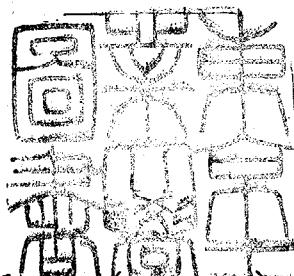


論文 / 著書情報  
Article / Book Information

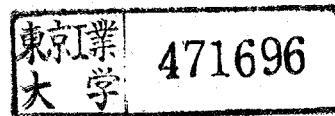
題目(和文)	き裂の進展挙動を記述するための破壊力学パラメータに関する研究
Title(English)	
著者(和文)	岸本喜久雄
Author(English)	KIKUO KISHIMOTO
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:乙第1100号, 授与年月日:1982年1月31日, 学位の種別:論文博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: , Report number:乙第1100号, Conferred date:1982/1/31, Degree Type:Thesis doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis



き裂の進展挙動を記述するための

破壊力学パラメータに関する研究

岸本 嘉久雄



目 次

第Ⅰ章 序論	1
1.1. 緒言	1
1.2. 本論文の目的と構成	8
第Ⅱ章 き裂の進展挙動を記述するための 破壊力学パラメータ	11
2.1. 緒言	11
2.2. エネルギ解放率	11
2.2.1. 破壊進行領域の変形に伴うエネルギー解放率	11
2.2.2. エネルギ解放率の成分表示	15
2.3. $\Delta$ , $\Gamma$ , および $M$ の積分経路に依存しない表示式	20
2.4. 破壊進行領域が小規模な場合	23
2.4.1. エネルギ解放率	23
2.4.2. $\Delta$ 積分と他の破壊力学パラメータとの関係	25
2.4.3. $\Delta$ 積分と特異応力場の強さとの関係	31
2.4.4. 破壊の条件式	34
2.5. 三次元問題への拡張	38
2.6. 終言	43
第Ⅲ章 動的破壊問題への応用	45
3.1. 緒言	45
3.2. 衝撃荷重を受けたき裂の動的応力拡大係数	

およびエネルギー解放率	— 46
3.2.1. 弹性体および粘弹性体に対する基礎関係式	— 46
3.2.2. 特異要素を用いた有限要素法による 動的応力拡大係数の解析	— 52
3.2.3. 子積分を用いた動的応力拡大係数の 有限要素解析	— 61
3.2.4. 三点曲げ試験片の動的応力拡大係数の解析	— 71
3.3. 高速で進展するき裂の動的応力拡大係数 およびエネルギー解放率	— 87
3.3.1. はじめに	— 87
3.3.2. 中央に集中荷重を受けて両側に進展するき裂	— 90
3.3.3. 動的応力拡大係数の有限要素解析	— 111
3.3.4. 高速き裂進展のシミュレーション	— 121
3.3.5. き裂の分歧に及ぼす負荷形式の影響について	— 126
3.4. 結言	— 138
第IV章 弾塑性破壊問題への応用	— 140
4.1. 緒言	— 140
4.2. 平面問題における子積分	— 141
4.2.1. はじめに	— 141
4.2.2. 除荷過程を含む場合の子積分	— 142
4.2.3. 温度場における子積分	— 150

4.3. 三次元問題における予積分 —————	164
4.3.1. はじめに —————	164
4.3.2. 予積分の三次元有限要素解析法 —————	166
4.3.3. 予積分の三次元弾塑性解析(板厚効果について) —————	171
4.4. 結 言 —————	181
 第V章 結 論 —————	183
参考文献 —————	189
付 錄 —————	197

## 第Ⅰ章 序論

### 1.1. 緒言

機械や構造物の設計においては、材料の降伏応力や引張り強さを適当な安全率で除した値である許容応力が強度の基準として用いられてきた。しかし、実際にはこのような強度基準以下で設計され十分安全と考えられていた機械や構造物にも破壊事故が発生している。これは、従来の設計法では部材中にあるかじめ存在していたか、稼動中に発生した欠陥やき裂の影響を考慮しなかったためである。破壊力学は、このような欠陥やき裂の成長現象を明らかにし、機械や構造物の安全な製作・使用条件を確立することを目的としており、最近の十数年間に急速に進歩してきた学問分野である。<sup>(1-4)</sup>

材料の破壊は巨視的には、き裂の進展運動として捉え子のが普通である。しかし、き裂の進展は、その先端近傍の破壊進行領域（fracture process regionまたはend region）と呼ばれる狭い領域において進行する微視き裂や空孔の発生・成長・合体の結果として引き起こされるので、単に弾性論や塑性論などの連続体の力学を適用するのでは問題を解決することは困難であり、き裂先端近傍の微視的な特性をなんらかの形で考慮した取扱いが必要である。

微視的な現象においても巨視的な現象においてもエネルギー保

存の法則は維持されなければならぬので、き裂進展によって物体が解放するエネルギーとき裂面を形成するのに必要なエネルギーが等しいという巨視的関係が破壊の条件式として採用されている。この手法においては、き裂先端で生じる破壊の微視的な特性は破面形成に必要なエネルギーに置換されたことになる。このような取扱いは、Griffith<sup>(5)</sup>によって無限体中の一様引張りを受けたき裂について提唱され、Irwin<sup>(6)</sup>によって任意の寸法・形状のき裂の場合にまで拡張されたもので、破壊の条件式は

$$G = G_C \quad (I-1)$$

で表わされる。<sup>(7)</sup>ここで、左辺の  $G$  はエネルギー解放率と呼ばれ、き裂を含む物体を線形弾性体と考えて、き裂が単位長さ進展する際に物体が解放するエネルギーを弾性計算によって求めた値である。また、右辺の  $G_C$  は破壊靭性値と呼ばれ、破面形成の際に必要なエネルギーで、材料に固有の物性値と仮定される量である。

一方、線形弾性体中のき裂先端の応力場は、例えば、開口変位様式 (Mode I) の場合、応力拡大係数  $K_I$  を用いて

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (I-2)$$

で表わされる。<sup>(7)</sup>ここで、 $f_{ij}(\theta)$  は応力  $\sigma_{ij}$  の  $\theta$  方向分布を定める関数であり、材料、荷重、き裂の幾何学的形状などには依存しない。この式に見られるように、応力はき裂先端で  $1/r$  の特

異性を持つており、応力拡大係数は特異性の強さを表すやうなX-Yとしての物理的な意味を有する。応力拡大係数は弾性体の幾何学的形状と負荷条件とによって定まる係数であり、応力拡大係数を与ればき裂先端の力学場は一意的に決定されるに至る。実際の材料では、き裂先端では高い応力となり塑性変形を生じる。しかし、塑性域の寸法がき裂や板厚などで表される試験片の代表寸法に比べて十分小さければ（小規模降伏状態ならば）塑性域近傍の弾性域では式(I-2)が成立してくる。したがって、き裂先端の塑性変形および塑性域内部の破壊進行領域内の破壊過程は応力拡大係数 $K_I$ によって定められた特異応力場によって支配されてゐると考えることができます。このような特異応力場に基づく破壊条件式は

$$K_I = K_C \quad (I-3)$$

で表現される。<sup>(7)</sup>  $K_C$ は $G_C$ と同様に破壊物性値と呼ばれ、き裂先端の微視的な破壊機構によって定まる物性値と仮定された量である。弾性エネルギー解放率 $G$ と応力拡大係数の間には次式のような一一対一の関係が成立する<sup>(7)</sup>

$$G = \frac{K^2}{8\mu} \quad K = \begin{cases} \frac{3-4\nu}{(3-\nu)/(1+\nu)} & : \text{平面ひずみ状態} \\ & : \text{平面応力状態} \end{cases} \quad (I-4)$$

ただし、 $\mu$ は横弾性係数、 $\nu$ はポアソン比である。したがって、エネルギーの保存則の考えに基づく式(I-1)の破壊条件式と特異応力場の考えに基づく式(I-3)は等価な条件式であることが

わかる。GおよびKはいずれも弾性計算から求められたので、小規模降伏状態の場合に限って式(I-1)あるいは式(I-3)は破壊条件を表し、GあるいはKは、き裂進展挙動を記述するための有効な破壊力学パラメータとしての意味を持つものと考えられる。線形破壊力学はこのよろな線形弾性体内のき裂モデルに基づいて破壊現象を取扱う分野であり、き裂の進展挙動を单一の力学パラメータで記述するという簡明さとあり、せん性破壊の問題をはじめとして、安定き裂の成長、疲労き裂の成長、環境破壊の問題等に広く応用されている<sup>(7)</sup>。

実際の破壊では、塑性変形域はき裂先端近傍の微小領域に限定されず、き裂長さに比較して無視できない程度に拡がる場合が多い。このような場合には、式(I-1)あるいは式(I-3)を破壊の条件式と考えることは現実的でない。BegleyおよびLandes<sup>(8)</sup>は、き裂先端で大規模降伏を生じる場合の破壊にたいしては、J積分を用いて破壊の条件式を与えることを提案している。J積分は Rice によると平面

問題として定式化され、図 I-1 に示すような経路  $\Gamma$  に沿う線積分として

$$J = \int_{\Gamma} [W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma] \quad (I-5)$$

で定義されてい<sup>(9)</sup>る。ここで、W はひずみエネルギー密度であり、応力  $T_{ij}$

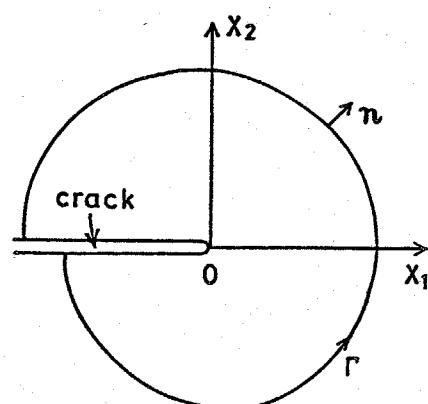


図 I-1 J 積分の積分経路

ひずみ  $\varepsilon_{ij}$  を用いて次式によって与えられる。

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (I-6)$$

また、 $u_i$  は変位であり、表面力は

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (I-7)$$

で表わされる。ここで、 $n_j$  は曲線  $\Gamma$  の外向き単位法線ベクトルの成分を表わす。J 積分は、応力  $\sigma_{ij}$  がひずみ  $\varepsilon_{ij}$  の一価関数として定義できる線形および非線形弾性体の場合には、エネルギー解放率という物理的な意味を持つ経路独立な線積分であり、線形弾性体については、弾性エネルギー解放率  $G$  に一致する。したがって、J 積分を用いた破壊の条件式は、弾性エネルギー解放率  $G$  を用いた式(I-1) の条件式の非線形弾性問題への拡張とみなすことができる。

また、塑性変形に対する構成方程式が

$$\sigma/\sigma_Y = (E\varepsilon/\sigma_Y)^N \quad \sigma \geq \sigma_Y \quad (I-8)$$

で与えられる全ひずみ理論に従う弾塑性体が単調増加荷重を受けける場合(非線形弾性体の問題と等価となる)のき裂先端近傍の応力・ひずみ場は J 積分を用いて

$$\sigma_{ij} = \sigma_Y \left[ \frac{EJ}{\sigma_Y^2 r} \right]^{N/(1+N)} \tilde{f}_{ij}(\theta; N) \quad (I-9a)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_Y}{E} \left[ \frac{EJ}{\sigma_Y^2 r} \right]^{1/(1+N)} \tilde{g}_{ij}(\theta; N) \quad (I-9b)$$

によって表わされる。<sup>(10-12)</sup> ただし、 $\sigma_Y$  は降伏応力、 $E$  は綫弾性係数である。したがって、破壊進行領域の大きさが試験片の代

表寸法（き裂長さや板厚など）に比べて十分小さく場合には、式(I-9)で表わされる特異応力・ひずみ場（HRRの特異場）が破壊過程を支配すると考へれば、J積分による破壊条件式は特異場に基づく破壊条件式とみなすこととする。さらに、き裂先端の開口変位 $\phi$ とJ積分の間に

(I-10)

$$\phi = m G_Y J$$

のような関係式が成立するので、J積分を用いた破壊条件式と開口変位 $\phi$ を用いた破壊条件式は等価であると考えられる。ただし、 $m$ は定数であり材料やき裂モデルによって異なるが、およそ1~2の値をとる。<sup>(13)</sup>

なお、小規模降伏状態の場合には、HRRの特異場の周囲に式(I-2)で表わされた弾性応力特異場が存在するので、J積分の経路独立性と式(I-4)を組み合せると

$$J = G = \frac{K+1}{8\mu} K_I^2 \quad (I-11)$$

の関係式が成立する。<sup>(9)</sup>したがって、J積分を用いた破壊条件式は小規模降伏状態における $G$ や $K_I$ による条件式を特別な場合として含んでいる。

以上の観点から、J積分は小規模降伏状態から大規模降伏状態に至るまでのき裂の進展挙動を記述することができる。单一の破壊力学パラメータとして有望視され、小型試験片を用いた韌性評価<sup>(8, 14)</sup>をはじめとして、疲労き裂進展<sup>(15)</sup>、安定き裂の成長<sup>(16)</sup>

などのようなき裂進展挙動の予測にJ積分を適用することができるようになっている。しかしながら、J積分は種々の仮定の下に定義されてるので、以下に記すような適用上の制約がある。

(i) J積分は線形および非線形弾性体(除荷過程が存在しない場合には全ひずみ理論に従う弾塑性体と等価)に対して定義されてるので、それ以外の構成関係に従う材料(例えば、ひずみ増分理論に従う弾塑性体、ひずみ速度に依存する材料、材料定数が温度に依存する材料、不均質体など)に対しては適用できない。

(ii) き裂進展には必ず除荷を伴うので、J積分は弾塑性体のエネルギー解放率と見なすことはできず、熱力学の法則に基づいた議論(例えば、き裂進展現象は不可逆過程であるといったような議論<sup>(7)</sup>)には適用できない。

(iii) 残留ひずみの存在する問題に適用できない。

(iv) 小規模破壊進行領域が仮定されてるので、破壊進行領域の大きさが無視できないような延性破壊の問題には適用できない。

(v) 微小ひずみが仮定されてるので大変形問題に適用できない。

上記の(i)～(v)は大規模降伏状態の場合にJ積分を適用する際の制約であるが、小規模降伏状態において弾性き裂モデルを取り

扱う場合に以下のような制約がある。

- (VI) 慣性力、物体力が存在する場合に適用できない。
- (VII) 熱ひずみが存在する場合に適用できない。
- (VIII) き裂面に外力が作用する問題に適用できない。
- (IX)  $J$ 積分は二次元問題に対して定義されているので、三次元問題の場合に適用できない。

したがって、破壊力学を単に材料の韌性評価の手段に留めず、複雑な負荷を受ける機械や構造物の安全性評価の手段として用いるためには、上述のような制約条件を取り除き、破壊力学の適用範囲を広げることが必要と思われる。

## 1. 2. 本論文の目的と構成

$J$ 積分は小規模降伏状態から大規模降伏状態に至るまでのき裂の進展挙動を記述するための单一の破壊力学パラメータとして有望視されているが、前節で述べたように $J$ 積分の適用が困難となる場合は少なくなり。したがって、このような場合にどう適用できる破壊力学パラメータを求めすることが必要である。本論文は以上の観点から、物体力、慣性力、固有ひずみ（熱ひずみや塑性ひずみなど）や破壊進行領域の大きさなどが無視できない場合の破壊力学パラメータをエネルギーの保存則に基づいて

導出し、その特質について検討することを目的とする。

第Ⅱ章「き裂の進展挙動を記述するための破壊力学パラメータ」では、任意の構成関係式に従う物体中をき裂が進展する場合のエネルギーの平衡条件について考察し、破壊進行領域の変形に伴うエネルギー解放率の積分経路（領域）に独立な表示式を導出した。破壊進行領域が小規模な場合には、エネルギー解放率の定常成分（破壊進行領域の平行移動に伴うエネルギー解放率の成分）である子積分は、特異応力・ひずみ場の強さの指標を与えるとともに、特別な場合として丁積分を含むので、き裂の進展挙動を記述するための单一の破壊力学パラメータとして子積分を提案する。また、三次元き裂を有する物体の破壊問題にも子積分が適用可能であることを示す。

第Ⅲ章「動的破壊問題への応用」では、衝撃荷重による破壊や高速き裂のように慣性力の影響が無視できない場合の取扱いについて、主に小規模降伏状態を仮定し弾性き裂モデルに基づいて検討する。弾性き裂モデルにおいては、子積分は動的弾性エネルギー解放率  $G$  よりび動的応力拡大係数  $K$  と一一に対応するので、動的き裂問題の解析が動的応力拡大係数の解析に帰着されることを示し、動的応力拡大係数の有限要素解析法および三点曲げ試験片の動的応力拡大係数の簡便評価法を提案し、具体的な問題について破壊力学パラメータが実際に決定できる

ことを例示する。さらに、高速き裂問題の理論解析結果および高速進展き裂のシミュレーションについて述べ、破壊力学パラメータを用いた分歧条件式を用いて高速き裂の枝分れ現象に関する実験結果が説明できることを示す。また、塑性変形の影響については Dugdale の仮定<sup>(18)</sup>に基づいたき裂モデルにより若干の検討を行う。

第IV章「弾塑性破壊問題への応用」では、塑性変形の影響が無視できず、大規模降伏状態における破壊問題に関して破壊力学パラメータとしての子積分の有用性について検討する。また、弾塑性有限要素解析により、单调増加荷重下では丁積分と子積分はほぼ一致することを示し、丁積分が適用困難となる除荷過程を含む場合および熱ひずみが存在する場合に対して子積分が破壊力学パラメータとしての意味を失わないことを具体的に示す。また、温度場における弾塑性体のき裂先端近傍の応力・ひずみ場の特異性と子積分の関係を明確にする。つぎに、三次元の子積分によって破壊韧性値に与えた板厚の影響を検討し、実際の構造物の健全性評価に子積分が利用できることを示す。

第V章「結論」では、本研究で得られた結果を総括する。

## 第Ⅱ章 き裂の進展挙動を記述するための破壊力学パラメータ

### 2.1. 緒言

材料の破壊は一般に、き裂先端近傍の破壊進行領域と呼ばれる狭い領域において進行する微視き裂や空孔の発生・成長・合体などのような微視的挙動の結果として引き起こされる<sup>(1)</sup>。破壊進行領域内では、破壊の微視的機構の複雑さのために、通常の連続体力学の適用が困難である。しかし、破壊問題を取扱うためには何らかの形でこの領域内の特性を表現する必要がある。

破壊の微視的機構がいかに複雑であっても破壊の進行過程において破壊進行領域を含む物体全体のエネルギーの平衡は常に成立してなければならないので、このことに着目して、エネルギーの平衡条件を基にして破壊力学パラメータを求めることが考えられる。本章では、物体中をき裂が曲しながら進展するような一般的な場合を考え、このときの破壊進行領域の変形に伴うエネルギー解放率を求め、このような場合におけるき裂進展挙動を記述するための破壊力学パラメータを求める目的としている。

### 2.2. エネルギー解放率

#### 2.2.1. 破壊進行領域の変形に伴うエネルギー解放率

本節では、二次元き裂問題について考える。図II-1に示すように、き裂先端に原点を持つ固定直角座標系を $O-X_1, X_2$ とし、微小変形理論を適用する。き裂先端近傍の破壊進行領域を $A_{end}$ とし、 $A_{end}$ の境界を $\Gamma_{end}$ とする。<sup>(脚注)</sup> き裂の下面から出発し、曲線 $\Gamma_{end}$ を囲みき裂の上面で終了任意の曲線を $\Gamma$ 、き裂面に沿う曲線を $\Gamma_s$ とし、曲線 $\Gamma$ 、 $\Gamma_s$ および $\Gamma_{end}$ で囲まれた領域を $A$ とする。

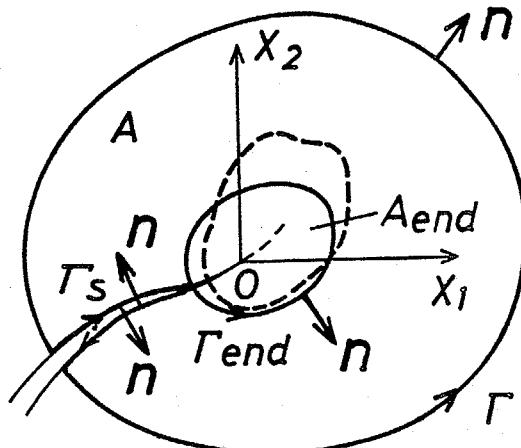
図II-1の破線のように、仮想的にき裂から曲しながら微小進展しこれに伴って $\Gamma_{end}$ が変形するとき、領域 $A+A_{end}$ 内の物質のエネルギーの平衡条件は次式のように表わされる。

$$P + Q = \frac{d}{dt}(K+U) + \text{重} \quad (\text{II-1})$$

ここで、 $P$ は外力の仕事をある

り、 $Q$ は単位時間当たりの熱量である。

$d(K+U)/dt$ は領域 $A+A_{end}$



図II-1 き裂と破壊進行領域

(脚注) 径路 $\Gamma_{end}$ 上で連続体の力学が適用できることを必要とするので、 $\Gamma_{end}$ から少し離れた内側で空孔の成長や微観き裂の発生が生じるよう<sup>3</sup>に $A_{end}$ を定める必要がある。したがって、厳密には、領域 $A_{end}$ は、実際に破壊が進行する部分を包含するき裂先端近傍の領域である。

における運動エネルギー  $K$  と内部エネルギー  $I$  の和の時間的変化であり、更に領域  $A_{end}$  におけるエネルギーの変化率、すなわちエネルギーの解放率である。通常の連続体力学で用いられる物理量によって重を直接表わすことはできないが、系全体 ( $A + A_{end}$ ) のエネルギーの平衡条件式 (II-1) によって重を領域  $A$  における応力  $\sigma_{ij}$  や変位  $u_i$  などの物理量と関連させることができます。

式 (II-1) の左辺は次式のように書くことができます。

$$\begin{aligned} P+Q &= \left\{ \int_{P+P_s} T_i u_i dP + \iint_A F_i u_i dA \right\} + \left\{ \int_{P+P_s} (-g_i n_i) dP + \iint_A p \dot{u}_i dA \right\} \\ &= \int_{P+P_s} (T_i u_i - g_i n_i) dP + \iint_A (F_i u_i + p \dot{u}_i) dA \quad (\text{II-2}) \end{aligned}$$

ここで、 $T_i$  は表面力、 $F_i$  は物体力、 $g_i$  は熱流束、 $\dot{u}_i$  は熱ゆき出し、 $p$  は密度である。 $n_i$  は単位法線であり、その方向は図 II-1 に示すとおりである。ドット (•) は物質時間導関数を表わす。領域  $A + A_{end}$  は曲線  $P+P_s$  で完全に囲まれていいるので、式 (II-2) の総積分は  $P+P_s$  の上で行なわれていい ( $P_{end}$  は含まれていない)。また、領域  $A_{end}$  内のエネルギー変化は重の中に含まれるので、式 (II-2) の面積積分は  $A$  の上で行なわれていい ( $A_{end}$  は含まれていない)。

つぎに、式 (II-1) の右辺第 1 項について考える。き裂の進展に伴って破壊進行領域  $A_{end}$  が変形するので、 $P_{end}$  および  $A$  は時間に依存する。したがって、領域  $A$  における運動エネルギーの変化は、 $A$  内の運動エネルギー密度の変化と  $A$  内に流入する運動工

エネルギーの和に等しい<sup>(2)</sup>すなはち、

$$\frac{d}{dt} K = \iint_A \rho \dot{e} dA + \int_{\Gamma_{end}} \rho e V_i (-n_i) d\Gamma \quad (\text{II-3})$$

ここで、 $\dot{e}$ は単位質量当りの運動エネルギーである。 $n_i$ は $\Gamma_{end}$ に対する単位法線であり、領域Aの内側に向って<sup>(1)</sup>。 $V_i$ は $\Gamma_{end}$ の速度であり、次節で詳しく説明する。内部エネルギーについても同様にして、次式が得られる。

$$\frac{d}{dt} U = \iint_A \rho \dot{e} dA + \int_{\Gamma_{end}} \rho e V_i (-n_i) d\Gamma \quad (\text{II-4})$$

ここで、 $\dot{e}$ は単位質量当りの内部エネルギーである。

式(II-2)～(II-4)を式(II-1)に代入し、Gauss の発散定理を適用すると、次式が得られる。

$$\dot{\Psi} = \int_{\Gamma_{end}} \{ \rho (k + e) V_i n_i + T_i \dot{u}_i - g_i n_i \} d\Gamma \quad (\text{II-5})$$

式(II-5)の誘導の際、運動方程式、変位とひずみ $\varepsilon_{ij}$ の関係式、局所形で表わした熱力学の第1法則、 $k$ の定義式、および応力と表面力の関係式を用いた。すなはち、

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad : A \text{ 内} \quad (\text{II-6a})$$

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2 \quad : A \text{ 内} \quad (\text{II-6b})$$

$$\rho \dot{e} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - g_{i,i} + \rho f \quad : A \text{ 内} \quad (\text{II-6c})$$

$$\rho \dot{k} = \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i \quad : A \text{ 内} \quad (\text{II-6d})$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad : \Gamma, \beta \text{ および } \Gamma_{end} \text{ 上} \quad (\text{II-6e})$$

ここで、コンマ $\dot{\phantom{x}}$  $(, j)$ は $\partial / \partial x_j$ を表わす。

式(II-5)は領域 $A + A_{end}$ 内のエネルギーの平衡条件式(II-1)

から導かれたものであるが、 $A_{end}$ 内の局所的なエネルギーの平衡を表していようと解釈することができる。すなはち、時間に依存する領域  $A_{end}$  内のエネルギーの変化率すなはちエネルギー解放率  $\dot{\Psi}$  は、 $A_{end}$  の境界  $P_{end}$  が変形することによって新たに  $A_{end}$  内に流入する運動エネルギーと内部エネルギー、境界  $P_{end}$  を通して  $A_{end}$  に流れ込む熱量の和に等しくなっていふ。

なお、式(II-1)、および式(II-6C)の式を用いれば次式のように変形できる。

$$P = \iint_A (\rho \dot{E} + \delta_{ij} \dot{E}_{ij}) dA + \Psi \quad (\text{II-7})$$

ここで、

$$\Psi = \Psi - \int_{P_{end}} \{ \rho (\dot{E} + e) V_i - g_i \} n_i d\Gamma \quad (\text{II-8})$$

重のかわりに上式の  $\Psi$  をエネルギー解放率と定義することとする。<sup>(脚注)</sup> 本章では、重について議論を進めるが、形式的に  $\dot{E} = e = g_i = 0$  と置けば  $\Psi$  に関する公式が得られる。

### 2.2.2. エネルギー解放率の成分表示

式(II-5)で与えられるエネルギー解放率を種々の成分に分解することを考える。まず、破壊進行領域  $A_{end}$  の境界  $P_{end}$  の速度  $V_i$

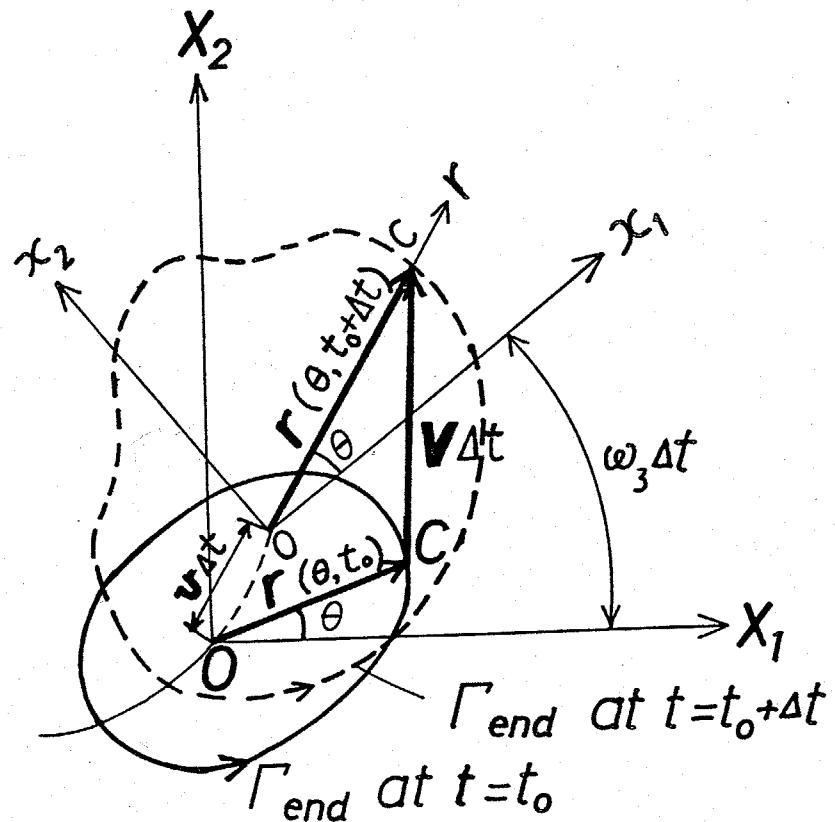
<sup>(脚注)</sup> 移動する領域  $A_{end}$  内のエネルギー変化に注目した場合のエネルギー解放率が重であるのに対し、 $\Psi$  は  $A_{end}$  を含める物質のエネルギー変化に注目した場合のエネルギー解放率である。

について考える。図II-2に示すように、わん曲しながら進展していき裂の先端に付着させた移動直角座標系  $O-x_1, x_2$  および移動極座標系  $O-r, \theta$  を導入する。これらの移動座標系はき裂先端と同じ速度  $v_3$  および  $\omega_3$  を持つており、 $\theta = 0$  の直線は  $x_1$  軸と一致するものとする。また、時刻  $t = t_0$  における移動直角座標系  $O-x_1, x_2$  は固定直角座標系  $O-X_1, X_2$  と一致するものとする。

時刻  $t = t_0$  における  $\Gamma_{end}$  上の任意の点を  $C$  とし、き裂先端  $O$  と点  $C$  を結ぶベクトルを  $\mathbf{r}(\theta, t_0)$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) で表めす。時間が微小時間  $\Delta t$  だけ経過すると、き裂は  $\omega_3 \Delta t$  だけ進展し、 $\Gamma_{end}$  図II-2の破線のよう

に変形するものとす

る。移動極座標の角度成分  $\theta$  が点  $C$  の値と等しくなるように、変形後の  $\Gamma_{end}$  (破線) 上に点  $C$  を選ぶ。点  $C$  は図II-2に示すように、ベクトル  $\mathbf{r}(\theta, t_0 + \Delta t)$  で表わされる。



図II-2 破壊進行領域の変形

$\Gamma_{end}$  の速度  $\mathbf{V}(\theta, t_0)$  を次式のように定義する。

$$\mathbf{V}(\theta, t_0) \Delta t = \mathbf{v} \Delta t + \mathbf{r}(\theta, t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(\theta, t_0) \quad (\text{II-9})$$

すなわち、 $\mathbf{V} \Delta t$  を点  $C$  と点  $C'$  を結ぶベクトルと定義する。 $\Delta t \rightarrow 0$  の極限では上式より

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \\ &= \mathbf{v} + \frac{\partial(r \mathbf{e}_r)}{\partial t} \\ &= \mathbf{v} + \frac{\partial r}{\partial t} \mathbf{e}_r + r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II-10})$$

となる。ここで、 $r$  はベクトル  $\mathbf{r}$  の長さであり、 $\mathbf{e}_r$  は  $\mathbf{r}$  と同じ方向を持つ単位ベクトルである。

式(II-10)の  $\partial r / \partial t$  について考えたため図 II-3 に移動座標系  $O-x_1, x_2$  から見た  $t=t_0$  および  $t=t_0+\Delta t$  における  $\Gamma_{end}$  の形状を示す。点  $C$  と点  $C'$  の  $x$  座標は等しいので、移動座標系から見れば、点  $O, C$  および  $C'$  は一直線上にあるように見える。

図 II-3 の点  $C^*$  および  $C^*$  は図 II-2 の点  $C$  および  $C$  に対応してくる。図 II-3 の中の細線は  $t=t_0$  における  $\Gamma_{end}$  (実線) と相似である。図 II-3 の中の細線は  $t=t_0$  における  $\Gamma_{end}$  (実線) と相似である。

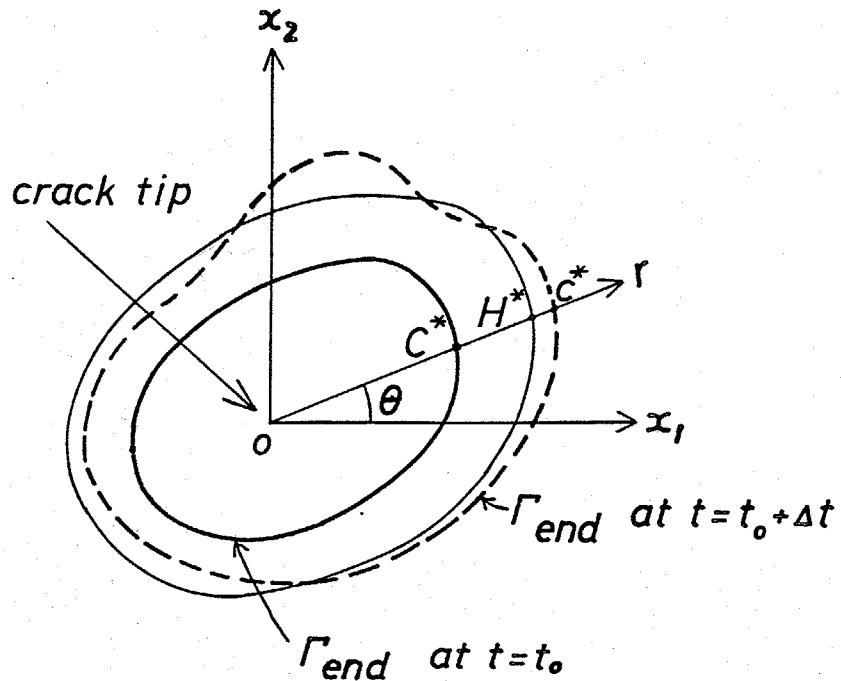


図 II-3 移動座標系から見た破壊進行領域

形をしており、(かどその内側)の面積が  $t=t_0+\Delta t$  における  $r_{\text{end}}$  (破線) 内の面積と等しいように描かれたものである。点  $H^*$  はこの破線と直線  $\overline{OC}^*$  の交点である。

図II-3より、次式が成り立つ。

$$\overline{OC}^* - \overline{OC}^* = \overline{C^*H^*} + \overline{H^*C^*} \quad (\text{II-11})$$

直線  $\overline{OC}^*$  やび  $\overline{OC}^*$  はそれぞれ  $r(\theta, t_0+\Delta t)$  やび  $r(\theta, t_0)$  に等しいので、式 (II-11) は

$$r(\theta, t_0+\Delta t) - r(\theta, t_0) = ar(\theta, t_0)\Delta t + h(\theta, t_0)\Delta t \quad (\text{II-12})$$

と書くことができる。ここで、 $ar(\theta, t_0)\Delta t$  は  $\overline{C^*H^*}$  の長さである。定数  $a$  は細線と破線の内側の面積が等しいことから次式により決定される。

$$\int_0^{2\pi} r^2(\theta, t_0+\Delta t) d\theta = (1+a\Delta t)^2 \int_0^{2\pi} r^2(\theta, t_0) d\theta \quad (\text{II-13})$$

式 (II-12) の  $h(\theta, t_0)\Delta t$  は  $\overline{H^*C^*}$  の長さである。 $\Delta t \rightarrow 0$  とすると、式 (II-12) やび式 (II-13) より

$$\frac{\partial r}{\partial t} = ar + h \quad (\text{II-14})$$

$$a = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{\partial r^2}{\partial t} d\theta}{2 \int_0^{2\pi} r^2 d\theta} \quad (\text{II-15})$$

が得られる。

移動座標系は角速度  $\omega = (0, 0, \omega_3)$  で回転していることに注意すると、

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_r \quad (\text{II-16})$$

が得られる。式(II-14)および(II-16)を式(II-10)に代入す  
ると、

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{W} \times \mathbf{r} + \alpha \mathbf{r} + \mathbf{h} \quad (\text{II-17})$$

すなはち、

$$V_i = U_i + e_{i3e} \omega_3 x_e + \alpha x_i + h_i \quad (\text{II-18})$$

となる。ここで、 $\mathbf{h} = h \mathbf{e}_r = (h_1, h_2, 0)$  であり、 $e_{i3e}$  は交代記号を表す。式(II-18)より、Pend の速度  $V_i$  はき裂進展速度  $U_i$  と同じ速度で平行移動する成分、角速度  $\omega_3$  で回転する成分、自己相似的に膨張する成分および形状のゆがみによる成分に分解できることわかる。

つぎに、速度  $V_i$  で動いてる曲線 Pend 上の変位の変化率  $\frac{\partial u_i}{\partial t}|_{\text{Pend}}$  とある瞬間  $t = t_0$  に Pend 上にあった物質点の変位速度すなはち粒子速度  $u_i$  の関係について考える。 $\frac{\partial u_i}{\partial t}|_{\text{Pend}}$  は次式で表わされ

る。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}|_{\text{Pend}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_i(x_1 + V_1 \Delta t, x_2 + V_2 \Delta t, t_0 + \Delta t) - u_i(x_1, x_2, t_0)}{\Delta t} \quad (\text{II-19})$$

式(II-19)を Taylor 展開することにより

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}|_{\text{Pend}} = \frac{\partial u_i(x_1, x_2, t)}{\partial t} + \frac{\partial u_i(x_1, x_2, t)}{\partial x_j} V_j \quad (\text{II-20})$$

が得られる。上式の右辺第1項目は  $u_i$  にはからないので、

$$u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}|_{\text{Pend}} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} V_j \quad (\text{II-21})$$

となる。

式(II-5)に式(II-18)および(II-21)を代入し、考へてみる

瞬間  $t = t_0$  は  $x_i = X_i$  であることを考慮すると、次式が得られる。

$$\Psi = \nu_\alpha \hat{J}_\alpha + \omega_3 \hat{L}_3 + \alpha \hat{M} + \hat{\Gamma} \quad (\alpha=1,2) \quad (\text{II-22})$$

$\therefore \hat{J}_\alpha$ ,

$$\hat{J}_\alpha = \int_{P_{end}} \left\{ p(k+e) n_\alpha - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \right\} dP \quad (\text{II-23})$$

$$\hat{L}_3 = \int_{P_{end}} e_{i3e} x_e \left\{ p(k+e) n_i - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\} dP \quad (\text{II-24})$$

$$\hat{M} = \int_{P_{end}} X_i \left\{ p(k+e) n_i - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\} dP \quad (\text{II-25})$$

$$\hat{\Gamma} = \int_{P_{end}} \left\{ p(k+e) h_i n_i + T_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{P_{end}} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} h_j \right) - g_i n_i \right\} dP \quad (\text{II-26})$$

式 (II-22) により、エネルギー解放率  $\Psi$  は、破壊進行領域の平行移動に関する成分  $\hat{J}_\alpha$ 、回転に関する成分  $\hat{L}_3$ 、自己相似的膨胀に関する成分  $\hat{M}$ 、および破壊進行領域の形状のゆがみ等に関する成分  $\hat{\Gamma}$  に分解できることわかる。

### 2.3. $\hat{J}_\alpha$ , $\hat{L}_3$ , および $\hat{M}$ の積分経路に依存しない表示式

本節では、 $\hat{J}_\alpha$ ,  $\hat{L}_3$  および  $\hat{M}$  の積分経路に依存しない表示式を導く。Gauss の発散定理により、次式が成り立つ。

$$\int_{P_{end} - P_{end}} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} dP = \iint_A \left\{ (p \ddot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_\alpha} \right\} dA \quad (\text{II-27})$$

$$\int_{P_{end} - P_{end}} e_{i3e} x_e T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dP = \iint_A e_{i3e} \left\{ \sigma_{je} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + x_e (p \ddot{u}_j - F_j) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + x_e \sigma_{jk} \frac{\partial \epsilon_{kj}}{\partial x_i} \right\} dA \quad (\text{II-28})$$

$$\int_{P_{end} - P_{end}} X_i T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dP = \iint_A \left\{ X_j (p \ddot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + X_e \sigma_{ej} \frac{\partial \epsilon_{ej}}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \right\} dA \quad (\text{II-29})$$

ここで、 $P_{end}$  の前の負号は  $P_{end}$  上の積分を時計まわりに行なう。

ことを意味する。

式(II-27)～(II-29)を式(II-23)～(II-25)に代入すると、次式が得られる。

$$\int_{\Gamma_1 \Gamma_3} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} d\Gamma + \int_{\Gamma_{end}} p(k+e) n_i d\Gamma + \iint_A \{ (\rho \ddot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_\alpha} \} dA \quad (II-30)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1 \Gamma_3} e_{i3e} X_e T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d\Gamma + \int_{\Gamma_{end}} e_{i3e} X_e p(k+e) n_i d\Gamma \\ + \iint_A e_{i3e} \{ \sigma_{je} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + X_e (\rho \ddot{u}_j - F_j) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + X_e \sigma_{jk} \frac{\partial \epsilon_{ijk}}{\partial x_i} \} dA \quad (II-31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1 \Gamma_3} X_i T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d\Gamma + \int_{\Gamma_{end}} X_i p(k+e) n_i d\Gamma \\ + \iint_A X_j \{ X_j (\rho \ddot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + X_e \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_e} + \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \} dA \quad (II-32) \end{aligned}$$

式(II-30)～(II-32)は、任意の構成式を持つ材料(弾性体、非弾性体、均質体、不均質体、等方性体、異方性体)に対して成立する。また、式(II-30)～(II-32)の値は  $\Gamma_{end}$  に依存するか、 $\Gamma_{end}$  が指定されれば曲線  $\Gamma_1 \Gamma_3$  の選び方には依存しない(本論文ではこの意味で経路独立という言葉を用いることとする)。これらのこととは、式(II-27)～(II-29)が  $\Gamma_{end}$  を固む任意の経路  $\Gamma_1 \Gamma_3$  に対して、また任意の構成式を持つ材料に対して成立することから証明できる。ただし、曲線  $\Gamma_1 \Gamma_3$  と  $\Gamma_{end}$  が固む領域内には式(II-27)～(II-29)の左辺の被積分関数は特異点を持たないとする。

つぎに、ひずみ  $\epsilon_{ij}$  が次式のように弾性ひずみ  $\epsilon_{ij}^e$  と固有ひずみ(eigen strain)  $\epsilon_{ij}^*$  (次頁脚注参照) の和として表わされる場合について考える。

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^*$$
 (II-33)

ここで、弾性ひずみ成分  $\varepsilon_{ij}^e$  に対しては

$$\partial W^e(\varepsilon_{ij}^e) / \partial \varepsilon_{ij}^e = \sigma_{ij}$$

を満足する履歴によらない弾性ひずみエネルギー密度  $W^e$  を定義すればとかけてくる。式(II-33)および(II-34)を式(II-30)に代入すると

$$\begin{aligned} \hat{J}_3 &= \int_{AB} \left\{ W e n_i - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right\} dP + \int_{\text{load}} \{ p(k+e) - W^e \} n_i dP \\ &\quad + \iint_A \{ p(u_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^*}{\partial x_i} \} dA \end{aligned} \quad (\text{II-35})$$

が得られる。材料が均質・等方ならば、 $e_{i3e} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = 0$  となるので、式(II-33), (II-34)および(II-31)より  $\hat{L}_3$  は

$$\begin{aligned} \hat{L}_3 &= \int_{AB} \left\{ e_{i3e} \left\{ X_e \left( W e n_i - T_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + T_i u_e \right\} dP + \int_{\text{load}} e_{i3e} \{ p(k+e) - W^e \} X_e n_i - T_i u_e \} dP \right\} \\ &\quad + \iint_A e_{i3e} \left\{ 2 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* + u_e (p(u_i - F_i) + X_e (p(u_j - F_j) u_j, e + X_e \delta_{mn} \frac{\partial \varepsilon_{mn}^*}{\partial x_i})) \right\} dA \end{aligned} \quad (\text{II-36})$$

となる。材料が均質でしかも応力-弾性ひずみ関係が線形ならば、式(II-33), (II-34)および(II-32)より  $\hat{M}$  は次式のように書ける。

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \int_{AB} \left\{ (W e n_i - T_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i}) X_i dP + \int_{\text{load}} \{ p(k+e) - W^e \} X_i n_i dP \right\} \\ &\quad + \iint_A \{ p(u_i - F_i) u_{ij} X_j + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* X_e + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* \} dA \end{aligned} \quad (\text{II-37})$$

なお、式(II-35)～(II-37)を導くときに課した均質・等方などの条件は若干緩めることが可能である。<sup>(4)</sup>

(脚注) 固有ひずみは、周囲の拘束がないときに均一に変形して応力が生じないような変形を記述するひずみである。熱脚張ひずみや塑性ひずみが固有ひずみの例である。<sup>(3)</sup>

式(II-35)～(II-37)において、A 内の  $p_{ii}$ ,  $F_i$ ,  $E_{ij}^*$ , および  $P_{end}$  上の  $\gamma_{ij}$ ,  $\delta_{ij}$ ,  $T_{iilc}$  が無視できれば、第1項のみが残り、 $J_2$ ,  $L_3$  および  $M$  は、それぞれ  $J_2$ ,  $L_3$  および  $M$  積分と一致する。 $J_2$ ,  $L_3$  および  $M$  積分は Knowles と Sternberg<sup>(5)</sup> によって見出され、Budiansky と Rice<sup>(6)</sup> によって弾性体中の空孔やき裂の平衡移動、回転および自己相似的な膨張によるエネルギー解放率と関連づけられている。

## 2.4. 破壊進行領域が小規模な場合

### 2.4.1. エネルギ解放率

破壊進行領域を考慮に入れたエネルギー解放率の一般的な表現が式(II-22)～(II-26)の形で得られたが、これを実際問題に適用するためには、さらに  $P_{end}$  上における応力などの物理量を定めなければならぬ。そのためには、実験結果の詳細な検討に基づいた適当な仮定、あるいは破壊進行領域内における破壊挙動のモデル化が必要と考えられる。破壊進行領域内のモデル化については様々な試みが発表されていますが、<sup>(7)～(10)</sup> 実際の破壊問題に通用できるようになるまでは、さらに多くの研究が必要なようと思われる。

き裂が成長するに伴って空孔や微視き裂が発生した領域は因

II-4 のように破壊進行領域の跡 (wake) として表面層を形成すると考えられる。破壊は、き裂先端近傍の領域内で進行するので、こ

のような表面層のエネルギー変化は小さく、き裂進展に伴うエネルギー収支を考える場合には、その影響を無視しても十分良い(近似になつていいとのと思われます)<sup>(1)</sup>したがって、 $A_{end}$  として wake の部分まで必ずしも含めた領域を考える必要はなく

、微小き裂進展の際に空孔の成長や微視き裂の発生する領域を含む図 II-4 のような領域を採ることができると考えられる。

さらに、破壊進行領域が小さくなる場合には、その大きさを無視して図 II-5 に示すような無限小厚さの凝集力領域(cohesive zone)<sup>(2)</sup>としてモデル化できる。したがって、破壊進行領域が小さい場合には、線形破壊力学における小規模降伏の取扱いと同様に、いわば小規模破壊進行領域的な取扱いが可能となる。すなまち、破壊進行領域の大きさを無視して物体全体を連続体と仮定して応力、変位およびエネルギー解放率などを解析し、これらの力学量が破壊進行領域内の挙動を支配すると考えるのである。以下では、この考え方について、物体全体を連続体と考

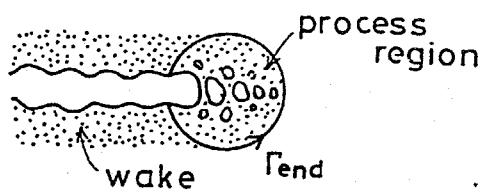


図 II-4 破壊進行領域の跡

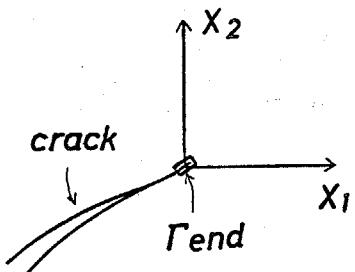


図 II-5 小規模破壊  
進行領域

えることになる。

この場合には、径路 $P_{end}$ 上では、 $X_2 \neq 0$ であるから、式(II-23)～(II-25)からわかるように  $\dot{\gamma}_\alpha \gg \dot{L}_3, M$  となる。したがって、エネルギー解放率は

$$\Phi \approx v_\alpha \dot{\gamma}_\alpha + \text{全} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (\text{II-38})$$

で与えられる。図II-5に示されていきる径路 $P_{end}$ 上では  $v_\alpha n_d = 0$  となるので、式(II-30)または式(II-35)における $P_{end}$ 上の積分が省略できるので、 $\dot{\gamma}_\alpha$  は次式のように表わされる。

$$\dot{\gamma}_\alpha = - \int_{P_{end}} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} d\Gamma + \iint_A \{ (p\dot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + p \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x_\alpha} \} dA \quad (\text{II-39})$$

または、

$$\dot{\gamma}_\alpha = \int_{P_{end}} (w n_\alpha - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}) d\Gamma + \iint_A \{ (p\dot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + C_j \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x_\alpha} \} dA \quad (\text{II-40})$$

上式からわかるように子積分は、考えていく時点の応力といずみなどの力学量から計算することができる。これに対して、全積分は一般にき裂を進めた後に式(II-26)から求められる量なので計算が比較的面倒である。

#### 2.4.2. 子積分と他の破壊力学パラメータとの関係

本節では、子積分と他の破壊力学パラメータとの関係について検討する。 $X_1$ 軸を考えていく瞬間のき裂進展方向に早くなくなるように座標系を選べば、き裂進展速度はひずみ成分のみとなるので子 $\gamma$ としては子 $\epsilon$ のみを考えれば十分である。以下では、

このような座標系を用いた場合の  $\dot{\gamma}_1$  を単に  $\dot{\gamma}$  表記する。

### (1) $J$ 積分との関係

まず、 $\dot{\gamma}$  積分と  $J$  積分の関係について検討する。 $J$  積分は物体の全領域を連続体とするき裂モデルに対して定義された破壊力学パラメータであると考えることができる。

#### Rice の $J$ 積分

Rice の  $J$  積分は次式で定義されている。<sup>(13)</sup>

$$J = \int_P [Wn_i - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}] dP \quad (\text{II-41})$$

ただし、

$$W = \int_0^{E_f} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (\text{II-42})$$

である。慣性力、物体力、き裂面の表面力および固有ひずみが存在しない場合には、 $\dot{\gamma}$  積分は式(II-40)より

$$\dot{\gamma} = \int_P [Wn_i - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}] dP \quad (\text{II-43})$$

で表わされる。固有ひずみが存在しない場合は  $W^e$  は  $W$  に一致するので、上式は Rice の  $J$  積分の定義式に一致する。

#### 物体力を考慮した $J$ 積分

遠心力や電磁力を受ける場合のように物体力の影響が無視できない場合には、式(II-40)より  $\dot{\gamma}$  は

$$\dot{\gamma} = \int_P [Wn_i - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}] dP - \int_S A F_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dA \quad (\text{II-44})$$

となり、物体力を考慮した  $J$  積分の表示式<sup>(14)</sup> と一致している

## 温度場におけるJ積分

温度場が存在する場合は、熱膨張率を  $\alpha_{ij}$  とし、基準温度からの温度変化を  $\theta$  とすると

$$\varepsilon_{ij}^* = \alpha_{ij} \theta \quad (II-45)$$

であるので、式(II-40)より  $\hat{J}$  は

$$\hat{J} = \int_p [W e n_i - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}] dP + \iint_A \sigma_{ij} \alpha_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dA \quad (II-46)$$

となる。本式は、Ainsworthらの提案していはる温度場におけるJ積分の表示式  $J_0^{(15)}$  と一致していはる。またに、等方体の場合には  $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$  であるので

$$\hat{J} = \int_p [W e n_i - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}] dP + \iint_A \alpha \delta_{ii} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dA \quad (II-47)$$

となる。ただし、 $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタである。なお、一様温度場の場合には、上式は、

$$\hat{J} = \int_p [W e n_i - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}] dP \quad (II-48)$$

となる。(かく、基準温度からの温度変化がある場合には

$$W e = \int_0^{E_j^e} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e \neq \int_0^{E_j} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = W \quad (II-49)$$

であるので、 $\hat{J}$  積分は一様温度場であつてと式(II-41)で与えられる Rice の J 積分とは一致しなひ。

## 慣性力の影響を考慮したJ積分

慣性力の影響を無視できない場合には、 $\hat{J}$  積分は

$$\hat{J} = \int_p [W e n_i - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}] dP + \iint_A p \ddot{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dA \quad (II-50)$$

となる。上式において、経路  $P$  の囲む領域  $A$  を、き裂進展と

もに移動する領域と考えると

$$\begin{aligned} \dot{J} = & \int_P [W e n_1 - T_i u_{i,1} - \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i n_1] dP \\ & + \frac{d}{dt} \int_A \rho \dot{u}_i u_{i,1} dA - \int_P \rho \dot{u}_i u_{i,1} v_i dP \quad (\text{II-51}) \end{aligned}$$

となる。 $v_i$ が求めて、<sup>(16)</sup>慣性力の影響を考慮した積分の表示式に一致する。また、

$$\begin{aligned} \dot{J} = & \int_P [W e n_1 + \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i n_1 - T_i u_{i,1}] dP \\ & + \int_A [\rho \ddot{u}_i u_{i,1} - \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,1}] dA \quad (\text{II-52}) \end{aligned}$$

であり、き裂先端近傍では、 $\dot{u}_i = -\dot{v}_i u_{i,1}$  が成立するので

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \lim_{P \rightarrow 0} v_i \dot{J} \\ &= \lim_{P \rightarrow 0} \int_P [\delta_{ij} n_j \dot{u}_i + (W^e + \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i) v_i n_1] dP \quad (\text{II-53}) \end{aligned}$$

となり、エネルギー解放率に関する Freund の表示式<sup>(2)</sup>が得られる。

## (2) ESTIS によるエネルギー解放率 $\dot{G}$ との関係

ESTIS は、大規模降伏状態の破壊挙動を記述するための破壊力学パラメータとして

$$\dot{G} = \frac{\partial}{\partial \ell} [W' - (U' + U'')] \quad (\text{II-54})$$

を提案している。<sup>(17), (18)</sup> ここで、 $W'$  は自然状態から現在の状態に至るまでに外力のなした仕事であり、 $U'$  は弾性ひずみエネルギー、 $U''$  は塑性変形に費いやされたエネルギーである。また、 $\ell$  はき裂長さである。したがって、 $\dot{G}$  は弾塑性体中を単位長さき裂が進展する場合のエネルギー解放率であると解釈することができる。

$$\Psi = V_1 \tilde{G} \quad (\text{II-55})$$

が成立する。

ところで、式(II-40)において慣性力の影響を無視し、 $E_i^*$ を塑性ひずみ $\varepsilon_i^f$ とすると

$$\dot{\Gamma} = \int_{\partial B} [W e_n - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}] dP + \iint_A [\sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_j^P}{\partial x_i} - F_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}] dA \quad (\text{II-56})$$

となる。今この導出過程から明らかのように上式は、き裂の定常進展に対する $\tilde{G}$ の成分の表示式を与える。

(3) Blackburn によるペラメータ $J^*$ との関係

Blackburnは、き裂先端近傍の応力・変位場を特徴づけるためのペラメータとして

$$J^* = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{C_r} [\frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{ij,2} dx_2 - T_i u_{i,1} dP] \quad (\text{II-57})$$

を用いることを提案している。<sup>(19)</sup>なお、 $C_r$ は、き裂先端を中心とする半径 $r_0$ の経路である。さらに、上式の経路の構成によらない表示式と導かれている。二次元問題については、その表示式は

$$J^* = \oint [\frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{ij,2} dx_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1} dP] + \lim_{r_0 \rightarrow 0} \iint_A [\frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,1j} - \frac{1}{2} \sigma_{ij,1} u_{i,j}] dA \quad (\text{II-58})$$

で与えられる。ただし、 $\oint$ は、き裂先端を囲む任意の経路に沿う線積分を表す。ここで、

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{r_0} [\sigma_{ij} u_{ij,2} - \sigma_{ij,1} u_{i,j}] r dr d\theta = 0 \quad (\text{II-59})$$

と仮定すれば、式(II-58)は、

$$J^* = - \int_{P+P_0} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dP + \iint_A \sigma_{ij} \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} dA \quad (\text{II-60})$$

とな')，慣性力および物体力が存在しない場合の $\dot{\gamma}$ の表示式(II-39)に一致させることができる。(しかし、式(II-59)は一般に成立していとは限らず、<sup>(脚注)</sup>そのような場合に対しては、 $J^*$ と $\dot{\gamma}$ は等価とはならない。)

#### (4) Striforsによるき裂進展力 $f$ との関係

Striforsは、物体全域に連続体力学を適用できることとして、有限変形問題に対するエネルギー解放率の表示式を導いた<sup>(20)</sup>。  
基準座標系に固定された単位ベクトル $\mathbf{e}_R$ 方向にき裂が単位長さ進展する場合のエネルギー解放率は、き裂先端を含む任意の領域 $P$ に関して

$$f_{e_R}(P) = \mathbf{e}_R \cdot \int_{U_R(P)} ([T_R] \nabla \times \mathbf{F} - H^T (\mathbf{b} - \mathbf{a}) P_R) dU_R - \mathbf{e}_R \cdot \int_{\partial U_R(P)} H^T \mathbf{t}_R dS_R \quad (\text{II-61})$$

である。ここで、 $T_R$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $H$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $P_R$ および $\mathbf{t}_R$ は、それぞれ、Piola-Kirchhoff の応力、変形勾配、変位勾配、物体力、加速度、密度および表面力である。また $\nabla \times = \partial / \partial \mathbf{x}$ であり、 $T$ は転置を表す。二次元微小変形問題において、き裂がX軸方向に進展する場合に関しては、上式は次式となる。

$$f_{e_R}(A) = \iint_A [\sigma_{ij} \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} - (F_i - \rho \ddot{u}_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}] dA - \int_{P+P_0} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dP \quad (\text{II-62})$$

(脚注) 線形弾性体の場合には、 $\sigma_{ij}, u_{ij}, f = \sigma_{ij}, e_{ij} = \sigma_{ij} e_{ij}$   
 $= \sigma_{ij} u_{ij}$ であるので式(II-59)が成立する。

式(II-62)は式(II-39)に等しい。したがって、微小変形問題における領域 $A_{end}$ を考えない場合は $f_{LR}$ と $\dot{\gamma}$ とは等価であることがわかる。

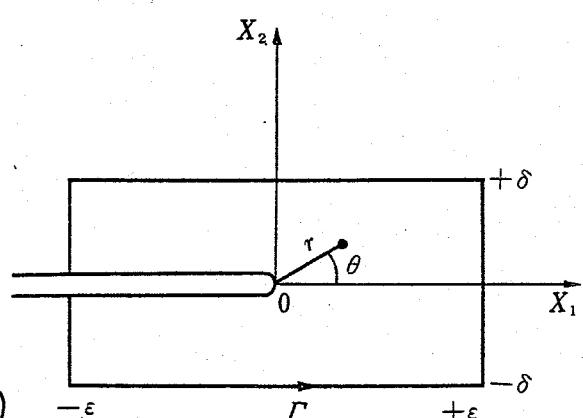
### 2.4.3. 余積分と特異応力場の強さとの関係

前節において、余積分が特別な場合を場合として、RiceのJ積分、Eftisらの提案する $\tilde{G}$ 、Blackburnの $J^*$ やStriforsの $\dot{\gamma}$ を含むことを示した。本節においては、小規模破壊進行領域の考え方に基づき、き裂先端近傍における特異応力場を考え、この強さと余積分の関係について調べる。

余積分の経路独立性により図II-6に示すような長方形状の経路を考え $\delta \rightarrow 0$ として $\varepsilon \rightarrow 0$ として、 $\dot{\gamma}$ の値は任意の形状の経路による値と同一である。ここでは、 $X_1$ 軸方向にき裂が進展する閉口形変形の場合について考える。 $\delta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ の極限では、式(II-39)あるいは式(II-40)の面積積分はゼロとなるので、

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} T_2 \frac{\partial u_2}{\partial X_1} d\Gamma \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} G_{22} \left\{ \frac{\partial u_2(X_1, -\varepsilon)}{\partial X_1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial u_2(X_1, +\varepsilon)}{\partial X_1} \right\} dX_1, \quad (\text{II-63})\end{aligned}$$

となる。なお、 $\Gamma_S$ は $\varepsilon \rightarrow 0$ の極



図II-6 き裂先端を固む長方形  
状の積分経路

限における  $x_1 \leq -\varepsilon$  のき裂面上の経路として定義されていふの  
で、式(II-63)には  $P_S$  上の線積分の寄与が入ってゐる。

任意の構成関係を持つ材料に対しては特異応力場の性質は明  
らかにされてゐるが、もし、き裂先端近傍で

$$\tilde{\sigma}_{22} = \begin{cases} \alpha x_1^\lambda & : x_1 > 0 \\ 0 & : x_1 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{II-64a})$$

$$\left\{ \frac{\partial u_2(x_1, -0)}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2(x_1, +0)}{\partial x_1} \right\} = \begin{cases} 0 & : x_1 \geq 0 \\ \beta |x_1|^{-\lambda} & : x_1 < 0 \end{cases} \quad (\text{II-64b})$$

ただし、 $-1 < \lambda < 0$ ;  $\alpha, \beta$ : 定数

が成立すると仮定する（弾性体中のき裂モデルやHRRモデル  
(21, 22)ではこの仮定が成立していふ）と、Fisherの公式<sup>(23)</sup>

$$y_+^\lambda y_-^{1-\lambda} = -\frac{\pi}{2} \delta(y) \cosec(\pi\lambda) \quad (\text{II-65})$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } y_+^\lambda &= \begin{cases} y^\lambda & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} \\ y_-^\lambda &= \begin{cases} 0 & y > 0 \\ |y|^\lambda & y \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

$\delta$  は Dirac のデルタ関数

より、式(II-63)は

$$\gamma = -\frac{\pi}{2} \alpha \beta \cosec(\pi\lambda) \quad (\text{II-66})$$

に変形される。 $\alpha$  と  $\beta$  の間に何らかの関数関係があれば、式(II-66)を  $\alpha$  または  $\beta$  について解くことができる、 $\alpha$  および  $\beta$  を  $\gamma$  の関数として表わすことができる。

線形弾性体の場合には、式(II-64)において  $\lambda = -\frac{1}{2}$  となり

,  $\alpha$  と  $\beta$  は応力拡大係数  $K_I$  によって表わされるので式(II-67)次の関係式を与える。

$$\hat{\sigma} = \frac{K+1}{8\mu} K_I^2 = G \quad K = \begin{cases} 3-4U & \text{平面ひずみ状態} \\ (3-U)/(HU) & \text{平面応力状態} \end{cases} \quad (\text{II-67})$$

ここで,  $U$  はポアソン比であり,  $\mu$  は横弹性係数である。また,  $G$  は弾性エネルギー解放率<sup>(24)</sup>である。<sup>(脚注1)</sup>

塑性域の応力-ひずみ関係が

$$\frac{\sigma}{\sigma_Y} = \left( \frac{E\varepsilon}{\sigma_Y} \right)^N \quad (\text{II-68})$$

で与えられる全ひずみ理論に従う材料については、静止き裂先端近傍の応力・ひずみは, HRR の特異性を持つ<sup>(21, 22)</sup>。ここで,  $\sigma_Y$  は降伏応力,  $E$  は継弾性係数,  $N$  は加工硬化指数である。荷重がなければ、全ひずみ理論に従う弾塑性体は非線形弾性体と見なすことができる。式(II-43) より  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}$  となるので、式(I-9) より、き裂先端近傍の応力・ひずみは次式のように表わすこととする。<sup>(脚注2)</sup>

$$\sigma_{ij} = \sigma_Y \left[ \frac{E\hat{\sigma}}{\sigma_Y^2 r} \right]^{N/N+1} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta; N) \quad (\text{II-69a})$$

$$E_{ij} = \frac{\sigma_Y}{E} \left[ \frac{E\hat{\sigma}}{\sigma_Y^2 r} \right]^{1/(N+1)} \tilde{E}_{ij}(\theta; N) \quad (\text{II-69b})$$

---

(脚注1) 衝撃荷重下のき裂や高速で進展するき裂の場合については、3.2.1節および3.3.1節を参照。

(脚注2) 熱ひずみに特異性がない場合<sup>(23)</sup>、すなはち温度場における静止き裂先端近傍の応力・ひずみ場は HRR の特異性をもち式(II-69)が成立することが証明できる(4.2.3(1)節参照)。

ここで、 $\psi_j$ ,  $\tilde{\psi}_j$  は  $\theta$  と  $N$  の既知関数である。比例負荷の下では全ひずみ理論とひずみ増分理論とは等価となるので、ひずみ増分理論に従う材料に対して単調増加荷重下では式(II-69)が良い近似になつてゐると考えられる。大規模な荷重を含む場合のき裂先端近傍の応力、ひずみの特異性および特異性と予積分の関係についてはまだ明らかでなく、これを解明することは今後の課題である。

#### 2.4.4. 破壊の条件式

破壊進行領域内の破壊過程が物質によって固有のものであり、き裂長さや負荷条件に無関係であり自律的(*autonomous*)<sup>(1), (2)</sup>であると過程方程と破壊の条件式は

$$\dot{\Psi} = \dot{\Psi}_c \quad (II-70)$$

と書くことができる。ここで、 $\dot{\Psi}_c$  はき裂が進展する際の破壊進行領域における単位時間当りのエネルギー変化率を表し、物質に固有な値を持つと考えられる量である。破壊進行領域が小規模な場合には  $\dot{\Psi}$  は式(II-38)で与えられるので、上式は

$$\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 = \dot{\Psi}_c \quad (II-71)$$

となる。ただし、X軸がき裂進展方向と等しくなるように座標軸を選んでいる。

前節までの結果から予積分はエネルギー解放率の定常成分(き

裂面形状の平行移動に伴う成分) と(7)の物理的な意味を持ち、積分経路に依存しない形で表現されるという性質を持つている。また、子積分は考へている時点の応力・ひずみ場から計算することができる、き裂先端近傍における特異性の強さと関係づけられるので、上式を書き換えて

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &\approx (\dot{\gamma}_c - \dot{\gamma}) / U_1 \\ &= \dot{\gamma}_c\end{aligned}\quad (II-72)$$

を破壊の条件式として採用することが考えられる。この条件式では、微視的な破壊運動に関するエネルギー解放率とき裂の非定常進展等に関するエネルギー解放率の成分(脚注1)をひとまとめにして  $\dot{\gamma}_c$  の内へ織り込み、子積分を单一の破壊力学パラメータとして取扱うことになる。破壊進行領域が小規模となるよう負荷条件下(脚注2)でき裂進展試験を行い式(II-39)または式(II-40)によって、そのときの子を計算すれば  $\dot{\gamma}_c$  の値を決定することができる。物体力、慣性力および固有ひずみが無い

---

(脚注1) 全積分は破壊進行領域を囲む経路に関する線積分として与えられるので、破壊過程が自律的であれば、この値と物質に固有の値となると考えられる。

(脚注2) 具体的な条件については不明であるが、少なくとも JIC 試験<sup>(26)</sup>が行える範囲内であれば、小規模破壊進行領域の仮定による取扱いが可能と考えられる。

場合には式(II-40)で与えられる $\bar{J}$ は $J$ と一致するので、コンペクト試験片または三点曲げ試験片などを用いて単調増加荷重下で通常のJIC試験<sup>(26)</sup>を行えば、き裂が成長を開始するときの $\bar{\Gamma}_c$ の値は $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_c$ として求められる。一般の構造物に式(II-72)を適用する場合に問題となる物体力、慣性力および固有ひずみの影響は左边の $\bar{\Gamma}$ の中に含まれていい。

つぎに、式(II-72)の破壊条件式と小規模降伏状態のときに通常用いられる破壊条件式<sup>(27)</sup>

$$G = G_c \quad \text{または} \quad K_I = K_c \quad (\text{II-73})$$

との関係について検討する。ここで、 $G_c$ または $K_c$ はいざれと破壊拘束値と呼ばれていい。小規模降伏状態の場合には、通常は弾性き裂モデルを考えるが、実際には降伏域が存在するので、ここでは、その影響を無視しないで弾塑性体中のき裂モデルを考える。

単調増加荷重下では、全ひずみ理論に従う弾塑性体の $\bar{\Gamma}$ 積分は式(II-41)で与えられる $J$ 積分に一致し、線積分のみによつて表わされる。いま、塑性変形域を囲むき裂先端近傍の弾性域内に積分経路を探ると式(II-43)で表わされる。き裂先端近傍では応力拡大係数 $K_I$ によつて表わされる特異応力場が支配的となるといふと考えられるので、式(II-67)より

$$\bar{\Gamma} = G = \frac{K_I^2}{8\mu} K_I^2 \quad (\text{II-74})$$

が成立する。ひずみ増分理論に従がう弾塑性体に対しては上式が近似的に成立していふと考えられる。(たゞ、破壊開始のように除荷の影響が問題となる場合についでは、式(II-72)と式(II-73)とは等価な条件式となり  $\dot{\epsilon}_C$  と  $G_C$  は等しくなる。

これに対し、き裂の進展挙動を問題にする場合には破壊に伴つて必然的に除荷が生じるので  $\dot{\epsilon}$  と  $G$  とは必ずしも等しくはない。いま、簡単のために物体力、慣性力および熱ひずみの影響がない場合について考えると、式(II-40)より  $\dot{\epsilon}$  は

$$\dot{\epsilon} = \int_{P+T_3} (We - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) dP + \iint_A \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^P}{\partial x_1} dA \quad (\text{II-75})$$

である。積分経路  $P+T_3$  とて弾性域内を通る経路を考える。このとき

$$\int_{P+T_3} (We - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) dP \approx \frac{K_I}{8\mu} K_I^2 = G \quad (\text{II-76})$$

となるので、式(II-75)は

$$\dot{\epsilon} \approx G + \iint_A \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^P}{\partial x_1} dA \quad (\text{II-77})$$

となる。ここで、弾性域では  $\epsilon_{ij}^P = 0$  であるので、上式の第2項は塑性域  $A^*$  に関する面積積分になつてゐる。塑性変形の影響を考慮すると  $\dot{\epsilon}$  と  $G$  には上式のような違ひがあることわかる。小規模降伏状態では弾性特異応力場によつて塑性変形挙動が支配されといふと考えられるので、上式の面積積分の値は、き裂進展に際して  $G$  から決まるある値をとると考えられる。(た

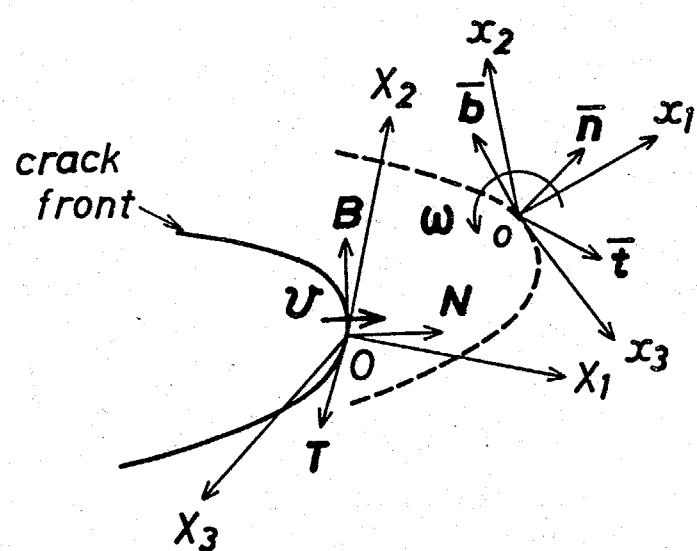
から、式(II-72), (II-73)および(II-77)より、 $G_C$ と $\dot{G}_C$ との間には

$$G_C \approx \dot{G}_C - \int \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j} P dA \quad (\text{II-78})$$

の関係があることがわかる。なお、小規模降伏状態の場合には、通常は弾性き裂モデルを取扱うので、 $\dot{G}_C$ としては塑性ひずみ $\dot{\epsilon}_{ij}^P$ を無視した式を用いるが、このときにき裂進展試験によってき裂進展抵抗値として求められる値は、小規模破壊進行領域的な取扱いによって得られる上式の右辺の $\dot{G}_C$ ではなく、 $G_C$ の値であることに注意する必要がある。

## 2.5. 三次元問題への拡張

前節までに得られた結果の三次元問題への拡張を考える。図 II-7 に示すような三次元き裂を考える。実線は時刻  $t = t_0$ におけるき裂前縁を表し、破線は微小時間後の時刻  $t = t_0 + \Delta t$ におけるき裂前縁を表すものとする。き裂前縁上の任意の一点 O を原点、図 II-7 三次元き裂問題における座標系



とする固定直角座標系を  $O-X_1, X_2, X_3$  とし、 $O$  点における実線の主法線、陪法線および接線方向の単位ベクトルをそれぞれ  $N$ ,  $B$  および  $T$  とする。

$N$  と  $B$  を含む平面と破線の交点を  $O$  とし、 $O$  点における破線の主法線、陪法線および接線方向の単位ベクトルをそれぞれ  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$  および  $\bar{t}$  とする。 $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$  および  $\bar{t}$  は  $N$ ,  $B$  および  $T$  を平行移動し、回転させることにより得られる。この平行移動および回転の量をそれぞれ  $v$  および  $w_{st}$  とする。 $O-X_1, X_2, X_3$  を  $v$  だけ平行移動させ、 $w_{st}$  だけ回転させ得られる移動直角座標系を  $O-x_1, x_2, x_3$  とする。

時刻  $t=t_0$  における破壊進行領域は図 II-8 に示すような形状をしていふと考えられる。破壊進行領域を  $N$  と  $B$  で決定される平面に平行な 2 枚の面で切ったときに得られる薄い円板（断面は必ずしも円形とは限らないが、ここでは円板と呼ぶこととする）を考える。円板の占めていふ領域、厚さおよび外周をそれぞれ  $\Delta V_{end}$ ,  $\Delta l$  および  $\Gamma_{end}$  とする。

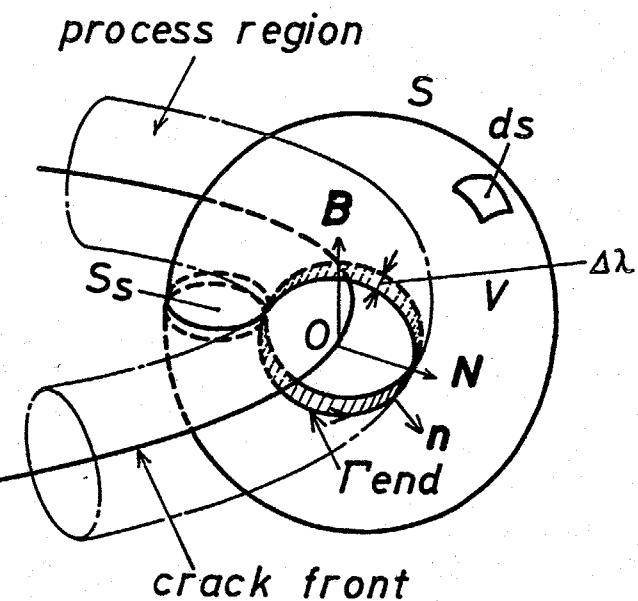


図 II-8 三次元き裂問題における  
破壊進行領域と積分領域 ( $\Delta l \rightarrow 0$ )

この円板の外周部に接するよなドーナツ状の領域をVとし、Vの外表面をS、き裂面がVと交わる部分をS<sub>s</sub>とする。領域V+ΔV<sub>end</sub>内の物質のエネルギーの平衡を考え、Δn→0とする。点Oにおける局所的エネルギー解放率として

$$\dot{E} = v_\alpha \hat{J}_\alpha + w_\alpha \hat{L}_\alpha + \alpha \hat{M} + I \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (II-79)$$

が得られる。ただし、破壊進行領域の円板ΔV<sub>end</sub>の側面からのエネルギーの流れは無視した。式(II-79)において、 $\hat{J}_\alpha$ 、 $\hat{L}_\alpha$ および $\hat{M}$ はそれぞれ式(II-23)、(II-25)および式(II-26)によって与えられ、 $\hat{L}_\alpha$ は次式で与えられる。

$$\hat{L}_\alpha = \int_{R_{end}} e_{ide} X_e \left\{ p(k+e) n_i - T_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\} d\Gamma \quad (II-80)$$

三次元の $\hat{J}_\alpha$ 、 $\hat{L}_\alpha$ および $\hat{M}$ の積分経路に依存しない表示式は、式(II-30)～(II-32)を一般化して

$$\hat{J}_\alpha = \int_{R_{end}} p(k+e) n_i d\Gamma - \iint_{S+S_S} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} ds + \iiint_V \left\{ \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_\alpha} + (p\ddot{u}_j - F_j) \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \right\} dy dv \quad (II-81)$$

$$\begin{aligned} \hat{L}_\alpha &= \int_{R_{end}} e_{ide} p(k+e) X_e n_i d\Gamma - \iint_{S+S_S} e_{ide} X_e T_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} ds \\ &\quad + \iiint_V e_{ide} \left\{ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + X_e (p\ddot{u}_j - F_j) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + X_e \sigma_{jk} \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_\alpha} \right\} dy dv \end{aligned} \quad (II-82)$$

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \int_{R_{end}} \{ p(k+e) n_i X_i \} dy - \iint_{S+S_S} \left( X_i T_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) ds \\ &\quad + \iiint_V \left\{ \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_\alpha} X_e + (p\ddot{u}_j - F_j) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} X_i \right\} dy dv \end{aligned} \quad (II-83)$$

となる。

均質な材料に対しては、式(II-81)～式(II-83)はさらに変形できる。図II-9に示すように無限に薄い( $\Delta n \rightarrow 0$ )板を考える。この板の内周は破壊進行領域の外周 $R_{end}$ に等しく指定されて

いふが、板の外周 $\Gamma$ は任意である。

板の側面の外向き単位法線ベクトルを $p_i$ とすると、 $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\alpha}$  および $\hat{m}$ は次のように表わされる。

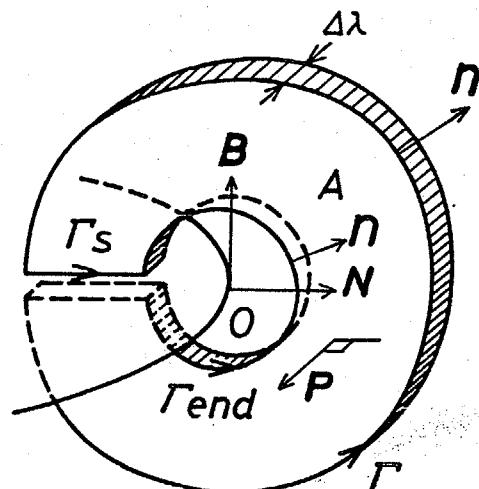
$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \int_{P_s P_s} (w e n_i - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{end}} \{ p(k+t) - w e \} n_i d\Gamma \\ &+ \iint_A \{ (p u_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^*}{\partial x_i} \\ &+ (w e p_i - \sigma_{ij} p_j u_{ij}), e p_i \} dA \quad (\text{II-84})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \int_{P_s P_s} e_{ide} \{ X_e (w e n_i - T_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + T_i u_e \} d\Gamma + \iint_{\Gamma_{end}} e_{ide} [X_e p(k+t) - w e] n_i - T_i u_e] d\Gamma \\ &+ \iint_A e_{ide} \{ (p u_j - F_j) u_e + 2 \sigma_{ej} \epsilon_{ij}^* + X_e (p u_j - F_j) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + X_e \sigma_{mj} \frac{\partial \epsilon_{mj}^*}{\partial x_i} \\ &+ (X_e w e p_i - X_e \sigma_{ij} p_j u_{ij}, e p_i), m p_m \} dA \quad (\text{II-85})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{m} &= \int_{P_s P_s} (w e x_i n_i - T_i u_{ij} X_j - \frac{1}{2} T_i u_i) d\Gamma + \iint_{\Gamma_{end}} [X_i (p(k+t) - w e) n_i + \frac{1}{2} T_i u_i] d\Gamma \\ &+ \iint_A \{ (p u_j - F_j) (\frac{1}{2} u_j + u_{ji} X_i) + \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^*, e X_e + \frac{3}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* \\ &+ (w e p_i X_i - X_e \sigma_{ij} p_j u_{ij}, e p_i - \frac{1}{2} \sigma_{ij} p_j u_i), m p_m \} dA \quad (\text{II-86})\end{aligned}$$

ここで、 $\hat{\alpha}$ および $\hat{m}$ が式(II-85)および(II-86)の形に表わされたために課せられた条件は、それぞれ式(II-36)および(II-37)の場合と同様である。

最後に、局所的なエネルギー解放率と有限な厚さの破壊進行領域に関するエネルギー解放率（これを全体的なエネルギー解放率と呼び $E$ で表わす）との関係について考える。図II-10に破壊進行領域の縦断面を模式的に示す。この図では、簡単のために



図II-9 均質体に対する積分経路

き裂前線が一つの平面上に次のように描かれている。き裂前線上の一点を  $O_0$  とし、き裂前線の曲率半径を  $R_f$  とする。

図II-10には重を定義するためには用いた破壊進行領域の内板の断面が長方形  $ABCD$  で表わされている。

また、点  $O$  から  $\Delta\lambda$  だけ離れた点  $O'$  におけるき裂前線

に垂直な平面が破壊進行領域を切った切り口が直線  $B'C'$  で表わされている。断面が  $AB'C'D$  で表わされる破壊進行領域に関するエネルギー解放率を  $\Delta E$  とすれば、全体的なエネルギー解放率  $E$  は次式で表わされる。

$$E = \int_0^\lambda \Psi^* d\lambda$$

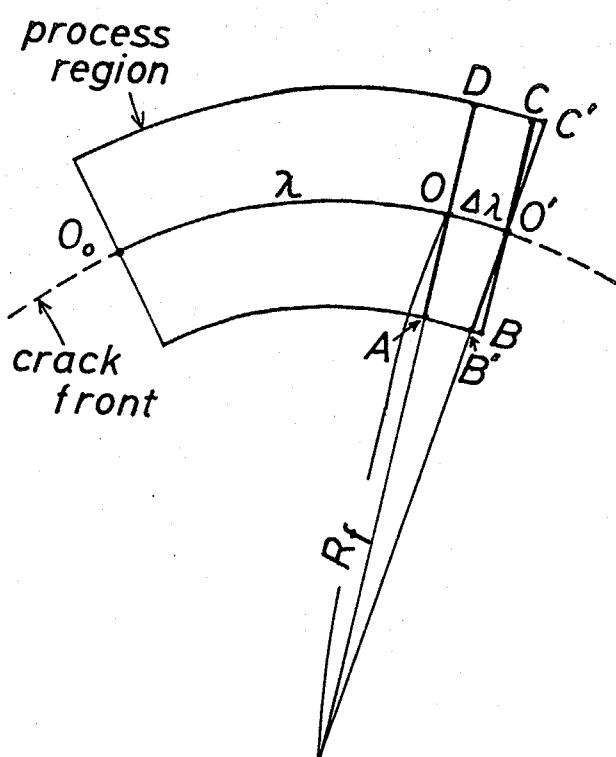
(II-87)

ここで、

$$\Psi^* = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta\lambda} = \frac{dE}{d\lambda}$$

(II-88)

重は一般には  $\Psi^*$  とは等しくないが、通常の工業材料のようにき裂前線の曲率半径  $R_f$  が破壊進行領域の寸法  $\overline{AD}$  に比べて十分大きい場合には  $\overline{B'B} \ll \overline{AB}$ ,  $\overline{C'C} \ll \overline{DC}$  となり、重は近似的



図II-10 破壊進行領域の綫断面図 ( $\Delta\lambda \rightarrow 0$ )

に重 $\star$ と一致する。 $\bar{A}D/R_f \rightarrow 0$  の極限（例えば直線状貫通き裂など）では、重は完全に重 $\star$ と一致する。 $\bar{A}D/R_f$  の大きさの値に対して重 $\star$ を定式化することと可能と考えられるか、数式が複雑になるものと予想される。

なお、破壊進行領域が“小規模で”，き裂がX軸方向に進展する場合には、前節と同様な考察から

$$\dot{\Gamma} = \dot{\Gamma}_C \quad (\text{II-89})$$

を局所的な破壊条件として採用することが考えられる。

## 2.6. 結言

き裂が進展する際のエネルギー解放率を破壊進行領域の変形を考慮に入れて定式化した。その結果、エネルギー解放率重（または重）は破壊進行領域の平行移動による成分  $\dot{\Gamma}_M$ 、回転による成分  $\dot{\Gamma}_L$ 、自己相似的な膨張による成分  $\dot{\Gamma}_S$  および形状のゆがみ等による成分  $\dot{\Gamma}_T$  の和として表わされたことがわかった。また、 $\dot{\Gamma}_M$ 、 $\dot{\Gamma}_L$  および  $\dot{\Gamma}_S$  の積分経路によらない表示式を導いた。つぎに、破壊進行領域が小さい場合には、 $\dot{\Gamma}_M \gg \dot{\Gamma}_L, \dot{\Gamma}_S$  となり、 $\dot{\Gamma}$  積分は、き裂先端近傍における特異場の強さと関係づけられるので、重（または重）と全とをひとまとめにして破壊剛性値として取扱えば、 $\dot{\Gamma}$  積分がこのような場合の单一の破壊力学パラメータ

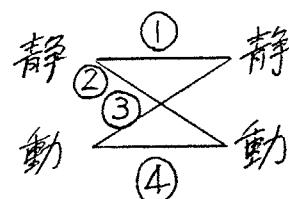
となり得ることを示した。最後に、上述の結果を三次元問題に  
拡張できることを示した。

## 第Ⅲ章 動的破壊問題への応用

### 3.1. 緒言

静的な負荷の下での材料の破壊挙動に関しては従来から多くの研究が行われている。しかし、動的な負荷を受ける材料の破壊や高速で進展するき裂の挙動のように物体の慣性力の影響を考慮した動力学的な取扱いを取扱いを必要とする問題はまだ十分に研究されていないのが現状である。このような問題を解明することは衝撃荷重を受ける部材の強度設計やクラックアレスターの設計に有用と考えられる。

一般に、き裂を有する物体に荷重が加わるとき、き裂進展速度と物体の慣性力を考慮する必要があるか否かによって表Ⅲ-1のように破壊問題の取扱い法を分類すること可能である。<sup>(1)</sup>ここで、破壊力学的解析において物体の慣性力を考慮する必要が生じるのは、荷重が変化する時間が物体の最低次の自由振動の固有周期と同じオーダーかそれ以下の場合、および、き裂の進展速度が弹性波の伝播速度に比べて無視できない場合である。表Ⅲ-1において①は静的な破壊問題であり従来の破壊力学が主に取扱ってきた分野である。②が上述の衝撃問題、③④が高速き裂問題である。3.2節では②の問題を、3.3節では③④の問題について



表Ⅲ-1 き裂と荷重の分類

検討する。なお、本章では、特にことわりなく静的な線形破壊力学の場合と同様に小規模降伏状態を仮定し、弾性き裂モデルを取り扱う。この場合、前節で導出した破壊力学パラメータは式(II-39)または(II-40)より

$$\dot{\Gamma} = - \int_{P+P_0} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dP + \iint_A \left\{ G_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_1} + (\rho \ddot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right\} dA \quad (\text{III-1a})$$

または、

$$\dot{\Gamma} = \int_{P+P_0} (W e n_i - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) dP + \iint_A (\rho \ddot{u}_i - F_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dA \quad (\text{III-1b})$$

である。なお、式(III-1a)の表示式は構成方程式のいかんによらず積分経路(領域)独立である。

### 3.2. 衝撃荷重を受けるき裂の動的応力拡大係数

およびエネルギー解放率

#### 3.2.1. 弹性体および粘弹性体に対する基礎関係式

多くの機械や構造物は変動する負荷の下で使用されており、衝撃的に加わる荷重が破壊事故の原因となる場合も少なくない。したがって、衝撃荷重を受ける部材の安全性の評価をすることは重要な問題である。本節では、き裂が衝撃力から作用する場合について検討する。今後は前章での導出過程から明らかのように往復の構成関係に従う材料に適用可能である。しかし、衝撃荷重下では、せん性破壊することが多いこと、および静的

な問題ほど破壊現象が十分に解明されていないことから、本節では小規模降伏状態の問題に限定して議論する。

一般に静止しているき裂に応力波が入射すると、き裂先端近傍には、次式のように表わされるき裂に固有な応力・変位場が生じる<sup>(2)</sup>。

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) \quad (\text{III-2a})$$

$$u_i(t) = \frac{K_I(t)}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i^I(\theta, v) + \frac{K_{II}(t)}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i^{II}(\theta, v) + \frac{K_{III}(t)}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i^{III}(\theta) \quad (\text{III-2b})$$

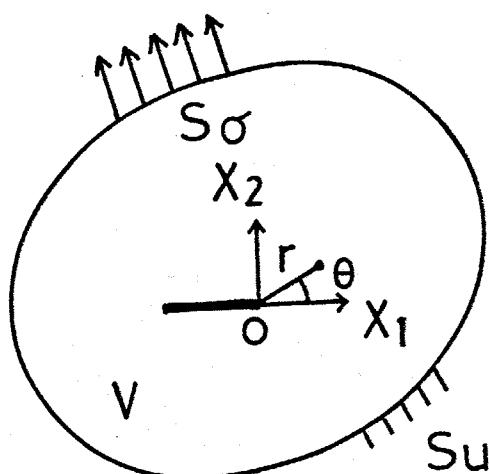
ただし、物体は線形弾性体とし、図III-1に示す座標系を用いる。ここで、 $K_I(t)$ ,  $K_{II}(t)$  および  $K_{III}(t)$  は、それぞれ、面内開口変形 (Mode I), 面内せん断変形 (Mode II) および面外せん断変形 (Mode III) に対する動的応力拡大係数である。また、 $r$  はボアソン比、 $\mu$  は横弾性係数である。 $f_{ij}^I(\theta)$ ,  $g_i^I(\theta, v)$  等は応力・変位場の角度依存性を表す関数で静的荷場合と同一の関数である。動的応力拡大係数と今積分の関係は、式(II-67)を得たときと同様に(2, 式(III-1)より)

$$\begin{aligned} J &= \frac{K+1}{8\mu} [K_I^2(t) + K_{II}^2(t)] + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2(t) \\ &= G \end{aligned}$$

ただし  $K = \begin{cases} 3-4v & \text{面内開口変形} \\ (3-v)/(1+v) & \text{面外せん断変形} \end{cases}$

(III-3)

で求められ、今は動的弹性エネルギー 図III-1 き裂と座標系



に一致する。したがって、動的応力拡大係数が決定されると、き裂先端近傍の応力・変位場およびエネルギー解放率が一意的に定められることになる。このことは、き裂に応力波が入射する問題の解析が動的応力拡大係数を解析することに帰着されるこことを意味している。

衝撃荷重下の破壊条件式として閉口形モードの場合につい

$$K_{I(t)} = K_d \quad (\text{III-4})$$

が多く採用されている<sup>(3)</sup>。ここで、 $K_d$ は衝撃破壊強度値と呼ばれ、一般に  $K_{I(t)}$  に依存するがき裂長さや物体の形状には依存しない物性値と考えられる。 $K_{I(t)} \rightarrow 0$  のとき  $K_d$  は  $K_c$  に一致する。式(III-3) より式(III-4) の破壊条件式は  $\dot{\gamma}$  を用いた条件式と等価であることがわかる。なお、混合モードの破壊に関しては実験データもしくはこの問題は今後の研究課題であるが、動的応力拡大係数を評価することが問題解明の基本になると思われる。

以上の弾性体に対する基礎関係式を線形粘弹性体の場合に拡張する。時間  $t$  に関する

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad (\text{III-5})$$

で定義されるラプラス変換を導入すると線形粘弹性体の基礎方程式は次式で与えられる<sup>(4)</sup>

$$\bar{\sigma}_{ij,j} = s^2 P \bar{u}_i \quad (\text{III-6a})$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{U}_{ij,j} + \bar{U}_{j,i}) \quad (\text{III-6b})$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2S\bar{\mu} \bar{\epsilon}_{ij} \quad (\text{III-6c})$$

$$\bar{\sigma}_{kk} = 3S\bar{K} \bar{\epsilon}_{kk} \quad (\text{III-6d})$$

ここで、式(III-6a)は釣合方程式、式(III-6b)はひずみの定義式、式(III-6c,d)は構成方程式である。 $\rho$ は密度、 $S_{ij}$ 、 $\epsilon_{ij}$ は、それぞれ、偏差応力および偏差ひずみである。また、 $\bar{\mu}$ 、 $\bar{K}$ は、それぞれ単純せん断および等方圧縮に対する緩和関数のラプラス変換である。境界条件は、

$$\bar{\sigma}_{ij} n_j = \bar{T}_i \quad S_0 \text{ 上} \quad (\text{III-7a})$$

$$\bar{U}_i = \bar{U}_i \quad S_U \text{ 上} \quad (\text{III-7b})$$

で与えられる。ここで、 $n_j$  は物体表面の外向き単位法線ベクトルの成分である。また、 $S_0$  は表面力  $\bar{T}_i$  が与えられた境界であり、 $S_U$  は変位  $\bar{U}_i$  が与えられた境界である。ここでは、領域  $S_0$ 、 $S_U$  は時間的に変化しないものとする。式(III-6)と(III-7)で与えられる方程式は、 $S\bar{\mu}(S)$  やび  $S\bar{K}(S)$  を弾性定数  $\mu$ 、 $K$  で置き換えると弾性体の場合に得られた式に一致する。

したがって、ラプラス空間における線形粘弹性問題の解は、ラプラス変換によって表示された線形弾性問題の解に含まれる  $\mu$  と  $K$  を、それをお  $S\bar{\mu}(S)$  と  $S\bar{K}(S)$  に置き換えることによって求められる。線形弾性体のき裂先端近傍の応力・変位場の解は、式(IV-1)で与えられるので、これらの式をラプラス変換し、 $\mu$

を  $S\bar{U}(S)$  で置き換えた式は、ポアソン比  $\nu$  を時間に関して一定値と仮定するとラプラス空間における線形粘弾性体の解である。それを逆変換することにより、

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) \quad (\text{III-8a})$$

$$u_i(t) = T_I(t) \sqrt{\frac{E}{2\pi r}} g_i^I(\theta, \nu) + T_{II}(t) \sqrt{\frac{E}{2\pi r}} g_i^{II}(\theta, \nu) + T_{III}(t) \sqrt{\frac{E}{2\pi r}} g_i^{III}(\theta) \quad (\text{III-8b})$$

が得られる。ここで、

$$K_M(t) = \int_0^t \mu(t-\tau) \frac{\partial T_M(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (M=I, II, III) \quad (\text{III-9})$$

が成立する。式(III-8b)を座標で偏微分することによりひずみが求められるので、 $T_M(t)$  はひずみの特異性の強さを表すハラメータと考えられる。そこで、 $T_M(t)$  をひずみ拡大係数と呼ぶことにする。

式(II-66) より  $\dot{\gamma}$  と  $K_M(t)$ ,  $T_M(t)$  の間に

$$\dot{\gamma} = \frac{\kappa+1}{4} [K_I(t)T_I(t) + K_{II}(t)T_{II}(t)] + K_{III}(t)T_{III}(t) \quad (\text{III-10})$$

の関係があることがわかる。なお、線形弾性体の場合には

$$K_M(t) = 2\mu T_M(t) \quad (M=I, II, III) \quad (\text{III-11})$$

となるので式(III-10)は式(III-3)に帰着する。

式(III-10)より粘弾性体の場合には弾性体の場合とは異なり、 $\dot{\gamma}$  と動的応力拡大係数とは一一に対応せず、ひずみ拡大係数にと関係することがわかる。しかし、動的応力拡大係数が求められれば、式(III-9) (III-10) を利用してひずみ拡大係数あるいは  $\dot{\gamma}$  積分の値を決定できるので、粘弾性体の場合に弾性体の場

合と同様に、き裂に応力波が入射する問題の解法は動的応力拡大係数を解析することに帰着される。

動的応力拡大係数については、現在までに種々の場合について解析が試みられており<sup>(1-3, 5, 6)</sup>が現象が時間に依存するので数学的取扱いが困難である。解析的な解が求められておりのは無限体中のき裂のような特殊な場合に限られている。したがって、き裂を含む有限物体の動的応力解析に有効な数値計算法の開発が必要である。き裂先端には応力の特異性が存在するので通常の有限要素法でき裂先端付近の応力・変位場を精度良く求めるためには細かい要素分割を必要とし、動的問題の解析では、計算時間が長大になるという問題点がある。

そこで、本節では、このような難点を解決するために、き裂先端近傍の解析解を変位関数とする特異要素を用いる有限要素法<sup>(7)</sup>を動的問題の解析に適用できるように拡張することを試みる。しかし、この方法では性質の異なる要素が用いられるので汎用のプログラムがそのままの形では使用できないという不便さがある。このため、今積分の積分経路独立な表示式を利用した動的応力拡大係数の有限要素解析について検討する。本手法は Rice の J 積分を用いる応力拡大係数の解析法<sup>(7)</sup>の動的問題への拡張と考えられる。最後に、衝撃破壊靭性値の測定に広く使用されており三点曲げ試験片の動的応力拡大係数の評価法に

つけて検討する。

### 3.2.2. 特異要素を用いた有限要素法による

#### 動的応力拡大係数の解析

##### (1) 有限要素法の定式化

図Ⅲ-1に示したようなき裂を含む線形粘弾性体(脚注)にたいして仮想仕事の原理を適用し、さうに時刻 $t=t_0$ から $t_0+\Delta t$ の間に積分すると

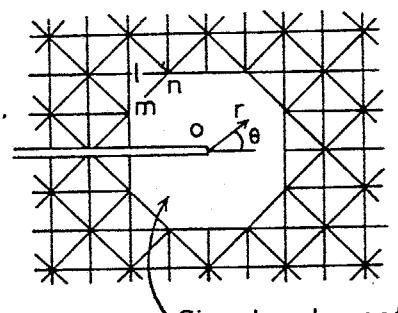
$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left\{ \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V \rho \dot{u}_i s_{ui} dV - \int_S T_i s_{ui} ds \right\} dt = 0 \quad (\text{III-12})$$

が得られる。ここでは、取扱いが比較的容易な面外せん断変形(Mode III)の場合について考える。

図Ⅲ-2のように要素分割し、き裂先端では特異要素を用い、各要素内の変位場を次式のように近似する。

$$u_3 = [N(X_1, X_2)]^e \{\phi(t)\}^e \quad (\text{III-13})$$

ここで、 $[N(X_1, X_2)]^e$ は変位関数マトリックスであり、 $\{\phi(t)\}^e$ は未知パラメータのベクトルである。三角形要素は定ひずみ要素として $[N(X_1, X_2)]^e$ と $\{\phi(t)\}^e$



図Ⅲ-2 特異要素法を用いた要素分割

(脚注) 線形弾性体は線形粘弾性体の特別な場合と考えられ

を、それぞれ通常の変位関数と節点ベクトルとする。き裂先端近傍の動的変位は式(III-8b)より

$$u_3 = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_3^{\text{III}}(\theta) T_{\text{III}}(t) \quad (\text{III-14})$$

によって表わすこととするので、特異要素では  $T_{\text{III}}(t)$  を変数  $\{\phi(t)\}^e$  として  $\sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_3^{\text{III}}(\theta)$  を変位関数  $[N(X_1, X_2)]^e$  と一緒に採用する。特異要素に接する三角形要素では、図III-2に示す三角形  $lmn$  を例にとって、

$$\begin{aligned} u_3 &= [N(X_1, X_2)]^e \{\phi(t)\}^e \\ &= [N_l, N_m, N_n]^e \left\{ \begin{array}{l} \frac{\phi_e(t)}{\sqrt{r_m/2\pi}} g_3^{\text{III}}(\theta_m) T_{\text{III}}(t) \\ \frac{\phi_e(t)}{\sqrt{r_n/2\pi}} g_3^{\text{III}}(\theta_n) T_{\text{III}}(t) \end{array} \right\}^e \\ &= [N_l, N_m, \sqrt{\frac{r_m}{2\pi}} g_3^{\text{III}}(\theta_m), N_n, \sqrt{\frac{r_n}{2\pi}} g_3^{\text{III}}(\theta_n)]^e \left\{ \begin{array}{l} \frac{\phi_e(t)}{T_{\text{III}}(t)} \\ T_{\text{III}}(t) \end{array} \right\}^e \\ &= [N(X_1, X_2)^*]^e \{\phi(t)^*\}^e \quad (\text{III-15}) \end{aligned}$$

となるので、 $[N(X_1, X_2)^*]^e$  および  $\{\phi(t)^*\}^e$  をそれぞれ変位関数と節点変位とする。(脚注)

式(III-13)を式(III-12)に代入し  $t=t_0$  における平衡が成り立つことをすると次式が得られる。

$$\sum \left\{ \iint_{A_e} [B]^{eT} \{ \Delta \phi \} dX_1 dX_2 + \iint_{A_e} \rho [N]^{et} [N]^e \{ \Delta \ddot{\phi} \} dX_1 dX_2 \right\}$$

(脚注) 特異要素と三角形要素の境界線上で節点以外で変位が不連続になるという欠点がある。この問題に関しては、あらためて3.3.3節で検討する。

$$-\int_{\Gamma_{\text{ee}}} [N]^e T \Delta \dot{\epsilon}_{ij} d\gamma = f_{ij} \quad (\text{III}-16)$$

ここで、 $A_e$ は考へている領域、 $\Gamma_{\text{ee}}$ は表面力の与えられた領域である。また、

$$\{\Delta \dot{\epsilon}\} = \{\Delta \dot{\epsilon}_{13}, \Delta \dot{\epsilon}_{23}\}^T \quad (\text{III}-17a)$$

$$[B] = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}^T [N(x_1, x_2)]^e \quad (\text{III}-17b)$$

であり、 $\dot{\epsilon}$ は各要素からの寄与分を総和することを表わし、 $\Delta$ は時刻  $t_0$ から  $t_0 + \Delta t$  の間の増分を表わし、 $T$  は座標を表す。

つぎに、式(III-16)に含まれる応力増分を節点変位で表わすことを考える。構成方程式か

$$\dot{\sigma}_{ij} + \beta \dot{\sigma}_{ij} = 2\mu' (\dot{\epsilon}_{ij} + \alpha \epsilon_{ij}) \quad (\text{III}-18a)$$

$$\dot{\sigma}_{kk} + \beta \dot{\sigma}_{kk} = \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)} \mu' (\dot{\epsilon}_{kk} + \alpha \epsilon_{kk}) \quad (\text{III}-18b)$$

で与えられる標準線形固体について考へる。ここで、 $\mu'$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  は材料定数である。 $\alpha = 0$  の場合には上式はマックスウェル固体の構成方程式を  $\alpha = \beta = 0$  の場合には弾性体の構成方程式を表す。式(III-9)と(III-18)より動的応力拡大係数とひずみ拡大係数の関係は

$$K_{\text{III}}(t) + \beta K_{\text{III}}(t) = 2\mu' (\dot{T}_{\text{III}}(t) + \alpha T_{\text{III}}(t)) \quad (\text{III}-19)$$

で与えられる。式(III-18), (III-19)において微小時間  $\Delta t$  内では  $\dot{\sigma}_{ij}$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}$  が線形に変化すると仮定すると<sup>(8)</sup>、次式が成立立つ。

$$\left(\frac{2}{\Delta t} + \beta\right) \Delta \dot{\sigma}_{ij} = 2\mu' \left(\frac{2}{\Delta t} + \alpha\right) \Delta \epsilon_{ij} + 2\alpha \epsilon_{ij}(t_0) - 2\beta \sigma_{ij}(t_0) \quad (\text{III}-20a)$$

$$\left(\frac{2}{\Delta t} + \beta\right) \Delta \dot{\sigma}_{kk} = \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)} \mu' \left(\frac{2}{\Delta t} + \alpha\right) \Delta \epsilon_{kk} + 2\alpha \epsilon_{kk}(t_0) - 2\beta \sigma_{kk}(t_0) \quad (\text{III}-20b)$$

$$\left(\frac{2}{\Delta t} + \beta\right) \Delta K_{III} = 2M' \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} + \alpha\right) \Delta T_{III} + 2\alpha T_{III}(t_0) \right\} - 2\beta K_{III}(t_0) \quad (\text{III-20c})$$

き裂先端近傍の応力は  $K_{III}(t)$  によって決定されることに注意し、式(III-20)を用いて式(III-16)の  $\Delta \sigma$  を消去すると

$$\sum_e [k]^e \{\Delta \phi\}^e + \sum_e [m]^e \{\Delta \psi\}^e = \sum_e \{\Delta f\}^e + \sum_e \{\Delta f_{vis}\}^e \quad (\text{III-21})$$

が得られる。ここで、

$$[k]^e = \frac{2+\alpha \Delta t}{2+\beta \Delta t} \iint_{Ae} [B]^e T [D] [B]^e dX_1 dX_2 \quad (\text{III-22a})$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \mu' & 0 \\ 0 & \mu' \end{bmatrix} \quad (\text{III-22b})$$

$$[m]^e = \iint_{Ae} \rho [N]^e T [N] dX_1 dX_2 \quad (\text{III-22c})$$

$$\{\Delta f\}^e = \int_{P_{ce}} [N]^e T \{\Delta T_3\} d\Gamma \quad (\text{III-22d})$$

$$\{\Delta f_{vis}\}^e = \frac{2\Delta t}{2+\beta \Delta t} \iint_{Ae} \{\beta [B]^e T \{\sigma(t_0)\} - \alpha [B]^e T [D] \{\varepsilon(t_0)\}\} dX_1 dX_2 \quad (\text{III-22e})$$

$$\{\sigma(t_0)\} = \{\sigma_{13}(t_0), \sigma_{23}(t_0)\}^T \quad (\text{III-22f})$$

$$\{\varepsilon(t_0)\} = \{2\varepsilon_{13}(t_0), 2\varepsilon_{23}(t_0)\}^T \quad (\text{III-22g})$$

であり、特異要素に対するのは、上式は

$$[k]^e = \frac{2+\alpha \Delta t}{2+\beta \Delta t} \mu' \iint_{Ae} \frac{2}{\pi} dr d\theta \quad (\text{III-23a})$$

$$[m]^e = \iint_{Ae} 4\rho(1-\cos\theta) r^2 dr d\theta \quad (\text{III-23b})$$

$$\{\Delta f\}^e = \int_{P_{ce}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_3^{III}(\theta) \Delta T_3 \quad (\text{III-23c})$$

$$\{\Delta f_{vis}\}^e = \frac{\Delta t}{2+\beta \Delta t} \iint_{P_{ce}} \frac{2}{\pi} dr d\theta \{\beta K_{III}(t_0) - 2\alpha M' T_{III}(t_0)\} \quad (\text{III-23d})$$

となる。(したがって、式(III-21)を逐次積分することによれば、 $T_{III}(t)$  が求められるので、式(III-20c)から動的応力拡大係数を定めることができる)。なお、Mode I と Mode II の場合にと同様にして

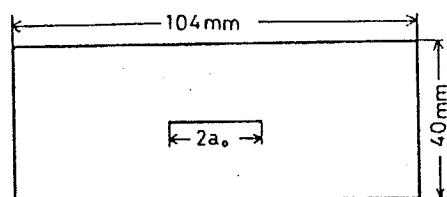
て、式(III-21)と同様の式を得ることができる(脚注)(付録I参照)。

## (2) 計算例

上述の手法による数値計算例を示す。なお、式(III-21)の逐次積分では Newmark の  $\beta = 1/6$  法<sup>(11)</sup> を用い、 $\Delta t = 0.2 \mu s$  とした。

### 单一モードの場合

図III-3に示すような長方形板の上下面に面外せん断力または引張力が時間に関して階段関数状に作用するときのモードⅢまたはモードⅠ変形の計算例を示す。問題の対称性から板の1/4を考慮図III-4のように要素分割し、斜線の部分を特異要素とした。



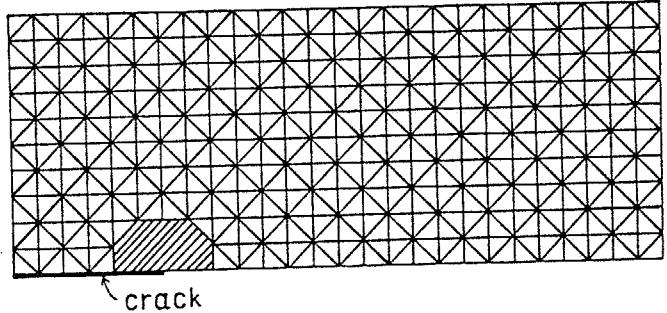
図III-3 中央にき裂を有する長方形板

$$\rho = 2.45 \text{ Mg/m}^3$$

$$2a_0 = 24 \text{ mm}$$

$$V = 0.286$$

緩和弾性率を図III-6に示す。

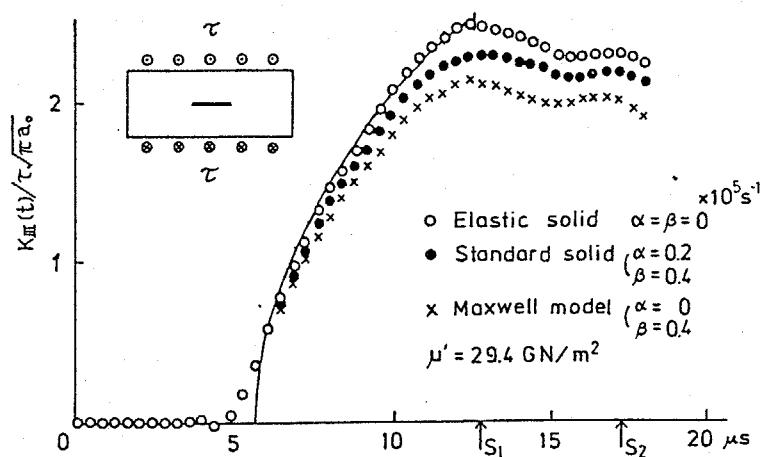


図III-4 特異要素(斜線部)を用いた要素分割  
(291節点, 507要素)

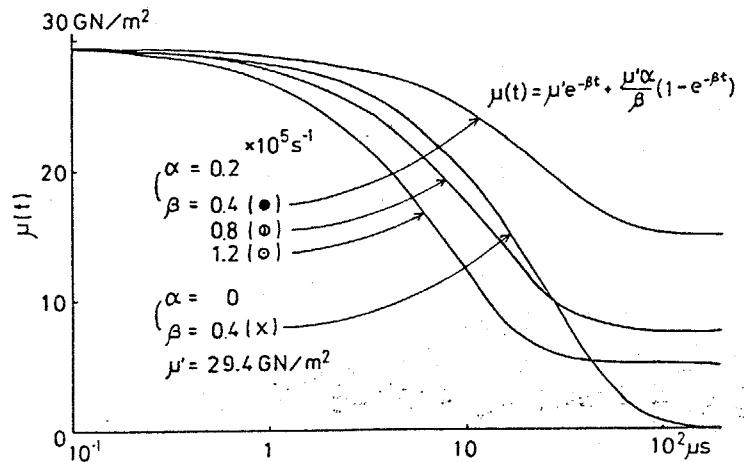
(脚注) 特異要素の変位関数にはき裂面に作用する表面力の影響が考慮されていないので内圧を受けるき裂問題では誤差が生じると考えられる。<sup>(9,10)</sup> このような問題については、重ね合せの原理を利用してき裂面に表面力が作用しない問題に置き換えて解析する必要がある。<sup>(10)</sup>

面外せん断力で作用する場合の計算結果を図III-5に示す。縦軸は無限体中の静的応力拡大係数  $\tau\sqrt{\pi a_0}$  で無次元化した動的応力拡大係数であり、横軸は荷重が作用し始めてからの時間である。

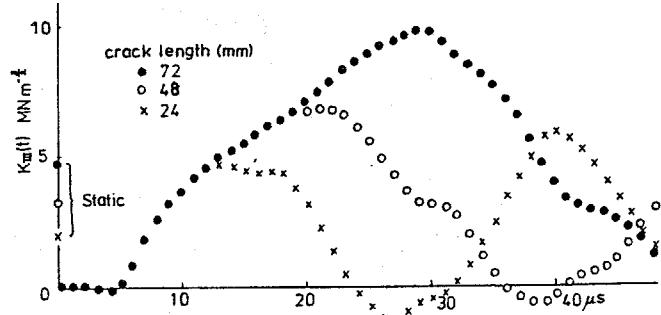
実線は弾性体中の半無限き裂に対する解析解<sup>(12)</sup>である。また、横軸上の  $S_1$ ,  $S_2$  は、それぞれ他のき裂端で回折された応力波および境界からの反射波を考慮してひずみ裂端に入射する時刻である。反射波の影響が表われるまでは弾性体についての計算結果と解析解は良く一致している。図III-6に、粘弾性問題の計算に用いた



図III-5 動的応力拡大係数の時間的変化 (Mode III)



図III-6 計算に使用した緩和弾性率

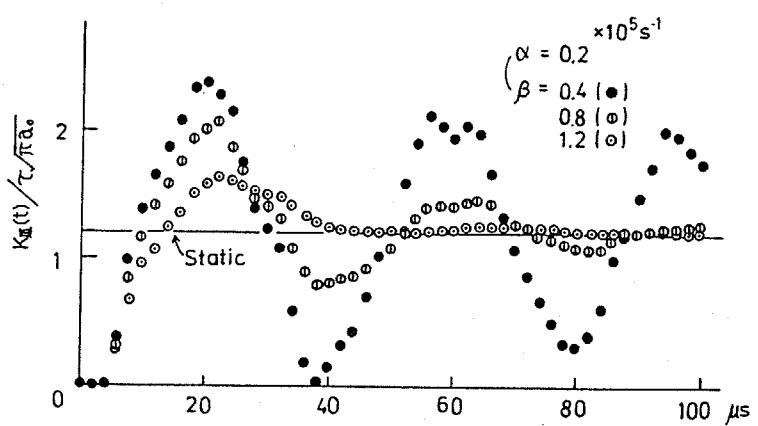


図III-7 各種のき裂長さに対する動的応力拡大係数の時間的変化 (線形弾性体, Mode III)

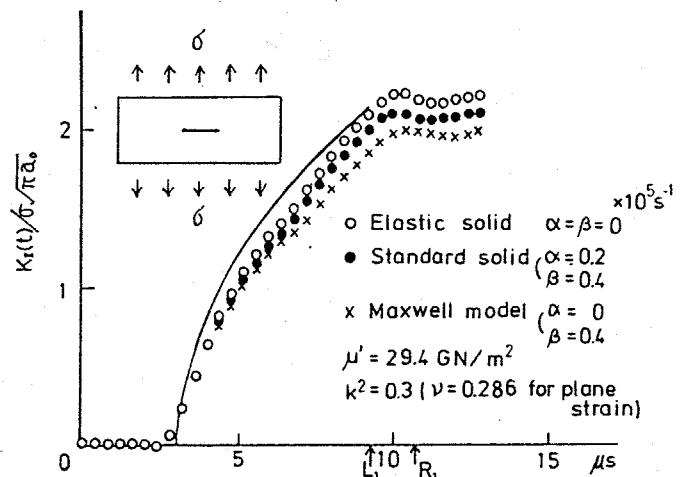
$$\tau = 9.8 \text{ MPa}$$

緩和弾性率を示す。粘弹性体の場合には粘性効果のために動的応力拡大係数が弾性体の場合に比べて小さくなっている。図III-7に種々のき裂長さに対する弾性体の場合の  $K_{II}(t)$  の時間的变化を示す。初期の間は  $K_{II}(t)$  はき裂長さによらず同じように増加していくが、やがてき裂の短い順に(き裂の他端からの応力波がき裂先端に達する順に)  $K_{II}(t)$  は増加しなくなり、また減少して静的な値を中心上下に振動している。図III-8に標準線形固体について  $\alpha$  を一定値に保ち  $\beta$  を変えて計算した場合の結果を示す。ただし、 $2a_0 = 24\text{mm}$  である。 $\beta$  の変化により振幅は変化するが周期はほとんど影響を受けない。 $\beta$  の大きさ、とのほど振動がはやく減衰し静的解に収束している。

開口変位様式の場合



図III-8 標準線形固体の動的応力拡大係数、実線は静的解を表す  
 $2a_0 = 24\text{mm}$



図III-9 動的応力拡大係数の時間的变化  
(Mode I), 実線は弾性体中の半無限き裂に対する解析解<sup>(7)</sup>

の動的応力拡大係数

の時間的变化に対する

計算結果を図III-

9, 図III-10 に示す

。ここで、き裂長さ

は  $2a_0 = 24\text{mm}$  である

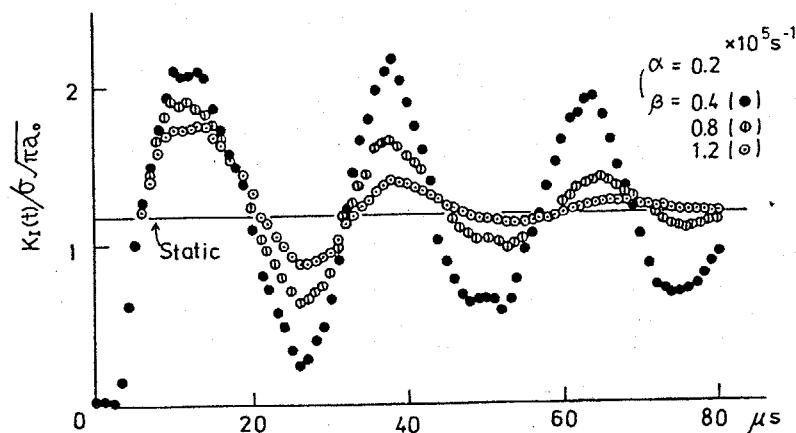
。震央せん断様式の

場合の図III-5, 図III-8 と同様の結果が得られていく。なお、図 III-9 の横軸上の L, R は、それぞれ境界からの反射波および他のき裂端で発生した Rayleigh 波が考慮してき裂先端に入射する時刻である。

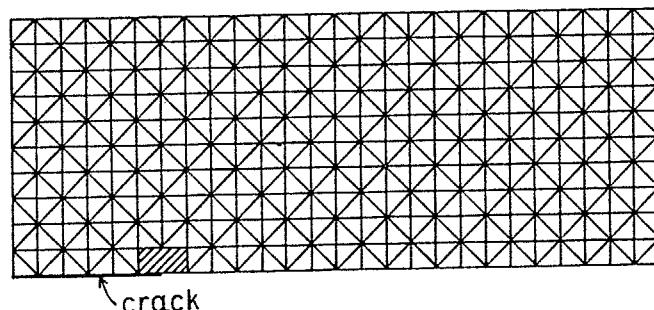
特異要素の大きさの影響を調べるために図III-11 に示すような形状の特異要素を用いて計算した結果を図III-12 に示す。

図III-9 の結果と比較して

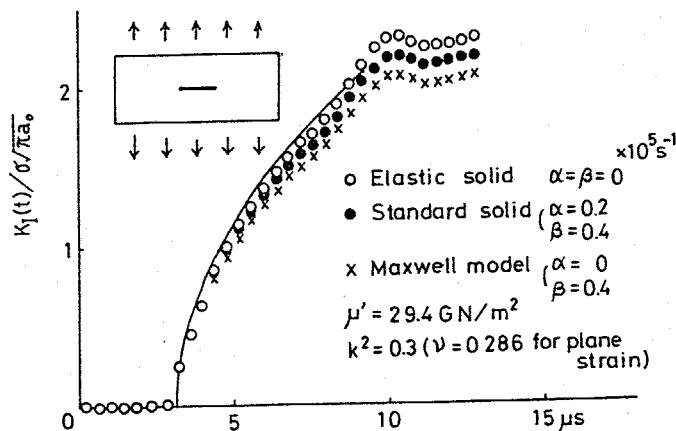
大きな差は生じてないが、精度がやや改善され



図III-10 標準線形固体の動的応力拡大係数 (Mode I)



図III-11 斜線部のような形状の特異要素を用いた要素分割, 296節点, 577要素



図III-12 動的応力拡大係数の時間的変化 (図III-11の要素分割)を使用)

でいる。

### 混合モードの場合

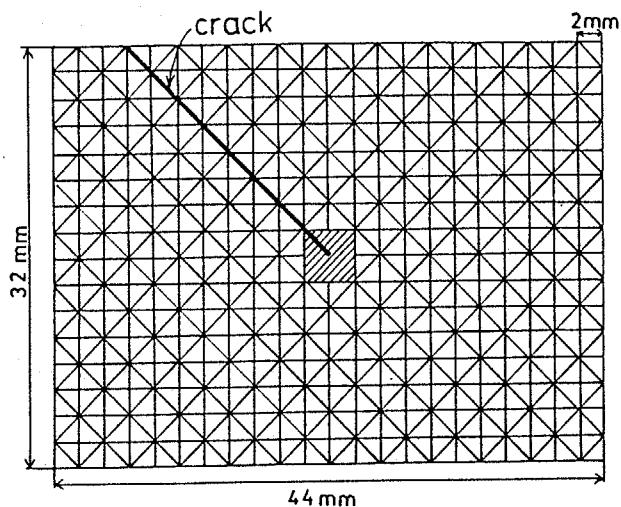
き裂が荷重の作用方向に対して  $45^\circ$  傾斜した混合モードの場合（図III-14 参照）の計算結果を示す。計算に用いた有限要素法の要素分割および特異要素の形状を図III-13 に示す。図III-14

に無次元化されたモード I およびモード II の動的応力拡大係数の時間的变化を示す。実線は無限体中の有限き裂に対する Thau と Liu の弾性解<sup>(13)</sup>である。

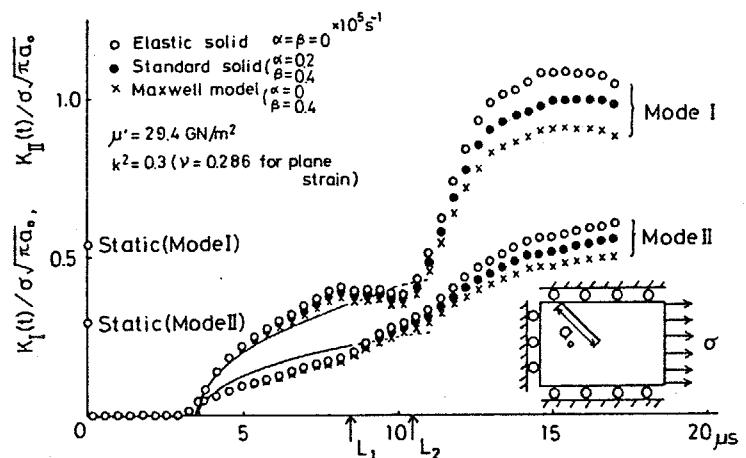
反射波の影響を受けるま

では弾性計算結果と解動解が良く一致していることは单一モードの場合と同様である。板の上下面で反射された応力波が時刻  $L_1$  に、左右の面で反射された応力波が時刻  $L_2$  にき裂面に入射する。混合モードの場合にも粘弹性体の動的応力拡大係数は弾性体に比べて小さく、粘性の影響が表われて（13）とかわか

る。



図III-13 要素分割 (398節点, 697要素)  
斜線部は特異要素の形状を表す。



図III-14 動的応力拡大係数の時間的变化 (混合モードの場合)

### 3.2.3. 余積分を用いた動的応力拡大係数の有限要素解析

#### (1) 動的応力拡大係数の計算法

前節では、き裂先端近傍の解析解を変位関数とする特異要素を用いた有限要素法について述べた。この手法には、動的応力拡大係数が有限要素計算によって直接求められるという利点があるが、性質の異った要素を用いるので汎用のプログラムとのままで利用できぬ」という不便さがある。一方、静的な問題では、径路独立な Rice の丁積分を用いると要素分割の精度にあまり影響されずに応力拡大係数を求められることが報告されてい<sup>(7)</sup>る。そこで、本節では、物体の慣性の影響を考慮したエネルギー解放率  $\dot{\Gamma}$  の積分径路(領域)独立な表示式を用いて動的応力拡大係数を評価する方法について検討する。

弾性問題の場合については、余積分と動的応力拡大係数の間に式(III-3)の関係式が成立する。したがって、单一モードの場合には式(III-1a) または式(III-1b)によって  $\dot{\Gamma}$  を評価することにより動的応力拡大係数を求めることができる。粘弾性問題の場合には、式(III-10)より明らかのように  $\dot{\Gamma}$  は  $T_M(t)$  ( $M=I, II, III$ ) に依存する。式(III-9)を利用して  $\dot{\Gamma}$  を  $K_M(t)$  だけで表わすとすると  $K_M(t)$  の履歴積分を含むようになる(後述するように弾性体の場合に比較して取扱いが幾分複雑になる)。なお、粘弾性問題に対しては式(III-1a)によって  $\dot{\Gamma}$  積分を評価す

ることはできる。

混合モードの場合には、子積分の値から動的応力拡大係数を一意的に定めることはできない。そこで、子を

$$\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}^I + \hat{\Sigma}^II + \hat{\Sigma}^III \quad (III-24)$$

のように各モード成分に分離する。面外せん変形に関する応力・変位成分は他のモードの成分と独立なので、モードIIIの分離は容易に行うことができる、 $\hat{\Sigma}^III$  は

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}^III &= \iint_A [2\sigma_{3i}\varepsilon_{3i,1} + (\rho\ddot{u}_3 - F_3)u_{3,1}] dA \\ &\quad - \int_P \sigma_{3i} n_i u_{3,1} dP \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (III-25a)$$

または

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}^III &= \int_{P_1 P_3} [W^{III} n_i - \sigma_{3i} n_i u_{3,1}] dP \\ &\quad + \iint_A (\rho\ddot{u}_3 - F_3) u_{3,1} dA \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (III-25b)$$

で与えられる。ただし、

$$W^{III} = \sigma_{31}\varepsilon_{31} + \sigma_{32}\varepsilon_{32} \quad (III-26)$$

である。モードI成分およびモードII成分の分離に関しては、石川ら<sup>(4)</sup>が Rice の丁積分に対して試みたように X 軸（き裂面の接線方向にとっている）に関する応力および変位の対称性および反対称性を考慮することにより  $\hat{\Sigma}^I$  と  $\hat{\Sigma}^II$  とに分離することができる。すなわち、X 軸に関して対称な点における値（肩にダンシエを付けて表わす）を用いて、応力、変位、ひずみおよび物体力に対して、

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^I \\ \sigma_{22}^I \\ \sigma_{12}^I \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} + \sigma_{22}' \\ \sigma_{12} - \sigma_{12}' \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^{II} \\ \sigma_{22}^{II} \\ \sigma_{12}^{II} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} - \sigma_{22}' \\ \sigma_{12} + \sigma_{12}' \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 + u_1' \\ u_2 - u_2' \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1^{II} \\ u_2^{II} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 - u_1' \\ u_2 + u_2' \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^I \\ \varepsilon_{22}^I \\ \varepsilon_{12}^I \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{11}' \\ \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}' \\ \varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}' \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{II} \\ \varepsilon_{22}^{II} \\ \varepsilon_{12}^{II} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}' \\ \varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}' \\ \varepsilon_{12} + \varepsilon_{12}' \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1^I \\ F_2^I \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} F_1 + F_1' \\ F_2 - F_2' \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1^{II} \\ F_2^{II} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} F_1 - F_1' \\ F_2 + F_2' \end{Bmatrix} \quad (\text{III-27})$$

のようにモードⅠ成分とモードⅡ成分とを定義すれば、 $\Sigma^I$  と  
 $\Sigma^{II}$  は

$$\begin{aligned} \Sigma^M &= \iint_A [\sigma_{ij}^M \varepsilon_{ij,I}^M + (\rho \ddot{u}_i^M - F_i^M) u_{ij,I}^M] dA \\ &\quad - \int_{P+P_3} T_i^M u_{ij,I}^M d\Gamma \quad (i=1,2; M=I, II) \end{aligned} \quad (\text{III-28a})$$

または

$$\begin{aligned} \Sigma^M &= \int_{P+P_3} [W^M n_i - T_i^M u_{ij,I}^M] d\Gamma + \iint_A (\rho \ddot{u}_i^M - F_i^M) u_{ij,I}^M dA \\ &\quad (i=1,2, M=I, II) \end{aligned} \quad (\text{III-28b})$$

で与えられる。ただし、

$$W^M = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^M \varepsilon_{ij}^M \quad (i=1,2, M=I, II) \quad (\text{III-29})$$

である。 $\Sigma^M$  は、上添字 M につけては総和規約を適用しない。  
式(III-25), (III-28) は、いずれも経路独立な積分であり、式  
(III-3) または (III-10) を求めたのと同様に 2 次式が得られ  
る。弾性問題につけては、

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\gamma}^I = \frac{k+1}{8\mu} K_I^2(t) \\ \dot{\gamma}^{II} = \frac{k+1}{8\mu} K_{II}^2(t) \\ \dot{\gamma}^{III} = \frac{1}{2\mu} K_{III}^2(t) \end{array} \right\} \quad (\text{III-30a})$$

粘弾性問題に対しては、

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\gamma}^I = \frac{k+1}{4} K_I(t) T_I(t) \\ \dot{\gamma}^{II} = \frac{k+1}{4} K_{II}(t) T_{II}(t) \\ \dot{\gamma}^{III} = K_{III}(t) T_{III}(t) \end{array} \right\} \quad (\text{III-30b})$$

となる。したがって、混合モードの場合には、弾性問題に対しては、式(III-25a), (III-28a)によって  $\dot{\gamma}^M$  を評価することにより動的応力拡大係数を求めることができます。

粘弾性問題の場合には、 $\dot{\gamma}$ ,  $\dot{\gamma}^M$  は  $T_M(t)$  に依存するので、式(III-9)の関係式を用いて  $K_M(t)$  だけで表わそうとすると、 $K_M(t)$  の履歴積分を含み計算が複雑になる。そこで、 $\dot{\gamma}$  の増分  $\Delta\dot{\gamma}$  と  $t=t_0$  における  $K_M(t_0)$  と  $T_M(t_0)$  の値から  $\Delta K_M$ ,  $\Delta T_M$  を求める。

また、モード I の場合について考える。式(III-10)より  $t=t_0$  から  $t_0+\Delta t$  の間の  $\dot{\gamma}$  の増分  $\Delta\dot{\gamma}$  は、

$$\Delta\dot{\gamma} = \frac{k+1}{4} [T_I(t_0) \Delta K_I + K_I(t_0) \Delta T_I + \Delta K_I \Delta T_I] \quad (\text{III-31})$$

となる。構成方程式が、式(III-18)で与えられる場合には、 $K_I(t)$  と  $T_I(t)$  との関係は、

$$\dot{K}_I(t) + \beta K_I(t) = 2\mu' [\dot{T}_I(t) + \alpha T_I(t)] \quad (\text{III-32})$$

となる。式(III-20)を導いたのと同様に(2), 微小時間 $\Delta t$  内では  $K_I$ ,  $T_I$  が線形に変化すると仮定すると

$$\left(\frac{2}{\Delta t} + \beta\right) \Delta K_I = 2\mu' \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} + \alpha\right) \Delta T_I + 2\alpha T_I(t_0) \right\} - 2\beta K_I(t_0) \quad (\text{III-33})$$

が得られる。上式と式(III-31)から  $\Delta T_I$  を消去し  $\Delta K_I$  について解くと次式が得られる。

$$\Delta K_I = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2} \quad (\text{III-34})$$

ただし,

$$A = \frac{2\mu' \left(\frac{2}{\Delta t} - \alpha\right) T_I(t_0) + \left(\frac{2}{\Delta t} + 3\beta\right) K_I(t_0)}{\frac{2}{\Delta t} + \beta} \quad (\text{III-35a})$$

$$B = \frac{2\beta K_I^2(t_0) - 4\alpha\mu' K_I(t_0) T_I(t_0) - 2\mu' \left(\frac{2}{\Delta t} + \alpha\right) \frac{4}{K_I} \Delta J}{\frac{2}{\Delta t} + \beta} \quad (\text{III-35b})$$

である。式(III-34)の根号の符号は  $\Delta J$  と  $\Delta K_I$  とが同符号になるように定めた。 $\Delta T_I$  の値は、 $\Delta K_I$  の値を用いて、式(III-33) から求められる。なお、他の場合についても同様な手続によって式(III-34) と同様の式を得ることはできる。したがって、有限要素法による計算結果を用いて子積分の値を評価すれば、式(III-34) から動的応力拡大係数が求められる。

## (2) 計算例

上述の手法を用いて行った数値計算例を示す。要素としては三角形定ひずみ要素を用いた。式(III-1a), (III-28a) の中の  $E_{ij,1}$ ,  $E_{ij,1}^M$  は、つきのようにして計算した。まず、定ひずみ

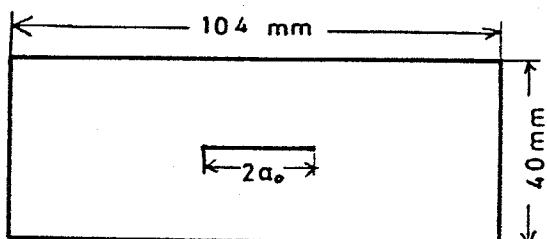
要素を用いて計算された各要素のひずみ  $\epsilon_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}^M$  を各節点に振り分ける。この際、ある節点に連なる要素のひずみを各要素の面積を重みとして平均し、その値をその節点のひずみとする。つぎに、一次の内挿関数を用いて要素内の任意の点の  $\epsilon_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}^M$  を表わし、これから  $\epsilon_{ij,1}$ ,  $\epsilon_{ij,1}^M$  を求めた。なお、有限要素計算における逐次積分には Newmark の  $\beta=1/6$  法<sup>(1)</sup>を用い、時間増分は  $\Delta t = 0.2 \mu s$  とした。

### 单一モードの場合

図III-15 に示すような長方形板(前節で取扱った図III-

3 の長方形板と同一形状)の上下面に引張力または面内せん断力でか時間に沿って階段関数状に作用するときのモードIまたはモードII変形の場合の計算例を示す。問題の対称性から板の 1/4 を考え、図

III-16 のように要素分割を行った。図中の斜線部は、比較のために行った特異要素法によく計算の際に用いた特異要



図III-15 中央にき裂を有する長方形板

$$\rho = 2.45 \text{ Mg/m}^3, \nu = 0.25$$

$$M' = 2.94 \text{ GN/m}^2, 2a_0 = 24 \text{ mm}$$

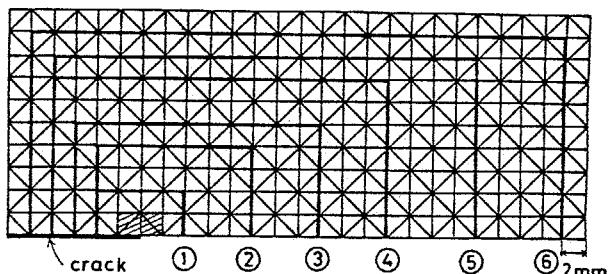
弾性体  $\alpha = \beta = 0$  (○, □)

標準線形固体 (●, ■)

$$\alpha = 0.2 \times 10^5 \text{ s}^{-1}, \beta = 0.4 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$$

マックスウェルモデル (X, +)

$$\alpha = 0, \beta = 0.4 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$$



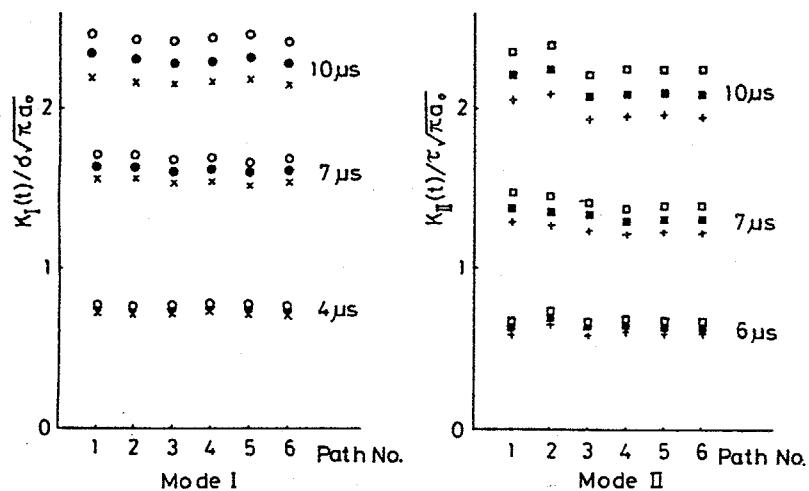
図III-16 要素分割と積分経路

(单一モード)

297節点, 520要素

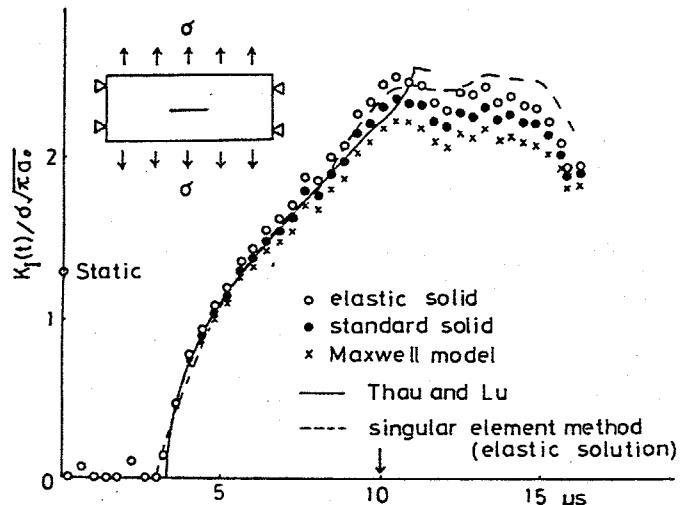
素の形状を表わす。 $\hat{t}$ によつて  $K_{I}(t)$  を求めるとときには、斜線の部分と他の部分と同様の要素分割を行つていい。図中に記入されていゝる①~⑥は、 $\hat{t}$ を計算するための経路を表わしていゝ。子積分は式(III-1a)によつて評価した。なお、弾性問題に対するものは式(III-1b)による計算と試みたが、ほぼ同様の結果を得られた。

図III-17は、各経路に対する動的応力拡大係数の計算結果を荷重が作用し始めてからの時間をパラメータとして示したものである。



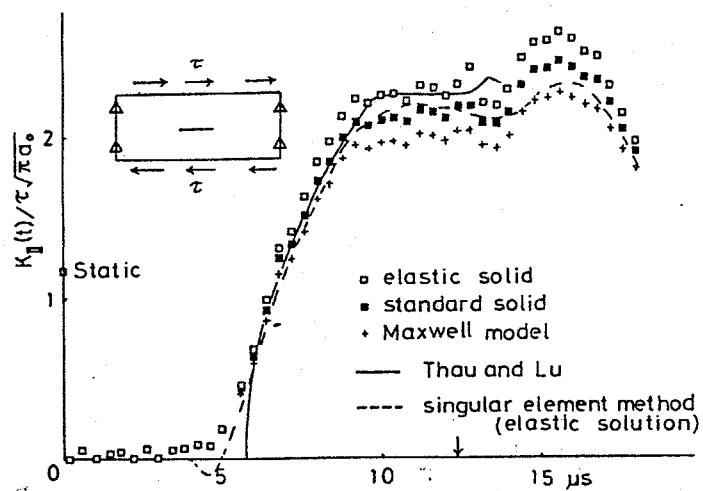
図III-17 経路独立性(单一モード)

のである。 $K_{I}(t)$ ,  $K_{II}(t)$  の両者とも経路によらず、ほぼ一定値となつていい。図III-18, III-19は、経路5に対する計算結果である。比較のために特異要素法による弾性計算の結果を破線で示した。また、実線は無限体中の有

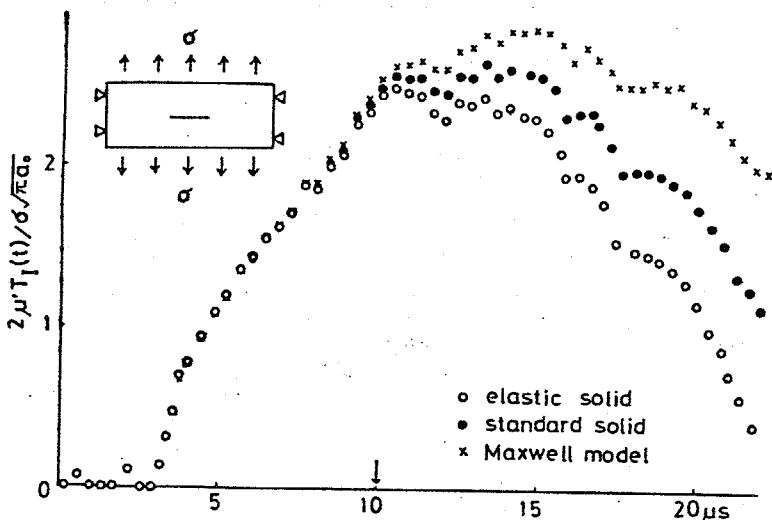


図III-18 モードIの動的応力拡大係数の時間的変化  
(経路No. 5)

限き裂に対する Thau と Lu の解析解(13)を表わす。図中の↓印は板の上下面で反射された応力波が考慮しているき裂端に再び入射し有限板であることの影響が現われる時刻である。比較的粗い要素分割によつて、余積分を評価することにより精度良く動的応力拡大係数を求められることわかる。なお、本手法に求めた静的応力拡大係数の値を図中に Static として示した。



図III-19 モードIIの動的応力拡大係数の時間的変化(径路No.5)



図III-20 モードIのひずみ拡大係数の時間的変化(径路No.5)

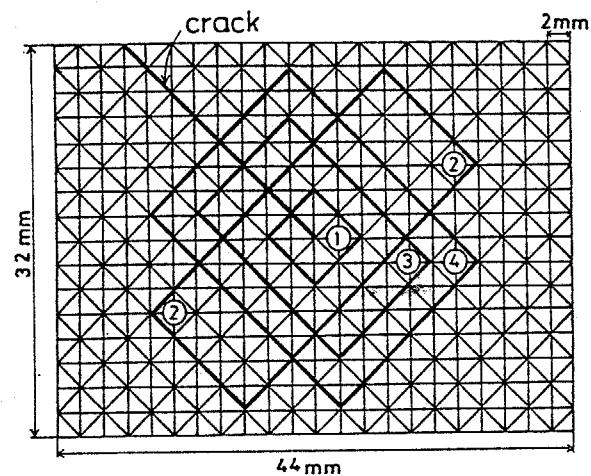
図III-20 に、モードIの場合のひずみ拡大係数の時間的変化を示す。弾性体においては、式(III-32)より  $K_I(t) = 2\mu' T_I(t)$ , ( $\alpha = \beta = 0$ ) が成り立つ。粘弹性体の場合には粘性効果のために動的応力拡大係数の最大値は弾性体に比べて小さくなっているが、ひずみ拡大係数については大きくなっている。従来の研究においては、粘弹性体の破壊に対して線形破壊力学を適用し、応力拡大

係数を破壊条件式を表わすとする試みが多く行われている。しかし、複雑な負荷条件に対しては応力拡大係数だけでは統一的な整理ができます。むしろ、荷重履歴および温度によらず必ず応力拡大係数が一定値に達したときに、き裂が進展を開始するという実験結果か(限定された条件下ではあるが)得られていく。<sup>(15)</sup>したがって、高分子材料の破壊については、今後は粘性挙動を考慮(たより)詳細な検討が必要であろう。

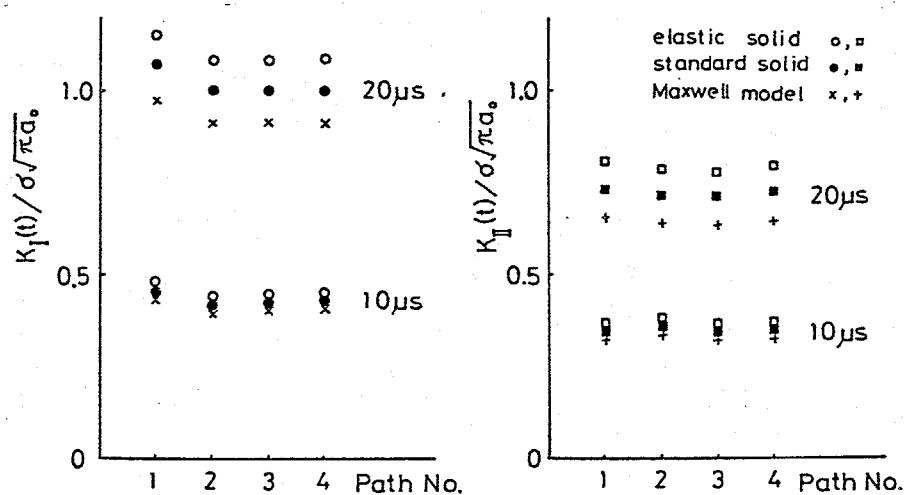
### 混合モードの場合

き裂が荷重方向に対して $45^\circ$ 傾斜した混合モードの場合の計算結果を示す(図III-23参照、荷重は時間に関して階段関数状態に作用する)。計算を行った有限要素法の要素分割および $\Gamma^I$ ,  $\Gamma^{II}$ の積分経路を図III-21に示す。

以下では、式(III-28a)によって $\Gamma^I$ ,  $\Gamma^{II}$ を評価した場合の結果を示す。弾性問題につ



図III-21 要素分割と積分経路  
(混合モード)  
き裂長さ  $2a_0 = 22.63 \text{ mm}$



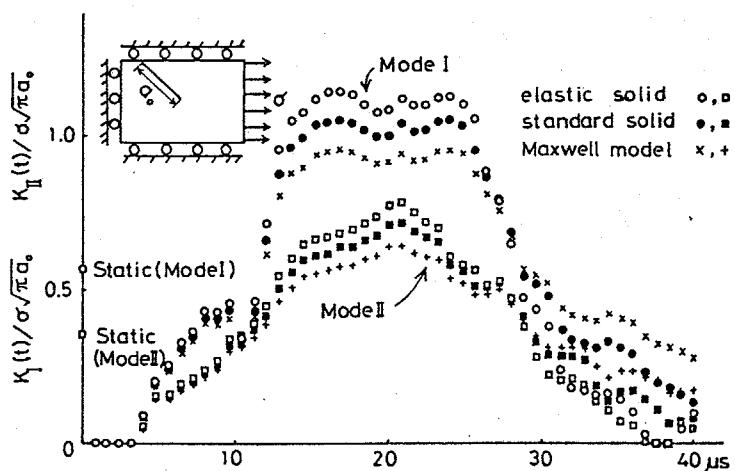
図III-22 経路独立性(混合モード)

112は式(III-28b)によ  
る計算と試みたが、ほぼ  
同様の結果が得られた。

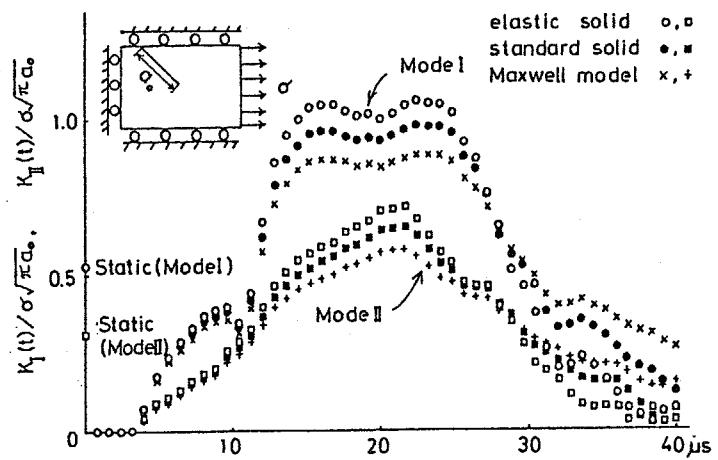
図III-22は、各時刻における動的応力拡大係数の値を各々の経路に対してプロットしたのである。  
单一モードの場合と同様に経路によらずほぼ等しい値が得られて113。

図III-23に経路3によつて求めた動的応力拡大係数の時間的変化を示す。

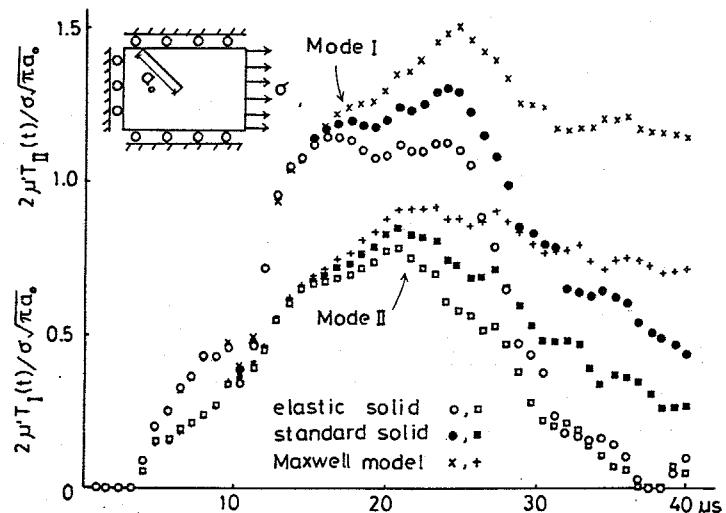
また、比較のために図III-13の要素分割を用いた特異要素法による結果を図III-24に示す。両手法により、ほぼ等しい結果が得られていることかわ  
かる。図III-25にひずみ  
拡大係数の時間的変化を



図III-23 混合モードの動的応力拡大係数(経路No.3)



図III-24 混合モードの動的応力拡大係数(特異要素法による結果)



図III-25 ひずみ拡大係数(経路No.3)

示す。 $K_M(t)$  と  $T_M(t)$  に対して单一モードと同様の傾向がみられる。

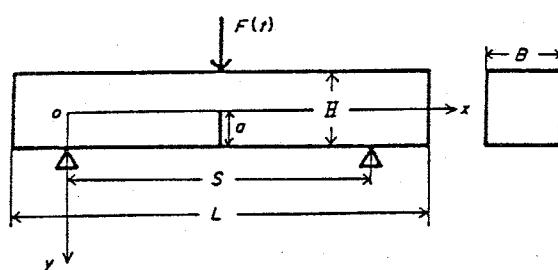
### 3.2.4. 三点曲げ試験片の動的応力拡大係数の解析

動的破壊靱性値  $K_d$  を得るために、油圧式の引張試験機<sup>(16)</sup>、落錐式試験機<sup>(17)</sup>、計装化シャルピ一試験機<sup>(18)</sup>、ホフキンソンバー式の衝撃試験装置<sup>(19)</sup>などを用いた方法が試みられてはいるが、静的荷重下における平面ひずみ破壊靱性試験法のような標準的な試験法は未だ確立されていない。静的破壊靱性試験に対して動的破壊靱性試験で特に問題となることは、動的応力拡大係数の正確な算定であろう。前節の計算例からと推定されるように、慣性力の影響により動的応力拡大係数は静的な解析から得られるとそのとは異った値となる。そこで、本節では落錐試験やシャルピ一試験などで広く使用されている三点曲げ試験片の動的応力拡大係数の解析法について検討する。

#### (1) 動的応力拡大係数の簡便式

##### 簡便式の導出

前節で示したように任意形状の物体の動的応力拡大係数は有限要素法によって解析することができる。(しかししながら、常に



図III-26 三点曲げ試験

有限要素計算にたよることは経済的でない。そこで、三点曲げ試験片の動的応力拡大係数を求めるための簡便式を導出する。

図III-26に示すような三点曲げ試験片を考え、解析においては小規模降伏状態を仮定し材料を線形弾性体と仮定する。図における $O-x, y$ は直角座標系である。試験片中央に集中荷重 $F(t)$ が作用する場合の $y$ 軸方向のたわみ $u_y$ はNash<sup>(20)</sup>により求められており、次式で与えられる。

$$u_y(\xi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \sin \omega_m t + B_m \cos \omega_m t) Y_m(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y(\xi) Y(1/2)}{\omega_m W_m S} \int_0^t F(n) \sin \omega_m (t-n) dn \quad (\text{III-36})$$

ただし、

$$A_m = \frac{\rho A}{\omega_m W_m} \int_0^1 u_y(\xi, 0) Y_m(\xi) d\xi \quad (\text{III-37a})$$

$$B_m = \frac{\rho A}{W_m} \int_0^1 u_y(\xi, 0) Y_m(\xi) d\xi \quad (\text{III-37b})$$

$$W_m = \rho A \int_0^1 Y_m^2(\xi) d\xi \quad (\xi = x/S) \quad (\text{III-37c})$$

であり、 $\xi$ はスパン長さ $S$ で無次元化された $x$ 座標、 $\rho$ は密度、 $A$ は試験片の全断面積( $B \times H$ )である。固有関数 $Y_m(\xi)$ は

$$Y_m(\xi) = 2D n_m^2 I \left[ \frac{\sin n_m \sinh(n_m/2) \sinh n_m \xi + \sin(n_m/2) \sinh n_m \sin n_m \xi}{D I n_m \{ \sin(n_m/2) \sinh n_m - \sinh(n_m/2) \sin n_m \} - (4S/n_m) \sin(n_m/2) \sinh n_m} \right]$$

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \quad (\text{III-38})$$

で与えられる。 $\therefore$

$$I = \frac{BH^3}{12} \quad (\text{III-39a})$$

$$D = \frac{H}{6I} I \quad (\text{III-39b})$$

$$I = I\left(\frac{a}{H}\right) = 65\left(\frac{a}{H}\right)^2 - 87.3\left(\frac{a}{H}\right)^3 + 205\left(\frac{a}{H}\right)^4 \quad (\text{III-39c})$$

である。また、固有角振動数  $\omega_m$  は

$$\omega_m^2 = \left(\frac{n_m}{S}\right)^4 \frac{EI}{PA} \quad (\text{III-40})$$

で与えられる。ここで、 $n_m (m=1, 2, 3 \dots)$  は方程式

$$\tan \frac{n_m}{2} = \frac{2S}{DI(n_m/2)} + \tanh \frac{n_m}{2} \quad (\text{III-41})$$

の第  $m$  番目の根である。

動的応力拡大係数は、き裂先端近傍の変位に比例するので、

$$K_I(t) = k_0 u_y(\frac{1}{2}, t) \quad (\text{III-42})$$

と置くことができる。ここで、 $k_0$  は比例定数である。き裂先端の動的変位場は動的応力拡大が時間的に変化することを除けば静的な場合と同形であり、静的解を用いて  $k_0$  を決定することができる。

荷重が静的に作用する場合の試験片中央のためみは式(III-36)より

$$u_{ys}(\frac{1}{2}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^2(\frac{1}{2})}{\omega_m^2 W_m S} F(t) \quad (\text{III-43})$$

で表わされる。また、静的応力拡大係数  $K_S$  は

$$K_S = \frac{6SF(t)}{4BH^2 \sqrt{\pi a} \bar{\Psi}_s} \quad (\text{III-44})$$

ここで、

$$\bar{\Psi}_s = \bar{\Psi}_s\left(\frac{a}{H}\right) = 1.090 - 1.735\left(\frac{a}{H}\right) + 8.20\left(\frac{a}{H}\right)^2$$

$$-14.18\left(\frac{a}{H}\right)^3 + 14.57\left(\frac{a}{H}\right)^4$$

で与えられる。<sup>(2)</sup> したがって、式(III-42)～(III-44)より、 $k_0$  は、

$$K_0 = K_s / \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^2(1/2)}{\omega_m^2 \bar{W}_m S} F(t) \quad (\text{III-45})$$

したがって、動的応力拡大係数と静的応力拡大係数（静的）を公式（III-44）を用いて求めた値）の上には

$$\frac{K_I(t)}{K_s} = \frac{1}{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^2(1/2)}{\omega_m^2 \bar{W}_m}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^2(1/2)}{\omega_m^2 \bar{W}_m} \frac{\int_0^t F(\tau) \sin \omega_m(t-\tau) d\tau}{F(t)} \quad (\text{III-46})$$

で表わされる。ただし、 $u_y, \dot{u}_y$  の初期値はゼロと仮定されてい

る。

つぎに、衝撃破壊試験で実現される荷重波形に近い鋸歯状パルス荷重の場合について考える。この場合、 $F(t)$  は

$$F(t) = \frac{t}{t_f} F_{\max} \quad t \leq t_f \quad (\text{III-47})$$

によつて表わすことができる。ここで、 $t_f$  は  $F(t)$  が最大値  $F_{\max}$  に達するまでの時間である。式（III-47）を式（III-46）に代入すると

$$\frac{K_I(t)}{K_{s\max}} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \frac{1}{t_f} \left[ t - \frac{1}{\omega_m} \sin \omega_m t \right] \quad t \leq t_f \quad (\text{III-48})$$

$C_m =$

$$C_m = \frac{1}{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^2(1/2)}{\omega_m^2 \bar{W}_m}} \frac{Y_m^2(1/2)}{\omega_m^2 \bar{W}_m}$$

であり、 $K_{s\max}$  は式（III-44）に  $F(t) = F_{\max}$  を代入して得られる静的応力拡大係数の値である。疲労き裂入り標準シャルビ試験片 ( $H=B=10\text{mm}$ ,  $S=40\text{mm}$ ,  $L=55\text{mm}$ ) に対する  $Z, C_m/C_1$

( $m=2 \sim 5$ ) の値を求めると表III-2 のようになる(数値は%で表示されてる)。この結果から、試験片に基本振動モード以外を無視して良好な近似が得られていることが推察される。したがって、動的応力拡大係数の簡便式として式(III-46)より

$$\frac{K(t)}{K_S} = \frac{\omega_1}{F(t)} \int_0^t F(\eta) \sin \omega_1(t-\eta) d\eta \quad (\text{III-49})$$

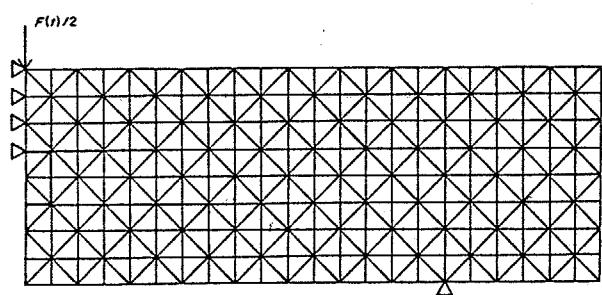
が得られる。

### 有限要素計算結果との比較

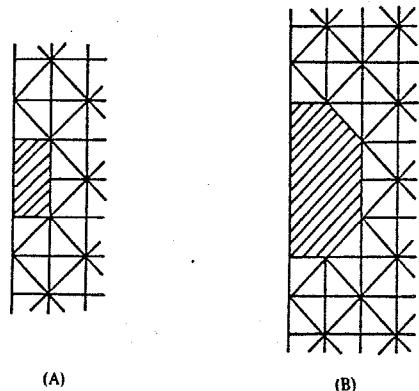
式(III-49)の精度を確かめるために、3.2.2節で述べた特異要素を用いた有限要素法による計算を行った。試験片は疲労き裂入り標準シャルピー試験片として材料定数は横せん断係数  $\mu = 79.4 \text{ GPa}$ , ポアソン比  $\nu = 0.286$ , 密度  $\rho = 7.84 \text{ Mg/m}^3$  を採用した。問題の対称性から試験片の半分を考え、図III-27のように要素分割(要素分割模式 M-I, 207節点, 352要素)とした。さらに、442節点、

$a/H$	$c_1/c_1$	$c_3/c_1$	$c_4/c_1$	$c_5/c_1$
0.1	1.32	0.18	0.06	0.02
0.2	1.46	0.21	0.06	0.02
0.3	1.50	0.21	0.05	0.02
0.4	1.37	0.17	0.04	0.02
0.5	1.12	0.13	0.03	0.01
0.6	0.84	0.09	0.02	0.01

表III-2 シャルピー試験片に対する  $C_m/C_1$  の値 (%)



図III-27 要素分割(M-I)  
207節点, 352要素



図III-28 計算に採用した  
特異要素の形状  
(斜線部)

792要素(M-2)および765節点, 1408要素(M-3)の要素分割を行った。また、特異要素の形状としては図III-28に示すようなA, Bの二種類を採用した。平面ひずみ状態を仮定してすべての計算を行った。

まず、外荷重が静的に作用する場合の計算結果を表III-3に示す。表には、有限要素計算により得られた値  $K_{sf}$  を式(III-44)によって求められた値  $K_s$  で無次元化した値が示されている。

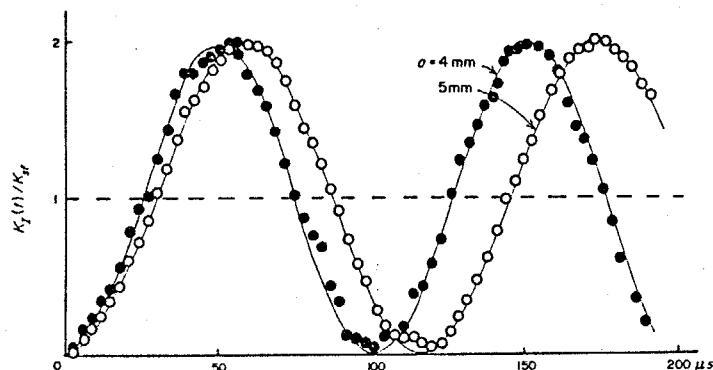
一番粗い要素分割M-1(特異要素A)で十分な精度が得られてることがわかる。そこで、以後の動的計算はこの要素分割を用いて行った。

有限要素法の時間積分にはNewmarkの $\beta=1/6$ 法を用い時間増分は $\Delta t=0.15\mu s$ とした。

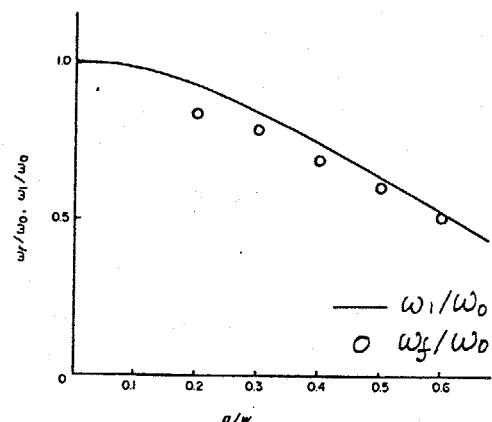
図III-29に荷重  $F(t)$  が時間に関して階段関数状に作用する場合の結果

Mesh	Singular element	$a=5\text{ mm}$	$a=4\text{ mm}$	$a=3\text{ mm}$
M-1	A	0.96	1.02	0.98
	A	0.96	0.98	0.96
M-2	B	0.99	0.95	0.99
M-3	B	0.94	0.90	0.93

表III-3 無次元化された静的応力拡大係数の値  $K_{sf}/K_s$



図III-29 荷重  $F(t)$  が時間に関して階段関数状に作用する場合の無次元化された動的応力拡大係数の時間的変化。--- 静的解 — 式(III-50)



図III-30 式(III-40)によて求まる値  $w_1$  と有限要素計算による求められた値  $w_2$  の比較

果を示す。縦軸は有限要素計算によって求められた静的解で無次元化された動的応力拡大係数を表わし、横軸は荷重が作用し始めてからの時間を表わす。動的応力拡大係数は静的解(破線)を中心に上下に振動しており図中の細線のように

$$\frac{K_I(t)}{K_{sf}} = 1 - \cos \omega_1 t \quad (\text{III-50})$$

による近似が可能である。また、簡便式(III-49)による動的応力拡大係数は

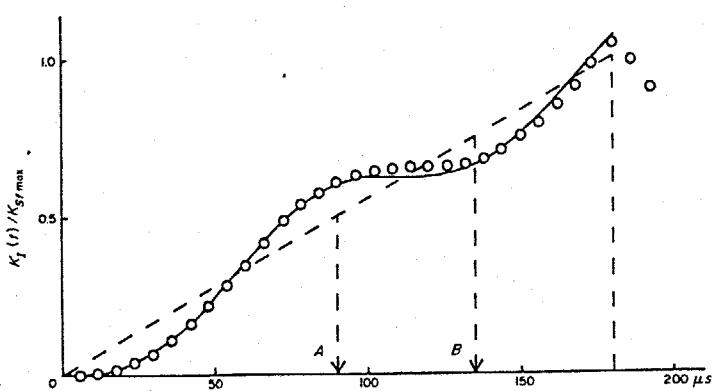
$$\frac{K_I(t)}{K_S} = 1 - \cos \omega_1 t \quad (\text{III-51})$$

で与えられる。そこで、有限要素計算による値  $\omega_2$  と式(III-40)によつて求められた値  $\omega_1$  を比較すると図III-30 のようになる。ただし、図には次式で与えられる単純はりの固有振動数  $\omega_0$  で無次元化された値が示されている。

$$\omega_0 = \left(\frac{\pi}{s}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{III-52})$$

実線は式(III-40)による結果であり、丸印は有限要素計算による結果である。両者は良く一致している。

つぎに、鋸歯状パルス荷重に対する結果を図III-31から図III-33に示す。最大荷重における静的応力拡大係数の値

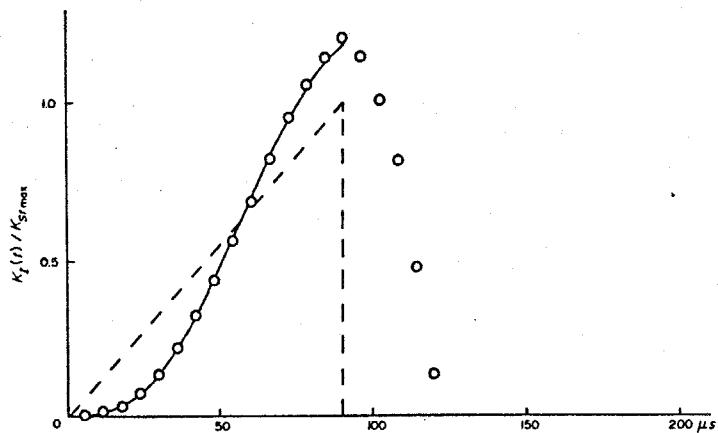


図III-31 鋸歯状パルス荷重に対する動的応力拡大係数の時間的変化  
— 簡便式(III-53)による結果  
--- 静的解

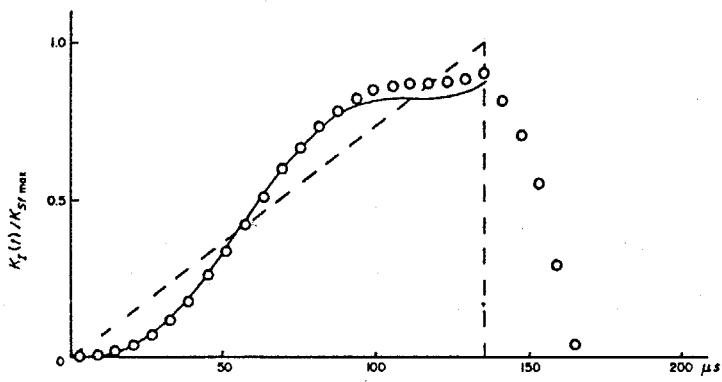
$K_{sf\max}$  で無次元化された動的応力拡大係数をとつてある。図中の丸印は有限要素法による計算結果を示す。また、破壊は静的な解析によると得られた動的応力拡大係数の値を示している。動的応力拡大係数の値は静的解のまわりを振動しながら増加していくことがわかる。図III-31のA,B点で除荷した場合の結果を図III-32と図III-33に示す。

図III-32では動的応力拡大係数は静的解析で得られる値の約1.2倍になっており、図III-33では約0.9倍になっていく。したがって、衝撃破壊試験において慣性力の影響を無視すると応力拡大係数の値に誤差を生じることが予想される。

鋸切り波状パルス荷重に対しては、式(III-49)は



図III-32 動的応力拡大係数の時間的変化  
図III-31のA点で除荷した場合の結果



図III-33 動的応力拡大係数の時間的変化  
図III-31のB点で除荷した場合の結果

$$\frac{K_I(t)}{K_{sf\max}} = \frac{1}{t_f} \left[ t - \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right] \quad t \leq t_f \quad (\text{III-53})$$

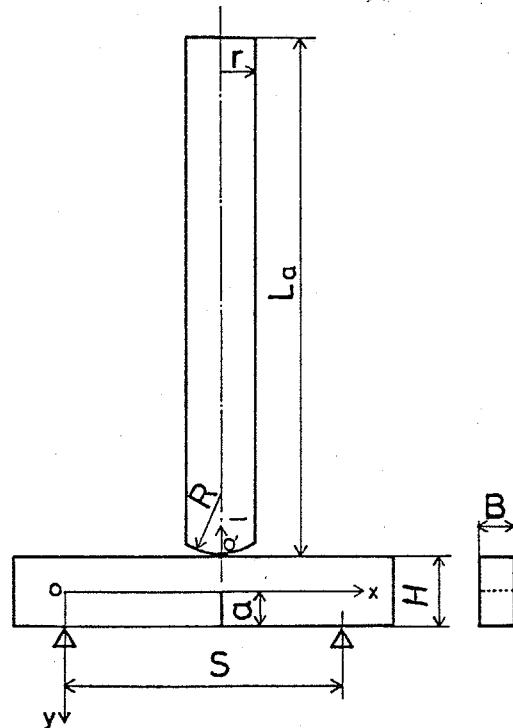
となる。この場合の計算結果を図III-31～III-33 に実線で示した。簡便式による結果は有限要素計算結果と良く一致している。

## (2) 衝撃荷重の評価

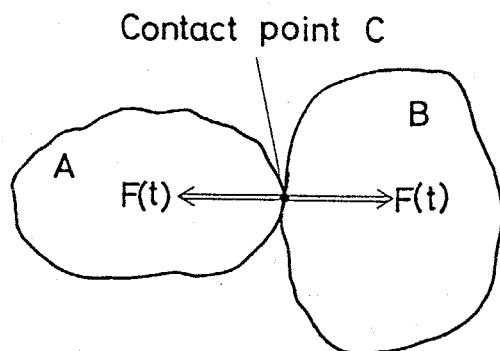
### Hertzの接触理論を利用した衝撃力の解析

実際の衝撃試験に際して、式(III-49)を用いて動的応力拡大係数を定めるためには、衝撃力  $F(t)$  を測定することが必要である。しかし、衝撃力は衝撃体と試験片との二体接触によって定まるので衝撃力を厳密に求めることは一般に困難な問題である。そこで、本節では、図III-34 のように試験片が落下円柱によって衝撃される場合を想定し、落下円柱と試験片の接触点近傍の局所変形に対しても Hertz の接触理論を利用して近似的な解法<sup>(22)</sup>によて衝撃力を解析する。

図III-35 に示すように 2 物体 A, B が相対速度  $v_0$  で衝突する場合を考



図III-34 落下有するはと端面に曲率を有する円柱の衝撃モデル



図III-35 衝突モデル

え、C点でA, Bそれぞれに作用する力を $F(t)$ とする。衝撃速度が固体内の波動伝播速度に比較して十分小さくなることを仮定すれば<sup>(23)</sup>式(III-54)は

$$F(t) = R_C [v_0 t - \eta_A(t) - \eta_B(t)]^{3/2} \quad (\text{III-54})$$

で与えられる。

$$\eta_A(t) = \int_0^t F(\tau) h_A(t-\tau) d\tau \quad (\text{III-55a})$$

$$\eta_B(t) = \int_0^t F(\tau) h_B(t-\tau) d\tau \quad (\text{III-55b})$$

であり、 $h_A(t)$ ,  $h_B(t)$ は、それぞれC点における固体A, Bの変位に関する衝撃応答関数である。また、 $R_C$ は材料定数ならびに接触部の形状によって決定されるHertzの接触ばね定数である。式(III-54)を $F(0)=0$ の初期条件のとて解くことによつて任意時刻の $F(t)$ を求めることがができる。

図III-34のような自由円柱の端面の中心 $O'$ に単位インペルス力が加わる場合を考え、端面からわずかに入った円柱の断面では、応力および変位が一様に分布すると仮定すると、任意位置における縦変位の衝撃応答関数 $h_A(l, t)$ は次式で与えられる

<sup>(22)</sup>

$$h_A(l, t) = \frac{C_a}{A_a E_a} \left( \frac{C_a}{L_a} t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{L_a} l \sin \frac{n\pi C_a}{L_a} t \right) \quad (\text{III-56})$$

ただし、

$$C_a = \sqrt{\frac{E_a}{\rho_a}} \quad (\text{III-57})$$

であり、 $\rho_a$ ,  $E_a$ ,  $L_a$ ,  $C_a$ は、それぞれ円柱の密度、継弾性係数

、断面積、長さおよび綫波の伝播速度である。これより、荷重力  $F(t)$  を受けたときの衝撃端面 ( $\ell=0$ ) の変位は

$$\eta_A(t) = \frac{Ca^2}{A_a E_a L_a} \int_0^t F(\tau) (t-\tau) d\tau + \frac{Ca}{A_a E_a} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t F(\tau) \sin \left\{ \frac{n\pi Ca}{L_a} (t-\tau) \right\} d\tau. \quad (\text{III-58})$$

で与えられる。試験片の衝撃応答関数  $\eta_B(\zeta, t)$  は、式(III-36)より  $F(t) = \delta(t)$  のときの  $u_g(\zeta, t)$  を計算することによると

$$\eta_B(\zeta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m(\zeta) Y_m(1/2)}{\omega_m W_m S} \sin \omega_m t \quad (\text{III-59})$$

で表わされる。したがって、衝撃荷重  $F(t)$  が作用する場合の  $\zeta = \frac{1}{2}$  における変位  $\eta_B(t)$  は

$$\eta_B(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^2(1/2)}{\omega_m W_m S} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_m (t-\tau) d\tau \quad (\text{III-60})$$

によって求められる。円柱は、衝突端面に曲率を有し、その半径を  $R$  とすれば Hertz の接触ばね定数  $k_C$  は

$$k_C = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{R}}{\frac{1-v_a^2}{E_a} + \frac{1-v^2}{E}} \quad (\text{III-61})$$

で与えられる。<sup>(22)</sup>

式(III-58), (III-60), (III-61)を式(III-54)に代入して得られる積分方程式を解くことにより、接触力  $F(t)$  を求めることができる。このようにして得られた  $F(t)$  を式(III-49)に代入して計算することにより動的応力拡大係数を求めることができることができる。したがって、落下円柱の衝突速度  $v_0$  が与えられていれば、動的応力拡大係数の時間的变化を求めることができることである。

### 数値計算例

非線形積分方程式(III-54)を解析的に解くことは困難であるので、数値解法を用いた。すなはち、時間軸 $t$ を微小幅 $\Delta t$ に分割(2), 一般に  $F(i\Delta t)$  [ $i=0 \sim n, F(0)=0$ ] が既知とすれば  $F((n+1)\Delta t)$  は適当な初期値から出発して方程式の两边がほぼ等しくなるまで逐次近似して求めることとする。<sup>(23)</sup> 他の諸式の値はこのようにして求めた  $F(i\Delta t)$  を用いて計算することとする。

計算に用いた諸定数を表III-4に示す。  $L_a=1.5m$  の場合につれて、式(III-58), (III-60)の総和項の項数 $n, m$  および時間きざみ $\Delta t$ を変化させた場合の接触力  $F(t)$  の計算結果を図III-36に示す。ま

た、衝撃力は通常、円柱に貼付したひずみゲージの出力波形から推定されるので、円柱の先端より  $0.1m$  の位置におけるひ

#### ○円柱(材質 S45C)

$$E_a = 206 \text{ GPa/m}^2$$

$$\rho_a = 7.8 \text{ Mg/m}^3$$

$$v_a = 0.3$$

$$R = 0.1 \text{ m}$$

$$L_a = 1.5 \text{ m} \text{ または } 0.75 \text{ m}$$

#### ○試験片(材質 S45C)

$$S = 80 \text{ mm}$$

$$B = 10 \text{ mm}$$

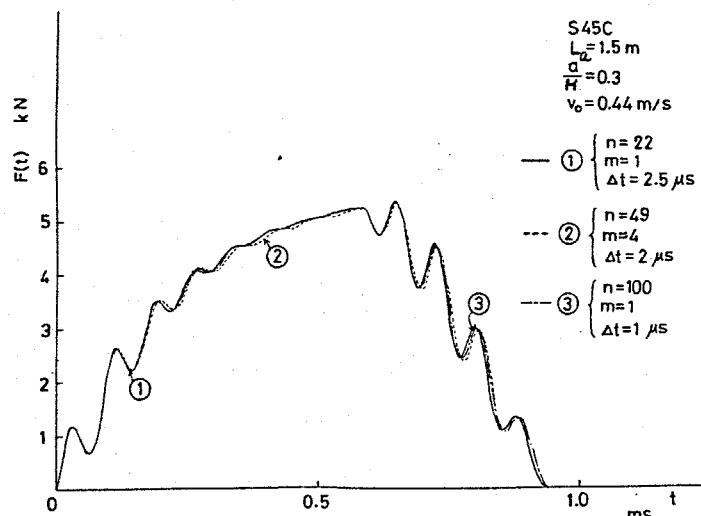
$$H = 20 \text{ mm}$$

$$E = 206 \text{ GPa/m}^2$$

$$\rho = 7.8 \text{ Mg/m}^3$$

$$V = 0.3$$

表III-4 計算に用いた諸定数



図III-36 接触力  $F(t)$  の収束性

すみ  $\varepsilon(0.1, t)$  を計算した結果を図III-37に示す。円柱棒の任意位置におけるひずみは式(III-58)より

$$\varepsilon(l, t) = -\frac{2Ca}{A_a E_a l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{L_a} l \int_0^t F(\tau) \sin \frac{n\pi Ca}{L_a} (t-\tau) d\tau \quad (\text{III-62})$$

図には、ひずみに断面積および綫弾性係数を乗じて力の次元とし、さらに圧縮ひずみであるために負号をつけた値を描いて接触力  $F(t)$  と比較できるようにしてある。これらの図より落下円柱の長さが  $1.5m$  の場合

合には、 $n=22, m=1$ ,

$\Delta t = 2.5 \mu s$  を用いて計算

すれば十分な精度が得ら

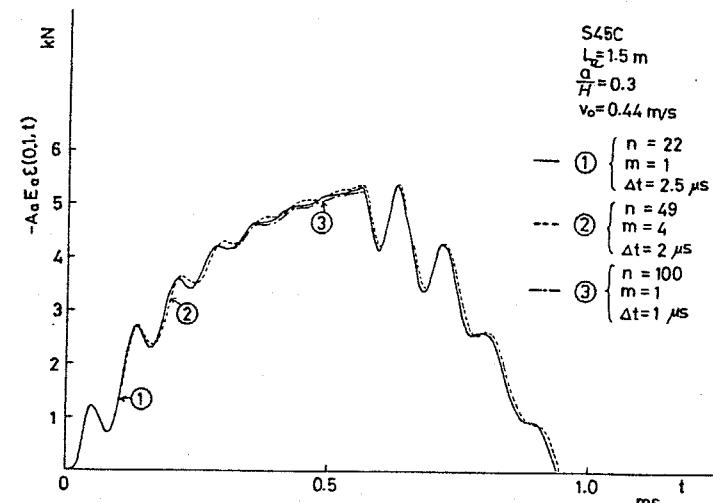
れることがわかる。同様な検討により  $L_a = 0.75m$

の場合には、 $\Delta t = 1.25 \mu s$

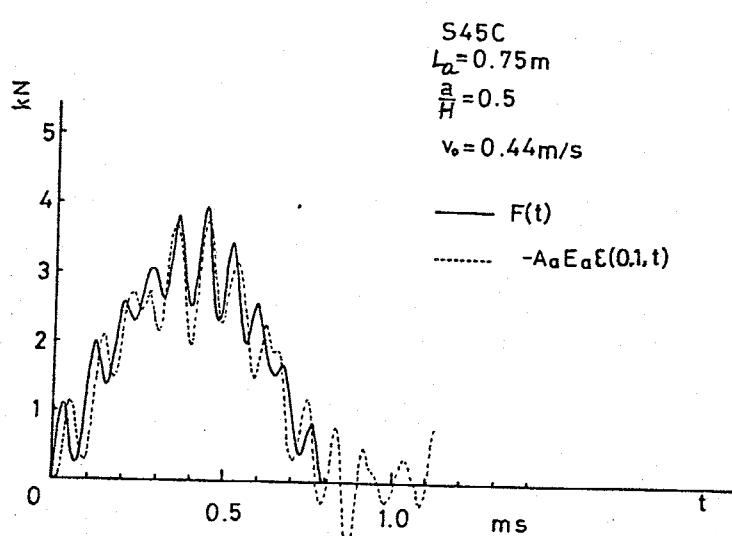
を用いて計算した。

円柱の長さが  $0.75m$  と  $1.5m$  の2種類の場合について、接触力  $F(t)$  やび衝撃端面から  $0.1m$  の位置におけるひずみの値

より換算された圧縮力  $-A_a E_a \varepsilon(0.1, t)$  の計算結果

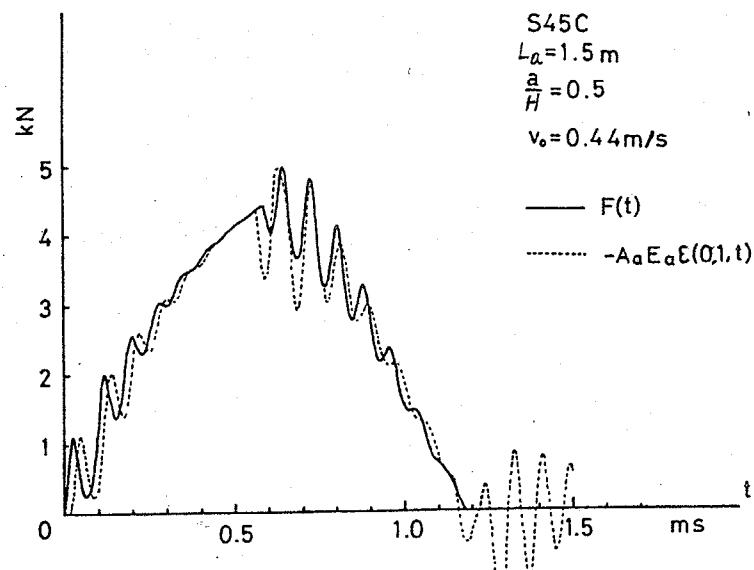


図III-37 円柱のひずみ  $\varepsilon(0.1, t)$  の収束性

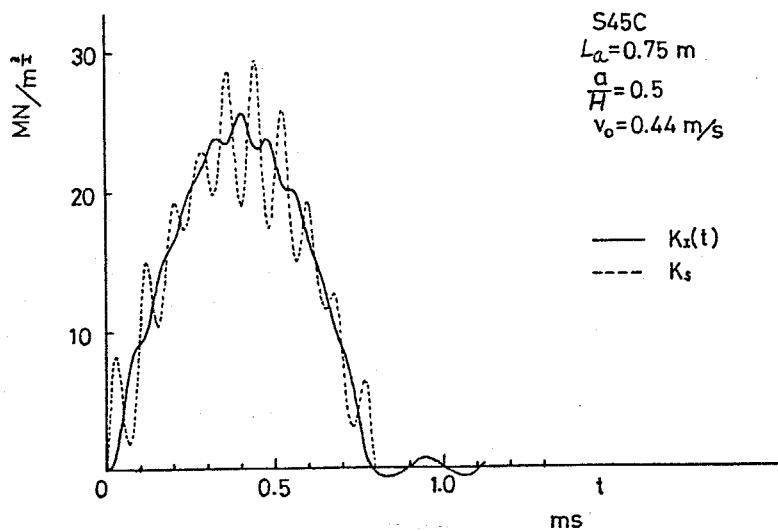


図III-38 接触力と円柱の圧縮力 ( $x = 0.1m$ ) の比較

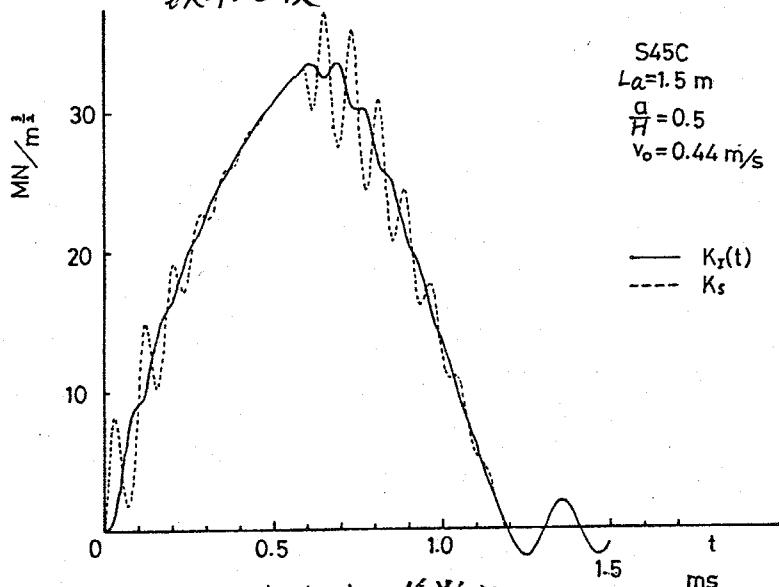
を図III-38, III-39に示す。なお、計算においては無次元化されたき裂長さ  $a/H = 0.5$  を用いられている。これらの場合に、円柱の  $l=0.1\text{m}$  位置の圧縮力は振動波形の後の方で接触力と若干の差はあるが、両者はほぼ一致しているとみなすことができる。したがって、接触点近傍に貼付されたひずみゲージの出力波形から接触力を十分な精度で決定することができる。なお、接触力がゼロになった後も端面における応力波の反射が繰り返されるので、円柱内には



図III-39 接触力と円柱の圧縮力 ( $x=0.1a$ ) の比較



図III-40 動的応力拡大係数と静的応力拡大係数の比較



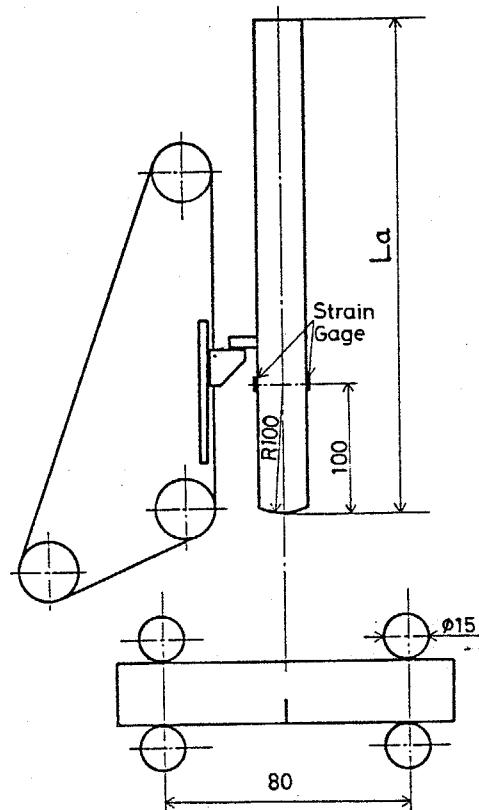
図III-41 動的応力拡大係数と静的応力拡大係数の比較

圧縮力が存在している。また、落下棒の長短によって接触時間が変化することがわかる。

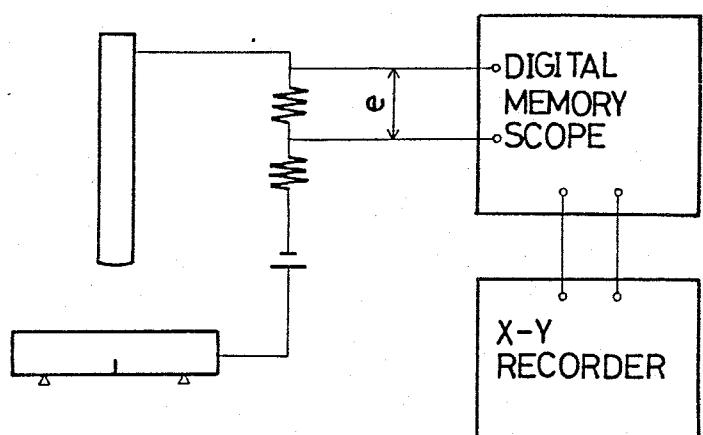
式(III-49)で求められる動的応力拡大係数  $K_I(t)$  と式(III-44)の静的な公式から求められる応力拡大係数  $K_S$  の相違を図III-40, III-41において比較している。両者の間には最大値において約16%の差が生じている。

### (3) 実測結果との比較

前節までの解析結果の精度を確かめるために圧縮力および動的応力拡大係数の測定を行った。使用した実験装置の概略を図III-42に示す。モータを駆動してスプロケット・チェーン系を回転させ、フックにより円柱を持ち上げる。設定高さになるとフックが解放され円柱が落下するようになつてゐる。なお、本試験機は衝撃疲労試験を行うために試作されたもので、今回の測定においては、手動により円柱を落下させた。試験



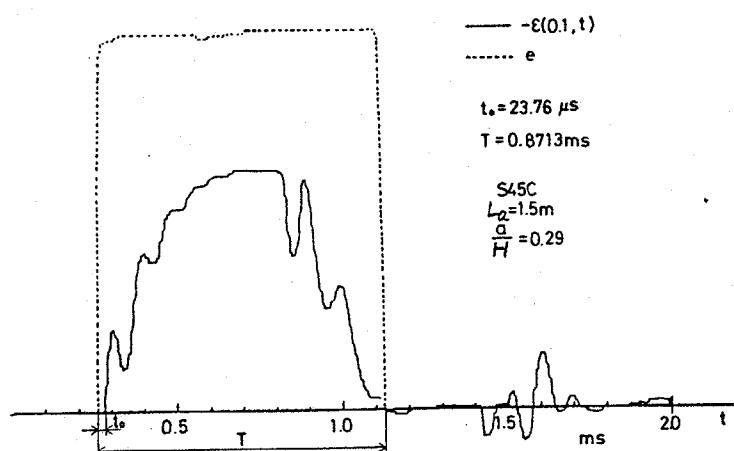
図III-42 衝撃試験装置概略図



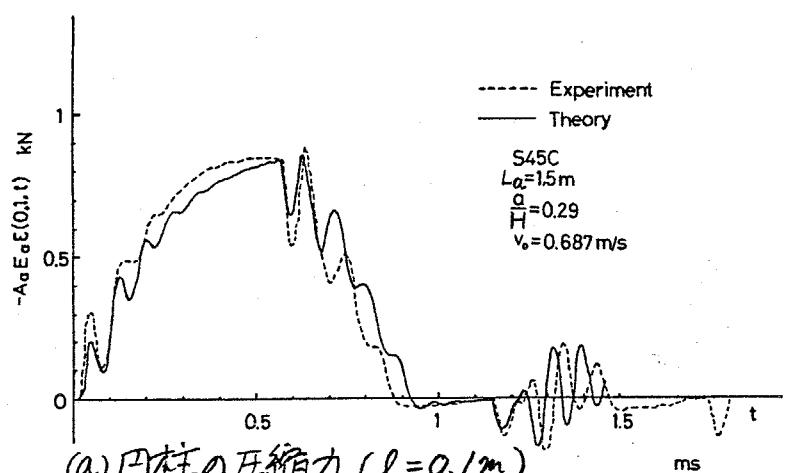
図III-43 接触回路

片の形状、材質等は表Ⅲ-4に示されてい。

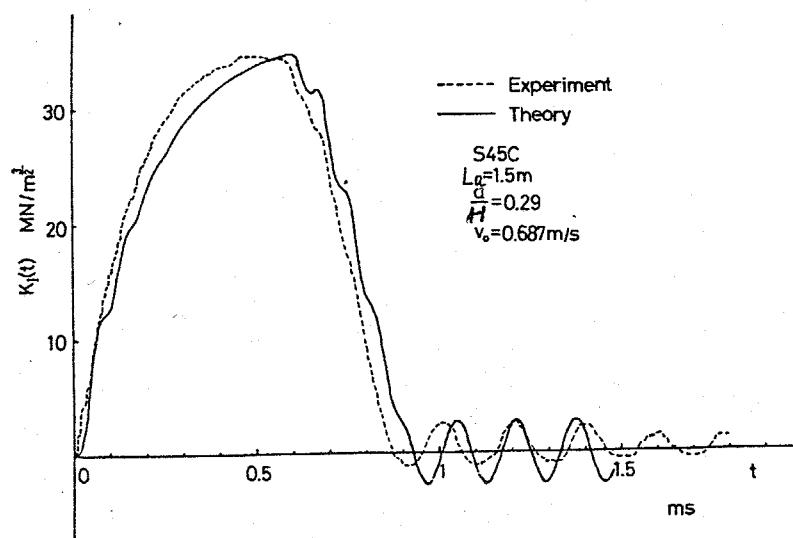
図Ⅲ-43に示す接触回路によって、接触開始からひずみゲージ出力開始までの時間 $t_0$ および接觸時間 $T$ を測定した。これらの測定結果を出力波形とともに図Ⅲ-44に示す。図Ⅲ-42に示す位置に貼布されたひずみゲージの出力波形から換算された圧縮力と、式(III-62)で与えられるひずみより換算された圧縮力を図Ⅲ-45(a)に示す。実測波形は立ち上かりを原点からただけずらして描かれていく。また、式(III-54)の計算に際しては光電



図Ⅲ-44 接触開始点および接觸時間の測定結果



(a) 内柱の圧縮力 ( $l=0.1/m$ )



(b) 動的応力拡大係数

図Ⅲ-45 実測波形と解析結果の比較

式ピックアップを用いて測定した衝突速度 $v_0$ を用いた。両者の結果は良く一致している。

図3-45(b)に動的応力拡大係数の実測波形と式(III-49)により求めた解析結果を示す。き裂先端近傍のひずみと動的応力拡大係数は比例関係にあり、その比例定数は静的な場合と等しいと考えられる。そこで、静的試験によって得られた校正関係を用いて、き裂先端近傍に貼布したひずみゲージの出力波形から応力拡大係数に換算した結果が実測波形として示されている。実測波形と解析結果は良く一致しており、前節における解釈法が有効であることを示している。

本節では、円柱による衝撃について検討したが、衝撃体の衝撃応答関数が既知であれば式(III-54)を解くことができるのと、球による衝撃等、他の場合にも本手法を適用することが可能である。

### 3.3. 高速で進展するき裂の動的応力拡大係数

およびエネルギー解放率

#### 3.3.1. はじめに

せいい性破壊において、き裂の分岐、わん曲、停止などの現象がしばしば観察されている。この様な進展中のき裂の動的挙動

に関する研究は近年利用度の高まっているせい性材料の加工や大形構造材のせい性破壊と関連するき裂停止の問題を研究するための基礎になると考えられる。本節では、实用上最も重要なと思われる閉口形変形（Mode I 変形）の場合を中心に高速き裂進展問題の検討を行う。

図III-46に示すように線形弾性体中を速度  $v$  で進展するき裂の先端近傍の応力・変位場は次式で与えられる。<sup>(24-26)</sup> ただし、き裂進展速度  $v$  は表面波の伝播速度  $C_R$  よりも小さいとする。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{K_I(t, v)}{2(\pi r)^{1/2} R(\beta_0)} \begin{Bmatrix} (2-\beta_0^2)(2-2k^2\beta_0^2+\beta_0^2)X_+ - 4(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(1-\beta_0^2)^{1/2}Y_+ \\ -(2-\beta_0^2)^2X_+ + 4(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(1-\beta_0^2)^{1/2}Y_+ \\ 2(2-\beta_0^2)(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(X_- - Y_-) \end{Bmatrix} \quad (III-63a)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{K_I(t, v)}{\mu R(\beta_0)} \left( \frac{r}{\pi} \right)^{1/2} \begin{Bmatrix} (2-\beta_0^2)V_+ - 2(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(1-\beta_0^2)^{1/2}W_+ \\ -(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(2-\beta_0^2)V_- + 2(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}W_- \end{Bmatrix} \quad (III-63b)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

ここで、

$$\beta_0 = v/C_2$$

$$(III-64a)$$

$$k^2 = C_2^2/G^2 = \begin{cases} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & : \text{平面ひずみ状態} \\ \frac{1-\nu}{2} & : \text{平面応力状態} \end{cases}$$

$$(III-64b)$$

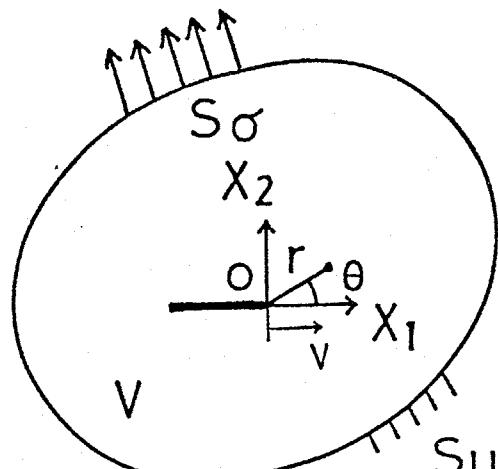
$$V_{\pm} = [(1-k^2\beta_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \pm \cos \theta]^{1/2} \quad (III-64c)$$

$$(III-64d)$$

$$W_{\pm} = [(1-\beta_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \pm \cos \theta]^{1/2}$$

$$(III-64e)$$

$$X_{\pm} = \frac{[(1-k^2\beta_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \pm \cos \theta]^{1/2}}{(1-k^2\beta_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}$$



図III-46 速度  $v$  で進展するき裂

$$Y_{\pm} = \frac{[(1-\beta_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \pm \cos \theta]^{1/2}}{(1-\beta_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \quad (III-64f)$$

$$R(\beta_0) = 4(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(1-\beta_0^2)^{1/2} - (2-\beta_0^2)^2 \quad (\text{III-64g})$$

であり、 $C_1, C_2$ は、それぞれ縦波および横波の伝播速度である。高速き裂における応力は  $1/\sqrt{v}$  の特異性を持つことは、静止き裂の場合と同様であるが、動的応力拡大係数  $K_I(t, v)$  やび応力・変位場の分布形はき裂進展速度に依存している。なお、 $\beta_0 \rightarrow 0$  とすると式(III-63)は静的な解析によって得られた結果と一致する。き裂先端の応力・変位場が式(III-63)のように求められているので、今積分は式(II-66)より

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{1}{4k(1-k^2)} A_I(v) K_I^2(t, v) \\ &= G \end{aligned} \quad (\text{III-65})$$

で表わされる。ここで、

$$A_I(v) = \frac{2(1-k^2)\beta_0^2(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}}{R(\beta_0)} \quad (\text{III-66})$$

であり、 $G$  は動的エネルギー解放率<sup>(1)</sup>である。 $v \rightarrow 0$  とすると、 $A_I(v) \rightarrow 1$  となり、式(III-65)の関係式は式(III-3)と一致する。式(III-65)より、今、 $K_I(t, v)$  やび  $G$  は一一に対応してることがわかる。したがって、弾性き裂モデルを用いて破壊現象を論じる場合には、今、 $K_I(t, v)$  やび  $G$  を用いた破壊の条件式は互に等価である。ここで、本節では特に問題が生じない限り今までの習慣に従い、 $K_I(t, v)$  やび  $G$  を用いて議論する。

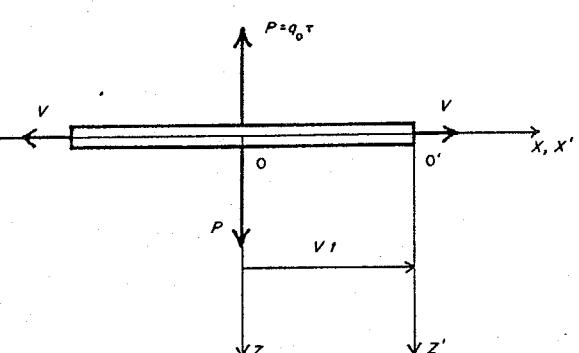
動的な破壊の問題に関してと静的な場合と同様に、き裂を含む物体の応力解析を行い、動的応力拡大係数  $K_I(t, v)$  や動的工

エネルギー解放率  $G$  を具体的な形で求めることが必要である。そこで、本節ではまず、無限体中に発生したき裂が集中荷重を受け両側に一定速度で進展する二次元き裂モデルの解析を行ふ。無限体中を進展するき裂に関しては、このほかに種々の場合について解析されてい（<sup>1-3, 5, 6</sup>）が、数学的取扱いの複雑さのために有限体の問題については数値計算に頼らざるを得ない。そこで、前節で述べた特異要素を用いた有限要素法を有限体中を高速で進展するき裂の動的応力拡大係数の解析に適用できよう拡張する。また、本手法を用いた高速き裂進展のシミュレーションの方法を提案し、計算例を示す。最後に、き裂の分歧に及ぼす負荷形式の影響について破壊力学的に検討する。

### 3.3.2. 中央に集中荷重を受けて両側に進展するき裂

物体へのくさびの打込みや、小物体が衝突することによって生じるき裂を想定して、図III-44

に示すような二次元き裂モデルの解析を行う。すなわち、無限体中に発生したき裂が中央に時間とともに増大する集中荷重を受けるながら両側に一定速度ひで進展するき裂モデルの解析を行う。



図III-47 中央に集中荷重を受けて進展する二次元き裂モデル

まず、物体が均質等方性の線形弾性体である場合について解析を行い、動的応力拡大係数および動的エネルギー解放率を求め、一様引張力が働くことによる無限体中を両側に一定速度で進展する場合の Broberg<sup>(27)</sup> の解と比較する。

つぎに、現実の材料では、せん性破壊をする際にとき裂が進展するときに、その先端に塑性変形を伴う場合があると考えられるので、塑性変形を考慮した解析を行つ。この際、Dugdale<sup>(28)</sup> が提案し、Goodier と Field<sup>(29)-(31)</sup> が動的なき裂の問題に拡張した仮定を用ひる。すなはち、図Ⅲ-48 に示すように降伏域の幅は狭く、その中の物質は一様引張応力  $\sigma_y$  を受け、降伏域先端で応力の特異性がないという条件から降伏域の長さが決定できることとするものである。

最後に、これらの結果を用ひて、実際にき裂が進展する際の挙動について定性的な考察を行う。

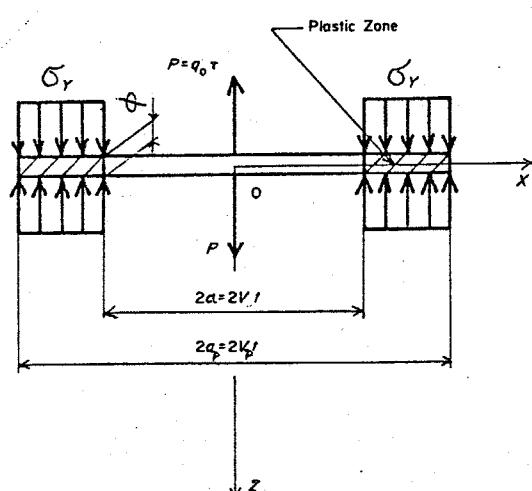
### (1) 記号

本節で用ひるおもる記号をつぎに示す。

$O-xy$  区：静止直角座標系

$O'-x'y'z'$ ：き裂先端に原点を持つ移動座標系

$\rho$ ：物体の密度



図Ⅲ-48 Dugdaleの仮定を用いた二次元き裂モデル

$\lambda, \mu$ : ラメ定数	$2a$ : き裂長さ = $2vt = 2\beta_1 t$
$v$ : ポアソン比	$v_p$ : 降伏域の進展速度
$E$ : 縦弾性係数	$\beta_p$ : 降伏域の進展速度と 縦波の伝播速度の比 = $v_p/C_1$
$C_1$ : 縦波の伝播速度 = $[(\lambda+3\mu)/\rho]^{1/2}$	
$C_2$ : 横波の伝播速度 = $[\mu/\rho]^{1/2}$	$2a_p$ : 降伏先端間の長さ = $2v_p t = 2\beta_p t$
$\kappa$ : 横波と縦波の伝播速度の比 = $C_2/C_1$	
$t$ : 時間	$P$ : 荷重 = $g_0 t$
$\tau$ : 等価的な時間 = $C_1 t$	$\sigma_y$ : 降伏応力
$v$ : き裂進展速度	$\phi$ : き裂先端の開口変位
$\beta_1$ : き裂進展速度と縦波の伝播速度の比 = $v/C_1$	$U(t)$ : 単位階段関数
	$\delta(x)$ : デルタ関数

## (2) 線形弾性体モデルの解析

### き裂面上の応力 $\sigma_{zz}$ と変位 $u_{zz}$ の導出

動的エネルギー解放率はき裂面上の応力と変位から求めること  
ができるので、まず、応力と変位について解析する。平面ひずみ  
状態について考えると、平面応力状態の場合の変位は、ポア  
ソン比  $\nu$  を  $\nu/(1+\nu)$  で置き換えることによって求められる。

本モデルは、 $z=0$  に関する対称性から  $z=0$  の半無限体の  
混合境界値問題に帰着され、き裂面上 ( $z=0$ ) の応力  $\sigma_{zz}$  と変  
位  $u_{zz}$  は次の手順で求めることができる。

(A)  $z \geq 0$  の半無限体を考え、 $x=z=0$  に  $t=0$  から時間と

とともに増大する集中力  $\sigma = q_0 \tau U(t)$

$\delta(x) n_z$  ( $n_z$ :  $z$  軸方向の単位ベクトル) が働く場合の  $z$  軸方向の変

位  $u_z^A$  を求める (図III-49 参照)。

(B) (A) の解と種々の進展速度  $v'$

を持つ異なった圧力  $\sigma$  による変位

$u_z^B$  (図III-50 参照) を重ね合わせる

ことにより  $z=0, |x| > vt$  では  $u_z$

$= 0$  で、 $x=z=0$  では応力が  $-q_0 \tau$

$U(t) \delta(x)$  となるようになる。この

ときの  $|x| > vt$  の応力が求めると

解である (図III-51 参照)。

(C) (B) で求めた応力  $\sigma_z$  の解を用

いり、 $z=0, |x| < vt$  の変位

$u_z$  を求める。

以上の具体的な手続きを順

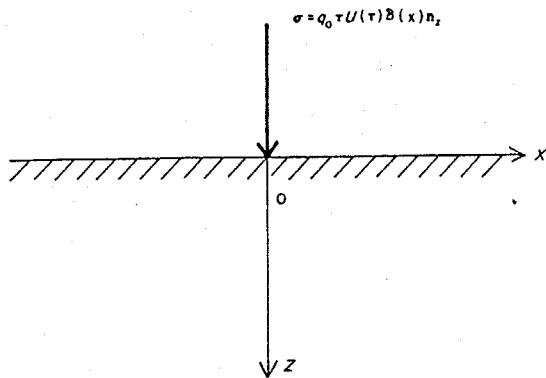
に示す。

(A) 図III-49 の  $u_z^A$  は、ポテン

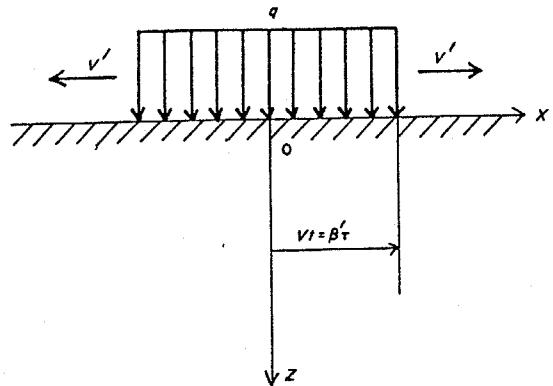
シャル関数として

$$\phi = \operatorname{div} u \quad (\text{III-67a})$$

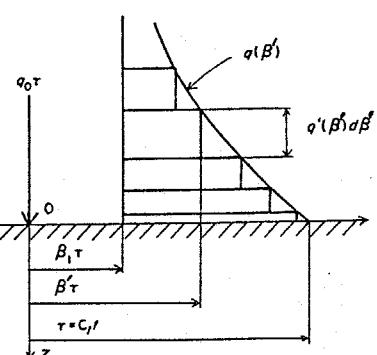
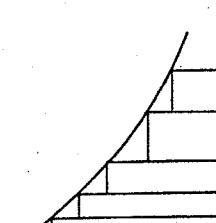
$$\psi = \operatorname{rot} u \quad (\text{III-67b})$$



図III-49 時間とともに増大する集中荷重を受けた半無限体



図III-50 両側に速度  $v'$  で広がる圧力  $\sigma$  を受けた半無限体



図III-51 集中荷重を受けた二次元き裂モデルに相当する半無限体表面の応力分布

を用いて表わした釣合の方程式 ( $\mathbf{u}$ : 変位ベクトル)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau^2} = \text{grad } \phi - k^2 \text{rot } \psi \quad (\text{III-68})$$

を境界条件

$$\sigma = g_0 \tau U(\tau) \delta(x) \mathbf{n}_z : z = 0 \quad (\text{III-69})$$

の下で解くことにようり、

$$\frac{\partial^2 u_z^A}{\partial \tau^2} = - \frac{g_0}{4\pi k^2 \rho C_1 |x|} \text{Re } F\left(\frac{\tau^2}{x^2}\right) : z = 0 \quad (\text{III-70})$$

と求められる。ここで

$$F\left(\frac{\tau^2}{x^2}\right) = \frac{\sqrt{\frac{\tau^2}{x^2} - 1}}{\left(\frac{1}{R^2} - \frac{\tau^2}{x^2}\right)^2 + \frac{\tau^2}{x^2} \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{x^2}} \sqrt{\frac{1}{R^2} - \frac{\tau^2}{x^2}}} \quad (\text{III-71})$$

である。 $u_z^A$  は式(III-70)をてて2回積分することにより求められるが、以下の解析のためにには、その必要はない。

(B) 表面  $z = 0$  上に圧力  $d\sigma/\beta' = f'(\beta')d\beta'$  が次式 (ここで  $\beta' = \tau/x$ ) である (図III-50参照)

$$d\sigma_z = \begin{cases} 0 & : |x| < \beta_1 \tau \\ -f'(\beta')d\beta' & : \beta_1 \tau < |x| < \beta' \tau \\ 0 & : \beta' \tau < |x| \end{cases} \quad (\text{III-72})$$

で表められるよな分布で作用するときの  $z = 0$  上の変位  $u_z$  の2階微分  $\partial^2 u_z / \partial \tau^2$  は、Broberg<sup>(27)</sup>によて図III-50の解  $\partial u_z^B / \partial \tau^2$  を重ね合わせることにより、次のように求められていく。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau^2} = & - \frac{f'(\beta')d\beta'}{2\pi R^4 \rho C_1 |x|} \left[ \left\{ \frac{\beta'}{1 - \beta'^2 (\tau^2/x^2)} - \frac{\beta_1}{1 - \beta_1^2 (\tau^2/x^2)} \right\} \text{Re } F\left(\frac{\tau^2}{x^2}\right) \right. \\ & \left. + \frac{\pi |x|}{2\tau} \left\{ S\left(\beta - \frac{|x|}{\tau}\right) \beta' \text{Im } F\left(\frac{1}{\beta'^2}\right) - S\left(\beta_1 - \frac{|x|}{\tau}\right) \beta_1 \text{Im } F\left(\frac{1}{\beta_1^2}\right) \right\} \right] : z = 0 \quad (\text{III-73}) \end{aligned}$$

したがって、式(III-72)の  $d\sigma_Z$  と集中力  $g_0 \tau U(\tau) \delta(x) n_Z$  を重ね合わせたとき  $Z=0$ ,  $|x| > \beta_1$  で  $\partial^2 u_Z / \partial \tau^2 = 0$  のための条件として,  $x^2/\tau^2 = r$ ,  $\beta'^2 = s$ ,  $g'(\beta') = g(s)$  と置くことにより、つぎの特異積分方程式

$$a(r)g(r) + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1^2}^r \frac{b(s)g(s)}{s-r} ds = g(r) : \beta_1^2 < r < 1 \quad (\text{III-74})$$

が得られる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} a(r) &= -\frac{\operatorname{Im} F(1/r)}{\operatorname{Re} F(1/r)} (r - \beta_1^2), & b(r) &= r - \beta_1^2 \\ g(r) &= \frac{g_0}{\pi} \left(1 - \frac{\beta_1^2}{r}\right) + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_1^2}^r \frac{\sqrt{s} - \beta_1}{\sqrt{s}} g(s) ds \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-75})$$

である。

式(III-75)の積分方程式は、Muskhelishvili<sup>(32)</sup>を参照して、

$$g(r) = \left\{ \begin{aligned} &\left[ A(\beta_1) - \frac{g_0 \beta_1^3}{2\pi R^2 (1-R^2) r} \right] \frac{(r-2R^2)^2 - 4R^3 \sqrt{(1-r)(R^2-r)}}{r \sqrt{(1-r)(r-\beta_1^2)^3}} : \beta_1^2 < r < R^2 \\ &\left[ A(\beta_1) - \frac{g_0 \beta_1^3}{2\pi R^2 (1-R^2) r} \right] \frac{(r-2R^2)^2}{r \sqrt{(1-r)(r-\beta_1^2)^3}} : R^2 < r < 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-76})$$

で求められる。ここで、

$$A(\beta_1) = \frac{g_0 \beta_1}{2\pi R^2 (1-R^2)} \left[ 1 + \frac{Z_2(\beta_1)}{Z_1(\beta_1)} \right] \quad (\text{III-77a})$$

$$\begin{aligned} Z_1(\beta_1) &= \frac{2[(1-4R^2)\beta_1^2 + 4R^4]}{\beta_1(1-\beta_1^2)} K(\sqrt{1-\beta_1^2}) + \frac{2[\beta_1^4 - 4R^2(1+R^2)\beta_1^2 + 8R^4]}{\beta_1^3(1-\beta_1^2)} E(\sqrt{1-\beta_1^2}) \\ &\quad - \frac{8R^2}{\beta_1} K(\sqrt{1-\beta_1^2/R^2}) + \frac{16R^4}{\beta_1^3} E(\sqrt{1-\beta_1^2/R^2}) \end{aligned} \quad (\text{III-77b})$$

$$Z_2(\beta_1) = \left( \frac{8R^4}{3\beta_1} - 2\beta_1 \right) K(\sqrt{1-\beta_1^2}) - \left( \frac{16R^4}{3\beta_1^3} + \frac{16R^4}{3\beta_1} - \frac{8R^2}{\beta_1} \right) E(\sqrt{1-\beta_1^2})$$

$$-\frac{8k^2}{3\beta_1} K \sqrt{1-\beta_1^2/k^2} + \left( \frac{16k^4}{3\beta_1^3} - \frac{8k^2}{3\beta_1} \right) E(\sqrt{1-\beta_1^2/k^2}) \quad (\text{III-77c})$$

$$K(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \theta}} : \text{第一種の完全橋円積分} \quad (\text{III-77d})$$

$$E(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \theta} d\theta : \text{第二種の完全橋円積分} \quad (\text{III-77e})$$

である。

$Z=0$ における $Z$ 軸方向の応力 $\sigma_{ZZ}$ は、式(III-72)より

$$\sigma_{ZZ}(x) = - \int_{|x|/\tau}^1 g'(\beta') d\beta' = -\frac{1}{2} \int_{|x|/\tau}^1 \frac{g(r)}{\sqrt{r}} dr : |x| > \beta_1 \tau \quad (\text{III-78})$$

であるから、式(III-76)を代入して  $|x|/\tau = \tilde{z}$  と置く

$$\sigma_{ZZ}(\tilde{z}) = -\frac{1}{2} A(\beta_1) \left[ \int_{\tilde{z}^2}^1 \frac{(r-2k^2)^2}{r\sqrt{r(r-1)(1-\beta_1^2)^3}} dr - 4k^3 \int_{\tilde{z}^2}^{k^2} \frac{\sqrt{k^2-r}}{r\sqrt{r(r-\beta_1^2)^3}} dr \right]$$

$$+ \frac{8_0 \beta_1^3}{4\pi k^2 (1-k^2)} \left[ \int_{\tilde{z}^2}^1 \frac{(r-2k^2)^2}{r^2 \sqrt{r(r-1)(1-\beta_1^2)^3}} dr - 4k^3 \int_{\tilde{z}^2}^{k^2} \frac{\sqrt{k^2-r}}{r^2 \sqrt{r(r-\beta_1^2)^3}} dr \right]$$

$$\tilde{z} > \beta_1, Z=0 \quad (\text{III-79})$$

となる。ただし、 $r < \tilde{z}$  のときは  $4k^3$  のかかる二つの積分はゼロとなる。上式は、橋円積分

$$F(g, \alpha) = \int_0^g \frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \theta}} : \text{第一種の橋円積分} \quad (\text{III-80a})$$

$$E(g, \alpha) = \int_0^g \sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \theta} d\theta : \text{第二種の橋円積分} \quad (\text{III-80b})$$

を用いて次のように表わすことができる。

$\beta_1 < \tilde{z} < k$  のとき

$$\sigma_{ZZ}(\tilde{z}) = \frac{-8_0 \beta_1}{4\pi k^2 (1-k^2)} \frac{Z_2(\beta_1)}{Z_1(\beta_1)} \left\{ \frac{2[(1-4k^2)\beta_1^2 + 4k^4]}{\beta_1^2 (1-\beta_1^2)} F\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\tilde{z}^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\beta_1^2}\right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2[\beta_1^4 - 4k^2(1+k^2)\beta_1^2 + 8k^4]}{\beta_1^4(1-\beta_1^2)} E(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\tilde{z}^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\beta_1^2}) \\
& - \frac{8k^2}{\beta_1^2} F(\sin^{-1}\sqrt{\frac{k^2-\tilde{z}^2}{k^2-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\frac{\beta_1^2}{k^2}}) + \frac{16k^4}{\beta_1^4} E(\sin^{-1}\sqrt{\frac{k^2-\tilde{z}^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\frac{\beta_1^2}{k^2}}) \\
& + \frac{2(\beta_1^2 - 2k^2)^2}{\beta_1^4(1-\beta_1^2)} \sqrt{\frac{1-\tilde{z}^2}{\tilde{z}^2-\beta_1^2}} \tilde{z} + \frac{8k^4}{\beta_1^4} \frac{\sqrt{(1-\tilde{z}^2)(\tilde{z}^2-\beta_1^2)}}{\tilde{z}} - \frac{8k^3}{\beta_1^4} \sqrt{\frac{k^2-\tilde{z}^2}{\tilde{z}^2-\beta_1^2}} \tilde{z} \\
& - \frac{8k^3}{\beta_1^4} \frac{\sqrt{(k^2-\tilde{z}^2)(\tilde{z}^2-\beta_1^2)}}{\tilde{z}} \} + \frac{8_0\beta_1}{4\pi k^2(1-k^2)} \left\{ \left( \frac{8k^2}{3\beta_1^2} - 2 \right) F(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\tilde{z}^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\beta_1^2}) \right. \\
& \left. - \left( \frac{16k^4}{3\beta_1^4} + \frac{16k^4}{3\beta_1^2} - \frac{8k^2}{\beta_1^2} \right) E(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\tilde{z}^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\beta_1^2}) - \frac{8k^2}{3\beta_1^2} F(\sin^{-1}\sqrt{\frac{k^2-\tilde{z}^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\frac{\beta_1^2}{k^2}}) \right. \\
& \left. + \left( \frac{16k^4}{3\beta_1^4} - \frac{8k^2}{3\beta_1^2} \right) E(\sin^{-1}\sqrt{\frac{k^2-\tilde{z}^2}{k^2-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\frac{\beta_1^2}{k^2}}) + \left( \frac{16k^4}{3\beta_1^4} + \frac{16k^4}{3\beta_1^2} - \frac{8k^2}{\beta_1^2} \right) \frac{\sqrt{(1-\tilde{z}^2)(\tilde{z}^2-\beta_1^2)}}{\tilde{z}} \right. \\
& \left. + \frac{8k^4}{3\beta_1^2} \frac{\sqrt{(1-\tilde{z}^2)(\tilde{z}^2-\beta_1^2)}}{\tilde{z}^3} - \frac{8k^3}{\beta_1^2} \left[ \frac{2(k^2+\beta_1^2)}{3k^2\beta_1^2} - \frac{1}{k^2} \right] \frac{\sqrt{(k^2-\tilde{z}^2)(\tilde{z}^2-\beta_1^2)}}{\tilde{z}} \right. \\
& \left. - \frac{8k^3}{3\beta_1^4} \frac{\sqrt{(k^2-\tilde{z}^2)(\tilde{z}^2-\beta_1^2)}}{\tilde{z}^3} \right\} : z=0 \quad (\text{III}-81a)
\end{aligned}$$

$k < \tilde{z} < 1$  のとき

$$\begin{aligned}
G_z(\tilde{z}) = & \frac{-8_0\beta_1}{4\pi k^2(1-k^2)} \frac{Z_2(\beta_1)}{Z_1(\beta_1)} \left\{ \frac{2[(1-4k^2)\beta_1^2 + 4k^4]}{\beta_1^2(1-\beta_1^2)} F(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\tilde{z}^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\beta_1^2}) \right. \\
& - \frac{2[\beta_1^4 - 4k^2(1+k^2)\beta_1^2 + 8k^4]}{\beta_1^4(1-\beta_1^2)} E(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\tilde{z}^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\beta_1^2}) \\
& + \frac{2(\beta_1^2 - 2k^2)^2}{\beta_1^4(1-\beta_1^2)} \sqrt{\frac{1-\tilde{z}^2}{\tilde{z}^2-\beta_1^2}} \tilde{z} + \frac{8k^4}{\beta_1^4} \frac{\sqrt{(1-\tilde{z}^2)(\tilde{z}^2-\beta_1^2)}}{\tilde{z}} \\
& + \frac{8_0\beta_1}{4\pi k^2(1-k^2)} \left\{ \left( \frac{8k^2}{3\beta_1^2} - 2 \right) F(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\tilde{z}^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\beta_1^2}) \right. \\
& - \left( \frac{16k^4}{3\beta_1^4} + \frac{16k^4}{3\beta_1^2} - \frac{8k^2}{\beta_1^2} \right) E(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\tilde{z}^2}{1-\beta_1^2}}, \sqrt{1-\beta_1^2}) \\
& + \left( \frac{16k^4}{3\beta_1^4} + \frac{16k^4}{3\beta_1^2} - \frac{8k^2}{\beta_1^2} \right) \frac{\sqrt{(1-\tilde{z}^2)(\tilde{z}^2-\beta_1^2)}}{\tilde{z}^2} + \frac{8k^4}{3\beta_1^2} \frac{\sqrt{(1-\tilde{z}^2)(\tilde{z}^2-\beta_1^2)}}{\tilde{z}^3} \right\} \\
& : z=0 \quad (\text{III}-81b)
\end{aligned}$$

(C)  $|x|/r < \beta_1$  の 2 方向の変位の 2 階微分  $\partial^2 u_z / \partial r^2$  を求めるために、式(III-70)と式(III-73)を  $\beta'$  で積分してそれを加え合せて整理すると、

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} = -\frac{r \operatorname{Re} F(1/r)}{2\pi k^4 \rho C_1^2 |x|(r-\beta_1^2)} \left\{ \frac{\pi}{2} A(\beta_1) - \frac{8_0 \beta_1^2}{2r} - \frac{1}{2} \int_{\beta_1^2}^r \frac{s-\beta_1^2}{s-r} \varphi(s) ds \right\} \quad r < \beta_1^2 \quad (\text{III-82})$$

となる。さらに、式(III-76)の  $\varphi(r)$  を上式に代入して  $r^2$  2 回積分を行えば

$$u_z = \frac{|x| \sqrt{\beta_1^2 - r}}{\rho C_1^2 \beta_1^2 \sqrt{r}} \left[ A(\beta_1) - \frac{8_0 \beta_1}{\pi k^2 (1-k^2)} \right] + \frac{8_0 |x|}{4\pi k^2 (1-k^2) \rho C_1^2 \sqrt{r}} \ln \left| \frac{\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 - r}}{\beta_1 - \sqrt{\beta_1^2 - r}} \right| \quad r < \beta_1^2 \quad (\text{III-83})$$

が求められる。<sup>(脚注)</sup>

### 動的応力拡大係数および動的エネルギー解放率

き裂先端付近の応力  $\sigma_z$  の特異性を求めるために式(III-81)から有限項を省略すると

$$\sigma_z = D_1 K_I^* / \sqrt{2\pi x'} U(x') : z=0 \quad (\text{III-84})$$

となる。ただし、

---

(脚注) Afanas'ev ら<sup>(33)</sup>が同じ問題を別な方法で解析している。しかし、その解によると  $u_z$  が静的き裂と同一となる。これは、本文の式(III-83)の  $A(\beta_1)$  に相当する項が文献(33)では欠落しているためと思われる。

$$D_1 = \frac{Z_2(\beta_1)}{2k^2(1-k^2)\beta_1^2 Z_1(\beta_1)} \left[ 4k^3\sqrt{k^2-\beta_1^2} - \frac{(\beta_1^2-2k^2)^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \right] \quad (\text{III-85})$$

であり、 $K_I^*$  は本モデルに相当する静的な場合の応力拡大係数

$$K_I^* = P/\sqrt{\pi a} = g_0 t / \sqrt{\pi v_i t} \quad (\text{III-86})$$

である。したがって、動的応力拡大係数と静的応力拡大係数との比は

$$K_I/K_I^* = D_1 \quad (\text{III-87})$$

となる。き裂先端付近の変位  $u_z$  は式(III-83)より

$$u_z = D_2 K_I^* \sqrt{-2\pi x'} U(-x') : z=0 \quad (\text{III-88})$$

である。ただし、

$$D_2 = \frac{Z_2(\beta_1)}{2\pi\rho C_1^2 k^2(1-k^2) Z_1(\beta_1)} \quad (\text{III-89})$$

である。したがって、式(II-66)より

$$G = \pi D_1 D_2 K_I^{*2} / 2 \quad (\text{III-90})$$

と求められる。相当する静的エネルギー解放率を  $G^*$  とすると、

$K_I^*$  とは

$$G^* = \begin{cases} K_I^{*2}(1-v^2)/E & : \text{平面ひずみ状態} \\ K_I^{*2}/E & : \text{平面応力状態} \end{cases} \quad (\text{III-91})$$

の関係にあるので、エネルギー解放率の比

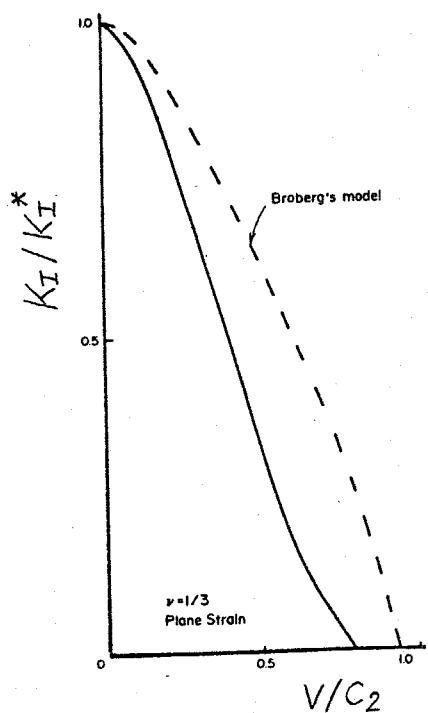
$$G/G^* = D_1 Z_2(\beta_1)/Z_1(\beta_1) \quad (\text{III-92})$$

が得られる。

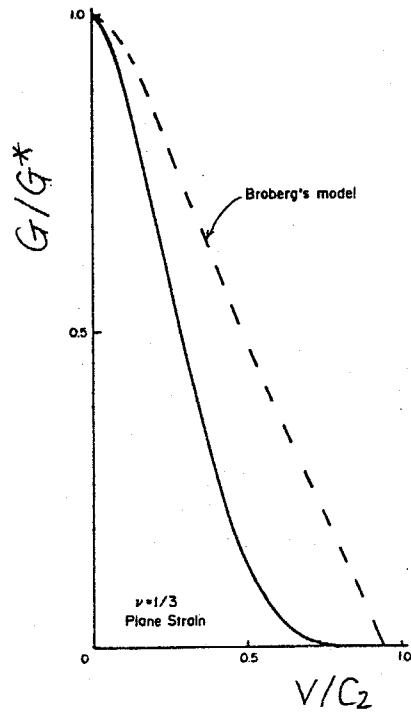
### 計算結果

応力拡大係数の比  $K_I/K_I^*$  およびエネルギー解放率の比  $G/G^*$

とき裂進展速度  $v/C_2$  の関係を図示すると、それぞれ図III-52、図III-53のようになる。 $v/C_2 \rightarrow 0$  では、 $K_I/K_I^* \rightarrow 1$ ,  $G/G^* \rightarrow 1$  となり時刻  $t$  における  $K_I$  および  $G$  の値は  $P = \gamma_0 t (= \gamma_0 C_1 t)$ ,  $a = vt$  としたときに静的な解析によつて得られる値  $K_I^*$ ,  $G^*$  にそれぞれ近づくことわかる。また、  $v$  が増加するにつれて,  $K_I/K_I^*$  および  $G/G^*$  は減少していき、これを無限遠で一様引張応力を受ける場合の Broberg モデル<sup>(27)</sup>の結果と比較すると、本モデルのほうが  $K_I/K_I^*$  および  $G/G^*$  の減少の仕方が顕著であることがわかる。



図III-52 動的応力拡大係数と  
き裂進展速度の関係



図III-53 動的エネルギー解放率  
とき裂進展速度の関係

### (3) 動的 Dugdale モデルの解析

静的解

はじめに動的解と比較するために、き裂が静止していゝ場合の解析を行う。(2) 節と同様に、半無限体の混合境界値問題を解くことによってき裂問題の解析を行う。

半無限体の境界条件は、

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \left\{ \begin{array}{ll} -P\delta(x) & : |x| < a \\ \sigma_r & : a < |x| < a_p \\ 0 & : |x| > a_p \end{array} \right\} : z=0 \\ u_z &= 0\end{aligned}\quad (\text{III-93})$$

と表される。ただし、 $z=0$  上で $|x| < a$  がき裂に相当し、 $a < |x| < a_p$  が降伏域に相当していゝ(図III-48参照)。

半無限体の境界で境界条件

$$\begin{aligned}\sigma_z &= -\sigma(x) : |x| < a_p \\ u_z &= 0 : |x| > a_p\end{aligned}\quad (\text{III-94})$$

が与えられたときの $|x| < a_p$  の変位 $u_z$  を求める式は Tsai<sup>(34)</sup> の結果により

$$u_z = -\frac{2}{\pi\mu(H+V)} \int_x^{a_p} \frac{\frac{3}{2}d\bar{z}}{\sqrt{\bar{z}^2-x^2}} \int_0^{\bar{z}} \frac{\sigma(\lambda)d\lambda}{\sqrt{\bar{z}^2-\lambda^2}} : z=0 \quad (\text{平面応力状態})(\text{III-95})$$

となる。したがって、上式の $\sigma(\lambda)$  に式(III-93) を代入するところによる。

$$\begin{aligned}u_z &= \frac{1}{\pi\mu(H+V)} \left[ P \ln \left| \frac{a_p + \sqrt{a_p^2 - x^2}}{x} \right| - 2\sigma_r \sqrt{a_p^2 - x^2} \cos^{-1} \left( \frac{x}{a_p} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\sigma_r a \int_x^{a_p} \frac{\sqrt{\bar{z}^2 - x^2}}{\bar{z}^2 - a_p^2} d\bar{z} \right] : z=0, a < |x| < a_p\end{aligned}\quad (\text{III-96})$$

が得られる。ここで、 $|x|=a_p$  で応力が特異性を持たない条件は、

$$\left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)_{|x|=a_p} = 0 \quad (\text{III-97})$$

であるから、式(III-96)より降伏域の長さを決める条件

$$\frac{P}{2\sigma_Y} = \frac{a_p}{a} \cos^{-1}\left(\frac{a}{a_p}\right) \quad (\text{III-98})$$

が得られる。したがって、式(III-98)の条件を満足するき裂面上の変位  $u_{zs}$  は、式(III-96)より次のように求められる。

$$u_{zs}(x, a) = \frac{1}{\pi \mu (H+V)} \left[ P \ln \left| \frac{a_p + \sqrt{a_p^2 - x^2}}{x} \right| - P \frac{\sqrt{a_p^2 - x^2}}{a_p} \right. \\ \left. + 2\sigma_Y a \int_x^{a_p} \frac{\sqrt{\xi^2 - x^2}}{\xi \sqrt{\xi^2 - a^2}} d\xi \right] : x=0, a < |x| < a_p \quad (\text{III-99})$$

同様にして、 $|x| < a$  の変位  $u_{zs}$  を求めることができる。

つぎに、き裂が単位長さ進むことによりてき裂先端の塑性域に流入する力学的エネルギー  $G_{ps}$  を求める。二次の微小量を省略することにより

$$G_{ps} = 2\sigma_Y \int_a^{a_p} \frac{\partial u_{zs}(x, a)}{\partial a} dx \quad (\text{III-100})$$

が得られる。(脚注1) いま、 $P/2\sigma_Y = \text{一定}$  のとき(脚注2) を考え。この場合には、式(III-99), (III-100) より

$$G_{ps} = \frac{2\sigma_Y}{\pi \mu (H+V)} \left[ P \frac{a_p}{a} \cos^{-1}\left(\frac{a}{a_p}\right) - P \ln \left| \frac{a_p + \sqrt{a_p^2 - a^2}}{a} \right| \right. \\ \left. + 2\sigma_Y \sqrt{a_p^2 - a^2} \cos^{-1}\left(\frac{a}{a_p}\right) - 2\sigma_Y a \ln \left| \frac{a}{a_p} \right| \right] \quad (\text{III-101})$$

(脚注1)  $G_{pd}$  は塑性変形域を破壊進行領域とみなして  $\lim_{v \rightarrow 0} \bar{w} = \lim_{v \rightarrow 0} (\bar{u} + \bar{v}/2)$  を求めることに相当している。

(脚注2) 全はき裂の進展履歴に依存するので外荷重をどのように指定する必要がある。

が得られる。

### 動的解

本節では、き裂がその先端に降伏域を伴いながら両側に一定速度で進展する場合の解析を行う。

まず、半無限体の表面 ( $Z=0$ ) で境界条件

$$\begin{aligned} \sigma_Z &= \left\{ \begin{array}{l} -8_0 T U(T) \delta(x) : |x| < vt \\ 0_y : vt < |x| < v_{pt} \end{array} \right\} : Z=0 \\ u_z &= 0 : v_{pt} < |x| \end{aligned} \quad (\text{III}-102)$$

が与えられたときの  $Z=0, |x| < v_{pt}$  の範囲の変位  $u_z$  を求める。ただし、 $|x| < vt$  がき裂に相当し、 $vt < |x| < v_{pt}$  が降伏域に相当している（図 III-48 参照）。

式 (III-102) の境界条件を満足する  $|x| < v_{pt}$  の変位  $u_z$  は、境界条件

$$\begin{aligned} \sigma_Z &= -8_0 T U(T) \delta(x) : |x| < v_{pt} \\ u_z &= 0 : |x| > v_{pt} \end{aligned} \quad \left. \right\} : Z=0 \quad (\text{III}-103)$$

を満足する解  $u_{z1}$  と、境界条件

$$\begin{aligned} \sigma_Z &= \left\{ \begin{array}{l} 0 : |x| < vt \\ 0_y : vt < |x| < v_{pt} \end{array} \right\} : Z=0 \\ u_z &= 0 : |x| > v_{pt} \end{aligned} \quad (\text{III}-104)$$

を満足する解  $u_{z2}$  の重ね合わせによって得られる。 $u_{z1}$  は、(2) 節ですでに求められており [ 式 (III-83) の  $\beta_1$  を  $\beta_p$  で置き換ればよい ]、また、 $u_{z2}$  は  $u_{z1}$  を求めるのと同様にして求められること。

したがって、式(III-102)の境界条件を満足する  $Z=0$ ,  $|X| < \beta_p$   
 $t$  の変位

$$U_Z = U_{Z1} + U_{Z2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{|X|\sqrt{\beta_p^2 - r}}{PC_1\beta_p^2\sqrt{r}} \left[ A(\beta_p) + B - \frac{8_0\beta_p}{\pi R^2(1-R^2)} - \frac{C}{(\beta_p^2 - \beta_1^2)} \right] \\
 &\quad + \frac{8_0|X|}{4\pi R^2(1-R^2)PC_1^2\sqrt{r}} \ln \left| \frac{\beta_p + \sqrt{\beta_p^2 - r}}{\beta_p - \sqrt{\beta_p^2 - r}} \right| \\
 &\quad - \frac{C|X|}{2PC_1^2(\beta_p^2 - \beta_1^2)^{3/2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{r}} \ln \left| \frac{\sqrt{\beta_p^2 - \beta_1^2} - \sqrt{\beta_p^2 - r}}{\sqrt{\beta_p^2 - r} + \sqrt{\beta_p^2 - \beta_1^2}} \right| \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\beta_1} \ln \left| \frac{\sqrt{r}\sqrt{\beta_p^2 - \beta_1^2} + \beta_1\sqrt{\beta_p^2 - r}}{\sqrt{r}\sqrt{\beta_p^2 - \beta_1^2} + \beta_1\sqrt{\beta_p^2 - r}} \right| \right] : r < \beta_p^2, Z=0 \tag{III-105}
 \end{aligned}$$

が得られる。ただし、 $A(\beta_p)$  は、式(III-77)の  $A(\beta_1)$  における  $\beta_1 = \beta_p$  と置いたものである、

$$B = -\frac{26\gamma\beta_p}{Z_1(\beta_p)} - \frac{C Z_3(\beta_p, \beta_1)}{\beta_1^2 Z_1(\beta_p)} \tag{III-106a}$$

$$C = \frac{26\gamma\beta_1^3\sqrt{(1-\beta_1^2)(\beta_p^2 - \beta_1^2)^3}}{\pi[4R^3\sqrt{(1-\beta_1^2)(R^2 - \beta_1^2)} - (\beta_1^2 - 2R^2)^2]} \tag{III-106b}$$

$$\begin{aligned}
 Z_3(\beta_p, \beta_1) &= -\frac{2\beta_1^2(\beta_p^2 - 2R^2)^2}{\beta_p(\beta_p^2 - \beta_1^2)(1-\beta_p^2)} K(\sqrt{1-\beta_p^2}) \\
 &\quad + \frac{2\beta_1^2(\beta_p^2 - 2R^2)^2 - 8R^4(\beta_p^2 - \beta_1^2)(1-\beta_p^2)}{\beta_p^3(\beta_p^2 - \beta_1^2)(1-\beta_p^2)} E(\sqrt{1-\beta_p^2}) \\
 &\quad + \frac{8R^2\beta_1^2}{\beta_p(\beta_p^2 - \beta_1^2)} K\sqrt{1-\beta_p^2/R^2} + \frac{8R^4(\beta_p^2 - 2\beta_1^2)}{\beta_p^3(\beta_p^2 - \beta_1^2)} E(\sqrt{1-\beta_p^2/R^2}) \\
 &\quad + \frac{2\beta_p(\beta_1^2 - 2R^2)^2}{(1-\beta_1^2)(\beta_p^2 - \beta_1^2)} \Pi\left(-\frac{1-\beta_p^2}{1-\beta_1^2}, \sqrt{1-\beta_p^2}\right) \\
 &\quad - \frac{8R^2\beta_p^2}{(\beta_p^2 - \beta_1^2)} \Pi\left(-\frac{1-\beta_p^2/R^2}{1-\beta_1^2/R^2}, \sqrt{1-\beta_p^2/R^2}\right) \tag{III-106c}
 \end{aligned}$$

$$\Pi(\alpha, \beta) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+\alpha \sin^2 \theta) \sqrt{1-\beta^2 \sin^2 \theta}} : \text{第三種の完全橿円積分} \tag{III-106d}$$

である。

降伏域先端で応力の特異性が失われる条件は

$$\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)_{|x|=\beta_p \tau} = 0 \quad (\text{III-107})$$

であるから、式(III-105)より降伏域の長さを決める条件

$$\frac{\theta_0}{2\beta_0 \sigma_Y} = \frac{2\pi R^2(1-R^2)}{\Sigma_2(\beta_p)\beta_1} \left[ 1 + \frac{C}{\sigma_Y} \Sigma_4(\beta_p, \beta_1) \right] \quad (\text{III-108})$$

が得られる。ただし、

$$\begin{aligned} \Sigma_4(\beta_p, \beta_1) &= \frac{1}{(\beta_p^2 - \beta_1^2)} \left[ K(\sqrt{1-\beta_p^2}) - \frac{4R^2}{\beta_p^2 \beta_1^2} E(\sqrt{1-\beta_p^2}) + \frac{4R^2}{\beta_p^2 \beta_1^2} E(\sqrt{1-\beta_p^2/R^2}) \right. \\ &\quad + \frac{(\beta_1^2 - 2R^2)^2}{\beta_1^2(1-\beta_1^2)} \Pi\left(-\frac{1-\beta_p^2}{1-\beta_1^2}, \sqrt{1-\beta_p^2}\right) \\ &\quad \left. - \frac{4R^2}{\beta_1^2} \Pi\left(-\frac{1-\beta_p^2/R^2}{1-\beta_1^2/R^2}, \sqrt{1-\beta_p^2/R^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{III-109})$$

である。

き裂先端に降伏域を伴いながら両側に一定速度で進展するときの変位  $u_z$  は、式(III-105), (III-108)より

$$\begin{aligned} u_{zD}(r, \beta_1) &= \frac{\theta_0 |x|}{2\pi R^2(1-R^2)PG^2\sqrt{r}} \left[ -\frac{\sqrt{\beta_p^2 - r}}{\beta_p} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\beta_p + \sqrt{\beta_p^2 - r}}{\beta_p - \sqrt{\beta_p^2 - r}} \right| \right. \\ &\quad - \frac{C|x|}{2PC^2(\beta_p^2 - \beta_1^2)^{3/2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{r}} \ln \left| \frac{\sqrt{\beta_p^2 - \beta_1^2} - \sqrt{\beta_p^2 - r}}{\sqrt{\beta_p^2 - r} + \sqrt{\beta_p^2 - \beta_1^2}} \right| \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\beta_1} \ln \left| \frac{\sqrt{r} \sqrt{\beta_p^2 - \beta_1^2} + \beta_1 \sqrt{\beta_p^2 - r}}{\sqrt{r} \sqrt{\beta_p^2 - \beta_1^2} - \beta_1 \sqrt{\beta_p^2 - r}} \right| \right] : r < \beta_p^2, z=0 \quad (\text{III-110}) \right. \end{aligned}$$

によって与えられる。ただし、 $r = x^2/\tau^2$  である。

つぎに、き裂が単位長さ進むことによってき裂の先端の塑性域に流入する力学的エネルギー  $G_{PD}$  を求める。二次の微小量を省略することにより

$$G_{PD} = \frac{2G_Y}{\beta_1} \int_{\beta_1 C}^{\beta_P C} \frac{\partial U_{PD}(r, \beta_1)}{\partial r} dr \quad (\text{III-111})$$

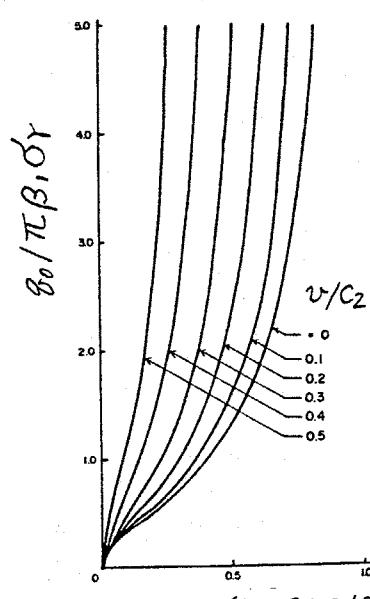
となるので、式(III-110)より

$$G_{PD} = \frac{G_Y \delta_0 C}{\pi R^2 (1 - R^2) \rho C_1^2} \left[ \left( \frac{\beta_P}{\beta_1} \right) \cos^{-1} \left( \frac{\beta_1}{\beta_P} \right) - \ln \left| \frac{\beta_P + \sqrt{\beta_P^2 - \beta_1^2}}{\beta_1} \right| \right] \\ + \frac{2G_Y C T}{\rho C_1^2 (\beta_P^2 - \beta_1^2)^{3/2}} \left[ \frac{\sqrt{\beta_P^2 - \beta_1^2}}{\beta_1} \cos^{-1} \left( \frac{\beta_1}{\beta_P} \right) - \ln \left| \frac{\beta_P}{\beta_1} \right| \right] \quad (\text{III-112})$$

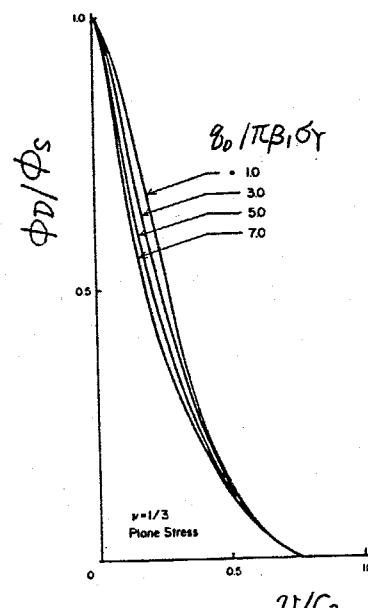
が得られる。

### 計算結果

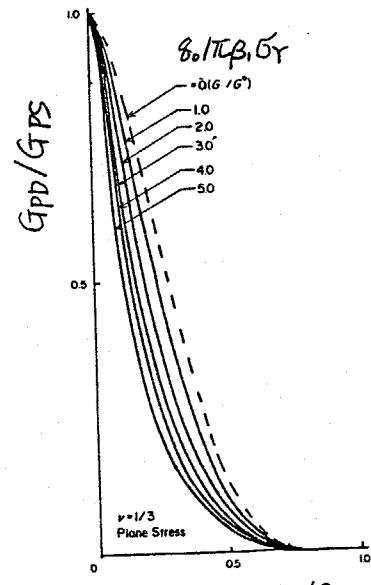
図III-54は、き裂進展速度ひをパラメータとして、相対的塑性域の長さ  $(\beta_P - \beta_1)T / \beta_P T$  と瞬間の荷重  $\delta_0 T$  をこのときのき裂の長さの半分に元  $G_Y$  をかけた値で除した値  $\delta_0 / \pi \beta_1 G_Y$  (以下無次元化された荷重という) の関係を式(III-98)と式(III-108)から求めた結果である。この図から、一定荷重の下ではき裂進



図III-54 無次元化された荷重と  
相対的塑性域の長さの  
関係(平面応力)



図III-55 き裂先端の開口変位と  
き裂進展速度の関係  
(平面応力)



図III-56 き裂進展による塑性  
域に流入する力学的  
エネルギー(平面応力)

展速度が大きくなるほどにしたがって、降伏域の長さは減少するこ  
とがわかる。この傾向は、Atkinson<sup>(30)</sup>およびEmbley-Sir<sup>(31)</sup>が  
Brobergモデル<sup>(27)</sup>について求めた結果と一致している。

図III-55は、無次元化された荷重をパラメータとして、き裂  
進展速度と動的き裂先端の閉口変位  $\phi_D$  [ $= 2U_{ZD}(\beta_1^2, \beta_1)$ , 式(III-  
110)参照]を相当する静止き裂(長さ  $2a$ )の閉口変位  $\phi_S$  [ $2U_{ZS}$   
( $a, a$ ), 式(III-99)参照]で無次元化した量との関係を示した  
ものである(速度ひいて進展していき裂と、荷重の大きさおよび  
き裂長さが等しい静止き裂とを比較している)。この図から  
,  $v \rightarrow 0$  では  $\phi_D/\phi_S \rightarrow 1$  となり動的解は静的解に近づき,  
v の増加とともに  $\phi_D$  は減少すること、すなわち、き裂先端の閉  
口変位は小さくなることがある。

図III-55は、無次元化された荷重をパラメータとして、き裂  
進展速度とき裂進展によって塑性域に流入する力学的エネルギー  
 $G_{PD}/G_{PS}$  との関係を示したものである。ここで、 $80/\pi\beta_1\beta_2$   
 $= 0$  は  $\beta_2 \rightarrow \infty$  を意味し線形弾性体に相当している。この図か  
ら、無次元化された荷重がゼロに近づくにつれて弾性解に近づ  
くこと、および無次元化された荷重が増大するにつれて  $G_{PD}$  の  
減少が著しくなることがある。

#### (4) き裂の進展に関する考察

無限体中に存在するき裂が、その中央に時間とともに増大す

3集中荷重を受けながら進展するときの二次元モデルについて解析した。この結果を用いて、実際にき裂が進展する際の挙動について定性的な考察を行うことにする。

### 線形弾性体モデル

式(III-65)を考慮して、き裂進展中のエネルギーの平衡条件を次式のように表わすこととする。<sup>(脚注)</sup>

$$G(v) = G_C(v) \quad (\text{III-113})$$

ここで、 $G_C(v)$  はき裂進展の際に費やされる単位面積あたりのエネルギー、すなわち動的破壊靱性値であり、き裂進展速度  $v$  の増加関数であると仮定する。<sup>(39)</sup> この式は、荷重の大きさおよびき裂長さが与えられたときに実際に起こるき裂の進展速度を決

---

(脚注) き裂進展中の破壊条件をこのように表わすことは、き裂進展中の速度変化の影響を無視することに相当している。

無限体中の半無限き裂については、き裂進展の加速度による影響が無い。<sup>(35~38)</sup> ことから、有限き裂先端付近の応力変位場が受けける加速度の影響は、他のき裂端によって反射された応力波によると考えられる。(たがって、他のき裂端によって反射された応力波が考へているき裂端に達するまでは加速度の影響を受けないことや、一定加速度をもつ二次元き裂に関する Tsai<sup>(34)</sup>の解析などから、加速中のき裂先端付近の応力変位場についてはき裂進展の加速度の影響は小さいと考えられる。

める条件式と解釈することができる。式(III-91)を用いると式(III-113)は、

$$\frac{G(v)/G^*}{G_c(v)} = \begin{cases} \frac{E}{(1-v^2)K_I^{*2}} & : \text{平面ひずみ状態} \\ \frac{E}{K_I^{*2}} & : \text{平面応力状態} \end{cases} \quad (\text{III-114})$$

となる。ここで、右辺は変数としてき裂進展速度を含んでいないので静的な解析により求められる量である。

本モデルの場合の静的解は、

$$K_I^* = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} = \text{const.} \times \sqrt{a} \quad (\text{III-115})$$

となる。 $K_I^*$ はき裂長さ  $2a$ とともに増大するので、式(III-114)の左辺はき裂が長くなるにしたがって減少する。式(III-114)の左辺は図III-53 よりわかるようにひずみ減少関数であることから、き裂速度はき裂進展とともに増加することがわかる。さらに、 $\gamma_0$ の値が大きいほど  $K_I^*$  の増加率が大きいので、き裂進展速度がはやく増加することがわかる。また、無限遠で一様引張応力を受ける Broberg モデル<sup>(27)</sup>では、静的応力拡大係数は、

$$K_I^* = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (\text{III-116})$$

となり、この場合も  $K_I^*$  はき裂の長さとともに増大するので、やはりき裂速度は増加することがわかる。

図III-53によれば、Broberg モデルよりも本モデルのほうが動的エネルギー解放率  $G(v)$  の減少が著しいので、静的には同一の応力拡大係数であっても、き裂進展速度は Broberg モデルよりも

本モデルのほうかい、さくなすことかわかる。

### 動的 Dugdale モデル

動的 Dugdale モデルを用いて破壊を論ずるとき、き裂進展の条件を、エネルギー解放率とき裂先端の開口変位によって表わすことが考えられる。

#### (A) エネルギー解放率による条件

線形弾性体モデルの場合と同様に、き裂進展により解放される力学的エネルギーはき裂面を作るのに必要なエネルギー  $G_{PC}$  に等しいとする。この条件は、進展するき裂について

$$G_{PD}(v) = G_{PC}(v) \quad (\text{III}-117)$$

によって表わされる。

上式は、

$$\frac{1}{G_{PS}} = \frac{G_{PD}(v)/G_{PS}}{G_{PC}(v)} \quad (\text{III}-118)$$

と変形できる。  $G_{PC}(v)$  をき裂進展速度  $v$  の増加関数と仮定すると、上式の左辺は、図 III-56 より  $v$  の減少関数である。また、式(III-101)より  $P/2a_0\gamma$  が一定のとき  $G_{PS}$  はき裂長さの増加関数であるから、上式の左辺はき裂進展とともに減少する。したがって、き裂進展速度は、き裂進展とともに増加すると考えられる。また、降伏応力  $\gamma$  が小さいほど  $G_{PD}/G_{PS}$  の減少が大きいことから、降伏応力の低い材料ほどき裂はゆるやかに進展するとか予想される。

### (B) き裂先端の開口変位による条件

進展するき裂の先端の開口変位  $\phi_D$  が材料によって定まる  $\phi_C$  をとると考える。この値  $\phi_C$  は、き裂進展速度の閾数と考えることができる。この条件は、

$$\phi_D(v) = \phi_C(v) \quad (\text{III}-119)$$

によって表わされる。

上式は、

$$\frac{1}{\phi_s} = \frac{\phi_D(v)/\phi_s}{\phi_C(v)} \quad (\text{III}-120)$$

と变形できる。この破壊条件を用いた場合と (A) のときと同様に  $\phi_C(v)$  がひの増加閾数であると仮定すると、図 III-55 より定性的には、(A) の破壊条件を用いたときと現象が予想される。

なお、定量的関係については、今後実験によって検討する必要があるとのと考えられる。

### 3.3.3. 動的応力拡大係数の有限要素解析

前節では無限体中を進展するき裂モデルの解析を行った。有限体の中を進展するき裂の問題は、境界が時間とともに変化するので、材料が線形弾性体である場合で、一定速度で進展するき裂の問題を重ね合わせることで、任意に進展速度が変化するき裂の問題の解を得ることができるないといふ非線形性を有し、極めて解析の困難な問題である。このような複雑な問題に対

しては、差分法や有限要素法などの数値計算を適用するこが考  
えられ、現在までにいくつかの試みがなされている（例えは、  
文献(40), (41)）。しかし、き裂先端には応力の特異性が存在す  
るので細かい分割を必要とすることや、節点の拘束条件を順次  
変化させることによってき裂を進展させて、き裂進展がな  
めらかでないなどの難点がある。このような難点を解決するた  
めに本節では3.2.2節で述べた特異要素を用いる有限要素法を  
高速進展するき裂の動的応力拡大係数の解析に適用できるよ  
うに拡張する。

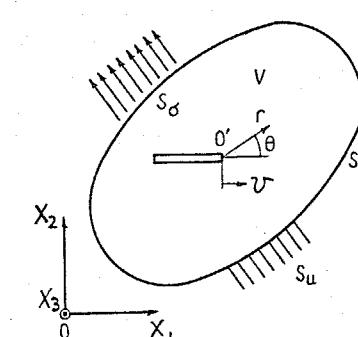
### (1) 特異要素を用いる有限要素法の定式化

#### 基礎式

図III-57に示すような、き裂を含む弾性体Vを考える。ここ  
で $S_u$ は弾性体の境界Sのうち変位の与えられた領域を表わし、  
 $S_0$ は応力の与えられた領域を表わす。 $O-X_1, X_2, X_3$ を静止直角座  
標系とし、 $O'-r, \theta$ を着目するき裂先端を原点とする移動座標系  
とする。また、 $v$ はき裂進展速度を表わす。

d'Alembertの原理を用い仮想仕事の原理  
を適用した式を、時刻 $t=t_0$ と $t=t_0+\Delta t$   
の間で積分すると

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left\{ \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV - \int_{S_0} T_i \delta u_i dS \right\} dt = 0 \quad (\text{III-121})$$



図III-57 き裂を含む  
弾性体

が得られる。ここで、 $\rho$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$  および  $T_i$  は、それぞれ、物体の密度、応力、ひずみ、および表面力である。ドット(•)は時間微分を表す。なお、簡単のために物体力は働いていないとした。

図III-57 のように要素分割し、き裂先端付近の要素を特異要素とする。特異要素と三角形要素の境界線  $S^*$  上では節点以外の場所では変位が不連続になるので(3.2.2節参照)， $S^*$  上における変位の連続条件をラグランジエの未定乗数  $\lambda_i$  を用いて付帯条件として導入する。すなわち、

$$\int_{t_0}^{t_{\text{total}}} \left\{ \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV + \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV - \int_{S^*} T_i \delta u_i ds - \int_{S^*} \delta [\lambda_i (u_i^{(1)} - u_i^{(0)})] ds \right\} dt = 0 \quad (\text{III-122})$$

ここで、上添字(1)および(0)は、それぞれ三角形要素および特異要素に関する量を表す。 $\lambda_i$  は平衡状態において境界面上に働く面力  $T_i$  に等しく、いう物理的な意味を持つので、上式は

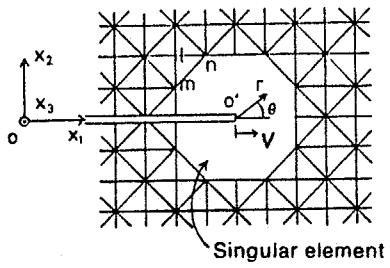
$$\int_{t_0}^{t_{\text{total}}} \left\{ \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV + \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV - \int_{S^*} T_i \delta u_i ds - \int_{S^*} \delta [T_i^{(1)} (u_i^{(1)} - u_i^{(0)})] ds \right\} dt = 0 \quad (\text{III-123})$$

の形に書ける。ただし、

$$T_i^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)} n_j^{(1)} \quad (\text{III-124})$$

であり、 $n_j^{(1)}$  は  $S^*$  上において三角形要素から外向きに引いた単位法線の方向余弦である。<sup>(脚注)</sup>

(脚注) 式(III-123)において  $T_i^{(1)} = -T_i^{(0)} = -\sigma_{ij}^{(0)} n_j^{(0)}$  であるから、(次頁へ)



図III-58 特異要素を用いた要素分割

## 面外せん断変形(モードⅢ)

まず、取扱いが比較的容易な面外せん断変形(モードⅢ)の場合について考える。式(Ⅲ-123)を変位を用いて表わすと。

$$\int_{t_0}^{\text{total}} \left[ \iint_A \mu \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial (\delta u_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial (\delta u_3)}{\partial x_2} \right\} dx_1 dx_2 + \iint_A \rho i_3 \delta u_3 dx_1 dx_2 - \int_{P^*} T_3 \delta u_3 dP \right. \\ \left. - \int_{P^*} \delta \left\{ \mu \left( \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_1} n_1^{(1)} + \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_2} n_2^{(1)} \right) (u_3^{(1)} - u_3^{(0)}) \right\} dP \right] dt = 0 \quad (\text{III-125})$$

となる。ここで、 $\mu$ は横弾性係数、 $A$ は考えていい領域、 $P^*$ は表面力 $T_3$ が与えられた境界、 $P^*$ は特異要素と三角形要素の境界である。

各要素内の変位が次式で表わせると仮定する。

$$u_3 = [N]^e \{ \phi \}^e \quad (\text{III-126})$$

ここで、 $[N]^e$ は要素内の変位分布の形状を定める変位関数で、 $\{ \phi \}^e$ は未知パラメータである。通常の三角形要素(たとえば、図Ⅲ-58の三角形e, f, g)については、 $[N]^e$ を定ひずみ要素の変位関数とし、 $\{ \phi \}^e$ を節点変位とする。

特異要素については、速度ひずみ進展するき裂の先端付近の変位場は、一般に動的応力拡大係数 $K_{\text{III}}(t)$ を用いて

$$u_3 = \frac{K_{\text{III}}(t)}{\mu} \left\{ \frac{r}{\pi(1-\beta_0^2)} \right\}^{1/2} \left\{ (1-\beta_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2} - \cos \theta \right\}^{1/2}$$

---

(前頁から) 最後の項の代わりに  $\int_{P^*} S[T_e^{(0)}(u_e^{(0)} - u_e^{(1)})] dP$  を用いることと考えられる。(しかし、三角形定ひずみ要素を用いると要素内で応力が一定値となるので、式(Ⅲ-123)のように境界面上に作用する面力を三角形要素側で評価した方が計算が容易である。

$$= f_{\text{III}}(r, \theta, v) K_{\text{III}}(t) \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (\text{III}-127)$$

の形に表わすこととする<sup>(26)</sup>ので ( $\beta_0 = v/C_2$ ),  $f_{\text{III}}(r, \theta, v)$  を変位関数とし,  $K_{\text{III}}(t)$  を有限要素法によって求められる未知パラメータとする。ただし, 進展するき裂の場合には

$$f_{\text{III}}(r, \theta, v) = f_{\text{III}}(r(x_1, x_2, t), \theta(x_1, x_2, t), v) \quad (\text{III}-128)$$

であるから, 特異要素の変位関数は時間の関数になることに注意する必要がある。すなはち,

$$[N]^e = f_{\text{III}}(r, \theta, v) = [N(x_1, x_2, t)]^e \quad (\text{III}-129a)$$

$$\{\phi\}^e = K_{\text{III}}(t) \quad (\text{III}-129b)$$

である。また, 微小時間  $\Delta t$  の間き裂は等速ひいて  $x_1$  軸方向に進展するものと仮定し, 特異要素内の加速度  $\ddot{u}_3$  を

$$\ddot{u}_3 = \frac{d^2}{dt^2}(f_{\text{III}} K_{\text{III}}) = f_{\text{III}} \ddot{K}_{\text{III}} - 2v \frac{\partial f_{\text{III}}}{\partial x_1} \dot{K}_{\text{III}} + v^2 \frac{\partial^2 f_{\text{III}}}{\partial x_1^2} K_{\text{III}} \quad (\text{III}-130)$$

で表わす。

特異要素に接していける三角形要素についてでは, 図III-58の三角形  $l, m, n$  を例にとって

$$\begin{aligned} u_3 &= [N_l, N_m, N_n]^e \begin{Bmatrix} \phi_l \\ \phi_m \\ \phi_n \end{Bmatrix}^e = [N_l, N_m, N_n]^e \begin{Bmatrix} \phi_l \\ f_{\text{III}l} K_{\text{III}} \\ f_{\text{III}n} K_{\text{III}} \end{Bmatrix}^e \\ &= [N_l, N_m f_{\text{III}m}, N_n f_{\text{III}n}]^e \begin{Bmatrix} \phi_l \\ K_{\text{III}} \\ K_{\text{III}} \end{Bmatrix}^e \\ &= [N(x_1, x_2, t)^*]^e \{\phi(t)^*\}^e \end{aligned} \quad (\text{III}-131)$$

となるので,  $[N(x_1, x_2, t)^*]^e$  を変位関数とし,  $\{\phi(t)^*\}^e$  を有限要素法によって求められる未知パラメータとする。ただし,  $f_{\text{III}l}$

$f_{III}$  は、それぞれ、点  $m$ ,  $n$  における  $f_{III}(r, \theta, v)$  の値である。また、特異要素に接する要素は、き裂先端から離れているので、変位関数の時間的変化は小さいと考えられる。したがって、このような要素内の加速度  $\ddot{u}_3$  は

$$\ddot{u}_3 = [N(x_1, x_2, t)^*]^e \{ \dot{\phi}(t)^* \}^e \quad (\text{III-132})$$

で表わされるものとする。

以上の近似式、式(III-126), (III-129)~(III-132)を式(III-125)へ代入することにより、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_{\text{total}}} \left[ \sum_e \{ \mu \} \iint_{A_e} \{ \delta \phi \}^{eT} [B]^{eT} [B]^e \{ \phi \}^e dx_1 dx_2 + p \iint_{A_e} \{ \delta \phi \}^{eT} [N]^{eT} [N]^e \{ \dot{\phi} \}^e dx_1 dx_2 \right. \\ & - \int_{P_{0e}} T_3 \{ \delta \phi \}^{eT} [N]^{eT} d\Gamma + \iint_{A_e} \mu \left\{ \left( \frac{\partial f_{III}}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_{III}}{\partial x_2} \right)^2 \right\} K_{III} \delta K_{III} dx_1 dx_2 \\ & + \iint_{A_e} p \left\{ f_{III} \ddot{K}_{III} - 2v \frac{\partial f_{III}}{\partial x_1} \dot{K}_{III} + v^2 \frac{\partial^2 f_{III}}{\partial x_1^2} K_{III} \right\} f_{III} \delta K_{III} dx_1 dx_2 - \int_{P_{0e}} T_3 f_{III} \delta K_{III} d\Gamma \\ & - \int_{P_{0e}} \{ \delta \phi \}^{eT} \mu [B]^{eT} [n]^{eT} ([N]^e \{ \phi \}^e - f_{III} K_{III}) d\Gamma \\ & \left. - \int_{P_{0e}} (\{ \delta \phi \}^{eT} [N]^{eT} - f_{III} \delta K_{III}) M [m]^e [B]^e \{ \phi \}^e d\Gamma \right] dt = 0 \quad (\text{III-133}) \end{aligned}$$

ここで、 $\sum$  は三角形要素からの寄与の総和を表わし、 $T$  は転置を表す。また、

$$[B]^e = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}^T [N]^e \quad (\text{III-134a})$$

$$[n]^e = [n_1^{(1)}, n_2^{(1)}] \quad (\text{III-134b})$$

である。

仮想仕事の原理より、 $\{ \delta \phi \} = \{ \delta \phi^e \}$ ,  $\delta K_{III} \gamma^T$  は任意に与えられるので、上式より

$$\int_{t_0}^{t_{\text{total}}} \left\{ [K(t)] \{ \phi(t) \} + [V(t)] \{ \dot{\phi}(t) \} + [M(t)] \{ \ddot{\phi}(t) \} - \{ F(t) \} \right\} dt$$

$$= \{0\} \quad (\text{III}-135)$$

が得られる。ここで、 $[K(t)]$ ,  $[M(t)]$  は、それぞれ、拡張された剛性マトリックスおよび質量マトリックスであり、 $[V(t)]$  は式(III-133)の  $\dot{K}_{\text{II}}$  の項から生じるマトリックスである。各マトリックスが時間の関数になつてゐるのは、き裂進展によつて特異要素の変位関数が変化するからである。また、 $\{F(t)\}$  は等価節点力である(付録Ⅱ参照)。

$t=t_0$  において平衡が成り立つてゐると、 $t=t_0$  から  $t_0+\Delta t$  の間の増分に  $\Delta$  をつけて表わすとのとすれば、式(III-135)から

$$\begin{aligned} & [K(t_0+\Delta t)]\{\Delta\phi\} + [V(t_0+\Delta t)]\{\Delta\dot{\phi}\} + [M(t_0+\Delta t)]\{\Delta\ddot{\phi}\} \\ & = \{\Delta F\} - [\Delta K]\{\phi(t_0)\} - [\Delta V]\{\dot{\phi}(t_0)\} - [\Delta M]\{\ddot{\phi}(t_0)\} \end{aligned} \quad (\text{III}-136)$$

が得られる。さうに、微小時間  $\Delta t$  の間に加速度が線形に変化すると仮定する Newmark の  $\beta=1/6$  法<sup>(1)</sup>を用ひると上式は

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(\Delta t)^2}{6} [K(t_0+\Delta t)] + \frac{\Delta t}{2} [V(t_0+\Delta t)] + [M(t_0+\Delta t)] \right] \{\Delta\dot{\phi}\} \\ & = \{\Delta F\} - [\Delta K]\{\phi(t_0)\} - [\Delta V]\{\dot{\phi}(t_0)\} - [\Delta M]\{\ddot{\phi}(t_0)\} \\ & \quad - [K(t_0+\Delta t)]\{\Delta t\dot{\phi}(t_0) + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{\phi}(t_0)\} - [V(t_0+\Delta t)]\{\Delta t\dot{\phi}(t_0)\} \end{aligned} \quad (\text{III}-137)$$

となり、 $\Delta\dot{\phi}$  に関する前進形の連立差分方程式が得られる。他の  $\{\phi\}$ ,  $\{\dot{\phi}\}$ ,  $\{\ddot{\phi}\}$  などの諸量は  $\Delta\dot{\phi}$  から求められる。動的応力拡大係数  $K_{\text{II}}(t)$  は未知パラメータ  $\{\phi\}$  のなかに含まれてゐるので、実際の計算では、式(III-137)を時刻  $\Delta t$  ごとに解くことか主な作業になる。き裂が静止している場合は、 $[K]$ ,  $[M]$  は一定

値となり、 $[V]$  はゼロとなるので、式(III-137)は次式のようになる。

$$\left[ \frac{(\Delta t)^2}{6} [K] + [M] \right] \{ \Delta \ddot{\phi} \} = \{ \Delta F \} - [K] \left\{ \Delta t \dot{\phi}(t_0) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\phi}(t_0) \right\} \quad (\text{III-138})$$

なお、特異要素と三角形要素の境界での変位の連続性を付帯条件としない場合には、式(III-133)において境界  $\Gamma^*$  上の線積分を省略することにより、式(III-137), (III-138) に相当する式が得られる。

### 開口形変形(モードI)

き裂先端付近の動的変位場は、一般に動的応力拡大係数  $K_I(t)$  を用いて式(III-63b)に示したように

$$u_1 = f_1^I(r, \theta, v) K_I(t, v) \quad (\text{III-139a})$$

$$u_2 = f_2^I(r, \theta, v) K_I(t, v) \quad (\text{III-139b})$$

と表わすことができる。ここで、特異要素内の変位は、式(III-139)で表わされる変位と特異要素全体の変位  $u_0(t)$  の和になつてこそそのとし

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^I(r, \theta, v), 1 \\ f_2^I(r, \theta, v), 0 \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} K_I(t) \\ u_0(t) \end{Bmatrix}^e \quad (\text{III-140})$$

で近似する。<sup>(脚注)</sup> 以下、面外せん断形変形(モードIII)の場合

(脚注) き裂が静止している場合については、 $f_1^I(r, \theta, 0) = \lim_{v \rightarrow 0} f_1^I(r, \theta, v)$  および  $f_2^I(r, \theta, 0) = \lim_{v \rightarrow 0} f_2^I(r, \theta, v)$  を用いる。なお、これらは静的解析によって得られるとの一致する。

と同様にして、式(III-137)または式(III-138)と同様の式を得ることができる(付録II参照)。

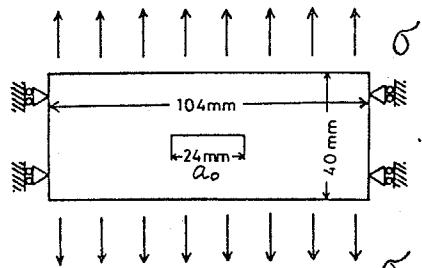
## (2) 計算例

図III-59に示すような中央にき裂を有する長方形板の上下面に引張り荷重が時間に関して階段関数状に作用する場合(閉口形変形(モードI)]について、計算例を示す。要素分割を図III-60に示す。問題の対称性によって板の1/4について計算を行えばよい。

図中の斜線の部分は特異要素の形状を表す。き裂が進展する場合には、き裂先端が特異要素からはみ出さないよう、図III-61のように、き裂先端が点aまで進展したときに特異要素を移動させて計算を続けた。このとき新しく生じる節点の諸量は、式(III-140)から計算し、消える節点については無視した。なお、時間増分 $\Delta t = 0.2\mu s$ とした。

## 変位関数の不連続性に関する検討

静止き裂およびき裂進展速度が図III-

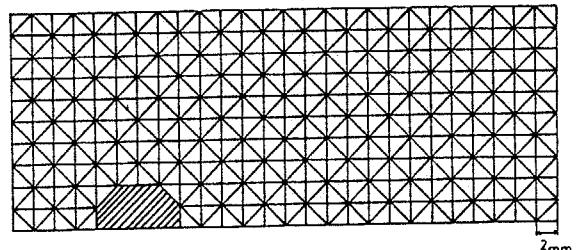


図III-59 中央にき裂を有する長方形板

$$\rho = 2.45 \text{ Mg/m}^3$$

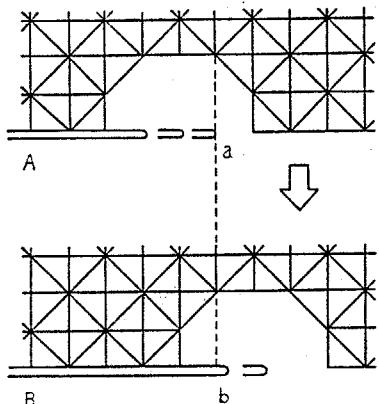
$$\mu = 29.4 \text{ GPa}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{3} (\nu = 0.25 \text{ 平面ひずみ})$$

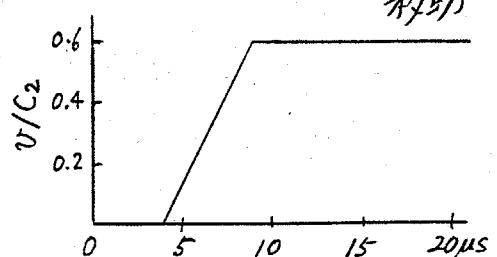


図III-60 要素分割

291節点, 507要素



図III-61 特異要素の移動

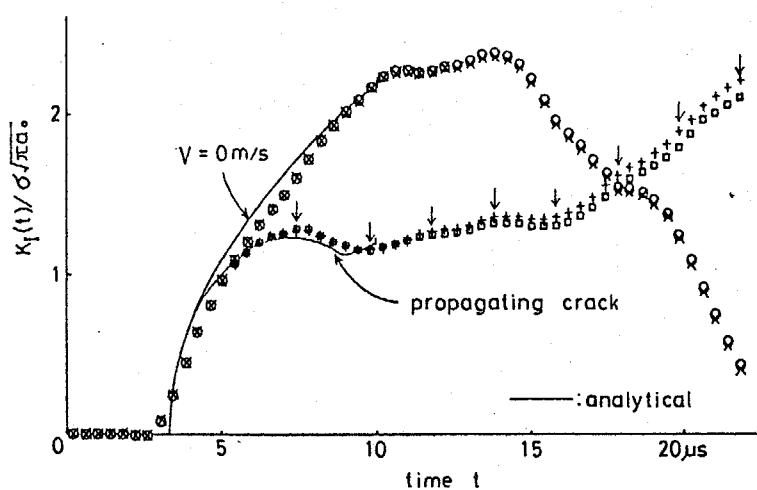


図III-62 き裂進展速度の時間的変化

62 のように変化する  
き裂に対する計算結果  
を図III-63 に示す。無  
限板に対する静的応力  
拡大係数で無次元化さ  
れた動的応力拡大係数

を縦軸にとり、板の上  
下面に引張応力が作

用し始めてからの時間を横軸にとっている。 $\circ, \square$ 印は式(III-121)を基礎式とした場合の計算結果であり、 $\times, +$ 印は特異要素と三角形要素の境界での変位の連続性を付帯条件として考慮した基礎式(III-123)による計算結果である。両者の結果はほぼ等しく、特異要素と三角形要素の間での変位の連続性を付帯条件として導入しなくとも導入した場合と同程度の解が得られることがわかる。図中の実線は無限体中の半無限き裂に関する解析解<sup>(36)</sup>を示す。数値解は有限体中のき裂に対するものであるが、板の上下面で反射された応力波がき裂先端に到達する時刻  $t = 10\mu s$  までは無限板の解と一致するはずである。計算結果と解析解は良く一致しており、本手法が動的応力拡大係数の解析に有効であることを示している。なお、図中の↓印は特異要素を移動した時点を表している。特異要素を移動することは計算に

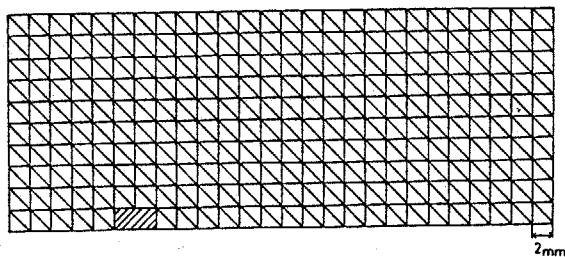


図III-63 動的応力拡大係数の時間的変化  
 $\circ, \square$  式(III-121)を基礎式とする場合  
 $\times, +$  式(III-123)を基礎式とする場合

悪影響を及ぼしていいように思われる。

### 特異要素の形状に関する検討

図III-64に示すような形状の特異要素(図中斜線部)を用いて上と同様の計算を行った。図III-65に計算結果を示す。図III-63と同等の結果が得られる。



図III-64 要素分割  
296節点, 517要素

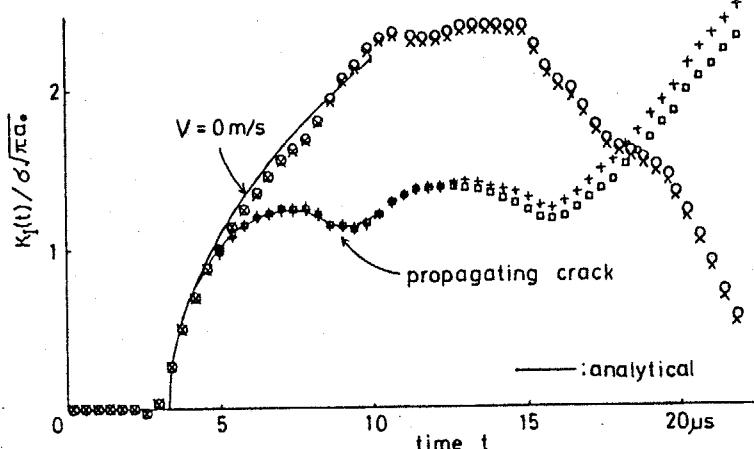
### 3.3.4. 高速き裂進展のシミュレーション

#### (1) シミュレーションの方法

本節では、き裂進展のシミュレーションについて考察する。前節の計算例では、き裂進展速度を既知としたが、シミュレーションを行うためには物体の物性値にとづいてき裂進展速度が定まるようになる必要がある。ここでは、式(III-113)と同様にき裂進展の条件としてエネルギー収支にとづく次式を採用する。

$$G (= \dot{G}) = G_C(v) \quad (\text{III-141})$$

$G_C(v)$ は破面形成に必要な広義の表面エネルギーである。これは材料の物性値で、ここでは、き裂進展速度の関数と仮定する。



図III-65 動的応力拡大係数の時間的変化  
(図III-63の要素分割を用いた場合)  
○: 式(III-121)を基礎式とした場合  
+, +: 式(III-123)を基礎式とした場合

式(III-141)は式(III-65)を用いると

$$\frac{1}{4\mu(1-K^2)} A_I(v) K_I^2(t, v) = G_C(v) \quad (\text{III-142})$$

となる。上式が成立するような速度でき裂を進展させると、そこで、き裂進展のシミュレーションを行うことができる。特異要素の変位関数の中には、き裂進展速度が含まれてるので、式(III-137)の計算を行うためには、時刻  $t=t_0+\Delta t$ におけるき裂進展速度がわかっていないなければならない。ここでは、 $K_I(t_0, v(t_0))$ ,  $\dot{K}_I(t_0, v(t_0))$ ,  $\ddot{K}_I(t_0, v(t_0))$  の値が既知であることに着目して、 $t=t_0+\Delta t$ におけるき裂進展速度を式(III-142)から決定することにする。速度  $v(t_0)$  のき裂の  $t=t_0+\Delta t$ における応力拡大係数の値を

$$K_I(t_0+\Delta t, v(t_0)) = K_I(t_0, v(t_0)) + \Delta t \dot{K}_I(t_0, v(t_0)) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{K}_I(t_0, v(t_0)) \quad (\text{III-143})$$

で近似する。つぎに、時刻  $t$  に進展速度がひとつのき裂の動的応力拡大係数は

$$K_I(t, v) = k_I(v) K_I(t, 0) \quad (\text{III-144})$$

のように、き裂進展速度の関数  $k_I(v)$  と、その瞬間にき裂先端が同じ位置にある静止したき裂に対する応力拡大係数との積で表わされるので、<sup>(35-38), (42)</sup> この式を用いて、次式のように

$$K_I(t_0+\Delta t, 0) = K_I(t_0, v(t_0)) / k_I(v(t_0)) \quad (\text{III-145})$$

を求める。ただし、

$$k_I(v) = \frac{(1-\beta_0)}{(1-k\beta_0)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{\pi} \int_a^b \tan^{-1} \left[ \frac{4x^2(x^2-a^2)^{1/2}(b^2-x^2)^{1/2}}{(b^2-2x^2)^2} \right] \frac{dx}{x-(1/v)} \right]$$

$$\text{ここで}, \alpha = 1/C_1, \beta = 1/C_2, \beta_0 = V/C_2, \delta_0 = V/CR$$

$C_R$ : Rayleigh波の伝播速度 (III-146)

である(図III-66参照)。さらに、

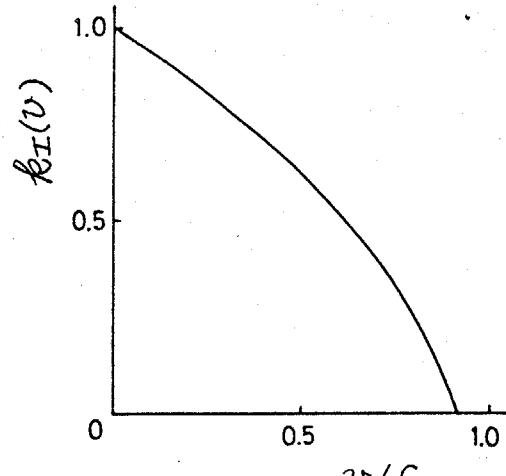
式(III-144)を式(III-142)へ代入する

と

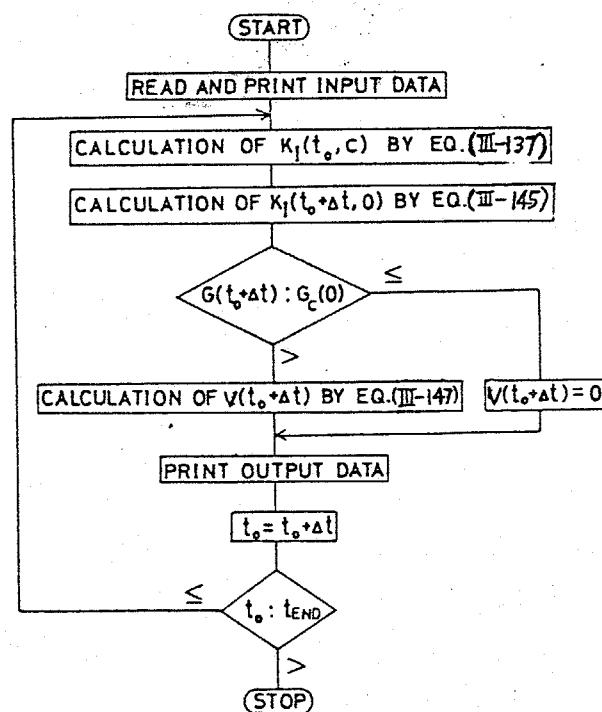
$$\frac{1}{4\mu(1-k^2)} A_I(V) k_I^2(V) K_I^2(t, 0) \\ - G_C(V) = 0 \quad (\text{III-147})$$

が得られる。これに式(III-145)から求められた値を代入すると、き裂進展速度  $v(t_0 + \Delta t)$  を求めることのできる方程式が得られる。 $V(t_0 + \Delta t)$

が定まれば、式(III-137)の計算を続行することができる。図III-67にシミュレーションのフローチャートを示す。さうに精度を向上させる必要があれば、上のようにして求められた  $K_I(t_0 + \Delta t, V(t_0 + \Delta t))$  を用い、さらに式(III-147)で  $t = t_0 + \Delta t$  としたものを解き、この解を  $v(t_0 + \Delta t)$  として再び式(III-137)の計算を



図III-66 式(III-146)の  $k_I(V)$  と無次元化されたき裂進展速度の関係 ( $k^2 = 1/3$ )



図III-67 高速き裂進展のシミュレーションのフローチャート

を行ひ、逐次近似法によって解を精密化することができる。

## (2) 計算例

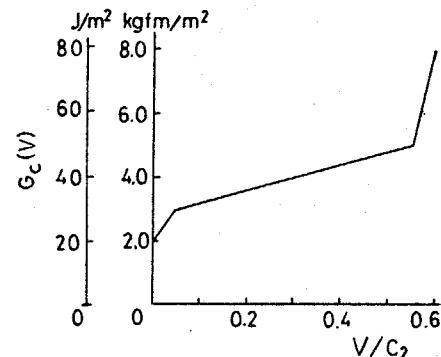
図III-59に示した長方形板の上下面に引張力が作用する場合についエニシミュレーションを行つた。動的破壊韌性値 $G_C(V)$ はガラスについの実験結果(39)を参照して図III-68で与えられると

のとした。また、き裂進展速度ひが横波の伝播速度 $C_2$ の約0.6倍を越えるとき裂先端近くの刃方向応力 $\sigma_\theta$ の最大値がき裂の延長上でなくき裂面とある角度をもつ面上に生じるので

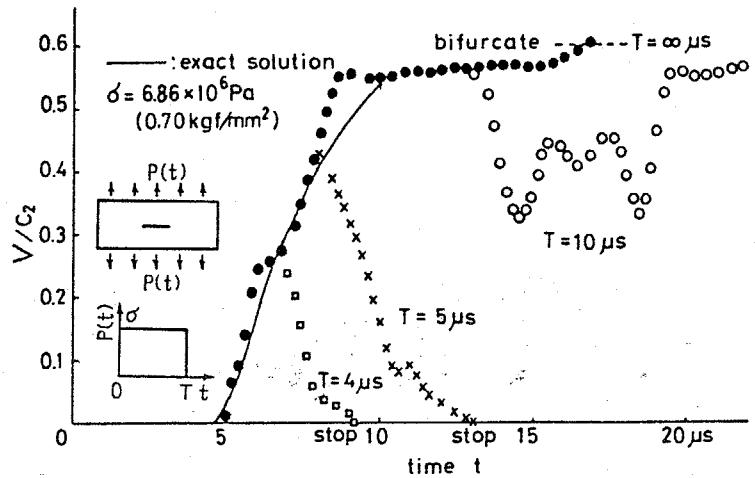
$V=0.6C_2$ をき裂分歧の

条件<sup>(43)</sup>とする。動的応力拡大係数の計算は、式(III-121)を基礎式とする特異要素を用いた有限要素によつて行ひ、初期き裂長さを $a_0 = 24\text{mm}$ とした。

加える荷重の大きさ $\delta$ を $6.86\text{ MPa}$ の一定値とし持続時間をえた場合の計算結果を図III-69に示す。縦軸は横波の伝播速度



図III-68 シミュレーションに用いた動的破壊韌性値



図III-69 高速き裂進展のシミュレーション(無次元化されたき裂進展速度の時間的変化)。加える荷重の持続時間を変えた場合

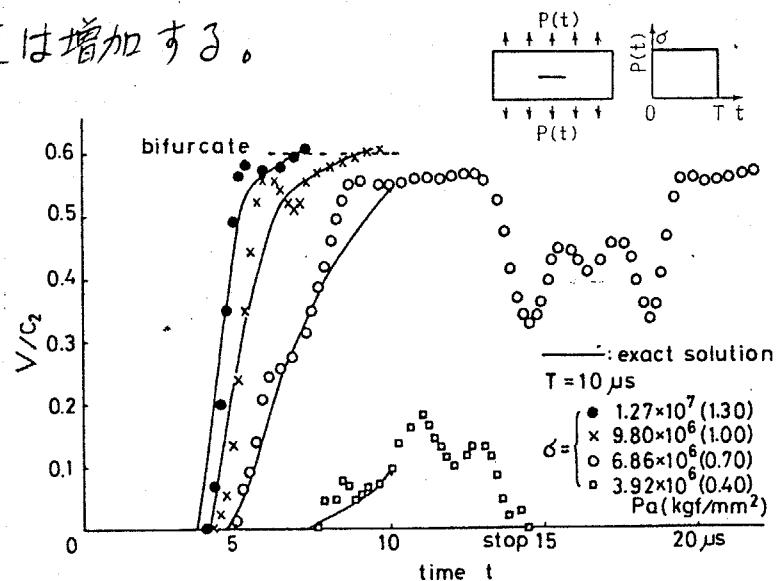
で無次元化されたき裂進展速度を表わし、横軸は荷重を加え始めてからの時間を表わす。まず、荷重を加え続ける場合に注目する（図中●印）。板の上下面に加えた荷重による応力波がき裂面に到達すると動的応力拡大係数が増加し始める。動的応力拡大係数の値が、

$$K_I^2(t,0) = 4\mu(1-\mu^2) G_c(0) \quad (\text{III-148})$$

に達するとき裂は進展を開始する。その後も動的応力拡大係数は増加するので、き裂進展速度と増加して分歧速度  $0.6C_2$  に達する。図中の実線は半無限き裂に対する  $K_I(t,0)$  の解<sup>(34-36)</sup>を用いて式 (III-142) よりき裂速度を求めたものを表わす。これは境界からの反射波の影響を受ける時刻までの厳密解を表してい。数値解と厳密解が良く一致していることから、逐次近似法による精度の向上をはからなくて実用的には十分な精度でき裂進展速度が求められることが推定される。荷重が单一ヘルツ状の場合には時刻  $T$  で除荷されたので除荷波（圧縮波）が生じる。荷重の持続時間  $T$  が  $4\mu s$  と  $5\mu s$  の場合には、それされ、 $7.3\mu s$  および  $8.3\mu s$  に圧縮波がき裂面に入射し、き裂進展速度は減少しき裂は停止する。 $T=10\mu s$  の場合には、時刻  $t=13.3\mu s$  にき裂面に圧縮波が入射し、き裂進展速度はいったん減くする。しかし、この場合には、 $T=4\mu s$  および  $5\mu s$  の場合に比較して除荷波がき裂先端に到達するまでにき裂進展によつて

応力の解放された範囲が広いので、自由境界で反射されて引張波となって入射する応力波の作用する時間も長く、その影響を受けて再びき裂進展速度は増加する。

荷重の持続時間を一定として荷重の大きさを変えた場合の結果を図III-70に示す。図中の実線は半無限き裂に対する  $K_I(t, \dot{\gamma})$  の解析解<sup>(35-38)</sup>を用いて式(III-142)より求めた計算結果を表す。荷重の大きさを変化することによって、き裂の分歧や停止が生じることが示されていく。



図III-70 高速き裂進展のシミュレーション  
(無次元化されたき裂進展速度の時間的変化) 加える荷重の大きさをえた場合

### 3.3.5. き裂の分歧に及ぼす負荷形式の影響について

せり性材料の破面形態とき裂進展速度との間には密接な関係があることが知られていく。たとえば、ガラスの破面は、き裂進展速度が増加するに伴って、鏡面状のミラー(Mirror)から細かい凹凸を有するミスト(mist)，さらに凹凸の激しいハックル(hackle)へと変化する。そして、ハックルが出現し始めた点が

き裂の分岐点にはほぼ対応する。

破壊時の応力  $\sigma_f$  とミラーの半径  $r_m$ 、または分岐するまでのき裂の進展量  $a_b$  との間には、実験的に次式が成立することが数多くの研究者らによつて報告されていふ。<sup>(44)</sup>

$$\sigma_f r_m^{1/2} = A = \text{const.} \quad (\text{III}-149a)$$

または、

$$\sigma_f a_b^{1/2} = K_b = \text{const.} \quad (\text{III}-149b)$$

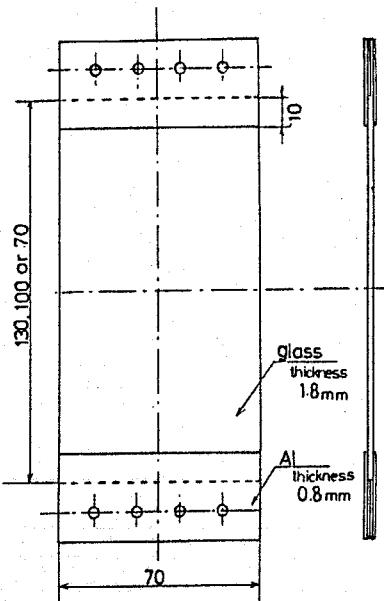
ここで、 $A$  はミラー一定数と呼ばれ、応力拡大係数と同じ次元を持つので  $A$  の値から破壊韌性値  $G_c$  を求める試みがある。<sup>(45)</sup> また、式(III-149)を利用して残留応力の測定<sup>(46)</sup>や初期欠陥の大きさを推定する試み<sup>(47)</sup>もある。しかしながら、引張りや曲げなどの負荷形式の違いによって  $A$  の値が異なるという事実が Abdel-Latif ら<sup>(48)</sup>によつて指摘されており、き裂が高速で進展する際に重要なとなる運動エネルギーの影響を考慮したエネルギーバランスの式に基づく考察が加えられていく。しかし、静的な応力・変位場からの類推によつて運動エネルギーが評価されていふこと、および、丸棒の試験片が用いられていふのでき裂が半椭円形状をしていふにとかからず二次元的な取扱いがされていふなどの問題点がある。

ところで、本節では、平板試験片を用いて行ったき裂の分岐実験の結果について検討する。

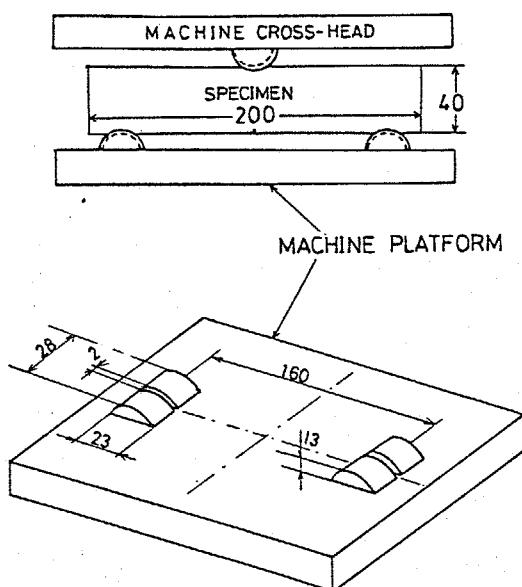
## (1) 実験方法および実験結果

同一ロットの板厚1.8mmの窓ガラス用ソーダライムガラスを供試材とし、中央切欠き試験片(CN)と片側切欠き試験片(SEN)による引張破壊試験及び三点曲げ破壊試験(3PB)を行った。引張破壊試験に用いた試験片の形状を図III-71に示す。幅は70mmで一定とし、長さを130, 100, 70mmの3種類に変化させた。試験片の両端の幅10mmの部分に厚さ0.8mmのアルミ板を工業用エポキシ系接着剤により接着し、鋼製のチャックを介し負荷した。片側切欠き試験片に対しては厚さ0.5mmのファインカッターで初期切欠きを作成し、中央切欠き試験片に対してはガラスカットリによって中央にきずを設けた。また、三点曲げ試験片の形状は、図III-72に示すように幅40mm、長さ200mmとし、支持点間距離を160mmに定めた。

負荷用エッヂは半円柱形とし試験片を荷重方向と垂直に保持するための案内溝を設けた。実験には、手動の



図III-71 中央切欠き試験片(CN)と片側切欠き試験片(SEN)の形状

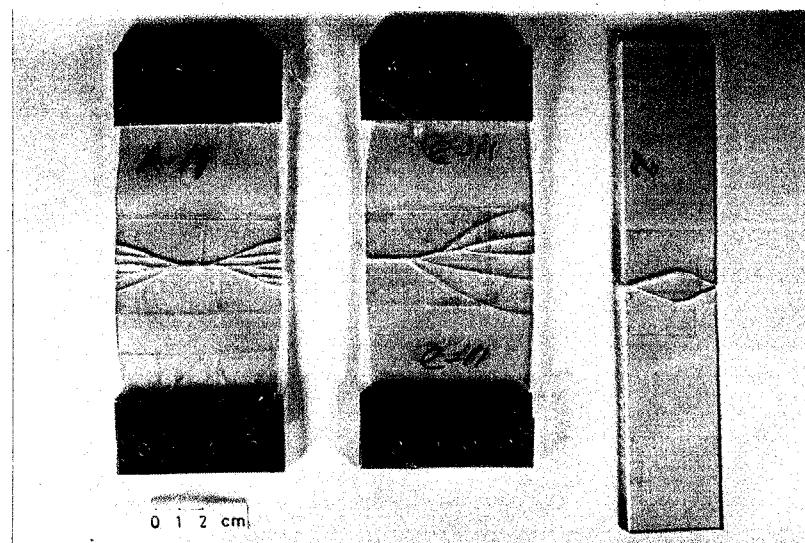


図III-72 三点曲げ試験片(3PB)の形状と負荷方法

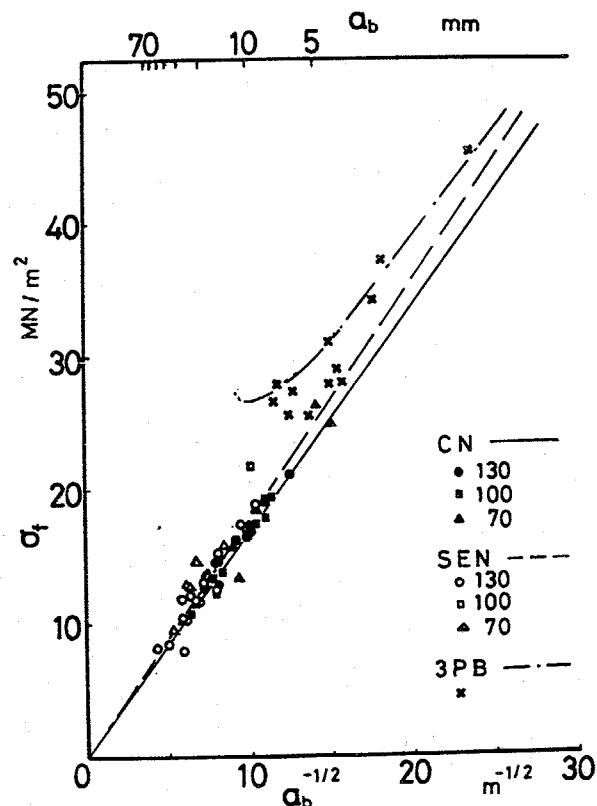
小型万能試験機を用いた。なお、破片を保存するために、き裂が進展すると予想される部分にあらかじめセロテープを貼布した。

き裂の分岐例を図III-73に示す。左から、中央切欠き試験片、片側切欠き試験片、三点曲げ試験片の順である。引張試験片では、第二次、第三次の分岐が起り、き裂が広がっているのに対し、三点曲げ試験片では第一次分岐の後に中央を過ぎたあたりで荷重点の方向にき裂が進展方向を変えているのが観察される。

破壊応力 $\sigma_u$ と第一次分岐までのき裂の進展量 $a_b$ について、 $\sigma_u$ を縦軸に $a_b^{-1/2}$ を横軸にとって整理すると図III-74 のようになる。引張試験片に対しては、破壊



図III-73 き裂の分岐例



図III-74 破壊応力 $\sigma_u$ と分岐までのき裂の進展量 $a_b$ の関係

荷重を断面積で除した値を $\sigma_0$ とし三点曲げ試験片に対しては

$$\sigma_0 = \frac{3SP_f}{2BH^2} \quad (\text{III}-150)$$

としている。ここで、 $S$ はスパン幅、 $P_f$ は破壊荷重、 $B$ は板厚、 $H$ は試験片の幅である。負荷形式の違いによって実験結果の傾向は異なり、式(III-149)の $K_b$ は材料定数とはならぬことわかる。しかし、試験片の長さが変化することによる影響は小さいようである。

## (2) 検討

### 破壊応力 $\sigma_0$ と分岐するまでのき裂進展量 $a_b$ の関係について

き裂の分岐条件としては、き裂進展速度条件<sup>(43)</sup>、エネルギー条件<sup>(44)</sup>、応力拡大係数条件<sup>(50)</sup>、ひずみエネルギー密度条件<sup>(51)</sup>および、ひずみ拡大係数条件<sup>(52)</sup>が提案されている。ガラス管を用いた実験に関して、き裂先端付近の周方向応力 $\sigma_\theta$ がき裂面上でなくき裂面と対称な位置で最大となるき裂進展速度（横波の伝播速度 $C_2$ の約60%）でき裂が分岐すること、 $\sigma_0$ と $a_b$ の関係が動的エネルギー解放率を用ることによつて良く説明できることが報告されている。<sup>(39)(53, 54)</sup>本節では、分岐条件として、き裂進展速度条件とエネルギー解放率条件を採用して実験結果を考察することにする。なお、き裂は高速になつてから分岐するので、Petch<sup>(50)</sup>やKirchner<sup>(52)</sup>らの静的な応力場に基づいた議論には問題があると考えられる。

き裂進展の条件は、式(III-113)と同様に動的エネルギー解放率  $G$  を用いて

$$G = G_C(v) \quad (\text{III-151})$$

によって表わされる。ここで、 $G_C$  は破面形成に必要な広義の表面エネルギーであり、一般に、き裂進展速度の関数と考えられる。動的エネルギー解放率と動的応力拡大係数  $K_I$  の間には、式(III-65)によつて一一の一の関係が成立する。したがつて、以下の議論では動的応力拡大係数  $K_I$  を用いる。

動的応力拡大係数は変数分離によつて

$$K_I = f_C(v) K^* \quad (\text{III-152})$$

の形で表わすことができる[例えば文献(42)]。ここで、 $f_C(v)$  は、き裂進展速度の関数であり、 $K^*$  は、その瞬間のき裂速度には依存しない“静的”応力拡大係数である。ただし、き裂進展によつて発生した応力波が境界で反射されて再びき裂先端に入射するときは、その影響を受けてき裂先端の応力・変位場は変化するので、 $K^*$  は一般にき裂進展履歴に依存する量である。分岐するときのき裂進展速度を  $v_b$  とすると式(III-65), (III-151), (III-152) より分岐時には

$$K_b = f_C(v_b) K_b^* = C \quad (\text{III-153})$$

が成立する。ここで、 $C$  は  $G_C(v_b)$  と  $A_I(v_b)$  の値から決まる定数である。

(i) 中央切欠き試験片：中央切欠き試験片に対して有限境界の影響がないとして、無限体中を一定速度で両側に進展するき裂に対する Broberg の解<sup>(27)</sup>を用いると、 $K_b^*$  は、き裂進展履歴に無関係に

$$K_b^* = \sigma_f \sqrt{\pi a_b} \quad (\text{III}-154)$$

である。この式から得られる分歧条件式は

$$\sigma_f a_b^{1/2} = \text{const.} \quad (\text{III}-155)$$

となり形式的に式(III-149)と一致する。したがって、 $\sigma_f$  と  $a_b^{1/2}$  のグラフ(図III-74)では実験点は直線となるはずである。そこで、最小自乗法を用いて実験結果から  $\sigma_f a_b^{1/2} = 1.68 \text{ MN/m}^{3/2}$  の結果を得た。この結果を図III-74 に実線で示した。また、き裂先端の周方向応力  $\sigma_\theta$  がき裂面の延長上で

$$\frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{III}-156)$$

を満足したときに、き裂が分歧するとのすると、分歧時のき裂進展速度は  $v_b = 0.623 C_2$  である(平面ひずみ状態を仮定)<sup>(53)</sup>。このとき、 $\kappa(v_b) = 0.470$  となる。したがって、式(III-153), (III-154) より

$$C = 1.40 \text{ MN/m}^{3/2} \quad (\text{III}-157)$$

の結果が得られる。

(ii) 片側切欠き試験片：中央切欠き試験片によって得られた値を用いて片側切欠き試験片のき裂の分歧について考察する。有

限界引の影響がな・とのとすれば、片側切欠き試験片に対しては半無限き裂に対する Freund の解<sup>(35,36)</sup>を適用することができます。

この場合  $K_b^*$  は

$$K_b^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{ab} \frac{P(x)}{\sqrt{ab-x}} dx \quad (\text{III}-158)$$

で与えられる。ここで、 $P(x)$  は、将来き裂面となるところに進展前に作用している応力である（図 III-75 参照）。初期切欠き長の 7~12 倍の長さにき裂が成長した後に分岐が起つてるので、切欠きの存在することによる応力集中が  $K_b^*$  に及ぼす影響は小さくと考えられる（切欠きを橿円孔で近似して応力集中の影響を調べたところ  $K_b^*$  に対する誤差は 2~4 % であった）。そこで、 $P(x) = \sigma_F$  とすると式 (III-158) より

$$K_b^* = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_F \sqrt{ab} \quad (\text{III}-159)$$

となる。なお、Freund の解に対しては、 $\kappa(2a_b) = 0.496$  である。したがって、式 (III-153), (III-157), (III-159) より

$$\sigma_F a_b^{1/2} = 1.77 \text{ MN/m}^{3/2} \quad (\text{III}-160)$$

が得られる。この結果を図 III-74 に破線で示した。中央切欠き試験片と片側切欠き試験片の実験結果の違いは理論的に解明された。片側切欠き試験片のデータより最小自乗法により決定した結果は  $\sigma_F a_b^{1/2} = 1.81 \text{ MN/m}^{3/2}$  となり、定数に対する誤差は 2.3 % であった。

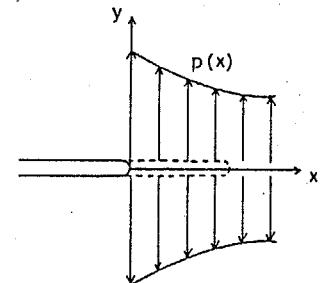


図 III-75 応力  $P(x)$   
の分布

(III) 三点曲げ試験片：三点曲げの場合には式(III-158)における関数は

$$P(x) = \sigma_s \left(1 - \frac{x}{H/2}\right) \quad (\text{III-161})$$

となる。ここで、 $\sigma_s$  は式(III-150)で与えられる。上式を、式(III-158)に代入すると

$$K_b^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_s \sqrt{a_b} \left(2 - \frac{8a_b}{3H}\right) \quad (\text{III-162})$$

となる。(たがって、式(III-153), (III-157), (III-162) より

$$\sigma_s a_b^{1/2} = 1.77 / \left(1 - \frac{4a_b}{3H}\right) \quad (\text{III-163})$$

が得られる。この結果は、先の引張試験の結果とは異なり  $\sigma_s a_b^{1/2}$  は一定とはならない。式(III-163)の結果を図III-74 に一点鎖線で示す。実験結果と良く一致していふことがわかる。なお、式(III-162)で与えられる  $K_b^*$  は  $a_b = H/4$  で最大となり  $a_b > H/4$  では減少する。(たがって、試験片幅の  $1/4$  を越えてき裂が進展する場合には動的応力拡大係数の値は減少するので、0~ $H/4$  で分岐しないき裂は最後まで分岐しないことになる。実験においても、 $a_b > H/4$  となる結果は得られなかつた。

以上より、破壊応力  $\sigma_s$  と分岐するまでのき裂の進展量との関係は、無限体中を進展するき裂に対する解<sup>1)</sup>を用いて破壊動力学的に説明できることが判明した。すなわち、分岐するまでのき裂の進展量は、進展開始時の初期応力分布に強く影響されることがわかる。

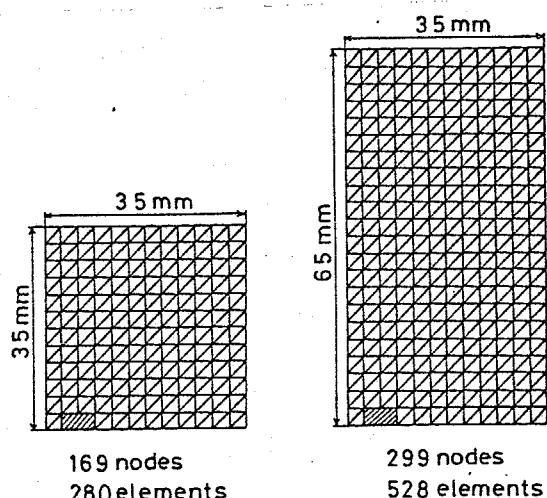
なお、物体へのくさびの打ち込みによって生じるき裂の場合などのように、き裂面に集中荷重を受けてき裂が進展する場合についでは、3.2.2.節で述べたように一樣応力を受けるBrabergの解に比べて $\kappa_1(C_b)$ の値が小さくなるので、式(III-153)よりき裂の分歧が起こりにくくなることが予想される。

### 境界からの反射波の影響について

き裂が進展することによって発生する応力波は境界で反射され再び、き裂面に入射し、き裂進展挙動に影響を及ぼすと考えられる。そこで、3.3.4.節で述べた手法によりき裂進展のシミュレーションにおける有限境界の影響について検討する。シミュレーションにおいては式(III-151)の破壊条件を満足するようにき裂を進展させた。動的破壊柔軟性値 $G_C(u)$ には図III-68で与えられるハイレックスガラスに対する測定結果を用い、 $E=62.4 \text{GN/m}^2$ ,  $V=0.2$ ,  $\rho=2.23 \text{Mg/m}^3$ とした。長さ130mmと70mmの二種類の長さの中央切欠き試験片について計算を行った。

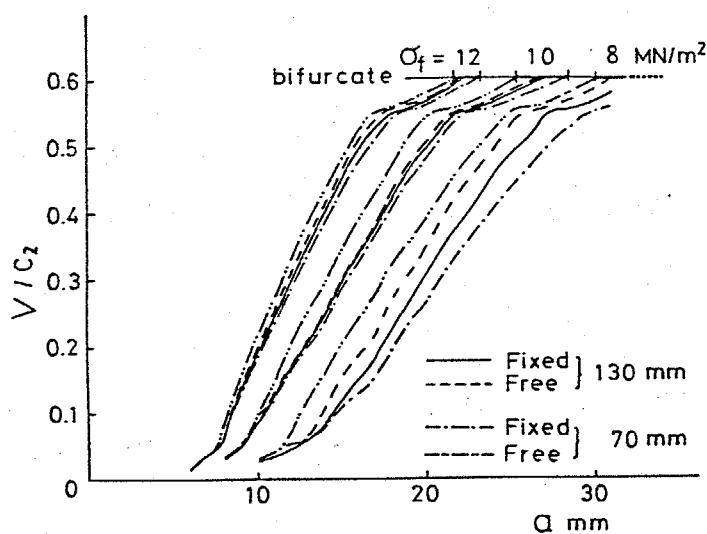
問題の対称性から板の1/4について図III-76に示すような要素分割を行った。図の斜線部は特別要素の形状を表わす。

シミュレーションにおいては、



図III-76 要素分割  
(斜線部は特別要素)

荷重を静的に負荷し、板の上下面の変位は上下方向には固定または自由とし、水平方向には自由とした。図III-77に計算結果を示す。縦軸は横波の伝播速度で無次元化され



図III-77 き裂長さとき裂進展速度の関係

たき裂の進展速度を、横軸はき裂先端の位置を表わす。実線および破線は試験長さが130mmの場合の結果を表わし、一点鎖線および二点鎖線は70mmの結果を表わす。図において、Fixedは上下面を固定端とした場合の計算結果を表わし、Freeは自由端とした場合の計算結果を表わす。計算結果では、破壊応力が高くなすに従って、分歧するまでのき裂の進展量が減少していく。これは実験結果と傾向的に一致している。き裂の進展に伴って生じる除荷波(圧縮波)は、固定端では圧縮波として、自由端では引張波として反射し、再びき裂面に入射する。したがって、上下面の支持条件の違いによってき裂の進展速度および分歧するときのき裂長さに差が表われている。短い試験片の場合には反射波が早くき裂面に到達するので、この差が大きく表われている。

ミュレーションにおいては、切欠きの先端からき裂が発生

するのではなく、最初からき裂が進展するモデルを考えていること、および、パイルックスガラスの物性値を用いてるので、実験結果と計算結果を定量的に比較することには問題があるか、図III-74の実験結果に有限境界の影響が顕著に表われてない理由として下記の点がシミュレーションの結果から推定できる。

(i) 試験片の上下面が完全な固定端あるいは自由端ではなく実際には半固定端であるので、反射波の影響が明確に表われない（き裂進展速度曲線が固定端と自由端の場合の中間にない）、有限境界の影響を受けない場合に近づく）。

(ii) 横軸を  $a_b^{-1/2}$  としているので、進展量の大きい場合（有限境界の影響を多く受けたと考えられる場合）に対してバラツキを小さくする整理の方法をとっている。

なお、き裂の高速進展現象に関しては、本節で取扱ったようない、き裂の分歧の問題のほかに、き裂進展阻止 (crack arrest) の問題<sup>(55)</sup>がある。この場合に、構造物の境界で反射する応力波がき裂の進展を促すように作用するのか、妨げるようにな作用するのかを評価することは重要であろう。(たゞ、2、境界の拘束条件の評価についてより詳細に検討することが今後の課題と言えられる。

### 3.4. 結言

衝撃荷重を受ける部材の破壊あるいは高速で進展するき裂のように、物体の慣性力の影響を考慮した動力学的な取扱いを必要とする問題について、主に、小規模降伏状態を仮定し弾性き裂モデルに基づいて検討を行った。弾性き裂モデルにおいては、前章において導出された子積分と、弾性エネルギー解放率  $G$  やび動的応力拡大係数  $K$  とか一対一に対応するので、動的き裂問題の解析は動的応力拡大係数の解析に帰着されることを示した。

つぎに、静止き裂に応力波が入射する場合について、き裂先端近傍の解析解を変位関数とする特異要素を用いた有限要素法および子積分の積分経路(領域)独立な表示式を用いた動的応力拡大係数の有限要素解析法を提案し、いずれの方針によつても動的応力拡大係数を精度良く求められることを示した。また、三点曲げ試験片の動的応力拡大係数の簡便評価式を導びき、本式によつて求められる値は実測結果と良く一致することを示した。

高速き裂問題に関しては、まず、無限体中にあるき裂が、その中央に時間とともに増大する集中荷重を受けて両側に一定速度で進展する場合について解析を行い、動的応力拡大係数はき裂進展速度の増加とともに減少することを示し、き裂進展挙動

につけて定性的な考察を行った。つぎに、任意形状の物体中を進展するき裂の動的応力拡大係数の解析に適用できるように上述の特異要素を用いた有限要素法を拡張し、高速き裂進展を精度良くシミュレートする方法を提案し、若干の計算例を示した。また、ガラスの平板試験片を用いて引張りおよび曲げ荷重によるき裂の分岐実験を行い、破壊応力と分岐するまでのき裂の進展量との関係か動的応力拡大係数を用いたき裂分岐条件式によって説明できることを示した。

塑性変形の影響については、集中荷重を受けて両側に進展するき裂の場合に関して、Dugdale の仮定に基づいて近似的な解析を行い、き裂進展速度の増加に伴って塑性変形域の大きさやき裂先端の開口変位が減くすることを示した。任意のき裂に関する一般論は今後の重要な研究課題であると考えられる。

## 第IV章 弾塑性破壊問題への応用

### 4.1. 緒言

高軽性材料で製作される原子炉圧力容器やタービンロータなどの構造健全性を評価するために、これらの構造物中に内存するか稼動中に発生するき裂の成長開始、安定成長、および不安定成長への遷移などの挙動を予測しようとする研究が治発に行われている。<sup>(1-3)</sup> き裂のこのような挙動を記述するためのパラメータとして、Rice が提案したJ積分<sup>(4)</sup>が利用されることが多い。しかし、第I章で述べたようにJ積分は非線形弾性体の二次元問題に対して定義されているので、弾塑性問題においてJ積分が、き裂先端近傍の応力・ひずみ場を特徴づける積分経路独立な破壊力学パラメータとしての物理的な意味を持つのは、全ひずみ理論に従う弾塑性体が单调増加荷重を受ける場合に限られている。さらに、機械的な荷重のほかに熱による荷重が作用する場合には、小規模降伏状態においてもJ積分を破壊力学パラメータとして用いることが不合理となる。

第II章において、任意の物体中をき裂が進展する際のエネルギーの平衡について考察し、破壊進行領域の大きさがき裂長さに比較して無視できる場合には、J積分がき裂の進展挙動を記述するための单一の破壊力学パラメータとして有望であることを述べた。また、J積分は三次元き裂問題に対して拡張できる

ことを示した。

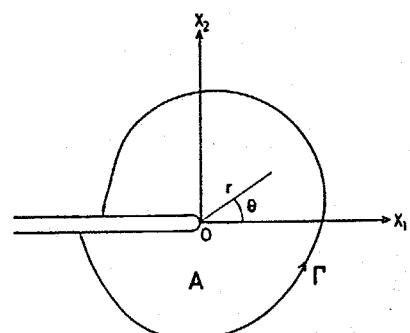
本章では、丁積分を適用すことが困難な場合、すなわち、除荷過程を含む場合、熱ひずみが存在する場合および三次元貫通き裂の場合について有限要素解析を行い、弾塑性破壊力学によるメータとしての丁積分の有用性について検討する。なお、本章では準静的過程を取り扱い慣性力の影響は無視する。

## 4.2. 平面問題における丁積分

### 4.2.1. はじめに

本節では、除荷過程を含む場合および熱ひずみが存在する場合の二次元き裂問題に関して検討する。図IV-1に示すような二次元き裂問題を考え、き裂先端を原点Oとし、き裂面を $X_1$ 軸とする固定座標系 $O-X_1, X_2$ を採用し、 $\Gamma$ をき裂下面から出発しき裂先端を囲みき裂上面で終る任意の曲線とし、Aを曲線 $\Gamma$ とき裂面が囲む領域とする。物体力、慣性力、き裂面の表面力および破壊の進行領域を無視すると、熱ひずみ $\epsilon_{ij}^T$ 、塑性ひずみ $\epsilon_{ij}^P$ が存在する場合の丁積分は、式(II-39)より

$$\bar{J} = - \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^T}{\partial x_1} dA \quad (IV-1)$$



図IV-1 き裂および座標系

で与えられる。ここで、 $\varepsilon_{ij}$  は全ひずみであり、

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^t + \varepsilon_{ij}^p \quad (\text{IV-2})$$

である。式(IV-1)の子積分は材料が均質等方でなくとも、エネルギー解放率としての物理的意味を持ち、積分経路(したかう、領域A)の選び方によらない。また、弾性ひずみエネルギー密度  $W_e$  が  $X_2$  を陽に含まなければ、すなはち、材料が  $X_1$  軸方向に均質ならば、式(IV-1)は次式のように変形できる。

$$J = \int_P W e dX_2 - \int_P T_c \frac{\partial u_i}{\partial X_1} dP + \iint_A \sigma_{ij} \frac{\partial(\varepsilon_{ij}^t + \varepsilon_{ij}^p)}{\partial X_1} dA \quad (\text{IV-3})$$

ただし、

$$W_e = \int_0^{\varepsilon_{ij}^e} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e \quad (\text{IV-4})$$

である。一方、RiceのJ積分は次式で定義される。<sup>(4)</sup>

$$J = \int_P W dX_2 - \int_P T_c \frac{\partial u_i}{\partial X_1} dP \quad (\text{IV-5})$$

ただし、

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}^e} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (\text{IV-6})$$

である。ただし、 $\varepsilon_{ij}^t = \varepsilon_{ij}^p = 0$  のときは、式(IV-3)と(IV-5)は一致する。線形弾性体では閉口形(モードI)変形に対して、

$$J = J = \frac{1-v^2}{E} K_I^2 \quad (\text{平面ひずみ状態}) \quad (\text{IV-7})$$

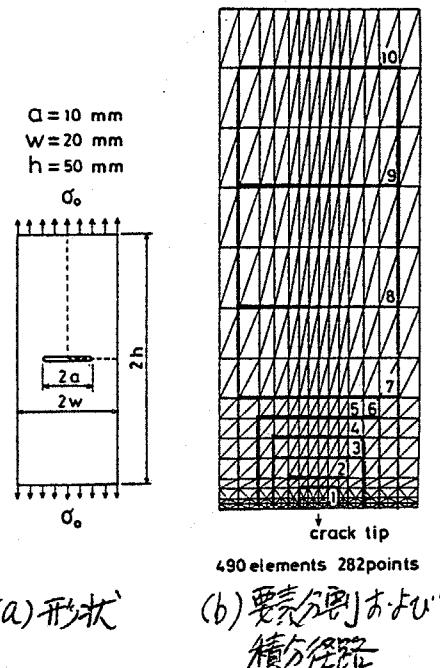
が成立する。ここで、 $K_I$  は応力拡大係数、 $E$  は綫弾性係数、より  $v$  はポアソン比である。

#### 4.2.2. 除荷過程を含む場合の子積分

本節では、除荷過程を含む場合の子積分を有限要素解析し、前荷重が子積分に与える影響および子積分とき裂先端の開口度位 CTOD の関係などについて考察する。

### (1) 子積分の有限要素解析法

ひずみ増分理論に基づいて式(IV-1)および(IV-3)より除荷を含む場合の子積分の有限要素解析を行った。図IV-2(a)に解析の対象とした中央き裂を有する平板の形状と寸法を示す。平板の上下面に一様応力が作用するとし、平面ひずみ状態を仮定した。図IV-2(b)に要素分割および子積分の積分経路を示す。要素としては汎用の三角形定ひずみ要素を用いた。ただし、式(IV-1)の第二項および式(IV-3)の第三項の  $\partial \epsilon_{ij} / \partial x$ 、および  $\partial \epsilon_{ij}^P / \partial x$  はつきのようにして計算した。まず、定ひずみ要素を用いて計算した各要素のひずみ  $\epsilon_{ij}$  および  $\epsilon_{ij}^P$  を各節点に振り分ける。この際、考えていく節点に連なるすべての要素のひずみを各要素の面積を重みとして平均し、その値をその節点のひずみとする。つぎに、一次の内挿関数を用いて要素内の任意の点のひずみおよび  $\epsilon_{ij}^P$  を表わし、これから  $\partial \epsilon_{ij} / \partial x_1$ 、および  $\partial \epsilon_{ij}^P / \partial x_1$  を求めた。



図IV-2 中央き裂を有する平板

材料としては鋼を想定し、縦弾性係数  $E = 206 \text{ GPa}$ 、ポアソン比  $\nu = 0.3$ 、降伏応力  $\sigma_y = 481 \text{ MPa}$  とした。また、直線硬化則を採用し、加工硬化率  $H'$  を  $E/100$  とした。ただし、

$$H' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon^P}, \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_j' \sigma_j'}, \quad d\varepsilon^P = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_j^P d\varepsilon_j^P} \quad (\text{IV-8})$$

である。ここで、 $\sigma_j'$  は偏差応力である。計算プログラムの作成にあたっては文献(5)を参照した。

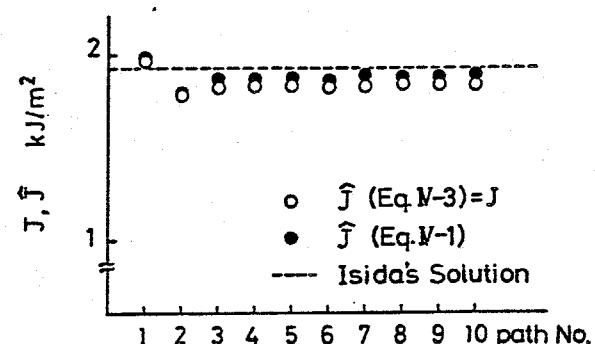
参考のために、上述の有限要素解析によって得られた応力・変位場から式(IV-5)の  $J$  の値を計算した。また、単位厚さ当たりの荷重  $P = \sigma_0 \times 2W$  と平板上面の変位(板幅にわたってほぼ一定値が得られた)の平均値  $\delta$  を計算して  $P-\delta$  曲線を作り、Rice ら<sup>(6)</sup> の簡便式

$$J_A = G + \frac{2}{b} \left[ \int_0^\delta P d\delta - \frac{1}{2} PS \right] \quad (\text{IV-9})$$

による  $J_A$  の値を求めた。式(IV-9)で  $G$  は線形弾性体のエネルギー解放率、 $b$  はリガメント長さを示す。

## (2) 単調増加荷重に対する子積分

図IV-3に弾性状態における子積分の計算結果を示す。前述のように、この場合には式(IV-3)の子と式(IV-5)の  $J$  は一致する。式(IV-1)による子(●印)は式(IV-3)の子(○印)



図IV-3 弾性状態における子  
( $\sigma_0 = 100 \text{ MPa}$ )

より若干高めの値を示していゝが差は小さく、この差異は数値計算上の誤差によるものと考えられる。破線は石田による応力拡大係数の解<sup>(7)</sup>を式(IV-7)によって今に換算した値である。理論的に予想されるように、式(IV-1)および(IV-3)の今の値はほぼ経路独立性を示し、石田の解とよく一致している。

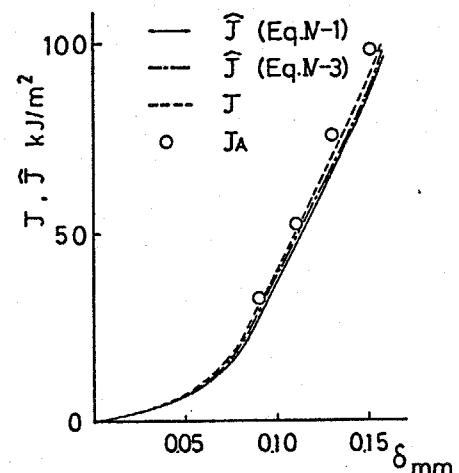
図IV-4に単調増加荷重下の弾塑性状態における今、J、JAに対する計算結果を示す。今およびJの値は10個の経路に対する計算値の平均値を採ってある。

Riceらの簡便式(IV-9)によるJA(○印)は式(IV-5)のJ(破線)とよく一致している。式(IV-1)および(IV-3)

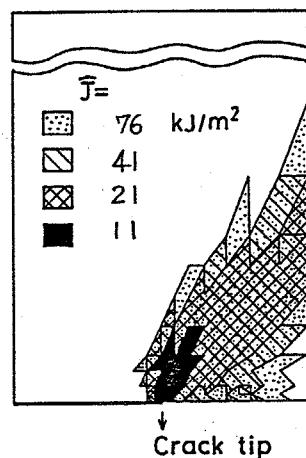
の今(実線および一点鎖線)はJよりわずかに低目の値を示すが、その差は小さく単調増加荷重の今はJと実質的には一致することわかる。図IV-5は種々の今に対する塑性域の計算結果である。

### (3) 障荷を含む場合の今積分

図IV-6に示すように、 $\sigma_0-S$ 曲線上の点OからA→B



図IV-4 単調増加荷重の下での今-S曲線



図IV-5 塑性域の形状

のように負荷した後除荷し、再び C → D → E のように負荷する場合の子積分を式(IV-1)によって解析した。除荷を開始する点 B における外応力  $\sigma_0$  を  $\sigma_{\text{opre}}$  とし、 $\sigma_{\text{opre}}/\sigma_y = 0, 0.4, 0.5, 0.6, 0.65, 0.68$  の 6 種類に対して計算を行った。

除荷過程が存在するので Rice の J 積分は定義できないが、参考のために、除荷が終了した点 C を基準として点 C からの変位およびひずみの変化から再負荷時ににおける式(IV-5)の J の値を計算した。すなわち、点 C を基準とした点 E における変位  $u_i^E$

およびひずみ  $\epsilon_{ij}^{EC}$  [ $u_i^{EC} = u_i^E - u_i^C$ ,  $\epsilon_{ij}^{EC} = (\partial u_i^{EC} / \partial x_j + \partial u_j^{EC} / \partial x_i) / 2$ ,  $u_i^E$ : 点 E における変位,  $u_i^C$ : 点 C における変位] を式(IV-5)に代入して J の値を求めた。また、B → C → D の過程を無視して曲線 O A B D E から式(IV-9)の簡便式によじて、点 E における JA の値を計算した。

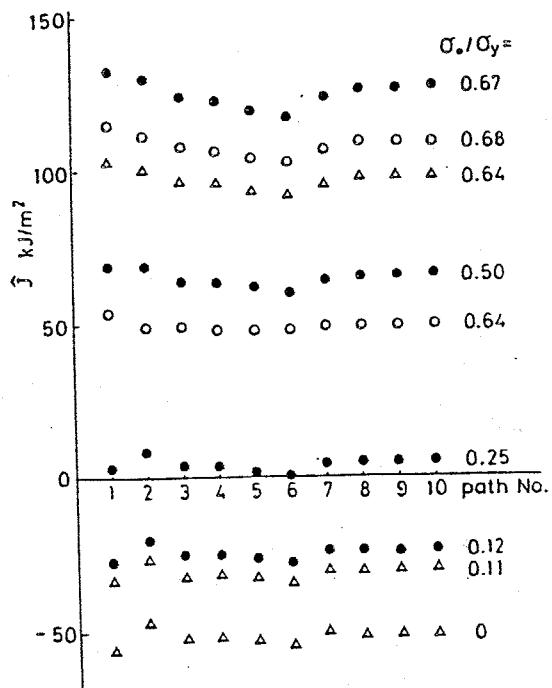


図 IV-7 子の径路独立性  
(○負荷, ▲除荷, ●再負荷)

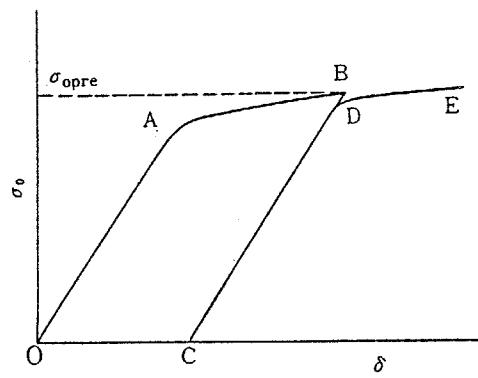


図 IV-6 荷重履歴

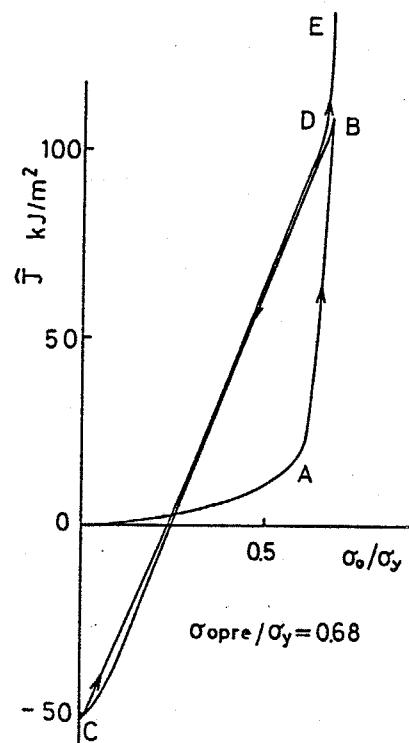
図 IV-7 は  $\sigma_{\text{opre}}/\sigma_y = 0.68$  の場合の各積分径路に対する子の計

算結果である。理論的に予期したように、除荷時(△印)においても、負荷時(○印)および再負荷時(●印)と同様に今の中立性が成立していることを確認することができます。以下では今の中立として各経路に対する値の平均値をとることとする。

図IV-8 は今積分の変化を示す。図

中の点A, B, C, D, Eは、それぞれ、図IV-6の同じ記号の点における状態に対応している。今の中立は点A付近で急激に増大し、点Bから除荷が始まるとほぼ直線的に減少し、除荷の途中で負の値となり、除荷の終了点ではかなり大きな負の値になっている。再負荷すると今は除荷時の変化をほぼ逆にたどり点Dに達し、その後はほぼA-Bの延長線上に沿って急上昇している。

き裂は、後述するように、除荷の終了点Cにおいて残留在するため開口していくものに対して、き裂先端付近の応力 $\sigma_{zz}$ は除荷の途中で正から負の値に転じ、点Cではき裂先端付近の要素において圧縮側の再降伏が生じている。また、き裂先端付近の応力 $\sigma_{zz}$ が負になると、これに応じて今の中立と負の値となっていく。(次頁脚注)

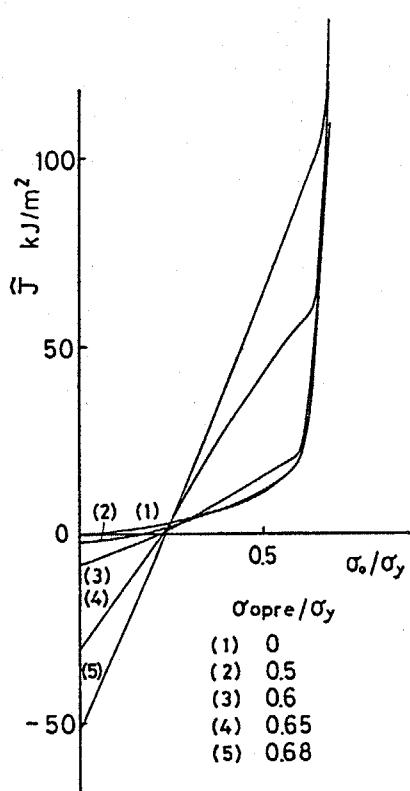


図IV-8 今の中立曲線

図IV-9は種々の前荷重に対する再負荷時の $\Delta$ の変化を示す。前荷重が大きい程、除荷の終了点では負の大きな残留応力が生じるため、 $\Delta$ も負の大きな値となっている。また、前荷重よりと大きな荷重まで再負荷すると前荷重の影響がうすれていくことがわかる。

図IV-10は種々の前荷重を与えた後除荷し、一定荷重( $\sigma_0/\sigma_y = 0.68$ )まで再負荷したときの $\Delta$ 、丁およびJAの値を前荷重の大きさに対してプロットしたものである。予積分の値(0印)は簡便式による

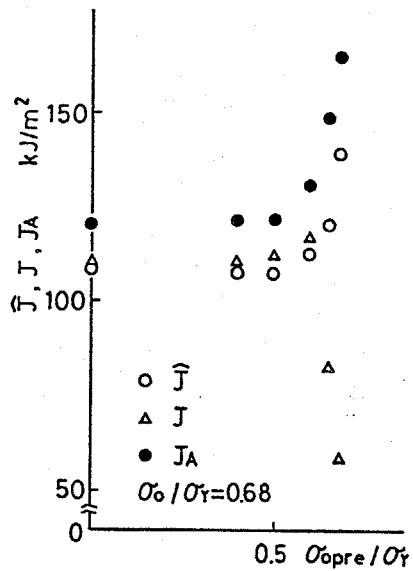
(脚注) 式(II-66)において $-1 < \beta < 0$ であるから、 $\Delta$ と $\alpha$ 、 $\beta$ の符号が一致することがわかる。き裂が閉口していれば、 $\partial u_2(x_1, -\delta)/\partial x_1$ は正、 $\partial u_2(x_1, +\delta)/\partial x_1$ は負となるので、式(II-64b)より $\beta$ は正となる。したがって、 $\Delta$ の符号は $\alpha$ の符号、すなわち、き裂先端近傍の $\sigma_{22}$ の符号(式(II-64a)参照)と一致することがわかる。図IV-11に示すように全過程を通じて、き裂は閉口しているので、き裂先端付近の応力 $\sigma_{22}$ が負になるところに応じて $\Delta$ の値も負になることわかる。



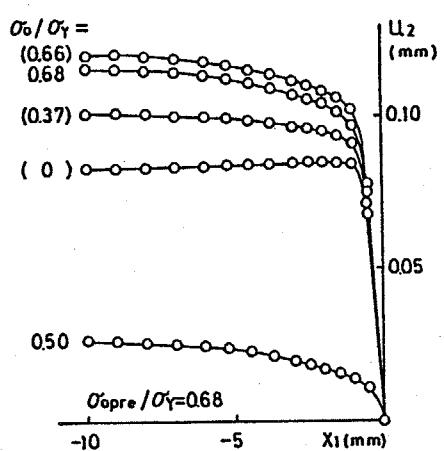
図IV-9 再負荷時の $\Delta$ - $\sigma_0/\sigma_y$ 曲線

$\bar{J}$  の値すなわち JA (●印) と絶対値は若干異なるが、定性的にはほぼ同様の傾向を示している。いっぽう除荷の終了点を基準とした変位およびひずみを式(IV-5) の総積分に代入して求めた  $\bar{J}$  の値 (△印) は、比較的大きな前荷重に対して、 $\bar{J}$  積分とは異った傾向を示すことわかる。

図IV-11 はき裂の開口状態を示す。すなわち、縦軸はき裂面の変位  $U_2$  を示し、横軸はき裂面上の位置  $X_1$  を示している。負荷の増大とともに徐々に開口量が増大していくが、除荷が始まると開口量は減少するが、除荷の終了点でと残留ひずみのためにき裂は閉じていないことわかる。再負荷時には、荷重が前荷重の大きさに達するまでは開口量の増大は比較的少なり。開口量を表わす尺度として、き裂端に最も近い節点を除いて (この点の変位は他の点の変位となめらかに接続し難いので除いた)、き裂面の変位を  $X_1=0$  まで外挿してき裂端開口変位 (CTOD) を求めた。



図IV-10 今に与える前荷重の影響 ( $\sigma_0/\sigma_y=0.68$  まで再負荷した場合)



図IV-11 き裂の開口状態  
(括弧は再負荷時)

このようにして求めた CTOD は電子顕微鏡による測定値とは定量的に異ると思われるが、き裂の閉口状態の定性的傾向を議論するためには役立つとのと考えられる。

図 IV-12 は種々の前荷重を負荷した後に除荷し、一定の CTOD (CTOD = 0.18 mm) になるまで再負荷したときの  $\hat{J}$  やび  $J_A$  の値を示す。子積分値 ( $\circ$ 印) は簡便式による  $J$  の値すなわち  $J_A$  ( $\bullet$ 印) とともに、前荷重の大小によらず“ほぼ”一定の値を示している。すなわち、前荷重の大小によらず、CTOD が一定になっていれば、 $\hat{J}$  と一定になっていくことわかる。

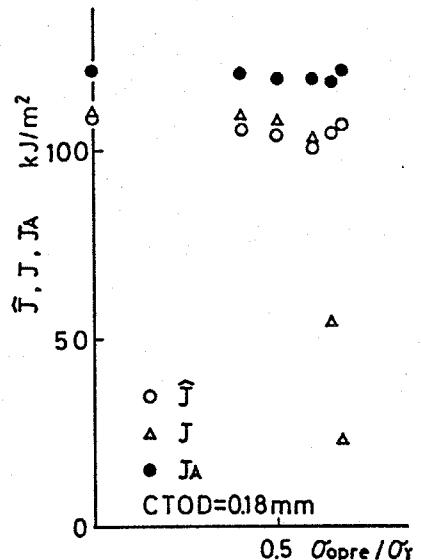


図 IV-12  $\hat{J}$  に与える前荷重の影響 (CTOD = 0.18 mm まで再負荷した場合)

#### 4.2.3. 温度場における子積分

4.1節において述べたように、機械的な荷重のほかに熱による荷重が作用する場合には、 $J$  積分は経路独立性およびエネルギー解放率としての物理的意味を失う。また、このような場合の応力・ひずみの特異性と  $J$  積分の関係も明らかではない。このために、 $J$  積分の種々の拡張が試みられていく。線形弾性体に対しては、Wilsonら<sup>(8)</sup>は熱ひずみが存在して  $J$  積分経路(領域

を含む)に依存しない積分を導き、これを用いて応力拡大係数を求める方法を提案し、Gurtin<sup>(9)</sup>は温度場における積分経路に独立な線積分が存在することを見出している。また、弾塑性体に対しては Blackburn ら<sup>(10)</sup>および Ainsworth ら<sup>(11)</sup>はこれ熱ひずみが存在してと積分経路(領域)に依存しないJ<sub>2</sub>積分およびJ<sub>0</sub>積分を導いている。(しかし、これらの物理的意味が十分明らかにされていなく思われる。<sup>(脚注)</sup>)

本節では、まず、温度場における弾塑性体のき裂先端近傍の応力・ひずみの特異性と子積分の関係について調べ、温度場における弾塑性破壊力学パラメータとしての子積分の有効性について検討する。つぎに、非定常温度場における弾塑性体の子積分を、材料定数の温度依存性を考慮して有限要素解析し、実際の構造物の健全性評価に子積分が利用できることを示す。

### (1) 温度場における応力・ひずみの特異性と子積分の関係

いま、子積分の積分経路 $\Gamma$ としてき裂先端に中心を持つ半径 $\rho$ の円を選び、 $\rho \rightarrow 0$ とする場合を考える。熱ひずみ $\varepsilon_T^{\pm}$ の存在は弾性ひずみ $\varepsilon_E^{\pm}$ (したがって、応力 $\sigma_E$ )および塑性ひずみ $\varepsilon_P$ の特異性に影響を与えるが、一般に $\varepsilon_T^{\pm}$ 自身はき裂先端近傍で特異性を持たない。ただし、ここでは高速き裂のように、

(脚注) 2.4.2.節において、子積分が特別な場合にはJ<sub>0</sub>積分と一致することを示した。

き裂先端で発熱などが存在し、き裂先端が温度場の特異点となる場合については考えないこととする。したがって、 $\rho \rightarrow 0$  の極限では  $\varepsilon_{ij}^t$  は他のひずみ  $\varepsilon_{ij}^e$  や  $\varepsilon_{ij}^p$  に比べて無視できる。ゆえに、もし材料が全ひずみ塑性論に従う弾塑性体であり除荷がなければ、非線形弾性体と見なすことができるので、式(IV-1)および式(IV-3)は次式のように書き直すことができる。ただし、 $\rho \rightarrow 0$  の極限では材料は X 軸方向に均質とする。

$$\hat{J} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ \int_p W dX_2 - \int_p T_i \frac{\partial U_i}{\partial X_1} dP \right] \quad (\text{IV-10})$$

ここで、W はひずみエネルギー密度であり、式(IV-6)で与えられる。したがって、温度場では次式が成立する。

$$\hat{J} = \lim_{\rho \rightarrow 0} J \quad (\text{IV-11})$$

ここで、J は Rice の J 積分である。また、 $\rho \rightarrow 0$  の極限では、 $\varepsilon_{ij}^t$  が他のひずみに比べて無視できることから、温度場においてき裂先端近傍の応力・ひずみは HRR の特異性<sup>(12)(13)</sup>を持つことがわかる。したがって

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_Y \left( \frac{E \lim_{\rho \rightarrow 0} J}{\sigma_Y^2 r} \right)^{N/(N+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta; N) \quad (\text{IV-12a})$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\sigma_Y}{E} \left( \frac{E \lim_{\rho \rightarrow 0} J}{\sigma_Y^2 r} \right)^{1/(N+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta; N) \quad (\text{IV-12b})$$

ただし、r, θ はき裂先端に原点をとった極座標(図 IV-1 参照)、 $\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{\varepsilon}_{ij}$  は θ と加工硬化指数 N の既知関数である。式(IV-11)を式(IV-12)に代入すると、

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_Y \left( \frac{E \hat{J}}{\sigma_Y^2 r} \right)^{N/(N+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta; N) \quad (\text{IV-13a})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_y}{E} \left( \frac{E\dot{\gamma}}{\sigma_y^2 r} \right)^{1/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta; N) \quad (IV-13b)$$

が得られ、温度場における応力・ひずみの特異性の強さは子積分によって表わされることがわかる。

物性値が温度によって変化することにより材料が不均質になる場合にと  $P \rightarrow 0$  極限では均質と見なすことができるので上式はそのまま成立する。上式中の子積分は、式(IV-1)を用いれば不均質な材料に対してと径路(領域)独立性が成り立つので、任意の径路(領域)を用いて評価することができる。ひずみ増分塑性論に従う材料に対しても、単調増加荷重下ではき裂先端のごく近傍を除けば、き裂先端付近の応力・ひずみ場は式(IV-13)でよく近似できると考えられる。大規模な除荷を含む場合のき裂先端近傍の応力・ひずみの特異性および特異性と子積分の関係についてはまだ明らかではなく、今後の課題である。なお、もし材料が等方線形弾性体ならば、式(IV-10)の右边における各量は応力拡大係数  $K$  を用いて記述できる。平面ひずみ状態を仮定して計算を実行すると閉口形変形(モードI)に対し

して

$$\dot{\gamma} = \frac{1-v^2}{E} K^2 \quad (IV-14)$$

が得られる。

以上により、子積分は温度場におけるき裂先端近傍の応力・ひずみの特異性の強さを表わすことが明らかになったので、積

分径路(領域)独立性およびエネルギー解放率としての物理的意味を考え合わせると、子積分は温度場における弾塑性体中のき裂の挙動を記述するための破壊力学パラメータとして有望と考えられる。

## (2) 温度場における子積分の有限要素解析

子積分を実際の構造物に適用するためには数値計算が必要となる。本節では、まず、等方線形弾性体に対する子積分を有限要素法によって解析し、結果を式(IV-14)を介して解析解と比較し、計算精度の確認などを行う。つぎに、材料定数に温度依存性がある弾塑性体について有限要素解析し、子積分の積分径路(領域)独立性などを確かめ、実際の構造物に対して子積分が比較的容易に計算できることを示す。

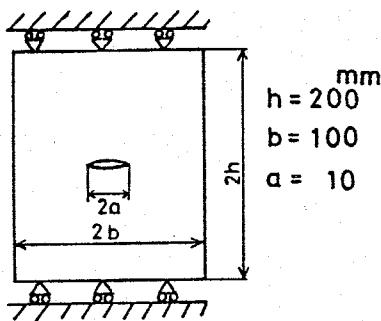
### 弾性問題

等方線形弾性体を考え、基準温度からの温度差を $\theta$ とし、 $\alpha$ を線膨張係数とすれば、 $\varepsilon_{ij}^P = 0$ ,  $\varepsilon_{ij}^T = \alpha \theta \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$  Kronecker の delta)

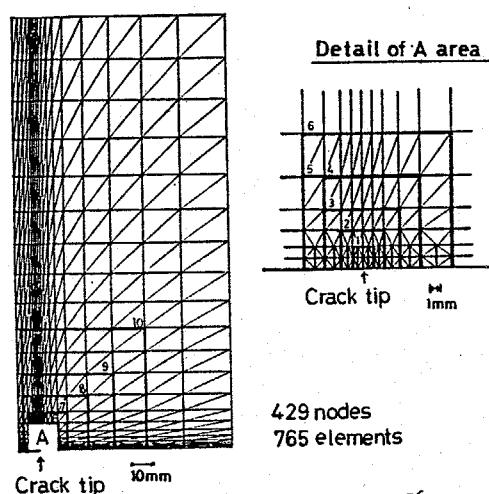
したがって、式(IV-3) は

次式のような簡単な形となる(

式(II-47)参照)。



(a) 形状と寸法



(b) 要素分割と積分径路

図IV-13 中央き裂を有する平板(左右面を冷却)

$$\dot{J} = \int_p w e dX_2 - \int_p T_c \frac{\partial u_i}{\partial X_1} dP + \alpha \int_A G_{ii} \frac{\partial \Theta}{\partial X_1} dA \quad (IV-15)$$

図IV-13(a)に示すような中央き裂を有する長方形板の左右面を基準温度から  $\Theta = -100^\circ\text{C}$

まで急冷する場合、および図IV-14(a)に示すような外側を断熱した円筒の内面を  $\Theta = -100^\circ\text{C}$  まで急冷する場合について、式(IV-15)

により子積分を有限要素解析した。ただし、平面ひずみ状態を仮定し非連成静的熱弾性理論を採用した。温度場および応力変位場の解析に用いた要素分割および子積分の積分経路を図IV-13

(b) および 図IV-14(b)に示す。平板、円筒とともに三角形一次要素を用い、節点数429、要素数765とした。非定常温

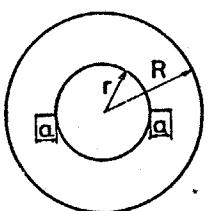
度場の計算法は文献(14), (15)に従

つた。弾性問題では低炭素鋼を想定し、材料定数(表IV-1参照)は温度によらず一定とした。

図IV-15に平板の定常温度場(

7200に相当)における子積分の

種々の積分経路に対する計算値を○印で示す。図中の実線は平

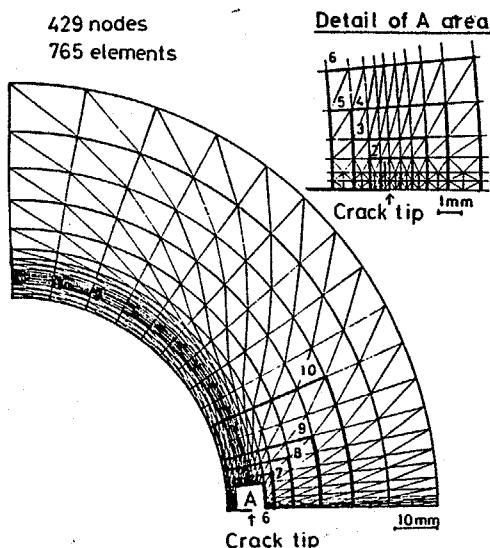


$$R = 100\text{mm}$$

$$r = 50\text{mm}$$

$$a = 5\text{mm}$$

(a) 形状と寸法



(b) 要素分割と積分経路  
図IV-14 き裂を有する円筒  
(内面を冷却、外  
面は断熱)

綫弾性係数	$E$	$206\text{ MPa}$
ボアソン比	$\nu$	0.3
線膨張係数	$\alpha$	$1.2 \times 10^{-5}/\text{C}$
温度伝導率	$K$	$4.58 \times 10^2 \text{ m}^2/\text{h}$

表IV-1 弾性問題の  
材料定数

板の上下方向変位を拘束した状態でき裂表面に圧力  $P$  [  $P = -E\alpha \Theta / (1-\nu)$ ,  $\Theta = -100^\circ\text{C}$  ] を加えた場合の応力拡大係数の石田の解<sup>(6)</sup>を式(IV-14)に代入して求めた子積分の値を示す。子積分値(○印)はほぼ径路(領域)独立性を示し、石田の解から得られる値とよく一致している。

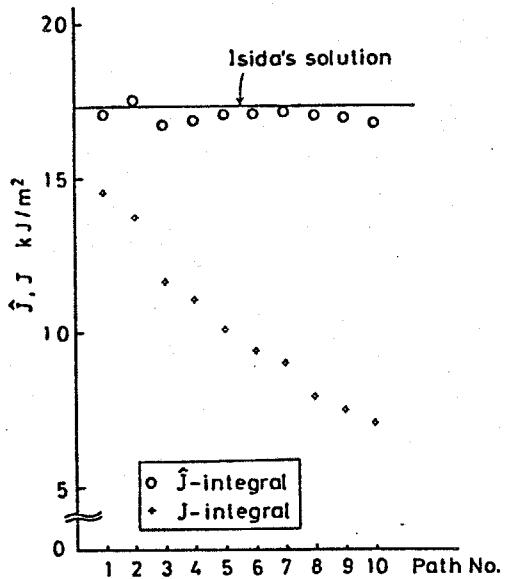
同図中の+印は式(IV-5)で定義される Rice の丁積分の計算値を示す。この値は径路に依存していることがわかる。一様な温度場であるから式(IV-15)の第三項がゼロとなるにどかわかるが、子積分と丁積分の間にこのような差異が生じるのは、式(IV-4)の

$$W^e = G_{ij} (\bar{\epsilon}_{ij} - \bar{\epsilon}_{ij}^t) / 2 \quad (\text{IV-16})$$

と式(IV-6)の

$$W = G_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} / 2 \quad (\text{IV-17})$$

の値が異なることに起因している。図IV-15で小さな径路に対して丁積分値は子積分値に近づいているが、式(IV-11)が成立するためには、径路はさうに小さくなければならないことがある。



図IV-15 平板の定常温度場の子積分と丁積分  
(弾性計算)

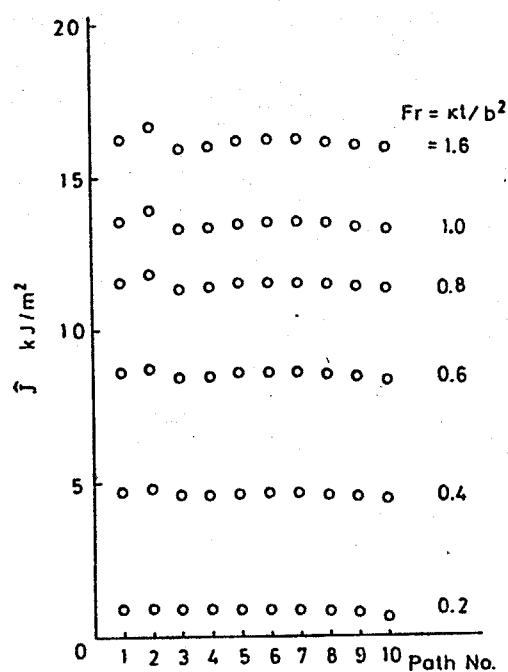
図IV-16に平板の非定常温度場における子積分の各経路に対する計算結果を示す。一様でない温度場に対して各時間の子積分値はほぼ経路(領域)独立性を示していえる。

図IV-17に平板の子積分値の時間的変化を示す。子積分値は、経路(領域)独立性が成り立つているので、経路5に対する値を採った。以下も同様である。

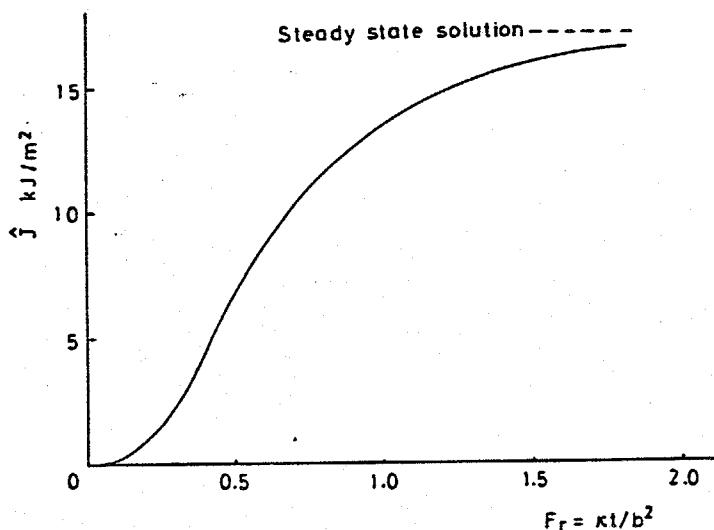
図中の破線は図IV-15の実線と同じ値であり、定常解を示す。子積分値はゼロから次第に増大し、定常解に漸近している。

図IV-18は円筒における子積分値の時間的変化である。実線は円筒内面ばかりではなく、き裂面上で $\theta = -100^{\circ}\text{C}$ の温度を指定した場合

であり、破線は円筒内面のみに同じ温度を指定した場合である。



図IV-16 平板の非定常温度場の子積分の経路独立性(弹性計算)



図IV-17 平板の子積分の時間的変化  
(弹性計算)

いざれの場合と子積分値は冷却開始後、急激に上昇し最大値を経た後減少してゼロに漸近していくが、き裂面でと温度を指定した方(実線)が立ち上がりが速く、最大値が大きいことがわかる。なお

、実線、破線の別を問わず、子積分の経路(領域)独立性は図IV-16と同程度に成立していることが確かめられた。

図IV-17および図IV-18の結果は式(IV-14)より容易に応力拡大係数に換算できるので、子積分は非定熱弾性き裂問題の応力拡大係数の計算法としても利用できることがわかる。

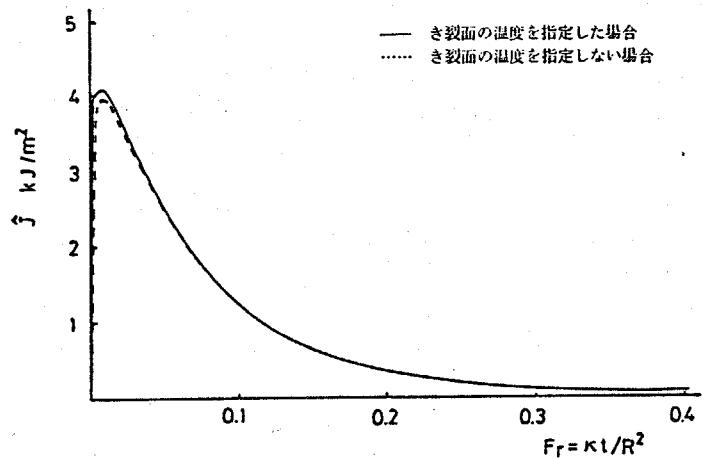
### 弾塑性問題

材料定数が温度に依存する弾塑性体を考え、ひずみ増分理論に基づいて、式(IV-1)または式(IV-3)の子積分を有限要素解析した。降伏曲面としては次式を用いた。

$$f(\sigma_{ij}, T, \bar{\epsilon}^P) = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} - \frac{1}{3} Y^2(T, \bar{\epsilon}^P) = 0 \quad (IV-18)$$

ここで、Tは温度であり、 $\sigma'_{ij}$ は偏差応力である。 $\bar{\epsilon}^P$ は次式で定義される相当塑性ひずみである。

$$\bar{\epsilon}^P = \int d\bar{\epsilon}^P, \quad d\bar{\epsilon}^P = \sqrt{\frac{2}{3}} d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ij}^P \quad (IV-19)$$



図IV-18 円筒の子積分の温度変化  
(弾性計算)

ただし、 $d\varepsilon_{ij}^P$  は塑性ひずみ増分を表す。 $\Upsilon(T, \bar{\varepsilon}^P)$  の関数形と

して

$$\Upsilon(T, \bar{\varepsilon}^P) = \sigma_Y(T) + H' \bar{\varepsilon}^P \quad (\text{IV-20})$$

を仮定した。降伏応力  $\sigma_Y$  ばかりでなく、継弾性係数  $E$  および線膨張係数  $\alpha$  の温度依存性も考慮した。計算プログラムの作成にあたっては文献(5), (17), (18)を参照し、要素としては汎用の三角形一次要素を用いた。

材料としては、原子炉配管に用いられるステンレス鋼 SUS304 を想定し、文献(19)の資料を参考して

$$E(T) = 2.06 \times 10^5 - 95.3 T \quad (\text{IV-21})$$

$$\sigma_Y(T) = 193 - 0.11 T \quad (\text{IV-22})$$

$$\alpha(T) = 1.62 \times 10^{-5} - 8.0 \times 10^{-9} T \quad (\text{IV-23})$$

とした。単位およびその他の材料定数を表 IV-2 に示す。

図 IV-13(a) および IV-14(a) の平板および円筒について解析した。要素分割および積分経路は

は弾性問題と同様に図 IV-13(b) および図 IV-14(b) のものを用いた。平板については  $T = 550^\circ\text{C}$  から徐冷するときの定常温度

継弾性係数 $E$	式(IV-21) MPa
ポアソン比 $\nu$	0.3
降伏応力 $\sigma_Y$	式(IV-22) MPa
ひずみ硬化係数 $H'$	$2.45 \times 10^3$ MPa
線膨張係数 $\alpha$	式(IV-23) $1/\text{C}$
温度伝導率 $K$	$1.70 \times 10^{-2}$ $\text{m}^2/\text{h}$

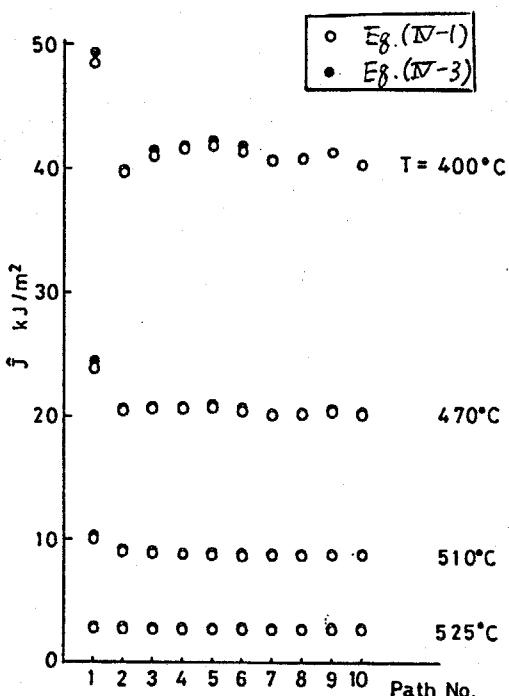
表 IV-2 弾塑性問題の材料定数

場における予積分を解析し、円筒では外面を断熱とし内面を550°Cから400°Cまで急冷するときの非定常温度場における予積分を解析した。ただし、平面ひずみ状態を仮定した。

図IV-19は平板における式(IV-

1) および(IV-3)の予積分値を種々の径路について計算した結果である。この場合には、温度が一様であるから  $E$ ,  $\alpha$  および  $\alpha$  が温度によって変化してど、 $X_1$  軸方向に不均質になることはないので、式(IV-3)によつてど予積分が計算でき。式(IV-1)による値(○印)と式(IV-3)による値(●印)とともに、キ裂に最も近い径路1を除けば、径路(領域)独立性を示していることが確認できる。また、式(IV-1)による方が式(IV-3)よりも、予積分の値をやや高めに評価しているか、その差異は小さい。この差異は数値計算上の誤差によるものと考えられる。

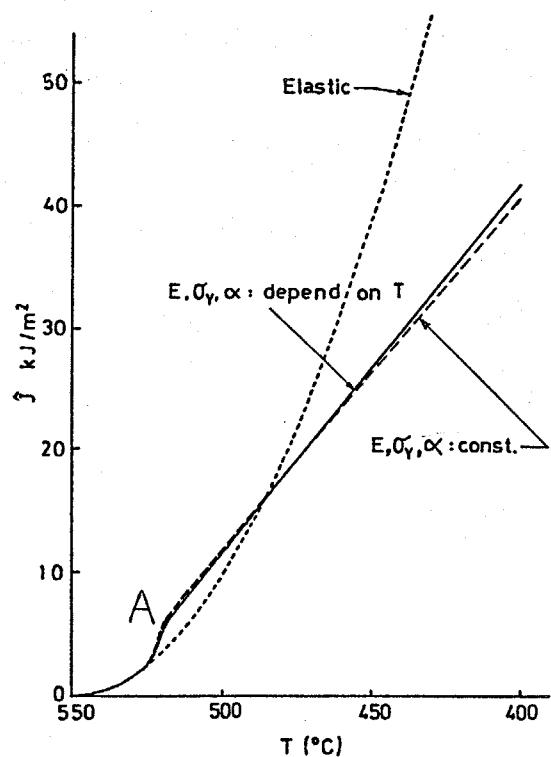
図IV-20に平板の温度と予積分の関係を示す。実線は、 $E$ ,  $\alpha$  および  $\alpha$  の温度依存性を考慮した結果であり、破線はそれらの値を一定( $T=550^{\circ}\text{C}$ )とした結果である。参考のために弾性



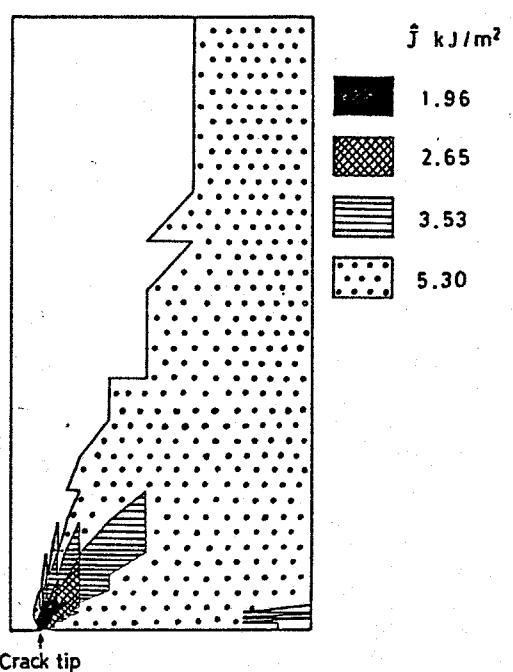
図IV-19 平板の予積分の径路独立性( $E$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha$ の温度依存性を考慮)

計算を行った結果を点線で示す。弾性計算では材料定数を一定とし、 $550^{\circ}\text{C}$ の値を用いた。実線は温度  $T$  が減少すると、最初は弾性解の点線とともに上昇するがやがて急激に上昇し始める。さらに温度を下げると、A 点付近で変曲点を持ちそれ以後はほぼ直線的にゆるやかに上昇し、点線の弾性解と交差する。A 点は試験片の大半が降伏する時点に対応する（図IV-21 の  $\hat{\tau} = 5.30 \text{ kJ/m}^2$  の場合参照）。

図IV-22 は、 $E$ ,  $\sigma_y$ ,  $\alpha$  のうち一つだけの温度依存性を考慮し、他の二つを一定とし、 $T = 550^{\circ}\text{C}$ における値を用いた場合の平板の温度と子積分の関係の計算結果である。比較のために、材料定数をすべて一定とし、 $550^{\circ}\text{C}$ における値を用いた結果（図IV-20 の破線）も破線で示している。この図か



図IV-20 平板の温度と子積分の関係



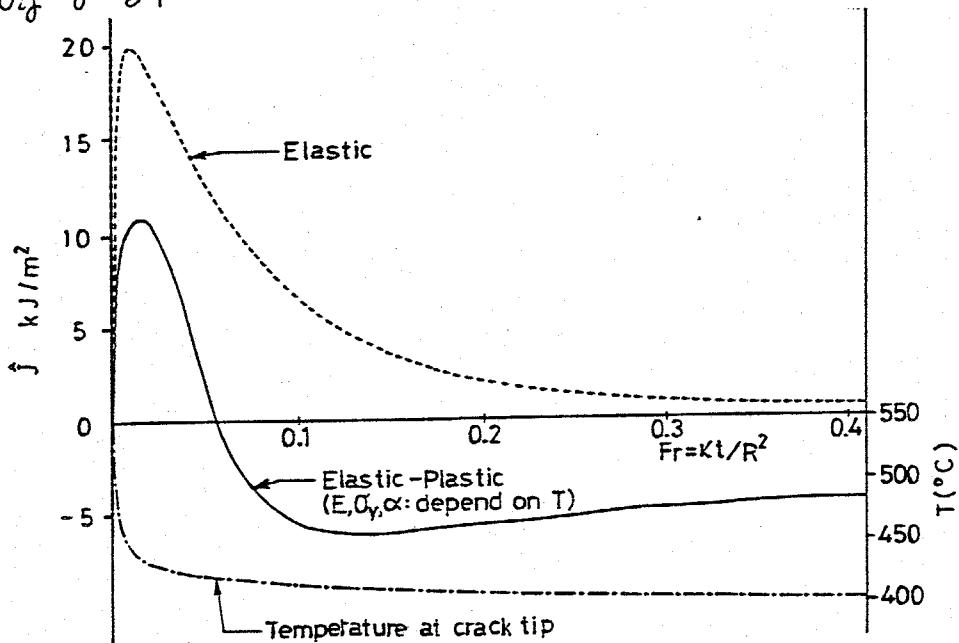
図IV-21 平板の塑性域 ( $E$ ,  $\sigma_y$ ,  $\alpha$  の温度依存性を考慮)

ら、降伏力  $\sigma_y$  の温度依存性は、予積分を増大させ、逆に線膨張係数  $\alpha$  の温度依存性は予積分を低下させることがわかる。また、綫弹性係数  $E$  の温度依存性は予積分にはほとんど影響を与えていない。

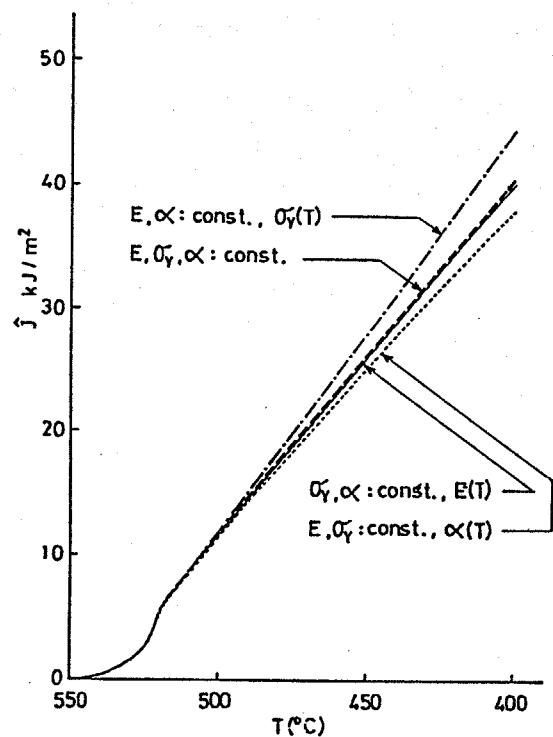
図IV-23は円筒内面を急冷した場合の予積分の時間的変化を、 $E$ ,  $\sigma_y$ ,  $\alpha$  の温度依存性を考慮して式(IV-1)により解析した結果である。予積分は最大値を経た後減少

し負の値となり、一定の値に漸近している。予積分の最大値付近から

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \dot{\sigma}_y + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} < 0 \quad (\text{IV-24})$$



図IV-23 円筒の予積分の時間的変化



図IV-22 平板の温度と予積分の関係

となる要素が現われ（塑性学的な）

除荷が生じている。ただし、 $\cdot$ （

ドット）は時間微分を表す。き裂

先端近傍の要素の応力が圧縮にな

ると、これに対応して子積分の値

が負になつてあり、時間 $\tau$ の大き

いところでは圧縮の残留応力が生

じている。これは前節にありて示

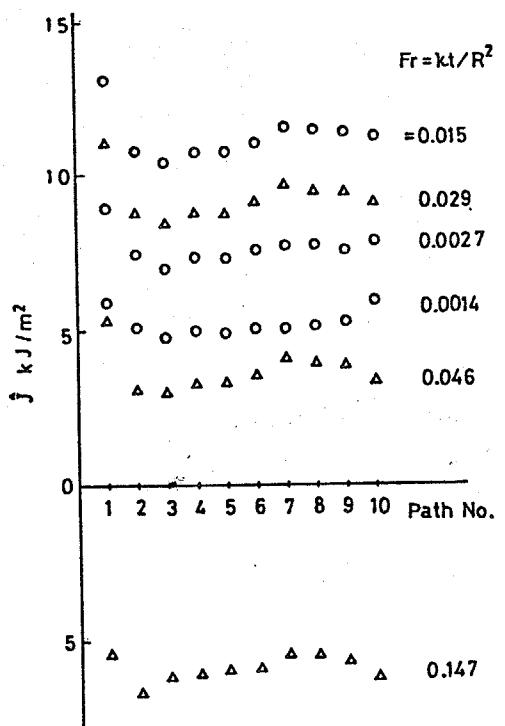
した平板を引張って塑性変形させ

た後、除荷した場合にき裂先端近

傍に圧縮の残留応力が生じ、子積

分の値が負になることに類似している。点線は比較のために弾性計算結果（材料定数一定）を示したものである。弾性計算では子積分の値を高めに評価することがわかる。なお、参考のためき裂先端の温度変化を一点鎖線で示した。

図IV-24は円筒内面を急冷する場合の子積分値と積分経路の関係であり、図IV-23の実線と対応している。 $\circ$ 印は負荷時の子積分を示し、 $\triangle$ 印は除荷を含む時のものである。き裂に最も近い経路1の子積分値は他の経路のよりやや高めの値となつてゐるか。これを除けば、非定常温度場において、材料定数が変化してもまた除荷が存在しても、理論的に予想されるよ



図IV-24 円筒の子積分の経路  
独立性( $E, \alpha, \alpha$ の  
温度依存性を考慮)

に予積分の経路(領域)独立性が成り立つことか確かめられる。

以上の結果から、例えば原子炉圧力容器のように機械的な荷重のほかに熱による荷重を受ける実際の構造物の健全性評価に予積分が有効に適用できること考えられる。

### 4.3. 三次元問題における予積分

#### 4.3.1. はじめに

航空機や圧力容器などの実際の構造物中に生じるき裂の多くは三次元き裂である。したがって、構造物の健全性をより精密に評価しようとする場合、平面応力や平面ひずみ状態で代表されるような二次元解析が常に有効であるとは限らない。このような観点から、近年多くの研究者らによって、き裂の三次元弾性解析がなされきていく。<sup>(20)</sup>しかし、破壊に際して顕著な塑性変形を伴うような高韌性材料に対しては、弾性解析によって十分な強度評価を行うことは期待できない。しかし、一般の構造材として高韌性材料が多用されていくので、き裂材の三次元弾塑性応答を明らかにすることは、破壊力学の精密化のうえで重要と考えられる。

大規模降伏状態の下での破壊に対しては、Riceの丁積分を用

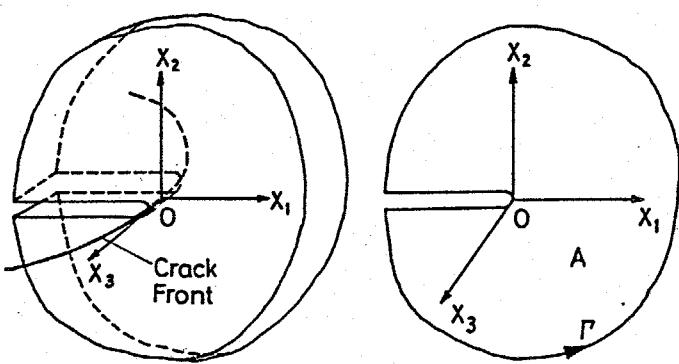
ここで破壊の条件式を与えたことが提案されており、J積分の三次元問題への拡張といくつか試みられている。<sup>(21-26)</sup>しかし、J積分は、先に述べたように、非線形弾性体に対して定義されているので、弾塑性問題においてJ積分が、き裂先端近傍の応力・ひずみ場を特徴づける積分経路独立な破壊力学パラメータとしての物理的な意味を持つのは、全ひずみ理論に従う弾塑性体が単調増加荷重を受ける場合に限られていく。そこで、本節では、大規模降伏を伴う貫通き裂について有限要素法により三次元弾塑性解析を行い、塑性変形が子積分に与える影響について調べる。

図IV-25(a)に示すような弾塑性体中の三次元き裂を考え、 $O-X_1 X_2 X_3$ をき裂前線の任意の点 $O$ を原点とする直角座標系とし、 $X_1, X_2, X_3$ 軸を、それぞれ、点 $O$ におけるき裂前線の主法線、陪法線および接線方向とすると、三次元弾塑性体における積分経路(領域)に独立な子積分の表示式は、式(II-81)より、次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma} &= \dot{\Gamma}_1 \\ &= \iint_A \delta_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial X_1} dA - \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_1} d\Gamma \\ &\quad - \iint_A (\delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial X_1})_{,j} dA \end{aligned}$$

(IV-25)

ここでは、簡単のために、



図IV-25 弾塑性体中の三次元き裂

物体力、慣性力、き裂面の圧力、および、破壊進行領域の大きさを無視しており、き裂前線の点OがX<sub>1</sub>軸方向に進展する場合について考へておる（この場合、 $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0$  が成立する）。 $\Gamma$ は、図IV-25(b) に示すようにき裂下面から出発してき裂先端を囲みき裂上面で終る任意の経路であり、Aはき裂面と $\Gamma$ が囲む領域である（ただし、領域Aは O-X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub> 平面上にあるとのとする）。なお、全ひずみ  $\varepsilon_{ij}$  が

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (\text{IV-26})$$

のように弾性ひずみ  $\varepsilon_{ij}^e$  と塑性ひずみ  $\varepsilon_{ij}^p$  の和として表わすことができる。弾性ひずみ  $\varepsilon_{ij}^e$  に対して、

$$\partial w^e(\varepsilon_{ij}^e) / \partial \varepsilon_{ij}^e = \sigma_{ij} \quad (\text{IV-27})$$

を満足する弾性ひずみエネルギー密度  $w^e$  が定義できならば、式 (IV-25) は、Gauss の発散定理によつて、次式のように変形することができる。

$$\dot{\gamma} = \int_P w e dX_2 - \int_P T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_1} dP + \iint_A [\sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_j^p}{\partial X_1} + (\sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial X_1})_3] dA \quad (\text{IV-28})$$

#### 4.3.2. 有限要素法による三次元有限要素解析法

##### (1) 計算方法

有限要素法を用いて、式(IV-25)により子積分の計算を行つた。要素には6面体20節点アイソパラメトリック適合要素を用いた。要素剛性マトリックスや荷重ベクトルの作成および子

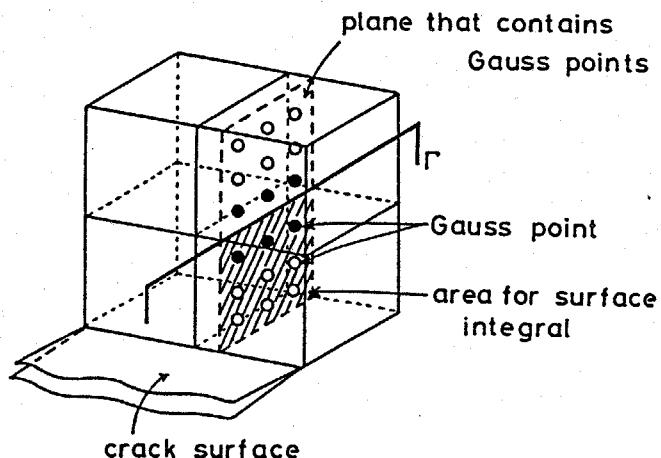
積分の計算における積分  
計算には、ガウス-ルシ  
ヤンドルの求積法<sup>(2)</sup>を用  
(1), 1要素内のガウス点  
の数は27個とした。

本解析では、図IV-26  
に示すようにガウス点を  
含む面と要素の境界との交線を積分経路に選び、経路に最も近  
いガウス点(図中黒丸点)における値の相加平均を用いて式  
IV-25)の線積分を求めた。また、面積積分の値はガウス点にお  
ける値を用いて評価した。その際、 $E_{ij,1}$ ,  $\sigma_{ij,3}$ ,  $u_{i,13}$ などの  
値は、つきのようにして求めた。まず、節点における応力・ひ  
ずみの値をその節点に連なる要素における値の平均値として求  
め、この節点応力・節点ひずみと形状関数によって要素内の任  
意の点の応力・ひずみを表わし、これから、 $E_{ij,1}$ ,  $\sigma_{ij,3}$ ,  $u_{i,13}$   
を求めた。

## (2) 計算精度の検討

### 二次元問題における予積分

計算精度を調べるために、まず、二次元弾塑性問題を三次元  
有限要素法によって計算した。図IV-27に計算の対象とした中  
央き裂を有する平板の形状、要素分割、積分経路を示す。たた



図IV-26 予積分の計算法

し、板厚方向にガウス点が6点あるので、それらを含む面内に、それぞれ、図IV-27に示すような経路を設けた。平板の上下面が一様応力 $\sigma_0$ となるように荷重を作用させ、平面ひずみ状態となるように側面の節点を拘束した。材料は構造用炭素鋼を想定し、 $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $V=0$ , 降伏応力 $\sigma_Y = 480 \text{ MPa}$ とし加工硬化率

$$H' = d\bar{\sigma} / d\bar{\epsilon}^P$$

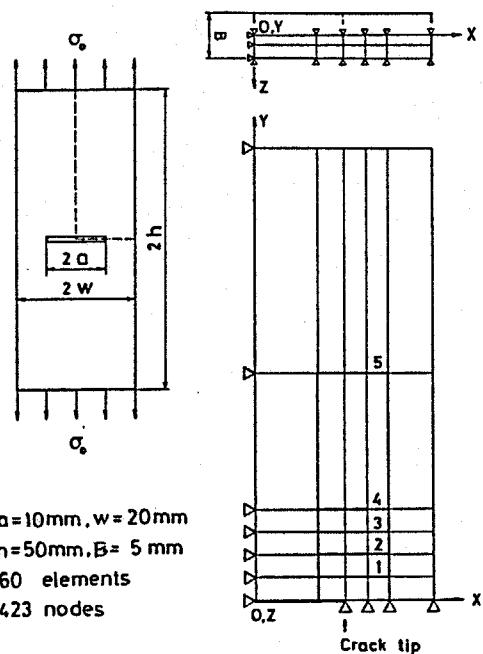
(IV-29)

を $E/100$ とした。ただし、 $\bar{\sigma}$ および $d\bar{\epsilon}^P$ は、それぞれ、ミゼスの相当応力および相当ひずみ増分である。

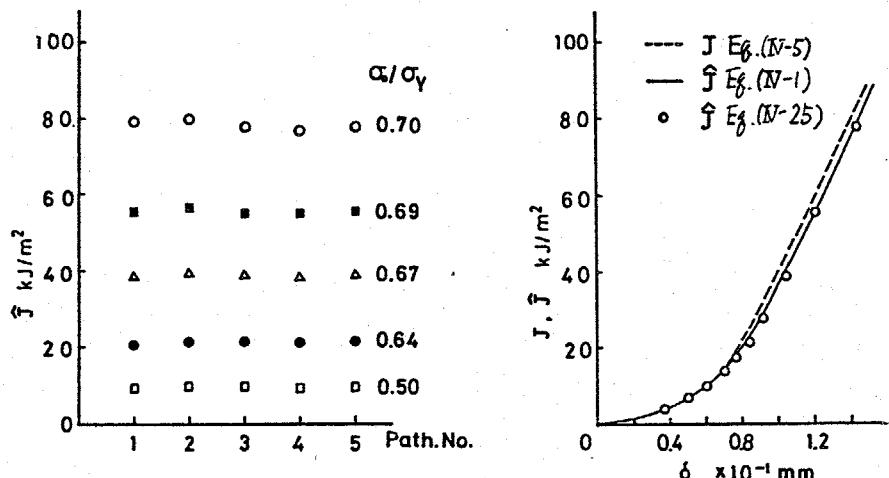
図IV-28に計算結果を示す。

図IV-28(a)は、各負荷段階における子積分の経路ごとの値を示している。板厚方向には、それ

の大きさの



図IV-27 二次元中央き裂試験片

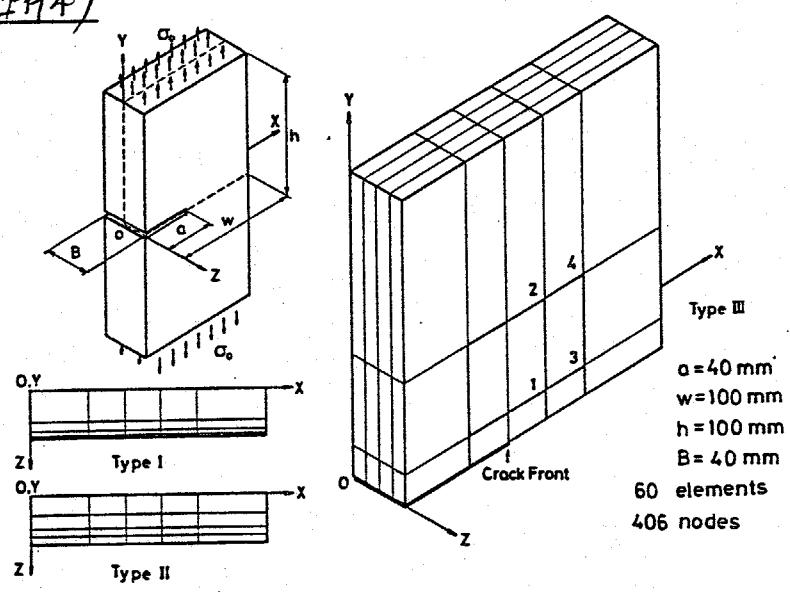


図IV-28 二次元弾塑性問題における子積分

径路に対して等しい値が得られていい。図から、径路の大きさにかかわらず、ほぼ等しい子積分の値が得られており、有限要素計算においてと径路独立性が良く成立していふことがわかる。図IV-28(b)は、荷重点変位と子積分との関係を示したものである。白丸印が本解析で求めた子の値であり、各径路によって得られた値の平均値である。また、点線はRICE の子積分、実線は、子積分であり、これらは三角形定ひずみ要素を用いた二次元解析により求められた図IV-4 に示した計算結果である。本解析結果と三角形定ひずみ要素を用いた二次元解析によつて得られた子の値とが良く一致していふことがわかる。なお、本解析において、式(IV-25)の第三項(三次元問題であるために生じる項)は、他の項に比較して十分小さな値( $0.1 \mu N/mm$ 程度のオーダ)であった。

### 子積分の三次元線形弾性解析

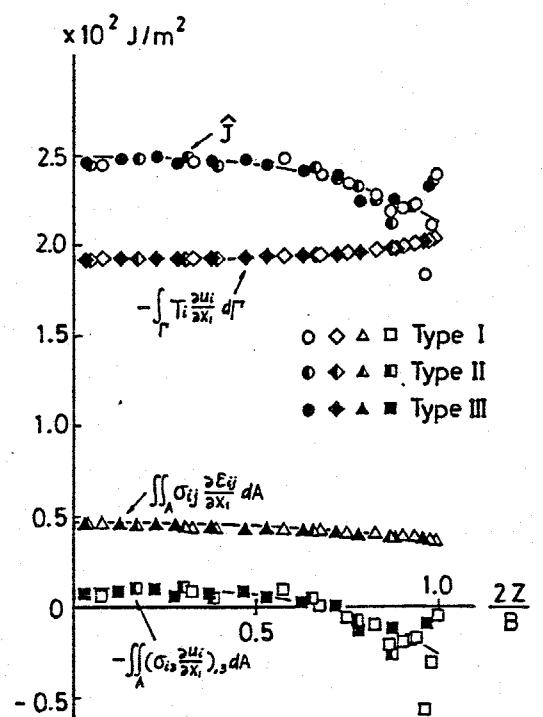
つぎに、三次元問題における子積分の計算精度を調べるために、図IV-29に示すような一様引張荷重を受ける片側貫通き裂試験片に対して弾性計算を行、



図IV-29 片側貫通き裂試験片

た。同様の形状の試験片について、矢川・西岡は重ね合せ法を用い応力拡大係数の三次元解析を行っている。<sup>(28)</sup>問題の対称性から試験片の1/4を図に示すように要素分割した。子積分を計算するための積分経路としては、ガウス点を含む面内に示すような4経路を採用した。したがって、経路総数は48である(8方向に4要素、1要素内にガウス点を含む3面)。また、子積分に対する板厚方向分割法の影響を調べるために、図中に示すような、Type I, Type II, Type III の3種類の分割に対して計算を行った。試験片の上下面には、一様引張荷重( $\sigma_0 = 10 \text{ MPa}$ )が作用するとのとし、 $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ とした。

図IV-30に、弾性問題における子積分とその各項別の板厚方向の分布(各面内4経路の平均値)を示す。この図から、子積分が板厚の中央で最大となり自由表面に近づくにつれて減少するようならびに凸の分布となること、および、この分布に式(IV-25)の第三項の三次元的效果が大きく影響していることがわかる。表面付近で子の値のはらつきが大きくなっているの



図IV-30 三次元弾性問題における子積分と各項別の板厚方向分布

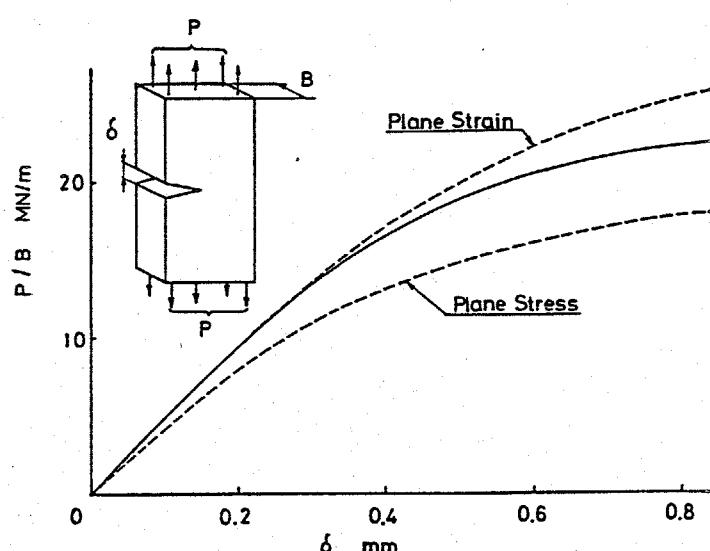
は要素分割の粗さに帰因すると考えられるが、要素中央がウズ点では3種類のひずみの分割に対して、ほぼ同様の値となつてゐる。なお、板の中央では平面ひずみ状態となつてゐるものと考えられるので、式(IV-7)を用いて今この値から換算した応力拡大係数は矢川・西岡の計算結果<sup>(28)</sup>よりも約6%低い値となつた。

#### 4.3.3. 予積分の三次元弾塑性解析(板厚効果について)

##### (1) 一様引張荷重を受ける片側貫通き裂試験片

前節と同じ試験片(図IV-29, TypeⅢ)について弾塑性計算を行つた。試験片には単調に増加する一様引張荷重が作用するものとし、前節と同じ材料定数を用いて計算した。

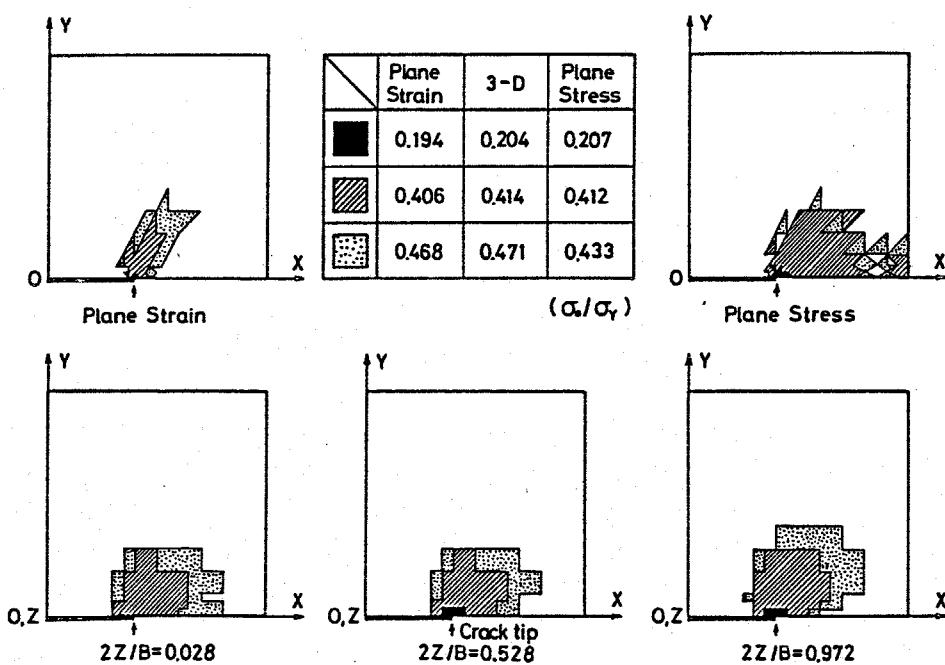
図IV-31に計算結果を示す。縦軸は、試験片単位板厚当りの荷重  $P/B$  であり、横軸は、き裂底開口変位  $\delta$  である。また、図中には、平面応力および平面ひずみ状態における二次元有限要素解析の結果(三角形定ひずみ要素、406要素、237節点)も破線



図IV-31 荷重-開口変位曲線  
(片側貫通き裂試験片)

で示されている。この図から三次元弾塑性解は、変形が小さく間は平面ひずみ状態の曲線にはほぼ一致しているが、変形が大きくなるにつれて、平面ひずみと平面応力の中間的な状況になつていくことがわかる。このことは、つぎに示す図IV-32 からと推察できる。

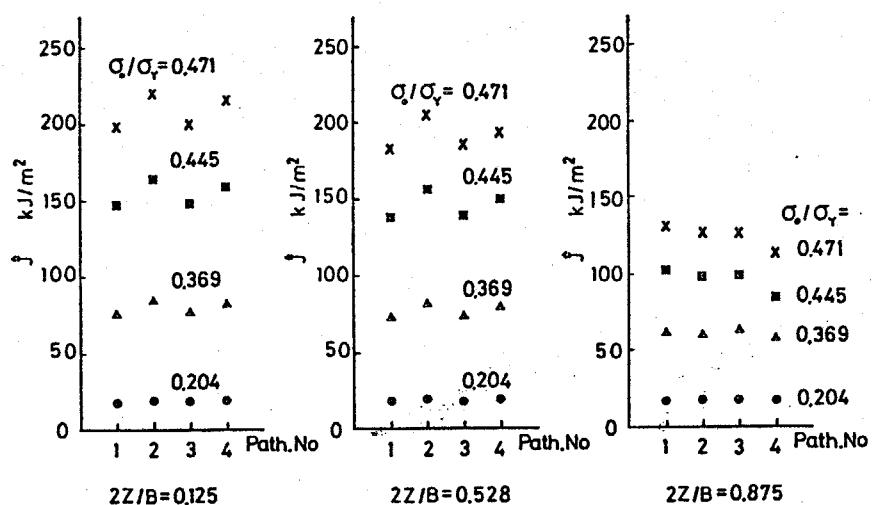
図IV-32 の下側の3図は、三次元解析による板厚方向の各面における塑性域の形状を示している。初期変形段階（黒塗りの部）では板厚中央部と自由表面付近で明確な差が生じているが、変形が進むと両者の差は減少している。また、上側の2図は二次元解析による塑性域である。三次元解析による塑性域が平面応力と平面ひずみの中間的傾向を示していることがわかる。



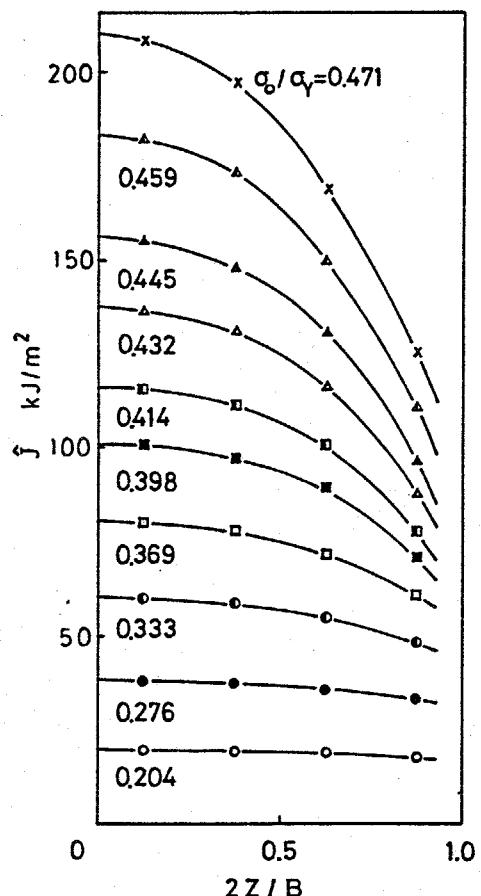
図IV-32 板厚方向塑性域分布

つぎに、図IV-29  
に示すような積分径  
路によって計算した  
予積分の値を図IV-  
33に示す。この図  
から有限要素計算に  
おいて径路独立性  
が比較的良く成立し  
てることがわかる。

図IV-34は、負荷を増加させた  
ときの板厚方向の予積分の分布を  
示す。予積分の値としては、要素  
分割の影響かうなから要素中央  
のかウス点を含む面における値を  
用いた。図より予の値は、負荷の  
増加とともに表面付近より板厚  
中央部において増大する傾向が著  
しい。このことは、実験で観察さ  
れたように、板厚中央でき裂が進  
展を開始することに対応している  
とのと考えられる。ただし、自由



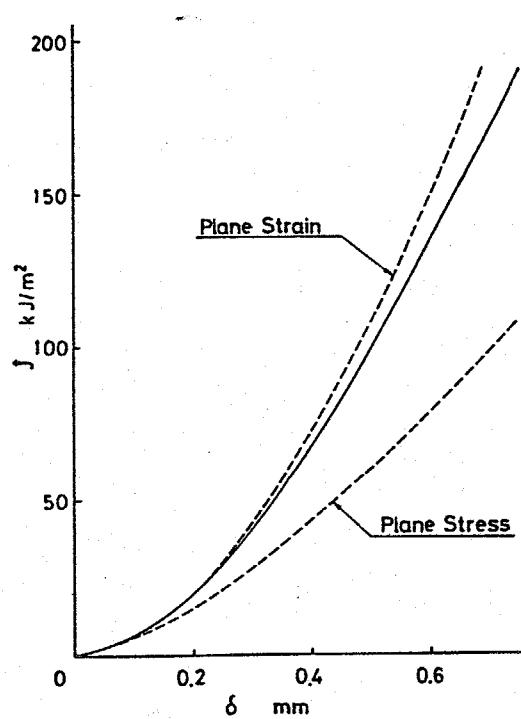
図IV-33 予積分の径路独立性  
(片側貫通き裂試験片)



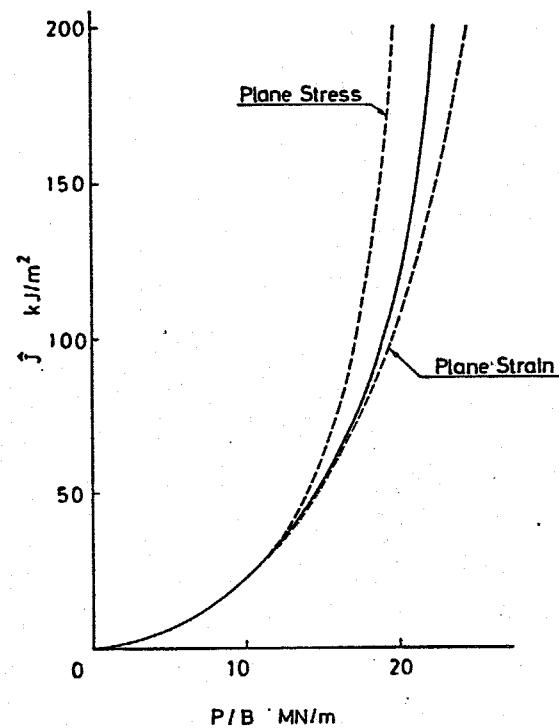
図IV-34 予積分の板厚方向  
分布(片側貫通き  
裂試験片)

表面付近では、余穢分にかなりばらつきが生じるため、余穢分を精度良く求めるために要素分割などについて今後改良する必要があると思われる。

き裂底閉口変位 $\delta$ と余穢分の関係を図IV-35に、単位厚さ当りの荷重P/Bと余穢分の関係を図IV-36に示す。ただし、余穢分の値は板厚中央の値である。また、比較のために、二次元解析によって求めた余穢分の値を破線で示した。板厚中央部は、通常は、平面ひずみ状態となることが予想される領域であるが、本解析結果によると荷重が大きくなるにつれて平面ひずみ状態の値と等しいが、荷重が大きくなになると(たがつて平面応力と平面ひずみとの中間の値となること)わかる。



図IV-35 余-S曲線  
(片側貫通き裂試験片)



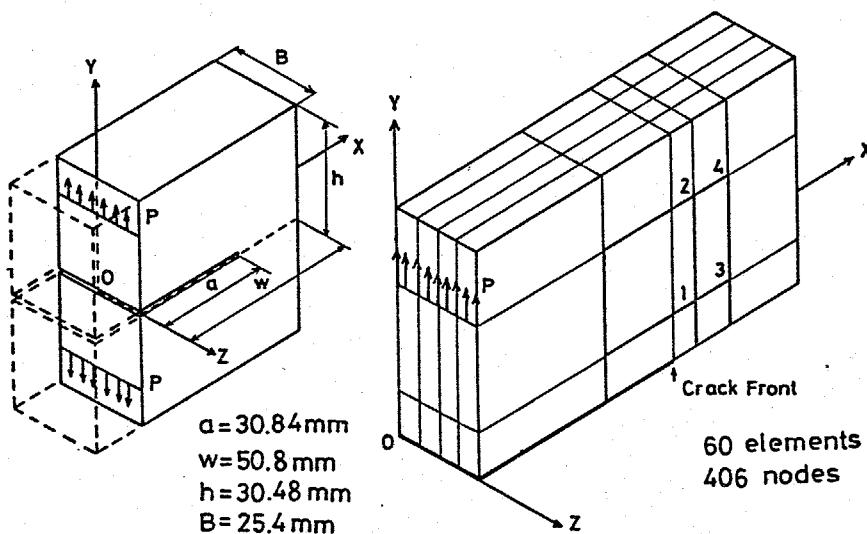
図IV-36 余-P/B曲線  
(片側貫通き裂試験片)

## (2) コンペクト試験片

前節の計算によって、三次元弾塑性解析結果は大規模降伏状態においては、平面応力状態と平面ひずみ状態の中間的な傾向を示すことが明らかになった。そこで、本節では、破壊非性試験に通常使用されるコンペクト(CT)試験片について三次元弾塑性解析を行い、今積分に及ぼす板厚の影響について検討を行う。

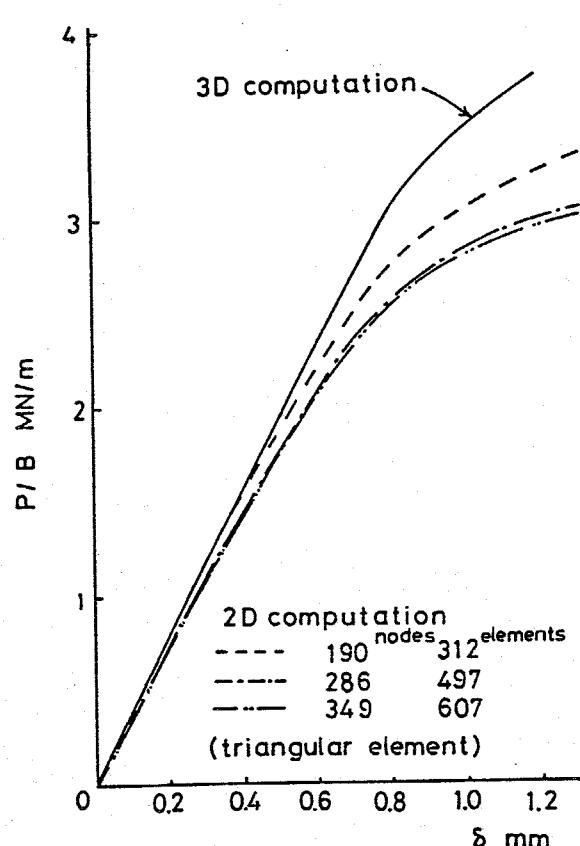
計算を行った試験片の形状を図IV-37に示す。問題の対称性を考慮して図のように要素分割した。板厚の影響を調べるために、断面の形状は同一とし、板厚だけを2倍または $1/2$ 倍としたときの計算を行った。その際、板厚方向の要素分割数は4のまま一定としている。材料としては、SNCM8鋼を想定し、 $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\sigma_Y = 637 \text{ MPa}$ ,  $H' = 2.45 \text{ GPa}$ とした。

平面ひずみとなるように試験片の側面の節点を拘束して計算したときの単位厚さ当たりの荷重  $P/B$  と荷重線

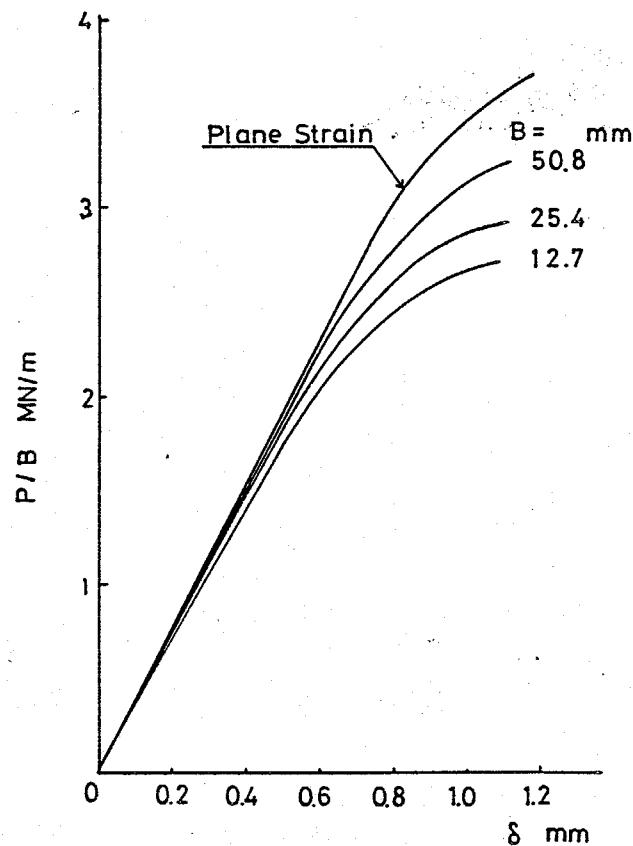


図IV-37 コンペクト(CT)試験片

変位 $\delta$ の関係を図IV-38に示す。図には比較のために、三角形定ひずみ要素を用いて要素分割数を変えることによって得られた結果と示した。この図から分割数が少ないとP/B- $\delta$ 曲線は高目になる傾向を生じることがわかる。したがって、図IV-37に示したような要素分割による計算結果と実験的に得られたP/B- $\delta$ 曲線を定量的に比較するためには、さらに細かい要素分割が必要と考えられる。しかし、三次元弾塑性解析において、要素数を大幅に増加させることは、計算機の記憶容量、演算時間の点から現段階では困難である。図IV-39は板厚のみが変化する場合のP/B- $\delta$ の計算結果である。これは、実験に



図IV-38 P/B- $\delta$ 曲線  
(平面ひずみ状態)

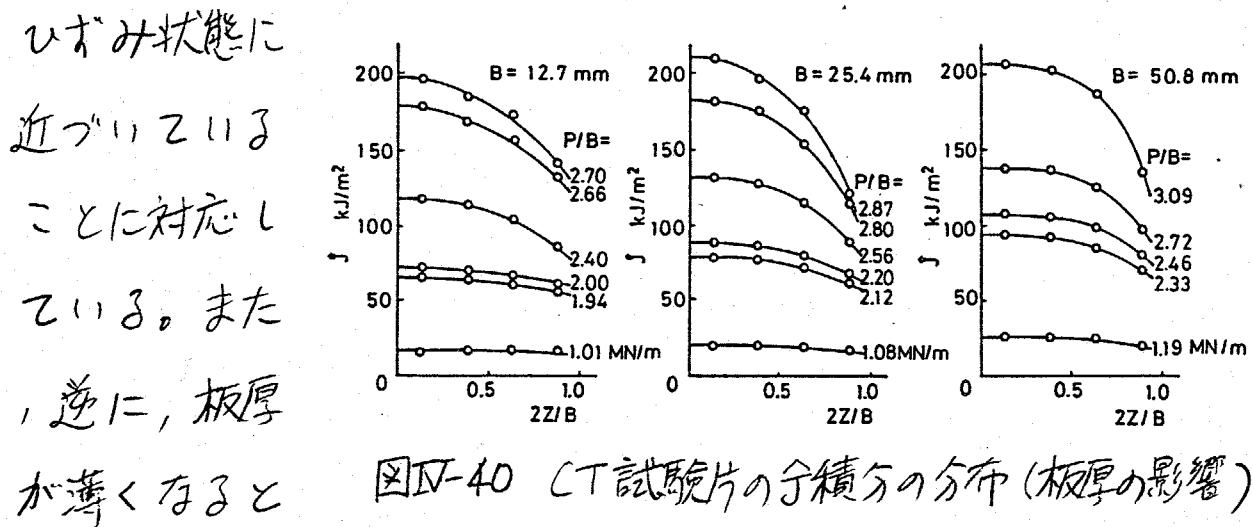


図IV-39 P/B- $\delta$ 曲線  
(板厚の影響)

よって求められた  $P/B - \delta$  曲線<sup>(29)</sup>と傾向的に一致している。以上の点を考慮して、ここでは、図IV-37に示す要素分割を用いた解析によって定性的な検討を行うことにする。なお、今後は特異要素を用いるなどの計算精度を向上させるための検討が必要である。

図IV-39に示した  $P/B - \delta$  曲線は、板厚が増加するにつれて平面ひずみ状態の解に近づく傾向があり、この傾向は、上述したように実験結果と一致している。また、最厚  $B=50.8\text{mm}$  の場合において、 $P/B - \delta$  曲線は平面ひずみ状態を仮定して得られる解に一致せず、変形状態は平面応力状態と平面ひずみ状態の中間にあることがわかる。

図IV-40に、それぞれの板厚に対する余積分の分布を示す。余積分の値は4径路の平均値である。板厚  $B$  が  $25.4\text{mm}$  の場合に比べて  $50.8\text{mm}$  の場合には、板厚の中央部において余積分の値が平坦になる領域が広がっており、試験片全体の変形が平面ひずみ状態に近づいていることに対応している。また、逆に、板厚が薄くなると



図IV-40 CT試験片の余積分の分布(板厚の影響)

( $B = 12.7 \text{ mm}$ ) 表面付近での子積分の急激な減少は見られなくなす。このことは、試験片全体の変形挙動が平面応力状態に近づくことに対応していると考えられる。

CT試験片を用いた破壊靱性試験においては、荷重一度位曲線から次式のような Merkle-Corten の簡便式<sup>(30)</sup>を用いて子積分の値を評価することが通常行われている。

$$J = \alpha_1 \frac{2A}{Bb} + \alpha_2 \frac{2PS}{Bb} \quad (\text{IV-30})$$

ただし、 $A$ は荷重一度位曲線の下の面積、 $b$ は試験片のリガメント長さ、 $\alpha_1, \alpha_2$ は試験片の形状に依存する係数である。計算によって得られた  $P/B - \delta$  曲線(図 IV-39)を用いて式(IV-30)によて評価した子積分の値を図 IV-41, IV-42 に実線で

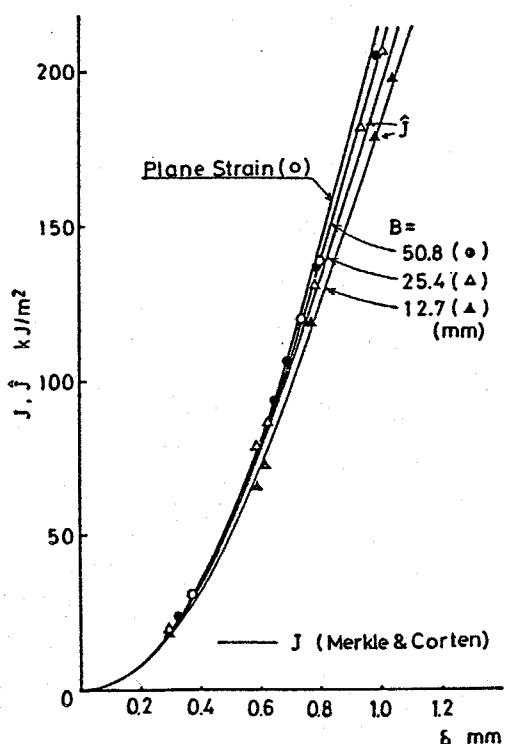


図 IV-41 板厚中央における子積分  
と荷重線変位  $S$  との関係  
(簡便式によて求めた  $J$ )  
(積分との比較)

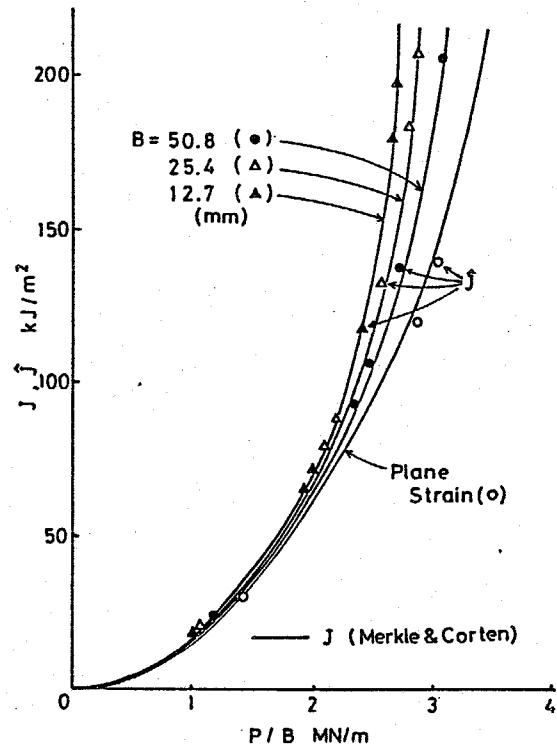


図 IV-42 板厚中央における子積分  
と荷重線変位  $S$  との関係  
(簡便式によて求めた)  
(子積分との比較)

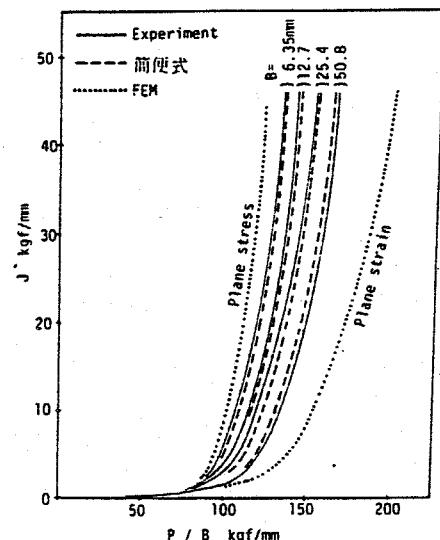
示した。また、図中の丸印や三角印は、径路積分によつて求めた子積分の板厚中央における値をプロットしたものである。この図から、両者の結果が良く一致していることがわかる。なお、ここで計算を行つた板厚は、すべて有効な韌性値を得るための板厚の推奨値<sup>(31)</sup>以上である。

### (3) 考察

前節の計算結果より  $P/B - \delta$  曲線が平面ひずみ状態とのより低いにとかかわらず、Merkle-Colten の簡便式を用いると平面ひずみ破壊韌性値が得られる理由として次のことが考えられる。一般に、破壊はき裂先端近傍の破壊進行領域の中で進行するので、板厚中央におけるき裂先端近傍の狭い領域で平面ひずみ状態が成立していれば、巨視的破壊の平坦な平面ひずみ状態の破壊がその領域で実現されると考えられる。これに対して  $P/B - \delta$  曲線は試験片全体の変形に依存するので、板厚中央部のき裂先端近傍の狭い領域が平面ひずみ状態であると、き裂先端から離れた領域または試験片の表面付近における非平面ひずみ状態の影響を受ける。このために  $P/B$  曲線は平面ひずみの計算より低目になると考えられる。また、図IV-41, IV-42 の三次元解析結果から、板厚中央の子の値は  $P/B - \delta$  曲線に Merkle-Colten の簡便式を適用して得られる  $\delta$  の値にほぼ一致する。したがつて、子積分の板厚中央の局所的な値が限界値に達した

ときにその部分の破壊が生じると考えると、板厚が異なることによる三次元的な変形形状が異なるにとかかわらず、簡便式を用いて実験的に評価された破壊靭性値が板厚の影響を受けないことが理解できる。

図IV-43<sup>(29)</sup>の実線は、板厚のみが異なるSUS304コンパクト試験片（断面形状は1インチ・コンパクト試験片と同一）のJ-P/B-S関係の実験結果からMenkle-Cortenの簡便式(IV-30)によって求めたJ-P/B関係である。この実線は、上に述べた結果より板厚中央の $\delta$ とP/Bの関係と見なすことができる。図中の点線は二次元有限要素法により線積分から求めたJ値であり（单调増加荷重下なので線積分の値とほぼ一致する），破綻は点線の結果から有限厚さの構造物のJの値（板厚中央における $\delta$ の値）を簡便法<sup>(27)</sup>により推定した結果である。この図から、板厚中央の $\delta$ の値は板厚の影響を顕著に受けるので単なる二次元解析では評価できないが、二次元解析結果を利用した簡便法を用いれば比較的容易に推定できることわかる。なお、この手法は回転円板のき裂成長開始などの破壊進歩の予測に応用されている。



図IV-43 SUS304コンパクト試験片のJ-P/B曲線<sup>(29)</sup>  
(1 kgf/mm = 9.807 kN/m)

したがって、以上の結果より有限の板厚を持つ実際の構造物の健全性評価に子積分を利用することができるとのと考えられる。

#### 4.4. 結 言

き裂先端部における塑性変形の影響が無視できない大規模降伏状態の破壊問題に関して弾塑性有限要素解析を行い、子積分が破壊力学パラメータとして有用であることを示した。

単調増加荷重の下では子積分は Rice の J 積分とほぼ等しい値となることを示した。荷荷過程や熱ひずみが存在する場合には J 積分は適用が困難となるのに対し、子積分においては理論的に予想される経路(領域)独立性が有限要素計算において成立するので、複雑な負荷を受ける場合の破壊問題に対して子積分の適用が可能であることを示した。最後に、三次元問題における子積分を考えることにより、破壊に与える板厚の効果を説明し、構造物の健全性評価をするための破壊力学パラメータとして子積分が有効であることを示した。

なお、本章の計算結果はすべて静止き裂に対するものであるが、今後は進展するき裂についても解析を行い、例えば、安定き裂成長や低サイクル疲労などの破壊現象に子積分を適用する

ための研究が必要と考えられる。

## 第V章 結論

複雑な負荷を受ける機械や構造物の安全性評価に破壊力学的手法を適用するための基礎的研究として、本論文は、弾性エネルギー解放率 $G$ 、応力拡大係数 $K$ 、および Rice の J 積分などをエネルギー保存則に基づいて拡張し、物体力、慣性力、固有ひずみ（熱ひずみや塑性ひずみなど）や破壊進行領域の存在を考慮した破壊力学ペラメータを提案することを目的としており、以下の結果が得られた。

第II章では、き裂の進展挙動を記述するための破壊力学ペラメータについてエネルギー保存則に基づいて検討し、以下の結果が得られた。

(1) 任意の構成関係式に従う物体中をき裂が進展する際のエネルギー解放率を破壊進行領域の変形を考慮に入れて定式化し、その結果、エネルギー解放率は破壊進行領域の平行移動による成分 $\zeta_3$ 、回転による成分 $\hat{L}_3$ 、自己相似的な膨張による成分 $\hat{M}$ および形状のゆがみによる成分 $\hat{\Delta}$ の和として表わされた。

(2)  $\zeta_3$ ,  $\hat{L}_3$ ,  $\hat{M}$  の積分経路（領域）に依存しなり表示式を導いた。

(3) 破壊進行領域が小さい場合には  $\zeta_3 \gg \hat{M}, \hat{L}_3$  となる。

(4) 余積分の表示式は、特別な場合には他の破壊力学パラメータ (Rice の  $J$ , Ainsworth の  $J_0$ , Eftis らの  $\tilde{G}$ , Blackburn の  $J^*$ , Striforce の  $\phi$ ) の表示式に一致する。

(5) 余積分はき裂先端近傍の特異場の強さと関係づけられる。

(6) 小規模破壊進行領域を伴うような破壊に対して、

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_c$$

を破壊条件式として採用することが考えられ、余積分はき裂の進展挙動を記述するための单一の破壊力学パラメータとなると考えられる。なお、この条件式では、全は材料の抵抗値として  $\dot{\gamma}_c$  のなかに繰り込まれている。

(7) 以上の結果は三次元問題の場合へ拡張することができる。

第Ⅳ章では、具体的な応用例として衝撃荷重下の破壊や高速き裂進展問題のように物体の慣性力の影響を考慮する必要のある動的破壊問題の場合について検討した。

(8) 小規模降伏条件下では、余積分は動的弾性エネルギー解放率  $G$  および動的応力拡大係数  $K$  と一緒にに対応するので、この様な場合の動的き裂問題の解析は動的応力拡大係数の解析に帰着される。

(9) き裂先端近傍の解析解を変位関数とする特異要素を用いる方法によると、余積分の積分経路(領域)独立な表示式

を利用する方法によつてと静止き裂に応力波が入射する場合の動的応力拡大係数を精度良く有限要素解析することができる。

(10) 三点曲げ試験片の動的応力拡大係数は簡便式によつて評価することができる。

(11) 時間とともに増大する集中荷重を受けて両側)に一定速度で進展するき裂の動的応力拡大係数および動的弾性エネルギー解放率はき裂進展速度の減少関数である。また、Dugdale の仮定を用いた近似的な解析によると、き裂進展速度の増加になると降伏域の長さ、き裂先端の開口変位およびき裂進展による解放されるエネルギーは減少する。

(12) 有限体中を高速で進展するき裂の動的応力拡大係数は、特異要素を用いた有限要素法により精度良く求められる。

(13) 特異要素を用いた有限要素法による高速き裂進展のシミュレーション法により、中央き裂を持つ平板の上下面にパルス状の引張荷重が作用する場合について解析を行ったところ、荷重の持続時間および大きさの変化に応じてき裂の加速、分岐、停止などの結果が得られた。

(14) ガラスの平板試験片の破壊応力と分岐するまでのき裂の進展量との関係に及ぼす負荷形式の影響は動的応力拡大係数を用いた分岐条件式によつて説明される。

第IV章では、塑性変形の影響が無視できない大規模降伏状態の破壊問題について有限要素解析を行い、破壊力学パラメータとしての子積分の有効性について検討を加えた。

(15) 単調増加荷重下では子積分とJ積分はほぼ一致する。

(16) 前荷重よりも大きな荷重まで再負荷した場合は子と Rice の簡便式によるJはほぼ同様の前荷重依存性を示す。

(17) 前荷重の大小によらずき裂先端の開口変位が一定であれば子も一定となった。

(18) 温度場における弾塑性体のき裂先端近傍の応力・ひずみの特異性は子積分によって表わされる。

(19) 非定常温度場の問題においても有限要素計算で求められた子積分の値は理論的に予測されたように積分経路(領域)独立となった。

(20) 三次元弾塑性有限要素法により、単調増加荷重を受けた貫通き裂試験片の子積分の板厚方向の分布を求めたところ、子積分の値は負荷の増加とともに板厚中央部で著しく増大すること、および、変形が進むにつれて平面応力と平面ひずみ状態を仮定した二次元解析によつて求められる値の中間の値となる結果が得られた。

(21) 板厚中央の子積分の値と荷重-変位曲線から Merkle-Corten の簡便式によつて評価したJの値がほぼ一致した。

(22) 板厚が異なることによる三次元的な変形形状が異なるにとかかわらず、簡便式を用いて実験的に評価された破壊力学値が板厚の影響を受けていないのは上記(21)からの理由として考えられる。

(23) 板厚中央の今の値は二次元解析結果を利用した簡便式を用いれば比較的容易に推定できるので、有限の板厚を持つ構造物に対して今積分を適用することができる。

以上の結果より、本論文で提案した今積分はき裂進展挙動を記述するための破壊力学パラメータとして有用であると考えられる。

なお、今後の研究課題としては以下のことが考えられる。

(1) 第III、IV章で示した応用例は、すべて破壊進行領域の大きさを無視したものであるので、破壊の微視的挙動を適当にモデル化し、有限な破壊進行領域を考慮した取り扱いについて検討する。

(2) 本論文では微小ひずみを仮定しているが、有限変形を考慮した取り扱いについて検討する。

(3) 環境破壊の問題に適用するために化学的作用の影響を考慮した取り扱いについて検討する。

## 謝 辞

筆を置くにあたり、終始貴重な御助言と御指導を賜わった東京工業大学 坂田 勝教授、青木 繁助教授に深く感謝致します。また研究に協力していただいた、東京工業大学機械物理工学科卒業生、近畿博史氏、和泉原芽一代、大里豊彦氏、高木礼史氏、松本功氏、加東重明氏、鍋田正明氏、若林勤代ならびに大学院生立原昌義氏に厚くお礼申し上げます。さらに、研究に際して多大の便宜を与えてくれた坂田研究室はじめ多くの研究室の皆様に心から感謝致します。

なお、有限要素解析等の数値計算は、東京工業大学総合情報処理センターならびに東京大学大型計算機センターにおいて行  
った。

## 参考文献

### 第Ⅰ章

- (1) Tetelman, A. S. and McEvily, A. J., *Fracture of Structural Material*, (1977) Jon Wiley; 宮本博訳「破壊力学の基礎」(1977) 培風館。
- (2) Liebowitz, H. ed. *Fracture Vol. 1~7*, (1968~1972) Academic Press.
- (3) Knott, J. F., *Fundamentals of Fracture Mechanics*, (1973) Butterworths; 宮本博訳「構造材料の強度と破壊 1, 2」,(1960) 培風館。
- (4) 横堀武夫「材料強度学 第2版」(1974) 岩波。
- (5) Griffith, A. A., *The phenomena of rupture and flow in solids*, Phil. Trans. Roy. Soc. 221 (1920) 163-198.
- (6) Irwin, G. R., *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*, J. Appl. Mech. 24 (1957) 361-364.
- (7) 例えは 固村弘之「線形破壊力学入門」(1976) 培風館; 中沢一・小林英男「固体の強度」(1976) 共立出版; 村上裕則・大南正瑛「破壊力学入門」(1979) オーム社。
- (8) Begley, J. A. and Landes, J. D., *The J integral as a fracture criterion*, ASTM STP 514 (1972) 1-20
- (9) Rice, J. R., *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*, J. Appl. Mech. 35 (1968) 379-386.
- (10) Rice, J. R. and Rosengren, G. F., *Plane strain deformation near a crack tip in a power law hardening material*, J. Mech. Phys. Solids 16 (1968) 1-12.
- (11) Hutchinson, J. W., *Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material*, J. Mech. Phys. Solids 16 (1968) 13-31.
- (12) Hutchinson, J. W., *Plastic stress and strain fields at a crack tip*, J. Mech. Phys. Solids 16 (1969) 337-347.
- (13) Paranjpe, S. A. and Banerjee, S., *Interrelation of crack opening displacement and J-integral*, Engng. Fract. Mech. 11 (1979) 43-53.
- (14) Clarke, G. A., Andrews, W. R., Begley, J. A., Donald, J. K., Embley, G. T., Landes, J. D., McCabe, D. E., and Underwood, J. H., *A procedure for the determination of ductile fracture toughness values using J integral techniques*, J. Test. Eval. 7 (1979) 49-56.
- (15) 例えは Dowling, N. E. and Begley, J. A., *Fatigue crack growth during gross plasticity and the J-integral*, ASTM STP 590 (1976) 82-103.
- (16) 例えは Landes, J. D., Begley, J. A. and Clarke, G. A. eds. *Elastic- Plastic Fracture*, ASTM STP 668 (1979) ASTM.

- (17) Rice, J. R., *Thermodynamics of the quasi-static growth of Griffith cracks*, *J. Mech. Phys. Solids* 26 (1978) 61-78.
- (18) Dugdale, D. S., *Yielding of steel sheets containing slits*, *J. Mech. Phys. Solids* 8 (1960) 100-104.

## 第二章

- (1) Broberg, K. B., *Crack-growth criteria and non-linear fracture mechanics*, *J. Mech. Phys. Solids* 19 (1971) 407-418.
- (2) Freund, L. B., *Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic solid*, *J. Elasticity* 2 (1972) 341-349.
- (3) 村外志雄・森勉「マイクロメカニクス=転位と介在物」(1976) 培風館。
- (4) Eshelby, J. D., *The calculation of energy release rates*, *Prospects of Fracture Mechanics* (Sih, G. C., van Elst, H. C. and Broek, D. ed.) 69-84 (1974) Noordhoff.
- (5) Knowles, J. K. and Sternberg, E., *On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatic*, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 44 (1972) 187-211.
- (6) Budiansky, B. and Rice, J. R., *Conservation laws and energy-release rates*, *J. Appl. Mech.* 40 (1973) 201-203.
- (7) 第Ⅰ章文献(4)
- (8) Thomason, P. F., *A theoretical relation between  $K_{Ic}$  and basic material properties in ductile metal*, *Int. J. Fract. Mech.* 7 (1971) 409-419.
- (9) Andersson, H., *Analysis of a model for void growth and coalescence ahead of a moving crack tip*, *J. Mech. Phys. Solids* 25 (1977) 217-233.
- (10) Kfouri, A. P. and Rice, J. R., *Elastic/plastic separation energy rate for crack advance in finite growth steps*, *Proc. ICF4 Vol.1* (Taplin, D. M. R. ed.) 43-59 (1977) Univ. Waterloo Press.
- (11) Eftis, J. and Liebowitz, H., *On surface energy and the continuum thermodynamics of brittle fracture*, *Engng. Fract. Mech.* 8 (1976) 459-485.
- (12) Barenblatt, G. I., *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture*, *Advan. Appl. Mech.* 7 (1962) 55-129.
- (13) 第Ⅱ章文献(9)
- (14) 坂田勝・青木繁・石井潔, *回転円板におけるJ積分の解析*, 機論 45-383 (1978) 2238-2243.
- (15) Ainsworth, R. A., Neale, B. K. and Price, R. H., *Fracture behavior in the presence of thermal strains*, *Inst. Mech. Engrs., London* (1978) 197-204.
- (16) Bui, H. D., *Stress and crack-displacement intensity factors in elastodynamics*,

- Proc. ICF4 Vol.3 (Taplin, D. M. R. ed.) 91-95 (1977) Univ. Waterloo Press.
- (17) Eftis, J and Liebowitz, H., On fracture toughness evaluation for semi-brittle fracture, Engng. Fract. Mech. 7 (1975) 101-135.
- (18) Eftis, J Jones, D. L. and Liebowitz, H., On fracture toughness in the non-linear range, Engng. Fract. Mech. 7 (1975) 491-503.
- (19) Blackburn, W. S., Path independent integrals to predict onset of crack instability in an elastic plastic material, Int. J. Fract. 8 (1972) 343-346.
- (20) Strifors, H. C., A generalized force measure of conditions at crack tips, Int. J. Solids Struct. 10 (1974) 1389-1404.
- (21) 第I章 文献(10)
- (22) 第I章 文献(11), (12)
- (23) Fisher, B., The product of distributions, Quart. J. Math. 22 (1971) 291-298.
- (24) 第I章 文献(6)
- (25) Broberg, K. B., Energy methods in statics and dynamics of fracture, 材料強度誌 10 (1975) 33-45.
- (26) 第I章 文献(14)
- (27) 第I章 文献(7)

### 第三章

- (1) 坂田勝・青木繁・岩本喜雄, 破壊の動力学的取扱いについて, 機械学会 分科会報告書 No.294 (主査 中原一郎) (1981) 64-77.
- (2) Sih, G. C. ed., Elastodynamic Crack Problems, (1977) Noordhoff.
- (3) 青木繁, 動的破壊力学の研究動向, 日本機械学会誌 84 748 (1981) 243-249.
- (4) Christensen, R. M., Theory of Viscoelasticity, (1971) Academic Press.
- (5) Achenbach, J. D., Dynamic effects in brittle fracture, Mechanics Today, Vol.1, (Nasser, S. N. ed.) 1-57 (1972) Pergamon Press.
- (6) Freund, L. B., The analysis of elastodynamic crack tip stress fields, Mechanics Today, Vol.3 (Nasser, S. N. ed) 55-91. (1976) Pergamon Press.
- (7) Wilson, W. K., Finite element methods for elastic bodies containing cracks, Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems (Sih, G. C. ed.) 484-515 (1973) Noordhoff.
- (8) 山田嘉昭・永井吉彦, Analysis of one-dimensional stress wave by the finite element method, 生産研究 23 (1971) 16-19.
- (9) Bažant, Z. P., Glazik, J. L. Jr., and Achenbach, J. D., Finite element

analysis of wave diffraction by a crack, J. Engng. Mech. Div. ASCE 102-EM3, (1976) 479-496.

- (10) King, W. W. and Malluck, J. F., Wave diffraction by a crack: Finite element simulations, J. Engng. Mech. Div. ASCE 103-EM3 (1976) 479-496.
- (11) Newmark, N. M., A method of computation for structural dynamics, Trans. ASCE 127 (1962) 1406-1435.
- (12) Kostrov, B. V., Unsteady propagation of longitudinal shear cracks, Appl. Math. Mech. (English translation PMM) 30 (1966) 1241-1248.
- (13) Thau, S. A. and Lu, T. H., Transient stress intensity factors for a finite crack in an elastic solid caused by a dilatational wave, Int. J. Solids Struct.
- (14) 石川晴雄,  $J$ 積分による応力拡大係数の有限要素解析(モードIおよび混合モードのき裂について), 機論(A) 46-401 (1980) 67-76; Ishikawa, H., Kitagawa, H. and Okamura, H.,  $J$ -integral of a mixed mode crack and its application, ICM3 (Miller, K. J. and Smith, R. F., ed.) Vol. 3 447-456 (1979) Pergamon.
- (15) 岩本喜雄・青木繁・和泉原芳一・坂田勝, 粘弹性体のき裂進展開始条件について, 機論論稿 790-12 (1979) 244-246.
- (16) 例えは Bush, A. J., Dynamic fracture toughness tests on A302-B steel, ASTM STP 466 (1970) 259-280.
- (17) 例えは Shoemaker, A. K. and Rolfe, S. T., Static and dynamic low-temperature  $K_{Ic}$  behavior of steels, J. Basic Engng. 91 (1969) 512-518.
- (18) 例えは Turner, C. F., Measurement of fracture toughness by instrumented impact test, ASTM STP 466 (1970) 93-114.
- (19) 例えは Costin, L. S., Duffy, J. and Freund, L. B., Fracture initiation in Metals under stress wave loading conditions, ASTM STP 627 (1977) 301-318.
- (20) Nash, G. E., An analysis of the forces and bending moments generated during the notched beam impact test, Int. J. Fract. Mech. 5 (1969) 269-286.
- (21) Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G. R., The Stress Analysis of Cracks Handbook (1973) Del Research Corporation.
- (22) Goldsmith, W., Impact (1960) Edward Arnold.
- (23) 遠藤満・西成人・中川正紀・坂田勝, 球による円柱の衝撃音, 機論 44-377 (1978) 38-46.
- (24) Nilsson, F., A note on the stress singularity at non-uniformly moving crack tip, J. Elasticity 4 (1974) 73-75.
- (25) Freund, L. B. and Clifton, R. J., On the uniqueness of plane elastodynamic solutions for running cracks, J. Elasticity 4 (1974) 293-299.
- (26) Achenbach, J. D. and Bažant, Z. P., Elastodynamic near-tip stress and displacement fields for rapidly propagating cracks in orthotropic materials, J. Appl. Mech. 42 (1975) 183-189.

- (27) Broberg, K. B., *The propagation of a brittle crack*, Arkiv for Fysik 18 (1960) 159-192.
- (28) 第I章の文献(18)
- (29) Goodier, J. N. and Field, F. A., *Plastic energy dissipation in crack propagation*, *Fracture of Solid* (Drucker, D. L. and Gilman, J. J., ed.) 103-118 (1963) Interscience.
- (30) Atkinson, C., *A simple model of relaxed expanding crack*, Arkiv for Fysik 35 (1968) 469-476.
- (31) Embley, G. T. and Sih, G. C., *Plastic flow around an expanding crack*, Engng. Fract. Mech. 4 (1972) 431-442.
- (32) Muskhelishvili, N. J., *Singular Integral Equations* (1953) Noordhoff.
- (33) Afanas'ev, E. F. and Cherepanov, G. P., *Some dynamic problems of the theory of elasticity*, Appl. Math. Mech. (English translation PMM) 37 (1973) 584-606.
- (34) Tsai, Y. M., *Propagation of a brittle crack at constant and accelerating speeds*, Int. J. Solids Struct. 9 (1973) 625-642.
- (35) Freund, L. B., *Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading-I. constant rate of extension*, J. Mech. Phys. Solids 20 (1972) 129-140.
- (36) Freund, L. B., *Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading-II. non-uniform rate of extension*, J. Mech. Phys. Solids 20 (1972) 141-152.
- (37) Freund, L. B., *Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading-III. stress wave loading*, J. Mech. Phys. Solids 21 (1973) 47-61.
- (38) Freund, L. B., *Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading-IV. obliquely incident stress pulse*, J. Mech. Phys. Solids 22 (1974) 137-146.
- (39) 青木繁・加古卓也・坂田勝, ゼルビ性材料におけるき裂進展の破壊動力学的研究(第3報, き裂進展速度および動的破壊じん性) 機論 41-352 (1975) 3348-3355.
- (40) Shmueli, M. and Alterman, Z. S., *Crack propagation analysis by finite differences*, J. Appl. Mech. 40 (1973) 903-908.
- (41) Kobayashi, A. S., Emery, A. F. and Mall, S., *Dynamic-finite-element and dynamic-photoelastic analyses of two fracturing Homalite-100 plates*, Exp. Mech. 16 (1976) 321-328.
- (42) Rose, L. R. F., *Recent theoretical and experimental results on fast brittle fracture*, Int. J. Fract. 12 (1976) 321-328.
- (43) Yoffe, E. H., *The moving Griffith crack*, Phil. Mag. 42 (1951) 739-750.
- (44) 例えは" Mecholsky, J. J., Freiman, S. W. and Rice, R. W., *Fractographic*

- analysis of ceramic, ASTM STP 645 (1978) 363-379.
- (45) Mecholsky, J. J., Rice, R. W. and Freiman, S. W., Prediction of fracture energy and flaw size in glasses from measurements of mirror size, J. Am. Ceram. Soc. 57 (1974) 440-443.
- (46) Kirchner, H. P. and Gruver, R. M., Fracture mirror in alumina ceramics, Phil. Mag. 27 (1973) 1433-1466.
- (47) Mecholsky, J. J., Freiman, S. W. and Rice, R. W., Fracture surface analysis of ceramics, J. Mater. Sci. 11 (1976) 1310-1319.
- (48) Abdel-Latif, A. I. A., Bradt, R. C. and Tressler, R. E., Dynamics of fracture mirror boundary formation in glass, Int. J. Fract. 13 (1977) 349-359.
- (49) Johnson, J. W. and Holloway, D. G., On the shape and size of fracture zones on glass fracture surfaces, Phil. Mag. 14 (1966) 731-743.
- (50) Congreton, J. and Petch, N. J., Crack-branching, Phil. Mag. 16 (1967) 749-760.
- (51) Sih, G. C., 文献(2)の XVII - VLVII.
- (52) Kirchner, H. P., The strain intensity criterion for crack branching in ceramics, Engng. Fract. Mech. 10 (1978) 283-288.
- (53) 青木繁・下川正樹・平野昌宏・坂田勝, セラミック材料におけるき裂進展の破壊力学的研究(第1報, き裂の分歧) 機論 41-347 (1975) 1942-1948.
- (54) 青木繁・下川正樹・坂田勝, セラミック材料におけるき裂進展の破壊力学的研究(第2報, 静水圧下におけるき裂の分歧) 機論 41-352 (1975) 3341-3347.
- (55) 例えは Harn, G. T. and Kanninen, M. F. ed., Fast Fracture and Crack Arrest, ASTM STP 627 (1977) ASTM.

## 第Ⅳ章

- (1) 第Ⅰ章文献(16)
- (2) Latzko, D. G. H. ed., Post-Yield Fracture Mechanics (1979) Applied Science Publishers.
- (3) Larsson, L. H. ed., Advances in Elasto-plastic Fracture Mechanics (1979) Applied Science Publishers.
- (4) 第Ⅱ章文献(9)
- (5) 小田嘉昭, 塑性・粘弹性 (1972) 培風館。
- (6) Rice, J. R., Paris, P. C. and Merkle, J. G., Some further results of J-integral analysis and estimates, ASTM STP 536 (1973) 231-245.
- (7) 第Ⅲ章文献(21)
- (8) Wilson, W. K. and Yu, I.-W., The use of the J-integral in thermal stress

- crack problems, Int. J. Fract. 15 (1979) 377-387.
- (9) Gurtin, M., On a path-independent integral for thermoelasticity, Int. J. Fract. 15 (1979) R169-R170.
- (10) Blackburn, W. S., Hellen, T. K. and Jackson, A. D., An integral associated with the state of a crack tip in a non-elastic material, Int. J. Fract. 13 (1977) 183-200.
- (11) 第Ⅱ章文献(15)
- (12) 第Ⅰ章文献(10)
- (13) 第Ⅰ章文献(11), (12)
- (14) Segerlind, L. J., *Applied Finite Element Analysis* (1976) John Wiley & Sons; 川井忠彦 訳「応用有限要素解析」(1978) 丸善。
- (15) 矢川元基・官崎則幸・安藤良夫, 有限要素法による軸対称厚肉構造物の非定常温度場での弾塑性クリープ解析, 壓力技術 12 (1974) 293-300.
- (16) Isida, M., Effect of width and length on stress intensity factors of internally cracked plates under various boundary conditions, Int. J. Fract. Mech. 7 (1971) 301-316.
- (17) 井上達雄・田中喜久昭・青木正人, ひずみ履歴を考慮した弾塑性動応力の解析, 機論 38-314 (1972) 2490-2496.
- (18) 藤田謙・野本敏治, 熱弾塑性問題に関する研究(Ⅱ), 造船論 130 (1971) 183-191.
- (19) 非弾性構造解析法の実用化に関する研究分科会報告(Ⅱ) (主査 山田嘉昭) (1979) 297 日本機械学会。
- (20) 例えは, Kassir, M. K. and Sih, G. C., *Three-dimensional Crack Problems* (1975) Noordhoff.
- (21) 第Ⅱ章文献(6)
- (22) 第Ⅱ章文献(20)
- (23) Bergkvist, H. and Huong, G. L., *J-integral related quantities in axisymmetric cases*, Int. J. Fract. 13 (1977) 556-558.
- (24) Astiz, M. A., Elices, M and Galves, V. S., On energy release rates in axisymmetric problems, Proc. ICF4 Vol.3 (Taplin, D. M. R. ed.) 396-400 (1977) Univ. Waterloo Press.
- (25) 宮本博・菊池正紀・石田克己, 3次元のJ積分に関する研究(第1報)一貫通り裂のJ積分, 機講論 790-12 (1979) 197-199.
- (26) 北川英夫・結城良治・木須博行, 表面き裂材の延性破壊へのJ積分の適用に関する研究—三次元き裂のJ積分と表面き裂材のJIC, 機講論 800-1 (1980) 46-48.
- (27) Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method in Engineering Science* (1971) McGraw-Hill; 吉誠雅夫・山田嘉昭 訳「マトリックス有限要素法」(1975) 培風館。

- (28) Yagawa, G. and Nishioka, T., Three-dimensional finite element analysis for through-wall crack in thick plate, Int. J. Num. Meth. Engng. 12 (1978) 1295-1310.
- (29) 坂田勝・青木繁・岩本喜之雄・神沢守仁・小樽直明, 丁種分解析における板厚効果, 機械論 804-7 (1980) 25-32.
- (30) 第Ⅰ章 文献状(14)

## 付録 I 領内問題に対する特異要素法(静止き裂の場合)

式(III-8b)を参照し、特異要素内の変位場を次式のように仮定する。

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_1^I(\theta, v), \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_1^{II}(\theta, v), 1, 0 \\ \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_2^I(\theta, v), \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_2^{II}(\theta, v), 0, 1 \end{Bmatrix}^e \begin{Bmatrix} T_I(t) \\ T_{II}(t) \\ U_0(t) \\ V_0(t) \end{Bmatrix}^e \quad (\text{AI-1})$$

ここで、 $U_0(t)$ ,  $V_0(t)$ は、それぞれ、 $X_1$ 軸方向および $X_2$ 軸方向の特異要素全体の変位である。以下、面外せん断変形(モードIII)の場合と同様にして式(III-21)を得ることとする。ただし、式(III-17)と(III-22)は次式のようになる。

$$\{\Delta\delta^y\} = \{\Delta\delta_{11}, \Delta\delta_{22}, \Delta\delta_{12}\}^T \quad (\text{AI-2a})$$

$$[B]^e = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, 0, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}^T [N(x, x_2)]^T \quad (\text{AI-2b})$$

$$[k]^e = \frac{2+\alpha\Delta t}{2+\beta\Delta t} \iint_{Ae} [B]^e [D] [B]^e dX_1 dX_2 \quad (\text{AI-2c})$$

$$[D] = \mu' \begin{bmatrix} 1/k^2 & (1-2k^2)/k^2 & 0 \\ (1-2k^2)/k^2 & 1/k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{AI-2d})$$

$$[m]^e = \iint_{Ae} \rho [N]^e [N]^e dX_1 dX_2 \quad (\text{AI-2e})$$

$$\{\Delta f^y\}^e = \int_{Bae} [N]^e \{\Delta T_1, \Delta T_2\}^T d\Gamma \quad (\text{AI-2f})$$

$$\{\Delta f_{v.s.}\} = \frac{2\Delta t}{2+\beta\Delta t} \iint_{Ae} \{\beta[B]^e \{\delta(t_0)\} - \alpha[B]^e [D]\{\varepsilon(t_0)\}\} dX_1 dX_2 \quad (\text{AI-2g})$$

$$\{\delta(t_0)\} = \{\delta_{11}(t_0), \delta_{22}(t_0), \delta_{12}(t_0)\} \quad (\text{AI-2h})$$

$$\{\varepsilon(t_0)\} = \{\varepsilon_{11}(t_0), \varepsilon_{22}(t_0), 2\varepsilon_{12}(t_0)\} \quad (\text{AI-2i})$$

また、き裂面に関して対称な形状の特異要素に対して、式(III-23)は次式のようになる。

$$[k]^e = \frac{2+\alpha\Delta t}{2+\beta\Delta t} \mu' \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^e \quad (\text{AI-3a})$$

$$[m]^e = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & m_{24} \\ m_{31} & 0 & m_{33} & 0 \\ 0 & m_{42} & 0 & m_{44} \end{bmatrix}^e \quad (\text{AI-3b})$$

$$\{\Delta f\}_e = \left\{ \int_{\rho_{ce}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [g_1^I(\theta, \nu) \Delta T_1 + g_2^I(\theta, \nu) \Delta T_2] dr, \right. \\ \left. \int_{\rho_{ce}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [g_1^{II}(\theta, \nu) \Delta T_1 + g_2^{II}(\theta, \nu) \Delta T_2] dr, \int_{\rho_{ce}} \Delta T_1 d\nu, \int_{\rho_{ce}} \Delta T_2 d\nu \right\}^T \quad (\text{AI-3c})$$

$$\{\Delta f_{vis}\} = \frac{\Delta t}{2+\alpha\Delta t} \frac{1}{\mu} [k]^e (\beta \{K_I(t_0), K_{II}(t_0), 0, 0\}^T - 2\alpha\mu' \{T_I(t_0), T_{II}(t_0), 0, 0\}^T) \quad (\text{AI-3d})$$

$T, T^-, L$ ,

$$k_{11} = \frac{1}{2\pi} \iint_{Ae} \left[ \frac{2k^2}{1-k^2} (1+\cos\theta) + \sin^2\theta \right] r dr d\theta \quad (\text{AI-4a})$$

$$k_{22} = \frac{1}{2\pi} \iint_{Ae} \left[ \frac{1+k^2}{1-k^2} - \frac{2k^2}{1-k^2} \cos\theta + 3\cos^2\theta \right] r dr d\theta \quad (\text{AI-4b})$$

$$m_{11} = \iint_{Ae} \frac{\rho}{2\pi} \left[ \frac{1+k^2}{1-k^2} - \cos\theta \right]^2 r^2 dr d\theta \quad (\text{AI-4c})$$

$$m_{13} = m_{31} = \iint_{Ae} \frac{\rho}{2\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1+3k^2}{1-k^2} \cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3}{2}\theta \right] r^{3/2} dr d\theta \quad (\text{AI-4d})$$

$$m_{22} = \iint_{Ae} \frac{\rho}{2\pi} \left[ \left( \frac{1+k^2}{1-k^2} \right)^2 - 2 \left( \frac{1+k^2}{1-k^2} \right) \cos\theta + 4 - 3\cos^2\theta \right] r^2 dr d\theta \quad (\text{AI-4e})$$

$$m_{24} = m_{42} = - \iint_{Ae} \frac{\rho}{2\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{5k^2-1}{1-k^2} \cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3}{2}\theta \right] r^{3/2} dr d\theta \quad (\text{AI-4f})$$

$$m_{33} = m_{44} = \iint_{Ae} \rho r dr d\theta \quad (\text{AI-4g})$$

2. 3.

## 付録 II 特異要素のマトリックス(高速き裂の場合)

式(III-137)において特異要素の各マトリックスは、つきのように与えられる。

### (1) 画面せん断変形(モードⅢ)

$$[M(t)]^e = [m]^e \quad (\text{AII-1a})$$

$$[V(t)]^e = [v]^e \quad (\text{AII-1b})$$

$$[K(t)]^e = [k]^e \quad (\text{AII-1c})$$

$$\{F(t)\}^e = \{f\}^e \quad (\text{AII-1d})$$

$\therefore \tau$ ,

$$m = \rho \iint_{Ae} f_{\text{III}}^2 dX_1 dX_2 \quad (\text{AII-2a})$$

$$\begin{aligned} v &= -2\rho v \iint_{Ae} f_{\text{III}} \frac{\partial f_{\text{III}}}{\partial X_1} dX_1 dX_2 \\ &= -\rho v \int_{P_e} f_{\text{III}}^2 dX_2 \end{aligned} \quad (\text{AII-2b})$$

$$\begin{aligned} k &= \mu \iint_{Ae} \left[ \left( \frac{\partial f_{\text{III}}}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_{\text{III}}}{\partial X_2} \right)^2 \right] dX_1 dX_2 - \rho v^2 \iint_{Ae} \left( \frac{\partial f_{\text{III}}}{\partial X_1} \right)^2 dX_1 dX_2 \\ &\quad + \rho v^2 \int_{P_e} f_{\text{III}} \frac{\partial f_{\text{III}}}{\partial X_1} dX_2 \end{aligned} \quad (\text{AII-2c})$$

$$f = \int_{P_{0e}} T_3 f_{\text{III}} dP \quad (\text{AII-2d})$$

$T_3 = L$

$$\frac{\partial f_{\text{III}}}{\partial X_1} = - \frac{Y_-}{2\mu [\pi r (1 - \beta_0^2)]^{1/2}} \quad (\text{AII-3a})$$

$$\frac{\partial f_{\text{III}}}{\partial X_2} = \frac{Y_+}{2\mu (\pi r)^{1/2}} \quad (\text{AII-3b})$$

## (2) 開口変形 (モード I)

$$[M(t)]^e = \begin{bmatrix} m_{11}, m_{12} \\ m_{21}, m_{22} \end{bmatrix}^e \quad (\text{AII-4a})$$

$$[V(t)]^e = \begin{bmatrix} v_{11}, v_{12} \\ v_{21}, v_{22} \end{bmatrix}^e \quad (\text{AII-4b})$$

$$[K(t)]^e = \begin{bmatrix} k_{11}, k_{12} \\ k_{21}, k_{22} \end{bmatrix}^e \quad (\text{AII-4c})$$

$$\{F(t)\}^e = \begin{cases} f_1 \\ f_2 \end{cases} \quad (\text{AII-4d})$$

∴  $\ddot{z}$ ,

$$m_{11} = \rho \iint_{A_e} (f_1^{I^2} + f_2^{I^2}) dX_1 dX_2 \quad (\text{AII-5a})$$

$$m_{12} = m_{21} = \rho \iint_{A_e} f_1^I dX_1 dX_2 \quad (\text{AII-5b})$$

$$m_{22} = \rho \iint_{A_e} dX_1 dX_2 \quad (\text{AII-5c})$$

$$v_{11} = -\rho v \int_{P_e} (f_1^{I^2} + f_2^{I^2}) dX_2 \quad (\text{AII-5d})$$

$$v_{12} = v_{21} = 0 \quad (\text{AII-5e})$$

$$v_{21} = -2\rho v \int_{P_e} f_1^I dX_2 \quad (\text{AII-5f})$$

$$k_{11} = 2\mu \iint_{A_e} \left[ \frac{1}{2k^2} \left( \frac{\partial f_1^I}{\partial X_1} + \frac{\partial f_2^I}{\partial X_2} \right)^2 - 2 \frac{\partial f_1^I}{\partial X_1} \frac{\partial f_2^I}{\partial X_2} + 2 \frac{\partial f_1^I}{\partial X_2} \frac{\partial f_2^I}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f_1^I}{\partial X_2} - \frac{\partial f_2^I}{\partial X_1} \right)^2 \right] dX_1 dX_2$$

$$+ \rho v^2 \int_{P_e} \left( f_1^I \frac{\partial f_2^I}{\partial X_1} + f_2^I \frac{\partial f_1^I}{\partial X_1} \right) dX_2 - \rho v^2 \iint_{A_e} \left\{ \left( \frac{\partial f_1^I}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_2^I}{\partial X_1} \right)^2 \right\} dX_1 dX_2 \quad (\text{AII-5g})$$

$$k_{12} = k_{21} = 0 \quad (\text{AII-5h})$$

$$k_{21} = \rho v^2 \int_{P_e} \frac{\partial f_1^I}{\partial X_1} dX_2 \quad (\text{AII-5i})$$

$$f_1 = \int_{P_{0e}} (f_1^I T_1 + f_2^I T_2) d\Gamma \quad (\text{AII-5j})$$

$$f_2 = \int_{P_{0e}} T_1 d\Gamma \quad (\text{AII-5k})$$

$\exists T \in L$ ,

$$\frac{\partial f_1^I}{\partial x_1} = \frac{(2-\beta_0^2)X_+ - 2(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(1-\beta_0^2)^{1/2}Y_+}{2\mu(\pi r)^{1/2}R(\beta_0)} \quad (\text{AII-6a})$$

$$\frac{\partial f_1^I}{\partial x_2} = \frac{(2-\beta_0^2)(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}X_- - 2(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(1-\beta_0^2)Y_-}{2\mu(\pi r)^{1/2}R(\beta_0)} \quad (\text{AII-6b})$$

$$\frac{\partial f_2^I}{\partial x_1} = \frac{(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(2-\beta_0^2)X_- - 2(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}Y_-}{2\mu(\pi r)^{1/2}R(\beta_0)} \quad (\text{AII-6c})$$

$$\frac{\partial f_2^I}{\partial x_2} = \frac{-(1-k^2\beta_0^2)(2-\beta_0^2)X_+ + 2(1-k^2\beta_0^2)^{1/2}(1-\beta_0^2)^{1/2}Y_+}{2\mu(\pi r)^{1/2}R(\beta_0)} \quad (\text{AII-6d})$$

なお、 $\beta_0=0$  の場合は  $\beta_0 \rightarrow 0$  の極限を用いた。これらは静的な解析によって得られるとの一致する。