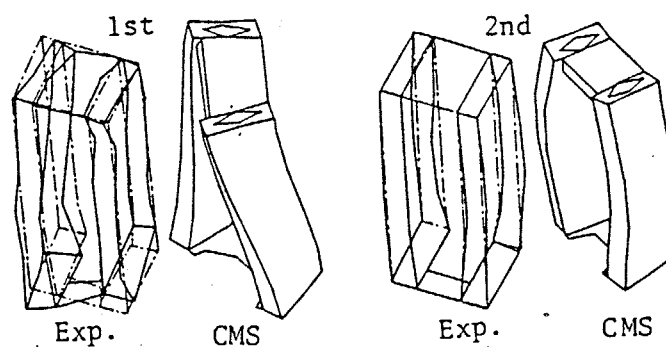


図 7-2-6 コラムのモード形の一例

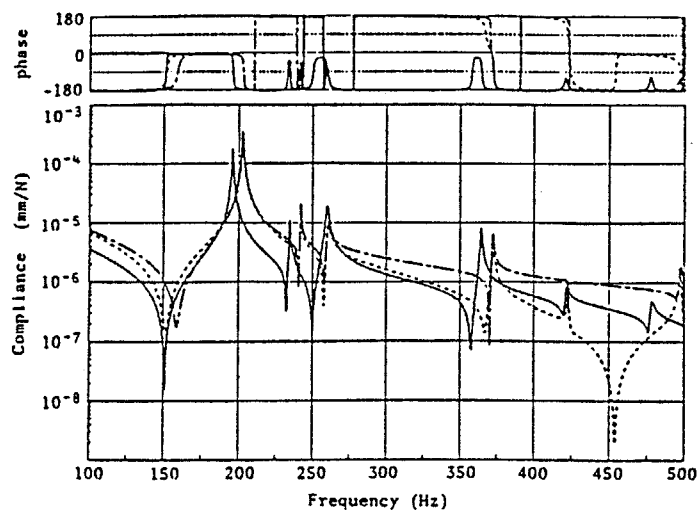


图 7-2-7 自己伝達関数 (励振点: P 1、応答点: P 1)

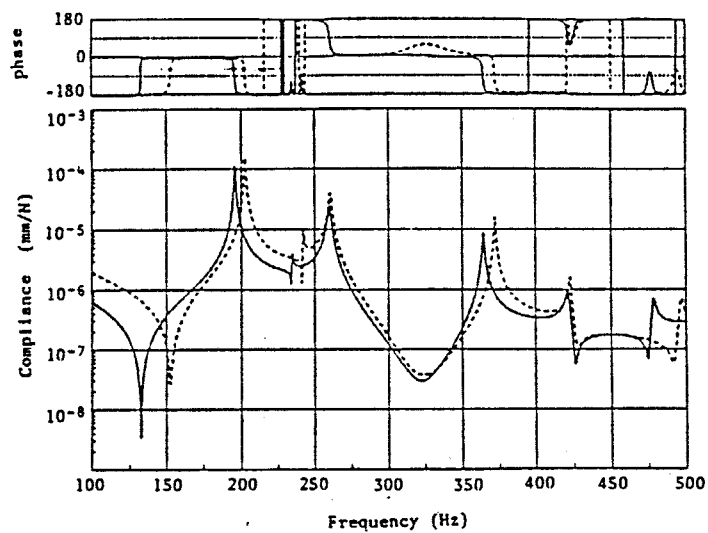


图 7-2-8 相互伝達関数 (励振点: P 1、応答点: P 2)

7. 2. 4. b. ベースの解析

図7-2-9に示すように、ベース単体を全系としこれを8個の分系に分ける。各分系は、コラムの場合と同様に三角形殻要素とはり要素により有限要素分割を行う。各分系の結合領域bと内部領域aの節点数ならびに要素数を表7-2-3に示す。また図7-2-10は分系7の有限要素分割図であり、太線が分系概形、細線が要素境界である。この分割により作成した質量行列から算出したベースの質量は1802kgである。一方設計質量は1810kgである、両者を比較すれば本要素分割は妥当であると思われる。

採用モード数は、分系1~7が10であるが、分系8だけは他の分系より固有振動数かなり低いので、20とする。また結合領域を30とする。したがって、モード座標系における全系の自由度は120になり、30次までの固有モードを計算する。

伝達関数の計算に必要な8次以上のモード減衰比は $\alpha = 0.603$ 、 $\beta = 0.189 \times 10^{-5}$ として、式3-3-25により決定する。

計算時間は、8分系の内部領域の固有モード286.32秒、静縮小410.95秒、結合領域の固有モード407.66秒、全系の固有モード4.71秒、物理座標への変換と伝達関数8.98秒、合計1118.62秒であった(HITAC-M200Hシステム使用)。

表7-2-4に、計算と実験の固有モードの対応がついた7次までの固有振動数とモード減衰比を示す。計算では5次の固有モードが算出されていない。算出されたモードの固有振動数の計算誤差は、3次と4次以外では4%以内であるが、3次と4次では大きい。表7-2-5は、各分系の有限要素分割の方法を変えた3通りの計算結果である。表7-2-5をみると、1次、2次、5次および6次の固有振動数は分割方法を変えてもあまり変化しないが、3次と4次の固有振動数は比較的大きく変化し、節点数の増加に伴って減少し、実験値に近づくことがわかる。このことから、3次と4次の計算に対しては、本報告の有限要素分割は若干粗いのではないかと思われる。

図7-2-11は1次と3次の固有モードの比較図である。1次はy軸まわりの全体曲げ、2次と3次は全体のねじれのモードであり、5次を除く7次までの固有モードはすべて計算結果と実験結果が図7-2-11と同程度の一致を示した。

図7-2-12は図7-2-10の点P3の自己伝達関数であり、図7-2-13は図7-2-10の点P3とP4の間の相互伝達関数である。いずれも実線が計算結果、点線が実験結果である。構造が複雑なために伝達関数も複雑であるが、両結果は良く一致しているといえる。他の伝達関数についても、図7-2-12、図7-2-13と同様の良い一致を示した。

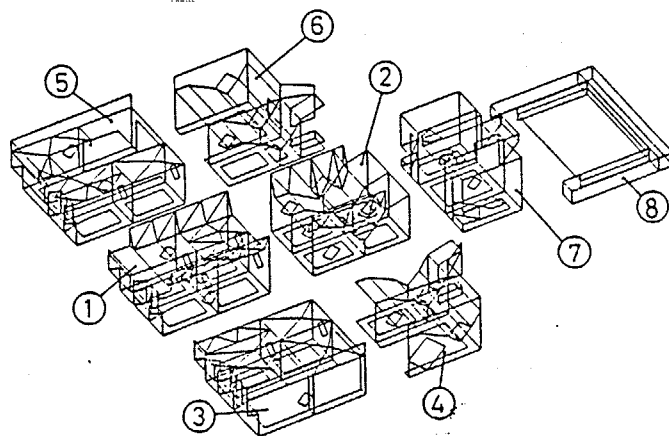


図 7 - 2 - 9 ベースの分系への分割図

表 7 - 2 - 3 ベースの有限要素分割

Component No.	Number of nodal points			Number of finite elements	
	A	B	C	D	E
1	160	43	117	307	8
2	140	55	85	254	8
3	129	29	100	231	2
4	106	33	73	172	2
5	128	29	99	221	8
6	107	33	74	176	2
7	126	41	85	241	16
8	97	13	84	168	2
Total	847	130	717	1770	48

A: Each component.
 B: Interface region.
 C: Interior region.
 D: Triangular elements.
 E: Beam elements.

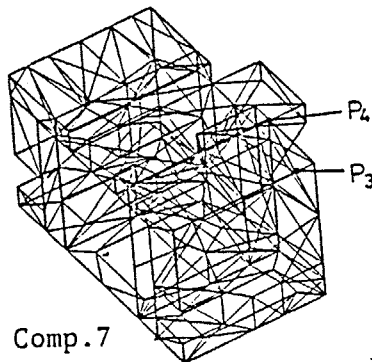


図 7 - 2 - 10 ベースの分系 7 の有限要素分割

表 7-2-4 ベースの固有振動数

Order	CMS(Hz)	EXP. (Hz)	Error(%)	Modal damping ratio
1	111	108	2.4	0.0011
2	113	113	0.0	0.0031
3	164	146	12.4	0.0039
4	242	215	12.6	0.0016
5		236		
6	255	247	3.4	0.0019
7	261	259	0.77	0.0020

表 7-2-5 節点数による固有振動数の変化

		Cal.A	Cal.B	Cal.C
Number of nodal points		695	768	847
Number of finite elements		1522	1621	1770
Natural frequency (Hz)	1	110	110	111
	2	114	114	113
	3	175	169	164
	4	250	245	242
	5			
	6	261	258	255
	7	266	263	261
Number of calculated natural frequencies		20	20	30
CPU time (sec.)		361	458	1119

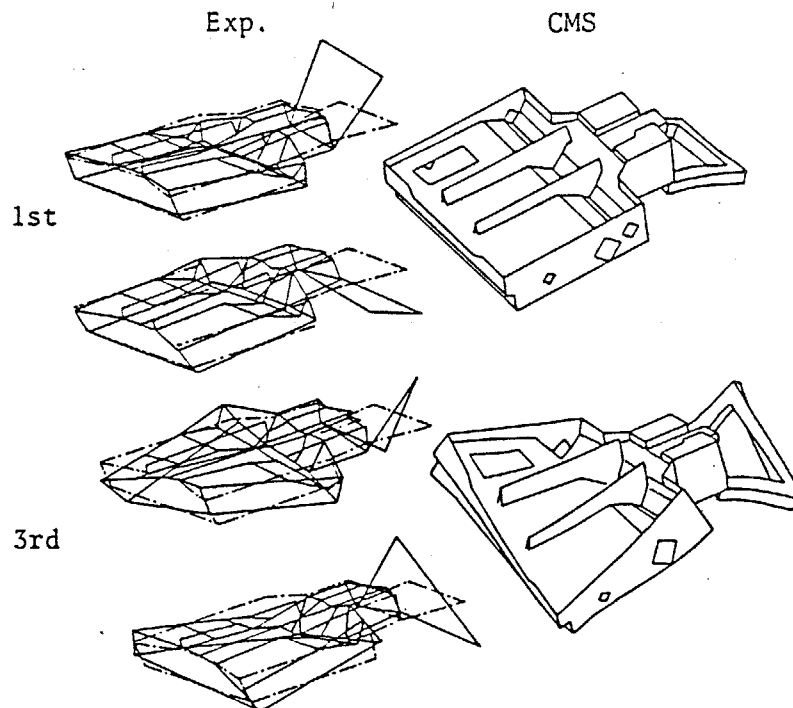


図 7-2-11 ベースのモード形の一例

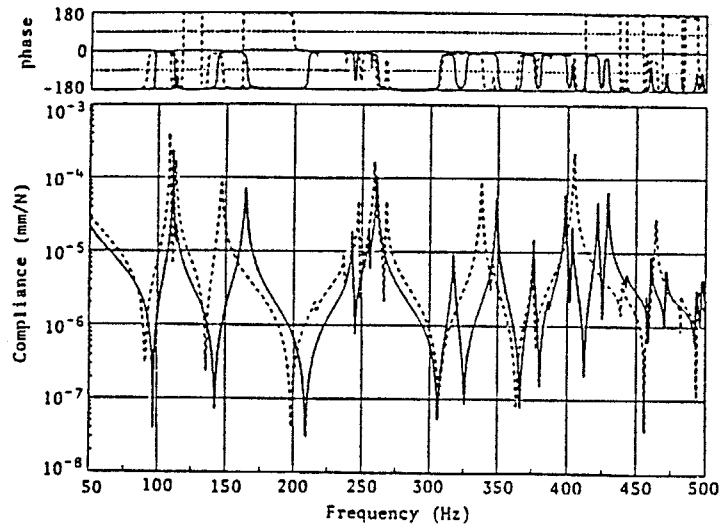


図7-2-12 点P3の自己伝達関数

実線：計算結果

点線：実験結果

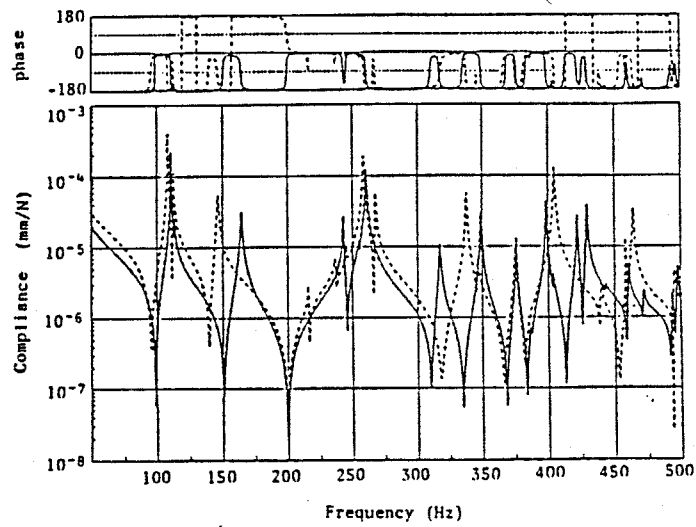


図7-2-13 点P3と点P4の相互伝達関数

実線：計算結果

点線：実験結果

7. 2. 4. c. サドルの解析

図7-2-14に示すように、サドル単体を全系とし、これを9個の分系に分ける。サドルは肉の厚い部分が多いので、各分系は、1節点3自由度の8節点からなるアイソパラメトリック6面体要素、1節点6自由度の三角形殻要素およびはり要素により有限要素分割を行う。そして、殻要素と6面体要素が共有する節点における自由度を一致させるため、質量が十分小さく面外曲げのみに剛性を有する四辺形要素を新たに設定し、これを6面体要素に貼りつける。各分系の結合領域bと内部領域aの節点数、ならびに要素数を表7-2-6に示す。また図7-2-15は分系4と5の有限要素分割例であり、太線が分系概形、細線が要素境界である。

採用モード数は、分系1~8が10であるが、分系9だけは他の分系より固有振動数がかかなり低いので20とする。また結合領域を30とする。したがって、モード座標系における全系の自由度は130になり、3.0次までの固有モードを計算する。

伝達関数の計算に必要な10次以上のモード減衰比は $\alpha = 1.40$ 、 $\beta = 0.257 \times 10^{-4}$ として、式(3-3-25)により決定する。計算時間は全部で427秒であった。

表7-2-7に、計算と実験の固有モードの対応がついた9次までの固有振動数とモード減衰比を示す。実験では3次のモードがはっきり認知できなかった。計算誤差は、1次、5次、6次および7次では4%以内で小さいが、それ以外は10%以上とかなり大きくなっている。

図7-2-16は、1次と2次の固有モードの比較図である。1次は全体のねじれ、2次はx軸まわりの全体曲げのモードである。3次以外9次までは、固有振動数の誤差が10%以上の次数についても、固有モードの計算結果は実験結果と良好な対応を示した。

図7-2-17は、図7-2-15の点P6の自己伝達関数であり、図7-2-18は図7-2-15の点P5とP6の間の相互伝達関数である。いずれも実線が計算結果、点線が実験結果である。図7-2-17と図7-2-18共に、伝達関数の計算結果は実験結果と一致しているが、図7-2-7、7-2-8、7-2-12および7-2-13より若干大きいようである。サドルの固有振動数と伝達関数の計算誤差が、コラムとベースよりも若干大きいことは、鉄塊のように極端に肉厚な部所と薄肉かくが混在する構造物のモデル化が困難であることを示しており、本有限要素分割はさらに改良すべきであろう。ただ、表7-2-6や図7-2-17と7-2-18の精度は、現段階における実用には十分であると考えられる。

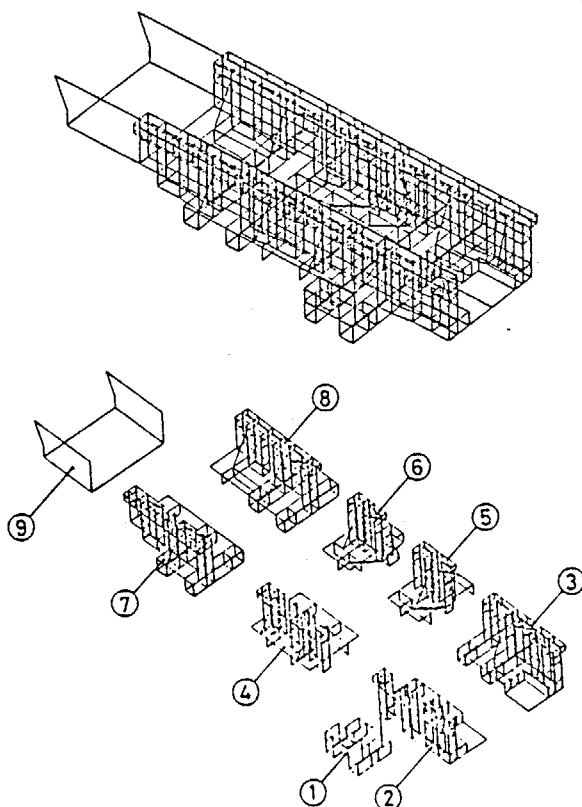


図7-2-14 サドルの分系への分割図

表7-2-6 サドルの有限要素分割

Component No.	Number of nodal points			Degree of freedom	Number of finite elements			
	A	B	C		D	E	F	G
1	39	10	29	115	18	8	0	1
2	120	33	87	347	55	35	0	9
3	128	28	100	402	62	38	0	9
4	112	37	75	318	66	30	0	10
5	80	38	42	185	47	18	0	8
6	80	38	42	185	47	18	0	8
7	115	33	82	318	49	34	1	8
8	115	34	81	315	49	34	1	8
9	46	13	33	186	62	0	18	0
Total	699	128	571	2369	455	215	20	61

A: Each component.
 B: Interface region.
 C: Interior region.
 D: Triangular elements.
 E: Hexahedral elements.
 F: Beam elements.
 G: Rectangular elements.

表 7-2-7 サドルの固有振動数

Order	CMS(Hz)	EXP.(Hz)	Error(%)	Modal damping ratio
1	172	167	2.9	0.0047
2	374	425	-12.0	0.0032
3	374			
4	381	439	-13.0	0.00088
5	490	473	3.7	0.0011
6	516	511	1.1	0.0019
7	645	656	1.7	0.0011
8	773	679	14.0	0.0016
9	799	699	14.0	0.0040

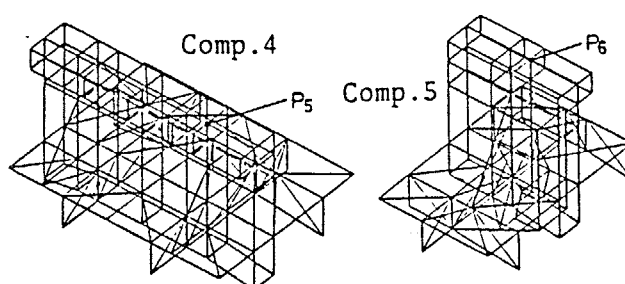


図 7-2-15 サドルの分系 4、5 の有限要素分割図

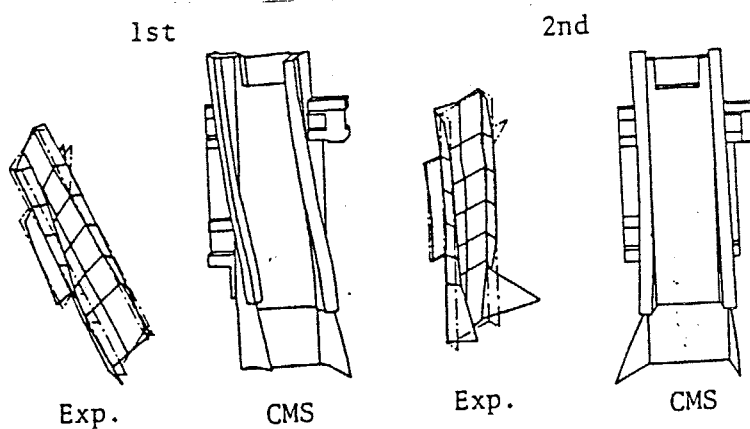


図 7-2-16 サドルのモード形の一例

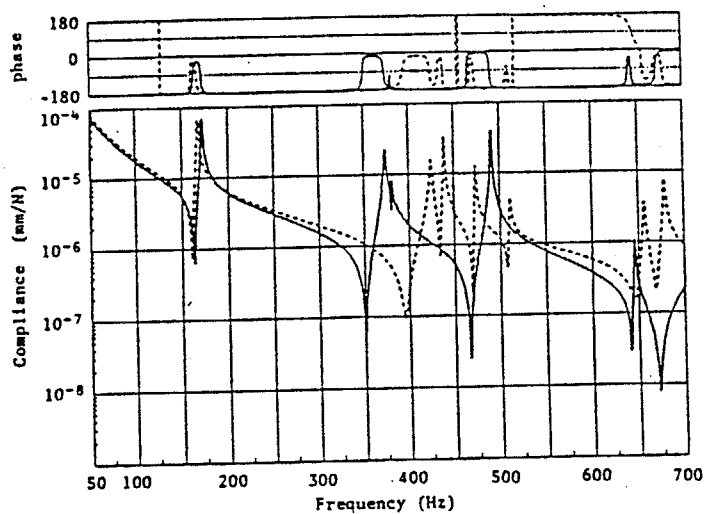


図7-2-17 点P6の自己伝達関数

実線：計算結果

点線：実験結果

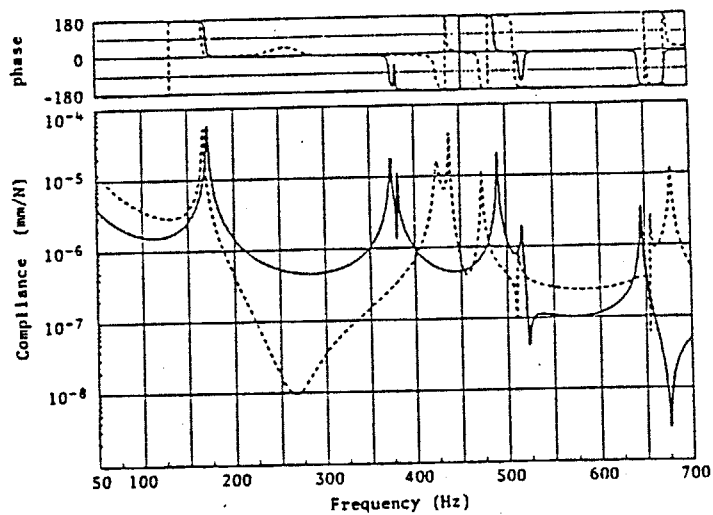


図7-2-18 点P5と点P6の相互伝達関数

実線：計算結果

点線：実験結果

7. 2. 5 ベースとサドルの結合系

ベースとサドルの結合系を2個の分系からなる全系として、その振動を伝達関数合成法によって解析する。分系となるベースとサドル単体の伝達関数（動特性）は打撃試験（[7. 2. 1] 参照）により得た伝達関数の実験結果を曲線適合により再構成（[7. 2. 2] 参照）したものをを用いる。再構成の際の採用モード数はベースが17、サドルが7とする。

ベースとサドルは、すべり面と送りねじによって結合されており、すべり面は主にY軸とZ軸方向の変位を、また送りねじは主にX軸方向の変位を拘束している。ここでは、振動の伝達系を明確にして解析を試みたいので、すべり面のモデル化に主眼をおき伝達関数合成法の適用を行う。そこで、送りねじははずして実験および計算を行う。

すべり面は図7-2-19に示すように6個（Y軸方向に各2個）のバネで結合する場合と、点P11のところの2個のバネを省略した4個のバネで結合する場合について検討を行う。バネはZ軸方向とY軸方向の2方向に作用するので、結合部の自由度は前者の場合（バネ6個）には12自由度、後者の場合（バネ4個）は8である。

バネの位置はサドル上の点P10～P12に固定するので、サドルがベース上での位置を変えると、ベース側の結合点の位置は変化することになる。しかし、実験においてはベースのすべり面上の測定点はP5～P9とするので、これらの測定点における値からそれらの任意の中間位置における伝達関数すなわち固有モードを計算によって決定しなければならない。

そこで、ベースのすべり面上の測定点におけるY軸方向とZ軸方向の複素固有モードの実部と虚部の両方をX軸方向の3次曲線で補間近似することによってそれを実現する。図7-2-20に1次から15次までの固有モードのY軸方向とZ軸方向成分を示す。白丸が測定点における測定結果であり、補間近似によって得られた最適の3次曲線が実線で示されている。また、図中の横座標軸上にある短い3本の縦線は、ここで解析する場合のサドルがベースと結合する位置（バネの結合点）を示す。

まず、結合用のバネを剛とすることによって成立する剛結合と仮定した場合の計算結果を実験結果と比較する。その1例として、図7-2-21にサドル上の点P6（図7-2-19参照）のZ方向を励振したときのベース上の点P13（図7-2-3参照）のZ方向の応答（伝達関数）を示す。実線が8自由度の場合、一点鎖線が12自由度の場合の計算結果であり、点線は実験結果である。

この図からもわかるように、12自由度の場合の計算結果よりも8自由度の場合の計算結果の方が全体的に良い精度（実験結果とより良く一致）を得ることが判明したので、以後の解析ではすべり面を8自由度結合とする。

次に8自由度の結合の場合で、バネ定数（バネ剛さ）がすべて等しいとして

計算を行った。バネ定数は $1.0 \times 10^7 \text{ N/mm}$, $5.0 \times 10^6 \text{ N/mm}$, $2.0 \times 10^6 \text{ N/mm}$, $1.5 \times 10^6 \text{ N/mm}$, $1.0 \times 10^6 \text{ N/mm}$ および $1.0 \times 10^5 \text{ N/mm}$ の6種類に変える。

図7-2-22から図7-2-27にそれぞれのバネ定数を用いた場合の解析結果の例を示す。全体をながめることによってわかることは、バネ定数を小さくすると各固有振動モードとも周波数の低い方へ変化する(固有振動数が低下する)ことで、バネ定数 $2.0 \times 10^6 \text{ N/mm}$ の場合の計算結果が全体的に実験結果ともっとも良く一致している。

図7-2-28には、バネ定数 $1.0 \times 10^7 \text{ N/mm}$ (一点鎖線)、 $2.0 \times 10^6 \text{ N/mm}$ (実線)、 $1.0 \times 10^6 \text{ N/mm}$ (二点鎖線)の場合の結果を重ね合わせてみた。

サドル、ベースの結合系に対して実験データを用いる伝達関数合成法は全体的に実用上十分な精度で解析できたことがわかる。そのときの重要なことは、分系単体についての実験をできるだけ慎重に行い、精度良い曲線適合によって信頼できる固有モード係数を計算するために、基準となる点を適切に選ぶこと(基準となる点の留数があまり小さくないようにする)である。

実用の際の結合部分のバネ定数の設定の仕方(どの程度の値のバネ定数を設定すればよいか)は個々の対象系によって異なるし、また現時点では理論的に決定することはできないので、今のところでは実験と解析の両方のつき合わせによる多くのデータを収集することによって確立していかざるを得ないと考える。

伝達関数合成法での本解析の計算時間は、8自由度結合で80 Hzから300 Hzまで1 Hz間隔で20応答自由度の伝達関数を求めるのに9.94秒(使用計算機HITAC-M200H)であった。

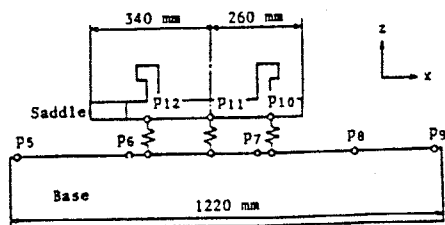


図7-2-19 ベースとサドルの結合の仕方

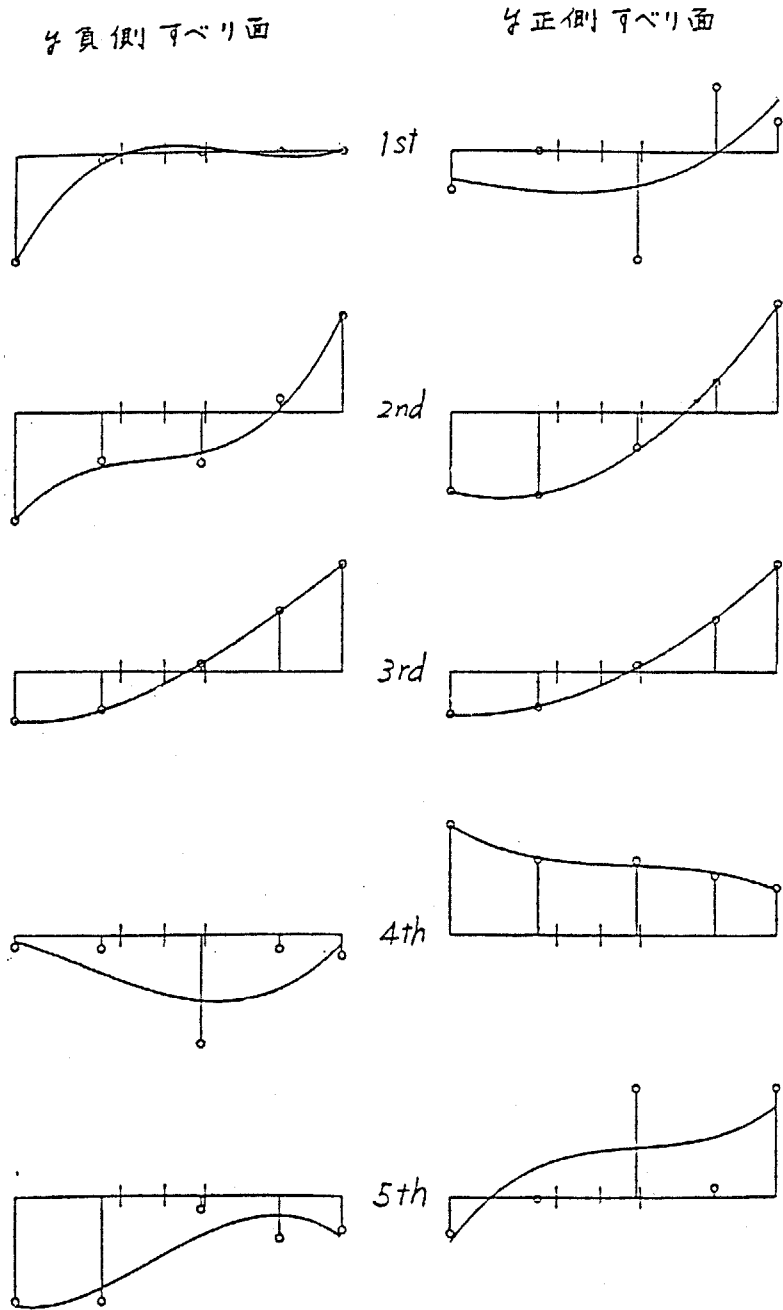


図7-2-20 (a) ベースのすべり面y方向のモード形 (実部)

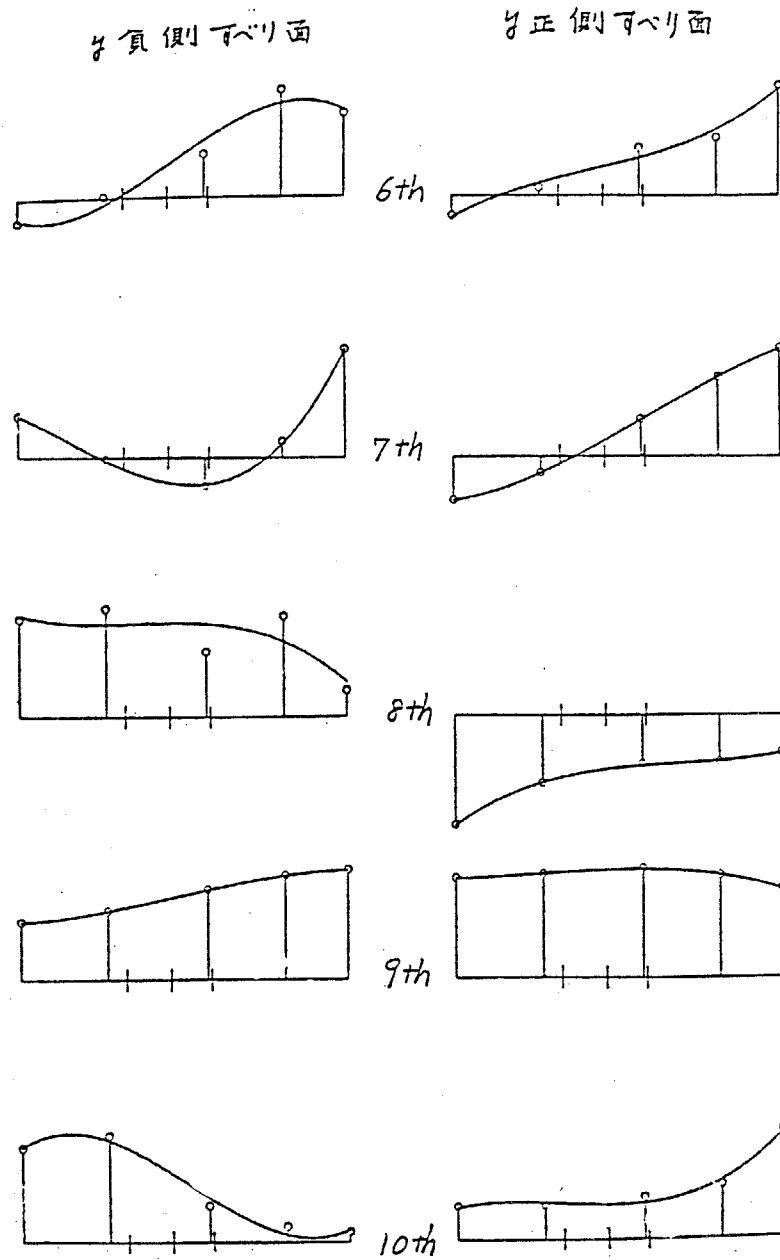


図7-2-20 (b) ベースのすべり面y方向のモード形 (実部)

y負側すべり面

y正側すべり面

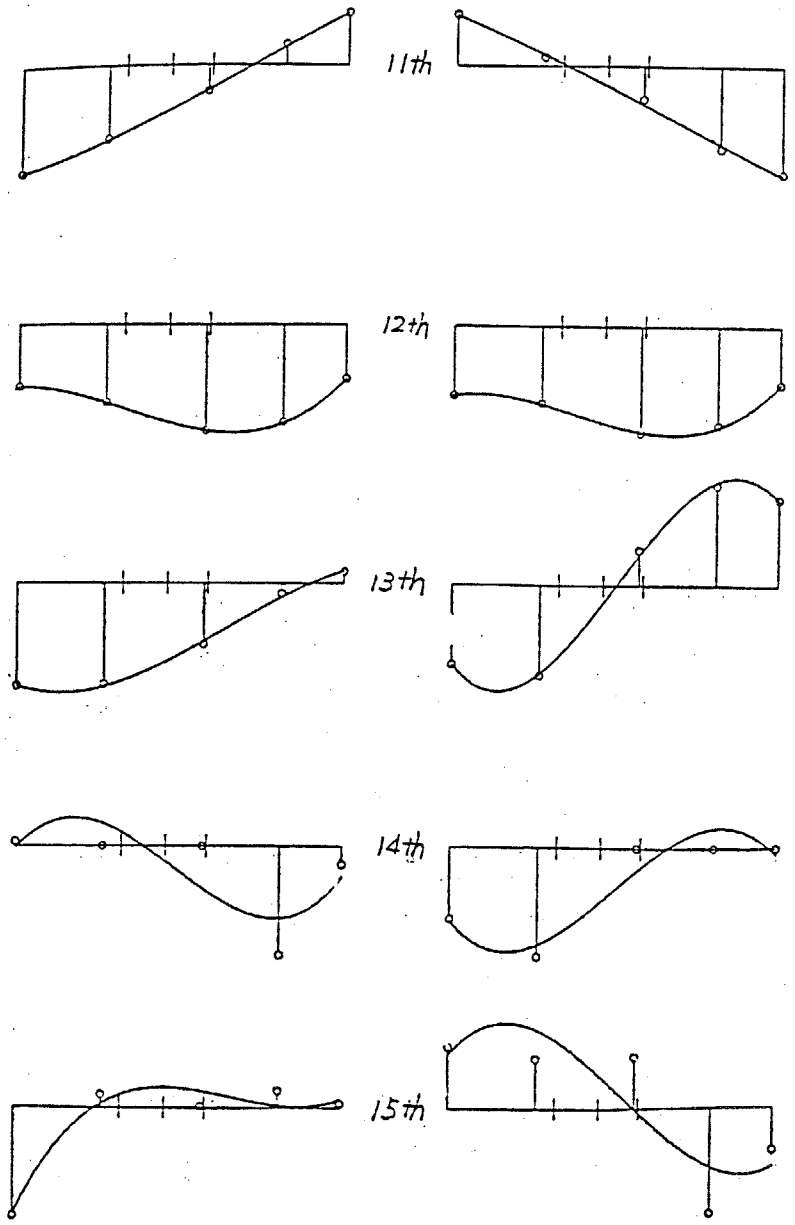


図7-2-20(c) ベースのすべり面y方向のモード形(実部)

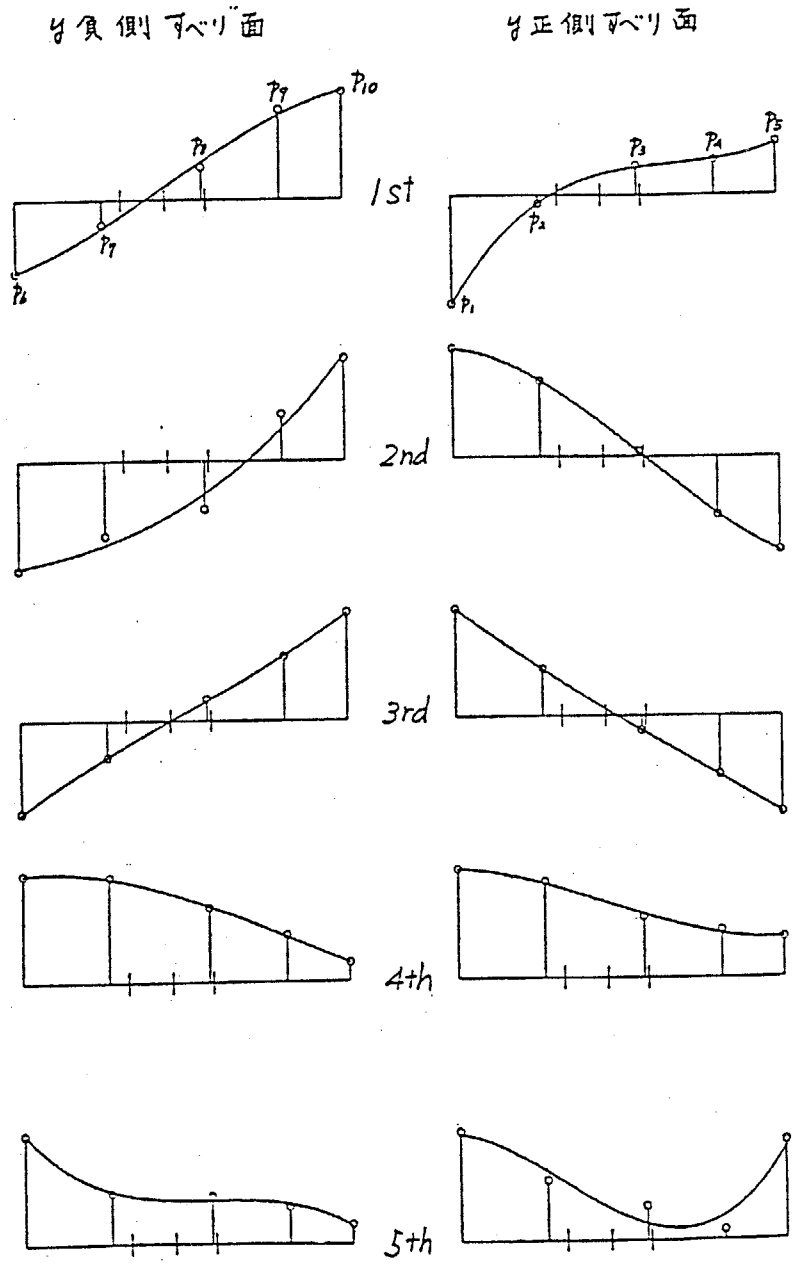


図7-2-20 (d) ベースのすべり面z方向のモード形 (実部)

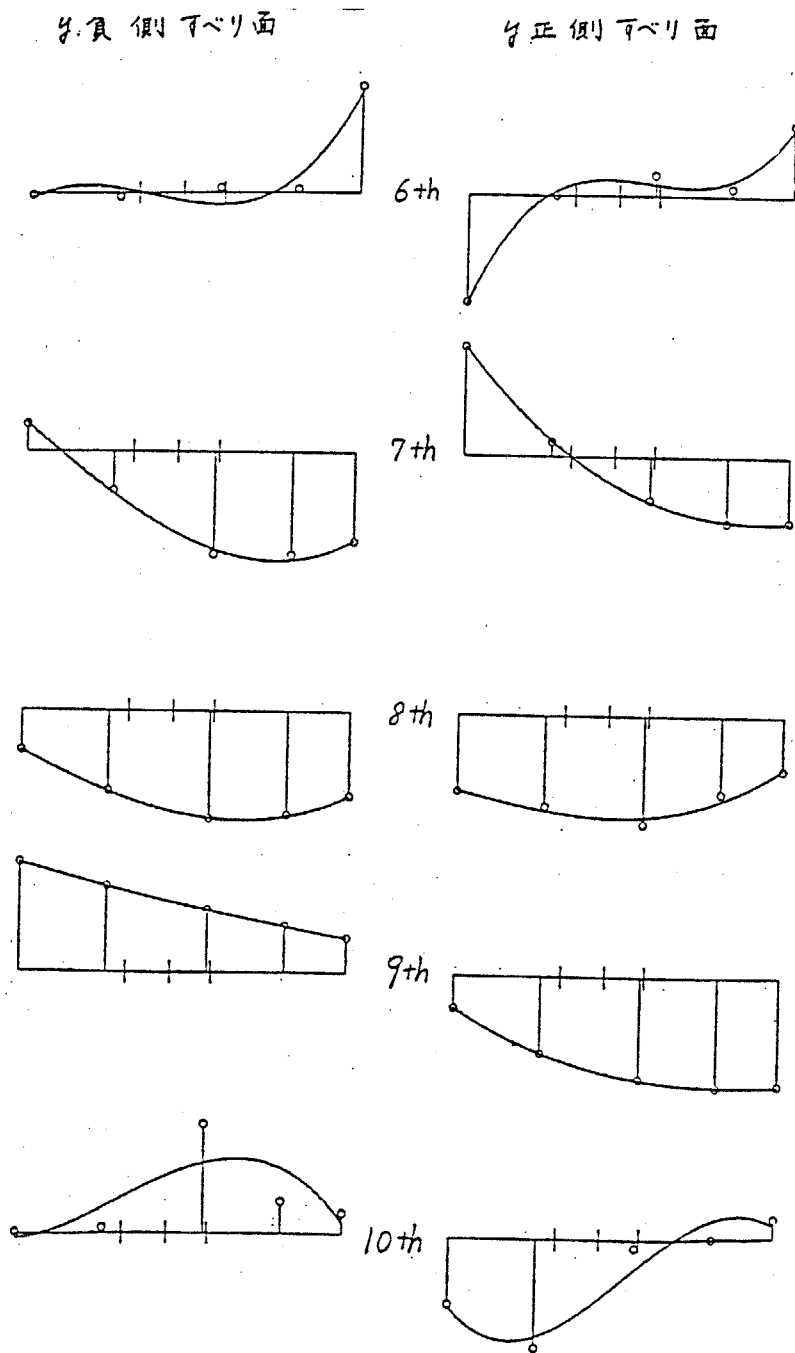


図7-2-20 (e) ベースのすべり面z方向のモード形 (実部)

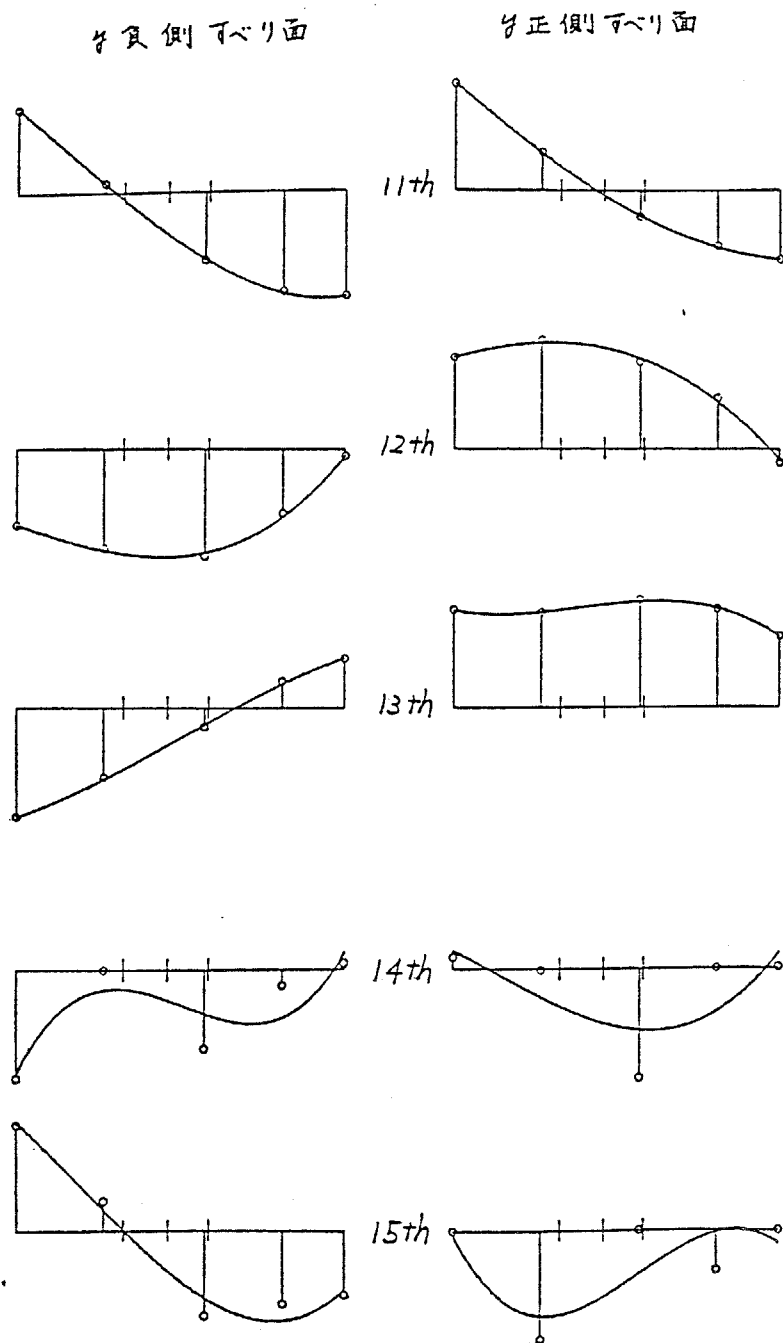


図7-2-20 (f) ベースのすべり面z方向のモード形 (実部)

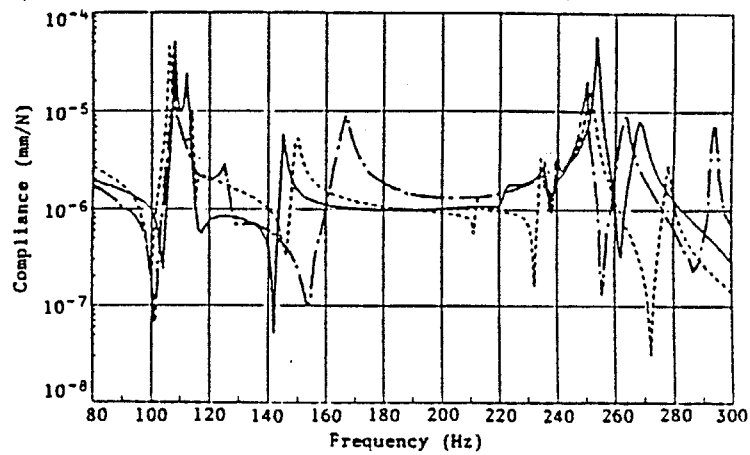


図7-2-21 ベース・サドル間の応答の一例
 (実線：8自由度 一点鎖線：12自由度 点線：実験結果)

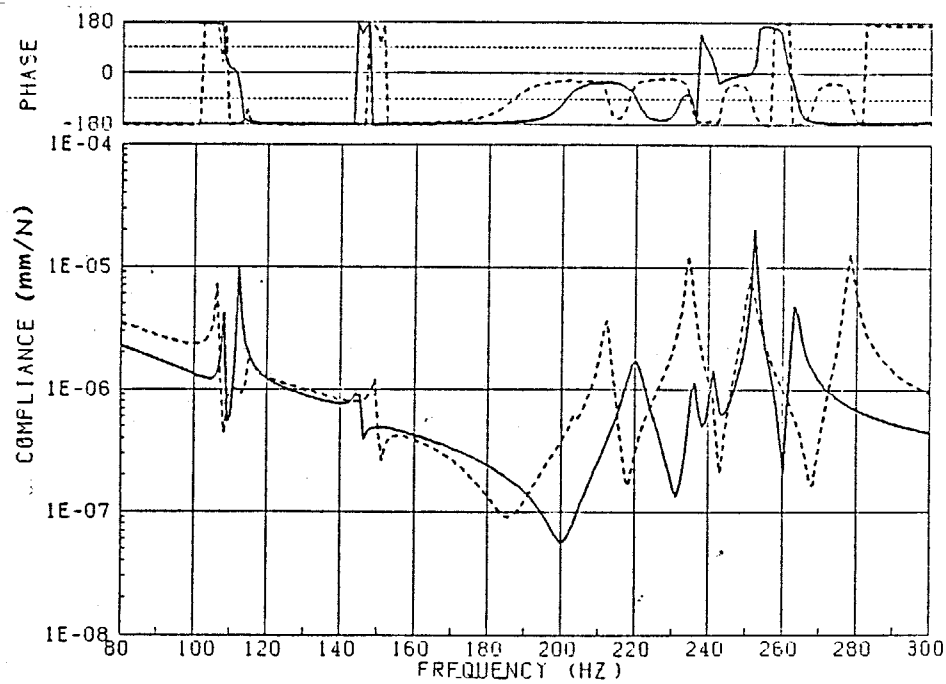


図7-2-22 ベース・サドル間の応答 (実線：計算、破線：実験)
 (サドル p_{1z} 応答 8自由度結合 $k = 1.0 \times 10^7$ N/mm)

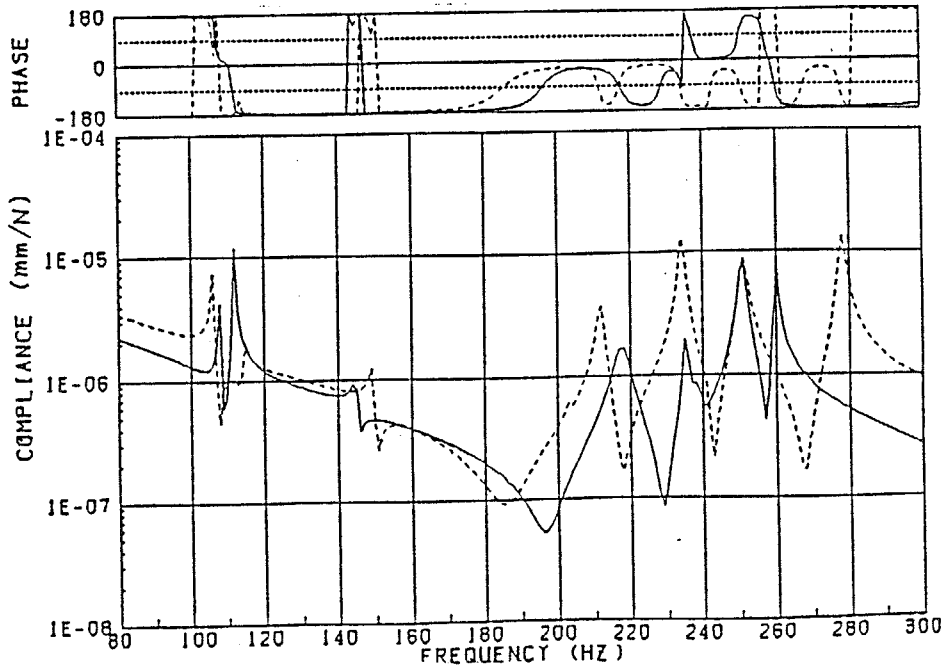


図7-2-23 ベース・サドル間の応答 (実線：計算、 破線：実験)
 (サドル p_{1z} 応答 8自由度結合 $k = 5.0 \times 10^6$ N/mm)

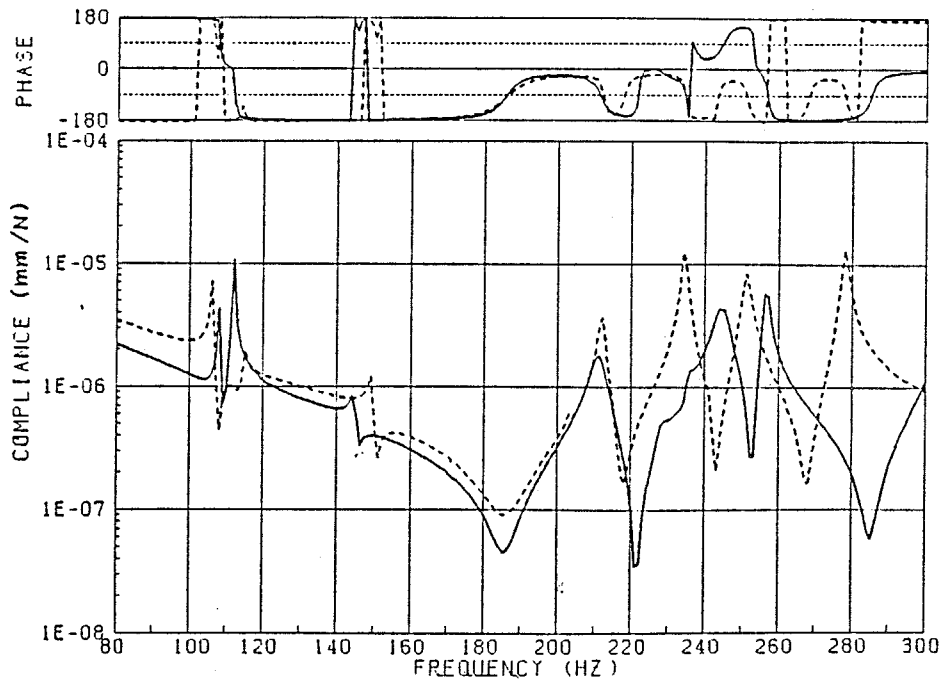


図7-2-24 ベース・サドル間の応答 (実線：計算、 破線：実験)
 (サドル p_{1z} 応答 8自由度結合 $k = 2.0 \times 10^6$ N/mm)

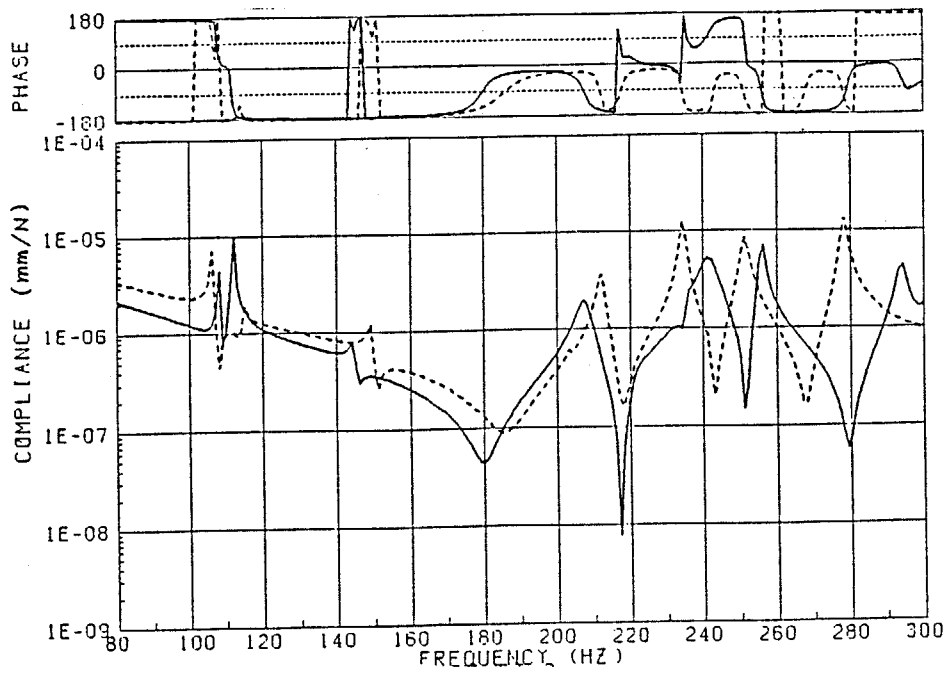


図 7-2-25 ベース・サドル間の応答 (実線：計算、破線：実験)
 (サドル p_1z 応答 8自由度結合 $k = 1.5 \times 10^6 \text{ N/mm}$)

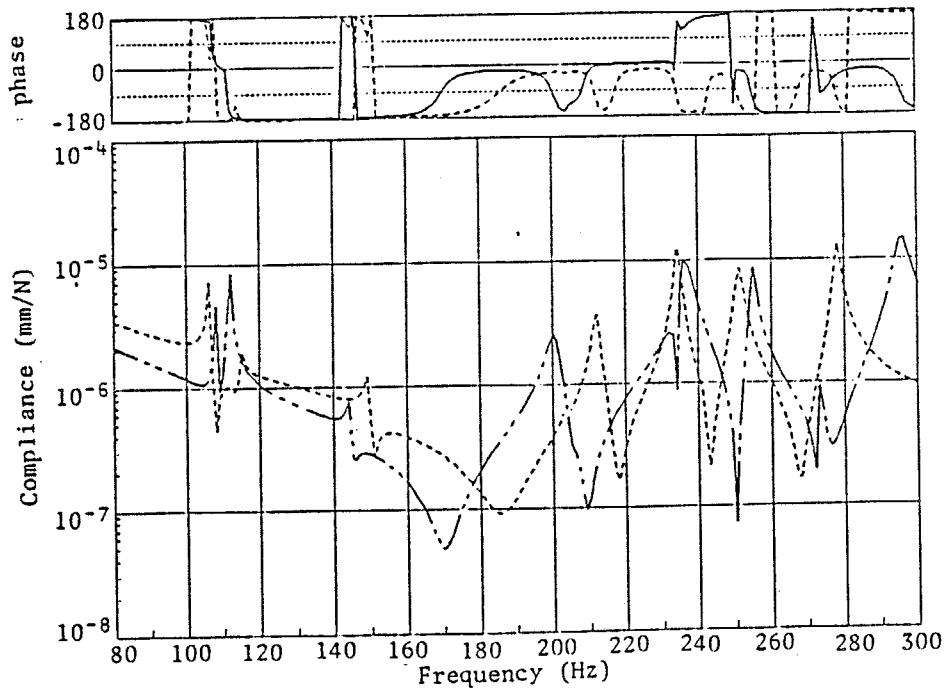


図 7-2-26 ベース・サドル間の応答 (実線：計算、破線：実験)
 (サドル p_1z 応答 8自由度結合 $k = 1.0 \times 10^6 \text{ N/mm}$)

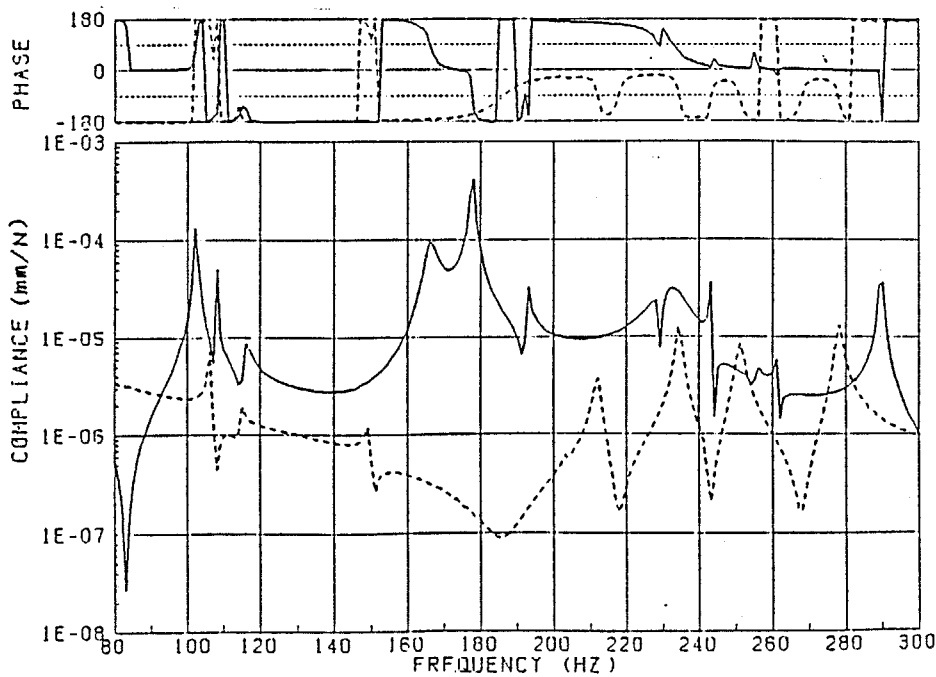


図7-2-27 ベース・サドル間の応答 (実線：計算、 破線：実験)
 (サドル p_1z 応答 8自由度結合 $k = 1.0 \times 10^5 \text{ N/mm}$)

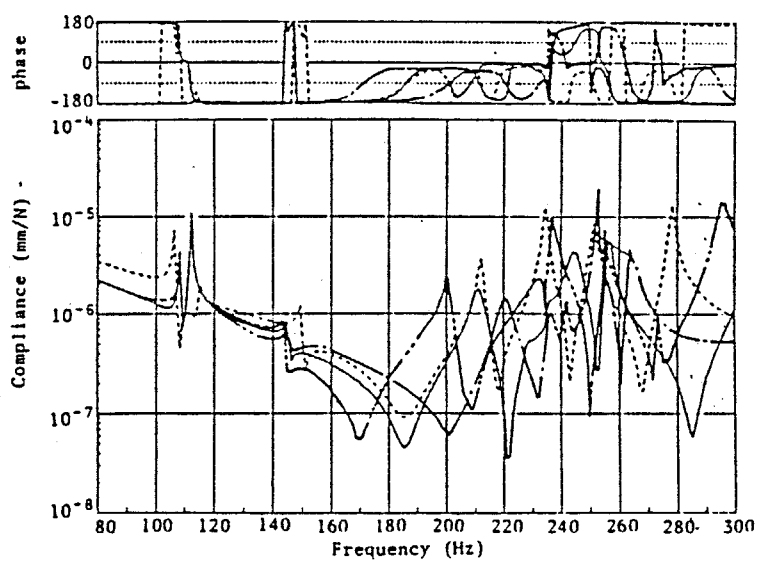


図7-2-28 バネこわさの変化による応答の相違
 一点鎖線： $1.0 \times 10^7 \text{ N/mm}$
 実線： $2.0 \times 10^6 \text{ N/mm}$
 二点鎖線： $1.0 \times 10^6 \text{ N/mm}$

7. 2. 6 コラム・ベース・サドルの結合系

コラム、ベース、サドルの3つの構造物の結合系について伝達関数合成法を用いて解析を試みる。この結合系においては結合領域が2ヶ所ある。1つはベースとサドル間の結合である。そこで、適切な解析方法の選択に際して、それらの結合状態を調べる必要がある。

まず、ベースとサドル間の結合は[7. 2. 5]に記したようにバネ定数 $2.0 \times 10^6 \text{ N/mm}$ の4本のバネ(全自由度は8)で結合するモデル化で実用上十分な精度の解が得られることがわかっている。

コラムとベース間の結合について検討する。コラムとベースは、図7-2-3にその概略図を示すように、白丸と点線で示すように10本のボルトで連結されている。そこで、1結合点あたり6自由度でのモデル化が適切と考えられるので、結合部の全自由度は60となる。

図7-2-29と図7-2-30は図7-2-3の点P1励振の点P2応答(実線で示す)とその逆に点P2励振の点P1応答(点線で示す)を比較した実験結果である。図7-2-29はY軸方向(ボルトの軸と直角)同志、図7-2-30はY軸方向とZ軸方向(ボルトの軸方向)を関係づける伝達関数である。両図とも実線と点線は良く一致し、マクスウェルの相反定理と重ね合わせの原理が成立し、この実験の範囲内では十分線形系であるとみてよい。

次に図7-2-31のコラム上の点P1を励振したときのコラム上の結合点P3(図7-2-3参照)とベース上の同一結合点P4(図7-2-3参照)の伝達関数を図7-2-32と図7-2-33に比較する。両図とも、コラム上の結合点P3の応答を実線、ベース上の点P4の応答を点線で示す。これらの図から、ボルト(結合部材)を介さない実線と介した点線は良く一致しており、少なくとも300 Hzまでの範囲ではベースとコラムの結合は剛結合とみなしてよいことがわかる。

他方、コラムとベースの各単体についてはそれぞれ30次までの固有モードを区分モード合成法により求めた([7. 2. 4]参照)。そこで、その結果を利用しようとするれば、計算に用いる結合部の採用モード数は54(6個の剛体モードはコラムとベースで共通なので差し引く)であり、実際の結合部自由度(60と考えるのが妥当)よりも小さくなる。振動実験で求めた伝達関数を用いる時は剰余コンプライアンスを考慮するので、このような場合でも伝達関数合成法を適用することができるが、分系の伝達関数を区分モード合成法で解析的に求める場合には剰余コンプライアンスの計算が困難なので、剛結合の場合には、[2. 2]に記したように、係数行列が特異になってしまう。

そこで、コラムとベースの結合系に関してはその全体を区分モード合成法で解析し、その結果とサドル単体について区分モード合成法によって解析した結果をバネを介した結合系として伝達関数合成法で解析することが適切な解析手順であると考えられる。

以上の考察のもとで、コラム、ベース、サドルの結合系の解析を伝達関数合成法で行う。図7-2-34に示すように、サドルは9個の分系に分割する。コラムとベースの結合系については、コラム部分は図7-2-35のように6個、ベース部分は図7-2-36のように8個の分系に分割し、合計14個の分系に分割する。そして、結合部の伝達関数を算出するのに用いた固有モード（すべて計算結果）の数は、ベース、コラム側で20、サドル側で30である。しかし、モード減衰比だけは計算で求めることが不可能なので、各分系の実験結果を用いる。

図7-2-37に結合部を示す。すべり面は先に記したように8自由度のバネ結合とし、各バネ剛さは $2.0 \times 10^6 \text{ N/mm}$ とする。ベース上のすべり面の固有モードは、計算により結合点以外の白丸印の9点でわかっているので、これらを[7.2.5]の解析の場合と同様の方法で4次式で補間近似して求める。また、本解析ではサドルの送りねじをも取り付けられた状態で計算と実験を行う。

送りねじのモデル化は、丸棒としてその形状寸法と材質から軸方向のバネ剛さ $k_1 = 5.48 \times 10^5 \text{ N/mm}$ 、 $k_2 = 3.45 \times 10^5 \text{ N/mm}$ とする。図7-2-34から、送りねじを考慮する時の結合部自由度は10となる。

表7-2-8にコラム・ベース・サドルの3構造物の結合系に関する固有振動数を示す。6次は計算できなかったが、他の7次までの計算結果と実験結果は良く一致している。

コラムをX軸方向に打撃励振したときのベースのZ軸方向とサドルのX軸方向の伝達関数をそれぞれ図7-2-38と図7-2-39に示す。両図における実線と一点鎖線はそれぞれ送りねじを考慮する場合としない場合の計算結果であり、点線は実験結果である。図7-2-38では送りねじの影響がほとんど現われていないが、図7-2-39では送りねじの影響が顕著に現われており、送りねじを考慮する方が実験結果を良く合うことがわかる。

図7-2-40はすべり面に作用するY軸方向の結合点内力の1例であり、実線は送りねじを考慮する場合、点線は考慮しない場合の計算結果である。両者の比較から、送りねじは200Hz以上の内力に対して影響を与えていることがわかる。このように、本解析対象である結合系の固有振動数、伝達関数（したがって固有モードも）、結合部に作用する内力などを設計段階で図面のみから計算でできることがわかる。

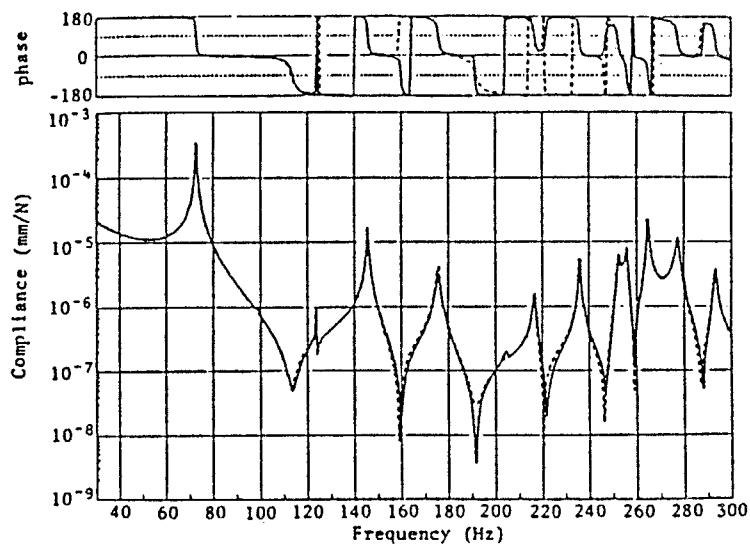


図 7 - 2 - 2 9 系の線形性の確認 (y 方向同志)
 実線 : 励振 P 1、応答 P 2
 点線 : 励振 P 2、応答 P 1

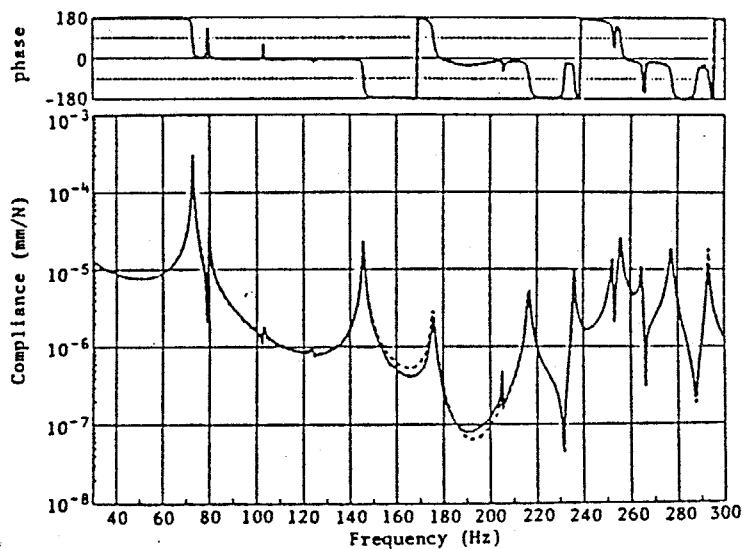


図 7 - 2 - 3 0 系の線形性の確認 (y 軸と z 軸方向)
 実線 : 励振 P 1 (y)、応答 P 2 (z)
 点線 : 励振 P 2 (z)、応答 P 1 (y)

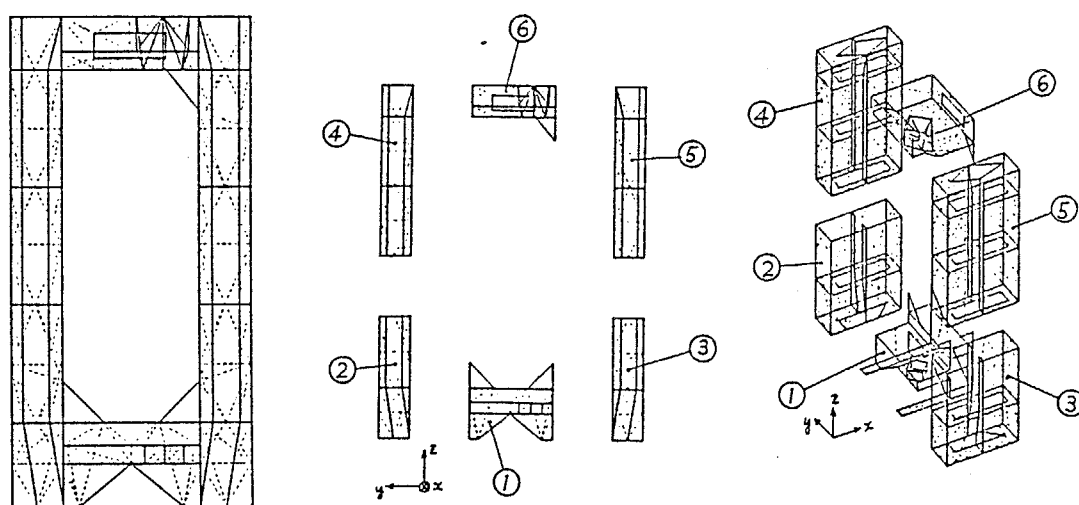


図 7 - 2 - 3 1 コラムの分系への分割図

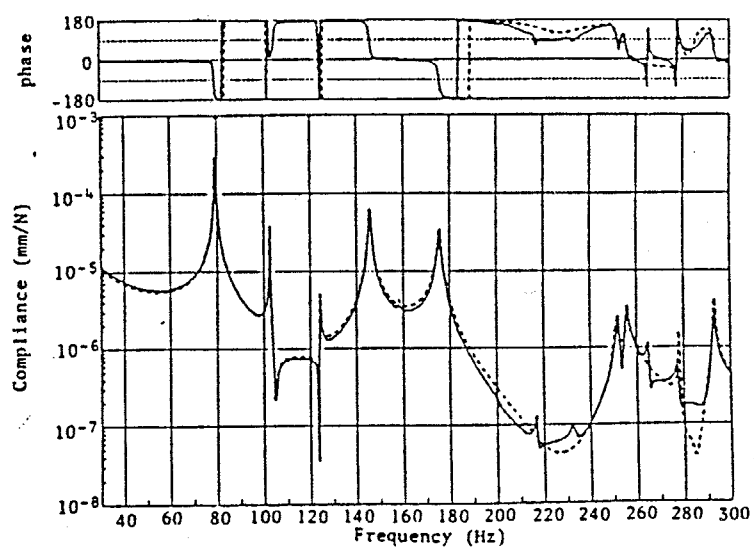


図 7 - 2 - 3 2 結合部の伝達関数の比較 (z 軸方向)
 励振点 : P 1
 応答点 : 実線 P 3、点線 P 4

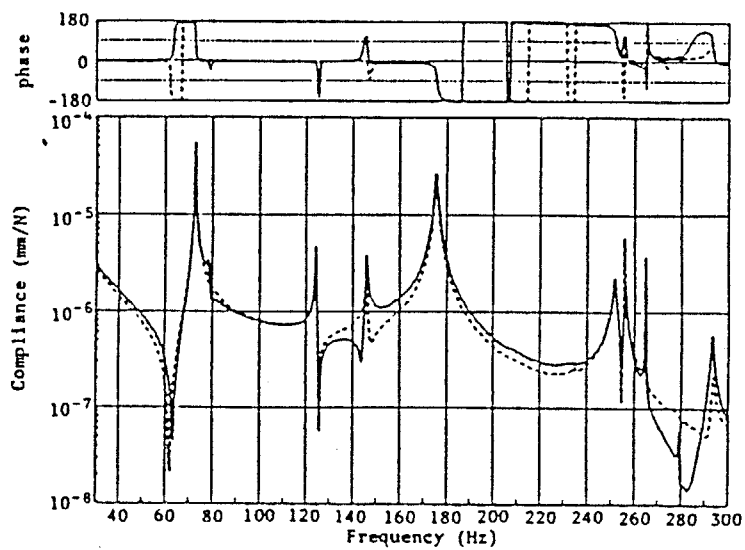


図7-2-33 結合部の伝達関数の比較 (y軸方向)
 励振点: P1
 応答点: 実線 P3、点線 P4

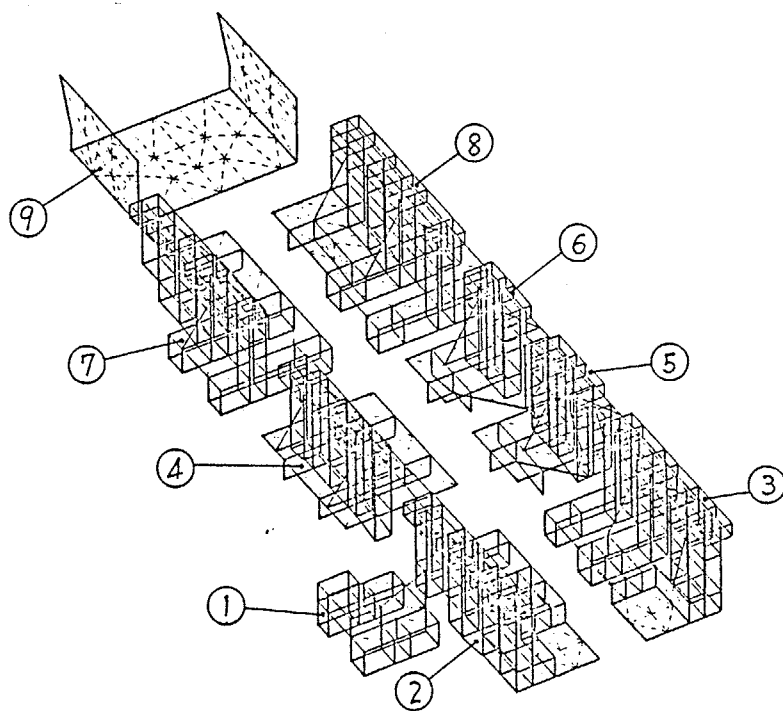


図7-2-34 サドルの分系への分割図

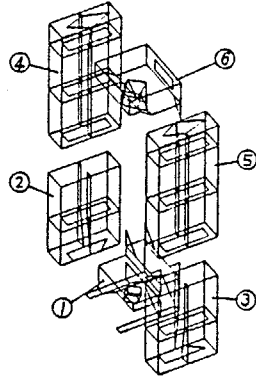


図 7 - 2 - 3 5 コラムの分系への分割図

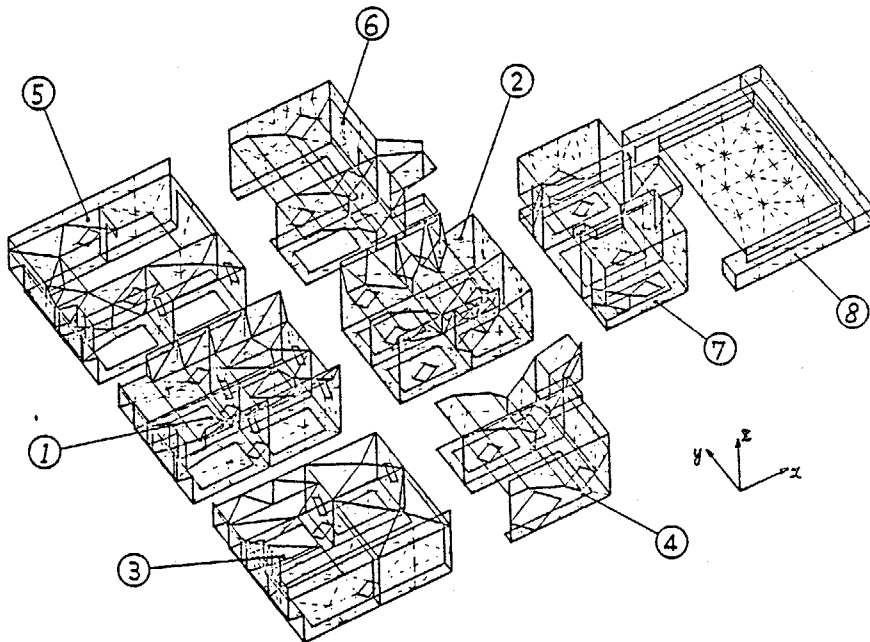


図 7 - 2 - 3 6 ベースの分系への分割図

表7-2-8 コラム・ベース・サドル結合系の固有振動数

Order	TFS(Hz)	EXP.(Hz)	Error(%)
1	73	70	4.1
2	74	76	-2.1
3	105	102	2.9
4	118	124	-4.8
5	142	146	-2.7
6		168	
7	185	177	4.2

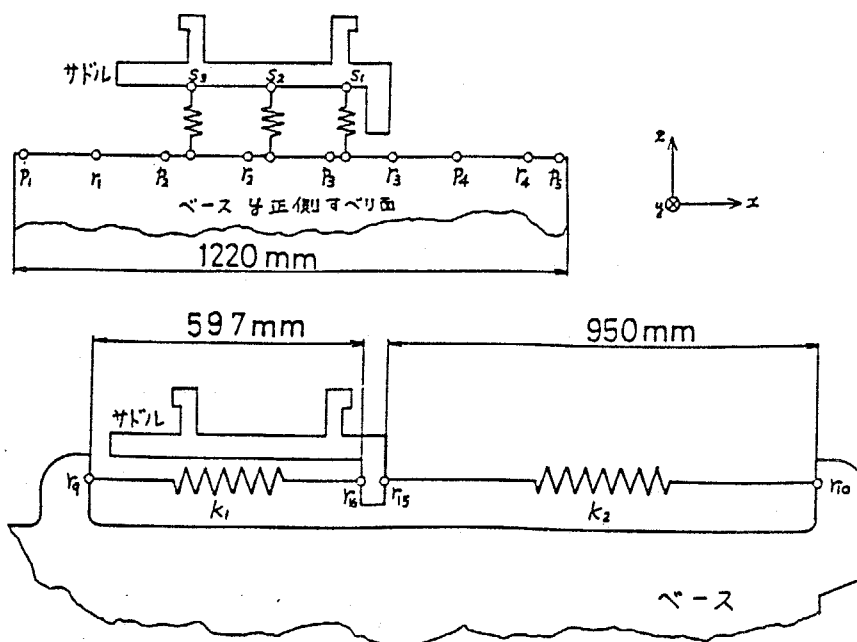


図7-2-37 サドル・ベース間の結合

$$k_1 = 5.48 \times 10^5 \text{ N/mm}$$

$$k_2 = 3.45 \times 10^5 \text{ N/mm}$$

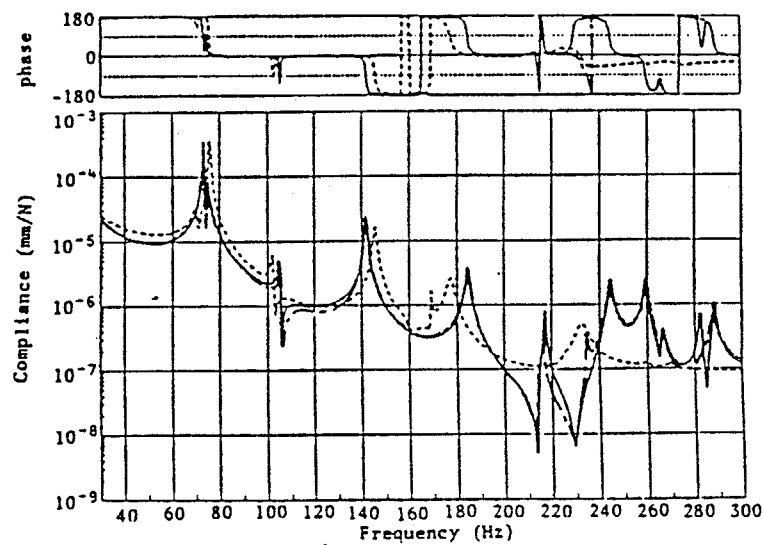


図7-2-38 コラム・ベース間の伝達関数 ($x \rightarrow z$)
 実線：送りねじ考慮の計算結果
 一点鎖線：送りねじ無視の計算結果
 点線：実験結果

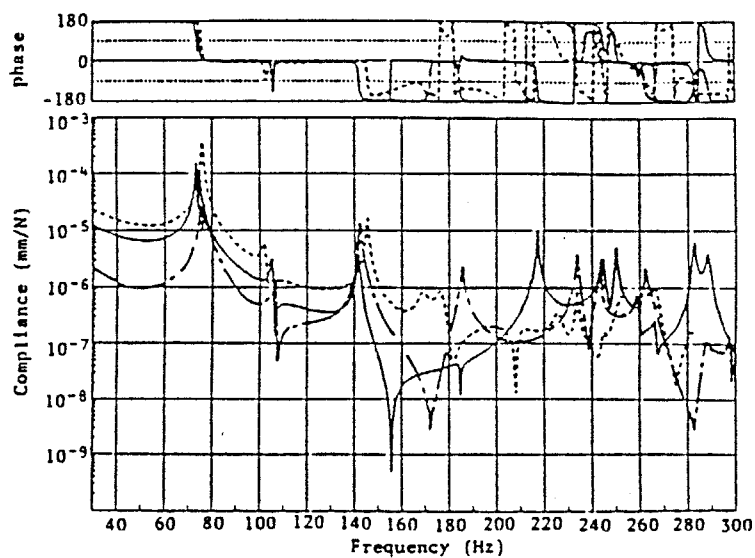


図7-2-39 コラム・サドル間の伝達関数 ($x \rightarrow x$)
 実線：送りねじ考慮の計算結果
 一点鎖線：送りねじ無視の計算結果
 点線：実験結果

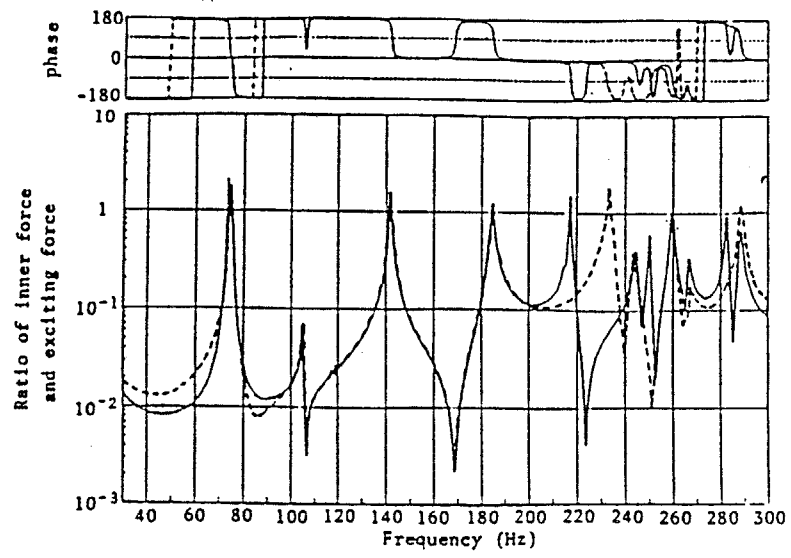


図7-2-40 内外力比

実線：送りねじ考慮
 点線：送りねじ無視

7.3 クランク軸・フライホイール系

7.3.1 モデル化

図7-3-1に示すクランク軸・フライホイール系の解析（周辺自由境界条件）を行う。図7-3-1に示すように、全体を20個の分系に分割する。分系1はアイソパラメトリック立体要素（2次要素）を用いて節点数81で有限要素分割する。分系2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 19は、分系1と同じ有限要素を用いるが、節点数51で分割する。また、フライホイールはアイソパラメトリックの厚肉かく要素（2次要素）を用いて節点数88で有限要素分割する。分系3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17のアーム部の分系は四面体要素を用いて節点数111で有限要素分割する。

解析に際しては、各分系の結合する円形断面が常に平面を保ち、その形状は変形しないように、該当節点間に幾何学的拘束を与える。こうすることによって、1節点3自由度の立体要素の分系と1節点5自由度の厚肉かく分系の結合および直軸分系とアーム部の結合面の角変位の適合性をはかる。

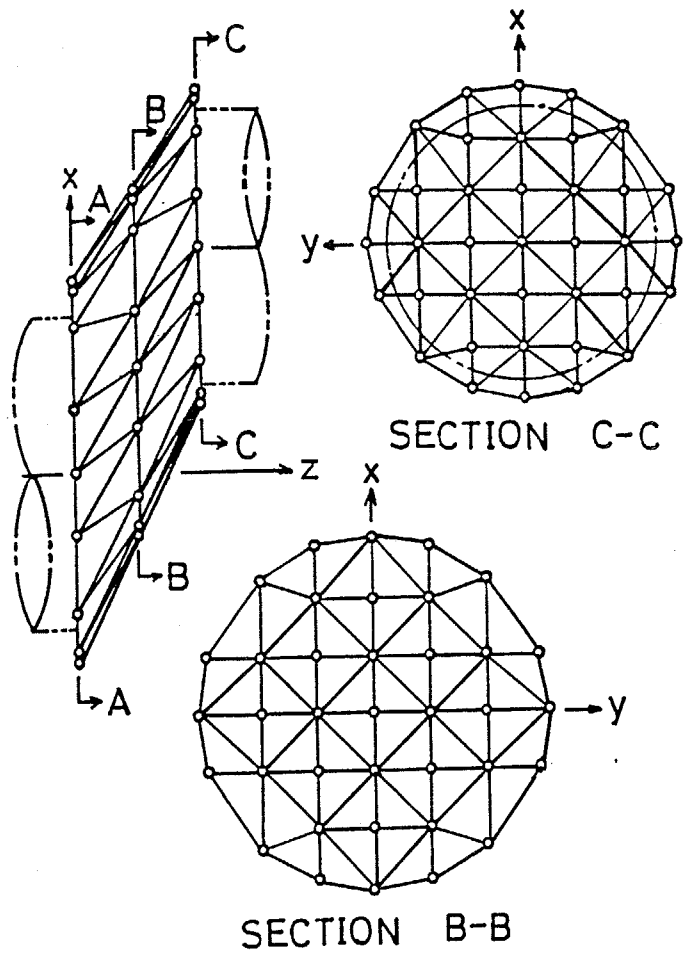
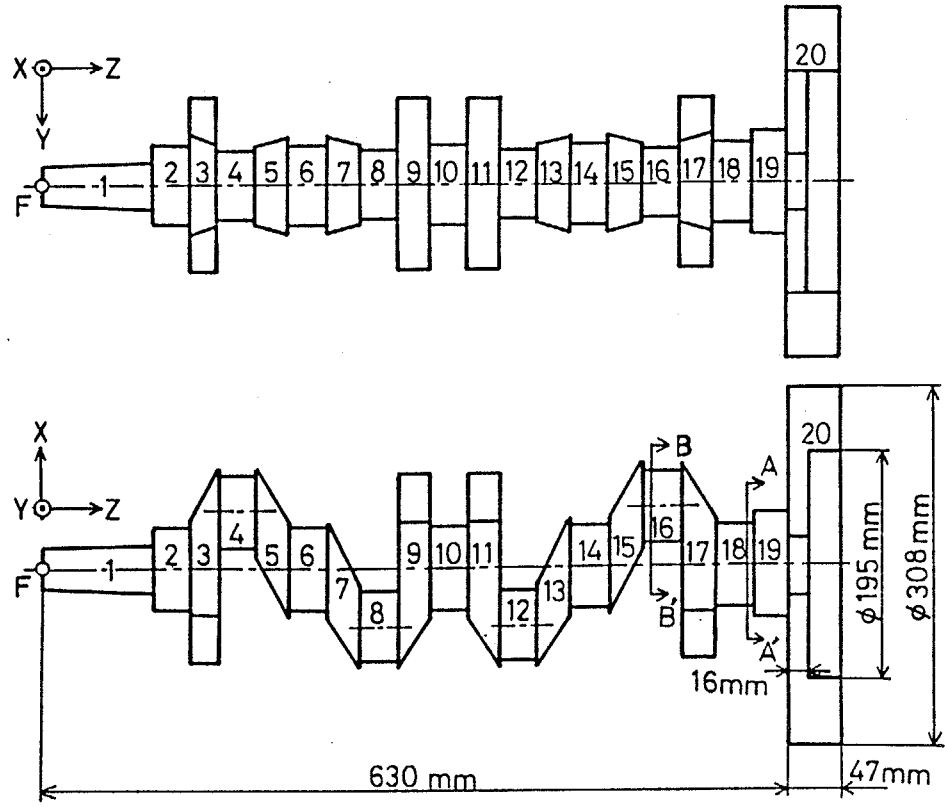


図 7 - 3 - 1 | クランク軸・フライホイール系のモデル化の概略図

7. 3. 2 モード合成法による解析

表7-3-1に実験、区分モード合成法(CMS)および剰余コンプライアンス行列を用いる方法で求めた固有振動数を示す。CMSでは、採用モード数の取り方はあまり気にする必要はなく、ただ解析周波数域を十分含むようにすこし多めにしておけば安心なので、採用モード数はすべての分系について10とする。

剰余コンプライアンス行列を用いる方法では、すべての分系単体の解析に際して周辺自由境界条件となるので、剰余コンプライアンス行列の計算には、著者の提案した方法(第5章参照)を用いる。このクランク軸の解析に限らず、解析対象物を分系に分割するとほとんどの分系は周辺自由境界条件になる。したがって、Hansteenの方法は用いることができず、著者の方法を用いざるを得ない。

直軸分系の採用モード数は6(剛体モード)とする。この分系単体の周辺自由境界条件下での1次の弾性振動固有振動数は解析対象周波数よりはるかに高いので、精度の良い剰余コンプライアンス行列を用いれば剛体モードのみの採用で十分精度良い解が得られるからである。さらに、そのような極端に高い周波数成分を採用モードに含めると、全系に統合した一般化座標上での方程式を解くとき、数値計算上発生する誤差が大きくなる。他の分系(アーム部とフライホイール部)の採用モード数は6, 10, 20の3通りにする。

表7-3-1をみると、三者の結果は互いによく一致している。剛体モードのみの採用モードの場合は13次以上で精度が急に悪化しているが、この原因はアーム部とフライホイール部の分系の採用モードが不十分なためである。

図7-3-2には、図7-3-1に示す点Fをx方向に励振した時の点Fのx方向の応答の伝達関数を示す。破線が実験結果、実線がCMSと剰余コンプライアンス行列を用いた方法(採用モード数6, 20の場合)の結果である。両計算結果はグラフ上では区別がつかない程よく一致してしる。なお、剰余コンプライアンス行列を用いない方法は、基礎検討で一体構造物の解析には適さないことがわかったので、クランク軸に適用しない。

すべて解析プログラムは著者作成のものを使用したもので、プログラミングの技術レベルは同一のものであり、計算時間を比較すれば解析方法自体の効率を比較することになる。

1次から20次までの固有振動数と固有モード、さらに0Hzから2500Hzまでの5Hz毎の伝達関数(複素計算)を求めるのに、CMSでは97.48秒であり、剰余コンプライアンス行列を用いる方法では、表7-3-1の左側の計算から181.66秒、184.58秒、195.04秒であった。

表7-3-1 クランク軸・フライホイール系の固有振動数

		CMS	MBBA with Residual compliance matrix*		
Number of adopted modes of shaft-substructures		10	6	6	6
Number of adopted modes of the other substructures		10	6	10	20
order	Experiment				
1	200	203	203	203	203
2	245	258	258	258	258
3	425	401	402	401	401
4	513	500	500	500	500
5	541	539	539	539	539
6	694	664	667	665	664
7	907	859	862	861	859
8	1086	1139	1142	1141	1139
9	1131	1102	1110	1102	1102
10	1352	1354	1356	1356	1355
11	1674	1688	1694	1692	1688
12	1714	1484	1589	1485	1481
13	—	1743	2200	1734	1734
14	—	1748	2233	1734	1734
15	2084	2191	2499	2195	2192
16	2300	2181	3066	2182	2178
17	2683	2492	3604	2497	2493
18	3278	3044	3851	3048	3043

(Hz)

* The residual compliance matrix is calculated by the authors' proposed method. Hansteen's can not be used because all substructures are on free-free boundary condition.

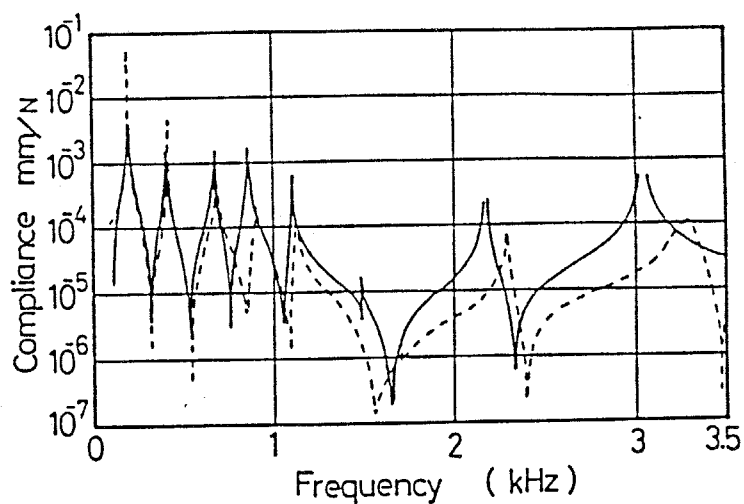


図7-3-2 伝達関数 (励振点: F、応答点: F)

7. 3. 3 特性行列合成法による解析

実機の四シリンダエンジンのクランク軸を対象とした本方法の適用例を示す。図7-3-1は、供試クランク軸の概略図である。本例では有限要素分割の節点数が多く、FEMの直接適用は困難なために行っていない。

図7-3-3に固有振動数の結果を示す。EXP.の蘭は実験結果、CMSの蘭は区分モード合成法の結果、S. E.の蘭は超要素法の結果、をそれぞれ示す。超要素法では、残す節点として分系間の生じる結合点を選んだ。

「A」蘭の結果は、区分モード合成法で解析した結果（固有振動数と固有モード）を用いて、4点（分系1, 6, 14, 19中の各1点ずつ）の自由度に相当する自由度24の特性行列を同定し、その特性行列を用いて固有値解析した結果である。

「B」蘭の結果は、図7-3-3に示すように、クランク軸の左半分について区分モード合成法で解析し、得られた結果から4節点（クランク軸の右半分と結合する点を含める）の特性行列を同定して、クランク軸の左半分を単純な一つの部分構造物に変え、クランク軸の右半分の10個の部分構造物とともに用いて、クランク軸全体を区分モード合成法で解析したものである。

「C」蘭は、図7-3-4に示すように、クランク軸の左右半分ずつをそれぞれ区分モード合成法で解析し、得られた結果から左半分に関しては4節点、右半分に関しては3節点の自由度の相当する特性行列を同定し、それらを結合点について重ね合わせて6節点の自由度の特性行列を作成し、固有値解析した結果である。

実験では、12次の固有振動数と固有モードを求めた。区分モード合成法の結果は、12次を除いては、実験結果と良く一致している。「A」蘭の結果から、区分モード合成法の解析結果を再現できている特性行列が同定できていることがわかる。「B」と「C」蘭も満足できる結果を示しているが、「A」蘭の結果に比べると、わずかに誤差が大きいことがわかる。この原因は、前モデルに対しても述べたように、クランク軸の左半分については25次以上の固有振動成分、右半分については19次以上の固有振動成分による剰余成分である。すなわち、実際には存在する剰余成分の影響を考慮できないために誤差が生じる。

超要素法では、超要素法では、[4. 4. 1]のモデルについての結果と同じように、高次で誤差が大きくなっている。ただ、本解析においては残す節点を21個とし、クランク軸全体にほぼ均一になるように選んだので、かなり良い結果を得ることができた。

図7-3-5には、点F（図7-3-1参照）をy方向に励振したときの点F自身のy方向の応答の伝達関数を示す。破線が実験結果である。実線は全体を区分モード合成法で直接解いた結果を示す。一点鎖線（ほとんど実線と一致）は全体に対する同定特性行列を用いた計算（A）の結果を表す。

図7-3-6も点Fをy方向に励振したときの点F自身のy方向の応答の伝

達関数を示す。実線が全体に対する同定特性行列を用いた計算 (A) である。一点鎖線はクランク軸の左半分の同定特性行列と区分モード合成法を組み合わせた計算 (B) の結果であり、二点鎖線はクランク軸の左半分それぞれの同定特性行列を重ね合わせて作成した特性行列を用いた計算 (C) の結果である。破線は超要素法で解析した結果を表す。

図 7-3-5 から、区分モード合成法と計算 (A) による伝達関数は実験結果とかなり良く一致していることがわかる。また、計算 (A) による結果は区分モード合成法の結果とほぼ完全に一致しており、同定特性行列が区分モード合成法で求めた振動特性を精度良く再現できていることがわかる。図 7-3-5 を参照しながら図 7-3-6 をみると、超要素法による結果は伝達関数においても高周波数域になると精度が悪くなり、他の計算結果より精度が悪いことがわかる。

このように本章で提案する特性行列同定法は、著者が提案した区分モード合成法と自由に混合して利用し、効率の良い振動解析を行うことができる。また、同じく著者が提案した縮小インピーダンス合成法はもちろん、他の部分構造合成法すべてとの混合についても、同じことが言える。

本解析例では、わずかの自由度 (A では 24、C では 36) の運動方程式でクランク軸フライホイール系の少なくとも 2.5 kHz までの動特性が精度良く表現できることが明かになっている。このことは、エンジン全体の振動解析を行うにあたり、各 부품の自由度が制限される場合に、本解析方法が極めて有効であることを意味する。

表7-3-2 クランク軸の固有振動数

Order	EXP.	CMS	A	B	C	S.E.
1	200	203	205	205	209	206
2	245	258	257	262	260	263
3	425	401	385	405	407	417
4	513	500	497	509	497	522
5	541	539	539	553	554	541
6	694	664	656	670	680	736
7	907	859	851	860	863	962
8	1086	1139	1134	1140	1150	1145
9	1131	1102	1103	1103	1097	1182
10	1352	1354	1355	1371	1385	1372
11	1674	1688	1687	1705	1711	2051
12	1714	1484	1484	1486	1491	1702
13	—	1743	1743	1744	1735	2223
14	—	1749	1748	1749	1741	2604

(Hz)

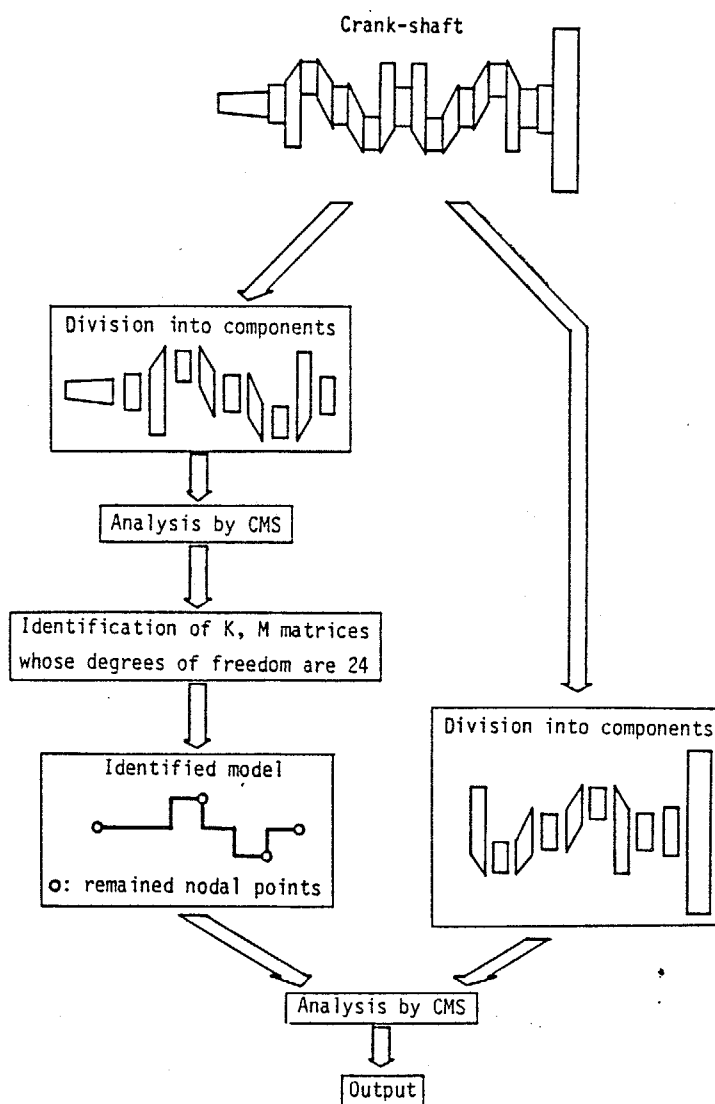


図7-3-3 計算(B)の手順

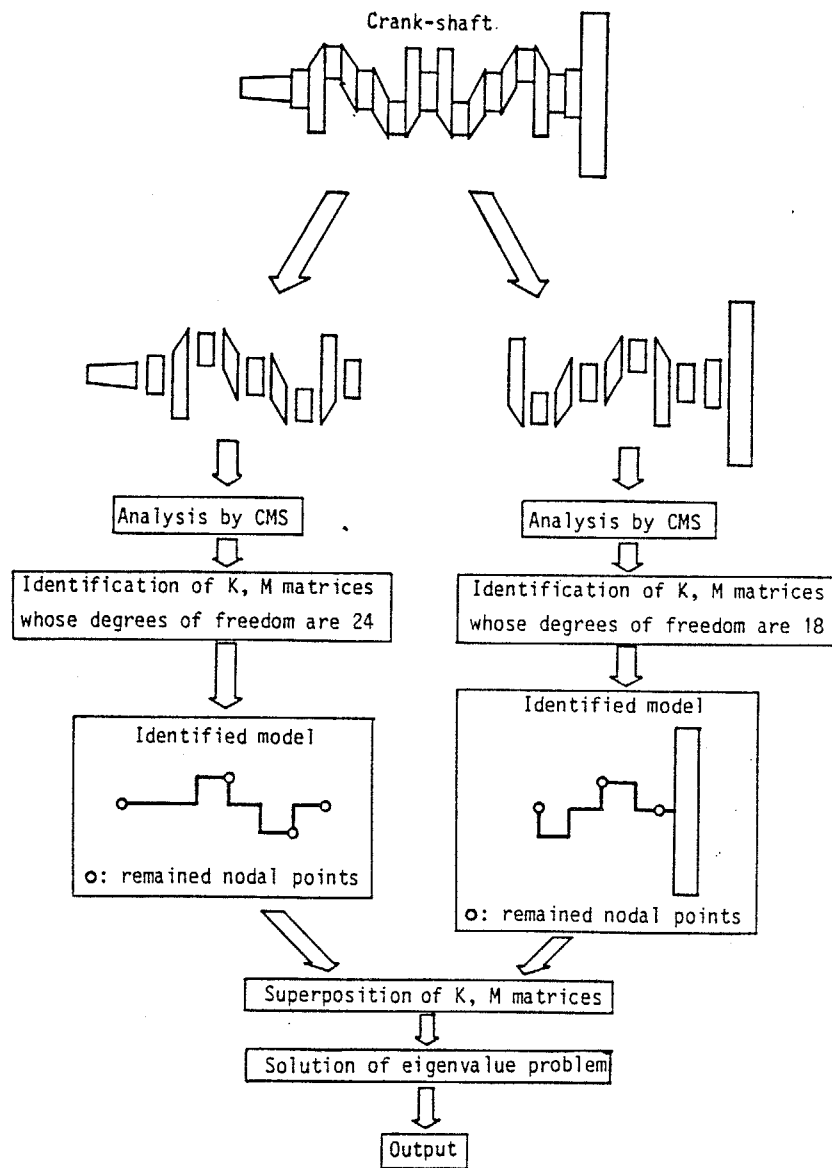


図 7 - 3 - 4 計算 (C) の手順

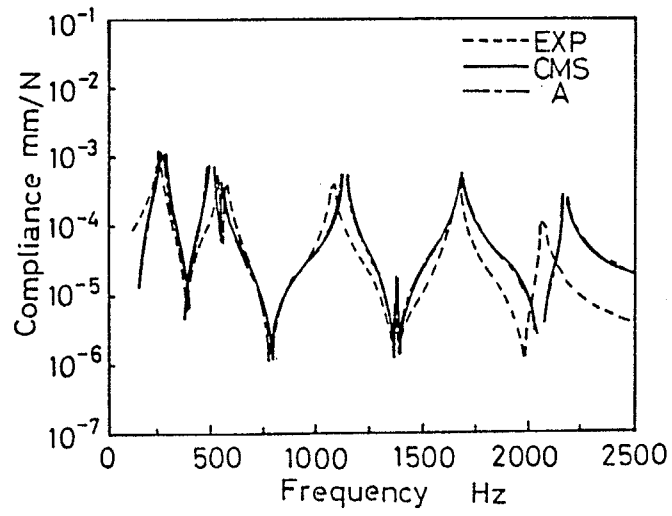


図 7 - 3 - 5 伝達関数
(励振点：F (Y方向)、 応答点：F (Y方向))

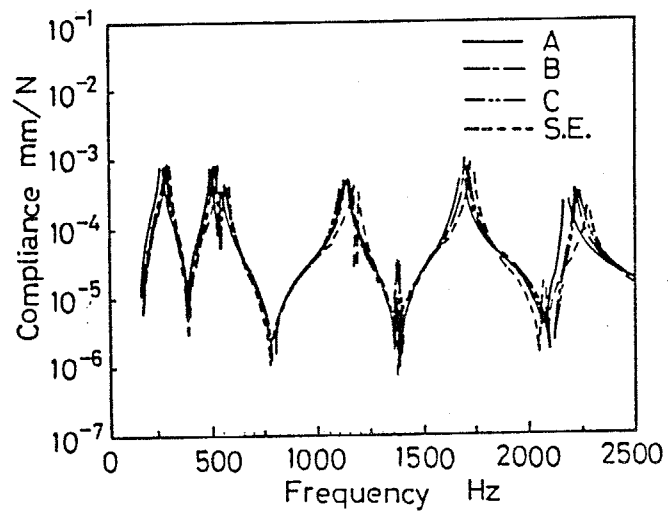


図 7 - 3 - 6 伝達関数
(励振点：F (Y方向)、 応答点：F (Y方向))

7. 4 縦型プロセスポンプ

図7-4-1に示すような縦型プロセスポンプを多重区分モード合成法（二重を使用）の実機への適用例として取り上げる。なお、計算では駆動軸系は省略し、ポンプ水の水は入っていない場合について解析する。

このポンプは鋳鉄製の部分と鋼製の部分があるので、計算においては次のような材料定数を用いた。

密度		$7.86 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}$
縦弾性係数	鋼	$2.058 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$
	鋳鉄	$9.8 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$
ポアソン比		0.3

まず、図7-4-1に示すポンプ全体を図7-4-2のように厚肉アイソパラメトリック殻要素を用いて有限要素分割によりモデル化する。次に、それを図7-4-2に示すように6個の第一次分系に分ける。さらに、それらの分系を図7-4-3から図7-4-9に示すような第二次分系に細分化する。

各結合系の節点数、要素数は表7-4-1に示す。全系の節点数は1873点（自由度11238）である。計算は次の3ケースについて行った。

- ケース1…… ダミーモータを単なる質量と考え、モータ台上部の8節点に分配する場合
- ケース2…… ダミーモータを単なる質量と考え、モータ台上部の40節点に分配する場合
- ケース3…… ケース1とケース2の計算においては、図7-4-7に示す第一次分系中の第二次分系(4-2)のリップはないものとして扱うが、ケース3ではリップを付加し、ダミーモータの質量はケース2と同じ40点に分配する場合

図7-4-1のモータ台に載っているモータはダミーのモータで鉄塊である。そこで単なる付加質量とみなし上記のように扱う。この場合、回転慣性については無視する。なお、ダミーモータの質量は326.5kgである。

吸い込み吐き出し胴体は鋳鉄製で非常に複雑な形状をしている。そこで、吸い込み口、吐き出し口に平行方向については最初から考慮してリップを取り付けたが、垂直方向についてはケース3のみでリップを付加している。

ケース1からケース3までの計算および実験によって得られた固有振動数を表7-4-4に示す。また、1次から8次までの固有モード形を図7-4-1

0に示す。

実験においては、供試ポンプはバレルの上部平板の四隅でボルトで定盤に固定されている。

表7-4-3において実験結果と計算結果を比較してみると、最も精度良いケース3でも1次の固有振動数は実験値に対して約29%の誤差がある。この原因としては、まず実験においてバレルと定盤の固定状態がこのように大きな構造物に対しては少ない4点でボルト結合されているので、計算と実験での境界条件が違うという点が考えられる。また、図7-4-10に示す1次から8次までのモード形をみると1次と2次、3次と4次、5次と6次、7次と8次、という具合に吸い込み吐き出し口に平行方向と垂直方向に対して同じ振動モードが発生していることがわかる。そして、2, 4, 5, 8次は平行方向の振動であり、1, 3, 6, 7次の垂直方向の振動より実験結果との一致がよい。このことはダミーモータの質量を同じ分配にしても垂直方向のリブを考慮するかしないか(ケース2とケース3)で一致具合が大きく異なることからわかる。そこで、今回の有限要素分割によるモデル化は、吸い込み吐き出し口に垂直方向の振動表現に対しては、正確でないのではないかと推定できる。モデル化においては、鋳鉄製の第一次分系4と5(図7-4-3参照)の分割に大きいな問題があるように思われる。これらは、非常に複雑な形状をしており、分割に際してかなり難しさを感じていた。正確なモデル化の研究を行えばもっと精度良い解析結果を得られるであろうが、全体的にみれば実用上利用できる程度の正確さで固有振動数と固有モードが求まっており、本解析の目的である多重区分モード合成法(MCMS)の有用性は示せると思う。

本解析で用いたMCMSでは、第二次分系の内部領域の節点数の最大値が72、第一次分系を構成するための第二次分系間に生じる総合点数の最大値が96、全系を構成するための第一次分系間の総合点数が78なので、最も大きな固有値解析としては自由度576(節点数96に相当)の計算を行えばよい。一方、通常のCMSで図7-4-4~図7-4-9に示す29個の分系を用いて解析する場合には、結合点数が408点なので最大自由度2448の固有値解析を行う必要がある。また、図7-4-3に示す分系を用いてCMSで解析する場合には、分系の内部領域節点数の最大値が403点なので自由度2418の固有値解析を行う必要がある。有限要素法で直接全体を一体として解析しようとする場合には、図7-4-2の全節点数1873点に対応する自由度11238の固有値解析を行う必要があり、このような大規模な計算は実用上困難な場合が多い。上記の計算自由度の比較から、MCMSでは有限要素法や通常のCMSより固有値解析の自由度を小さくすることができ、計算機容量の面にも有利であることがわかる。

本プロセスポンプの解析時間は表7-4-4に示す通りであり、20次までの固有振動数と固有モードを求めるのに21分4.67秒(著者作成のプログラムでHITAC-M200Hシステム使用)かかった。この計算時間は全系自由度11238の構造物の振動解析としては有限要素法による一体計算より

かなり短いと思われる。

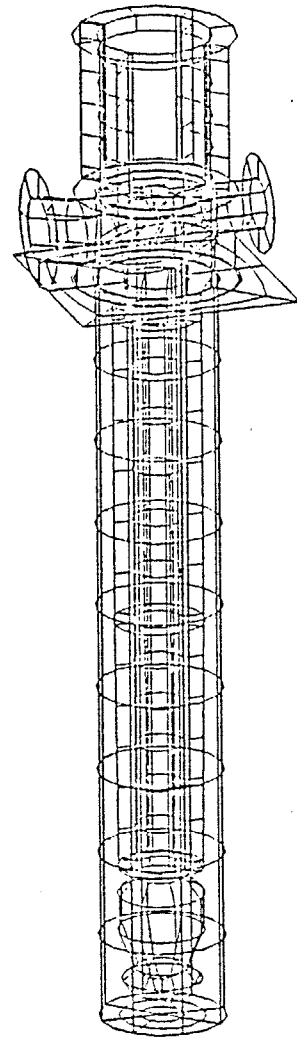
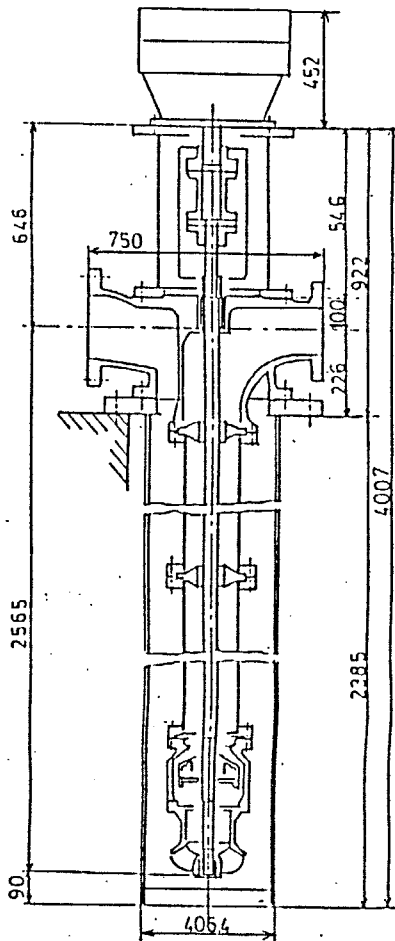


図7-4-1 プロセスポンプ実機の形状

図7-4-2 全系の有限要素分割図

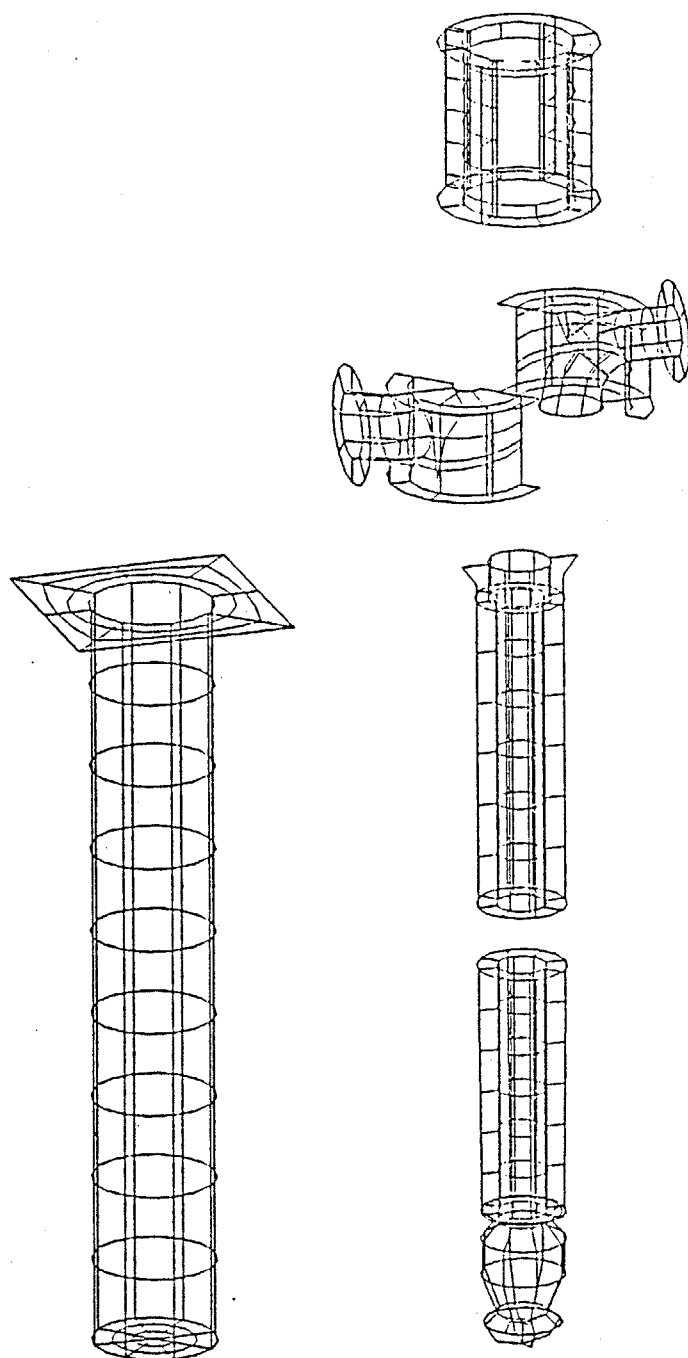


図 7 - 4 - 3 第 1 次分系への分割

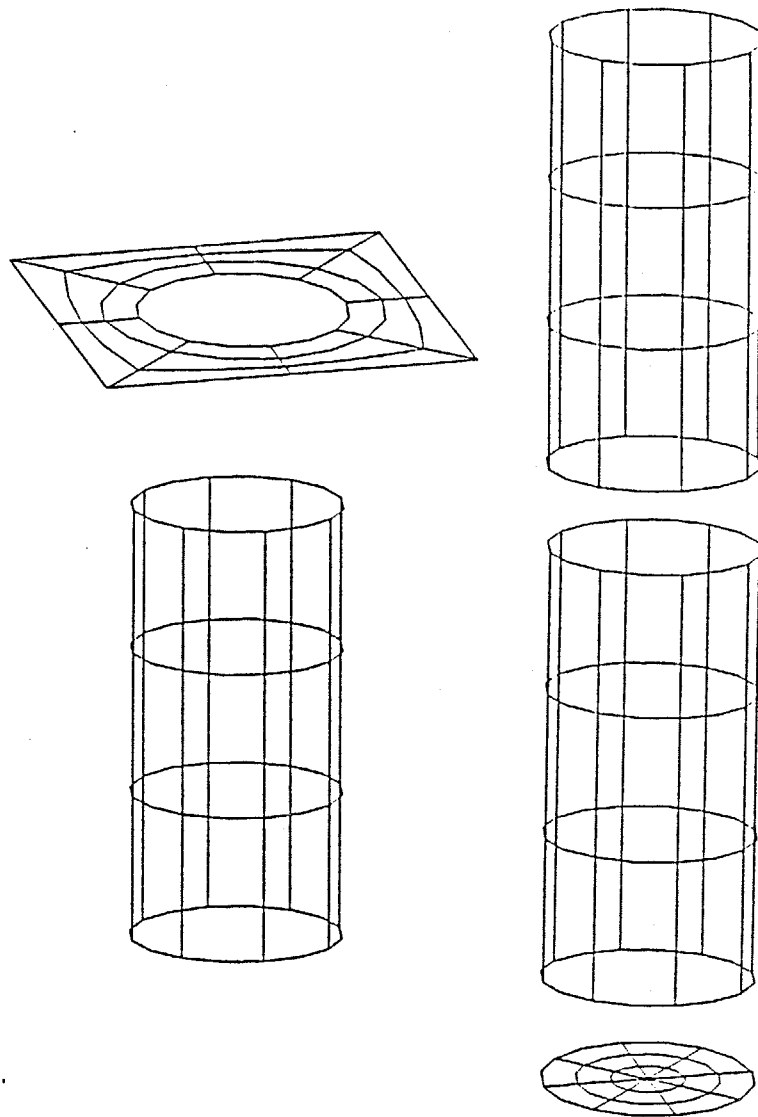


図7-4-4 第1次分系1の第2次分系への分割図

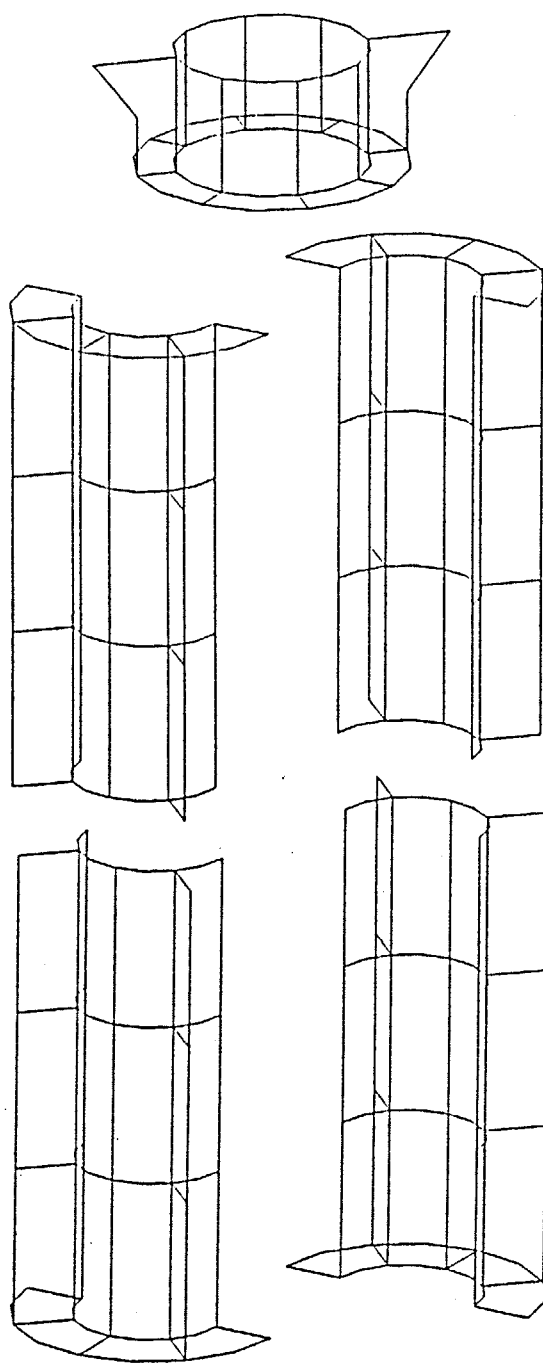


図7-4-5 第1次分系2の第2次分系への分割図

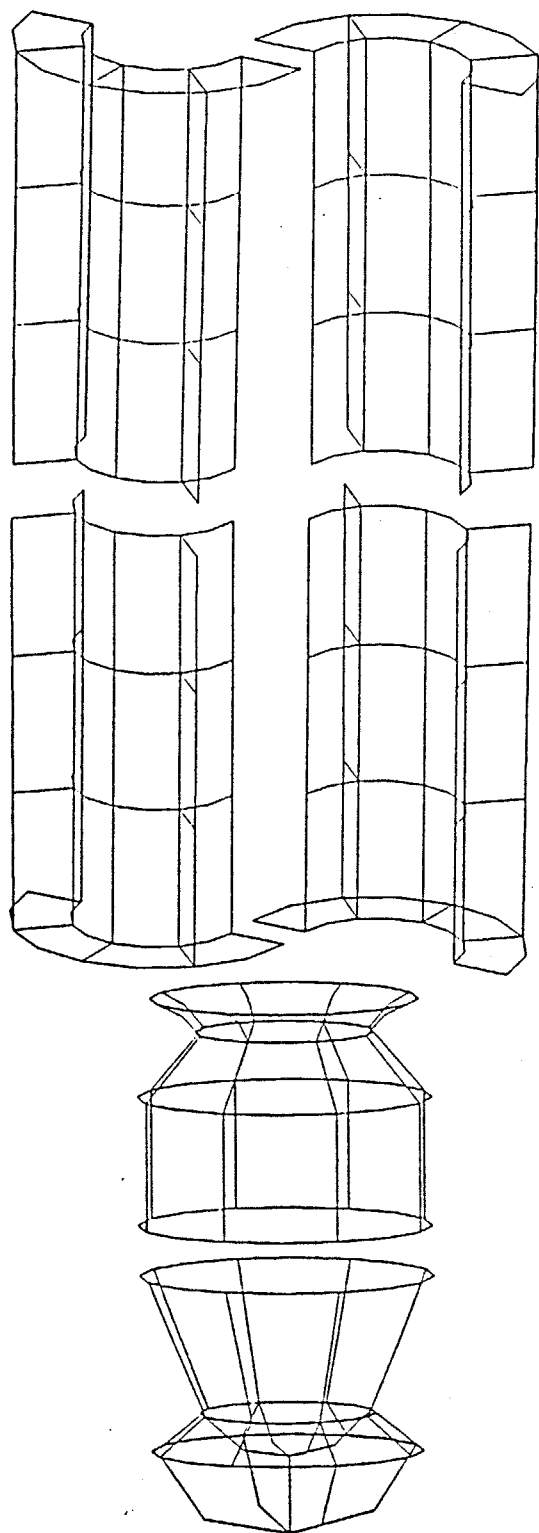


図7-4-6 第1次分系3の第2次分系への分割図

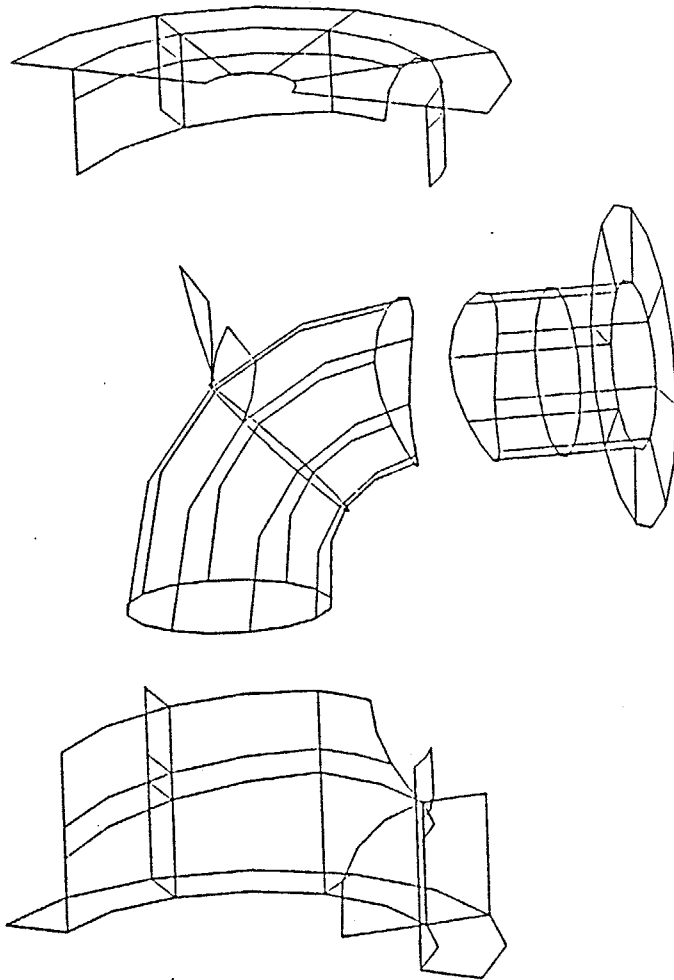


図7-4-7 第1次分系4の第2次分系への分割図

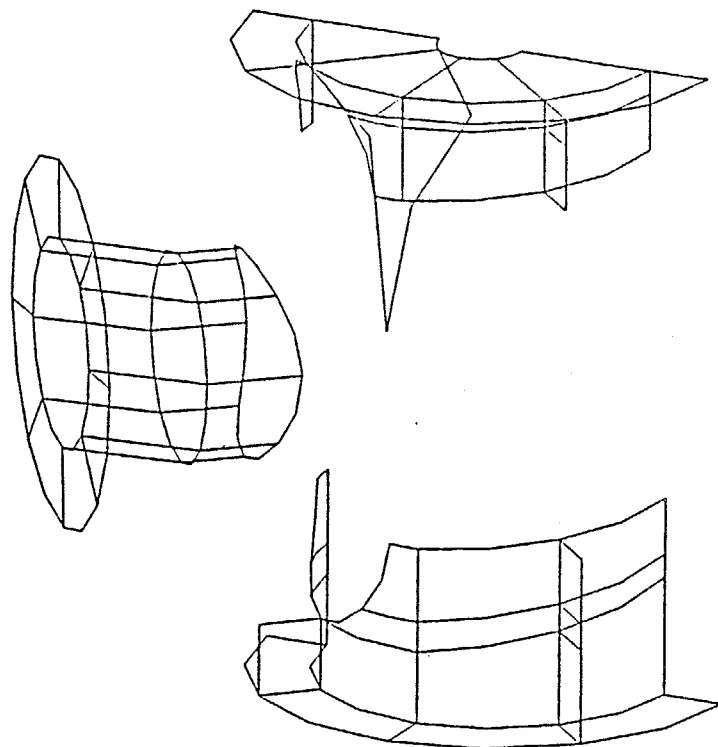


図7-4-8 第1次分系5の第2次分系への分割図

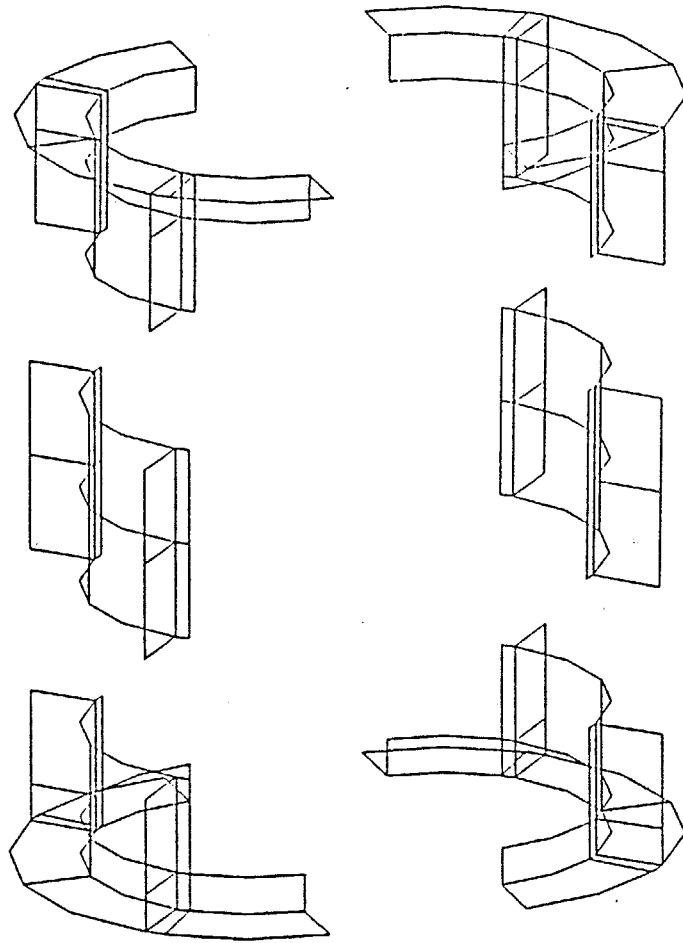


図7-4-9 第1次分系6の第2次分系への分割図

表7-4-1 各分系のモデル化規模

第1次分系 NO.	第2次分系 NO.	節点数	要素数	第2次 結合点数	第2次 内部点数	第1次 結合点数	第2次 内部領域 採用モード数	第2次 結合領域 採用モード数	第1次 内部点数	第1次 内部領域 採用モード数
1	1	88	24	24	64	8	20	20	64	20
	2	88	24	32	56	0	20			
	3	88	24	32	56	0	20			
	4	88	24	32	56	0	20			
	5	88	24	16	72	0	20			
	計		120	72	72	304	8			
2	1	83	22	32	51	0	18	20	60	20
	2	83	22	32	51	5	18			
	3	83	22	32	51	0	18			
	4	83	22	32	51	5	18			
	5	70	18	27	43	19	20			
	計		106	87	87	247	27			
3	1	83	22	32	51	5	20	20	76	20
	2	83	22	32	51	0	20			
	3	83	22	32	51	5	20			
	4	83	22	32	51	0	20			
	5	88	24	24	64	0	20			
	6	75	20	16	59	0	20			
	計		132	84	84	327	8			
4	1	88	24	20	68	1	20	20	30	20
	2	64	16	37	27	18	20			
	3	74	18	43	31	21	20			
	4	75	18	39	36	21	20			
	5	75	18	42	33	21	20			
	6	86	21	46	40	24	20			
計		79	90	90	171	60	80			
		81	96	96	172	63				
5	1	88	24	20	68	1	20	20	27	20
	2	80	19	42	38	24	20			
	3	80	19	45	35	27	20			
	4	81	20	41	40	22	20			
	計		63	71	71	146	44			
			74	74	143	47				
6	1	79	20	26	53	5	20	20	70	20
	2	53	12	26	27	0	20			
	3	79	20	23	56	0	20			
	4	79	20	26	53	5	20			
	5	53	12	26	27	0	20			
	6	79	20	23	56	0	20			
	計		104	78	78	272	8			

* 2種類の数字が書いてある所は下段がリブ付きの場合

* 第1次結合領域の採用モード数は20

表7-4-2 プロセスポンプの固有振動数

Order	EXP. Hz	CAL.					
		Case 1		Case 2		Case 3	
		Hz	Error%	Hz	Error%	Hz	Error%
1	15.6	9.7	-37.8	9.7	-37.8	11.1	-28.9
2	15.6	14.5	-7.1	14.5	-7.1	14.6	-6.4
3	25.0	23.0	-8.0	23.0	-8.0	23.3	-6.8
4	25.0	25.7	2.8	25.7	2.8	25.8	3.2
5	45.3	39.2	-13.5	39.2	-13.5	39.2	13.5
6	54.7	65.4	19.6	65.3	19.4	65.6	19.9
7	124.8	105.8	-15.2	105.8	-15.2	111.3	-10.8
8	131.3	127.3	-3.1	127.3	-3.1	127.6	-2.8

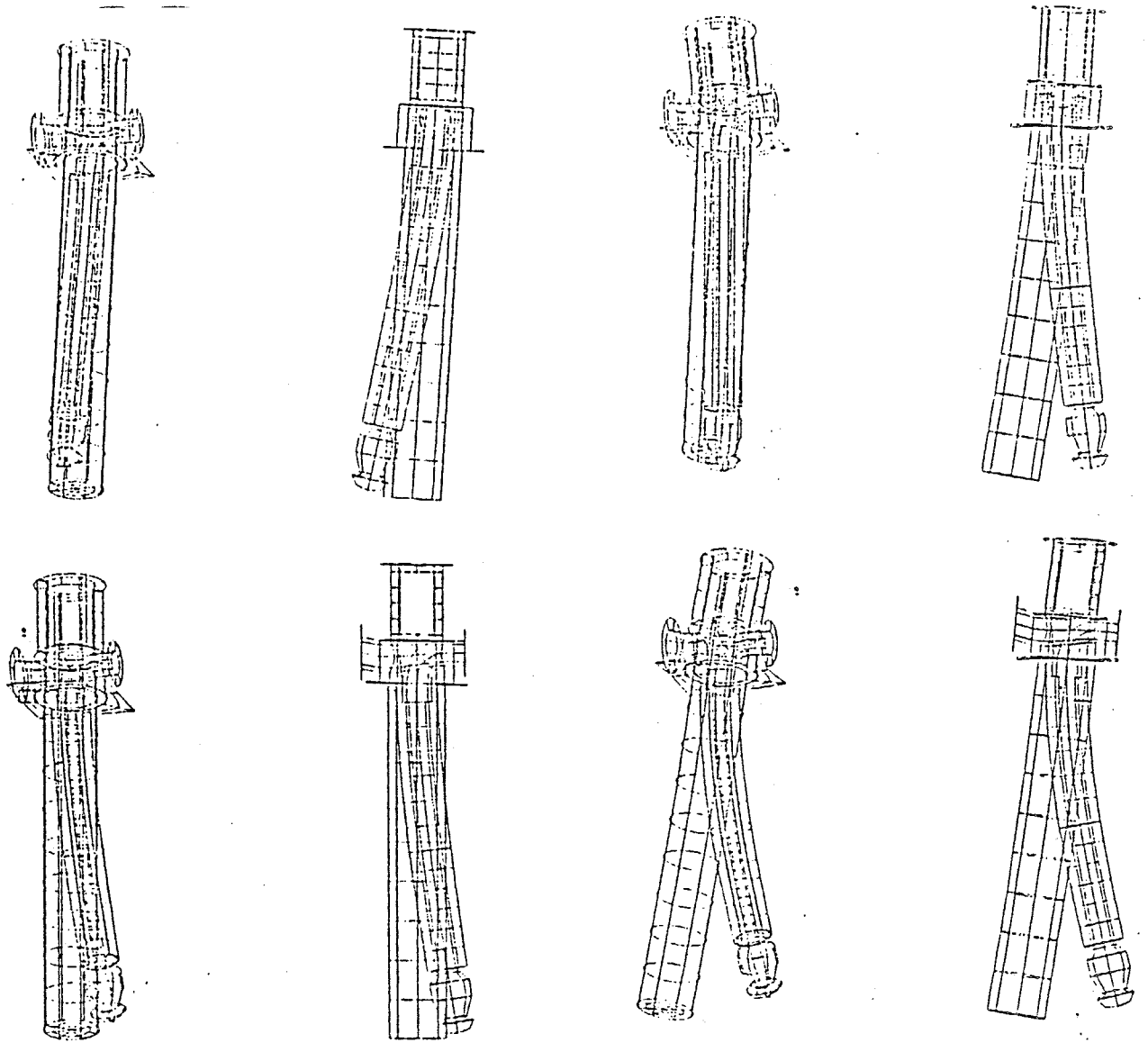


図7-4-10 (a) 固有モード形

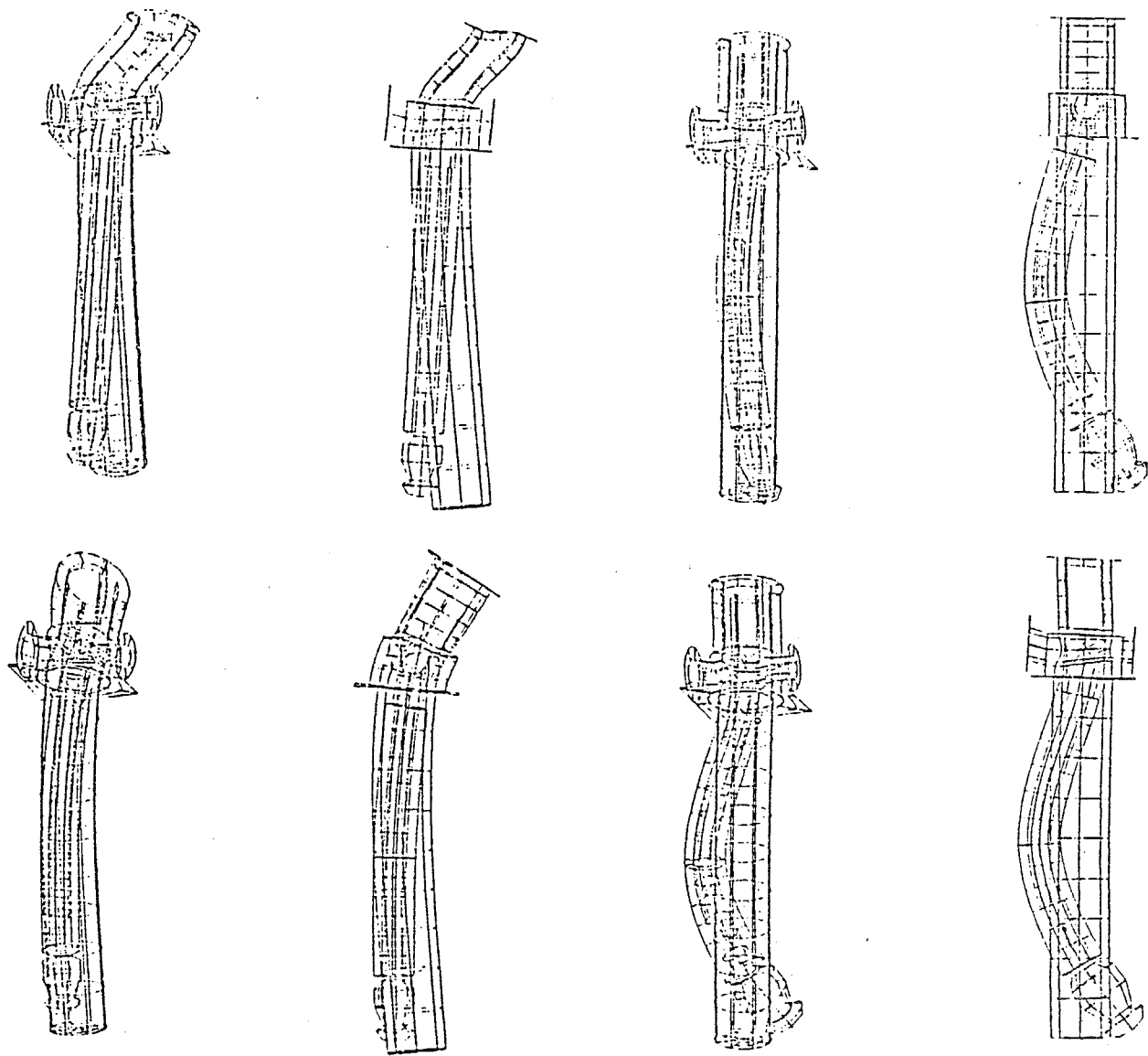


図7-4-10 (b) 固有モード形

表7-4-3 プロセスポンプの計算時間
(使用計算機 HITAC-M200H)

計算内容	第1次分系番号					
	1	2	3	4	5	6
第2次分系の内部領域の固有モードと第2次結合領域への静縮小	123.25	141.03	196.27	106.78	94.75	126.26
第2次結合領域の固有モードと第1次分系の固有振動数とモード空間上の固有モードさらに第1次結合領域への静縮小	62.69	92.20	83.62	73.97	50.23	63.77
第1次結合領域の固有モードと全系の固有振動数とモード空間上での固有モード	30.54					
固有モードの物理座標への変換	19.31					
合計	1264.67					

単位 sec.

7.5 横型連続遠心分離機

横型連続遠心分離機は、自然沈殿よりも効率良く液体と個体を分離するための機械であり、上下水道や化学プラントなどにひろく用いられている。後述のように、その回転部分は二重の円筒にらせん形のひだをつけた構造体であり、それが個液混合体を内蔵して高速で回転する際に複雑な振動を発生し構造全体を励振するために、しばしば振動の問題を生ずる。

そのため、運転時に発生する励振力成分に共振しないように構造設計することが重要であり、かなり大形で複雑な構造形状をしている機械ではあるが、設計段階において精度良い振動解析を行うことができればよい。

そこで、この横型連続遠心分離機は、本CMSの実機への適用例のひとつとして適当と思われるので、その振動解析を試みる。

7.5.1 実験方法

供試体が大形なので、図7-5-1に示すように、油圧加振器による励振試験を行う。すなわち、油圧加振器Cで供試体Dを掃引励振する。そして、応答点の変位を小形変位形Eで検出し、高速フーリエ変換回路(FFT)を経て、X-YレコーダGに応答を出力させる。得られた応答の山頂より固有振動数がわかる。また、定性的なモード形は、小形変位計を供試体の各所に取りつけて得られる応答の位相差と大きさの分布から知ることができる。

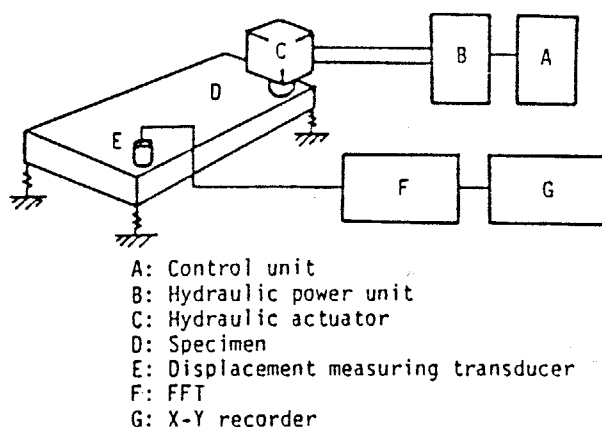


図7-5-1 実験形の概略図

7.5.2 遠心分離機のモデル化

遠心分離機の台盤の概略図を図7-5-2に示す。これを図7-5-3に示すように8個の分系に分割し、CMSで計算する。すべての分系は、1節点6自由度の三角形平板殻要素を用いて有限要素分割を行う。

図7-5-3を一体にすると図7-5-4のようになる。図7-5-5から図7-5-12までに、それらの分系の概略図を示す。なお、図7-5-2と図7-5-4中に示す点Fは励振点を示し、励振はZ軸方向に行う。

次に、この装置の回転体のモデル化を示す。図7-5-13がその概略図であり、通常運転時間の回転数は約2720rpmである。実際の回転体は、この図からわかるように、形状がひじょうに複雑であるが、これを図7-5-14のように単純化し、二重円筒からなる不均一な梁と考える。

図7-5-15は、台盤に回転体を取りつけるための軸受け箱の概略図であり、アイソパラメトリック6面体立体要素(2次)で分割する。回転体と軸受け箱は、図7-5-16に示すようにバネを介して結合し、また軸受け箱と台盤とは剛結合とする。

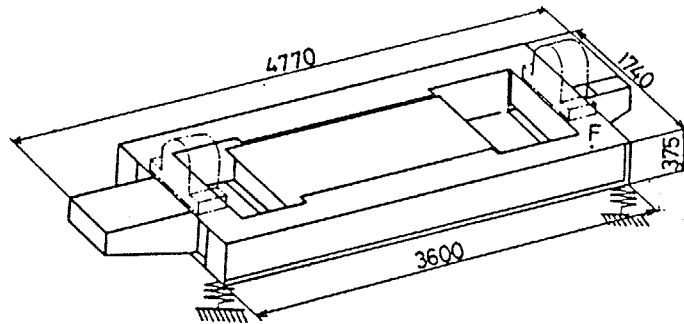


図7-5-2 台盤の概略図

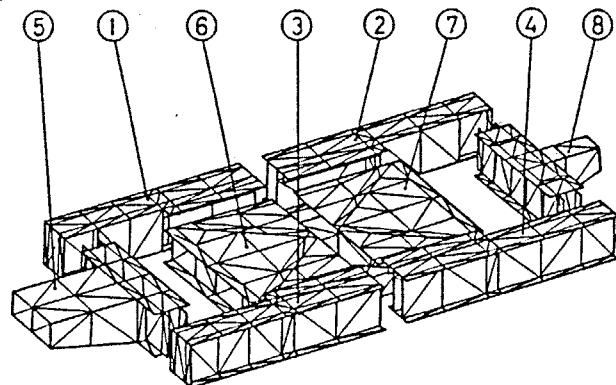


図7-5-3 台盤の分系への分割図

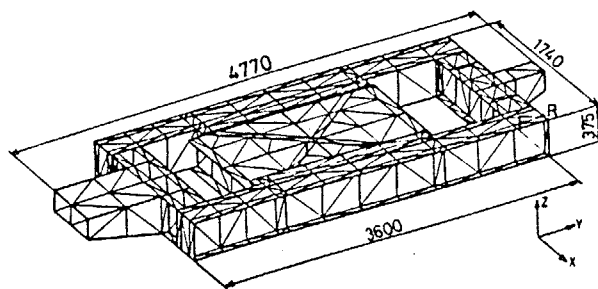


図 7 - 5 - 4 台盤の要素分割図 (節点数 4 3 4)

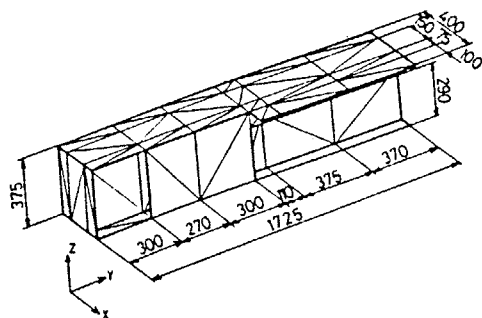


図 7 - 5 - 5 分系 1 の分割図
(節点数 6 8、要素数 1 2 4)

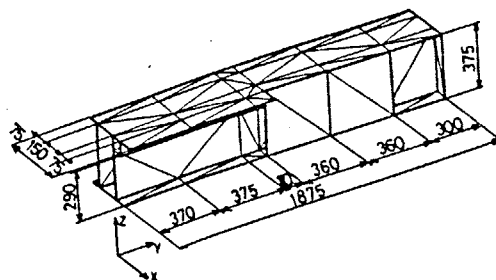


図 7 - 5 - 6 分系 2 の分割図
(節点数 6 8、要素数 1 2 4)

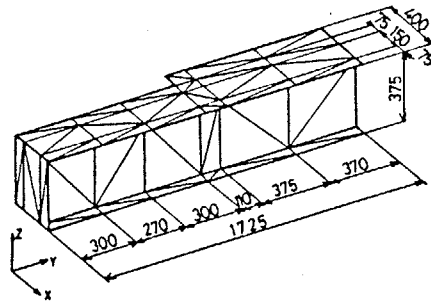


図 7 - 5 - 7 分系 3 の分割図
(節点数 68、要素数 124)

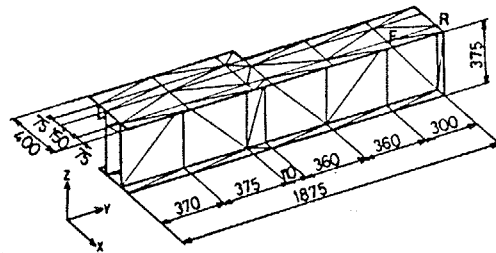


図 7 - 5 - 8 分系 4 の分割図
(節点数 68、要素数 124)

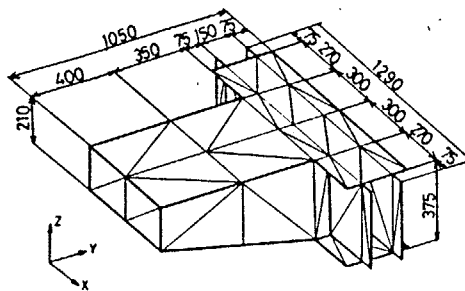


図 7 - 5 - 9 分系 5 の分割図
(節点数 60、要素数 102)

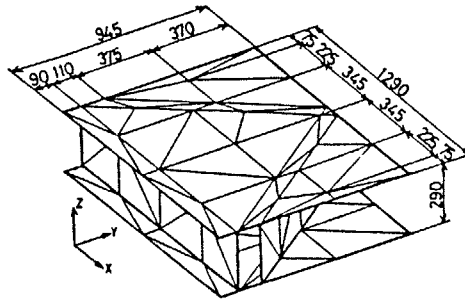


図7-5-10 分系6の分割図
(節点数60、要素数110)

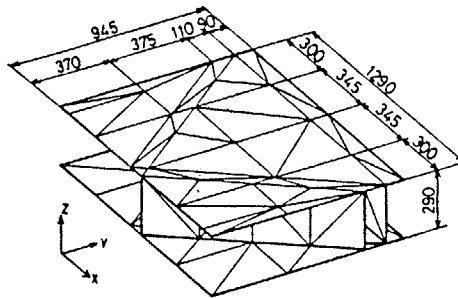


図7-5-11 分系7の分割図
(節点数60、要素数110)

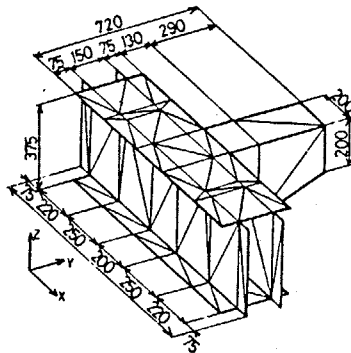


図7-5-12 分系8の分割図
(節点数68、要素数116)

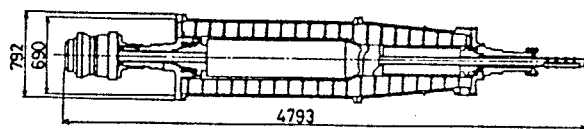


図 7 - 5 - 1 3 ロータの概略図

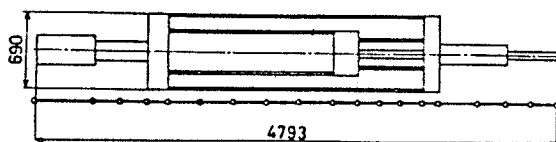


図 7 - 5 - 1 4 ロータのモデル化の概略図
(節点数 19、要素数 18)

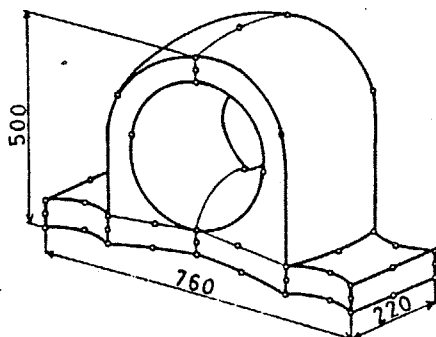


図 7 - 5 - 1 5 軸受箱のモデル化と分割図
(節点数 72、要素数 6)

7.5.3 結果と検討

まず、台盤単体についてCMSによる計算および実験より得られた固有振動数を表7-5-1に示す。また、図7-5-2の点Fを励振したときの励振点自身の周波数応答（コンプライアンス）を図7-5-17に示す。実線がCMSによる計算結果、破線が実験結果である。台盤単体の計算では、減衰を省略する。固有振動数の関する実験結果は良く一致しており、CMSの計算結果の精度の良さがわかる。

図7-5-17の応答では、一部の周波数範囲でしか実験結果が得られていないが、その範囲内では、実用上十分な程度に計算結果と実験結果は一致しているといえる。なお、図7-5-18には、1次と2次の固有モードの概略を示す。これらに関しても、実験結果と計算結果が定性的に良く一致した。

計算時間は、採用固有モード数を結合部に関して10次、各分系の内部領域に関して15次とし、全系に対する固有振動数と固有モードを36次まで求め、さらに全節点について50Hzから350Hzまで0.5Hz間隔に601周波数点の応答を求めて、1476秒であった（著者作成の汎用プログラムでHITAC-M200Hシステム使用）。

次に、台盤に軸受け箱を2箇所に取りつけた場合（図7-5-2参照）の台盤の固有振動数を求める。軸受け箱は、この場合構造物の剛性にはほとんど影響を与えず、質量としてのみ影響すると推定できるので、質量として扱う。

表7-5-2に、CMSによる計算と実験により得られた固有振動数を示す。1次と2次のモード形は、それぞれ図7-5-18で示すものと同一であり、軸受け箱が取り付けられることによって固有振動数が低くなる。固有振動数の計算結果は、実験結果と良い一致を示している。ただし、計算による6次の固有モードに相当するモード形を有する固有振動数は、実験でははっきり検知できなかった。

台盤に軸受け箱とロータを取りつけた系について解析する。この系の固有振動数を表7-5-3に示す。また図7-5-2の点Fを励振したときの点Rの応答を図7-5-19に示す。実線が実験結果、破線がCMSによる計算結果である。実験は油圧力加振器によって励振力980Nの掃引励振を行なった結果である。実験より得られる伝達関数のモード特性分離を行った結果を平均して、表7-5-4のようなモード減衰比を得たので、これらをCMSの計算に用いた。

1次の固有振動数の振動（実験値66Hz、計算値61Hz）は、おもにロータ部の曲げ振動である。台盤と軸受けを剛体として、図7-5-14のモデル化したロータ単体の1次の固有振動数は、計算によれば67Hzであるから、

台盤と軸受け箱を弾性体として扱うことによって、ロータの1次の固有振動数は61Hzに変化したと解釈できる。

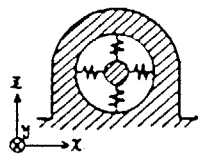
台盤がねじれる状態の最低次の固有振動数は、実験値74Hz、計算値75Hzとなった。また、台盤の曲げ振動の最低次の固有振動数は、実験値136Hz、計算値133Hzとなった。

表7-5-3の固有振動数は、固有モードの対応がはっきりしているものについては、実験結果と計算結果は良く一致した。8次、11次および12次の固有振動数は、実験ではばらつきがおおく信頼性がすくなかったので省略した。この表と、先の台盤単体についての表7-5-1および台盤軸受け箱系の表7-5-2を比較すると、台盤の固有振動数は、台盤単体で104Hzであるが、軸受け箱を取りつけると96Hz、さらに軸受けとロータを組み込むと75Hzであり、組み立て時には大幅に低下する。

このように、回転機械の設計に際しては、外部支持構造単体の振動特性の資料だけでは不十分であり、全体系の振動解析が不可欠である。

図7-5-19の応答は、全体的には計算結果と実験結果が良く一致しているが、部分的には多少異なるところもある。しかし、実機の励振試験はかなり困難であり、特に境界条件を計算と完全に一致するように設定することが難しいこと、実機は形状がきわめて複雑であり細かい構造の変化を十分正確にモデル化していないこと、実機に存在するとおもわれる非線形性を計算で考慮できないこと、などを考えれば、図7-5-19における計算結果と実験結果の多少の差異はしかたがないと思われる。むしろ、図7-5-5から図7-5-16に示すような比較的簡単なモデル化により、固有振動数のみならず応答の絶対値までもこのように実用上十分な程度の精度を有する計算結果を得たことに意義があり、本解析方法（主系従系の区別なしのCMS）の有用性を示すものと考えられる。

なお、計算時間は、すでに台盤単体について解析したときに得られた台盤の各分系の振動特性を利用することによって多少短くなり、934秒（全系の固有モード形を20次まで求め、さらに50Hzから175Hzまでの0.2Hz間隔で減衰を考慮した周波数応答を求めた）であった（著者作成の汎用プログラムでHITAC-M200Hシステム使用）。



Stiffness of Spring
 $k_x = 1.0 \times 10^5 \text{ N/mm}$
 $k_y = 1.0 \times 10^3 \text{ N/mm}$
 $k_z = 1.0 \times 10^5 \text{ N/mm}$

図7-5-16 ロータの取り付け方

表7-5-1 台盤単体の固有振動数
 CMSの採用固有モード数：結合領域 10
 分系の内部領域 15

次数	実験	計算
1	103	104
2	114	123
3	154	160
4	176	172
5	182	183
6	192	186
7	203	195

(Hz)

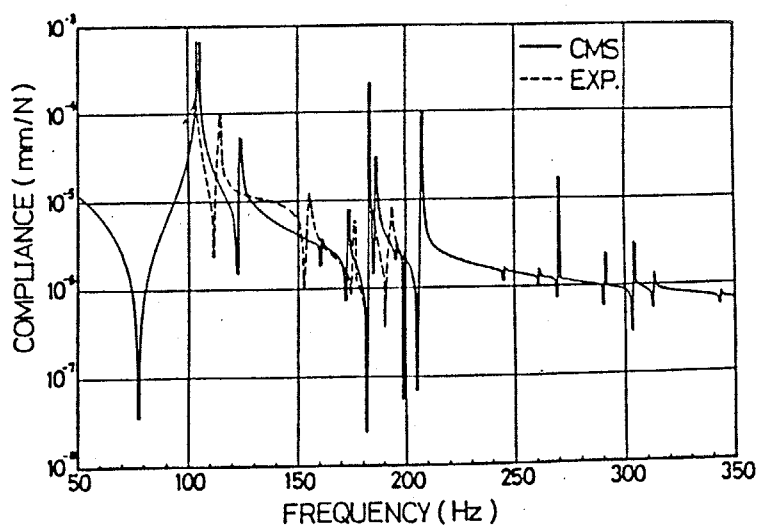


図7-5-17 台盤単体の周波数応答
 (励振点：F、応答点：F)

表 7-5-3 台盤・軸受箱・ロータ系の固有振動数

CMSの採用固有モード数：結合領域 10

台盤の分系の内部領域 15

軸受箱、ロータ 10

次数	実験	計算
1	66	61
2	72	73
3	74	75
4	88	85
5	102	104
6	112	112
7	136	133
8	—	142
9	155	160
10	173	172
11	—	173
12	—	174

(Hz)

備考: 実験の固有振動数は確実に検出できた
175 Hz以下の固有振動数のみ記す。

表 7-5-4 モード減衰比

(実験より決定し、
計算の入力として
使用する)

次数	ζ_i
1	1.75×10^{-4}
2	4.60×10^{-4}
3	1.38×10^{-5}
4	2.40×10^{-3}
5	3.50×10^{-3}
6	6.00×10^{-3}
7	1.60×10^{-2}
8	2.00×10^{-2}
9	1.00×10^{-4}
10	6.40×10^{-4}
11	6.40×10^{-4}
12	6.40×10^{-4}

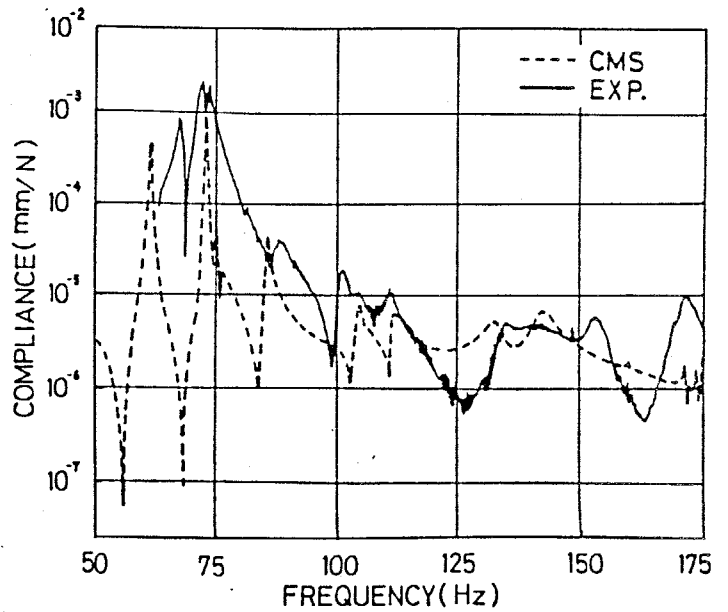


図 7-5-19 台盤・軸受箱・ロータ系の周波数応答
(励振点：F、応答点：R)

7. 6 結言

まず、マシニングセンターの解析について

(1) 著者提案の区分モード合成法によって、マシニングセンターの主要構造物（コラム、ベース、サドル）の振動解析は効率良く、かつ高精度で行なうことができた。

(2) その際に、たとえばサドルの解析において、立体要素（1節点3自由度）によってモデル化された部分と三角形平板要素（1節点6自由度）によってモデル化された部分との結合においては結合自由度の調整をして角変位に対して立体要素を三角形要素で包み込むことによって1節点6自由度の立体要素のようにすることによって解決した。この方法はたいへん単純ではあるが解析例のように実用上十分な精度の解析ができる。

(3) 主要構造物の結合系の解析には、Klostermanの提案した方法であるビルディングブロック法を用いた。この方法の理論は明快であるが、実際の適用に際しては結合部特性の表現の見積りがひじょうに難しく成功した解析例はそれほど多くはない。今回はベースとサドル間のすべり面における結合特性を実験的に見積り、かつ、実験時に設定した結合位置とは違う位置での結合系の解析においては、結合位置による結合特性の補間を行うことによって、任意の位置での結合系の振動特性の解析を可能にした。

クランク軸・フライホイール系について

(1) 著者提案の区分モード合成法によってクランク軸・フライホイール系の振動特性を精度よく効率的に解析できた。

(2) 剰余コンプライアンス行列を用いる不拘束モード合成法によってクランク軸・フライホイール系の解析を行なったが、著者が第5章で提案した剰余コンプライアンス行列の計算方法を利用することによって区分モード合成法とまったく同等の解析精度が得られるようになり、その不拘束モード合成法の解析精度の改善をはかれた。

(4) 特性行列合成法の有効利用方法の1例として、クランク軸・フライホイール系の解析を、区分モード合成法と組み合わせて行なった。その結果、精度良い解析結果を得るとともに、大規模構造物の結合系の解析の過程の一部に特性行列合成法をかませることによって、複雑な解析処理過程を用いずにも振動解析が可能であることを示した。

縦型プロセスポンプについて

(1) 多重区分モード合成法の実機への適用例として縦型プロセスポンプの振動解析を行った。その結果、実用的に十分と思われる精度で解析できた。この例によって、区分モード合成法では結合点が多くなってしまうような大規模構造物の場合には多重区分モード合成法が有効であることがわかった。

横型連続遠心分離機について

(1) 複雑な機械構造物の振動解析を行なう方法の1つとして著者が提案した区分モード合成法を用いて、横型連続遠心力分離機の台盤単体、台盤・軸受け箱系、および台盤・軸受け箱・ロータ系についての固有振動数、固有モードおよび周波数応答を求め、精度良い結果を得た。また、計算時間も比較的短くて済むことがわかった。

(2) 台盤のねじれの固有振動数は、台盤単体で104 Hzであるが、軸受け箱を取りつけると96 Hz、さらに軸受けとロータを組み込むと75 Hzであり、組み立て次には大幅に低下する。このように回転機械の設計に際しては、外部支持構造物単体の振動特性の資料だけでは不十分であり、全体系の振動解析が不可欠である。

(3) 軸受箱と台盤を剛体としたときのロータの1次の固有振動数は67 Hzであるが、軸受箱と台盤をも弾性体として考慮すると61 Hzに低下する。このことから、ロータと支持構造の連成振動を考慮した全体系の解析が不可欠であると思われる。

第8章 結 論

8.1 本研究の結論

本研究の結論を各章ごとに区分して述べる。

第2章「伝達関数合成法」においては

1. 縮小インピーダンス合成法 (RIM) と多重縮小インピーダンス合成法 (MRIM) を開発し、提案した。
2. これらの方法の実用的有用性を明らかにするためにいくつかの供試体モデルの解析を行い実験結果と計算結果を比較検討した。
3. その結果RIMおよびMRIMは従来の方法では解析が困難な複雑な構造物の強制振動解析に有効であることがわかった。
4. MRIMはRIMよりも計算時間と計算機容量の点から優れていることがわかった。

第3章「モード合成法」においては

1. 拘束モード型の方法の一種である区分モード合成法 (CMS) と、そのアルゴリズムを多重化した多重区分モード合成法 (MCMS) を開発し、提案した。
2. これらの方法を用いていくつかの供試モデルの振動解析を行い、実験結果や基準となる解析解と比較した。
3. さらに、いくつかの実機の機械構造物への適用も試みた。
4. その結果、本提案方法による解析結果は実用上十分な精度でそれらの解析を行うことができることが明らかとなった。
5. また、解析時間は構造物全体を一体として解析するより十分短いことがわかった。
6. そこで、CMSとMCMSはたいへん実用性がある振動解析方法の1つであることが示された。
7. 不拘束モード合成法の代表的な二種類の方法の理論を説明し、区分モード合成法とともにそれらの得失を相互に比較した。
8. 結合が比較的柔らかい系に対しては剰余コンプライアンス行列を用いない簡便な方法でもかなり良い精度で振動解析できることがわかった。
9. 不拘束モード合成法の解析精度には剰余コンプライアンス行列の精度が大きく影響することを示した。また、その影響

は低次周波数領域にも及んでいることを明らかにした。

10. そのため、第5章で提案する剰余コンプライアンス行列を精度良く求める方法を不拘束モード合成法に利用すると、解析精度をかなり大幅に向上させることができることがシミュレーションによって明らかになった。
11. この提案方法を用いて不拘束モード合成法により実機のクランク軸・フライホイール結合系の解析を行ったところ、その結果はCMSによる結果および実験結果と良く一致した。
12. その結果、剰余コンプライアンスを考慮する不拘束モード合成法は剛結合の系の解析に対しても拘束モード法のと同等の良好な精度で解析できるようになった。
13. 実験データを用いずにすべての段階を解析的に行う場合は、計算時間と計算精度の2面から判断すると、CMSが最も優れている。

第4章「特性行列合成法」においては

1. 実験または解析的に得られた動特性から特性行列を求めそれを重ね合わせ全体系の解析を行おうとする特性行列合成法を提案した。
2. 特性行列の同定方法としては、まずモード特性を同定してから特性行列を同定するものと振動応答から直接特性行列を同定する方法さらに有限要素法により得られた特性行列をGuyanの静縮小で縮小して得る方法の3通りを示した。
3. これらの3種類の方法を平板モデルと実機のエンジンのクランク軸に適用し、その得失と有用性を検討した。特に、大規模な構造物の解析に対しての対応方法として、多重区分モード合成法などを用いた方法も有効であるが、そのような複雑な多重処理をしなくても、本方法を各解析段階の中間に挿入することによっても実行できることを示した。

第5章「モード解析における高次モードの影響の補正」においては

1. 有限要素法による剰余コンプライアンス行列の計算にはHansteenの方法が有効であるが、この方法は周辺自由状態の系に対しては用いることができない。しかし、部分構造合成法を適用するために機械構造物をいくつかの部分構造に分割するとそのほとんどの部分構造は周辺自由状態の系となる。そこで、このような場合にも精度良い剰余コンプライアンス行列を計算できる方法を開発し、提案した。
2. この提案方法の有効性を簡単なばね・質量モデルのシミュレーションにより明らかにした。なお、この方法は不拘束モ

ード合成法の剰余コンプライアンスを用いる方法に利用すると、その合成法の解析精度の能力をFEMやCMSと同等レベルにまで向上させることができることは、第3章で明らかにしたとおりである。

第6章「特性行列による系の同定」においては

1. 誤差を含まない（または誤差が無視できる程小さい）振動応答データから特性行列を同定する方法を提案した。
2. 誤差を含む場合には前の方法は利用できないので、統計推定学の理論を利用することによって、そのような場合の同定方法を開発し、提案した。
3. シミュレーションによって、それらの理論の正当性を検証した。
4. 実際の実験データを用いる場合のために開発した後者の方法によって特性行列が同定できることを検証するために、1自由度系、一端固定平板、周辺自由円板、実機の機械構造物として誘導電動機固定子鉄心について実測データから実際特性行列を同定した。、そして、それらの適合状態を検討した。
5. このことによって、理論的にも実験的にも特性行列を同定することが可能であることを示すことができた。

第7章「実機への適用」においては

1. 伝達関数合成法の理論説明を行い、実機への適用例としてマシニングセンタの主要構造物であるコラム・ベース・サドルの結合系の解析を行った。
2. その際にベースとコラム間のボルト結合部およびベースとサドル間のすべり面の結合部の適切なモデル化の方法を検討した。
3. その計算結果は実験結果と良い一致を示し、伝達関数合成法が実用できる方法であることがわかった。
4. さらに、部分構造に関して区分モード合成法で解析した結果を用いることによって、伝達関数合成法は従来困難であった結合系の振動解析を設計段階で精度良く実行できることを明らかにした。
5. クランク軸・フライホイール系について区分モード合成法によって解析を試みた。その結果実験結果と比較して十分精度良い解析結果を得た。
6. クランク軸・フライホイール系を3種類の特性行列合成法で解析し、それらの結果を比較検討した。どの方法でもかな

り良い解析結果を得ることができたが、特に、ここではモード特性から求めた特性行列を用いる方法は他の何らかの解析方法と組み合わせて利用すると大規模構造物の解析を多段にかつ単純に解析でき便利であることを主張した。

7. 縦型プロセスポンプの振動解析を多重区分モード合成法により行い、この方法の有効性を明らかにした。この例により多重区分モード合成法は通常の区分モード合成法に増して大規模な構造物の解析を行うことができることを示した。
8. 横型連続遠心分離機を区分モード合成法により解析した。その結果は実験結果とかなり良く一致した。特に、回転機械構造部分とその支持台盤構造物の結合に伴って変化する動特性を十分精度良く追跡できることが明らかとなり、このような機械の振動特性解析には構造物間の連成振動を解析する重要性を示した。

本研究全体の総括的な結論としては、いくつかの新しい方法を開発提案し、部分構造合成法の研究に関するいくつかの問題点を解決し、いろいろなモデル供試体および実機の機械構造物への適用検討をとおして部分構造合成法の有効性を明らかにできた。

8. 2 今後の課題

以上のとおり、本研究では、部分構造合成法の主な型である伝達関数型、モード型および特性行列型にわたる各種の部分構造合成法を提案し、検討してきた。その結果、結論でも記しているような有意義な成果を得ることができた。

しかし、部分構造合成法にはまだ解決されていない重要な課題（問題点）があり、今後部分構造合成法を発展させ実用化するためにはそれらの解決は避けて通れないと思われる。

そこで、ここでは今後の研究のために、これらの課題の主なものについて述べることにする。

まず、部分構造合成法に利用するための計算データ作成もしくは実験データ収集（実験的にデータをとり処理する）の段階での課題としては、以下のようなものがあると思われる。

(1) 解析的モデル化の精度 . . . 有限要素法などで分系のモデル化を行わない解析する場合、部分構造合成法のアルゴリズムそのもの自体に存在する誤差よりも最初のモデル化の誤差の方が、解析精度に大きく影響する。そこで、分系のモデル化は細心の注意のもとにできるだけ正確に行わなければならない。この事は明らかであるが、実際のモデル化に際してはどのような点を考慮してモデル化作業を行えばよいかという具体的な指針はまだひじょうにあいまいである。企業においては長い間の経験に基づいたノウハウをかなり蓄えている所もあると思われるが、このような情報は公表されない。今後は、適切なモデル化を行うための具体的なモデル化の指針を明らかにしていくことはたいへん重要である。

(2) 実験モード解析によるパラメータの抽出精度 . . . 実験モード解析の方法には現在までも多くの方法が研究されて提案されている。しかし、同一のデータを用いても、使用する曲線適合の方法の違いによって得られるモード特性値が大きく違ってしまふというのが現状である。部分構造合成法に実験データを利用するためには、実験精度をあげることもさることながら、もっと理論的に（例えば、統計推定学の観点から）はっきりした妥当性（根拠）を持ったより精度の良い曲線適合を開発していく必要があると思われる。

また、回転変位を精度良く測定することも困難である。部分構造合成法に実験データを組み込むためには、回転自由度を精度良く測定することもたいへん重要である。

(3) 結合特性の把握 . . . 本来は一体構造物である物を解析上部分分割して部分構造合成法を適用する場合は、結合部の特性を剛結合とすればよいが、ほとんどの場合は部分構造間の結合にボルト、リベット、溶接や各種の軸受けや歯車などが介在しているので、そのような結合部分に対する適切なモデル化を決定することはひじょうに重要であるが現在のところ困難といえる。

次に、部分構造合成法自体の課題としては

(1) 方法の選択 . . . 現在までにもいろいろな種類の部分構造合成法が開発され提案されているが、それぞれの方法の欠点、精度、適用限界などの特徴がまだ相互に十分には比較検討されていない。解析対象物の特徴によってどの方法を利用するのが最も適するかというような指針が明らかにされる必要がある。

(2) 高周波領域の解析 . . . 概して、部分構造合成法の解析精度は低周波領域においては良いが、高周波領域では悪化する。そこで、部分構造合成法はもっぱら低周波領域の解析に利用される。しかし、今後は騒音問題などで必要な高周波領域に対処し得る方法も開発される必要がある。

(3) 非線形性を考慮できる方法の開発 . . . いままでの部分構造合成法はモード解析の1分野として研究されてきたので、その理論は線形系を扱っている。しかし、実際の解析対象機械構造物にはガタ、接触面、高分子材料要素などのさまざまな要因による非線形性が必ず存在する。線形としては取り扱えないような対象物の解析に対して、非線形を扱うことができる部分構造合成法が開発されることが期待される。

(4) 実用システムの作成 . . . 本研究のなかで、開発したり取り扱った方法のプログラムはすべて著者が作成し利用してきたが、それらのプログラムは第三者が利用するには不便な点も多いし、プログラムの演算速度の点であまり最適化されていない。部分構造合成法が広く利用され、その有効性が発揮されるためには、有限要素法の汎用プログラムシステムが作成されたように、汎用で使い方の便利な、かつ計算効率が最適化された部分構造合成法のプログラムシステムが開発される必要がある。

部分構造合成法の今後の利用方法に関する課題は

(1) 最適設計技術への利用 . . . 部分構造合成法は、その特徴から感度解析や構造変更シミュレーション技術などとむすびついて最適設計への展開が期待される。

(2) 複合問題への利用 . . . 部分構造合成法の理論の根本からすれば、振動解析以外の問題にも有効に利用できる。例えば、音響振動解析、流体関連振動問題、熱振動問題、制御系を内在した系の振動解析など、多くの複合問題に適用できると思われる。それらへの対応の研究が期待される。

(3) CAE (Computer Aided Engineering) 構想としての研究 . . . 部分構造合成法がCAEの解析プロセスのなかにおける有効な技術であることは明らかである。今後は、CAEシステム全体と具体的に結びつけながらその有効性を発揮させていく研究が盛んに行われると思われる。

[付録 1]

使用した固有値計算用のサブルーチンについて

本研究において作成したプログラムにおいて、固有値計算を行うサブルーチンは日立提供の数値計算副プログラムライブラリー中のサブルーチンを用いている（東京工業大学総合情報処理センターにおいて）。

そのサブルーチンでは、まず一般的固有値問題を標準的固有値問題に変換し、ハウスホルダー法によって三重対角行列に変換して、次にバイセクション法で固有値を求め、さらに逆反復法によって対応する固有モードを求める。

本研究の内容についての著者の論文のうち1982年4月以前に日本機械学会へ投稿したのものについては数値計算副プログラムライブラリーMSLを、それ以後はMSL⁽⁴³⁾2を使用している。

そこで、MSL2のサブルーチンの計算速度について補足しておく（MSLはMSL2より遅い）。なぜならば、本研究における有限要素法の計算時間としてはこのサブルーチンの計算速度が基準となるからである。

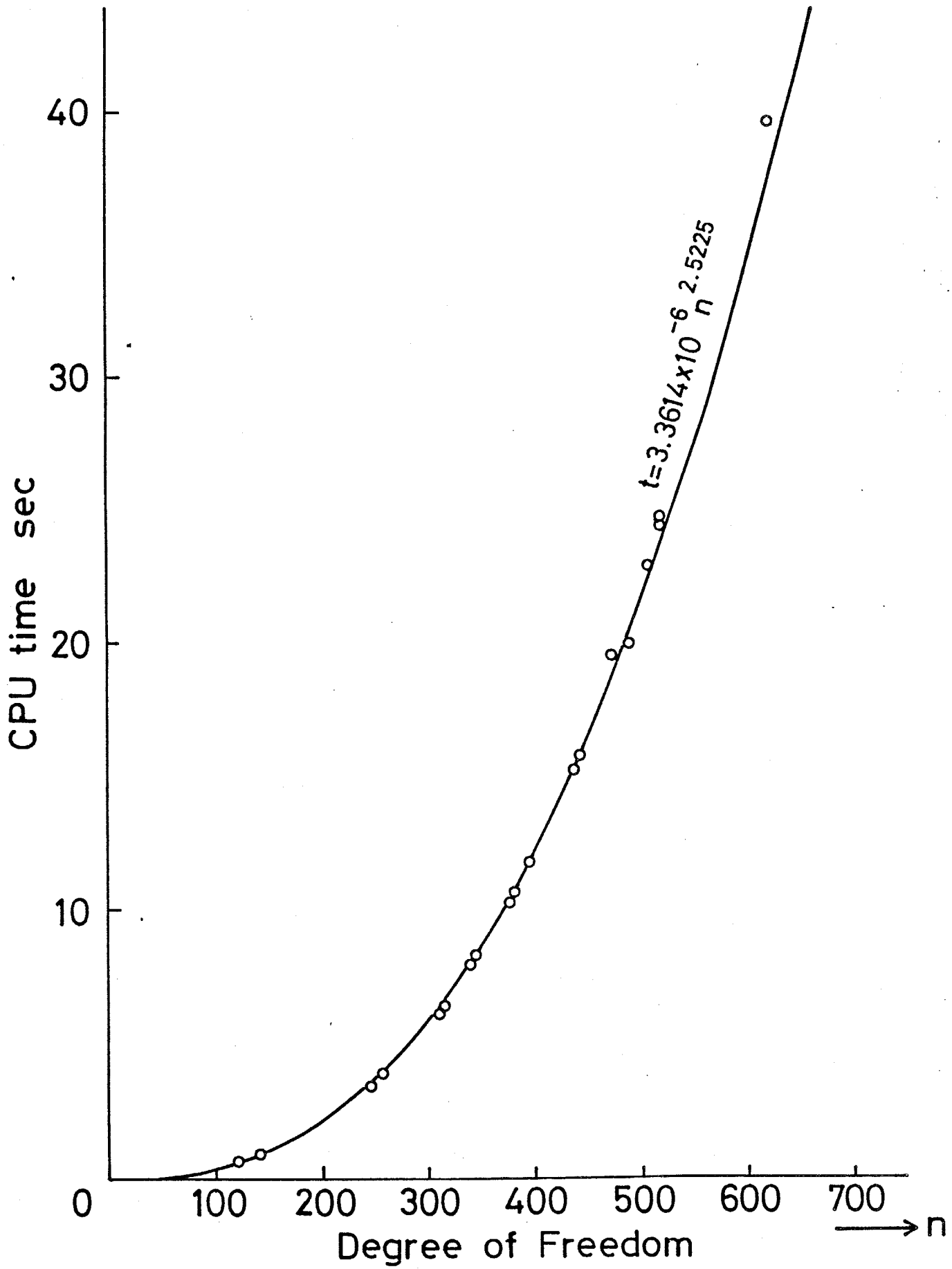
他の製作者による他の数値解析方法（例えばサブスペース法など）のプログラムによる計算時間との比較では、プログラム自体の計算速度の比較はできるが、理論的アルゴリズムそのもの同志の計算速度の比較にはならないからである。

付録図1-1は、使用したMSL2のサブルーチンにより1次から20次までの固有値と固有モードを計算したときの計算時間を、方程式の自由度を横軸にとりプロットしたものである。実際に計測された値に最も良くフィットする指数関数を同定すると

$$t \text{ (sec.)} = 3.3614 \times 10^{-6} n^{2.5225} \quad (\text{付録 1-1})$$

となる。ここで、 n は方程式の自由度で、 t が予測されるCPU time（秒）である。

計算負担の大きい固有値計算や逆行列計算のサブルーチンにプログラムとしてより効率の良いものを使用すれば、本研究において著者が作成した区分モード合成法などのプログラムは大幅にその速度を増す。また、プログラム全体を著者より格段に優れたプログラミング技術を持った人に作成してもらえば、さらに格段に優れた計算速度を誇るプログラムが誕生するであろう。



付録図 1 - 1

[付録 2]

モード特性の物理的意味

モード剛性やモード質量と呼ばれるモード特性値には物理的意味がない、もしくは物理的意味があいまいである、といわれてきた。

しかし、それらのモード特性値には次のように物理的な意味づけをできる。すなわち、モード剛性、モード質量およびモード減衰の値は、ある注目する節点の位置における物理的な等価剛性、等価質量、等価減衰をそれぞれ表している。そこで、注目する（物理的な）位置の違いによって、同じ次数の固有振動に対してもモード特性値は変化するのである。

ここでは、モード剛性、モード質量およびモード減衰を表す値の物理的意味について説明する。減衰の仮定には、一般粘性減衰、比例粘性減衰、一般ヒステリシス減衰および比例ヒステリシス減衰をあげることができるが、ここでは、減衰は比例粘性減衰として説明する。この説明によって、他の減衰系の場合についての解釈もまったく同様に行うことができることは明らかである。

まず、説明をわかりやすくするために、付録図 2-1 に示すような 3 自由度系を取り上げて具体的に説明する。そのあとで、一般的な n 自由度系を取り上げる。

付録図 2-1 の系の各要素の特性値を次のように表す。

質点の質量	m_1, m_2, m_3
バネ定数	k_1, k_2, k_3
減衰定数	c_1, c_2, c_3

今、注目している i 次の固有モードを (x_1, x_2, x_3) と表す。すると、この固有モード形での振動においては、3つの質点の速度比率は常時

$$x_1 : x_2 : x_3 \quad (\text{付録式 } 2-1)$$

(ただし、すべての質点が最大振幅時点の時は除く)

そこで、各質点が $p x_1, p x_2, p x_3$ (p は速度を表すための時間 t の関数值) の速度で動いている瞬間の系全体の運動エネルギー K_{all} を求めると、

$$K_{\text{all}} = \frac{1}{2} m_1 p^2 x_1^2 + \frac{1}{2} m_2 p^2 x_2^2 + \frac{1}{2} m_3 p^2 x_3^2 \quad (\text{付録式 } 2-2)$$

となる。

一方、この運動に対しての等価質量を求める場合には、ある1つの質点の所の運動（振幅）だけをみつめるわけであるから、他の質点の速度振幅値はまったく関心がなくなる。例えば、今、質点2について注目し、その位置での等価質量を求めてみよう。この場合は付録図2-1の3自由度系を付録図2-2のような1自由度系に置き換えようとするので、その未知の等価質量を m'_2 とすると、その点は付録図2-1の質点2とまったく同じ運動（動き）をすることになるので、速度が $p x_2$ の瞬間の運動エネルギー K'_2 は

$$K'_2 = \frac{1}{2} m'_2 p^2 x_2^2 \quad (\text{付録式 } 2-3)$$

当然 $K_{\text{all}} = K'_2$ でなければならない（等価な系なので）ので、

$$\frac{1}{2} m'_2 p^2 x_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 p^2 x_1^2 + m_2 p^2 x_2^2 + m_3 p^2 x_3^2)$$

$$\therefore m'_2 = m_1 \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{x_2}{x_2} \right)^2 + m_3 \left(\frac{x_3}{x_2} \right)^2 \quad (\text{付録式 } 2-4)$$

となる。この式はマトリックス表示すると、

$$m'_2 = \begin{Bmatrix} \frac{x_1}{x_2} \\ \frac{x_2}{x_2} \\ \frac{x_3}{x_2} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{x_1}{x_2} \\ \frac{x_2}{x_2} \\ \frac{x_3}{x_2} \end{Bmatrix} \quad (\text{付録式 } 2-5)$$

となる。すなわち、質点2の固有成分で正規化（第*i*次の固有モードを、質点2に対応した固有モード成分の値を1とするように表す）した固有モードを質量行列に前後から乗じて得られるモード質量は、質点2の位置の物理的な等価質量となるのである。また、以上から、*i*次の固有振動に対する等価質量の値は、最大振幅の質点における値が最小の値となり、固有モード成分の絶対値が

小さい節点の位置における等価質量ほど大きな値となる。また、節となる位置における等価質量は、定義できない（無限大になってしまうから）。

モード剛性についても同様に説明できる。この場合には、ひずみエネルギーを用いて説明するのがよい。すなわち、それぞれの質点の i 次の固有モードの形の振動変位が $q x_1$ 、 $q x_2$ 、 $q x_3$ (q は変位を表すための時間 t の関数値) の瞬間における系全体のひずみエネルギー S_{all} は

$$S_{all} = \frac{1}{2} k_1 q^2 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 q^2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 q^2 (x_3 - x_2)^2 \quad (\text{付録式 } 2-6)$$

一方、質点 2 の位置についての等価剛性を k'_2 とすると、等価ひずみエネルギー S'_2 は

$$S'_2 = \frac{1}{2} k'_2 q^2 x_2^2 \quad (\text{付録式 } 2-7)$$

そこで、付録式 (2-6) と付録式 (2-7) が等しいとすると、

$$\frac{1}{2} k'_2 q^2 x_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ k_1 q^2 x_1^2 + k_2 q^2 (x_2 - x_1)^2 + k_3 q^2 (x_3 - x_2)^2 \right\}$$

$$\therefore k'_2 = k_1 \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 + k_2 \left(\frac{x_2 - x_1}{x_2} \right)^2 + k_3 \left(\frac{x_3 - x_2}{x_2} \right)^2 \quad (\text{付録式 } 2-8)$$

この式は、マトリックス表示すれば、

$$k'_2 = \begin{Bmatrix} \frac{x_1}{x_2} \\ \frac{x_2}{x_2} \\ \frac{x_3}{x_2} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{x_1}{x_2} \\ \frac{x_2}{x_2} \\ \frac{x_3}{x_2} \end{Bmatrix} \quad (\text{付録式 } 2-9)$$

これは、まさに第 i 次の固有モードのモード剛性であり、かつ、その固有モードに対する質点 2 の位置における等価剛性でもある。すなわち、質点 2 の固有成分で正規化 (第 i 次の固有モードを、質点 2 に対応した固有モード成分の値を 1 とするよう表す) した固有モードを剛性行列に前後から乗ずれば、質点 2 の位置の物理的な等価剛性となるのである。以上から、 i 次の固有振動に対する等価剛性の値は、最大振幅の質点における値が最小の値となり、固有モード成分の絶対値が小さい節点の位置における等価剛性ほど大きな値となる。また、節となる位置における等価剛性は無限大になってしまう。

モード減衰についても同様に説明できる。この場合には、減衰による消散エネルギーを用いて説明するのがよい。すなわち、それぞれの質点の*i*次の固有モードの形の振動速度が $p x_1$ 、 $p x_2$ 、 $p x_3$ の振動変位が $q x_1$ 、 $q x_2$ 、 $q x_3$ の瞬間において微小時間 Δt 中で系全体の消費する消散エネルギー E_{all} は

$$E_{all} = \left\{ c_1 p^2 x_1^2 + c_2 p^2 (x_2 - x_1)^2 + c_3 p^2 (x_3 - x_2)^2 \right\} \Delta t \quad (\text{付録式 } 2-10)$$

一方、質点2の位置についての等価減衰を c'_2 とすると、等価消散エネルギー E は

$$E'_2 = c'_2 p^2 x_2^2 \Delta t \quad (\text{付録式 } 2-11)$$

そこで、付録式(2-10)と付録式(2-11)が等しいとすると、

$$c'_2 p^2 x_2^2 \Delta t = \left\{ c_1 p^2 x_1^2 + c_2 p^2 (x_2 - x_1)^2 + c_3 p^2 (x_3 - x_2)^2 \right\} \Delta t$$

$$\therefore c'_2 = c_1 \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 + c_2 \left(\frac{x_2 - x_1}{x_2} \right)^2 + c_3 \left(\frac{x_3 - x_2}{x_2} \right)^2 \quad (\text{付録式 } 2-12)$$

この式は、マトリックス表示すれば、

$$c'_2 = \begin{Bmatrix} \frac{x_1}{x_2} \\ \frac{x_2}{x_2} \\ \frac{x_3}{x_2} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{x_1}{x_2} \\ \frac{x_2}{x_2} \\ \frac{x_3}{x_2} \end{Bmatrix} \quad (\text{付録式 } 2-13)$$

これは、まさに第*i*次の固有モードのモード減衰であり、かつ、その固有モードに対する質点2の位置における等価減衰でもある。すなわち、質点2の固有成分で正規化(第*i*次の固有モードを、質点2に対応した固有モード成分の値を1とするように表す)した固有モードを減衰行列に前後から乗ずれば、質点2の位置の物理的な等価減衰となるのである。以上から、*i*次の固有振動に対する等価減衰の値は、最大振幅の質点における値が最小の値となり、固有モード成分の絶対値が小さい節点の位置における等価減衰ほど大きな値となる。また、節となる位置における等価減衰は意味がない(無限大になってしまう)。

さて、上記の3自由度の具体的な系に対する説明で、モード特性の物理的な

意味は明らかであるが、一応、以下に一般的な n 自由度の系についての説明を行う。ただし、ここでは、モード質量の値が等価質量となることの説明のみにとどめ、モード剛性とモード減衰については省略する。

自由度が n の質量行列を $[M]$ 、注目している第 i 次の固有モードベクトルを $\{\phi\}$ とする。その固有モードベクトル $\{\phi\}$ の上から j 番目の成分（自由度）を ϕ_j とする。すると、この固有モードの振動のある任意の瞬間の速度ベクトル $\{\psi\}$ は

$$\{\psi\} = p\{\phi\} \quad (p \text{ は係数で時間の関数}) \quad (\text{付録式 } 2-14)$$

と表される。

そこで、その時の系全体の運動エネルギー K_{all} は、

$$K_{\text{all}} = \frac{1}{2} p^2 \{\phi\}^T [M] \{\phi\} \quad (\text{付録式 } 2-15)$$

と求められる。

さて今、ベクトル $\{\phi\}$ の上から j 番目の自由度（成分）についての等価質量を m_j として求める。その自由度（成分）での、さきほどと同じ瞬間の速度は $p\phi_j$ である（等価な系に設定するから）ので、その等価運動エネルギー K'_j は

$$K'_j = \frac{1}{2} m_j p^2 \phi_j^2 \quad (\text{付録式 } 2-16)$$

そこで、 $K_{\text{all}} = K'_j$ でなければならぬので、付録式 (2-15) と付録式 (2-16) から

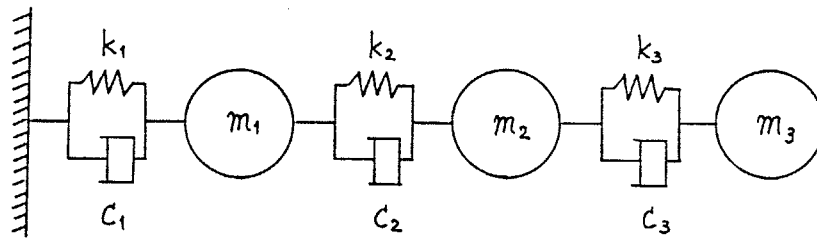
$$m_j = \left(\frac{1}{\phi_j}\right)^2 \{\phi\}^T [M] \{\phi\} \quad (\text{付録式 } 2-17)$$

ここで、 $\{\phi_0\} = \frac{1}{\phi_j} \{\phi\}$ と置き換えると、付録式 (2-17) は

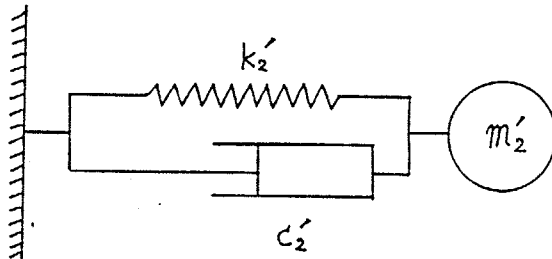
$$m_j = \{\phi_0\}^T [M] \{\phi_0\} \quad (\text{付録式 } 2-18)$$

となる。ベクトル $\{\phi_0\}$ は、上記で明らかなように、上から j 番目の自由度の成分を 1 とした（正規化した）固有モードベクトル $\{\phi_0\}$ にほかならない。

よって、付録式(2-18)によって物理的に意味をもつ等価質量(自由度 j における第 i 次の固有振動の等価質量)をモード質量は表していることがわかる。



付録図 2-1 3自由度の系



補図 2-2 節点 2 についての等価系

[参考文献]

- (1) Klosterman, A.L., "Building Block Approach to Structural Dynamics", ASME Pub. VIBR-30, (1969).
- (2) 阪田 他1名, "機械インピーダンス法による振動解析"
日産技報、1972-1, 57.
- (3) 村井 他、ダイナミックデザインアナリシスの研究 (第1報)
小松技報 Vol.24 No.84, (1978), 245.
- (4) 村井 他、ダイナミックデザインアナリシスの研究 (第2報)
小松技報 Vol.25 No.2, (1979), 73.
- (5) 村井 他、ダイナミックデザインアナリシスの研究 (第3報)
小松技報 Vol.25 No.2, (1979), 83.
- (6) 村井 他、ダイナミックデザインアナリシスの研究 (第4報)
小松技報 Vol.25 No.3, (1979), 167.
- (7) 村井 他、ダイナミックデザインアナリシスの研究 (第5報)
小松技報 Vol.26 No.2, (1980), 119.
- (8) Berman, A., "Vibration Analysis of Structural Systems Using Virtual Substructures", (unknown.)
- (9) Humm, B.A., "A method of calculating the space free resonant modes of an aircraft", J. Royal Aeronaut. Soc. 57, p.420 (1953)
- (10) Macneal, R.H., "Vibration of composite systems",
AFOSR-IN-55-120, Office of Scientific Research Air Research and Development Command, Technical Report No.4, (1954)
- (11) Hurty, W.C., "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes", AIAA J. 3-4 (1965-4), 678
- (12) Craig, R.R. and Bampton, M.C., "Coupling of Substructuring for Dynamic Analysis", AIAA J. 6-7 (1965-2), 1313
- (13) Benfield, W.A. and Hruda, R.F., "Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution",
AIAA J. 9-7 (1971-7), 1255
- (14) Bajan, R.L. and Feng, C.C. AAS Symposium Paper
No.68-8-1 July (1968).
- (15) Klosterman, A.L., "On the Experimental Determination and use of Modal Representation of Dynamic Characteristics",
ph.D dissertation, Univ. of Cincinnati, 1971
- (16) Gladwell, G.M.L. J. Sound Vibration, 1, 41-59 (1900).
- (17) Goldman, R.L. "Vibration Analysis by Dynamic Partitioning"
AIAA J., Vol.7 (1969)
- (18) Hou, S.N. "Review of Modal Synthesis Techniques and a New Approach", Shock Vibration Bull., 40(4), 25-30, (1969).

- (19) Macneal, R.H., "A Hybrid Method of Component Mode Synthesis", Computers & Structures, Vol.1, (1971) 581.
- (20) Hurty, W.C. and 2, "Dynamic Analysis of Large Structures by Modal Synthesis Techniques", Computers & Structures Vol.1, (1971) 535.
- (21) 西村、モード集成法について
日本航空宇宙学会誌、27-307 (1979-8), 389
- (22) Hansteen, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.7, 405-411 (1979), 405
- (23) 畠、重田、機論、"モーダル解析での高次モード削除の補正方法" 50-449C(1984), 11.
- (24) 西岡 他4名、"車体の大規模振動解析法"
マツダ技報、No.2 (1984), 59.
- (25) Guyan, R.J., "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", AIAA J. 3-2 (1965-2), 380
- (26) Leuridan, J.M., et, AIAA 82-0767-CP, (1982), 497
- (27) 花田ほか、第6回日本地震工学シンポジウム資料、(1982), 905
- (28) 道村、"羽根車の振動に関する研究"、博士論文、
東京工業大学(1980)
- (29) 稲村 他3名、"実験データを併用する対話型構造解析システムの
開発(第1報 解析の基本方法)"、精機論、46-6, (1980) p.727.
- (30) O.C.Zienkiewicz、基礎工学におけるマトリックス有限要素法、
培風館、(1975)。
- (31) 成岡、遠田、伝達マトリックス法、培風館、(1970)。
- (32) 戸川、マトリックスの数値解析、オーム社、(1976)。
- (33) 戸川、有限要素法による振動解析、サイエンス社、(1975)。
- (34) 長松、日本機械学会第535回講習会資料、(1982)。
- (35) 長松、日本機械学会第574回講習会資料、(1984-7)。
- (36) 長松、日本機械学会関西支部第123回講習会資料、(1984-7)。
- (37) 大久保、機械のモーダルアナリシス、中央出版部、(1982)。
- (38) 吉本、確率統計工学、共立出版、(1976)。
- (39) 近藤、最適化法、コロナ社、(1984)。
- (40) 粟屋、データ解析、学会出版センター、(1983)。
- (41) 長松、モード解析、培風館、(1985)。
- (42) Gallagher, R.H., 有限要素解析の基礎、丸善、(1976)。
- (43) 日立プログラムプロダクトマニュアル
数値計算副プログラムライブラリーMSL 2 8080-7-120-20.
- (44) 大崎、"地震動のスペクトル解析入門"、鹿島出版会、1983.

[本論文に関する著者発表の参考文献]

- < 1 > 縮小インピーダンス合成法による強制振動の解析
(第1報、解析方法の説明と基礎的検討)
機論 46-407, 1980-7, 703
- < 2 > 区分モード合成法による振動解析
(第1報、固有振動数と固有モード (I))
機論 46-412, 1980-12, 1463
- < 3 > 区分モード合成法による振動解析
(第2報、強制振動 その1)
機論 47-423, 1981-11, 1411
- < 4 > 区分モード合成法による振動解析
(第3報、シリンダブロックの解析)
機論 48-433, 1982-9, 1333
- < 5 > 縮小インピーダンス合成法による強制振動の解析
(第4報、多重化の提案とディゼル発電パッケージ台盤への適用)
機論 48-432, 1982-8, 1129
- < 6 > 区分モード合成法による振動解析
(第4報、固有振動数と固有モードその2)
機論 49-443C, 1983-7, 1120
- < 7 > 区分モード合成法による振動解析
(第5報、強制振動 その2)
機論 50-450C, 1984-2, 251
- < 8 > 区分モード合成法による振動解析
(第6報、横型連続遠心分離機への適用)
機論 50-450C, 1984-2, 260
- < 9 > 多重区分モード合成法による振動解析
機論 49-446C, 1983-10, 1876
- < 10 > 区分モード合成法とMSC-NASTRANの比較
機論 49-446C, 1983-10, 1183

- < 1 1 > 部分構造合成法による振動解析
(第4報、有限要素法による剰余コンプライアンス行列の計算)
機論 50-457C, 1984-9, 1563
- < 1 2 > 特性行列の実験的決定による系の同定
(第1報、方法の提案と基礎的検討)
機論 51-464C, 1985-4, 719
- < 1 3 > マシニングセンタの振動解析
(第1報、部分構造単体) 機論 50-460C, 1984-12, 2276.
- < 1 4 > マシニングセンタの振動解析
(第2報、コラム・ベース・サドルの結合系)
機論 50-460C, 1984-12, 2283.
- < 1 5 > モード合成法による振動解析
(異なる方法の比較 その1) 機論 51-467C, 1985-7, 1710.
- < 1 6 > 部分構造合成法による振動解析
(第5報、同定した特性行列を用いる方法)
機論 51-471C, 1985-11, 2959.
- < 1 7 > 区分モード合成法によるプロセスポンプの振動解析
機論 51-471C, 1985-11, 2944.
- < 1 8 > Application of Direct System Identification Method
for Engine Rigid Body Mount System
S A E 1986 Annual Congress
- < 1 9 > 区分モード合成法によるプログラムによる振動解析
日本建築学会第8回電子計算機利用シンポジウム、(1985-3).
- < 2 0 > 特性行列の実験的決定による系の同定
(第2報、誤差を含むデータに対する同定法の提案)
機論 52-478C, 1986-6, 1742.
- < 2 1 > モード解析に関する研究
(第6報、曲線適合における重み関数の設定方法)
日本機械学会 投稿中

< 2 2 > 特性行列の実験的決定による系の同定
(第3報、実測データからの同定)

日本機械学会 投稿中

謝 辞

本研究の遂行にあたり、終始御指導くださいました東京工業大学工学部の長松昭男教授に対し心から御礼申し上げます。

長松先生には、大学学部4年次の卒業研究、修士課程、博士課程（中退）、さらに助手にさせていただいて以後も研究に関する御指導はもとより、私の人生に対する御指導御鞭達をも頂いて来ました。特に、大学院への進学を勧めてください、研究活動に申し分のないすばらしい環境を与えて頂きました。当時の私の家庭環境を思うと、この先生のお導きがなければ私の大学院への進学はなかったでしょう。そして本研究も成し遂げられなかったと思います。微力ながらこのような研究を行うことができたのは、ひとえに長松先生の御指導によるものなのです。

また、本研究において各手法の実機への適用などに際しては、小松製作所（株）技術研究所の村井秀児氏、小松製作所（株）小山工場の石原章氏、日本鋼管（株）中央研究所の白井正明氏、いすゞ自動車（株）の山川新二氏、秋葉機四郎氏、岩原光男氏、石川島播磨重工業（株）の斉藤忍氏、荏原中央研究所（株）の金光陽一氏、日向達夫氏、新潟鉄工所（株）の上野弘良氏、マツダ（株）技術開発部の中島国成氏、仏円哲郎氏、東京芝浦電気（株）の重電技術研究所の渡辺俊三氏、一文字正幸氏をはじめ各会社の多くの方々にたいへんお世話になりました。各氏に対して厚く御礼申し上げます。

一方、長松研究室では多くの先輩、同期の友人には楽しい研究生活を一緒に送らせて頂きながら、折にふれいろいろ御助言を頂きました。技官の山口正勝氏には実験時などにおける技術的な協力から本論文作成にあたるまで多大な御援助を頂きました。さらに後輩の皆様には実験やら解析作業などにおいて多大な御協力を頂きました。心から感謝申し上げます。

学生時代の経済的な面においては、日本育英会から奨学金を貸与して頂きました。また修士課程では鹿島育英会からも奨学金を頂きました。私の学生生活の経済的な支えをして下さった両育英会に対し心から感謝申し上げます。

最後に、私が高校1年の時に父が他界した後たいへんな苦勞をしながら私を高校、大学、そして大学院までの長い間勉学のできる幸せな境遇においでくれた母に対してこの場をかりて改めて心から感謝いたします。そして、私の研究活動を天国から見守ってくれた父にこの論文を捧げます。また日常生活上いろいろ協力してくれた妹の京子さんと弟の孝雄さんにも感謝します。

昭和61年 夏