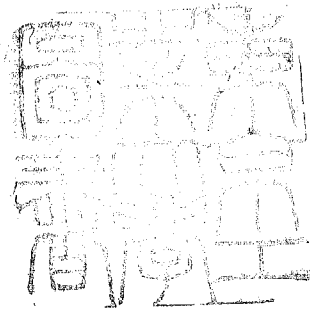


論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	破壊の多軸確率分布関数の導出とそのぜい性破壊への応用
Title(English)	
著者(和文)	松尾陽太郎
Author(English)	YOHTARO MATSUO
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:乙第1009号, 授与年月日:1981年2月28日, 学位の種別:論文博士, 審査員:坂田勝
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: , Report number:乙第1009号, Conferred date:1981/2/28, Degree Type:Thesis doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis



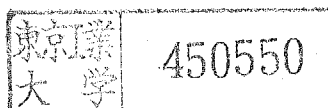
破壊の多軸確率分布関数の導出

と

そのぜい性破壊への応用

東京工業大学工学部生産機械工学科

松尾陽太郎



目次

第1章 緒論

第2章 最弱リンク説と Weibull 多軸確率分布関数の概説

2.1 緒言

2.2 最小値確率論と最弱リンク説

2.2.1 強度の分布

2.2.2 最弱リンク説

2.3 最弱リンク説による Weibull 多軸確率分布関数の導出

2.4 結言

第3章 表面き裂と内部き裂を同時に考慮した多軸確率分布関数の導出とその応用

3.1 緒言

3.2 表面き裂と内部き裂を同時に考慮した多軸確率分布関数の導出

3.3 黒鉛からなる回転円板の破壊

3.3.1 回転円板の破壊強度の期待値

3.3.2 実験方法

3.3.3 実験結果と考察

3.4 ぜい性材料の側圧試験(中空円筒)

3.4.1 側圧試験における破壊圧力の期待値

3.4.2 横穴付き側圧試験における破壊圧力の期待値

3.4.3 考察

3.5 ぜい性材料の内外面側圧試験(中空円筒)

3.5.1 試験円筒の応力状態

3.5.2 実験方法

3.5.3 実験結果

3.5.4 考察

3.6 結言

第4章 き裂を陽に考慮した多軸確率分布関数の導出とその応用

4.1 緒言

4.2 き裂を陽に考慮した多軸確率分布関数の導出

- 4.2.1 表面き裂を陽に考慮した場合
 4.2.2 内部き裂を陽に考慮した場合

- 4.3 2軸応力下におけるぜい性破壊曲線の解析
 4.4 回転円板の破壊強さの解析
 4.5 側圧試験における破壊圧力の解析

- 4.6 弱面を有するぜい性材料の破壊
 4.6.1 引張応力が支配的な場における破壊
 4.6.2 圧縮応力が支配的な場における破壊
 4.6.3 数値計算結果と考察

- 4.7 考 察
 4.7.1 破壊確率比について
 4.7.2 き裂の伝播条件と分布関数
 4.7.3 き裂面に働くまきり力

- 4.8 結 言

- 第5章 3軸均等引張を基準にした多軸確率分布関数
 5.1 緒 言
 5.2 3軸均等引張を基準にした比較係数の導出と分布関数
 5.2.1 内部き裂のみを考慮した場合
 5.2.2 表面き裂のみを考慮した場合
 5.3 パラメータの推定
 5.4 破壊応力の期待値
 5.5 考 察
 5.6 結 言

- 第6章 位置母数を持つ破壊の多軸確率分布関数の導出とその応用
 6.1 緒 言
 6.2 位置母数を持つ破壊の多軸確率分布関数の導出
 6.3 1・2軸均等引張における確率分布関数
 6.3.1 内部き裂のみを考慮した場合 (せん断応力を無視)
 6.3.2 内部き裂のみを考慮した場合 (せん断応力を考慮)
 6.3.3 表面き裂のみを考慮した場合 1軸均等引張における分布関数

- 6.4 破壊確率比
6.4.1 内部ス裂のみを考慮した場合 (せん断応力を無視)
6.4.2 内部ス裂のみを考慮した場合 (せん断応力を考慮)
6.4.3 表面ス裂のみを考慮した場合

6.5 破壊応力の期待値

6.6 考察

6.7 結論

第7章 結論

(参考文献)

第1章 緒論

建築材料としてのコンクリート等を除くと、その信頼性の低さからいままでも用いられることの少なかつたぜい性材料が、材質の飛躍的な向上の故に、近年各種の構造用材料等に多く用いられるようになってきた。一例を挙げると、高温強度材料としての Al_2O_3 , BeO , CaF_2 , $CsBr$, SiO_2 , TiO_2 , CBN 等のセラミックス類、送電・変電用の碍子、ガラスライニング材、原子炉用黒鉛材、研削砥石、エネルギー蓄積用の超々高強度フライホイール材、各種絶縁材、IC・LSI 基板、表面波デバイス用材料等がある。それとともに安全性、経済性のためにこれらぜい性材料の各種応力下での破壊強さ、破壊挙動を知る必要性が生じた。また、地上の各種構造物の基礎工事、トンネル掘削はもとより、海洋開発、地震予知などにおいては、地盤ないし地殻を形成する岩石のぜい性的破壊挙動を知ることが不可欠である。

セラミックスや岩石のようなぜい性材料の機械的性質のうち他の材料と大きく異なる点は、まず第一に破壊するまでほとんど塑性変形をしないこととが挙げられるが、もう一つの大きな特徴は、試験室規模の試験片を用いた場合、圧縮強さ (σ_c) に比べて引張強さ (σ_t) が著しく小さいということである。同一の大きさの試験片に対して比 σ_c/σ_t は材料によって大きく異なる。一例をあげれば電極用カーボンではその比が 2~4 であり、コンクリートは

(2)
8~10, ガラスは 16~20, 砂岩は 10~70 となっている⁽¹⁾。また圧縮強さには寸法効果がほとんどみられないのに対し、引張強さには一般に寸法効果が見られることはよく知られている。

ぜい性破壊を説明する理論には大きくわけて決定論的理論と確率・統計論的理論とがあり、前者はさらに現象論的理論と破壊力学的理論に大別される。現象論的理論には最大せん断応力説 (Tresca の理論)⁽²⁾, 最大引張応力説, 内部摩擦角説 (Coulomb の理論)⁽³⁾, 応力円包絡線説 (Mohr の理論)⁽⁴⁾, Tension-cut-off 説⁽⁵⁾ などがある。特に中西・佐藤の理論^{(6)~(8)} は詳細な理論であって、平均応力説とその適用限界説は応力分布をもつぜい性材料の破壊もよく説明している。破壊力学的理論としては Griffith 理論⁽⁹⁾, McClintock-Walsh の修正 Griffith 理論⁽¹⁰⁾ があるが、後に述べるように fracture hardening 現象⁽¹¹⁾ を考慮していないという欠点を持っている。

先にも述べたように多くのぜい性材料においては、その引張強さに顕著な寸法効果が表われる。このような材料に対しては、決定論的理論よりも確率・統計論的理論の方がより適していると考えられる。引張応力が支配的な応力状態に対しては Griffith き裂の不安定伝播を前提として、最小値確率論に基づく最弱リンク説⁽¹¹⁾ が最も適しているといわれており、主として Weibull の一軸分布関数⁽¹²⁾ が用いられている。よく知られているように、一軸分布関数においては、物体内の各体積要素には最大主応力方向と垂直な面

を持つ最も危険なき裂が1個だけ存在すると仮定しており、他の方向のき裂の挙動はまったく無視している。従って実用上重要な意味を持つ多軸応力場には適用することができない。一先、Weibull⁽¹²⁾は物体内の各点におけるき裂の方向性を考慮した、いわゆる多軸確率分布関数を提案しているが、本人も含めて、理論的裏付けがまったくないという批判が多かった。Weibull以後、多軸確率分布関数に関してはわずかに Batdorf-Crozeの研究がある程度である。^{*} 彼等はその最初の論文⁽¹³⁾で最弱リンク説に基づく多軸確率分布関数を導いているが、複雑な形をしており、一般の多軸応力場に対しては膨大な数値計算を行なわなければならないという欠点をもっていた。最近 Batdorf⁽¹⁴⁾は多軸確率分布関数に関する上記の Batdorf-Croze理論が、実は Weibullの多軸確率分布関数と等価であることを証明した。Weibullの多軸確率分布関数は単純で実用的な形をしており、直観的にも妥当なものであるが、これにより理論的にも正しいことが証明されたのである。

Weibull⁽¹²⁾および Batdorf-Croze⁽¹³⁾の理論は内部き裂のみとその対象としており、実用上重要な表面き裂と内部き裂の両方を同時に考慮した場合については考察されていない。また、物体内の任意のき裂面に働く垂直応力のみを考慮しており、せん断応力を無視している。換言すれば多軸応力状態であらにもみみならず、任意のき裂はモードI型の破壊のみを起すと仮定したことに他ならない。^{*} Barnett⁽¹⁵⁾, Freudenthal⁽¹⁶⁾も研究を行なっているが、4.6節で述べるように彼等の理論は極めて限定されたものにすぎない。

い。また彼等は1軸均等引張のときに Weibull の一軸分布関数が成立するものとして理論を展開している。

本論文は、Weibull の多軸確率分布関数が持つ上記の欠点を修正し、その拡張を行なうことを目的としたものであって、始めに Weibull の多軸確率分布関数を、表面き裂と内部き裂を同時に考慮した場合に拡張し、応用例として黒鉛からなる回転円板の破壊、ぜい性材料の側圧試験、ぜい性材料の内外面側圧試験の解析を行なう。つぎに、き裂面に働く垂直応力とせん断応力の関数である“等価垂直応力”という概念を提唱して、き裂を陽に考慮した多軸確率分布関数を導出し、2軸応力下におけるぜい性破壊曲線の解析を行なう。さらに3軸均等引張を基準にした多軸確率分布関数を導出し、新たに定義した“形式的パラメータ”等について種々の考察を行なう。最後に、より一般的な、位置母数を持つ多軸確率分布関数を導出し、破壊確率比等の解析を行う。

第2章 最弱リンク説 と Weibull 多軸確率分布関数の概説

2.1 緒言

一般に、引張応力が支配的な場における非時間依存形ぜい性破壊の確率論的取扱については、Griffithき裂の不安定伝ぱに関連して最弱リンクモデルに基づく最小値確率論が最適とされ、多くの研究がなされてきた。しかし、その中の大部分は Weibull の 1 軸引張応力状態に対する確率分布関数 (1 軸分布関数) を用いた解析に終始しており、実用上重要な意味をもつ多軸応力状態に対する確率分布関数 (多軸分布関数) を用いた研究はめずみに Weibull⁽⁶⁾ と Batdorf-Croce⁽⁸⁾ の理論があるのみである。

本章では始めにぜい性破壊の確率統計論を最小値確率論と最弱リンク説の二翼に立脚してその概説を行なう。つぎに、従来批判の多かった Weibull の多軸分布関数が、最小値確率論と最弱リンク説から導かれた Batdorf-Croce 理論と等価であることを説明し、前者は後者よりも単純な形をしており、より実用的であることを述べる。

2.2 最小値確率論と最弱リンク説

2.2.1 強度の分布 はじめに、以下に示す仮定を行なう。

- (1) 考えている物体の全体積（または全表面積）を均等な体積要素に分割する。ただし、各要素は種々の大きさのき裂を十分な数含むものとする。
- (2) 各体積要素には、その強度を決定するき裂が唯一つ含まれている。き裂の相互干渉はないものとする。すなわち、他の要素とき裂とは独立に、あたかもその要素中には1個のき裂のみが存在するものと考える。
- (3) 体積要素の強度は、き裂の不安定化に関する Griffith 理論により、唯一つの危険なき裂に依存する。
- (4) 試験片全体の強度は最も危険なき裂を含む体積要素の強度により決定される。

上記の仮定からただちに『体積要素の局所強度分布は各要素に表われる最大（または最弱）のき裂の分布に対応し、全体積にわたるすべてのき裂の分布とは無関係である』ことが結論される。

この結論は非常に重要であって、体積要素の局所強度分布を極値統計論により決定できることを意味している。

極値統計論⁽¹⁾によれば、物理的に重要な極値の分布は2通り存在するのみである。1つは最大値の分布であり、他の1つは最小値の分布である。各分布ベトリうる関数形も指数型と Cauchy 型の2種類に限定されている。指数型は非制限初期母集団の極値を表わすもので、 x を確率変数とすると $|x| \rightarrow \infty$ に対して少なくとも e^{-x} と同程度の早さで0に収束するもので、すべてのモーメン

トを持つ。Cauchy型は $x=0$ において制限された初期母集団の極値を表わす関数で、 $|x| \rightarrow \infty$ に対して x^{-k} と同程度の速さで 0 に収束し、有限位のモーメントを持たない。以上のことから、き裂寸法の分布形を知ること、あるいは分布形をある形に仮定することなく各体積要素の最大き裂分布を直接指数型か Cauchy 型に限定することができる。

Fréchet⁽²⁾ は各体積要素の最大き裂の Cauchy 型分布関数を次式のように求めている。

$$\Pr \{X \leq x\} = F_x(x) = \exp \left\{ - \left(\frac{x}{u} \right)^{-\alpha} \right\} \quad (2-1)$$

ここで x は臨界き裂長さを表わす確率変数である。 u を局所引張強さを表わす確率変数、 k をある定数とすると、破壊のクライテリアは

$$Z = \frac{k}{\sqrt{X}} \quad (2-2)$$

と表わされるから、結局次式が成立する⁽³⁾。

$$F_z(z) = \Pr \{Z \leq z\} = \Pr \left\{ X \geq \frac{k^2}{z^2} \right\} = 1 - F_x \left(\frac{k^2}{z^2} \right) \quad (2-3)$$

式(2-1)、(2-3)より、体積要素の局所強さの分布関数として

$$F_z(z) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{k^2}{z^2 u} \right)^{-\alpha} \right\} = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{z}{v} \right)^{2\alpha} \right\}, v = \frac{k}{\sqrt{u}} \quad (2-4)$$

を得る。式(2-4)にはすべてのモーメントが存在する。同式は $z=0$ で有界な最小値の分布関数であり、これは体積要素中の最大き裂の分布が統計母集団の最大値の漸近分布に十分近いと仮定

して得られたものである。Gumbel⁽¹¹⁾ によると式(2-4)のモーメント、分散、モードは次のようになる。

$$\text{長次のモーメント} : m_k = v^k \Gamma(1 + k/2\alpha)$$

$$\text{分散} : \sigma^2 = v^2 \{ \Gamma(1 + 1/\alpha) - \Gamma^2(1 + 1/2\alpha) \}$$

$$\text{モード} : v$$

しかし、このようにして得られた強度値は実験値よりかはるかに高い値となることが知られている。その困難性を打開するために最弱リンク説が導入された。

2.2.2 最弱リンク説 最弱リンク説の基本概念は、すべての体積要素が1本の鎖のように直列に連結されていて、物体全体の破壊強さは最も弱い体積要素の強さにより決定されるというものである。Peirce⁽⁴⁾ は最初に最弱リンクモデルを木綿糸の強度に適用し、この理論が極値の漸近理論に近いことを見出した。一方、Weibull⁽⁶⁾ は極値の漸近理論とは無関係に発見的議論により最弱リンク説を固体の強度に適用し、その有名な分布関数を見出した。

最弱リンク説に基づく分布の問題は大きさ n の標本中の最小値の分布と正確に等価であり、いわゆる順序統計理論⁽⁵⁾ により解析することができる。初期分布 $F(x)$ を

$$F(x) = \Pr \{ X \leq x \}$$

とすると、大きさ n の標本中のすべての値が x より小さい確率は積法則より

$$\Phi_n(x) = \{F(x)\}^n \quad (2-5)$$

と表わされる。また、大きさ n の標本中のすべての値が x より大きい確率は、 x が最小になる確率に等しいから

$$1 - \Phi_n(x) = \{1 - F(x)\}^n$$

$$\therefore \Phi_n(x) = 1 - \{1 - F(x)\}^n \quad (2-6)$$

式 (2-5), (2-6) からモーメント等を計算するにあたっては、ほとんどの初期分布 $F(x)$ に対して閉じた形の積分を行なうことができない。そのため、つぎの関数を利用する。

今、各々大きさ n である、 m 個の標本について式 (2-5) を解くことを考える。各標本中には 1 個の最大値が必ず存在する。すると、 mn 個の観測値中の最大値は、大きさ n の標本からとった m 個の最大値のうちの最大のものである。2つの分布関数が同型ならば線形変換が成立することから、最大値が x より小さい確率は次のような形の、 x の線形関数と等置することができる。

$$\{F(x)\}^n = F(a_n x), \quad a_n \neq 1$$

上式は $a_n = n^k$ ($k: \text{const.}$) のとき満足される。関係 $a_{nm} = a_n a_m$ と式 (2-7) より、

$$F(x) = \exp \left\{ -(x/u)^{1/k} \right\} \quad (2-7)$$

を得る。式 (2-7) は Fréchet の求めた式 (2-1) と等価である。

式(2-7)を式(2-5)に代入して

$$\Phi_n(x) = F^n(x) = \exp\left\{-(x/un^{1/\alpha})^{-\alpha}\right\}$$

となる。式(2-3), (2-4)と上式より、物体全体の強さの分布 $F_n(z)$ は直ちに得られ、

$$F_n(z) = 1 - \exp\left\{-\frac{V}{V_0} \left(\frac{z}{v}\right)^{2\alpha}\right\} \quad (2-8)$$

ここで V_0 は体積要素の体積, $V = nV_0$ である。式(2-8)は体積要素中の最大き裂の極値分布と最弱リンク数とを結びつけた論理的仮定から導かれたものであり, Weibull により発見的議論によって導かれた, つぎに示す分布関数 (2-パラメータ表示)

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left\{-V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right\} \quad (\text{均等応力場}) \quad (2-9)$$

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left\{-\int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m dV\right\} \quad (\text{分布応力}) \quad (2-10)$$

と等価である。

式(2-8)におけるパラメータ 2α はき裂密度の測度ではなく、き裂の分散の測度である。 2α が大きい程き裂寸法は一様に近づく、したがってき裂密度の効果はより小さくなる。 $\alpha \rightarrow \infty$ の極限では均一の大さのき裂が分布することになり、き裂密度の効果は完全に消滅する。

2.3 最弱リンク説による Weibull の多軸確率分布関数の導出

前節で導入した Weibull の 1 軸分布関数, 式 (2-9), (2-10) は 1 軸引張応力状態にある場合にのみ有効な式であって、物体が多軸応力状態にある場合に対しては適当でない。そこで Weibull⁽⁶⁾ は多軸応力状態 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)

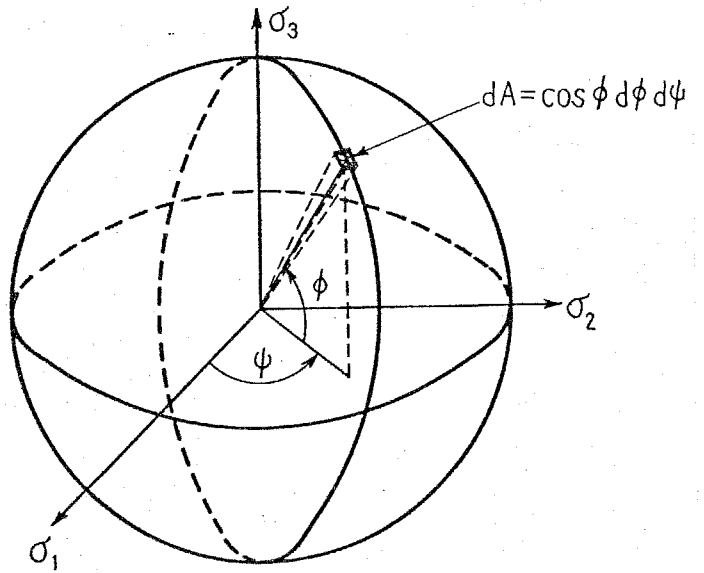


図 2-1 単位球

における破壊の確率について考察を行ない、物体内の各点におけるき裂の方向性を考慮するために、各点において図 2-1 に示すような単位球を考え、確率分布関数を次式のように表示した。

$$F(*) = 1 - \exp \left\{ - \int_B (K \int_A \sigma_n^m dA) dV \right\} \quad (2-11)$$

ここで σ_n は物体内の各点におけるき裂面に垂直な応力で

$$\sigma_n = \cos^2 \phi (\sigma_1 \cos^2 \psi + \sigma_2 \sin^2 \psi) + \sigma_3 \sin^2 \phi \quad (2-12)$$

であり、 $dA = \cos \phi d\phi d\psi$, A は単位球表面の半分, B は物体の内部を表わす。 K は単純引張応力状態のとき式 (2-9) と (2-11) とが一致するとして求めた比較係数で、

$$K = (2m+1) / 2\pi \sigma_0^m \quad (2-13)$$

である。 A についての積分は、注目しているき裂にモード I の破

壊が起こるための条件として $\sigma_n > 0$ の範囲で行う必要がある。

また、式(2-9), (2-10)と同様にせん断応力の効果を無視している。

Weibull の多軸分布関数、式(2-11)については、従来多くの人々が批判をしており、Weibull 自身も 1951 年の論文⁽⁷⁾で自己批判している。しかし、式(2-11)は厳密な思考の結果得られたものではないにしても、直観的には妥当なものであり、式の形も簡単であるという利点を持っている。以下に最近 Batdorf-Croze⁽⁸⁾ によって求められた最小値確率論による多軸分布関数を用いて、これから Weibull の多軸分布関数を導出し、従来の定説とは異なっても式(2-11)が理論的に十分な根拠を持つものであることを示すことにする。⁽⁹⁾

Batdorf-Croze は解析にあたって下記の仮定を行なった。

- (1) 材料は巨視的には等方的な連続体であるが、位置並びに方向に関して一様に分布した微細き裂を含む。
- (2) 材料の巨視的応力はき裂の存在によって影響されず、き裂の相互作用もない。
- (3) き裂の大きさや形、ならびに材料の性質は陽には扱わない。そのかわり、き裂面に垂直な巨視的引張応力が、特定のき裂を特徴づけるある限界応力 σ_{cr} を越えたとき、そのき裂は不安定に伝わり、試験片が破断する。

これらの仮定では、き裂の成長・合体、材料内の空孔等を無視しているのど、極めて扁平な互いに十分離れたき裂を多数含む完全ぜい性材料に対してのみ正確に成り立つものと考えられる。

いま、物体内の任意の点に位置した、任意方向の 1 個のき裂を考える。き裂面に垂直な応力成分 σ_n が、 $\sigma_n > \sigma_{cr}$ となるようなき裂の法線の集合を見込む立体角を Ω とする。このき裂が Σ なる巨視的応力状態の下で破壊する確率は

$$P_f = \Omega(\Sigma, \sigma_{cr}) / 4\pi \quad (2-14)$$

N をき裂密度、 ΔV を微小体積要素の体積とすると、この体積要素が破壊する確率は次式となる。

$$P_f = N \cdot \Delta V \cdot \Omega(\Sigma, \sigma_{cr}) / 4\pi \quad (2-15)$$

ただし $N = N(\sigma_{cr})$ であって、 σ_{cr} 以下の限界応力をもつき裂の密度関数である。限界応力が σ_{cr} と $\sigma_{cr} + d\sigma_{cr}$ の間にある、 ΔV 中のき裂の数は

$$dN = \Delta V \cdot \frac{dN(\sigma_{cr})}{d\sigma_{cr}} d\sigma_{cr} \quad (2-16)$$

限界応力が σ_{cr} と $\sigma_{cr} + d\sigma_{cr}$ の間にある 1 個のき裂が破壊する確率は

$$P_f(\Delta V, d\sigma_{cr}) = \Delta V \cdot \frac{dN(\sigma_{cr})}{d\sigma_{cr}} d\sigma_{cr} \cdot \Omega / 4\pi \quad (2-17)$$

ΔV が非常に小さく、破壊確率が極めて低いならば、任意の応力状態 Σ における破壊の確率は σ_{cr} について積分することにより次式のように求められる。

$$P_f(\Delta V, \Sigma) = \Delta V \int_0^\infty \frac{\Omega}{4\pi} \cdot \frac{dN(\sigma_{cr})}{d\sigma_{cr}} d\sigma_{cr} \quad (2-18)$$

よって生存確率は

$$P_s(\Delta V, \Sigma) = 1 - P_f(\Delta V, \Sigma) \quad (2-19)$$

一般に、注目している材料の全体積を微小部分に分割したとき、全体の生存確率は、破壊確率が極めて低ければ

$$\begin{aligned} P_s &= \prod_i (P_s)_i = \prod_i \{1 - (\Delta P_f)_i\} \\ &\simeq \prod_i \exp\{-(\Delta P_f)_i\} = \exp\left\{-\sum_i (\Delta P_f)_i\right\} \end{aligned} \quad (2-20)$$

で与えられるから、 $(\Delta P_f)_i = P_f(\Delta V, \Sigma)$ として式(2-18)を式(2-20)に代入し、総和記号を積分記号に置き換えることにより P_s として次式を得る。

$$P_s = \exp\left\{-\int dV \int d\Omega \frac{dN}{d\sigma_{cr}} \frac{\Omega}{4\pi}\right\} \quad (2-21)$$

単純引張 $(\sigma, 0, 0)$ なすびに 2軸均等引張 $(\sigma, \sigma, 0)$ の場合、 Ω は解析的に求まり、それぞれ $4\pi(1 - \sqrt{\sigma_{cr}/\sigma})$ および $4\pi\sqrt{1 - \sigma_{cr}/\sigma}$ となるが、一般の応力状態に対しては膨大な量の数値計算を必要とする。Batdorf⁽⁹⁾ はこの難点を解決する事を考え、 Ω のかわりに $d\Omega$ を使い、 $\sigma_n > \sigma_{cr}$ の条件で積分する際に、Heaviside の Step function $Y(\sigma_n, \sigma_{cr})$ を用いて式(2-21)を次のように表記した。

$$P_s = \exp\left\{-\iiint dV d\Omega d\sigma_{cr} \cdot Y(\sigma_n, \sigma_{cr}) \frac{dN}{d\sigma_{cr}}\right\} \quad (2-22)$$

ここで、

$$\int_0^\infty Y(\sigma_n, \sigma_{cr}) \frac{dN}{d\sigma_{cr}} d\sigma_{cr}$$

$$= N(\sigma_{cr}) \cdot Y(\sigma_n, \sigma_{cr}) \Big|_{\sigma_{cr}=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} \delta(\sigma_n - \sigma_{cr}) \cdot N(\sigma_{cr}) d\sigma_{cr}$$

$$= N(\sigma_n), \quad \delta(): \text{デルタ関数} \quad (2-23)$$

となるから、結局式(2-22)は次のように簡単な式となる。

$$P_s = \exp \left\{ - \iint N(\sigma_n) d\Omega dV \right\} \quad (2-24)$$

式(2-24)から求まる $P_f (= 1 - P_s)$ が1軸均等引張のときに Weibull の1軸分布関数・式(2-9)と一致するならば、 $N(\sigma_n)$ は

$$N(\sigma_n) = (2m+1) \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_0} \right)^m \quad (2-25)$$

となる。このとき式(2-11)において $dA/2\pi = d\Omega$ であることに注意すると、式(2-24)から求めた P_f と式(2-11)とは完全に一致することになる。すなわち、Weibullの多軸分布関数が最弱リンク説に基づいて理論的に導出されたのである。

2.4 結 言

本章では、はじめに最小値確率論と最弱リンク説の概説を行ない、つぎに最弱リンク説に立脚した Batdorf-Grose による多軸確率分布関数の最も自然な形として Weibull の提唱した多軸確率分布関数が導かれること、Weibull の分布関数は Batdorf-Grose の一般的取扱いよりも単純な形をしていて実用的であることを述べた。

3章 表面き裂と内部き裂を同時に考慮した多軸確率分布関数の導出とその応用

3.1 緒言

ガラス等、ごく少数の例外を除くと大多数の脆性材料の破壊には物体内部のき裂（内部き裂と呼ぶことにする）と表面き裂の両方が同時に関与するものと思われる。しかし従来の研究は、ほとんどすべて内部き裂と表面き裂のどちらか一方のみが存在すると仮定しており、中でも Batdorf⁽¹⁾は『セラミックスにおいては表面き裂のみが存在するとした理論と、内部き裂のみが存在するとした理論はまったく等価であり、どちらの理論を用いるかは好みの問題である』と言っている。破壊の物理的意味を考えるならば、上記の考えは明らかに誤りであり、両方の理論が一致したのは“たまたまその材料では形式的に一致した”にすぎないものと思われる。

著者の知る限りでは、表面き裂と内部き裂の両方を同時に考慮した確率分布関数についての研究は、わずかに Bolotin⁽²⁾の1軸分布関数に関する研究が見られるのみで、多軸確率分布関数についての研究はまだなされていない。本章では Weibull と Bolotin の理論を拡張して、表面き裂と内部き裂を同時に考慮した新しい多軸確率分布関数を導出し、これを用いて 2, 3 の実験例の解析に適用することにする。

3.2 表面き裂と内部き裂を同時に考慮した多軸確率分布関数の導出⁽¹¹⁾

Bolotin⁽²⁾ は最弱リンク説に基づき、表面き裂と内部き裂を同時に考慮した1軸確率分布関数を次のように求めた。

はじめに、物体に作用する応力 σ は任意点の座標の無次元関数 $f(x, y, z)$ と、ある1つの代表値 S (応力の次元; 通常最大応力にとる)の積で表示されるとする。種々の記号を以下のように定義する。

V	:	物体の体積, $V = \sum \Delta V_k$
ω	:	物体の表面積, $\omega = \sum \Delta \omega_k$
R	:	物体の局所強さ
n_1	:	単位体積当りの初期欠陥の平均数(場所によらず一定)
n_2	:	単位表面積当りの初期欠陥の平均数(同上)
$F_1(S)$	:	体積 V 中の局所強さの分布関数
$F_2(S)$	:	表面積 ω 中の局所強さの分布関数
$F(R)$	:	物体全体の強さの分布関数
S_1	:	内部欠陥の最小強さ
S_2	:	表面欠陥の最小強さ
V_0, ω_0	:	ある標準体積ならびに標準面積
S_{c1}, S_{c2}	:	応力の次元をもつパラメータ
m_1, m_2	:	Weibullの均一性係数

V ならびに ω の各分割は、その中では応力が一定とみなし得る程度に小さく、かつ $n_1 \Delta V_k, n_2 \Delta \omega_k$ が大きな数となり得る程度に大きいものとする。

体積 ΔV_k 中のどの初期要素も応力 σ のもとで破壊しない確率は

$$\exp \left\{ - \frac{\Delta V_k}{V_0} \left[\frac{S \cdot f(x, y, z) - S_1}{S_{c1}} \right]^{m_1} \right\} \quad (3-1)$$

全体積 V が破壊しない確率は

$$P_1(s) = \begin{cases} \exp \left\{ -\frac{1}{V_0} \sum_{k=1}^{n_1} \Delta V_k \left[\frac{S \cdot f(x, y, z) - s_1}{s_{c1}} \right]^{m_1} \right\}, & s > s_1 \\ 0, & s \leq s_1 \end{cases} \quad (3-2)$$

同様に、表面積 ω が応力 s に対して、そのどの要素も破壊しない確率は

$$P_2(s) = \begin{cases} \exp \left\{ -\frac{1}{\omega_0} \sum_{k=1}^{n_2} \Delta \omega_k \left[\frac{S \cdot f(x, y, z) - s_2}{s_{c2}} \right]^{m_2} \right\}, & s > s_2 \\ 0, & s \leq s_2 \end{cases} \quad (3-3)$$

よって、物体全体が破壊する確率は次式となる。

$$\begin{aligned} F(R) &= 1 - P_1(R) \cdot P_2(R) \\ &= 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{V_0} \int_{s > s_1} \left[\frac{R \cdot f(x, y, z) - s_1}{s_{c1}} \right]^{m_1} dV \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega_0} \int_{s > s_2} \left[\frac{R \cdot f(x, y, z) - s_2}{s_{c2}} \right]^{m_2} d\omega \right\} \end{aligned} \quad (3-4)$$

式(3-4)中の V_0, ω_0 なる量は多少あいまいな量であると思われるので、同式を通常形に書き直してみる。簡単のために $s_1 = s_2 = 0$ とすると、

$$F(*) = 1 - \exp \left[- \int_B \left(\frac{\sigma}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} dV - \int_{B^*} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{02}} \right)^{m_2} d\omega \right] \quad (3-5)$$

となる。ここで σ_{01}, σ_{02} は材料定数、 B は物体の内部、 B^* は表面

を表わす。式(3-4), (3-5)は表面き裂と内部き裂に関する危険率 (risk of rupture) を加算したものとなっており、直感的にも明らかな式である。

つぎに、式(3-5)と同様にして表面き裂と内部き裂を同時に考慮した多軸分布関数を導出してみる⁽¹¹⁾。そのためには、まず始めに Weibull の多軸分布関数・式(2-11)を表面き裂の場合に拡張しなければならぬ。

表面き裂は、そのき裂面が材料表面に垂直であるとする。材料の表面の外向き法線を n 、表面に平行な表面近傍の主応力を σ_1, σ_2 とすると、材料表面の各点における表面き裂の方向性を考慮した破壊の多軸分布関数は

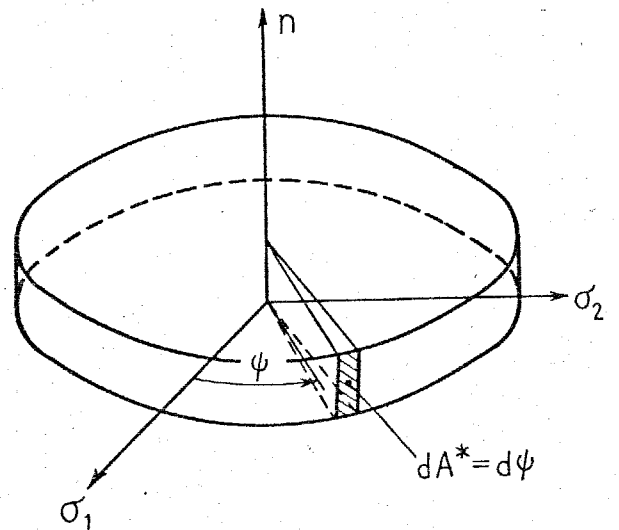


図3-1 単位円板

$$F(*) = 1 - \exp \left\{ - \int_{B^*} (K^* \int_{A^*} \sigma_n^{m_2} dA^*) d\omega \right\} \quad (3-6)$$

$\sigma_n > 0$

となる。ここで積分 A^* は、図3-1に示すようにその軸が物体表面の外向き法線と一致しており、単位厚さ・単位径であるような円板の側面の半分 (面積要素 $dA^* = d\psi$) について行う。 K^* は式(2-13)と同様に単純引張応力状態と比較して得られるもので、

$$K^* = \frac{m_2 \Gamma(m_2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(m_2 + 1/2) \sigma_{02}^{m_2}} = \left\{ B(m_2 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cdot \sigma_{02}^{m_2} \right\}^{-1} \quad (3-7)$$

である。ここで $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数、 $B(\cdot, \cdot)$ はベータ関数である。

式 (2-11) と (3-6) とみえ、表面き裂と内部き裂を同時に考慮した破壊の多軸確率分布関数は次のようになる。

$$F(*) = 1 - \exp \left\{ - \int_B (K \int_A \sigma_n^{m_1} \cdot Y(\sigma_n, 0) dA) dV \right. \\ \left. - \int_{B^*} (K^* \int_{A^*} \sigma_n^{m_2} \cdot Y(\sigma_n, 0) dA^*) d\omega \right\} \quad (3-8)$$

もし以上の式で応力のまたは σ_n が、座標の関数 f とある 1 つの代表値、たとえば最大引張応力 σ_{max} との積で表わされるならば、

$F(*)$ は σ_{max} を確率変数とする確率分布関数 $F(\sigma_{max})$ となる。こ

のとき σ_{max} の期待値は

$$E[\sigma_{max}] = \int_0^\infty \{1 - F(\sigma_{max})\} d\sigma_{max} \quad (3-9)$$

で表わされる。

3.3 黒鉛からなる回転円板の破壊⁽¹¹⁾

近年、各種のタービンエネルギー蓄積用フライホイールの開発、あるいは研削砥石の作業能率向上等のために回転周速度の著しい高速化が計られ、それとともに回転円板の強度に関する研究も、主として決定論的理論に基づいて盛んに行なわれるようになった。一例をあげると延性材料からなる高速車盤の降伏と強度に関する佐藤・永井の一連の研究^{(3)~(8)}がある。また、ぜい性材料からなる回転円板の破壊についても幾つかの研究があり、たとえば佐藤・永井⁽⁹⁾は鑄鉄、鶏戸口は石ニラと電極用黒鉛材について実験を行なっている。

最近、佐藤⁽³¹⁾は回転円板の破壊に及ぼす延性の影響について研究を行ない、回転円板の内外径比 γ と破壊時の周速度 v との関係について図3-2に示すような結論を得た。同図で v_0 は $\gamma \rightarrow 1.0$ である回転円板の破壊時における周速度である。図中の曲線 (I) は平均応力説に基づく理論式、曲線 (II) はその適用限界を

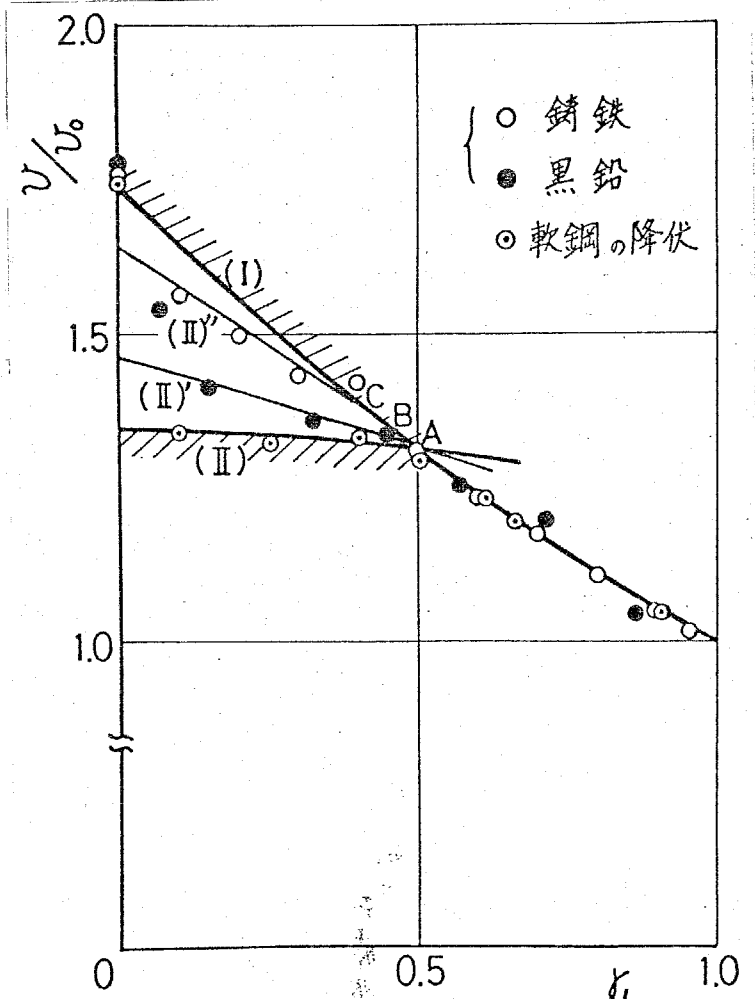


図3-2 破壊周速度と内外径比の関係⁽³¹⁾

示した式で、両曲線は $\gamma_1 \doteq 0.5$ である A 点で交わっている。したがって円板の弾性破壊（軟鋼の降伏と同じである）時における周速度は $\gamma_1 > 0.5$ では曲線 (I), $\gamma_1 < 0.5$ では曲線 (II) となる（ただし $\gamma_1 = 0$ のときは、すべての実験値は曲線 (I) 上に来る）。完全塑性材料の場合は γ_1 のいかにみまわらず平均応力説が適用されるので曲線 (I) となる。図中の $\odot$ 印は軟鋼円板の降伏実験結果で曲線 (I), (II) に来っている。 $\bullet$ 印で示した黒鉛、 $\circ$ 印で示した鋳鉄の実験値は $\gamma_1 < 0.5$ ではそれぞれ (I) の曲線から (II)', (II)'' の曲線に移行しており、材料が軟鋼 $\rightarrow$ 黒鉛 $\rightarrow$ 鋳鉄の順で延性的になるのに従って曲線 (I) に近づいていることがわかる。このように、回転円板の降伏ないし破壊に対する決定論的理論としては、佐藤の理論が最もよく実験結果を説明できるものと思われる。

一方、周知のようにぜい性破壊の多くはいわゆる寸法効果という言葉に象徴される確率統計的現象を示し、破壊応力等は時間的にも空間的にも著しく変動する。したがって寸法効果を示す材料からなる回転円板に対しては、安全性の上から、作業能率を向上させるためにも、そのぜい性破壊強さを確率論的に研究する必要があるが、この分野の研究は極めて少ない。山本⁽¹⁰⁾らは研削砥石の回転破壊強さについて確率論的な研究を行なっているが、Weibull の 1 軸分布関数を用いており、実験値のバラツキも大きい。

本節では、前節で新たに導出した「表面き裂と内部き裂を同時

に考慮した非時間依存型多軸確率分布関数」を用いて回転円板の破壊強さの期待値を計算し、黒鉛からなる回転円板の実験結果と比較・考察する。⁽¹¹⁾

3.3.1 回転円板の破壊強さの期待値

図3-3に示したように、内径 R_i 、外径 R_o 、厚さ h の中空円板が中心軸 O に対して角速度 ω で回転しているときの円板内の円周方向応力 σ_θ と半径方向応力 σ_r は半径 r の関数として次式で与えられる。

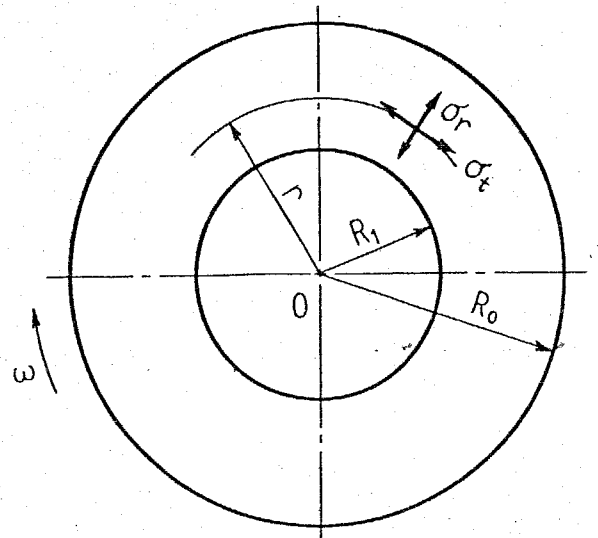


図3-3 回転円板試験片

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{1}{8} \left\{ (3+\nu) \left(R_o^2 + R_i^2 + \frac{R_o^2 R_i^2}{r^2} \right) - (1+3\nu) r^2 \right\} \frac{\gamma \omega^2}{g} \\ \sigma_r &= \frac{1}{8} (3+\nu) \left(R_o^2 + R_i^2 - \frac{R_o^2 R_i^2}{r^2} - r^2 \right) \frac{\gamma \omega^2}{g} \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

ここで γ は比重量, ν はポアソン比, g は重力加速度である。中空円板の場合は上式にて形式的に $R_i=0$ と置けばよい。同式より、円板内は二軸引張応力状態となっており、円板内のすべての点において $\sigma_\theta \geq \sigma_r$ となっていることがわかる。また最大引張応力 σ_{max} は、中空円板の場合は内周における円周応力で

$$\sigma_{\max} = (\sigma_r)_{r=R_1} = \frac{1}{4} \left\{ (3+\nu) R_0^2 + (1-\nu) R_1^2 \right\} \frac{\gamma \omega^2}{g} \quad (3-11)$$

であり、中空円板の場合は

$$\sigma_{\max} = (\sigma_r)_{r=0} = \frac{1}{8} (3+\nu) R_0^2 \frac{\gamma \omega^2}{g} \quad (3-12)$$

となる。

以下に、第2章で述べた各分布関数ならびに本章で求めた新しい分布関数を用いて、回転円板の破壊時の角速度の2乗の期待値 $E[\omega^2]$ を求めることにする。

(i) 内部き裂のみを考慮した場合 (1軸分布関数)

内部き裂のみが破壊に関与するとし、確率分布関数としては Weibull の 1 軸分布関数を用いる。応力 σ としては、各点における最大主応力である円周応力 σ_r をとる。

中空円板に対しては、関数 f_1 を

$$f_1(r) = \frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}} = \frac{(3+\nu) \{ R_0^2 + R_1^2 + (R_0^2 R_1^2 / r^2) \} - (1+3\nu) r^2}{2 \{ (3+\nu) R_0^2 + (1-\nu) R_1^2 \}} \quad (3-13)$$

とおくと、

$$F(\sigma_{\max}) = 1 - \exp \left\{ -B_0 \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} \right)^m \right\} \quad (3-14)$$

ここで、

$$B_0 = 2\pi h \int_{R_1}^{R_0} \{ f_1(r) \}^m r dr, \quad (3-14)'$$

よって

$$\begin{aligned} E[\omega^2] &= \frac{4g}{\gamma \{ (3+\nu) R_0^2 + (1-\nu) R_1^2 \}} \cdot E[\sigma_{\max}] \\ &= \frac{4g}{\gamma \{ (3+\nu) R_0^2 + (1-\nu) R_1^2 \}} \sigma_0 B_0^{-1/m} \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad (3-15) \end{aligned}$$

中実円板の場合は

$$E[\omega^2] = \frac{8g}{\gamma(3+\nu)R_0^2} \sigma_0 B_0^{-1/m} \Gamma(1+\frac{1}{m}) \quad (3-15)'$$

ただし $f_1(r) = \frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}} = 1 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \cdot \frac{r^2}{R_0^2} \quad (3-16)$

(ii) 内部き裂のみを考慮した場合(多軸分布関数) 確率分布関数として多軸分布関数である式(2-11)を用いる。ここで新たに関数 f_2 を次のように定義する。

$$f_2(r) = \frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}} = \frac{(3+\nu)\{R_0^2 + R_1^2 - (R_0^2 R_1^2 / r^2) - r^2\}}{2\{(3+\nu)R_0^2 + (1-\nu)R_1^2\}} \quad (\text{中空円板}) \quad (3-17)$$

$$f_2(r) = \frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}} = 1 - \frac{r^2}{R_0^2} \quad (\text{中実円板}) \quad (3-17)'$$

よって、き裂面上の垂直応力である式(2-12)は $\sigma_3 = 0$ として次式のように表わされる。

$$\sigma_n = \sigma_{\max} \cos^2 \phi \{ f_1(r) \cos^2 \psi + f_2(r) \sin^2 \psi \} \quad (3-18)$$

以上の式より破壊時の $E[\omega^2]$ の計算をすると、

$$E[\omega^2] = \frac{4g}{\gamma\{(3+\nu)R_0^2 + (1-\nu)R_1^2\}} \sigma_0 B_1^{-1/m} \Gamma(1+\frac{1}{m}) \quad (\text{中空円板}) \quad (3-19)$$

$$E[\omega^2] = \frac{8g}{\gamma(3+\nu)R_0^2} \sigma_0 B_1^{-1/m} \Gamma(1+\frac{1}{m}) \quad (\text{中実円板}) \quad (3-19)'$$

ここで

$$B_1 = \frac{4\pi h}{B(m+1/2, 1/2)} \int_{R_1}^{R_0} \int_0^{\pi/2} \{ f_1(r) \cos^2 \psi + f_2(r) \sin^2 \psi \}^m r d\psi dr \quad (3-19)''$$

(iii) 内部き裂と表面き裂を同時に考慮した場合 (多軸分布関数)

3.2節で新たに導出した分布関数式(3-8)を用いて $E[\omega^2]$ の計算を行う。一般の材料に対しては式(3-8)中のパラメータ m_1 と m_2 は異なると考えられるが、その場合解析は困難となる。しかし、黒鉛のような多孔質材料においては内部き裂と表面き裂の分布が同一であると考えられるので $m_1 \triangleq m_2 \equiv m$ と推測される。このとき破壊の確率分布関数はつぎのようになる。

$$F(\sigma_{\max}) = 1 - \exp \left\{ -B_1 \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{01}} \right)^m - B_1^* \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{02}} \right)^m \right\} \quad (3-20)$$

ここで

$$B_1^* = \frac{8\pi}{B(m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \int_{R_1}^{R_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ f_1(r) \cos^2 \psi + f_2(r) \sin^2 \psi \}^m r d\psi dr \\ + 2\pi R_1 h + \left(\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \right)^m 2\pi R_0 h \quad (3-20')$$

$\sigma_{\min}$ は最小の円周応力で、

$$\sigma_{\min} = (\sigma_t)_{r=R_0} = \frac{1}{4} \left\{ (3+\nu) R_1^2 + (1-\nu) R_0^2 \right\} \frac{\gamma \omega^2}{g} \quad (\text{中空円板}) \quad (3-20'')$$

$$\sigma_{\min} = (\sigma_t)_{r=R_0} = \frac{1}{4} (1-\nu) R_0^2 \frac{\gamma \omega^2}{g} \quad (\text{中実円板}) \quad (3-20''')$$

B_1 は式(3-19)'' と同一である。式(3-20)' の右辺第1項目は円板の上、下面、第2項目は内周面、第3項目は外周面に関するものである。これらの式を用いて破壊時の角速度 ω の2乗の期待値を計算するとつぎのようになる。

$$E[\omega^2] = \frac{4g}{\gamma \{ (3+\nu) R_0^2 + (1-\nu) R_1^2 \}} \cdot \left(\frac{B_1}{\sigma_{01}^m} + \frac{B_1^*}{\sigma_{02}^m} \right)^{-1/m} \cdot \Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right) \quad (\text{中空円板}) \quad (3-21)$$

$$E[\omega^2] = \frac{8g}{\gamma(3+\nu)R_0^2} \left(\frac{B_1}{\sigma_0^m} + \frac{B_1^*}{\sigma_0^{*m}} \right)^{-1/m} \Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right) \quad (\text{中実円板}) \quad (3-21)'$$

なお、表面き裂と内部き裂の応力拡大係数の比が C のときは、式(3-5), (3-8)中の指数部が2項における σ_1, σ_1^* をそれぞれ C 倍して計算を行う。

3.3.2 実験方法 実験に用いた材料は市販の電極用黒鉛棒で、長さ 1000 mm, 直径 80 mm である。この材料の均質性を確かめるために構材の各部より中実円筒試験片をとりだして圧縮試験を行ったところ、半径方向ならびに軸方向にバラツキ以上の有意差がなく、平均圧縮強さは $\sigma_c = 4.29 \text{ Kgf/mm}^2$ であった。また比重量 $\gamma_1 = 1.63 \text{ gf/cm}^3$, ポアソン比 $\nu = 0.13$ である。

(i) 単純引張試験 従来、ぜい性材料の単純引張試験は非常に困難な問題であるとされてきた。その理由として試験片肩部の応力集中部から破壊しやすいこと、荷重系のわずかなミスアライメントによって大きな曲げモーメントがかかりやすいことなどがあげられる。そこで、本実験では特に工夫した装置を用い、以下に述べるような方法によりほぼ純粋な単純引張試験を実現することになった。

引張試験片の黒鉛棒板みすの切り出しにおいては、図3-4に示すように回転円板の円周方向と引張試験片の軸方向とが一致するた

け一致するよ
うに注意した。
図3-5 に試験
片形状を示す。
その直径は d_0
= 8mm, 平行
部長さは 16mm

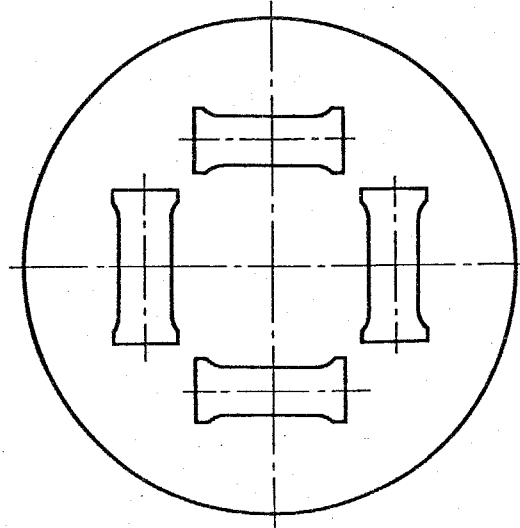


図3-4 引張試験片の取り方

である。試験
片の両端には
ピン穴のつい
たアルミニウ
ム製キャップを
エポキシ系接

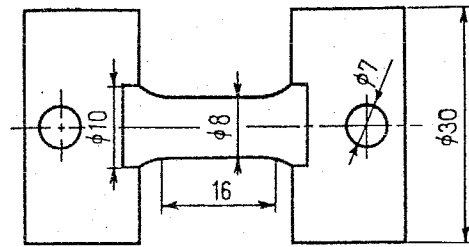


図3-5 単純引張試験片形状

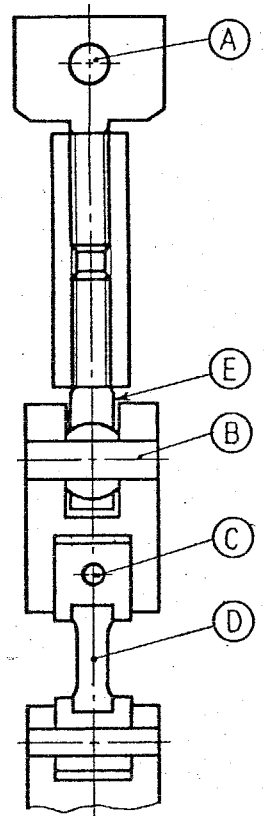


図3-6 引張試験装置

着剤で接着してある。試験片肩部の応力集中による破壊を防ぐた
めに、肩部付近にエポキシ系接着剤を被覆・含浸させて補強を行っ
た。実験には図3-6 に示す引張試験装置を用いた。同図で④は試
験片、⑤はロッドエンドである。この装置ではピン①, ②, ③を用
いることにより試験片には曲げモーメントがあまりにないように
なっている。しかし、それで思わずみに曲げモーメントがかかる
のは避けられない。そこで、このわずかな曲げモーメントを取除
くために試験片の軸方向に3枚のひずみゲージをニトロセルロース

系接着剤で接着し、ひずみ計でひずみ量を測定しながらアライメントの微調整を行った。なお、使用したひずみゲージはゲージ長さ2 mmの紙ベースワイヤゲージで、試験片の強度に及ぼす影響は無視できるものと思われる。

(ii) 回転円板試験 回転円板試験片は外径 $d_0 = 70 \text{ mm}$ 、高さ $h = 5 \text{ mm}$ とし、内径のみを種々に変化させた。図3-7は実験に用いた衝動タービン型スピンドルスターで、無負荷時最大回転数は約65,000 rpm であり、回転数制御は調速弁によって行った。同図で①はタービン、②はバビットメタル、③はゴムパッキン、④はゴムシール、⑤は“O”リング、⑥は試験片である。回転円板試験片⑥は真空室内にて回転するように軸に取り付けられ、ガラス板⑦を通してその回転状態が観察できるようになっている。中実円板、もしくは内径 d_1 が小さい回転円板試験片の実験では図3-8に示すようにアクリル製アタッチメント⑧を試験片中央部に接着し、これを直接タービン軸に取り付けた。

3.3.3 実験結果と考察

(i) 単純引張試験結果 図3-9は単純引張試験によって破壊した試験片の写真であって、平行部中央付近で破断している。実験したすべての試験片の破壊は、この例のように平行部で起っており、接着剤による肩部の補強が効果的であったことを示している。

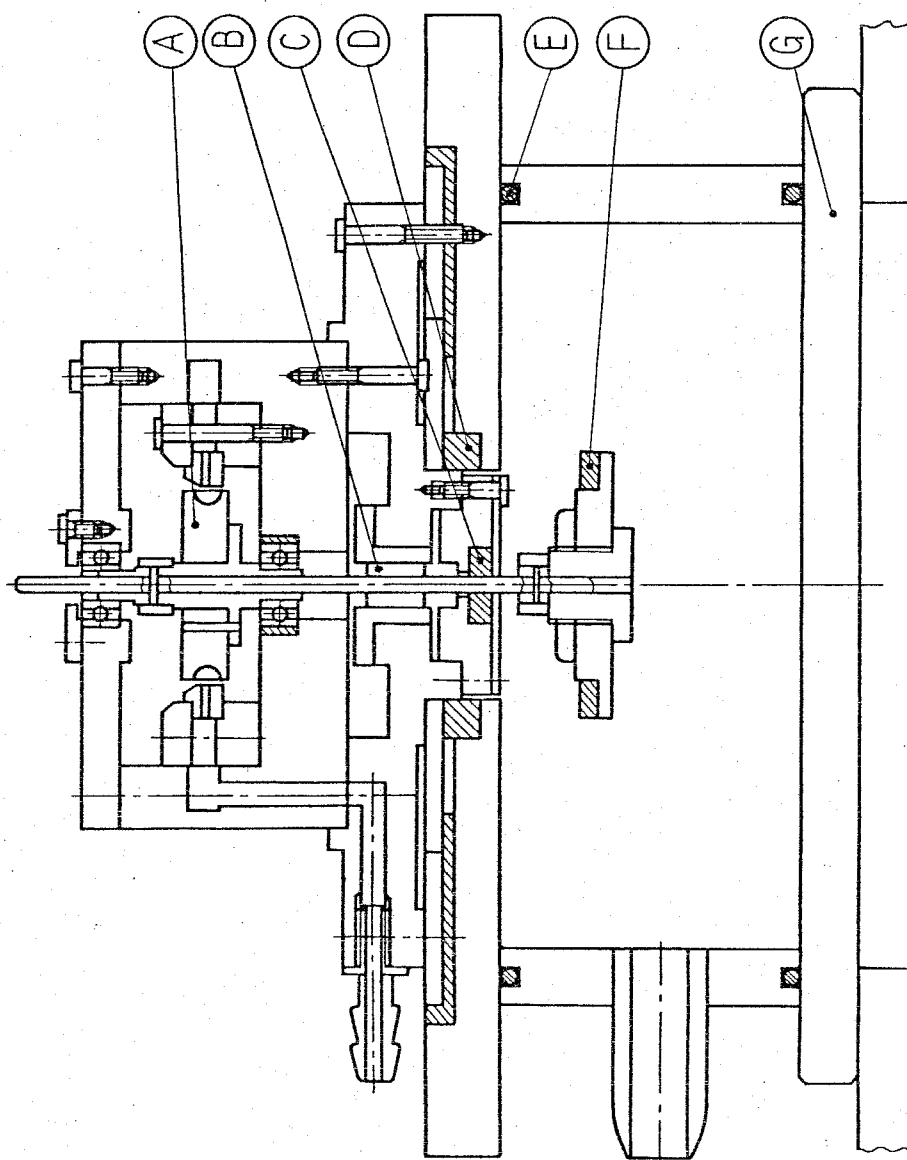


図3-7 スピン・テスト

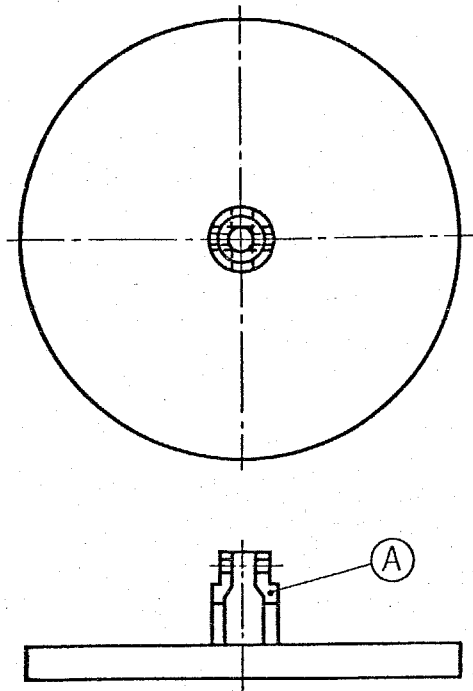


図3-8 74×4×10mmを取付けた中実円板試験片

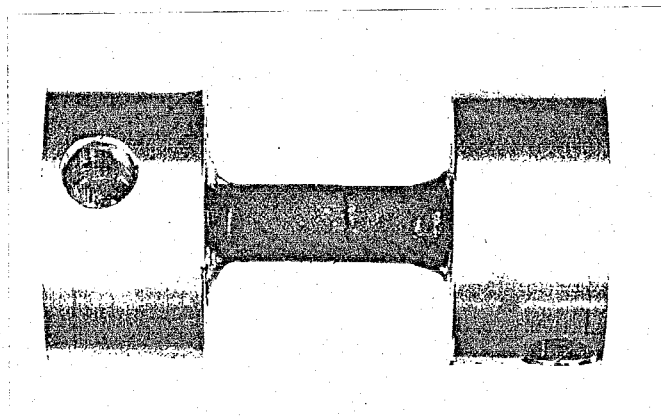


図3-9 単純引張試験片の破壊例

単純引張試験結果を表3-1に示す。表中の記号“ N_0 ”は試験片を黒鉛棒材から切り出した順番で、棒材の全長に渡りほぼ等間隔の取出し位置を示している。 R_0 は破壊時の荷重、 σ_0 は破壊時の応力である。引張強さ σ_0 は試験片の取り出し位置によらずランダムな値になっていることとわかる。単純引張試験における応力-ひずみ線図を図3-10に示す。多少延性が認められるがほぼ弾性的に変形して破断に至っている。

よく知られているように Gumbel の関数 $G_N(\sigma_i)$ は

$$G_N(\sigma_i) = \frac{i}{N+1} \quad (3-22)$$

で定義される。ここで N は試験片総数、 σ_i は N 個の試験片の破壊応力を小さい方から順番に並べたとき i 番目にあたる応力である。図3-11の○印は、横軸に破壊応力 σ_i 、縦軸に $F(\sigma) = G_N(\sigma_i)$ をとったときの実験値である。これらの実験結果から各分布関数のパラメータを推定しよう。

パラメータの推定法としては、Gumbel の関数・式 (3-22) を用いて単純引張試験結果を Weibull 確率紙に記し実験値によく合うように直線を引いて求める方法、最小二乗法を用いる直接曲線適合法⁽¹²⁾ (direct curve fitting method) などがあるが、いずれもあまり精度がよくないように思われる。また、パラメータの数が多くなった場合には実用的でない。したがって本論文では、種々の形

表3-1 単純引張り試験結果

No.	d_0 mm	W kg	σ kg/mm ²
A- 1	8.02	65.9	1.30
A- 2	8.01	67.2	1.33
A- 3	8.03	69.9	1.38
A- 4	7.99	64.0	1.28
A- 5	7.99	57.7	1.15
A- 6	7.99	60.2	1.20
A- 7	7.97	55.9	1.12
A- 8	7.96	67.6	1.36
A- 9	8.00	69.9	1.39
A-10	7.95	61.8	1.24
A-11	7.96	51.0	1.02
A-12	8.00	62.6	1.25
A-13	8.00	55.4	1.10
A-14	7.93	76.3	1.54
A-15	8.00	78.9	1.57
A-16	7.90	70.8	1.44
A-17	7.95	46.4	0.93
A-18	7.90	60.3	1.23
A-19	8.00	71.9	1.43
A-20	7.92	68.0	1.38
A-21	7.96	75.1	1.51
A-22	7.96	58.1	1.17
A-23	7.90	60.2	1.23
A-24	7.95	62.6	1.26
A-25	7.95	73.3	1.48
A-26	7.91	62.3	1.27
A-27	8.05	78.9	1.55
A-28	7.91	58.0	1.18
A-29	8.03	59.9	1.18
A-30	7.95	55.7	1.12
A-31	8.05	67.2	1.32

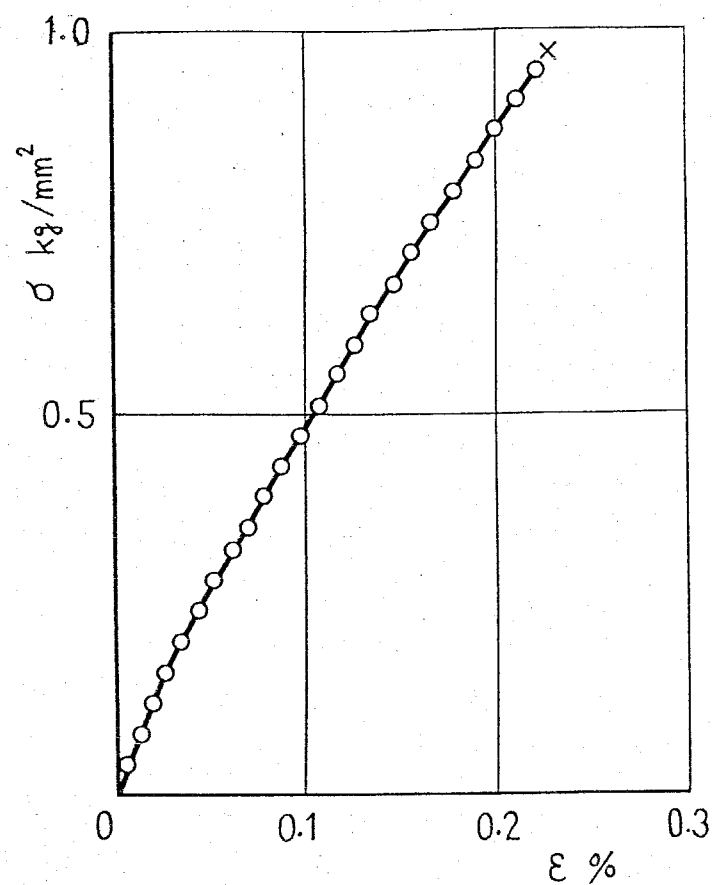


図3-10 単純引張試験における応力-ひずみ線図

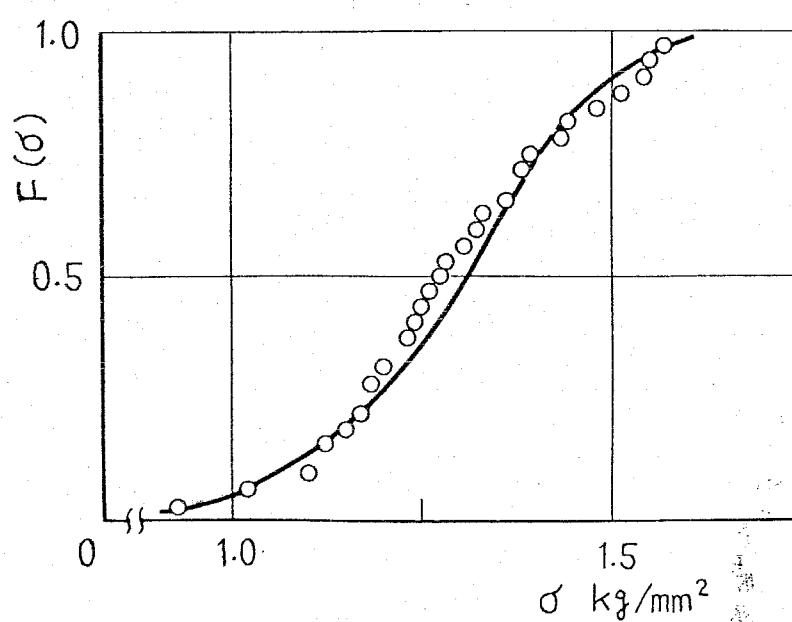


図3-11 単純引張り試験における確率分布

の確率分布関数のパラメータを精度よく推定するために最尤法を用いることにする。

統計理論によれば、 $f_0(X; \theta)$ を母集団分布、 θ を未知の母数、 $\{X_i\}$ を標本変量とするとき、関数 L を

$$L = \log \prod_{i=1}^n f_0(X_i; \theta) \quad (3-23)$$

と定義し、 L を最大とする θ を最尤推定量と定義する。

単純引張応力状態の場合には式 (3-5) に対する関数 L を計算すると次のようになる ($m_1 = m_2 = m$)。

$$\begin{aligned} L &= \log \prod_{i=1}^n \left[\frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma} \right]_{\sigma=\sigma_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{B_i}{\sigma_{01}^m} + \frac{B_i^*}{\sigma_{02}^m} \right) + n \log m + (m-1) \sum_{i=1}^n \log \sigma_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^n B_i \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{01}} \right)^m - \sum_{i=1}^n B_i^* \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{02}} \right)^m \end{aligned} \quad (3-24)$$

ここで B_i, B_i^* はそれぞれ応力 σ_i を受けている物体の体積と表面積を表す。関数 L を最大にするパラメータの値は次の連立方程式の根となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial m} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_{01}} &= \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{(B_i/\sigma_{01}^m + B_i^*/\sigma_{02}^m)} - \sum_{i=1}^n B_i \sigma_i^{m-1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_{02}} &= \sum_{i=1}^n \frac{B_i^*}{(B_i/\sigma_{01}^m + B_i^*/\sigma_{02}^m)} - \sum_{i=1}^n B_i^* \sigma_i^{m-1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-25)$$

実際の計算においては適当な近似値から出発して繰返し計算を行い、 L を最大にするパラメータの値を見いだしてこれを最尤推定量とする。

表3-2 (a), (b) はそれぞれ式(2-9), (3-5)を用いて表3-1の実験結果から最尤法により求めたパラメータの値である。表(c) は式(3-5)の指数部が2項中の ρ を1.12倍したときの値である。

表3-2 パラメータの値

(a)

m	σ_0
9.2	2.81

(b)

m	σ_{01}	σ_{02}
9.2	5.26	2.60

(c)

m	σ_{01}	σ_{02}
9.2	5.65	2.92

いずれの場合にもパラメータ m の値が一致していて 9.2 となっている。これらのパラメータの値を用いて単純引張試験に対する各確率分布関数を計算したところ、それぞれ有効数字3ケタまで一致した。その結果を図3-11の実線で示す。実線は実験値と最適を合っているようである。

(ii) 回転円板試験結果 図3-12は破壊した回転円板試験片の一例である。破壊の起り方は佐藤らの鋳鉄円板に関する実験⁽⁹⁾と同様であって、内外径比 γ_1 が大きくなるにつれて破壊回数が4回より順次増えていく傾向にある。全実験結果を表3-3に示す。表中 n は破壊時の円板の回転数、 ω^2 は破壊時の角速度の2乗である。これらの実験結果の平均値を γ_1 と ω^2 について整理し、図3-13に示す。記号 $\pm$ は実験値のバラツキの範囲を示したものである。

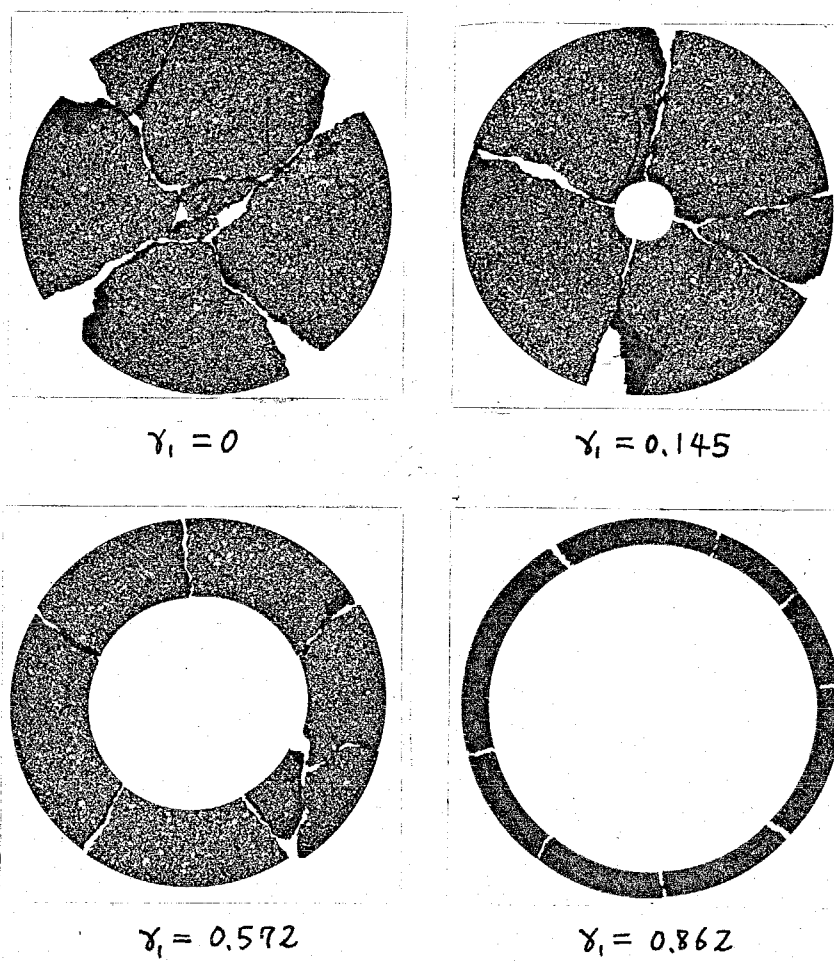


図 3-12. 回転円板試験片の破壊例。

表 3-3 回甄内板試驗結果

(38)

($d_0=70\text{mm}$, $h=5.0\text{mm}$)

d_1 mm	$\gamma_1=d_1/d_0$	$n \times 10^4$ rpm	ω^2 (rad/sec) ²	
0	0	3.31	12.01	11.61
		3.19	11.16	
		3.26	11.65	
0.99	0.014	3.24	11.51	11.48
		3.23	11.44	
5.10	0.073	2.76	8.35	8.92
		2.94	9.48	
10.17	0.145	2.58	7.30	7.49
		2.63	7.59	
		2.59	7.36	
		2.65	7.70	
22.00	0.314	2.47	6.69	6.84
		2.51	6.91	
		2.51	6.91	
30.10	0.430	2.41	6.37	6.55
		2.43	6.48	
		2.49	6.80	
40.10	0.572	2.42	6.42	5.76
		2.32	5.90	
		2.25	5.55	
		2.17	5.16	
50.10	0.715	2.17	5.16	5.44
		2.25	5.55	
		2.23	5.45	
		2.26	5.60	
54.85	0.780	2.46	6.64	6.28
		2.48	6.74	
		2.21	5.36	
		2.41	6.37	
60.20	0.862	1.75	3.36	3.99
		1.78	3.47	
		2.03	4.52	
		1.82	3.63	
		1.81	3.59	
		1.99	4.34	
		1.86	3.79	
		1.99	4.34	
		1.90	3.96	
		1.98	4.30	
		1.95	4.17	
		1.78	3.47	
		2.03	4.52	
		1.99	4.34	

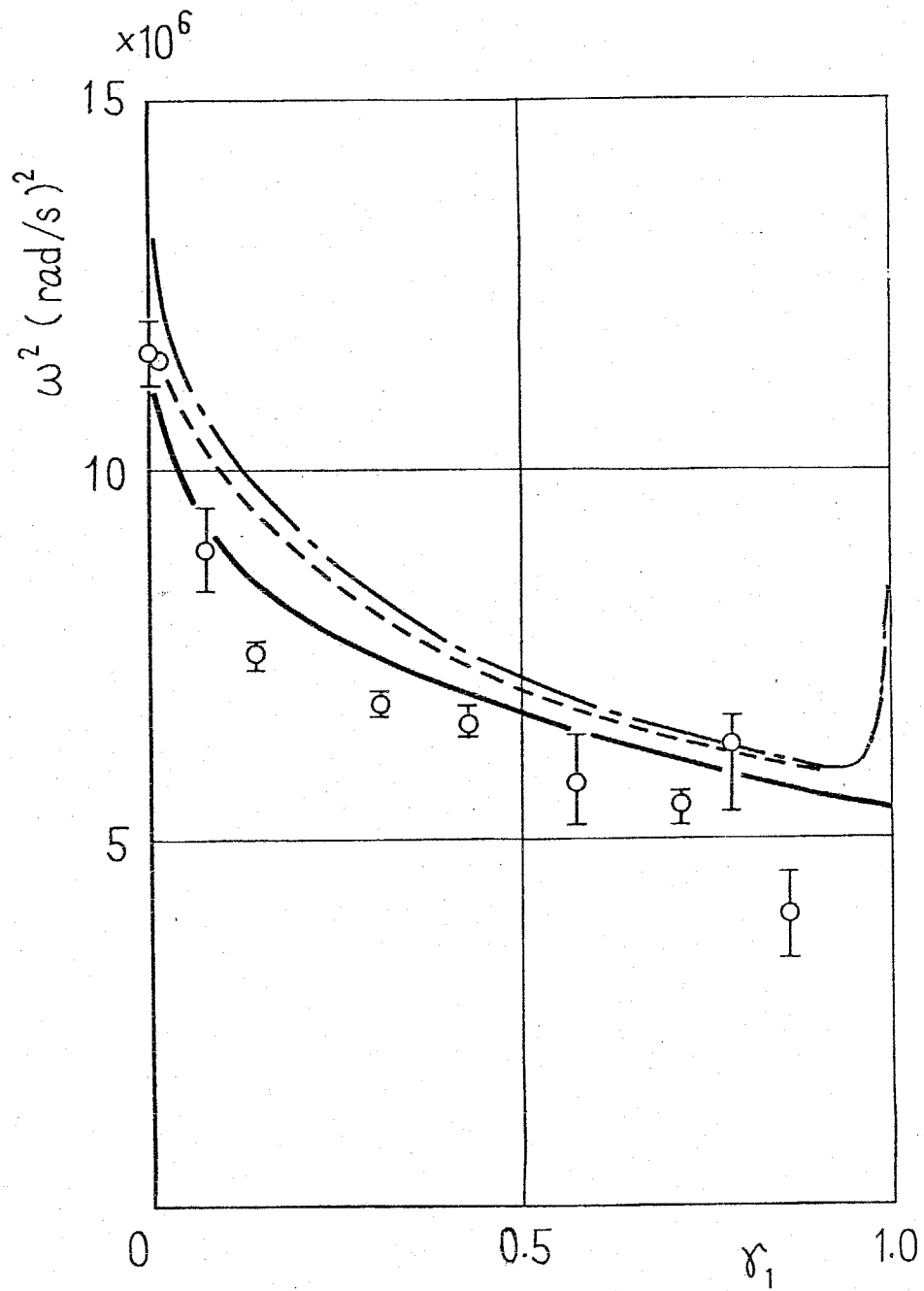


図3-13 ω^2 と γ_1 の関係

図中の各曲線は、単純引張試験から求めた表3-2のパラメータの値を用いて計算した期待値 $E[\omega^2]$ で、一実鎖線は式(3-15)、実線は式(3-19)、実線は式(3-21)を表す。 $C=1.12$ としたときの計算結果は式(3-21)の計算結果とほぼ一致した。この図から、内部き裂と表面き裂を同時に考慮した多軸分布関数による式(3-21)は、式(3-15)、(3-19)よりも精度のよいことがわかる。特に γ_1 が1に近づくとき内部き裂のみを考慮した計算値は ω^2 が無限大になってしまふが、式(3-21)は有限値にとどまっている。

図3-13において $\gamma_1=0.862$ のとき計算値は実験値よりかなり高めに出的る。このことについては現在のところ3次のように考えている。黒鉛は多孔質材料であるから、 γ_1 が1に近いある値に、すなわち円板の幅が空孔ないしはき裂の大きさと同程度になったとき、試験片自体が存在しないうちである。したがって γ_1 が1に近づくとき $E[\omega^2]$ は急速に0に近づくことになるが、理論ではそのことを考慮していないので実験値とくっきり違ったものと思われる。

3.4 ぜい性材料の側圧試験⁽¹⁸⁾ (中更内筒)

岩石のようなぜい性材料の丸棒に流体圧により2軸圧縮応力 $(-p, -p, 0)$ を作用させると、軸と垂直な断面で破壊が起る現象を Bridgeman が発見したのは 1912 年⁽¹³⁾ のことであつた。しかし、その後この現象は一般には注目されず、わずかに Jaeger-Cook⁽¹⁴⁾ が静水圧下の岩石の破壊挙動を調べる目的で部分的に研究を行っているのみである。

最近、佐藤⁽¹⁵⁾ は、この現象を材料の切断という観点から再評価して「側圧試験法」と命名し、各種材料の切断加工に積極的に応用している。たとえば岩石⁽¹⁵⁾、ガラス⁽¹⁵⁾、セラミックス⁽¹⁶⁾、超硬合金⁽¹⁶⁾、高分子材料⁽¹⁷⁾、水晶、シリコン単結晶、碑子、サファイヤ等の切断に成功している。側圧試験の特徴としては切断時間が非常に短く、極めて平滑な切断面が得られること、工具が不要で切削くずが出ないこと、装置が単純かつ軽量なことなどがあげられる。また、破壊圧力を低下し、かつ破壊位置を指定するために大がかりな付属装置を設置する必要がまったく無く、単に所定の位置に横穴なしいは条痕をつけるだけで済むという利点も持っている。

本節では、側圧試験によりぜい性材料が切断されるのは材料表面に無数に存在する表面き裂に圧力媒体が浸透するためであると考え、3-2 節で新たに導出した表面き裂に関する多軸分布関数を用いて側圧試験の解析を行い、佐藤⁽¹⁵⁾ の大理石に関する実験結果

と比較検討する。

3.4.1 側圧試験における破壊 圧力の期待値

(i) 多軸分布関数による解析

中実円筒の側圧問題、すなわち図3-14に示すように外径 d_o の円筒の側面に、ある幅 l にわたって一様な圧力 p が作用する

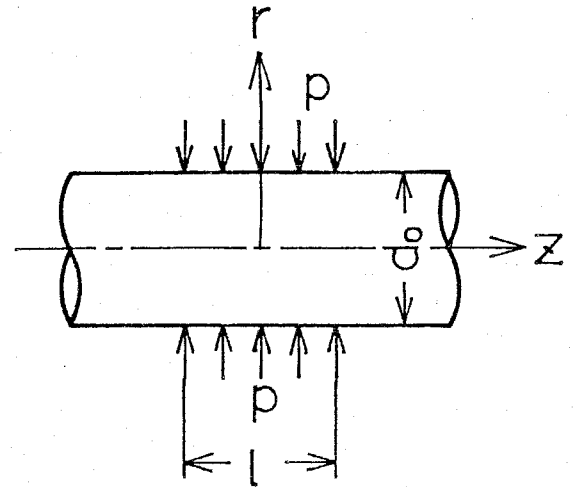


図3-14 中実円筒の側圧試験

ときの応力状態については既に3次元応力解析がなされており、無限長棒については Rankin⁽¹⁹⁾、有限長棒については斎藤⁽²⁰⁾の解がある。後に述べるように佐藤⁽¹⁵⁾の実験では l/d_o が1程度であり、材料表面のき裂のみに着目しているの

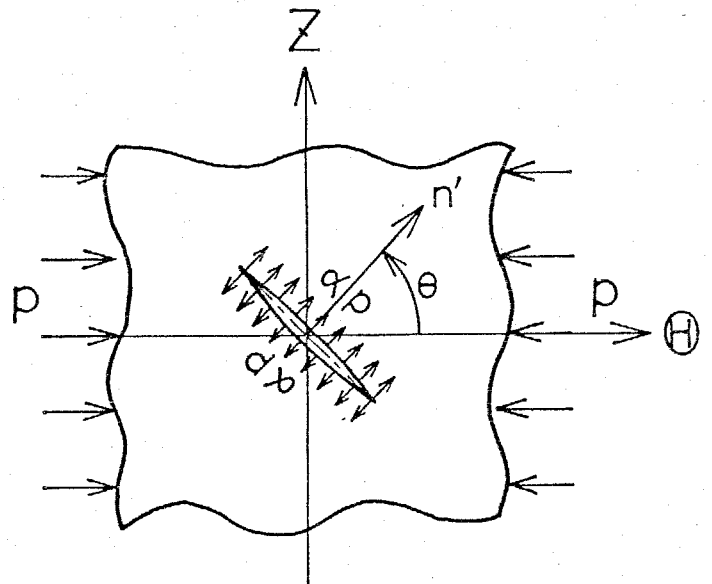


図3-15 1本の表面き裂の負荷状態

簡単のために円筒は半径方向と円周方向の2軸均等圧縮応力状態 $(-p, -p, 0)$ にあるものとする。また、材料表面には十分多数の2次元直線き裂が存在しているが、き裂の相互干渉はないものと

する。いま、図3-15 に示すようにき裂面の法線 n' が円筒の円周方向 θ より軸方向 z に θ だけ傾いていて、一様な内圧 αp を受け、無限遠で θ 方向に一様な圧縮応力 $-p$ が作用している二次元直線き裂を考える。 α は圧力媒体の種類によって異なる定数で、 $0 < \alpha \leq 1$ なる範囲の値をとる。⁽²⁷⁾⁽³²⁾ 円筒の半径方向応力 $-p$ は図3-15に示したき裂先端の応力場に特異性を与えないので無視してよい。結局、き裂がないとしたときき裂のあるべき位置における垂直応力 σ_n' とせん断応力 τ_n' は、き裂面に作用する内圧 αp も重ねあわせると次式のようになる。

$$\sigma_n' = p(\alpha - \cos^2 \theta), \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3-26)$$

$$\tau_n' = \frac{1}{2} p \sin 2\theta \quad (3-27)$$

Weibull にならってせん断応力 τ_n' の効果を無視し垂直応力 σ_n' のみを考える。先に求めた表面き裂に関する多軸確率分布関数・式 (3-6) において、 A^* についての積分を実行する際、モード I の破壊が起る条件として $\sigma_n' > 0$ の範囲で行う必要がある。すなわち式 (3-26) より、 $\alpha - \cos^2 \theta > 0$ 、ゆえに

$$\cos^{-1}(\sqrt{\alpha}) < \theta < \cos^{-1}(-\sqrt{\alpha}) \quad (3-28)$$

よって、

$$\left. \begin{aligned} \int_{A^*} \sigma_n'^m dA^* &= p^m \int_c^d (\alpha - \cos^2 \theta)^m d\theta \\ c &= \cos^{-1}(\sqrt{\alpha}), \quad d = \cos^{-1}(-\sqrt{\alpha}) \end{aligned} \right\} \quad (3-29)$$

† 圧力媒体のき裂中への浸透については、青木・坂田の研究があり⁽²⁷⁾⁽³²⁾、

ここで用いた浸透率 α と同一の概念が定義されている。

変数変換 $\cos^2 \theta = \alpha t$, $0 < t \leq 1$ を行うと,

$$\begin{aligned} \int_c^d (\alpha - \cos^2 \theta)^m d\theta &= \alpha^{m+\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{\{t(1-\alpha t)\}^{1/2}} dt \\ &= \alpha^{m+\frac{1}{2}} \cdot B\left(\frac{1}{2}, m+1\right) \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; m+\frac{3}{2} \mid \alpha\right) \end{aligned} \quad (3-30)$$

ここで、 $F(, ; 1)$ は超幾何級数であり、オイラーの積分表示⁽²¹⁾を用いた。側圧を受けている円筒の表面積を A とすると、以上の式より破壊圧力の期待値はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} E[p] &= \int_0^\infty \frac{dF(p)}{dp} p dp = \sigma_0 A^{-1/m} \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \beta^{-1/m}, \quad A = \pi d_0 l, \\ \beta &= \alpha^{m+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{B(1/2, m+1)}{B(m+1/2, 1/2)} \right\} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; m+\frac{3}{2} \mid \alpha\right) \end{aligned} \right\} \quad (3-31)$$

(ii) 1 軸分布関数による解析 Weibull の 1 軸分布関数においては、

$\sigma_{\theta=0}$ と 1 で最大主応力をとるのであるから、 $\sigma_{\theta} = \alpha p$ ($\theta = \pi/2$) を式(2-9)に代入し、破壊圧力の期待値を求めると、

$$E[p] = \sigma_0 A^{-1/m} \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \cdot \frac{1}{\alpha} \quad (3-32)$$

を得る。

(iii) 修正係数 多軸分布関数による破壊圧力の期待値・式(3-31)の

第2式において $\alpha=1$ とおくと $\beta=1$ となる。それゆえ式(3-31)

の第1式における $\beta^{-1/m}$ を $\alpha=1$ に対する修正係数と呼ぶことに

する。1 軸分布関数の場合は式(3-32)より修正係数が $1/\alpha$ となる。

$\alpha=1$ のとき、修正係数 $\beta^{-1/m}$ と $1/\alpha$ は共に 1 となり、式(3-31)

と式(3-32)は一致して、

$$E(p) = \sigma_0 A^{1/m} \Gamma(1 + \frac{1}{m}) \quad (3-33)$$

となる。すなわち、 $\alpha = 1$ のとき、側圧試験による破壊は形式的には同じ試験片を軸方向に p なる応力で引張ったときの破壊と等価になる(もちろん、この場合も表面き裂のみが破壊に関与すると考える)。図3-16に α をパラメータとしたときの修正係数 $\beta^{1/m}$ と $1/m$ との関係を示す。図中 $m = \infty$ のときの縦軸上の各値は修正係数 $1/\alpha$ である。 $\beta^{1/m}$ は $m \rightarrow \infty$ のとき α のいみじくにあみわらず1軸分布関数の修正係数に収束し、 α が小さいときほど $1/\alpha$ との差が大きいことがわかる。

3.4.2 横穴付き側圧試験における破壊圧力の期待値

(i) 多軸分布関数による解析 図3-17(a)に示すように、1個の横穴(円孔径 $2a$, 深さ C_0)を持つ中空円筒に側圧が作用する場合の3次元応力状態は著者の知る限りでは未知であるので、多少大胆な近似を行う。すなわち図3-17(b)に示すように、横穴の深さ C_0 と同一の厚さを持った無限板に2軸の圧縮応力 $(-p, -p, 0)$ が作用し、かつ貫通円孔面には内圧 p が作用する問題に近似して考える(横穴先端部は円孔側面に比べて無視できるものとする)。同図で r は円筒の軸方向, θ は円周方向, ρ は半径方向に相当する。計算を簡単にするために内部き裂の効果を無視し、破壊には

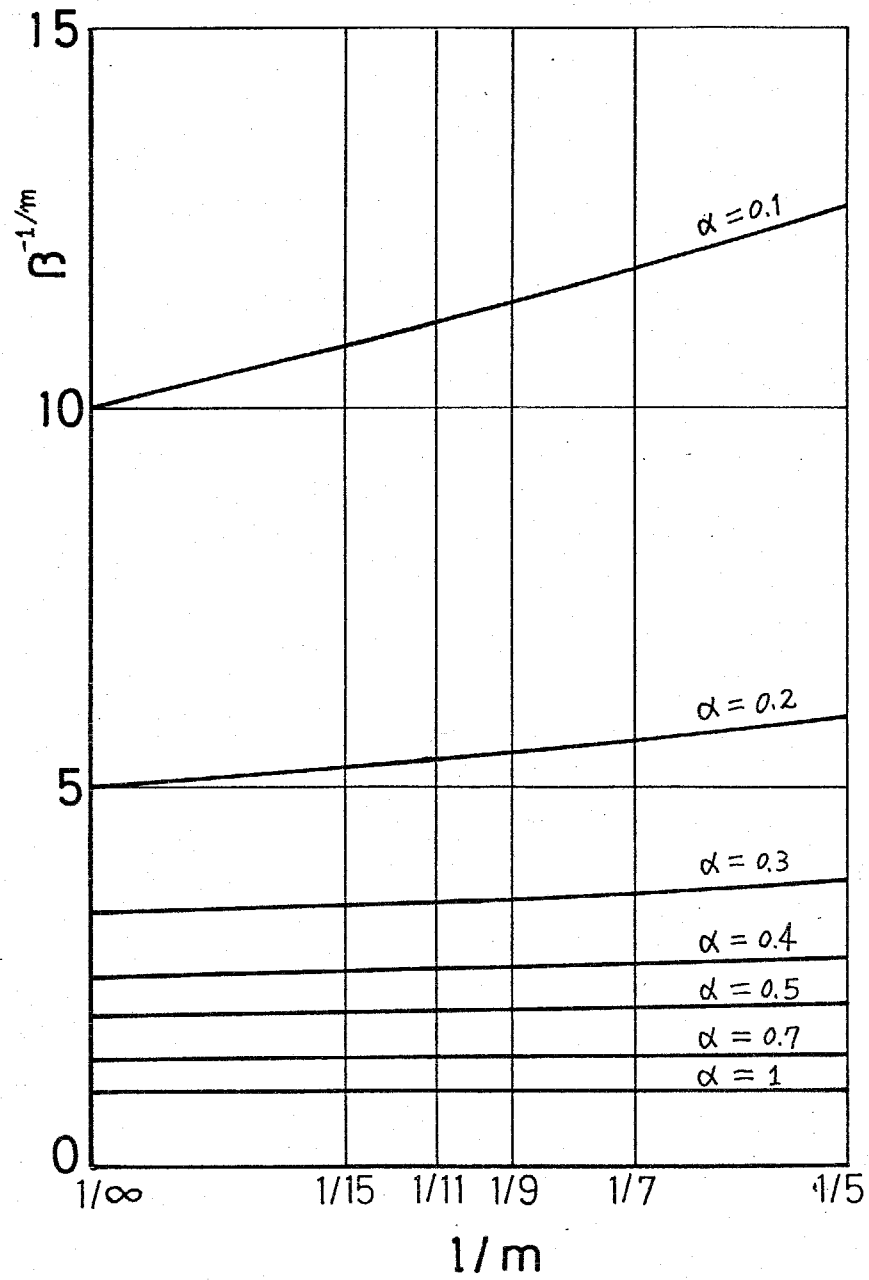
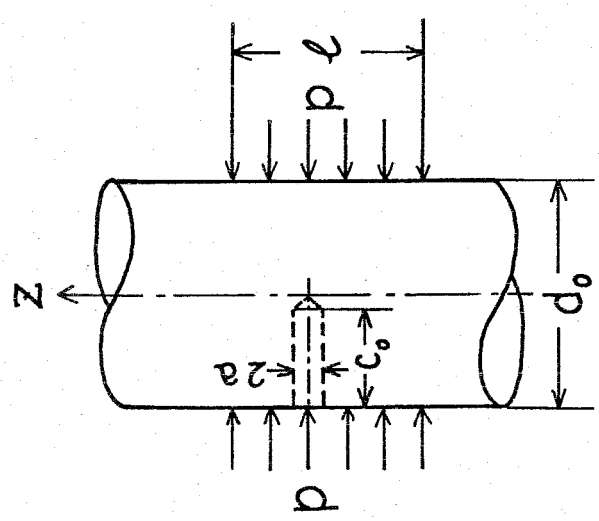
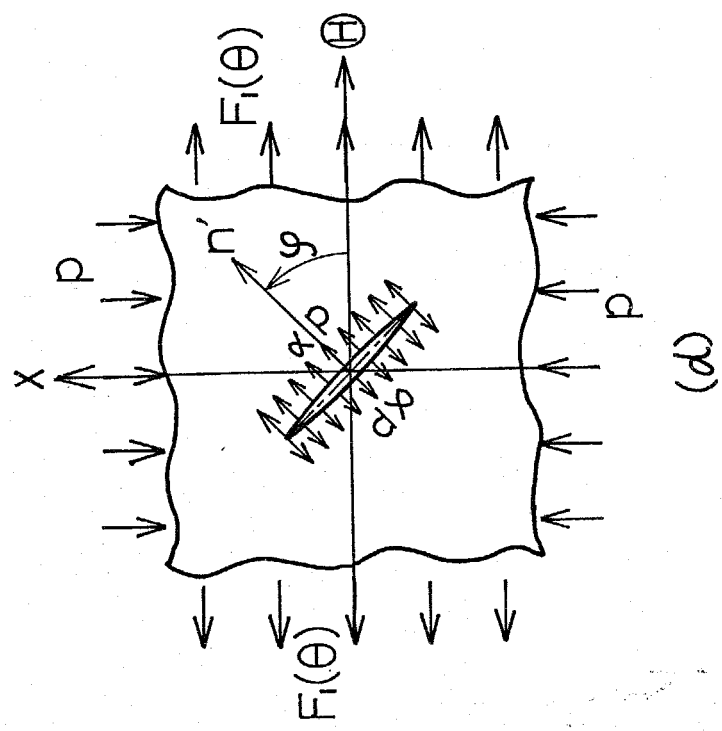
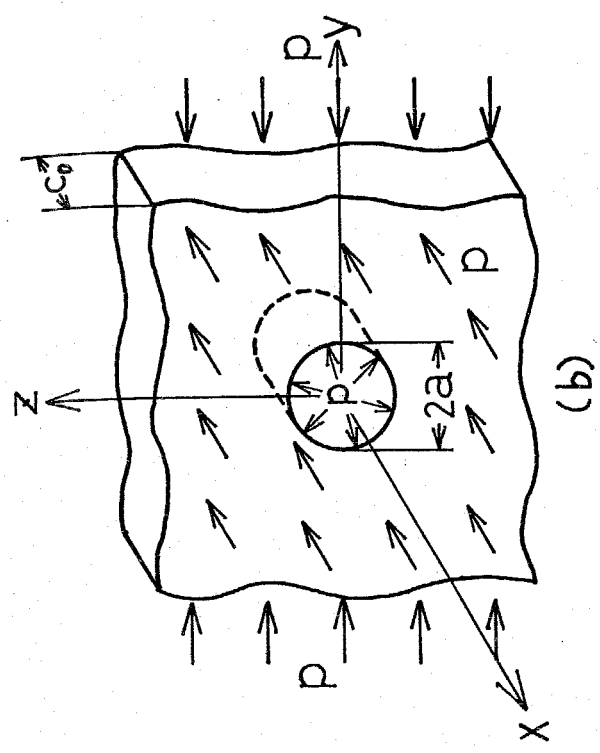
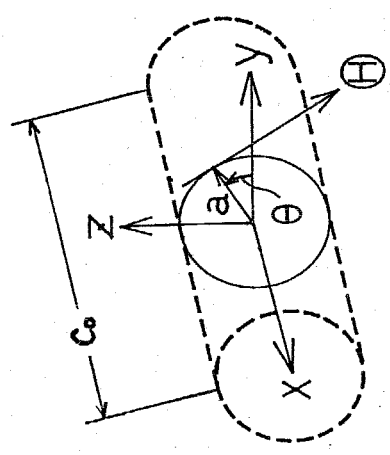


図 3-16 側圧試験の修正係数



(a)



(c)

図 3-17 横孔付側圧試験の負荷状態

円孔表面のき裂のみが関与するものとする。座標を図3-17(c)の
 ようにとると、円孔表面で x 軸と平行な線分 (a, θ) 上にある
 1個の表面き裂の負荷状態は図3-15 と同様な取扱いにより図
 3-17(d) のようになる。同図で θ は円孔の円周方向、 x は円孔
 の軸方向である。 $F(\theta)$ は円孔表面の円周方向応力で、

$$F_1(\theta) = 2p \cos 2\theta \quad (3-34)$$

である。したがって、き裂面に働く垂直応力 σ_n は

$$\sigma_n = p \left\{ \alpha - 1 + (1 + 2 \cos 2\theta) \cos^2 \varphi \right\} \quad (3-35)$$

となる。つぎに $\sigma_n > 0$ となるために θ と φ がとるべき範囲を
 求める。式(3-35)より、

$$(1 + 2 \cos 2\theta) \cos^2 \varphi - (1 - \alpha) > 0 \quad (3-36)$$

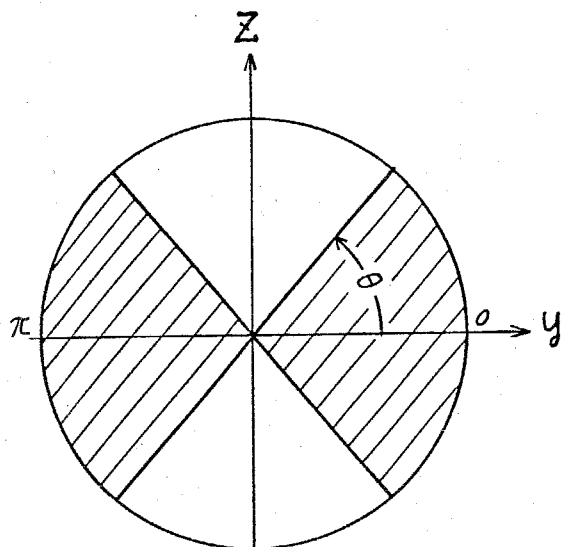
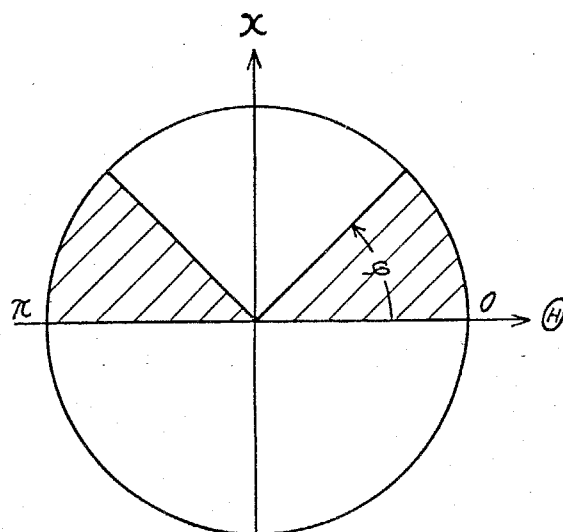
$1 - \alpha \geq 0$ であるから、式(3-36)は

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 2 \cos 2\theta > 0 \\ \text{かつ} \quad 1 \geq \cos \varphi > \left\{ \frac{1 - \alpha}{1 + 2 \cos 2\theta} \right\}^{1/2} \\ \text{または、} \\ -1 \leq \cos \varphi < - \left\{ \frac{1 - \alpha}{1 + 2 \cos 2\theta} \right\}^{1/2} \end{array} \right\} \quad (3-37)$$

のとき成立する。式(3-37) の第1式を満足する θ の範囲は

$$-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$$

であるが、 $F_1(\theta)$ 1 に対して σ_n が図3-18 の y, z 軸に関して

図3-18 θ のとりべき範囲図3-19 φ のとりべき範囲

対称なことから、その $1/4$ 区間である $0 < \theta < \pi/3$ のみを考える。式 (3-37) の第2式より θ はさらに、

$$1 > \left\{ \frac{1-\alpha}{1+2\cos 2\theta} \right\}^{1/2}, \quad \cos 2\theta > -\frac{\alpha}{2} \quad (3-38)$$

を満足しなければならぬから、結局 θ の積分範囲は

$$0 \leq \theta < \frac{1}{2} \cos^{-1}\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \equiv e \quad (3-39)$$

となる。積分は式 (3-39) の区間の結果の4倍をとる。

一先、 φ はき裂面の法線が θ 軸となす角であるから $0 \leq \varphi \leq \pi$ なる範囲の値をとる。図3-19に示した x 軸に関して対称なことから、その $1/2$ 区間のみを考えると、式 (3-39) を満足する θ に対して φ のとりべき範囲は式 (3-37) の第2式より73°のようになる。

$$0 \leq \varphi < \cos^{-1} \left\{ \left(\frac{1-\alpha}{1+2\cos 2\theta} \right)^{1/2} \right\} \equiv f \quad (3-40)$$

積分は上式の区間の2倍をとる。

以上の式より、

$$\int_{A^*} \sigma_m^m dA^* = 8p^m (1+2\cos 2\theta)^m \int_0^f \left\{ \cos^2 \varphi - \frac{1-\alpha}{1+2\cos 2\theta} \right\}^m d\varphi \quad (3-41)$$

を得る。最後に、式 (3-41), (3-6) より破壊圧力の期待値を求めると、

$$\left. \begin{aligned} E[p] &= \sigma_0 A^{-1/m} \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) \beta^{-1/m} \\ \beta &= \frac{4}{\pi B(m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \int_0^{\pi/2} (1+2\cos 2\theta)^m \int_0^f \left\{ \cos^2 \varphi - \frac{1-\alpha}{1+2\cos 2\theta} \right\}^m d\varphi d\theta \end{aligned} \right\} \quad (3-42)$$

例として $\alpha=1$ の特別な場合について計算を行う。このとき、式 (3-39), (3-40) より $0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}$, $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ となる。すると、式 (3-41) 右辺の積分は簡単になつて

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \varphi)^m d\varphi = \frac{1}{2} B(m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

$d\omega = \alpha C_0 d\theta$ であるから、式 (3-6) より

$$\begin{aligned} F(p) &= 1 - \exp \left\{ - \int_{B^*} \frac{4p^m}{B(m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \sigma_0^m} \cdot (1+2\cos 2\theta)^m \cdot B(m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) d\omega \right\} \\ &= 1 - \exp \left\{ -4 \left(\frac{p}{\sigma_0} \right)^m \int_0^{\frac{\pi}{3}} \alpha C_0 (1+2\cos 2\theta)^m d\theta \right\} \quad (3-43) \end{aligned}$$

$0 < 1+2\cos 2\theta \leq 3$ であるから、変数変換 $1+2\cos 2\theta = 3t$,

$0 < t \leq 1$ を行うと,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + 2\cos 2\theta)^m d\theta = \frac{3^m}{2} \int_0^1 \frac{t^m}{\{(1-t)(t+\frac{1}{3})\}^{1/2}} dt$$

ゆえに,

$$\left. \begin{aligned} E[P] &= \sigma_0 A^{-1/m} \Gamma(1 + \frac{1}{m}) \beta^{-1/m}, \\ \beta &= \frac{3^m}{\pi} \int_0^1 \frac{t^m}{\{(1-t)(t+\frac{1}{3})\}^{1/2}} dt \end{aligned} \right\} \quad (3-44)$$

(ii) 1 軸分布関数による解析 式 (3-35) より, σ_m は $\varphi=0$ のとき最大値

$$\sigma_{m, \max} = p(\alpha + 2\cos 2\theta) \quad (3-45)$$

をとる。 $\sigma_{m, \max} > 0$ の条件より

$$0 \leq \theta < \frac{1}{2} \cos^{-1}\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \equiv e \quad (\text{積分値は2の4倍})$$

2-パラメータの場合の Weibull 分布関数・式 (2-9) を用いると,

$$\int_A \left(\frac{\sigma_{m, \max}}{\sigma_0}\right)^m dA = \frac{2}{\pi} \left(\frac{p}{\sigma_0}\right)^m A \cdot \int_0^e (\alpha + 2\cos 2\theta)^m d\theta$$

であるから、破壊圧力の期待値は,

$$\left. \begin{aligned} E[P] &= \sigma_0 A^{-1/m} \Gamma(1 + \frac{1}{m}) \beta^{-1/m} \\ \beta &= \frac{2}{\pi} \int_0^e (\alpha + 2\cos 2\theta)^m d\theta \end{aligned} \right\} \quad (3-46)$$

となる。 $\alpha=1$ のとき 式 (3-46) は 式 (3-44) と一致する。

(iii) 修正係数 3.4.1 で側圧試験の破壊圧力の期待値に関する修

正係数を定義した。横穴付き側圧試験においても便宜的に式 (3-42), (3-46) の $\beta^{-1/m}$ を修正係数と呼ぶことにする。式 (3-44) と (3-46) より、多軸分布関数と1軸分布関数による修正係数は $\alpha=1$ のとき一致することになる。また式 (3-32) の場合と異なり、式 (3-46) の1軸分布関数による修正係数は m の関数となっている。図3-20 は、 $m=7.0$ としたときの多軸ならびに1軸分布関数による修正係数 $\beta^{-1/m}$ と α との関係を示したものである。 α が小さくなると両者の差は大きくなっている。式 (3-31), (3-32) からわかるように $\alpha=0$ のとき側圧試験による修正係数は無限大に発散する。すなわち破壊圧力の期待値が無限大となる（実際には、ある有限の圧力の下で2軸の圧縮破壊が起るであろう）。それに対して、横穴付き側圧試験では図3-20 に見るように $\alpha=0$ でも有限値となり、しかも $\alpha=1$ のときの2倍足らずの値にとどまっている。

3.4.3 考察 3.4.1, 3.4.2 で求めた計算結果と佐藤らによる実験結果とを比較してみる（ただし多軸分布関数による計算のみを採用する）。図3-21 は佐藤⁽¹⁵⁾らによる大理石中実円筒の側圧試験結果を両対数で示したもので、 P_b は破壊圧力、 d_0 は試験片の直径である。試験円筒の長さ比は $l/d_0=1$ であり、各点は数個の実験結果の平均をとったものである。試験円筒にコーティング

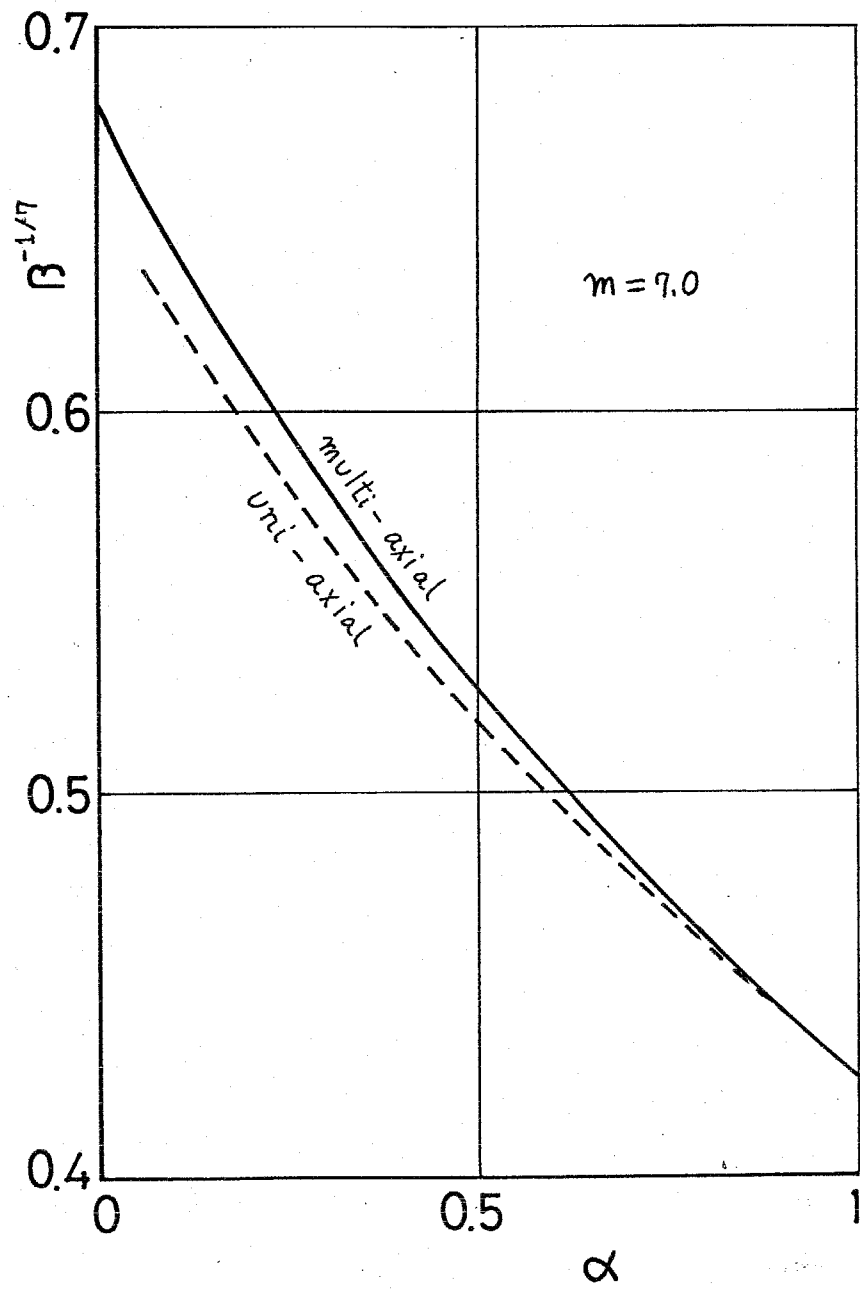


図 3-20 横孔付側圧試験の修正係数

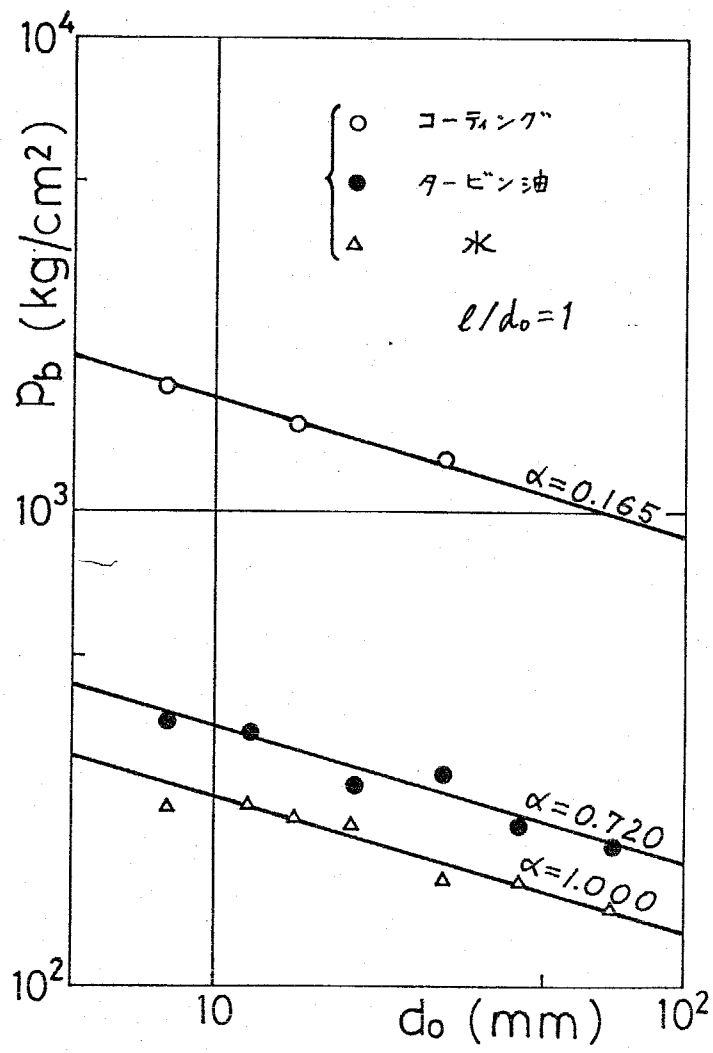


図 3-21 側圧試験結果と計算値

をほどこさない場合には圧力媒体として水とタービン油の2種類を用い、その他にエポキシ系接着剤で薄くコーティングした実験も行っている。 p_b と d_0 の関係は水、タービン油、コーティングのいずれの場合にも直線的であり、1本も同一の傾きとなっている。式(3-31)によれば $E[P]$ は α が一定ならば $A^{-1/m}$ に、したがって $d_0^{-2/m}$ に比例するはずであり、上述の実験結果と一致する。この図から実験値に合うように直線を引き m の値を求めたところ、 $m=7.0$ となった。したがって、水の場合に $\alpha=1$ と仮定すると実験値から σ_0 を計算することができ、 $\sigma_0=6.14$ (kgf-mm 単位系) となる。こうして求めた m , σ_0 の値を使ってタービン油とコーティングの場合について α を計算したところ、それぞれ 0.720, 0.165 となった。コーティングをほどこした場合にも $\alpha=0$ とならず、他の圧力媒体と同一の傾向を示すことは注目すべきことである。このことは、佐藤らの実験でコーティングをほどこした場合の破壊が他の場合と同様に横断面で起っていることと符号し、コーティングによるくさび効果の存在を裏付けている。

さて、以上で求めたパラメータの値を用いて佐藤ら⁽⁵⁾による種々の径、種々の深さの横穴(円孔)をもつ大理石中実円筒の側圧試験結果(タービン油)と計算結果とを比較してみる。図3-22は佐藤らの実験結果を整理して示したもので、縦軸に破壊圧力 p_b , 横軸に円孔表面積 A を両対数でとっている。試験円筒の外径は

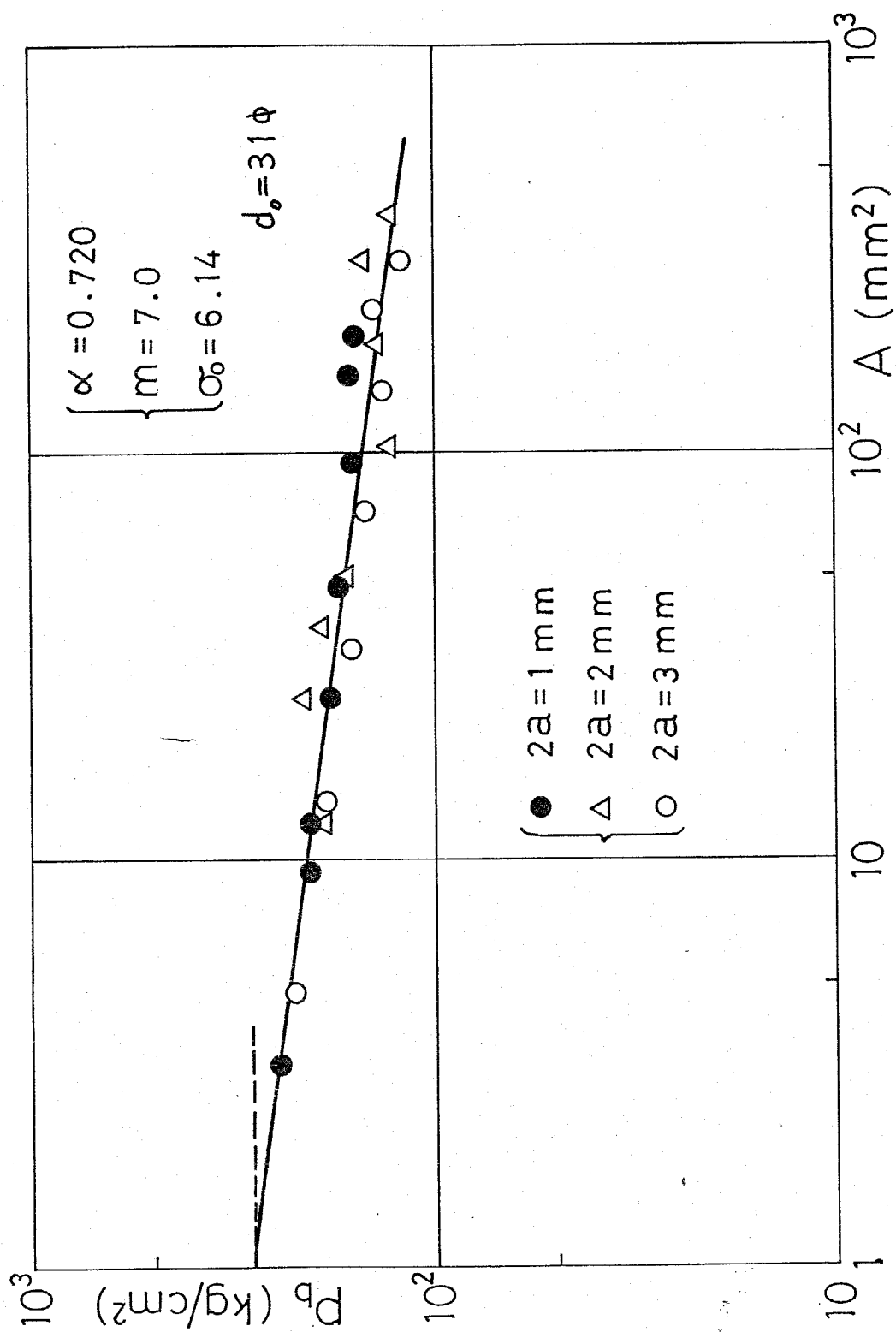


図 3-22 横孔付側圧試験結果と計算値

$d_0 = 31 \text{ mm}$, 長さ比 $l/d_0 = 1$ で、円孔はその中央にあいている。
 実験結果は多少ばらついてはいるが、円孔径によらずほぼ1本の直線上に並んでいる。図中の直線（実線）はタービン池を用いたときの側圧試験結果より得たパラメータの値 $\alpha = 0.720$, $m = 7.0$, $\phi_0 = 6.14$ を用いて式 (3-42) より計算した結果であって、実験結果とよく一致している。なお、A軸に平行な実線は $d_0 = 31 \text{ mm}$, $l/d_0 = 1$ である試験円筒の側圧試験結果の平均値であって、横穴付き側圧試験の破壊圧力の上限を意味する。すなわち、円孔表面積 A が約 1 mm^2 以下になるような横穴をあけても破壊圧力に影響せず、円孔を通らない破壊が起る確率が高くなることになる。

側圧試験による破壊はガラスやセラミックス、疲労試験などを除くと、表面き裂（または欠陥）のみが破壊に関与する数少ない例である。また、破面が極めて平滑であり、進展中のき裂に分岐が起らないという点でも特徴的である。青木ら⁽²²⁾ は静水圧中でガラス管の両端拘束内圧試験を行い、分岐するまでのき裂長さが静水圧によって著しく増大することを見だし、き裂の動力学的解析によりその現象の説明を行っている。側圧試験は巨視的には静水圧中 $(-p, -p, -p)$ での軸方向引張り $(0, 0, p)$ に相当するわけであるから、上述の理由によりき裂の分岐が起らず、破面が平滑になったそのと考えられる。

3.5 ぜい性材料の内外面側圧試験(中空円筒)⁽²³⁾

多孔質ぜい性材料に関する内圧試験⁽²⁴⁾⁽²⁵⁾、外圧試験⁽²⁶⁾、側圧試験⁽¹⁵⁾および静水圧下の各種実験⁽²⁷⁾においては、材料表面のコーティングの有無、圧力媒体の種類によってその破壊強さが大きく異なることが報告されており、前節ではこの現象を、材料表面に存在する空隙やき裂に圧力媒体が浸透するために起るものと考えて佐藤らの中空円筒に関する側圧試験⁽¹⁵⁾の解析を行なった。その際、横穴付き側圧試験の解析も行なったが、円孔付近の応力場が未知なので大胆な二次元近似を行わざるを得なかった。また佐藤らの実験では円孔面を被覆した実験を行っていないので解析の検証は制限されたものとなった。

本節では巨視的応力集中源が有る場合に材料表面からの圧力媒体の浸透が破壊強さに及ぼす影響を調べることを目的とし、あらかじめ内外面を被覆した大理石の薄肉円筒の側面中央に横穴(貫通円孔)をあけ、円孔面を被覆したものと被覆しないものとの二種類の試験円筒について内外面側圧試験を行い、解析結果と比較検討したものである。

3.5.1 試験円筒の応力状態 図3-23 に示すように、均質等

方な材料からなる薄肉円筒の内・外側面ならびに円孔面に圧力 p が作用するとき、円孔から十分離れた位置の応力状態は円筒座標

により

$$(-p, -p, 0) \quad (3-47)$$

と表わされる。円孔付近の応力状態は円孔径が試験円筒の外径に比べて十分小さければ(10%以下), Van Dyke⁽²⁷⁾の研究からわかるように近似的に無限板中

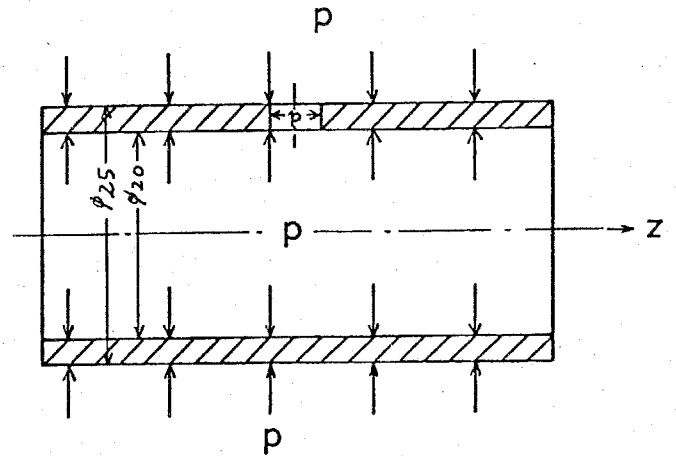


図3-23 試験円筒と負荷状態

に円孔がある状態とみなすことができる。すなわち円孔付近の負荷状態は図3-17(b), (c)とまったく同一となる。ただし $c_0 = \frac{1}{2} \times (d_0 - d_i)$ とする。このとき、円孔まわりの応力状態を (r, θ) 座標で表わすと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{p}{2} \left\{ 1 + \frac{a^2}{r^2} + \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\} - p \\ \sigma_r &= \frac{p}{2} \left\{ 1 - \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} - 4 \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right\} - p \\ \tau_{r\theta} &= \frac{p}{2} \left\{ 1 + 2 \frac{a^2}{r^2} - 3 \frac{a^4}{r^4} \right\} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (3-48)$$

最大引張応力は円孔表面の2点 $(a, 0)$, (a, π) で生じ、 $\sigma_{\theta \max} = 2p$ となる。

3.5.2 実験方法 供試材料はイタリア産のオンダガタ・ライトマーブルで、佐藤らが側圧試験に用いたものと同種の材料である。全試験円筒は1枚の大理石板から切り出した。はじめに、試験円

筒の内外面をエポキシ系接着剤で薄く被覆し、その後側面中央に直径 $2a$ の横穴（貫通円孔）をあけ、円孔縁の点 $(a, 0)$ または (a, π) の近傍に、軸方向に1枚のひずみゲージを貼る。これらの試験円筒の約半数については円孔面もエポキシ系接着剤で被覆をほどこした。その厚さは約 0.03 mm であった。図3-24は内外面側圧試験に用いた試験装置であって、図中の記号(V)は圧力容器、(S')はスペーサー、(O')は“O”リング、(I)は内圧負荷装置、(T)は試験円筒である。ひずみゲージ(G)のリード線はアタッチメント(A)から外部に取り出すことができる。試験円筒にはアタッチメント(B), (C)より同時に内外側圧をみけられるようになっている。圧力媒体にはタービン油^{#90}とケロソンの混合油を用いた。

3.5.3 実験結果 試験円筒に負荷された内外面側圧 p と、円孔縁に貼ったひずみゲージにより測定されたひずみ ϵ_a との関係を図3-25, 3-26に示す。図3-25は円孔面を被覆しない場合の実験であって、すべての曲線はX印で示した破壊点まで直線的である。それに対し、図3-26で示すように円孔面を被覆した場合は、円孔径 $2a$ が 2 mm より小さくなると図中のA点で $p \sim \epsilon_a$ の直線関係が折れ曲がり、破壊に至っている。A点を過ぎたところまで変形した試験円筒を除荷した後観察したところ、円筒の円周方向に円孔縁から一對の放射状き裂が発生しているのが確認

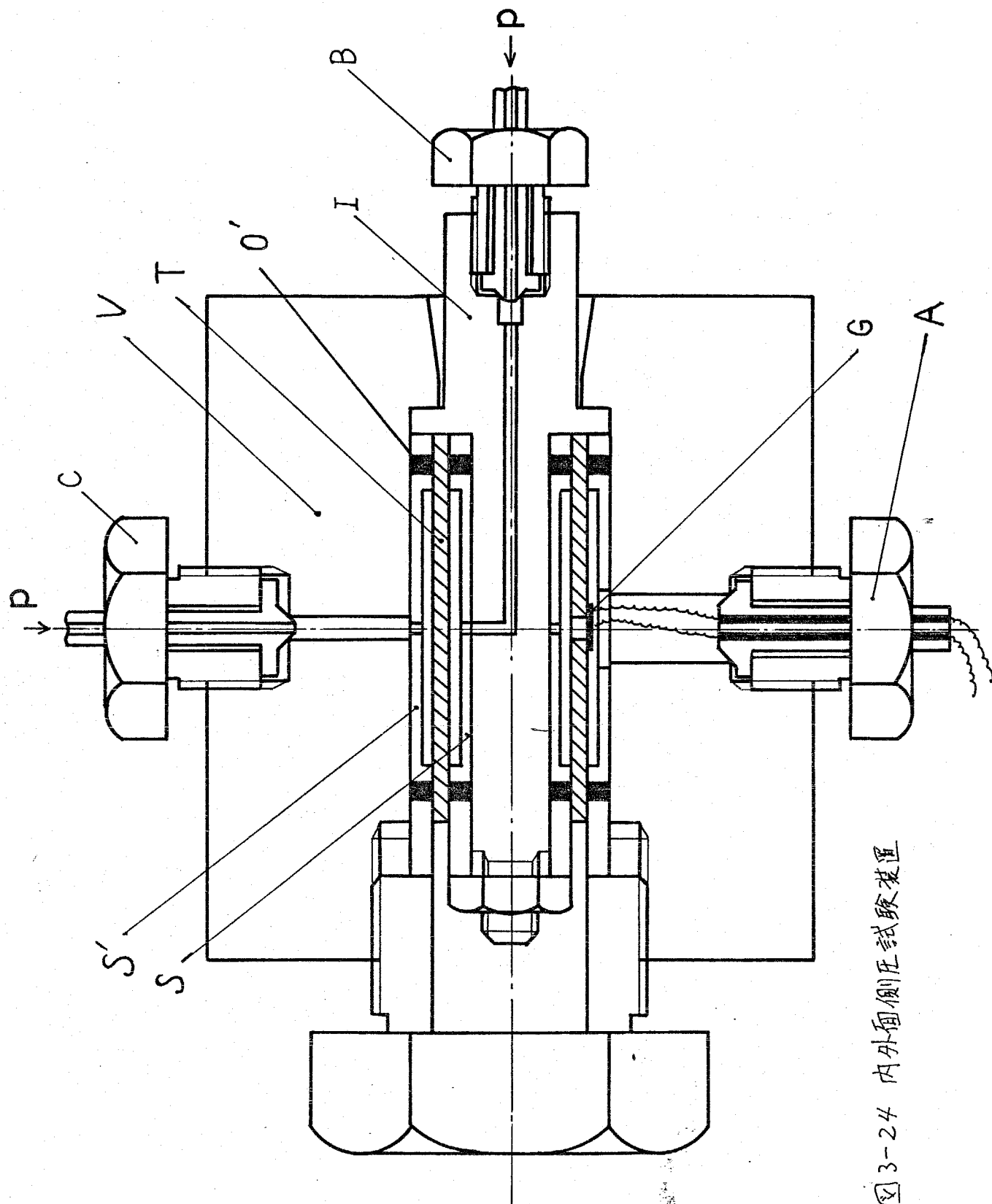


图 3-24 内外侧压试验装置

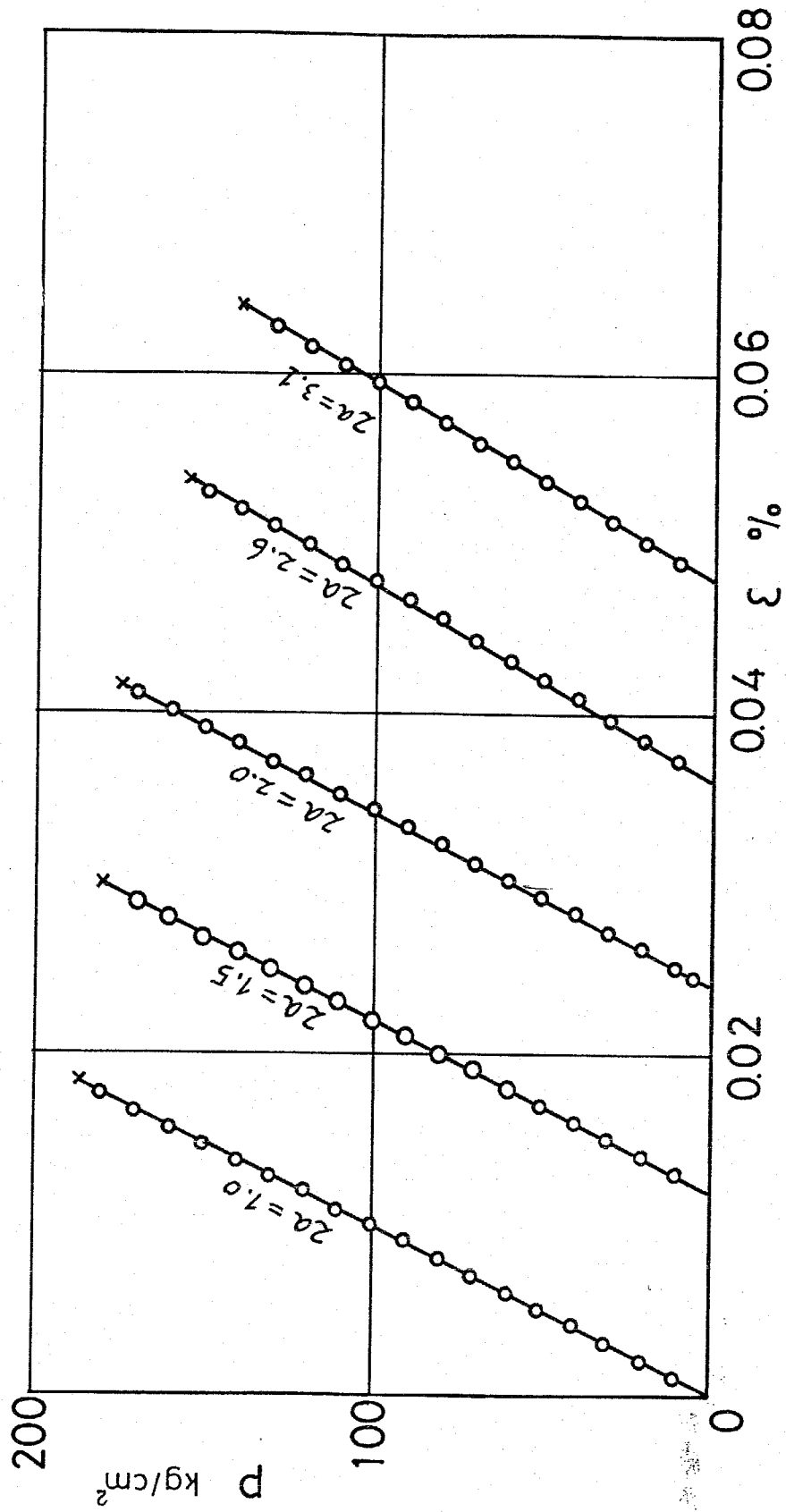


図 3-25 円孔面を被覆しない場合の $p \sim \epsilon$ 曲線

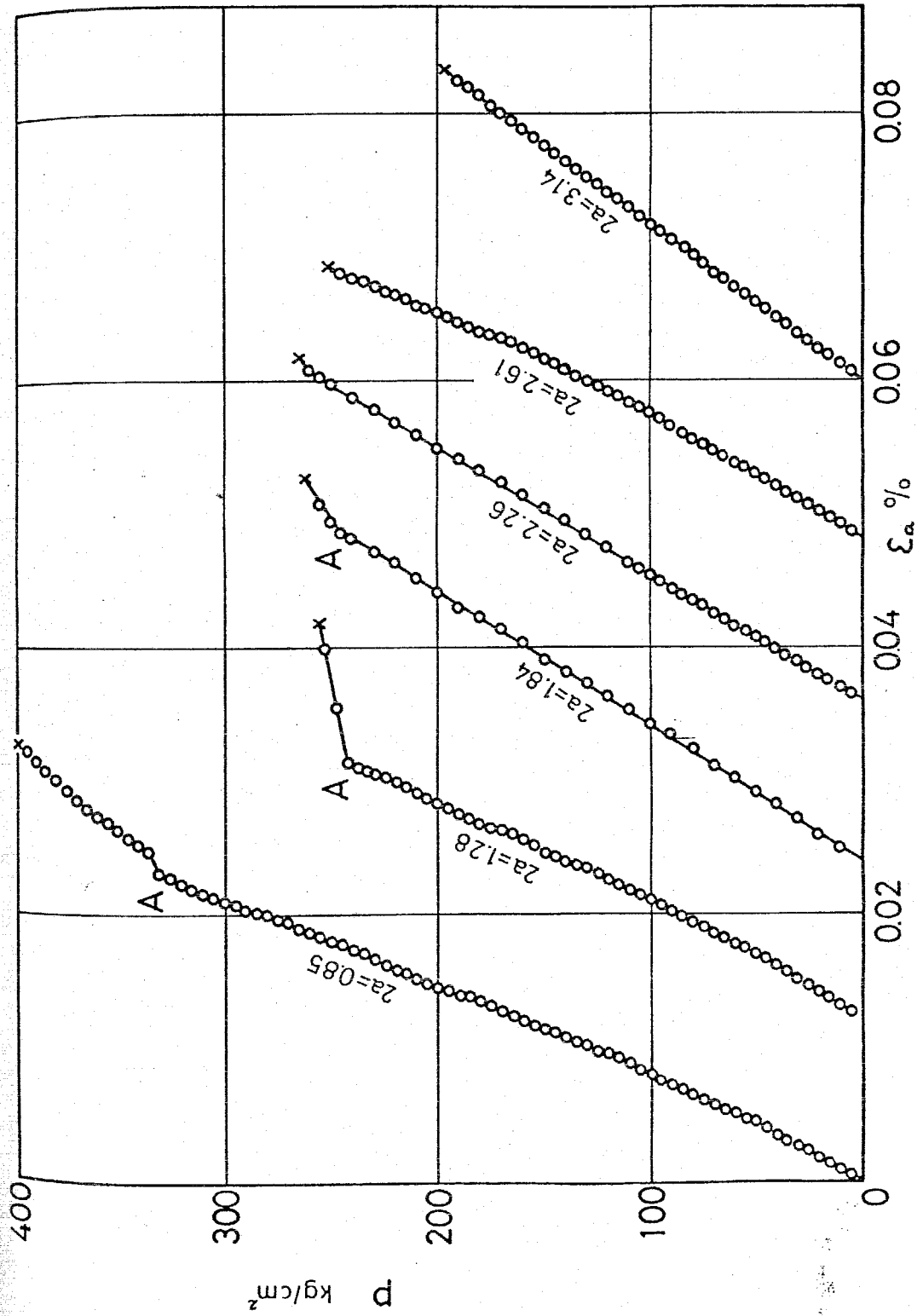


図3-26 円孔面を被覆した場合の $p \sim \epsilon_a$ 関係

された。それ故、き裂が最初に A 点で発生し、荷重を増すと共に
 円周方向に伝播していくものと考えられる。以後 A 点における圧
 力を破壊圧力 p_b と呼ぶことにする。図 3-27 は実験結果を整理
 したもので、円孔径 $2a$ を横軸に、破壊圧力 p_b を縦軸にとって
 ある。図中○印で示した実験値は円孔面を被覆しなかつたもの、
 ●印は円孔面を被覆したもののうち $p \sim \epsilon_a$ 曲線が破壊まで直線
 的であったもの、●印は A 点で $p \sim \epsilon_a$ 曲線が折れ曲がり、き裂
 進展の拘束が見られたものである。当然のことではあるが、円孔
 面を被覆していない試験円筒の破壊圧力 p_b は被覆した場合より
 著しく低い値となっている。

3.5.4 考 察 3.5.1 で述べたように、1 個の横穴をもつた
 内外面側圧試験の応力状態は円孔径が円筒径に比べて小さいなら
 ば、図 3-17 (b), (c) とまったく一致する。すなわち、本実験にお
 ける破壊の力学的モデルとして図 3-17 (d) に示したき裂モデルを
 採用するならば破壊圧力の期待値は式 (3-42) (多軸分布関数) で
 表わされることになる。

実験に用いた圧力媒体はタービン油 #90 とケロソンの混合油で、
 中実円筒の単純側圧試験における破壊圧力は (表面を被覆しない
 場合) 圧力媒体として水を用いた場合とほぼ一致した。このこと
 から上記混合油のき裂への浸透率を $\alpha=1$ と仮定することができ

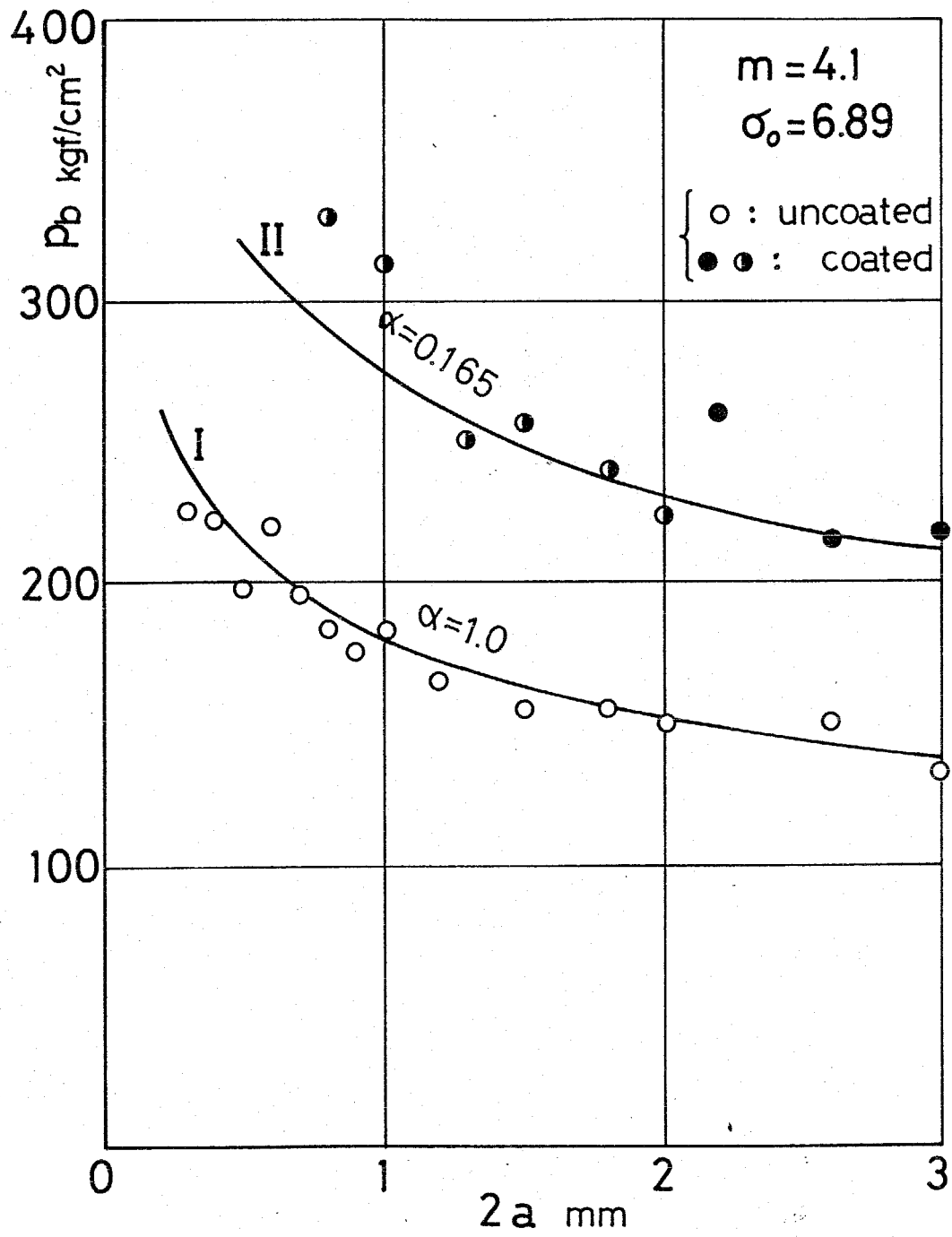


圖3-27 內外面側壓試驗結果

る。本実験に用いた大理石の Weibull パラメータは未知なので、円孔面を被覆しない場合の実験と式 (3-42) とから求めたところ、 $m = 4.1$, $\sigma_0 = 6.89$ となった (図 3-27, 曲線 I)。エポキシ系接着剤の浸透率は 3.4 節で $\alpha = 0.165$ と求まっているので、この材料でも浸透率が変わらないものと仮定すると円孔面を被覆した場合の破壊圧力の期待値は式 (3-42) から直ちに計算することができる。図 3-27 中の曲線 II は、このようにして求めた計算結果であって、 $2a > 1 \text{ mm}$ の範囲では実験結果と比較的よく一致している。

図 3-26 で示したように、円孔面を被覆した場合、円孔径が小さいところで円孔縁から発生した共線放射き裂の進展が拘束される現象が見られた。以下にこの現象を破壊力学的に考察することを試みる。はじめに図 3-28 に示すように円孔縁にある一対の共線放射き裂 (長さ λ) に深さ λ まで圧力媒体が浸透する場合の応力拡大係数を西谷石田⁽²⁹⁾ によって開発された体積力法により求める。その概略は以下の通りである。

図 3-29 に示すように無限板中に想定した切欠きとなるべき円弧 $\widehat{AB}$ 、およびき裂となるべき直線 BD をそれぞれ M , N 等分する。つぎに円弧上の区間には z

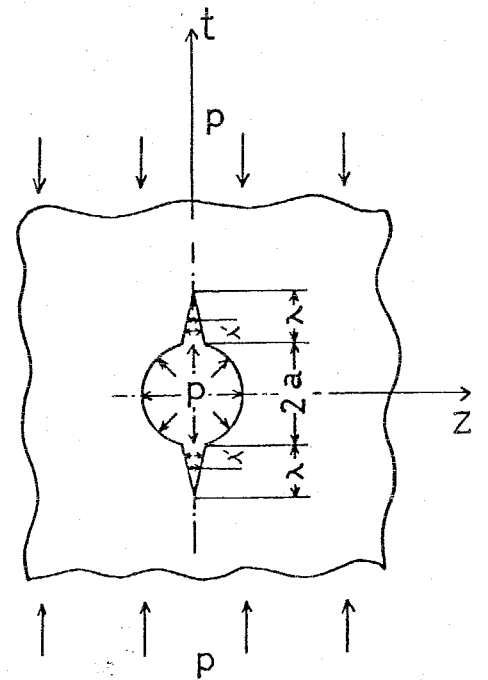


図 3-28 共線放射き裂をもつ円孔の負荷状態

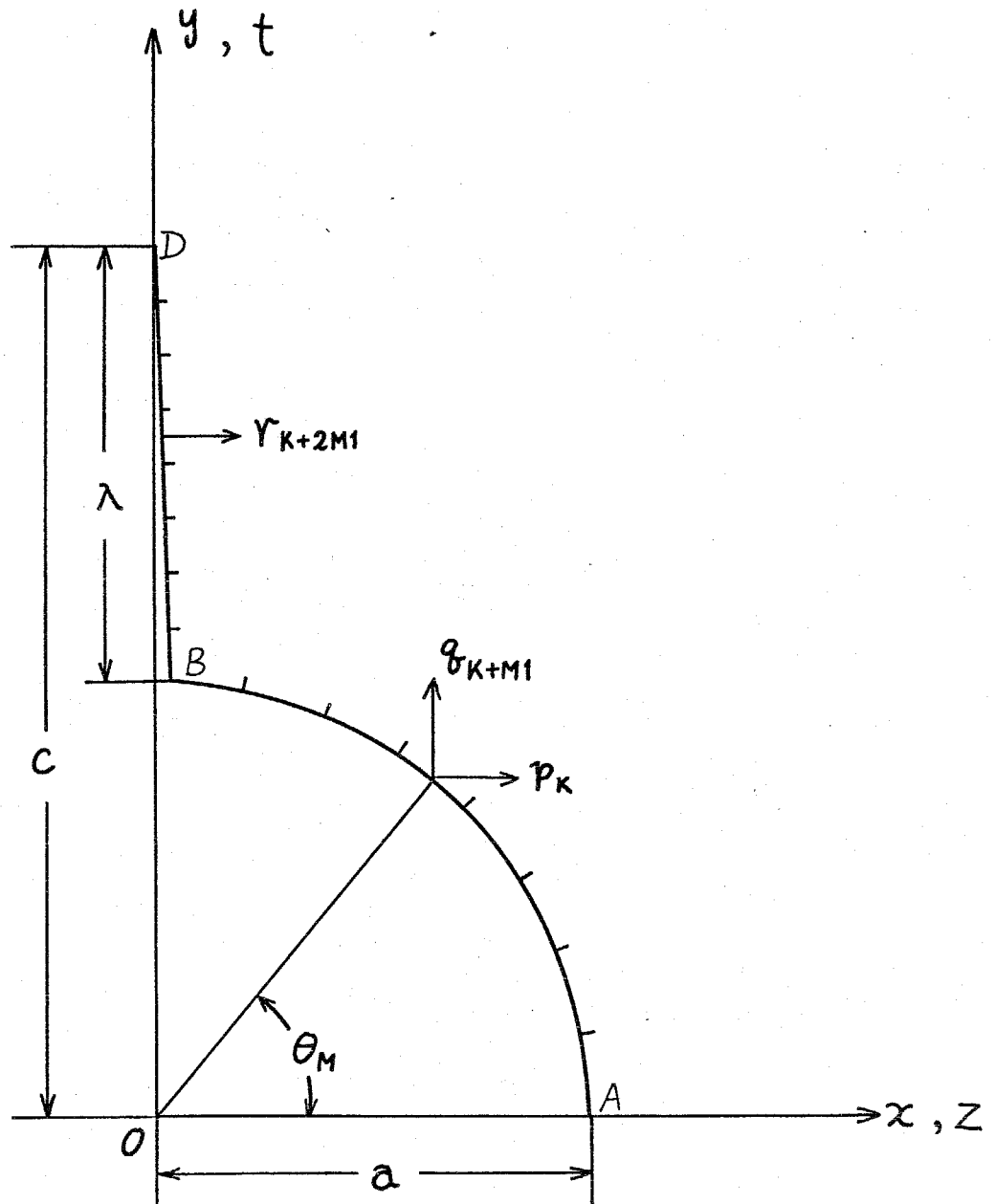


図3-29 体積力法における要素分割

れぞれ区画内では一定の密度である x, y 方向の体積力 p_K, q_K を、き裂上の区画には互いに逆向きに働く一対の体積力 r_K を作用させる。円弧上の区画 K に大きさが 1 である適当な密度の x 方向の体積力 p_K を作用させたとき、円弧上の着目区画 M の中奥に生じる応力を $\sigma_{xMe}^{pK}, \sigma_{yMe}^{pK}, \tau_{xyMe}^{pK}$ 、き裂上の着目区画 $(M+2M_1)$ の中奥に生じる x 方向応力を σ_{xMc}^{pK} で表わす。着目区画の中奥を含む微小要素に働く x, y 方向の応力を影響係数と定義すると、影響係数 A は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} A(K, M) &= \sigma_{xMe}^{pK} \cdot \cos \theta_M + \tau_{xyMe}^{pK} \cdot \sin \theta_M \\ A(K, M+M_1) &= \sigma_{yMe}^{pK} \cdot \sin \theta_M + \tau_{xyMe}^{pK} \cdot \cos \theta_M \\ A(K, M+2M_1) &= \sigma_{xMc}^{pK} \end{aligned} \right\} \quad (3-49)$$

同様に $p_K=1, q_K=1$ が作用したときの影響係数はそれぞれ式 (3-50), (3-51) で表わされる。

$q_K=1$ による影響係数

$$\left. \begin{aligned} A(K+M_1, M) &= \sigma_{xMe}^{qK} \cdot \cos \theta_M + \tau_{xyMe}^{qK} \cdot \sin \theta_M \\ A(K+M_1, M+M_1) &= \sigma_{yMe}^{qK} \cdot \sin \theta_M + \tau_{xyMe}^{qK} \cdot \cos \theta_M \\ A(K+M_1, M+2M_1) &= \sigma_{xMc}^{qK} \end{aligned} \right\} \quad (3-50)$$

$r_K=1$ による影響係数

$$\left. \begin{aligned} A(K+2M_1, M) &= \sigma_{xMe}^{rK} \cdot \cos \theta_M + \tau_{xyMe}^{rK} \cdot \sin \theta_M \\ A(K+2M_1, M+M_1) &= \sigma_{yMe}^{rK} \cdot \sin \theta_M + \tau_{xyMe}^{rK} \cdot \cos \theta_M \\ A(K+2M_1, M+2M_1) &= \sigma_{xMc}^{rK} \end{aligned} \right\} \quad (3-51)$$

以上で示した影響係数を用いると着目点の応力は p_k, q_k, r_k の 1 次結合として表わされるから、着目点における力の釣合から p_k, q_k, r_k を未知数とした $3M_1$ 元連立一次方程式が得られる。すなわち着目点の境界条件を C^M とすると

$$\begin{bmatrix} A_k^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_k \\ q_k \\ r_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C^M \end{Bmatrix} \quad (3-52)$$

を得る。ここで境界条件 C^M は図 3-28 より次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{円弧上では} \\ \quad \begin{array}{ll} C^M = \cos \theta_M & (\text{x 方向}) \\ C^{M+M_1} = 0 & (\text{y 方向}) \end{array} \\ \\ \text{き裂上では} \\ \quad C^{M+2M_1} = \begin{cases} 1 & (\text{単位の圧力が作用する部分}) \\ 0 & (\text{圧力が作用しない部分}) \end{cases} \end{array} \right\} \quad (3-53)$$

2次元静定問題においては通常応力分布はポアソン比 ν に無関係なので式 (3-52) を解くにあたっては $\nu=0$ として計算の簡略化を行う。

き裂先端の応力拡大係数はき裂先端の応力の特異性から、き裂の最終区間の体積力の大きさ r_{3M_1} によりのみ依存 1 次式で表わされる。

$$K_I = p \cdot r_{3M_1} \sqrt{\pi(a+\lambda)} \quad (3-54)$$

また無次元応力拡大係数 F_I は次式で定義される。

$$F_I = \frac{K_I}{p\sqrt{\pi(a+\lambda)}} \quad (3-55)$$

影響係数の定義式中に表われる応力 σ_{zme}^{PK} , σ_{yme}^{PK} , τ_{xye}^{PK} , ---- の具体的な形は文献⁽²⁹⁾にあるので省略する。

数値計算においては λ/a を 0.2 ~ 2.0 の間で6種類選び、それぞれについて浸透率 λ'/λ を 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1 として計算を行った。本解法では本来連続であるべき体積力の密度を各区間で一定としたこと、境界条件を着目点でのみ一致させたことによる誤差を含んでいるため補正する必要がある。厳密解は分割数 M を無限大としたとき得られるので、分割数を $M_1 = 8, 12, 16, 24$ の各場合について計算し、これらの値から外挿により解を求めた。

$\lambda'/\lambda = 1$ で、かつ

軸方向の圧縮応力を

零にした場合の応力

拡大係数は西谷石田⁽²⁹⁾

と Bowie⁽³⁰⁾ により求

められているので、

数値計算精度の検定

表3-4 数値計算結果の比較

λ/a	$F_I' = F_I \sqrt{(a+\lambda)/\lambda}$		
	Bowie	Nisitani, Isida	our results
2.0	1.21	—	1.25
1.0	1.45	1.47	1.45
0.8	1.58	1.57	1.59
0.6	1.71	1.73	1.74
0.4	1.96	1.97	2.00
0.2	2.41	2.41	2.49

の意味で本計算結果と比較してみる。表3-4はその結果であって、本計算結果は他に比べて λ/a が小さくなるとわずかに大きい値となっている。全数値計算結果を表3-5と図3-30に示す。同図よ

表3-5 応力拡大係数の計算結果

λ/a	X/λ	F_r	$\frac{K_r}{\rho\sqrt{a}}$
2.0	0.00	0.245	0.752
	0.25	0.358	1.099
	0.50	0.486	1.492
	0.75	0.647	1.986
	1.00	1.023	3.141
1.0	0.00	0.410	1.028
	0.25	0.482	1.208
	0.50	0.584	1.464
	0.75	0.724	1.815
	1.00	1.048	2.627
0.8	0.00	0.460	1.094
	0.25	0.527	1.254
	0.50	0.626	1.489
	0.75	0.753	1.791
	1.00	1.057	2.514
0.6	0.00	0.519	1.164
	0.25	0.582	1.304
	0.50	0.670	1.502
	0.75	0.786	1.736
	1.00	1.066	2.390
0.4	0.00	0.596	1.250
	0.25	0.648	1.359
	0.50	0.722	1.514
	0.75	0.823	1.726
	1.00	1.067	2.238
0.2	0.00	0.591	1.148
	0.25	0.659	1.280
	0.50	0.751	1.458
	0.75	0.834	1.619
	1.00	1.018	1.977

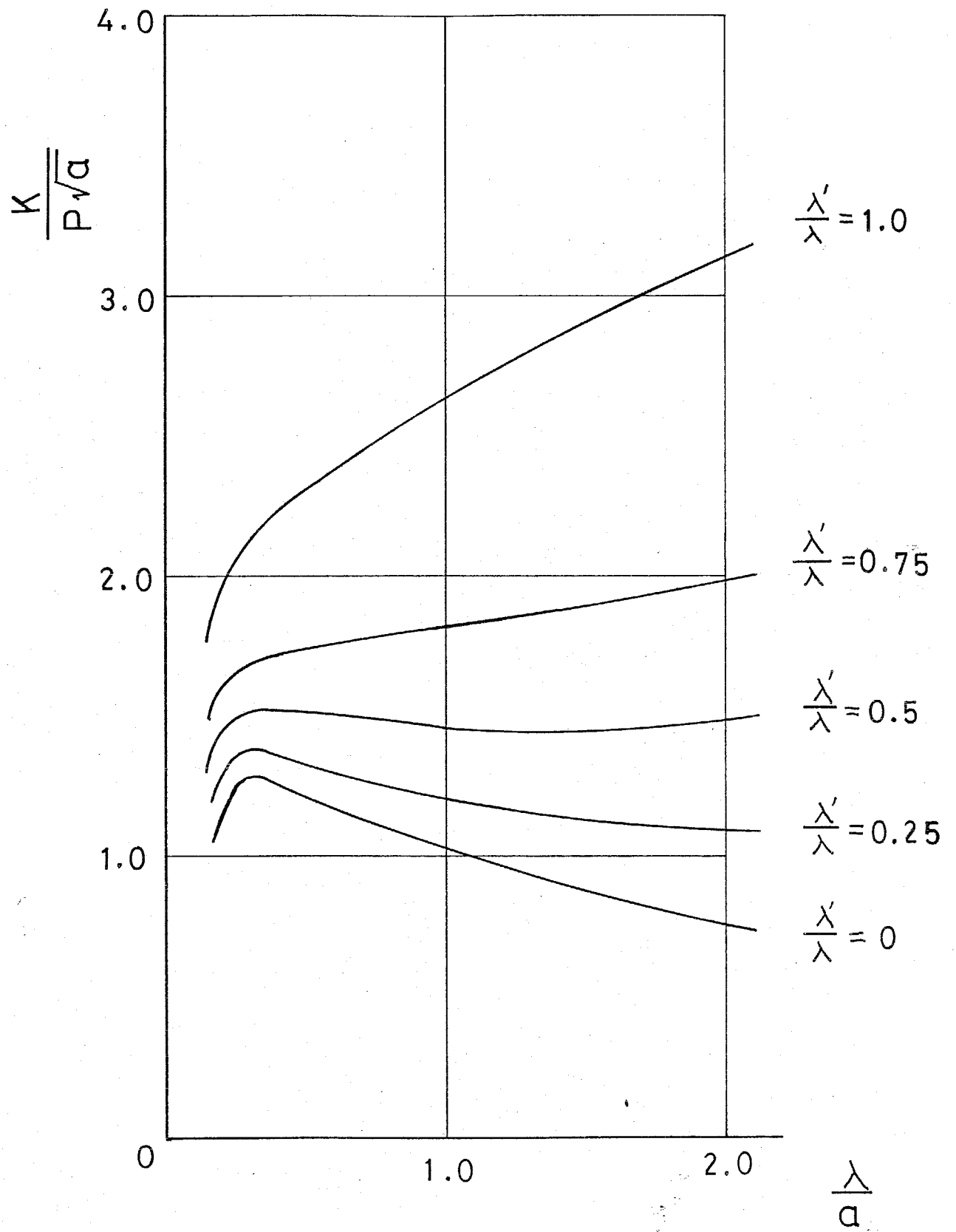


図 3-30 応力拡大係数と λ/a の関係

り次のことが明らかとなる。すなわち p, a を一定とした場合、 $\lambda'/\lambda > 0.5$ では K_{II} が λ の単調増加関数であるのに対し、 $\lambda'/\lambda < 0.5$ では（少くとも計算の範囲では） $\lambda/a \simeq 0.3$ 付近で極大値をとる関数となっている。換言すれば、 $\lambda'/\lambda > 0.5$ のときは、円孔縁に発生したき裂は加速されて不安定伝ばし、 $\lambda'/\lambda < 0.5$ のときは、加速されたき裂が K_{II} へ λ 曲線の極大値を越えた後減速して停止し、荷重を増さなければき裂が進展しないことになる。

上に述べたことより図3-25, 3-26で示した実験結果を説明してみる。ただし浸透率 $\lambda'/\lambda \simeq \alpha$ と考える。まず、図3-25の円孔面を被覆しない場合、 $\alpha=1$ であるより図3-30中の $\lambda'/\lambda=1$ の曲線に見るように、円孔表面にある最も危険なき裂は進展して貫通き裂となり、不安定伝ばして円筒が破断される。き裂が動的に進展する際、 λ'/λ が1より小さくなることも考えられるが、き裂の進展が遅くなれば λ'/λ が1に近づくわけで、結局き裂は不安定伝ばすることになる。したがって図3-25に見るように $p \sim \epsilon_a$ 曲線は破壊に至るまで線形となるわけである。これに対し、円孔面を被覆した場合の浸透率は初期き裂に対して $\alpha=0.165$ であるから、き裂が少し進展すれば λ'/λ は急速に零に近づく。図3-30中の $\lambda'/\lambda=0$ に対する曲線は $\lambda/a=0.30$ で極大値をもつ上に凸の曲線であるから、 $\lambda/a=0.30$ になるまで初期き裂は加速進展

す。その後減速して停止する。一度停止した後は荷重を増さなければき裂は進展しない。円孔径 $2a$ が大きいと同じ λ/a の値に対して円孔径が小さい場合よりもき裂の開口変位が大きくなり、き裂が停止しないうちに被覆が破れて圧力油が浸透し、 K_{II} へ入関係が $\lambda'/\lambda = 1.0$ の曲線に漸近して不安定破壊に至る。これが、図3-26 に見るように円孔径 $2a \leq 2\text{mm}$ ではき裂進展の拘束が見られ、 $2a > 2\text{mm}$ では不安定破壊が起った理由であると考えられる。

図3-27 中の曲線Ⅱは $2a < 1$ では実験値よりかなり低い値となっている。その理由として二つのことが考えられる。第1は、円孔縁に貼ったひずみゲージの大きさに対して円孔径が小さくなると、き裂が進展する情報を捉えにくくなり、図3-26の折れ曲がり点Aにおける圧力を過大評価するであろうという点である。第2は、円孔面の被覆厚さの影響が大きくなるという点である。実験の説明で述べたように被覆の厚さは約 0.03mm であったが、円孔径が 1mm 以下になるとその影響が無視できなくなる。これらの二つの理由により $2a < 1\text{mm}$ のとき実験値が曲線Ⅱより高目に出たものと思われる。

3.6 結 言

本章では Weibull の多軸確率分布関数を拡張して、表面き裂と内部き裂を同時に考慮した多軸確率分布関数を導出し、これを用いてぜい性材料からなる回転円板の破壊、ぜい性材料の側圧試験、ぜい性材料の内外面側圧試験の解析を行い、以下のような結論を得た。

『黒鉛からなる回転円板の破壊』においては、

- ① 新たに導出した多軸確率分布関数を用いて回転円板の破壊強さの期待値を求めた。
- ② 電極用黒鉛構についての単純引張試験結果から最尤法により各分布関数のパラメータの値を求め、回転円板の破壊強さの期待値を数値計算した。
- ③ 黒鉛からなる回転円板の破壊試験結果と理論値とを比較した結果、新たに導出した確率分布関数は従来のそのよりも実験結果をよく説明できることがわかった。
- ④ 回転円板の内外径比 γ が 1 に近づくとき破壊強さは零に近づくようである。

『ぜい性材料の側圧試験（中実円筒）』においては、

- ① 材料表面に存在するき裂中に圧力媒体が浸透することにより側圧試験下での破壊が起ると考え、き裂中への圧力媒体の

浸透の尺度として α なる量を定義し、これがき裂の大きさならびに圧力に無関係な定数で、圧力媒体の種類によって異なるものと仮定した。

- ② 新たに導出した表面き裂に関する多軸確率分布関数を用いて上記モデルによる側圧試験の解析を行った結果、佐藤らの大理石についての実験結果をよく説明することができた。

『ぜい性材料の内外面側圧試験(中堅円筒)』 においては

- ① 1 個の横穴をもった大理石薄肉円筒試験片において、円孔面を被覆した場合としない場合の 2 種類の実験を行い、被覆した場合にはき裂進展の拘束があることを見いだした。
- ② 破壊圧力の期待値に関する理論式は、中堅円筒の横穴つき側圧試験における理論式とまったく一致し、実験値と良好一致をみた。
- ③ 円孔縁から一対の共線放射き裂が発生し、これに圧力が作用する場合について体積力法により応力拡大係数の数値計算を行い、浸透率 α が 0.5 より小さくなると $K \sim \sqrt{a}$ 関係が上に凸の曲線となることを見い出し、このことから、円孔面を被覆した場合にき裂進展が拘束されるという実験結果を説明した。

第4章 き裂を陽に考慮した多軸確率分布関数の導出とその応用⁽²⁰⁾

4.1 緒言

従来の最弱リンク説に基づいた破壊の確率論においては、そのほとんどが材料中の垂直応力のみを考慮しせん断応力の効果を無視してきた。これは主として Weibull の 1 軸分布関数⁽¹⁾が用いられ、材料中に注目しているき裂のき裂面が最大主応力方向と垂直に位置していると仮定したためである。また、材料中の各点におけるき裂の方向性を考慮した Weibull の多軸分布関数⁽¹⁾および 2 章で導出した“表面き裂と内部き裂を同時に考慮した多軸分布関数^{(2),(3)}”においてもせん断応力を無視している。

本章では、材料表面には二次元直線き裂が、材料中には円板状き裂がランダムに分布しているものとしてその不安定伝ば条件を考え、これより垂直応力のみならずせん断応力も考慮したより一般的な破壊の多軸分布関数を導出する。新たに導出した多軸分布関数の応用例として引張応力が支配的な場における 2 軸応力下のぜい性破壊曲線の解析、回転円板の破壊強さの解析、側圧試験における破壊圧力の解析を行ない、後述者については 3 章における計算結果と比較検討する。さらに、圧縮応力が支配的な場においても最弱リンク説が成立すると考えられる一例として、弱面を有するぜい性材料の破壊について解析を行う。

4.2 き裂を陽に考慮した破壊の多軸確率分布関数の導出

4.2.1 表面き裂を陽に考慮した場合 材料表面に存在するき

裂の形状として最も一般的と思われるのは半楕円き裂であるが、その任意応力場における応力拡大係数が著者の知る限りでは未知なので、ここでは表面に無数の二次元直線き裂が存在し、その臨界き裂長さが $2c$ であると仮定する。いま、このき裂に働く無限遠応力を σ_∞ (> 0)、 τ_∞ (き裂面に平行なせん断応力) とする。混合モード下のき裂の (不安定) ぜい性依り条件としては最大応力条件⁽⁴⁾、最大ひずみエネルギー解放率条件⁽⁵⁾、ひずみエネルギー密度条件⁽⁶⁾ 等種々の仮説が提案されているが、まだ確たる理論はないようである。その中で、ぜい性材料に関しては次式^{(7)~(9)}

$$\left(\frac{K_I}{K_{IC}}\right)^n + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIC}}\right)^n = 1, \quad \frac{K_{IIC}}{K_{IC}} = 1.0 \sim 1.2, \quad n = 1.6 \sim 2.0 \quad (4-1)$$

が比較的よく実験に合うようなので、簡単のために $n=2$, $K_{IIC}/K_{IC} = 1.0$ としてこの式を以下の解析に用いる。このとき式(4-1)の条件は形式的にはひずみエネルギー解放率一定条件である

$$G = G_I + G_{II} > G_c \quad (4-2)$$

と一致する*。 $K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi c}$, $K_{II} = \tau_\infty \sqrt{\pi c}$ を式(4-1)に代入すると

$$\sqrt{\sigma_\infty^2 + \tau_\infty^2} = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi c}} \quad (4-3)$$

* 勿論、この条件はき裂進展方向が先在き裂を含む面内にあると仮定しているのので、分岐角度については実際の実験結果と矛盾する。

を得る。いま、 $Z^* \equiv \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2}$ 、 $\ell \equiv C$ をそれぞれ確率変数とすると、式(4-3)は

$$Z^* = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi L}} \quad (4-4)$$

と表わされる。これは無限遠応力 Z が長さ $2L$ のき裂のき裂面に垂直に作用する場合と形式的に一致し、確率分布関数 $F_{Z^*}(Z^*)$ と $F_\ell(\ell)$ との関係が

$$F_{Z^*}(Z^*) = P_r(Z^* \leq Z^*) = P_r(L \geq \ell) = 1 - F_\ell(K_{IC}^2 / \pi Z^{*2}) \quad (4-5)$$

で表わされるから、⁽¹⁰⁾ 表面き裂として二次元直線き裂を考えた場合の多軸確率分布関数は式(3-8)指数部が2項中の σ_n のみわりに

$$Z^* = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2} \quad (4-6)$$

を代入した式となる。以後、 Z^* を等価垂直応力と呼ぶことにする。

等価垂直応力 Z^* を用いたときの比較係数 K_S^* は、1軸均等引張のときに多軸分布関数が Weibull の1軸分布関数・式(2-9)と一致するとして次式のように求められる。

$$K_S^* \int_A Z^{*m_2} dA = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{02}} \right)^{m_2}$$

$$\therefore K_S^* = \left\{ \sigma_{02}^{m_2} \cdot B\left(\frac{m_2+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}^{-1} \quad (4-7)$$

ここで σ_{02} 、 m_2 は1軸引張試験から求められるパラメータである。

4.2.2 内部き裂を陽に考慮した場合 内部き裂の形状として

は取扱いが簡単な円板状き裂を想定する。物体の各点に働く主応力を $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ とし、球座標 (R, θ, φ) を図4-2 のようにとり、さらに円板状き裂のき裂面の法線 n' を R 方向にとる。このときき裂先端の応力場に特異性を与える無限遠応力は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_R \\ \tau_{R\theta} \\ \tau_{R\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2\varphi \cos^2\theta & \sin^2\varphi \sin^2\theta & \cos^2\varphi \\ -\sin\theta \cos\theta \sin\varphi & \sin\theta \cos\theta \cos\varphi & 0 \\ \cos^2\theta \sin\varphi \cos\varphi & \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi & -\sin\varphi \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad (4-8)$$

となる。合せん断応力を $\tau = \sqrt{\tau_{R\theta}^2 + \tau_{R\varphi}^2}$ と

し、き裂まわりの応力状態と座標等を図4-1, 2 のようにとると、半径 C の円板状き裂の A 点における応力拡大係数はポアソン比 ν とすると次のように与えられる。⁽¹¹⁾

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \frac{2}{\pi} \sigma_R \sqrt{\pi C} \\ K_{II} &= \frac{4}{\pi(2-\nu)} \cos\varphi \cdot \tau \sqrt{\pi C} \\ K_{III} &= \frac{4(1-\nu)}{\pi(2-\nu)} \sin\varphi \cdot \tau \sqrt{\pi C} \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

き裂の(不安定)ぜい性伝ば条件として、表面き裂の場合と同様にグークライテリオンに相当する次式を用いる。

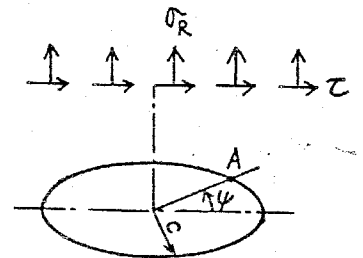


図4-1 円板状き裂

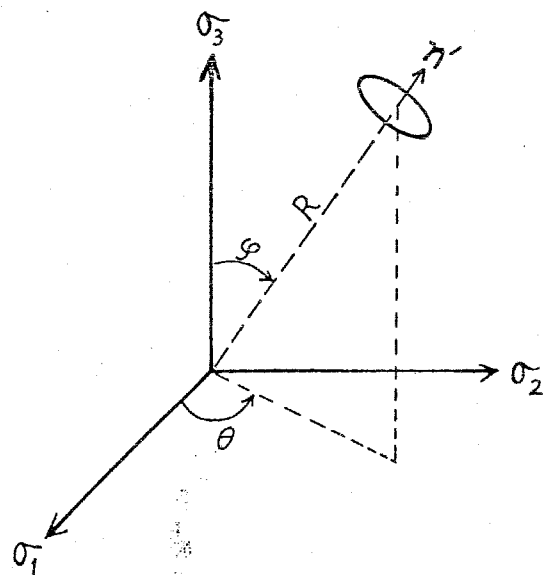


図4-2 座標系

$$\left\{ K_I^2 + K_{II}^2 \right\}_{\max} = K_{IC}^2 \quad (4-10)$$

ただし、 $E' = E / (1 - \nu^2)$ (平面ひずみ)。応力拡大係数が式(4-9)で与えられるとき、それらを式(4-10)の左辺に代入して整理すると、

$$\left\{ \sigma_R^2 + \frac{4}{(2-\nu)^2} \tau^2 \right\}^{1/2} = \frac{K_{IC}}{\frac{2}{\pi} \sqrt{\pi} c} \quad (4-11)$$

となる。式(4-9)の第1式と上式とを比較することにより、内部き裂と11円板状き裂を想定した場合の多軸分布関数は式(3-8)第1式の指数部第1項における σ_{n_1} のかわりに

$$Z = \left\{ \sigma_R^2 + \frac{4}{(2-\nu)^2} \tau^2 \right\}^{1/2} \quad (4-12)$$

で与えられる等価垂直応力を用いた式となる。比較係数 K_S は式(4-7)と同様に以下のように求められる。

1軸均等引張 $(0, 0, \sigma)$ のもとでは $\sigma_R = \sigma \cos^2 \varphi$, $\tau_{R\theta} = 0$, $\tau_{R\varphi} = -\sigma \sin \varphi \cos \varphi$ であるから、これを次式

$$K_S \int_A Z^{m_1} dA = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{01}} \right)^{m_1}$$

に代入し、積分区間を $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, $0 < \theta < \pi$ とすると、

$$\left. \begin{aligned} K_S &= (\pi \sigma_{01}^{m_1} I)^{-1}, \\ I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \cos^2 \varphi + \frac{4}{(2-\nu)^2} \sin^2 \varphi \right\}^{\frac{m_1}{2}} \cos^{m_1} \varphi \sin \varphi d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (4-13)$$

となる。

以上をまとめると、き裂を陽に考慮した多軸分布関数として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 F(x) &= 1 - \exp \left\{ - \int_B (K_S \int_A z^{m_1} \cdot Y(\sigma_R, 0) dA) dV \right. \\
 &\quad \left. - \int_{B^*} (K_S^* \int_{A^*} z^{*m_2} \cdot Y(\sigma_{n'}, 0) dA^*) d\omega \right\}, \\
 dA &= \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta, \quad dA^* = d\theta, \\
 K_S &= (\pi \sigma_{01}^{m_1} I)^{-1}, \quad K_S^* = \left\{ \sigma_{02}^{m_2} \cdot B\left(\frac{m_2+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}^{-1}, \\
 z &= \left\{ \sigma_R^2 + \frac{4}{(2-L)^2} \tau^2 \right\}^{1/2}, \quad z^* = \sqrt{\sigma_{n'}^2 + \tau_{n'}^2}
 \end{aligned} \right\} (4-14)$$

4.3 二軸応力下におけるぜい性破壊曲線の解析⁽²⁰⁾

前章で求めた破壊の多軸分布関数・式(4-14)を用いて、引張応力が支配的な場合の二軸応力下におけるぜい性破壊曲線を求める。
簡単のために内部き裂のみが存在するものとする。

式(4-8)において $\sigma_2/\sigma_1 = \xi$, $\sigma_3 = 0$ とし、 $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$ のとき $\sigma_R > 0$ となる条件を求める。 $\sin^2 \varphi (\cos^2 \theta + \xi \sin^2 \theta) > 0$ より、

$$\left. \begin{aligned} 0 < \varphi < \pi \\ \sin^{-1} \left\{ -(1-\xi)^{-1/2} \right\} < \theta < \sin^{-1} \left\{ (1-\xi)^{-1/2} \right\} \equiv \mathcal{D} \end{aligned} \right\} \quad (4-15)$$

を得る。 $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 \geq 0$ のときは、 $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ となる。したがって σ_2 をある値に設定したとき、破壊応力 σ_1 の期待値は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} E[\sigma_1] &= \int_0^\infty \exp \left\{ - \int_B (K_s \int_A z^m \cdot Y(\sigma_R, 0) dA) dV \right\} d\sigma_1 \\ &= \sigma_0 \Gamma(1 + \frac{1}{m}) Q_s^{-1/m}, \\ Q_s &= \frac{2V_0}{\pi I} \int_0^{\mathcal{D}} \int_0^\pi \left\{ S_R^2 + \frac{4}{(2-\nu)^2} (S_{R\theta}^2 + S_{R\varphi}^2) \right\}^{\frac{m}{2}} \sin \varphi d\varphi d\theta, \\ S_R &= \sigma_R/\sigma_1, \quad S_{R\theta} = \tau_{R\theta}/\sigma_1, \quad S_{R\varphi} = \tau_{R\varphi}/\sigma_1 \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

ここで V_0 は試験片の体積、 I は式(4-13)および式(4-14)で定義した量である。

比較のために Weibull の多軸分布関数・式(2-11)を用いたときの

$E[\sigma]$ の計算を行ってみる。

積分

$$\int_A \sigma_n^m dA = \sigma_1^m \int_0^\pi \sin^{2m+1} \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} Y(\sigma_n', 0) (\cos^2 \theta + \xi \sin^2 \theta)^m d\theta$$

において

$$\int_0^\pi \sin^{2m+1} \varphi d\varphi = B(m+1, \frac{1}{2})$$

であることに注意すると、 V_0 なる体積をもつ物体が破壊するときの σ_1 の期待値は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} E[\sigma_1] &= \sigma_0 \Gamma(1 + \frac{1}{m}) Q^{-\frac{1}{m}}, \\ Q &= \frac{2m+1}{\pi} V_0 \cdot B(m+1, \frac{1}{2}) \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \theta + \xi \sin^2 \theta)^m d\theta \end{aligned} \right\} \quad (4-17)$$

以上で求めた破壊応力の期待値・式(4-16), (4-17)において、 $\sigma_0=1$, $V_0=1$ としたときの種々の数値計算例を以下に示す。

図4-3は Weibull の多軸分布関数から導いた式(4-17)の数値計算結果で、 m をパラメータにとってある。第1象限における $E[\sigma]$ は応力比 ξ が1に近づくにつれて減少しているが、第4象限では $|\xi|$ が増大するとともに単調に増加していることがわかる。この傾向は m 値のいかにみわらず現われていて、 m 値の小さいときに著しい。 $m=\infty$ の極限においては $E[\sigma]=1$ となり最大引張応力説に一致する。よく知られているように、実際のせい性材料の2軸破壊試験において、第4象限における破壊時の σ_1 の値は σ_2 が減少するにしたがってはじめは一定値を保った後に減

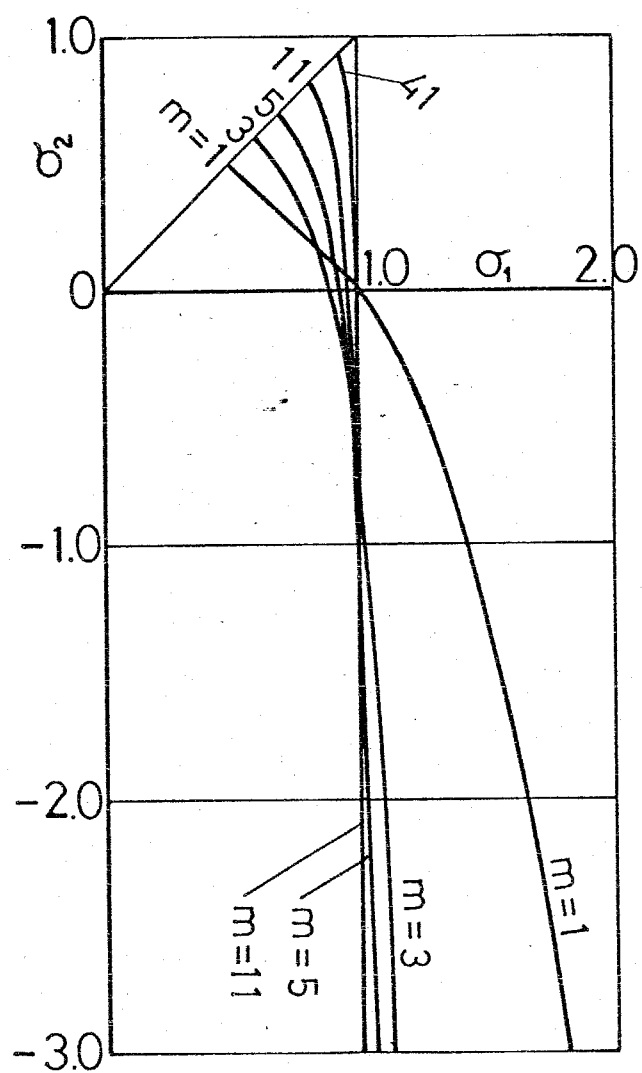


図4-3 Weibullの多軸分布関数より求めた2軸破壊曲線

少しており、図4-3の計算結果とまったく逆の傾向になっている。

これに対し、 $\nu=0.3$ として式(4-16)を計算した結果は図4-4に示すように $m \approx 1.25$ 以上になると第4象限における $E[\sigma]$ の値が15%の増加と共にほぼ一定値を保った後に減少しており、実験結果と同じ傾向になっている。図4-5(a),(b),(c) は m を一定にしたときにポアソン比 ν が破壊曲線に及ぼす影響を調べたもので、第1象限と第4象限とではポアソン比の影響が逆に出ている。また m 値が大きくなると第1象限におけるポアソン比の影響が小さくなるのに対し、第4象限のそれは逆に大きくなっている。

図4-6にアルミナ⁽¹²⁾、黒鉛⁽¹³⁾、鋳鉄⁽¹⁴⁾についての実験結果と計算結果の例を示す。図中の σ_b は引張強さである。実線で記した曲線は m 、 ν をそれぞれの値にとったときの式(4-16)を示したものであって、○印で示した実験結果と比較的よく一致している。

なお、図4-6に挙げた実験例の他に、第1象限ならびに第4象限のふなりの範囲における実験値が直線 $\sigma_1 = \sigma_b$, $\sigma_2 = \sigma_b$ 上にくる例も多い(特に鋳鉄において)。その一例を図4-7に示す。この場合は式(4-16)における m 値が無限大になったときの極限と考えるが、むしろ決定論的議論の方がより適していると言える。同図における曲線(I)(最大引張応力説と一致)、曲線(II)は佐藤による破壊の条件式⁽²¹⁾であって、実験結果をよく説明している。

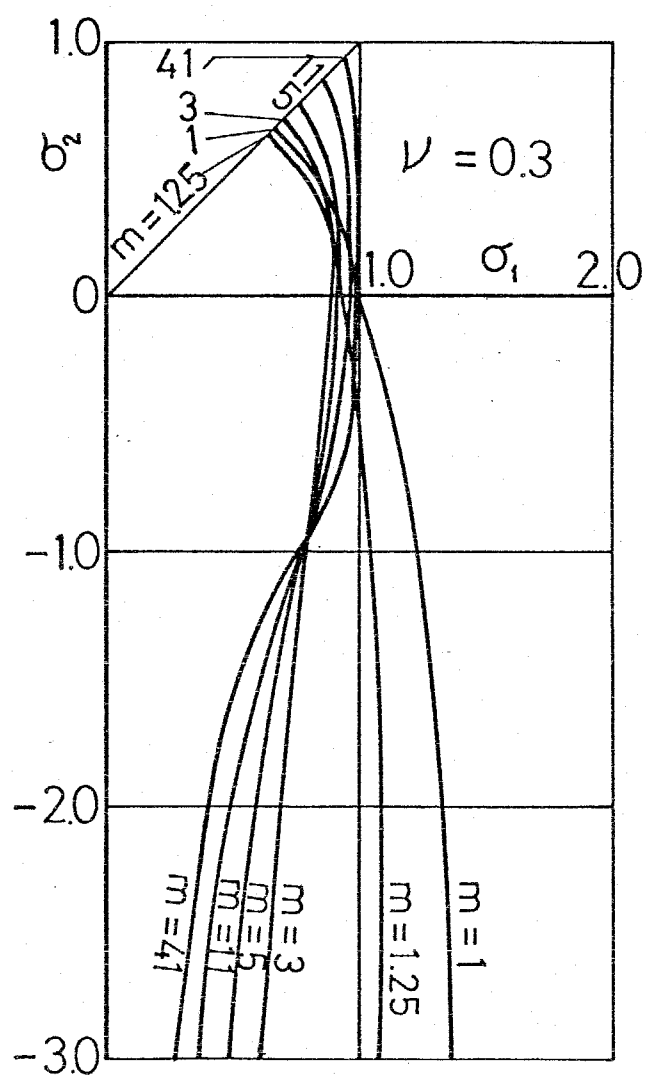
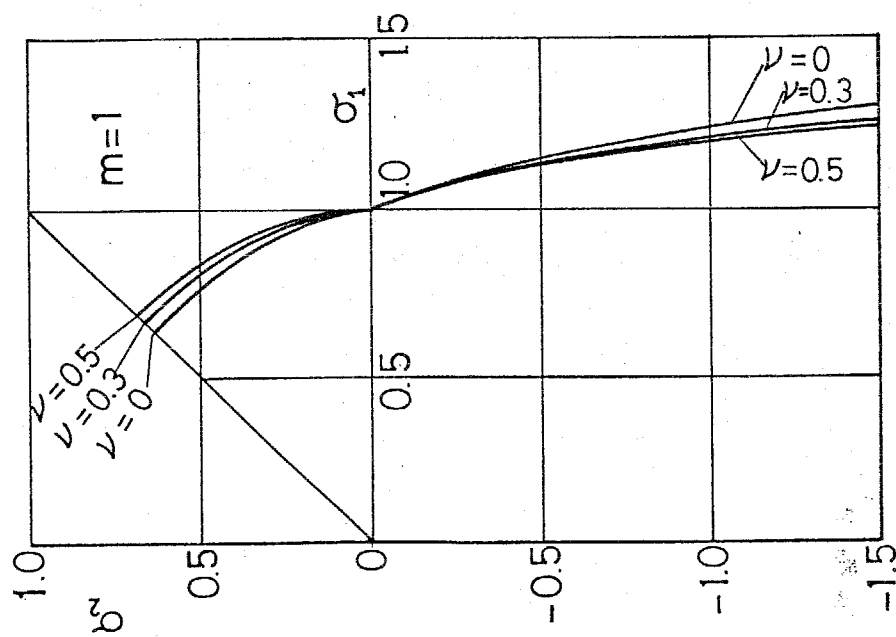
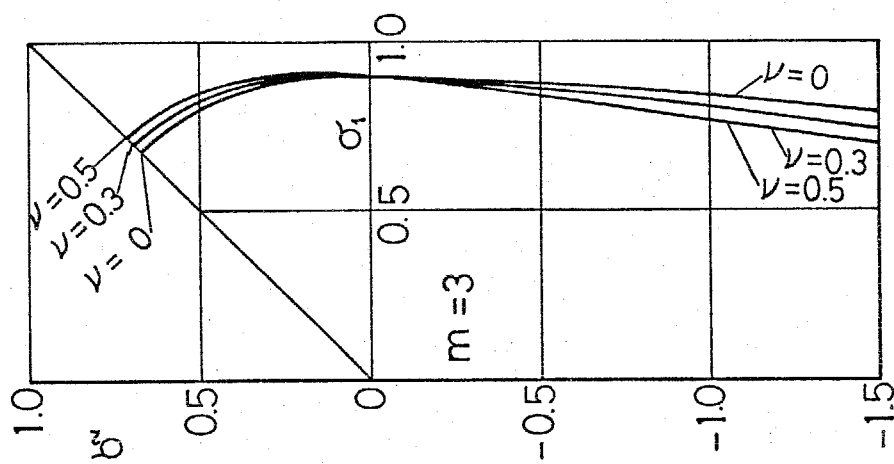


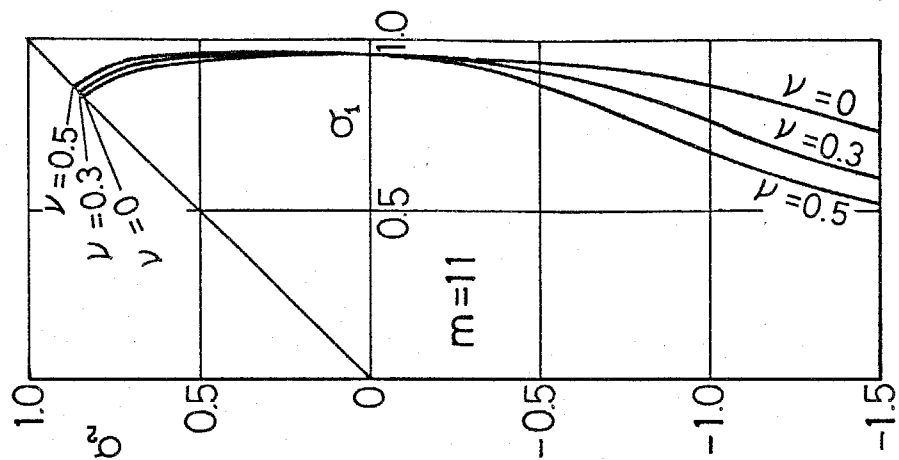
図 4-4 歪裂を陽に考慮した多軸分布関数より求めた
2軸破壊曲線 (m をパラメータにした場合)



(a)



(b)



(c)

図4-5 Ⅱ型を陽に考慮した多軸分布関数より求めた2軸破壊曲線 (ν をパラメータにした場合)

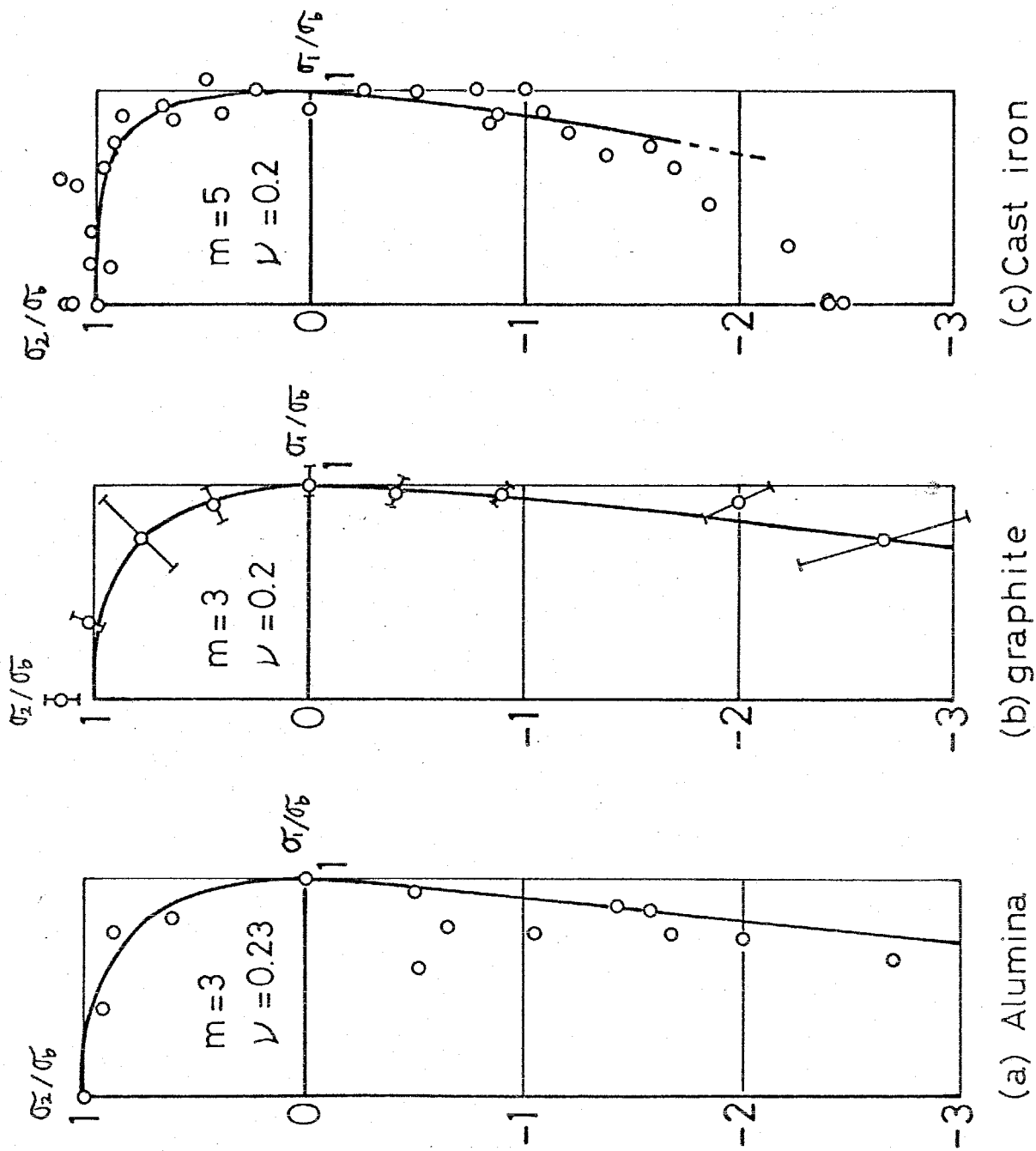


図 4-6 2軸破壊試験の例: (a) Broutman⁽¹²⁾, (b) Ely⁽¹³⁾, (c) Cornet, Grassl⁽¹⁴⁾

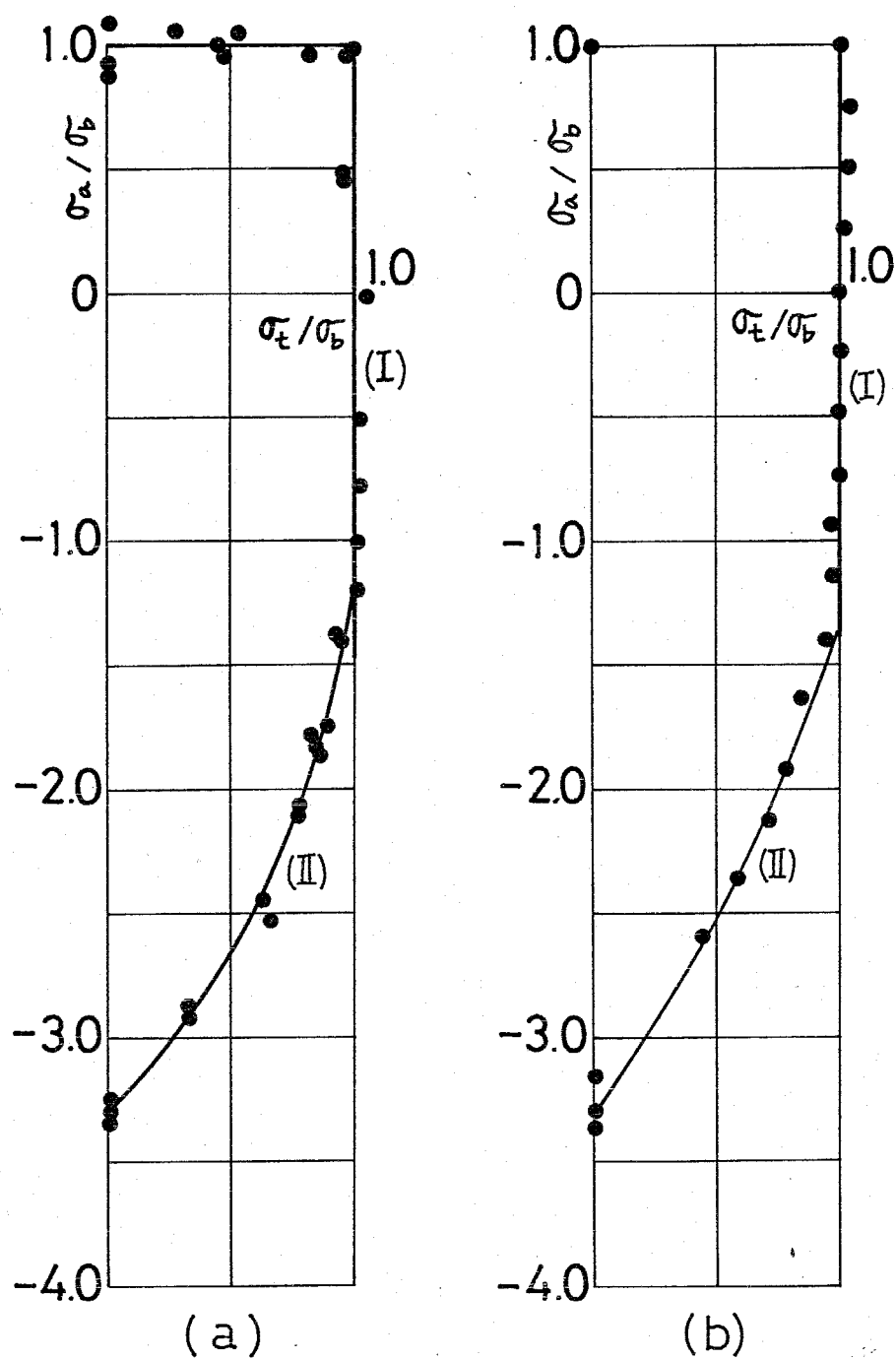


图4-7 铸铁の2軸破壊試験 (a) Grassi-Cornet⁽²²⁾ (b) Clough-Shank⁽²³⁾

4.4 回転円板の破壊強さの解析

3.3 節でせん断応力を無視した分布関数を用いて回転円板の破壊強さの解析を行ったが、ここではせん断応力を考慮した分布関数を用いて解析を行い、せん断応力が破壊強さの期待値にどの程度の影響を及ぼすかを調べてみる。

3.3 節の諸式ならびに式(4-14)より、本問題における等価垂直応力 Z , Z^* はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} Z &= \sigma_{\max} \left\{ S_R^2 + \frac{4}{(2-\nu)^2} (S_{R\theta}^2 + S_{R\varphi}^2) \right\}^{1/2}, \\ S_R &= \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \theta \cdot f_1(r) + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \cdot f_2(r) \\ S_{R\theta} &= -\sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \cdot f_1(r) + \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \cdot f_2(r) \\ S_{R\varphi} &= \cos^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi f_1(r) + \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi f_2(r) \end{aligned} \right\} \quad (4-18)$$

$$\left. \begin{aligned} Z^* &= \sigma_{\max} (S_R^2 + S_{R\theta}^2)^{1/2}, \\ S_R &= \cos^2 \theta f_1(r) + \sin^2 \theta f_2(r) \\ S_{R\theta} &= \sin \theta \cos \theta \{ f_2(r) - f_1(r) \} \\ S_{R\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-19)$$

式(4-19)の第2, 第3式より $S_R^2 + S_{R\theta}^2 = f_1^2 \cos^2 \theta + f_2^2 \sin^2 \theta$ となる

ことに注意し、計算を行くと、結局、分布関数として次式を得る(

$$m_1 = m_2 \equiv m).$$

$$\left. \begin{aligned}
 F(\sigma_{\max}) &= 1 - \exp \left\{ -B_s \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{01}} \right)^m - B_s^* \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{02}} \right)^m \right\}, \\
 B_s &= (m+1)h \int_0^\pi \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_0} \left\{ S_R^2 + \frac{4}{(2-\nu)^2} (S_{R\theta}^2 + S_{R\varphi}^2) \right\}^{\frac{m}{2}} r \sin \varphi \, dr d\theta d\varphi \\
 B_s^* &= 8\pi \left\{ B \left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}^{-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{R_1}^{R_0} (f_1^2 \cos^2 \theta + f_2^2 \sin^2 \theta)^{\frac{m}{2}} r \, dr d\theta \\
 &\quad + 2\pi R_1 h + \left(\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \right)^m 2\pi R_0 h
 \end{aligned} \right\} \quad (4-20)$$

上式より破壊時の角速度 ω の2乗の期待値は次のようになる。

$$E[\omega^2] = \frac{4g}{8\{(3+\nu)R_0^2 + (1-\nu)R_1^2\}} \left(\frac{B_s}{\sigma_{01}^m} + \frac{B_s^*}{\sigma_{02}^m} \right)^{-\frac{1}{m}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad (\text{中空円板}) \quad (4-21a)$$

$$E[\omega^2] = \frac{8g}{8(3+\nu)R_0^2} \left(\frac{B_s}{\sigma_{01}^m} + \frac{B_s^*}{\sigma_{02}^m} \right)^{-\frac{1}{m}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad (\text{中空円板}) \quad (4-21b)$$

パラメータとして黒鉛の単純引張試験から求めた値(表3-2, (b))を用いて式(4-21)の数値計算を行ったところ、式(3-20), (3-21)の計算結果と1~2%の精度で一致した。すなわち、回転円板の破壊強度の確率論的解析においては、き裂面に沿くせん断応力の効果をほぼ無視することができるということである。これは、回転円板内の応力状態が単純引張であり、しかも中心を除いて σ_r の方が σ_θ よりはるかに大きいから、すなわち4.3節における応力比 β が1に近いために、両者の差が小さくなったものと思われる。

4.5 側圧試験における破壊圧力の解析

式(4-14)を用いて側圧試験の解析を行ない、3.4節の解析結果と比較する。表面き裂のみが破壊に関与するわけであるから、分布関数式(4-14)は

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= 1 - \exp \left\{ - \int_{B^*} (K_S^* \int_{A^*} z^{*m} \cdot Y(\sigma_n', 0) dA^*) d\omega \right\}, \\ K_S^* &= \left\{ \sigma_0^m B \left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}^{-1}, \quad z^* = \sqrt{\sigma_n'^2 + \tau_n'^2} \end{aligned} \right\} \quad (4-22)$$

となる。上式で σ_n' , τ_n' は式(3-26), (3-27)よりそれぞれ

$$\sigma_n' = p(\alpha - \cos^2 \theta), \quad \tau_n' = p \sin \theta \cos \theta$$

と与えられている。また、 $\sigma_n' > 0$ の条件は式(3-28)より

$$\cos^{-1}(\sqrt{\alpha}) < \theta < \cos^{-1}(-\sqrt{\alpha})$$

となる。以上の式を式(4-22)に代入し、変数変換 $\cos^2 \theta = \alpha t$, $0 \leq t \leq 1$ を行くと、

$$\begin{aligned} z^* &= p \left\{ (\alpha - \cos^2 \theta)^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right\}^{-1} \\ &= p \left\{ \alpha \{ t(1-2\alpha) + \alpha \} \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (4-23)$$

ゆえに、

$$\int z^{*m} \cdot Y(\sigma_n', 0) dA^* = p^m \alpha^{\frac{m+1}{2}} \int_0^1 \frac{\{ t(1-2\alpha) + \alpha \}^{\frac{m}{2}}}{\{ t(1-\alpha t) \}^{\frac{1}{2}}} dt$$

よって、破壊圧力の期待値は

$$\left. \begin{aligned} E[p] &= \sigma_0 \bar{A}^{-\frac{1}{m}} \Gamma(1 + \frac{1}{m}) \beta^{-\frac{1}{m}}, \\ \beta &= \alpha^{\frac{m+1}{2}} \left\{ B(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}) \right\}^{-1} \cdot \int_0^1 \frac{\{ t(1-2\alpha) + \alpha \}^{\frac{m}{2}}}{\{ t(1-\alpha t) \}^{\frac{1}{2}}} dt \end{aligned} \right\} \quad (4-24)$$

となる。

$\alpha = 1$ という特別な場合、式(4-24)の2式中の積分は

$$\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{m-1}{2}} dt = B\left(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) \quad (4-25)$$

となり、結局 $\beta^{-\frac{1}{m}} = 1$ となる。これはせん断応力を無視して得られた式(3-31)で $\alpha = 1$ とした場合と一致する。

$\alpha = \frac{1}{2}$ の場合

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\{t(1-2\alpha)+\alpha\}^{\frac{m}{2}}}{\{t(1-\alpha t)\}^{1/2}} dt &= 2^{-\frac{m}{2}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{1}{2}t\right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= 2^{-\frac{m}{2}} (-2\sqrt{2}) \arctan \sqrt{\frac{\frac{1}{2}t-1}{-\frac{1}{2}t}} \Big|_0^1 = 2^{-\frac{m+1}{2}} \cdot \pi \end{aligned} \quad (4-26)$$

よって、この場合の修正係数 $\beta^{-\frac{1}{m}}$ は

$$\beta^{-\frac{1}{m}} = 2^{1+\frac{1}{m}} \left\{ B\left(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) \right\}^{\frac{1}{m}} \cdot \pi^{-\frac{1}{m}} \quad (4-27)$$

となる。図4-8は浸透率 α をパラメータとしたときの $\beta^{-\frac{1}{m}}$ と m の関係を示したもので、実線は式(4-24)、点線は式(3-31)から計算した結果である。この図から、浸透率 α が小さいほど両式の差が大きくなるが、 α が1に近づくとき急速にその差が小さくなることとわかる。特に $\alpha \geq 0.7$ 以上になると両式はほぼ一致する。

側圧試験の応力状態は表面き裂に着目して考えれば2軸応力場の中4象限に相当するので、図4-3、図4-4の関係からわかるように式(4-24)の修正係数は同じ m, α 値に対して式(3-31)のそれよりも小さい値になるはずである。事実、同図では α が同一な

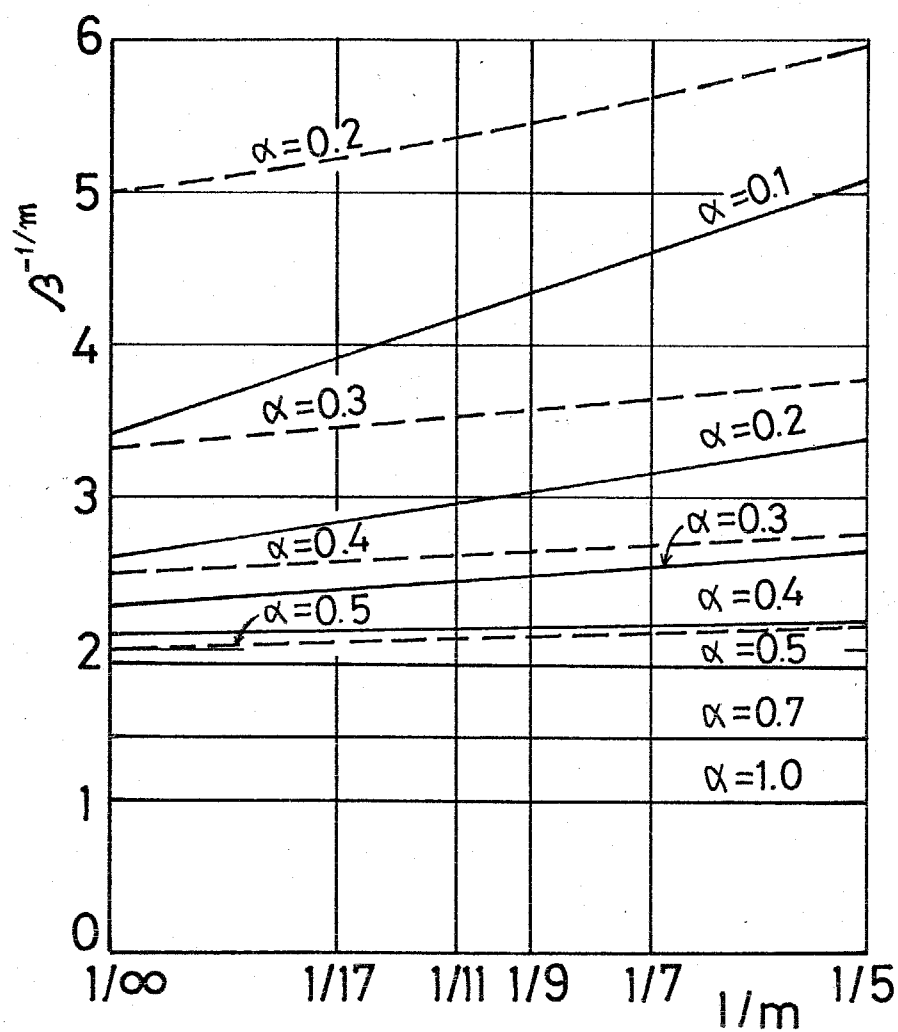


図 4-8 側圧試験における修正係数

らば、常に実線は虚線より下に出ている。

4.6 弱面を有するぜい性材料の破壊⁽²⁴⁾

弾性的には等方であるが、強度が異方性を示すようなぜい性材料は多々有り、強弱は別にして天然岩石類、セラミックス類等によく見受けられる。たとえば水成岩は層と平行方向の引張強さに比べ、層と直交方向の引張強さが著しく弱いことが知られている。これは層と層の間に欠陥を多数含んだ薄い層—弱面—を持つためである。また、地球の岩盤内の古い断層面や破砕帯、二物体の接着面などは、水成岩と同様の意味で“弱面”とみなすことができるよう。

一般に強度の異方性に対する確率・統計的解析は、弾性等方物質であっても非常に困難である。しかし、上述の“弱面を有するぜい性材料”に関しては、ある仮定の下において比較的容易に解析することができる。本節では、4.2節で導出した破壊の多軸確率分布関数を用いて、弱面を有するぜい性材料の引張り並びに圧縮破壊について解析を行ない、西田⁽²⁵⁾の模擬岩石による実験結果と比較検討する。

4.6.1 引張応力が支配的な場における破壊 はじめに次のように仮定する。

- ① 物体を形成する各層は弾性的にも強度的にも等方であって、層内には円板状の裂け目の大きさと方向に関してランダムに分布

している。

- ② 弱面は平面であつて、その面内に円板状き裂が大きさに関しランダムに分布している。弱面と垂直方向の引張強さは、これと平行方向の強さに比べて弱い。
- ③ 弱面内のき裂は弱面内に伝播する（弱面方向の破壊じん性値が小さい）。
- ④ 弱面の物理的性質は確率パラメータに含ませる。
- ⑤ 弱面は材料の弾性等方性に影響を与えない程度に薄い。

解析にあつて、簡単のために考えている物体の表面き裂の効果は無視することにする。図4-9に示すように、弱面（斜線部）と垂直方向に z 軸を、弱面と平行な面内に x 、 y 軸をとり、物体の体積と弱面の総面積をそれぞれ V_0 、 A_0 とする。 x 方向に単純引張応力を負荷したときの破壊の確率分布関数は、弱面内における円板状き裂を表面き裂と見なせば式(3-5)より次式となる。

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ -V_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} - A_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{02}} \right)^{m_2} \right\} \quad (4-28)$$

よ（または z ）方向の単純引張に対

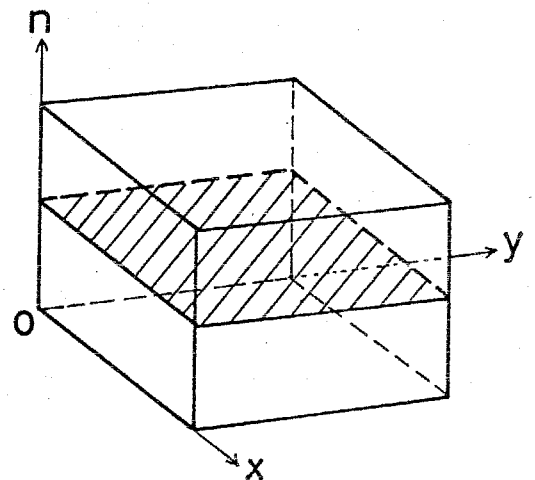


図4-9 弱面を持つ材料

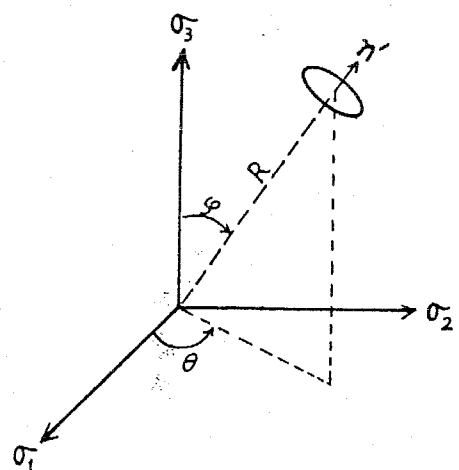


図4-10 座標系

しては、弱面の影響がなくなるので、

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ -V_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} \right\} \quad \dots (4-29)$$

任意の主応力状態 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ における破壊の確率分布関数を求める。主応力軸とき裂面の法線 n' との関係を図4-10のようにとると、層内き裂に関する確率分布関数は式(4-14)より

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= 1 - \exp \left\{ - \int_B \left(K_s \int_A z^{m_1} \cdot Y(\sigma_R, 0) dA \right) dV \right\}, \\ K_s &= (\pi \sigma_{01}^{m_1} I)^{-1}, \quad dA = \sin \varphi d\varphi d\theta, \\ I &= 2 \int_0^{\pi/2} \left\{ \cos^2 \varphi + \frac{4}{(2-L)^2} \sin^2 \varphi \right\}^{m_1/2} \cdot \cos^{m_1} \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi \end{aligned} \right\} \quad \dots (4-30)$$

ここで $Y(\cdot)$ は Heaviside の階段関数、等価垂直応力 z としては

$$z = \left\{ \sigma_R^2 + \frac{4}{(2-L)^2} \tau^2 \right\}^{1/2}, \quad \tau = (\tau_{R0}^2 + \tau_{R\varphi}^2) \quad \dots (4-31)$$

を採用する。

つぎに弱面内き裂について考える。図4-9の n 軸と図4-10の n' 軸が一致するとする。主応力軸に対する n の方向が決まればき裂の方向が決まるので、式(4-14)指数部第2項における単位円板についての積分は不要になる。よって確率分布関数は、

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= 1 - \exp \left\{ - \int_{B_L^*} K_L^* \cdot z_L^{m_2} \cdot Y(\sigma_R, 0) d\omega \right\} \\ z_L &\equiv (z)_{\varphi=\varphi_L} \end{aligned} \right\} \quad \dots (4-32)$$

となる。ここで $d\omega$ は弱面の面積要素であり、 K_L^* は比較係数で

ある。 K_L^* は $\varphi=0$, $\sigma_3=\sigma$, $\sigma_1=\sigma_2=0$ なる単純引張のとき $Z_L=\sigma$ となることより直ちに得られ、

$$K_L^* = \sigma_{02}^{-m_2} \quad \dots (4-33)$$

となる。

以上より、層間き裂と弱面内き裂の両方を同時に考慮した破壊の確率分布関数として次式を得る。

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ - \int_B (K_S \int_A Z^{m_1} \cdot Y(\sigma_R, 0) dA) dV - \int_{B^*} K_L^* Z_L^{m_2} \cdot Y(\sigma_R, 0) d\omega \right\} \quad \dots (4-34)$$

ここで Z_L は $\varphi = \varphi_L$ (固定) のときの Z の値である。

例として 1 軸引張強さの期待値を計算してみる。ただし、弱面の法線 n が $\sigma_3 (= \sigma)$ と φ_L 傾いているものとする。このとき、

$$\sigma_R = \sigma \cos^2 \varphi_L, \quad \tau_{R0} = 0, \quad \tau_{R\varphi} = -\sigma \sin \varphi_L \cdot \cos \varphi_L \quad \text{であるから}$$

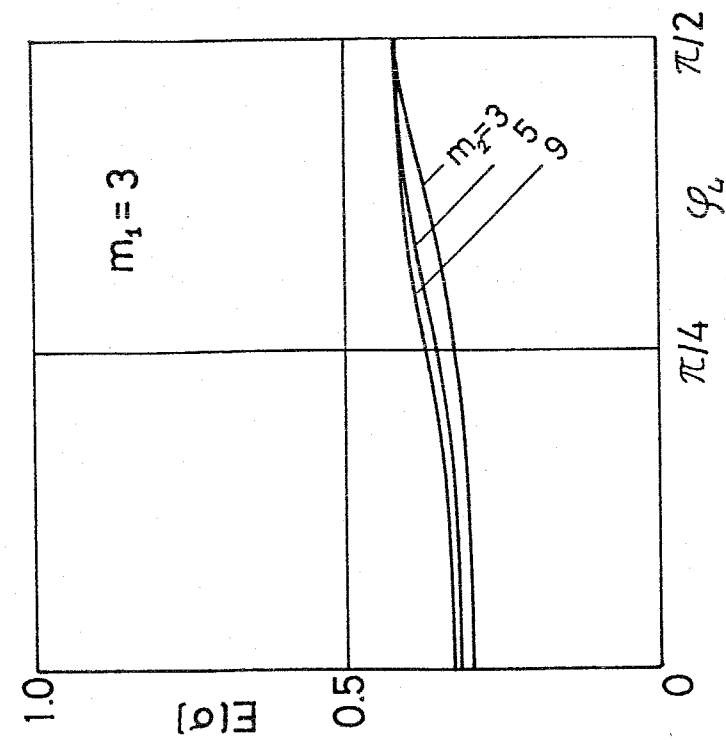
$$Z_L = \sigma \cos \varphi_L \left\{ \cos^2 \varphi_L + \frac{4}{(2-\nu)^2} \sin^2 \varphi_L \right\}^{1/2}, \quad (0 \leq \varphi_L < \frac{\pi}{2}) \quad \dots (4-35)$$

従って引張強さの期待値は式 (4-34), (4-35) より

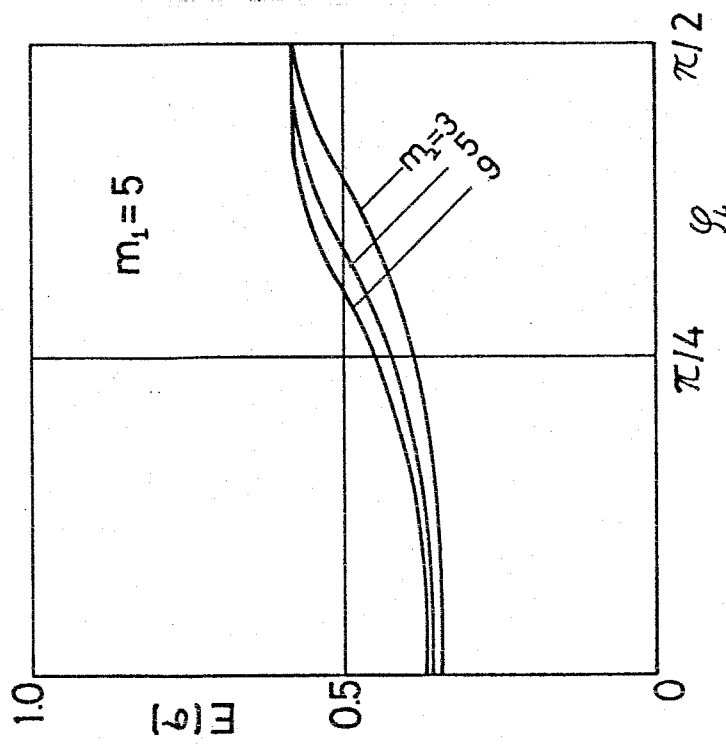
$$E[\sigma] = \int_0^\infty \exp \left\{ -V_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} - A \left(\frac{\sigma}{\sigma_{02}} \right)^{m_2} \cos^2 \varphi_L \left\{ \cos^2 \varphi_L + \frac{4}{(2-\nu)^2} \sin^2 \varphi_L \right\}^{m_2/2} \right\} d\sigma \quad \dots (4-36)$$

ここで A は $\varphi = \varphi_L$ における弱面の面積である。

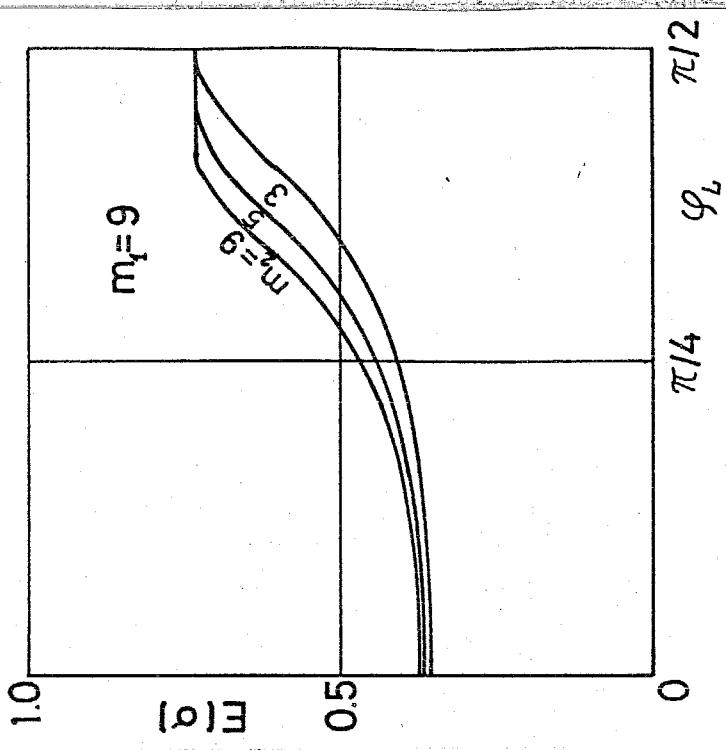
図 4-11 は高さ比 $h/d_0 = 5$ なる中実円筒試験片 ($V_0 = 10$, $A_0 = (A)_{\varphi=0} = 1$, $\nu = 0.3$) において、 $\sigma_{01} = 1$, $\sigma_{02} = 0.4$ としたときの式 (4-36) の数値計算結果であって、 m_2 をパラメータに与えてある。図から明らかなように、本計算例では、 $E[\sigma]$ に及ぼす影響は



(a)



(b)



(c)

図4-11 弱面の傾き角 φ_L と破壊応力の期待値 (1軸引張)

m_1 の方が大きく、 m_1 が大きくなると $E[\sigma]$ の q_0 依存性が大きくなる。

4.6.2 圧縮応力が支配的な場における破壊 圧縮応力が支配的な場合、すなわちき裂面に働く垂直応力が負のとき、層内き裂はいわゆる fracture hardening 現象を起こさずであり、最弱リンク説が適用できなくなる。しかし、弱面内のき裂に関しては、それが弱面内を伝播する限り、き裂の不安定伝播条件として G-クライテリアが成立し、fracture hardening が生じないことになる。すなわち、弱面内のき裂のみが物体の破壊強さを決定する場合には $\sigma_R < 0$ であっても最弱リンク説を適用することができる。

$\sigma_R < 0$ のとき、き裂面には次式で定義される有効せん断応力が作用するとする。

$$\tau_{eff} = (\tau + \mu \sigma_R) \cdot Y(\tau, |\mu \sigma_R|), \quad \mu = \mu(\sigma_R) \quad \dots (4-37)$$

ここで μ はき裂面の摩擦係数であり、一般に σ_R の関数であるとする。このとき、等価垂直応力 Z_L は式 (4-31) にて形式的に、 $\sigma_R = 0$, $\tau = \tau_{eff}$ と置いて、

$$Z_L = \frac{Z}{2-L} \tau_{eff} \quad \dots (4-38)$$

となる。比較係数は引張りのときと一致すると仮定する ($k_2^* = \sigma_2^{-m_2}$)

以上より、圧縮応力が支配的な場における、弱面を有する材料の破壊の確率分布関数として次式を得る。

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ - \int_{B^*} K_L^* \left(\frac{z}{z-L} \tau_{eff} \right)^{m_2} d\omega \right\} \quad \dots (4-39)$$

式(4-39)を用いて、1軸圧縮試験ならびに側圧下の1軸圧縮試験における破壊応力の期待値を求めよう。

(i) 1軸圧縮試験 ($0, 0, -\sigma$)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= -\sigma \cos^2 \varphi_L, \quad \tau = \sigma \sin \varphi_L \cdot \cos \varphi_L, \\ Y(\tau, |\mu \sigma_R|) &= Y(\tan \varphi_L, \mu) \end{aligned} \right\} \quad \dots (4-40)$$

であるから、

$$\tau_{eff} = \sigma \cos \varphi_L \cdot (\sin \varphi_L - \mu \cos \varphi_L) \cdot Y(\tan \varphi_L, \mu) \quad \dots (4-41)$$

ゆえに σ の期待値は

$$\left. \begin{aligned} E[\sigma] &= \sigma_{02} \cdot A^{\frac{1}{m_2}} \cdot \Gamma(1 + \frac{1}{m_2}) \cdot I, \\ I &= \left\{ \frac{z}{z-L} \cos \varphi_L (\sin \varphi_L - \mu \cos \varphi_L) \cdot Y(\tan \varphi_L, \mu) \right\}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad \dots (4-42)$$

となる。

(ii) 側圧下の1軸圧縮試験 ($-p, -p, -\sigma$)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= -(p \sin^2 \varphi_L + \sigma \cos^2 \varphi_L) \\ \tau &= |\sigma - p| \sin \varphi_L \cdot \cos \varphi_L \end{aligned} \right\} \quad \dots (4-43)$$

より、

$$\tau_{eff} = \left\{ |\sigma - p| \sin \varphi_L \cdot \cos \varphi_L - \mu (p \sin^2 \varphi_L + \sigma \cos^2 \varphi_L) \right\} \cdot Y(\tau, |\mu \sigma_R|) \quad \dots (4-44)$$

(104)

よって、側圧下の1軸圧縮試験における軸応力 σ の期待値として次式を得る。

$$E(\sigma) = \int_0^{\infty} \exp \left\{ -A \left(\frac{1}{\sigma_{02}} \frac{2}{2-\nu} \tau_{eff} \right)^{m_2} \right\} d\sigma \quad \dots (4-45)$$

4.6.3 数値計算結果と考察 4.6.2で求めた1軸圧縮試験なら

びに側圧下の1軸圧縮試験における破壊応力の期待値である式(4-42), (4-45)と、西田⁽²⁵⁾による模擬岩石に関する実験結果とを比較してみる。西田らは石こうと石灰の混合物を用いて、人工的に1つの弱面(接着面)を有する模擬岩石試験片(図4-12)を作成し、1軸圧縮試験ならびに側圧下の1軸圧縮試験を行なった。その実験結果である $\sigma \sim \phi$ 関係を、側圧 p をパラメータにとして図4-13に示す。彼等の実験において、 $\phi \geq 10$ (deg) では、すべての試験片が弱面においてすべり破壊している。

図中に破線で示した曲線は、 $p=0$ のときに実験値に合うように各定数を $\nu=0.1$, $m=3$, $\sigma_{02}=0.727$ としたときの計算値で、 $\mu=0.1$ にしている。 $p=1.5 \text{ kgf/cm}^2$ 以上では理論値が実験値より大巾に下まわっている。

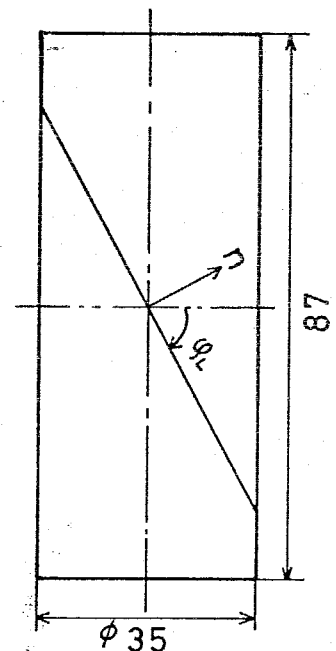


図4-12 試験片

のことは、実験の範囲内では μ 値が一定

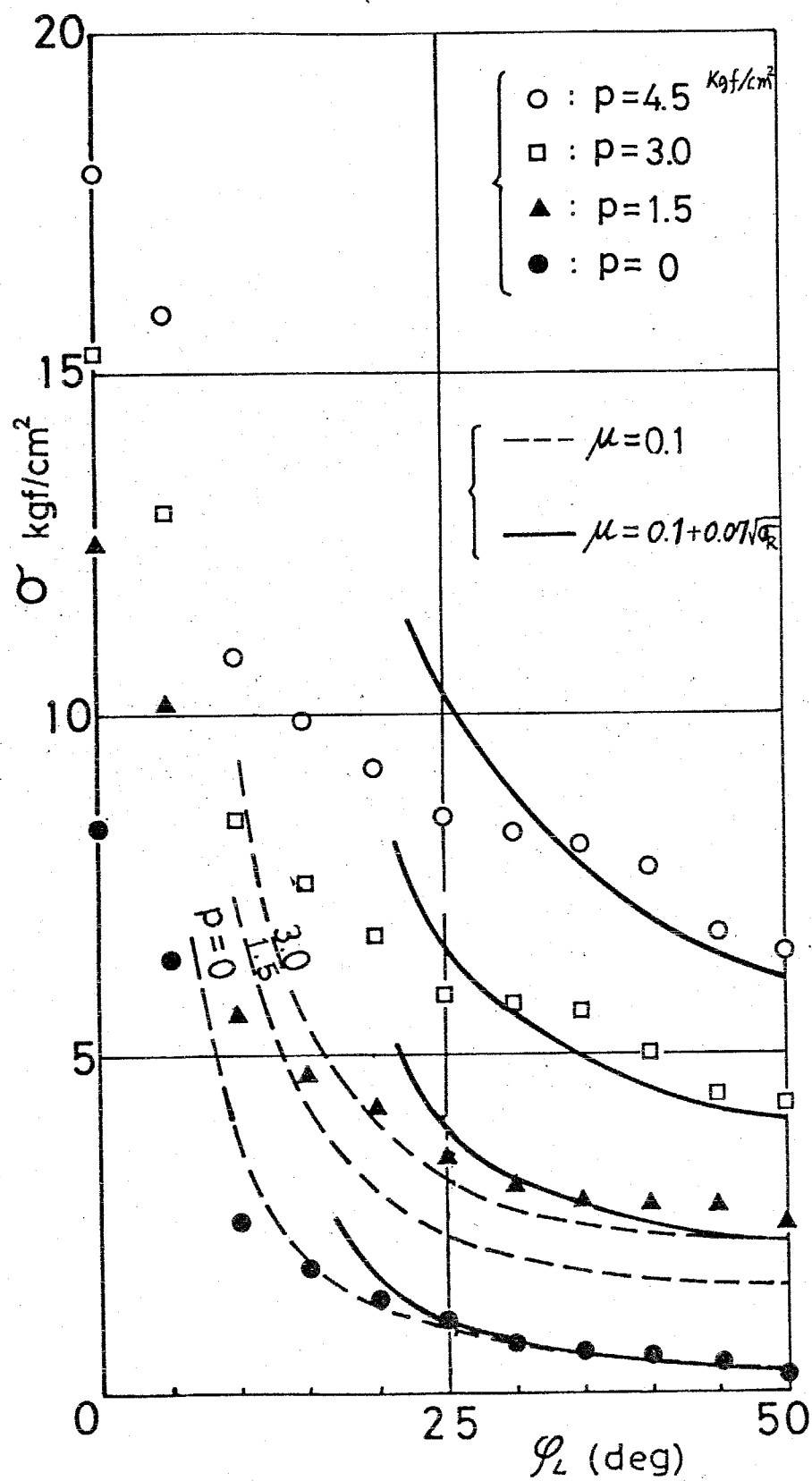


図4-13 西田らの1軸圧縮試験結果と数値計算

ではなく、 σ_R の増加関数となっていることを意味する。 μ と σ_R の関係については以前から種々の実験がなされ、さまざまな実験結果が得られている。しかし、 σ_R がある値より大きくなったとき、 μ が σ_R の増加関数であるのか、減少関数であるのかについては明らかでないようである。いま、仮に μ と σ_R の関係を

$$\mu = \mu_0 + C_0 \sqrt{\sigma_R} \quad , \quad \mu_0 = 0.1, \quad C_0 = 0.07 \quad \text{--- (4-46)}$$

と置き、その他の定数を前述の計算と同一にとって式(4-45)を計算すると図4-13に示した実線となる。 $q \geq 25$ (deg) では、計算値は実験値と比較的よく一致している。

4.7 考 察⁽²⁰⁾

4.7.1 破壊確率比について Weibull, Batdorf-Croze を除く従来

の破壊統計理論においては、多軸応力下における生存確率は主応力を独立に負荷したときの各生存確率の積で与えられると仮定している。すなわち Barnett⁽¹⁶⁾, Freudenthal⁽¹⁰⁾ によると、主応力を $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ としたときの多軸応力下の生存確率は次式で与えられる。

$$F_S(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = F_S(\sigma_1) \cdot F_S(\sigma_2) \cdot F_S(\sigma_3) \quad (4-47)$$

ここで F_S は生存確率、 $()$ は応力状態を表わす。式(4-47)は材料中におけるすべてのき裂が各主応力に垂直ないし平行であると仮定のみ成立するもので、一般の材料に適用できないことは明らかである。Batdorf⁽¹⁷⁾ は、1軸均等引張のときに Weibull の 2 パラメータの式が成立するとすると、式(4-47)より次式が成立することを示した。

$F(,)$ を破壊確率とすると、その小さな値に対し、

$$\frac{\log F_S(\sigma, \sigma)}{\log F_S(\sigma, 0)} = \frac{\log[1 - F(\sigma, \sigma)]}{\log[1 - F(\sigma, 0)]} \simeq \frac{F(\sigma, \sigma)}{F(\sigma, 0)} = 2 \quad (4-48)$$

すなわち、 m 値のいかんにかかわらず 2 軸均等引張における破壊確率は 1 軸均等引張 (単軸引張) のそれの 2 倍となる。また 2 章でも示したように、1 軸均等引張のときに Weibull の 1 軸分布関数に従う物質に対しては Weibull の多軸分布関数⁽¹⁾ と Batdorf-Croze の

多軸分布関数⁽¹⁵⁾ とは一致し、式(4-48) に対応する式として次式が成立する。

$$\frac{\log F_s(\sigma, \sigma)}{\log F_s(\sigma, 0)} = \frac{m!}{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})\cdots\frac{1}{2}} \approx 2 \cdot m^{0.45} \quad (4-49)$$

ここで式(4-48) は破壊確率比の下限であり、式(4-49) はその上限である。⁽¹⁷⁾

これに対し、4.2 節で新たに導出した破壊の多軸分布関数を用いた時に破壊確率比などのようになるか計算してみる。ただし簡単のために内部き裂のみを考慮する。式(4-14)より、2軸均等引張と1軸均等引張との破壊確率比を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{F(\sigma, \sigma)}{F(\sigma, 0)} &= I^{-1} \int_0^\pi \left\{ \sin^2 \varphi + \frac{4}{(2-\nu)^2} \cos^2 \varphi \right\}^{\frac{m}{2}} \sin^{m+1} \varphi d\varphi, \\ I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos^2 \varphi + \frac{4}{(2-\nu)^2} \sin^2 \varphi \right\}^{\frac{m}{2}} \cos^m \varphi \sin \varphi d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (4-50)$$

となる。 $\nu=0$ のとき式(4-50) は簡単になって、

$$\frac{F(\sigma, \sigma)}{F(\sigma, 0)} = \frac{1}{2} m \cdot B\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

となる。図4-14 は式(4-48), (4-49), (4-50) を計算した結果であ

って縦軸に破壊確率比、横軸に m をとってある。図中の実線で

示した直線は Barnett-Freudenthal の式を表わしたものである。

一実鎖線は式(4-49)であって、 $m=0$ のとき1となり、以後 m

が増大するとともに単調に増加している。実線で示した曲線は

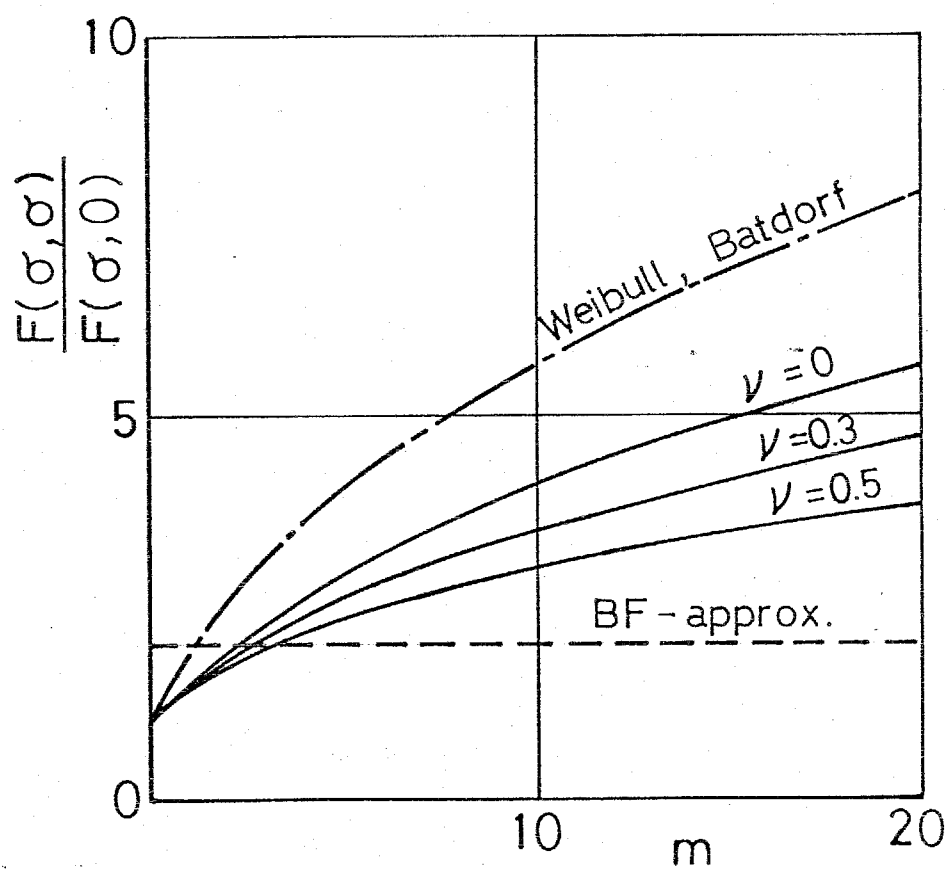


図 4-14 2軸均等引張における破壊確率比の比較

式(4-50)において $\nu=0, 0.3, 0.5$ として計算した結果であって、 $m=0$ にて式(4-49)と同じ値1をとり、以後単調増加関数となっているが、その増加率は ν が大きい程小さくなっている。いずれの場合も上限である式(4-49)より小さく、下限である式(4-48) ($m \geq 2 \sim 3$)より大きい値となっている。以上のことからみて、新たに導出した破壊の多軸分布関数・式(4-14)は妥当なものであると考えられる。

4.7.2 き裂の伝ば条件と分布関数 式(4-14)を求めるのに、混合モードのもとにおけるき裂の(不安定)伝ば条件として式(4-2), (4-10)を採用したが、その他の伝ば条件を導入することが可能である。その一例としてき裂先端の最大円周応力説を考え、式(4-14)と比較してみる。ただし内部き裂のみを考える。

r_1, θ_1 を与えらるき裂前縁からの局所極座標とする。このとき伝ばのき裂形状、荷重状態に対してき裂前縁近傍の局所円周応力 σ_θ は次式⁽¹⁸⁾で与えられる。

$$\sigma_\theta = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_1}} \left(\frac{3}{4} \cos \frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3}{2} \theta_1 \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r_1}} \left(\frac{3}{4} \sin \frac{\theta_1}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3}{2} \theta_1 \right) \quad (4-51)$$

き裂の伝ば条件として

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{K_{IC}}{\sqrt{2\pi r_1}} \quad (4-52)$$

を採用し、 $K_{IC} = Y \sqrt{\pi C}$ (Y : き裂形状に依存する係数, C : き

製の代表寸法) とする。式(4-52)の両辺に $\sqrt{2\pi}r_1 / Y\sqrt{\pi c}$ を乗いると
式(4-14) 中の等価垂直応力 Z に相当する量として

$$Z_h = \frac{1}{Y\sqrt{\pi c}} \left\{ K_I \left(\frac{3}{4} \cos \frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3}{2} \theta_1 \right) - K_{II} \left(\frac{3}{4} \sin \frac{\theta_1}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3}{2} \theta_1 \right) \right\}_{\max} \quad (4-53)$$

を得る。図4-1で示した同板状き裂に対して式(4-53)は次のよう
になる。

$$Z_h = \left\{ \sigma_R \left(\frac{3}{4} \cos \frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3}{2} \theta_1 \right) - \frac{2 \cos \psi}{2-\nu} \tau \left(\frac{3}{4} \sin \frac{\theta_1}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3}{2} \theta_1 \right) \right\}_{\max}$$

ただし式(4-14)と同様に $\sigma_R > 0$ とする。上式の右辺が最大値をと
るための必要条件の1つは $\psi = \pi$ であるから、等価垂直応力は
結局次式となる。

$$Z_h = \left\{ \sigma_R \left(\frac{3}{4} \cos \frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3}{2} \theta_1 \right) + \frac{2}{2-\nu} \tau \left(\frac{3}{4} \sin \frac{\theta_1}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3}{2} \theta_1 \right) \right\}_{\max} \quad (4-54)$$

ここで上式を満足する θ_1 は次式の根である。

$$\frac{2}{2-\nu} \tau \left(\cos \frac{\theta_1}{2} + 3 \cos \frac{3}{2} \theta_1 \right) - \sigma_R \left(\sin \frac{\theta_1}{2} + \sin \frac{3}{2} \theta_1 \right) = 0$$

すなわち、
$$\theta_1 = \cos^{-1} \left(\frac{B}{3\sqrt{A^2+B^2}} \right) - \cos^{-1} \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \right), \quad A \equiv \sigma_R, \quad B \equiv \frac{6\tau}{2-\nu} \quad (4-54)'$$

比較係数 K_h は式(4-13)と同様に、1軸均等引張のときに Weibull
の1軸分布関数と考えている多軸分布関数とが一致するとして求
められ、

$$K_h = (\pi \sigma_0^m I_h)^{-1},$$

$$I_h = \int_0^\pi \left[\left\{ \cos^2 \varphi \left(\frac{3}{4} \cos \frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3}{2} \theta_1 \right) + \frac{1}{2-\nu} |\sin 2\varphi| \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{3}{4} \sin \frac{\theta_1}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3}{2} \theta_1 \right) \right\}_{\max} \right]^m \sin \varphi d\varphi \quad (4-55)$$

となる。よって、引張応力が支配的な場における2軸応力 (σ_1, σ_2) 下の破壊の期待値は $\xi = \sigma_2 / \sigma_1$ とすると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} E[\sigma_1] &= \sigma_0 \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) Q_h^{-1/m}, \\ Q_h &= \frac{2V_0}{\pi I_h} \int_0^{\theta} \int_0^\pi S^m \sin \varphi d\varphi d\theta, \\ S &= Z_h / \sigma_1, \\ \theta &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (\text{第1象限}) \\ \sin^{-1} \left\{ (1-\xi)^{-\frac{1}{2}} \right\} & (\text{第4象限}) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4-56)$$

図4-15 に式(4-56)の計算結果を示す。第4象限における $m=1$ の曲線は $\sigma_1=1$ の直線より内側になっていて、図4-4の場合よりも改善されているが、 $m \geq 5$ では σ_2 の減少とともに $E[\sigma_1]$ はかなり急に減少している。このことから、引張応力が支配的な場における破壊曲線を求めるには式(4-52)の条件よりも式(4-10)の条件の方が、物理的意味はありまいだが、より適していると言える。

4.7.3 き裂面に働くまっさつ力 4.6節を除く前節までの計算では、き裂面

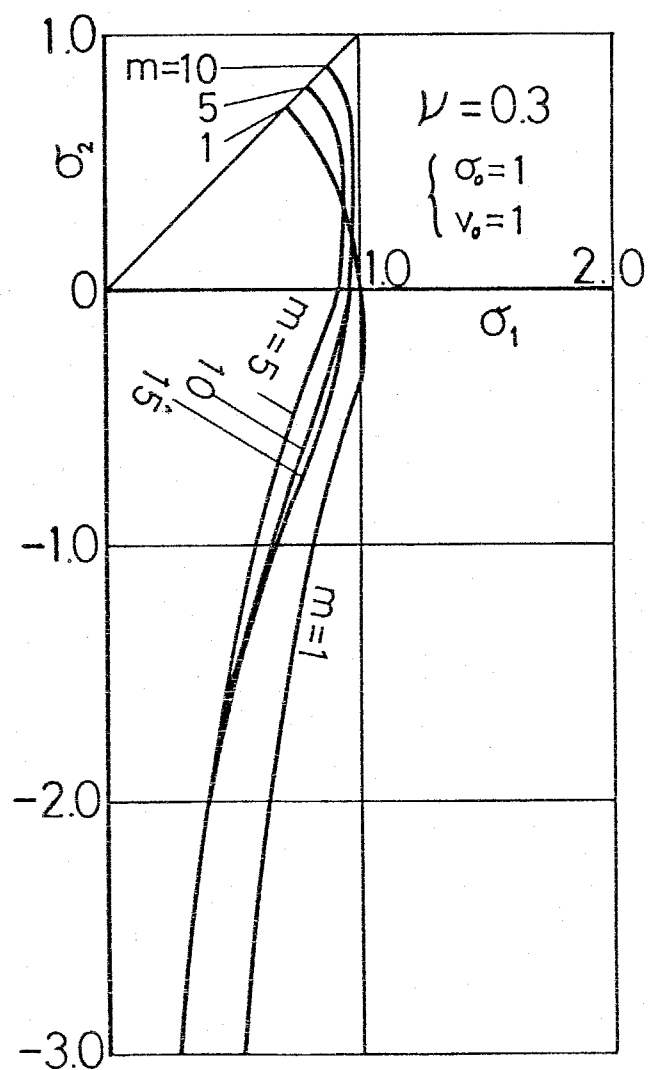


図 4-15 最大円周応力説に基づいた2軸破壊曲線

に働く垂直応力 σ_R が正である範囲で積分を行ってきた。このことは、 $\sigma_R \leq 0$ のときにはき裂が伝ばしないということと同じであり、別の表現をすると、き裂面のまさつ係数が十分に大きいと仮定したことになる。しかし、まさつ係数は空気中では一般に 1 より小さい値であると言われており、また真空中でも高々 5~6 であるという。材料中に存在するき裂の中が真空であるのみ否か、き裂面の状態がどうなっているのかは明らかでないが、いずれにしても第 4 象限で $\sigma_R < 0$ なる項を無視した影響は、引張応力が支配的でない領域で大きくなるはずである。

$\sigma_R < 0$ のとき、き裂面に働くまさつ力を考慮してみる。 μ をき裂面同士のまさつ係数とすると、 $\sigma_R < 0$ のとき

$$\tau_{eff} = (\tau + \mu \sigma_R) \cdot Y(\tau, |\mu \sigma_R|) \quad (4-57)$$

で定義される有効せん断応力 τ_{eff} がき裂面に働くと考えて⁽⁹⁾、式 (4-54) に $\sigma_R = 0$ 、 $\tau = \tau_{eff}$ を代入し、

$$\begin{aligned} z_h &= \frac{2}{2-\nu} \tau_{eff} \left(\frac{3}{4} \sin \frac{\theta_1}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3}{2} \theta_1 \right)_{\max} \\ &= \frac{2.309}{2-\nu} \tau_{eff} \end{aligned} \quad (4-58)$$

を得る。このように $\sigma_R < 0$ の場合でも形式的に等価垂直応力 z_h を計算することができるが、このとき分岐き裂は応力拡大係数の減少する方向に伝ばして、いわゆる Fracture hardening 現象⁽¹⁰⁾を起し、

最弱リンク説の基本である“き裂の不安定伝播”の仮定が崩壊する。したがって本章では $\sigma_R > 0$ の場合に限って計算を行った。なお、Fracture hardening が起る領域における破壊の確率論は現在ほとんど研究されておらず、今後に残された大きな課題の1つとなっている。

4.7 結 言

本章では垂直応力のみならずせん断応力も考慮した破壊の多軸分布関数を求め、以下のような結論を得た。

- ① 表面き裂として2次元直線き裂、内部き裂として円板状き裂を考え、引張応力が支配的な場におけるき裂の不安定伝ば条件から、垂直応力のみならずせん断応力も考慮した新しい破壊の多軸確率分布関数を導出した。
- ② 新たに導出した多軸分布関数を用いて引張応力が支配的な場における2軸応力下のぜい性破壊曲線を求めた結果、特に第4象限において多くの実験結果に近い値を得た。
- ③ 弱面を有するぜい性材料の破壊においては、圧縮応力が支配的な場合においても最弱リンク説が成立しうることを示した。
- ④ 2軸均等引張と1軸均等引張における破壊確率比は、上限である Weibull-Batdorf 理論と、下限である Barnett-Freudenthal 理論との中間の値となった。
- ⑤ 新たに導出した破壊の多軸確率分布関数は混合モードのものにおける任意のき裂進展条件を導入することによって精度を向上させることができる。

第5章 3軸均等引張を基準にした多軸確率分布関数⁽⁸⁾

5.1 緒言

ぜい性破壊に対する Weibull の多軸分布関数⁽¹⁾ および著者らによるその拡張^{(2)~(4)} において、これらの分布関数が1軸均等引張のときに Weibull の1軸分布関数に一致すると仮定して比較係数なる量を定義した。また、第4章ではこのようにして求めた比較係数がき裂モデルやき裂依り条件の相違によって異なる値となることを示した。しかし、本来 Weibull の1軸分布関数は主として最大引張応力と垂直な方向にあるき裂を対象にしたものであつて、それ以外のき裂の効果も陽には取り入れていない。したがってき裂の方向性を考慮した多軸分布関数が、1軸均等引張のときに Weibull の1軸分布関数と一致するとして比較係数を求める Weibull 流の考え方には多少無理がある。⁽⁵⁾

本章では、Weibull の1軸分布関数が3軸均等引張のときに厳密に成立するものと考え、そのとき各多軸分布関数がこれと一致するとして比較係数を求めたもので、材料中に想定したき裂が扁平でかつなめらかな前縁を持つ限り、比較係数がき裂形状やき裂依り条件によらず一定値になること、表面き裂についても同様のことが成立することを見出し、考察を行ったものである。

1で求めた比較係数と分布関数の例を示し、考察を行うことにする。

5.2.1 内部き裂のみを考慮した場合

(i) Weibullの多軸分布関数 3軸均等引張を基準にしたときの

Weibullの多軸分布関数における新しい比較係数を $K_{(3)}$ とする。

3軸均等引張状態においてき裂面に働く垂直応力は $\sigma_n = \sigma$ となるから、 V_0 を物体の体積とすると次式が成立する。

$$K_{(3)} V_0 \int_A \sigma^m dA = 2 V_0 K_{(3)} \sigma^m \pi \equiv V_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m$$

よって新しい比較係数は

$$K_{(3)} = \frac{1}{2\pi \sigma_0^m} \quad (5-3)$$

となる。ここで簡単のため $m_1 = m$, $\sigma_{01} = \sigma_0$ と置いた。比較係数が求めたので1軸, 2軸均等引張のときの分布関数を求めてみる。

1軸均等引張の場合、 $\sigma_n = \sigma \cos^2 \varphi$ であるから、

$$\begin{aligned} \int_A \sigma_n^m dA &= 2 \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma^m \cos^{2m} \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= \sigma^m \frac{2\pi}{2m+1} \end{aligned} \quad (5-4)$$

1たがって分布関数は次式となる。

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ -V_0 \frac{1}{2m+1} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right\} \quad (5-5)$$

2軸均等引張では、 $\sigma_{n1} = \sigma \sin^2 \varphi$ であるから

$$\begin{aligned} \int_A \sigma_{n1}^m dA &= 2 \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma^m \sin^{2m+1} \varphi d\varphi d\theta \\ &= \pi \cdot B(m+1, \frac{1}{2}) \cdot \sigma^m \end{aligned} \quad (5-6)$$

よって分布関数は

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ -V_0 \frac{1}{2} \cdot B(m+1, \frac{1}{2}) \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right\} \quad (5-7)$$

となる。以上で求めた分布関数・式(5-2), (5-5), (5-7) から Weibull パラメータがそれぞれどのようなようになるかを検討してみる。表5-1 はそうして求めたパラメータの一覧であって、表中の「 m 」, 「 σ_0 」(3軸均等引張基準)の値は式(5-5), (5-7)を形式的に式(5-2)と等置した場合の値である。この表で、応力状態が異なってもパラメータ「 m 」は不変であるが、「 σ_0 」は(当然のことではあるが)異なっている。これは応力状態による違いを「 σ_0 」に含ませているからである。これらの

表5-1 Weibullの多軸分布関数における形式的パラメータ

「 σ_0 」の値と、同表に示した1軸均等引張を基準にしたときの対応する「 σ_0 」の値と

パラメータ 応力状態	「 m 」	「 σ_0 」 三軸均等引張基準	「 σ_0 」 一軸均等引張基準
eq.(5) ($\sigma, 0, 0$)	m	$(2m+1)^{1/m} \sigma_0$	σ_0
eq.(7) ($\sigma, \sigma, 0$)	m	$\left\{ \frac{1}{2} B(m+1, \frac{1}{2}) \right\}^{-1/m} \sigma_0$	$\left\{ \frac{2m+1}{2} B(m+1, \frac{1}{2}) \right\}^{-1/m} \sigma_0$
eq.(2) (σ, σ, σ)	m	σ_0	$(2m+1)^{-1/m} \sigma_0$

を比較してみると前者は後者の $(2m+1)^{1/m}$ 倍になっている。また 1 軸均等引張のときの「 σ_0 」と、3 軸均等引張のときの「 σ_0 」の比は基準のとり方によらず同一で、やはり $(2m+1)^{1/m}$ となっている。図 5-1 の曲線 I は係数 $(2m+1)^{1/m}$ の値を計算したもので、 m 値が大きくなると急速に 1 に近づいており、簡単な計算から

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (2m+1)^{1/m} = 1 \quad (5-8)$$

であることがわかる。2 軸均等引張と 3 軸均等引張のときの「 σ_0 」の比は $\left\{ \frac{1}{2} B(m+1, \frac{1}{2}) \right\}^{1/m}$ であって、図 5-1 の曲線 II で示すように曲線 I より低い値になっている。ここで係数 $\left\{ \frac{1}{2} B(m+1, \frac{1}{2}) \right\}^{-1/m}$ の $m \rightarrow \infty$ の極限を求めてみる。

$$\left\{ \frac{1}{2} B(m+1, \frac{1}{2}) \right\}^{-1/m} = \left\{ \frac{m \sqrt{\pi}}{2m+1} \cdot \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+\frac{1}{2})} \right\}^{-1/m} = t \quad (5-9)$$

と置く。両辺の対数をとると、

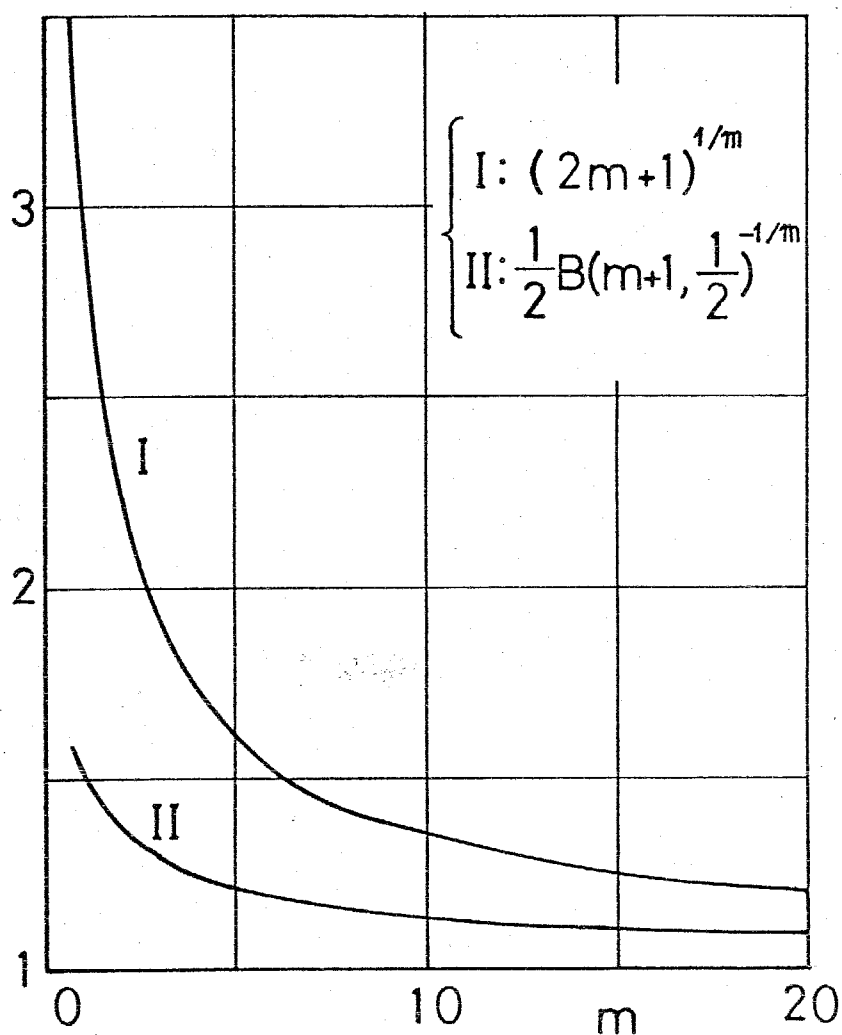
$$-\frac{1}{m} \left\{ \log \sqrt{\pi} + \log m - \log(2m+1) + \log \Gamma(m) - \log \Gamma(m+\frac{1}{2}) \right\} = \log t \quad (5-10)$$

m の非常に大きな値に対して

$$\log \Gamma(m) \simeq (m-\frac{1}{2}) \log m - m + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{\ell=2}^{\infty} \left[\frac{\ell-1}{\ell(\ell+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)\ell} \right],$$

$$\log \Gamma(m+\frac{1}{2}) \simeq m \log(m+\frac{1}{2}) - m - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{\ell=2}^{\infty} \left[\frac{\ell-1}{\ell(\ell+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n+\frac{1}{2})\ell} \right]$$

となるから、これらの式を式 (5-10) に代入して極限をとると、



⑤ 5-1 Weibullの多軸分布関数における形式的パラメータ
 σ_0 の比と m の関係 (内部き裂)

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} \log t &= -\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left\{ \log m + \log \sqrt{\pi} - \log(2m+1) + (m - \frac{1}{2}) \log m \right. \\
&\quad \left. - m \log(m + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} + O(m^{-2}) \right\} \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \log \frac{m + \frac{1}{2}}{m} \\
&= \log 1
\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} B(m+1, \frac{1}{2}) \right\}^{-1/m} = 1 \quad (5-11)$$

となり、式(5-8)と同一の極限值を持つことがわかる。

(ii) き裂を陽に考慮した多軸分布関数 き裂を陽に考慮した多軸分布関数・式(4-14)において、3軸均等引張を基準にした比較係数 $K_{s(3)}$ を求めてみる。3軸均等引張(ののの)のとき、等価垂直応力の定義式

$$Z = \left\{ \sigma_R^2 + \frac{4}{(2-\nu)^2} \tau^2 \right\}^{1/2}, \quad \tau = \sqrt{\tau_{R0}^2 + \tau_{R\varphi}^2} \quad (5-12)$$

に $\sigma_R = \sigma$, $\tau_{R0} = \tau_{R\varphi} = 0$ を代入すると $Z = \sigma$ となるから、式(5-3)とまったく同一の計算により同一の結果である次式を得る。

$$K_{s(3)} = \frac{1}{2\pi\sigma_0^m} \quad (5-13)$$

式(4-13)の K_s と比べると、上式は極めて簡単な式となっている。

比較係数が求まったので、まず1軸均等引張(の0,0)のときの分布関数を求める。このとき、 $\sigma_R = \sigma \cos^2 \varphi$, $\tau_{R0} = 0$, $\tau_{R\varphi} = -\sigma \sin \varphi \cos \varphi$ であるから、

$$Z = \sigma |\cos \varphi| \left\{ \cos^2 \varphi + \frac{4}{(2-\nu)^2} \sin^2 \varphi \right\}^{1/2}$$

ゆえに分布関数は

$$\left. \begin{aligned} F(\sigma) &= 1 - \exp \left\{ -V_0 I_1 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right\}, \\ I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos^2 \varphi + \frac{4}{(2-\nu)^2} \sin^2 \varphi \right\}^{\frac{m}{2}} \cos^m \varphi \sin \varphi d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (5-14)$$

同様に 1-2 軸均等引張の場合, $\sigma_R = \sigma \sin^2 \varphi$, $\tau_{R\theta} = 0$, $\tau_{\theta\varphi} = \sigma \sin \varphi \times \cos \varphi$ であるから

$$Z = \sigma |\sin \varphi| \left\{ \sin^2 \varphi + \frac{4}{(2-\nu)^2} \cos^2 \varphi \right\}^{1/2},$$

よって分布関数は

$$\left. \begin{aligned} F(\sigma) &= 1 - \exp \left\{ -V_0 I_2 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right\}, \\ I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin^2 \varphi + \frac{4}{(2-\nu)^2} \cos^2 \varphi \right\}^{\frac{m}{2}} \sin^{m+1} \varphi d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (5-15)$$

となる。表 5-1 と同様に 1-2 式 (5-2), (5-14), (5-15) から形式的に求めたパラメータ $\Gamma_m, \Gamma_{\sigma_0}$ を表 5-2 に示す (3 軸均等引張基準)。同表には比較のために 1 軸均等引張基準のときの $\Gamma_m, \Gamma_{\sigma_0}$ も示してあり、表 5-1 と同様、パラ

メータ Γ_m は不変である

が Γ_{σ_0} が異なっている。

また 3 軸均等引張基準と

1 軸均等引張基準での Γ_{σ_0}

表 5-2 き裂を陽に考慮した多軸分布関数における
形式的パラメータ (内部き裂)

パラメータ 応力状態	Γ_m	Γ_{σ_0} 三軸均等引張基準	Γ_{σ_0} 一軸均等引張基準
eq.(14) ($\sigma, 0, 0$)	m	$I_1^{-1/m} \cdot \sigma_0$	σ_0
eq.(15) ($\sigma, \sigma, 0$)	m	$I_2^{-1/m} \cdot \sigma_0$	$(I_1 / I_2)^{1/m} \cdot \sigma_0$
eq.(2) (σ, σ, σ)	m	σ_0	$I_1^{1/m} \cdot \sigma_0$

の比は $I_1^{-1/m}$ になっている。図5-2の曲線Ⅰはポアソン比 $\nu=0.3$ としたときの係数 $I_1^{-1/m}$ であって、図5-1の係数 $(2m+1)^{1/m}$ に比べると m の小さいところでは同一の m 値に対する値が小さくなっているが、 m が大きくなると両者は漸近し $m \rightarrow \infty$ で共に1に収束する。曲線Ⅱは $\nu=0.3$ としたときの係数 $I_2^{-1/m}$ の計算結果で、 $I_1^{-1/m}$ より小さい値になっているが、 $m \rightarrow \infty$ のときは同じ値1に収束する。この結果と前節の結果をまとめると次のことが結論できる。すなわち m が非常に大きくなると、応力状態、基準のとり方、き裂を陽に考えるか否かにかかわらず、すべての分布関数は同一の式に漸近する。

第4章でも述べたように、混合モードのもとにおけるき裂の(不安定)伝播条件として仕様の条件を導入することにより分布関数の精度を高めることができる。その一例としてき裂先端近傍の最大円周応力説を用いたとき、等価垂直応力 Z_h は

$$Z_h = \frac{1}{Y\sqrt{\pi c}} \left\{ K_I \left(\frac{3}{4} \cos \frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3}{2} \theta_1 \right) - K_{II} \left(\frac{3}{4} \sin \frac{\theta_1}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3}{2} \theta_1 \right) \right\}_{\max} \quad (5-16)$$

であり、比較係数は1軸均等引張を基準にした場合、式(4-26)で示されるように非常に複雑な式となった。

ここで、3軸均等引張を基準としたとき、式(5-16)に対応する比較係数がどうなるかを考えてみる。3軸均等引張(σ, σ, σ)のとき、 $K_I = Y\sigma\sqrt{\pi c}$ 、 $K_{II} = 0$ となり、式(5-16)より $Z = \sigma$ を得る。よつ

てこの場合の比較係数も式(5-3), (5-13) とまったく同一の式となる。

このようにき裂モデルとき裂伝ば条件が異なっても3軸均等引張を基準にした場合の比較係数は同一の、しかも非常に簡単な式で表わされることがわかった。

5.2.2 表面き裂のみを考慮した場合 表面き裂に関する比較係数について考える。き裂面が材料表面に対して垂直方向にあると考えると、比較係数を求めるには2軸均等引張(σ, σ)を基準にとればよいことになる。したがって $K_{(2)}^*$ を新しい比較係数とすると

$$K_{(2)}^* \int_0^\pi \sigma^m d\psi = \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m \quad (5-17)$$

よって、

$$K_{(2)}^* = \frac{1}{\pi \sigma_0^m} \quad (5-18)$$

式(5-18)は式(5-3), (5-13) の2倍になっており、き裂を陽に考慮するかどうかにかかわらず成立する。

1軸均等引張($\sigma, 0$)のときの分布関数は、き裂を陽に考慮しないとき、 $\sigma_\psi = \sigma \cos^2 \psi$ であるから A_0 を表面積とすると

$$\begin{aligned} F^*(\sigma) &= 1 - \exp \left\{ -A_0 K_{(2)}^* \int_{A^*} \sigma^m \cos^{2m} \psi d\psi \right\} \\ &= 1 - \exp \left\{ -A_0 \frac{1}{\pi} B\left(m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m \right\} \end{aligned} \quad (5-19)$$

となる。

表面き裂として2次元直線き裂を考えた場合、G-クライテリオンに対応する等価直応力は

表5-3 表面き裂に因する多軸分布関数の形式的パラメータ

パラメータ 応力状態	m	σ_0
eq.(2) (σ, σ)	m	σ_0
eq.(20) ($\sigma, 0$)	m	$\left\{ \frac{1}{\pi} B\left(m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}^{-1/m} \cdot \sigma_0$
eq.(23) ($\sigma, 0$)	m	$\left\{ \frac{1}{\pi} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}^{-1/m} \cdot \sigma_0$

$$\Sigma^* = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2} \quad (5-20)$$

で与えられた。1軸均等引張の場合、 $\sigma_n = \sigma \cos^2 \psi$, $\tau_n = -\sigma \sin \psi \cos \psi$ であるから式(5-20)は

$$\Sigma^* = \sigma |\cos \psi| \quad (5-21)$$

となり、2軸均等引張を基準にしたときの1軸均等引張における分布関数として次式を得る。

$$\begin{aligned} F(\sigma) &= 1 - \exp \left\{ -A_0 K_{(2)}^* \int_{A^*} \Sigma^{*m} dA^* \right\} \\ &= 1 - \exp \left\{ -A_0 \frac{1}{\pi} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m \right\} \end{aligned} \quad (5-22)$$

式(5-2), (5-19), (5-22)において形式的パラメータ m , σ_0 を求めた結果を表5-3に示す。図5-3は同表における係数

$$\left\{ \frac{1}{\pi} B\left(m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}^{-1/m} \quad \text{と} \quad \left\{ \frac{1}{\pi} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}^{-1/m}$$

を示したものである。図5-1, 5-2 に比べるとその差が小さくなっており、 $m \rightarrow \infty$ の極限值はやはり共に1となっている(式(5-11)と同様なので証明は略す)。

5. 2節の結果をまとめると結局次のようになる。

2, 3軸均等引張を基準にしたときの、表面き裂と内部き裂を同時に考慮した多軸分布関数は式(3-8), (4-14)と比べると著しく簡単となり、つぎのようになる。

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ - \left(\int_B \int_A \left(\frac{z}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} Y(\sigma_R, 0) d\Omega dV - \int_{B^*} \int_{A^*} \left(\frac{z^*}{\sigma_{02}} \right)^{m_2} Y(\sigma_n, 0) d\Omega^* d\omega \right) \right\}$$

$$d\Omega = dA/2\pi, \quad d\Omega^* = dA^*/\pi, \quad dA = \sin\varphi d\varphi d\theta, \quad dA^* = d\psi.$$

$$z = \begin{cases} \sigma_R & (\text{Weibull型}) \\ \left\{ \sigma_R^2 + \frac{4}{(2-\nu)^2} \tau^2 \right\}^{1/2} & (\text{き裂を陽に考慮した場合}) \end{cases}$$

$$z^* = \begin{cases} \sigma_n & (\text{Weibull型}) \\ \sqrt{\sigma_n'^2 + \tau_n'^2} & (\text{き裂を陽に考慮した場合}) \end{cases}$$

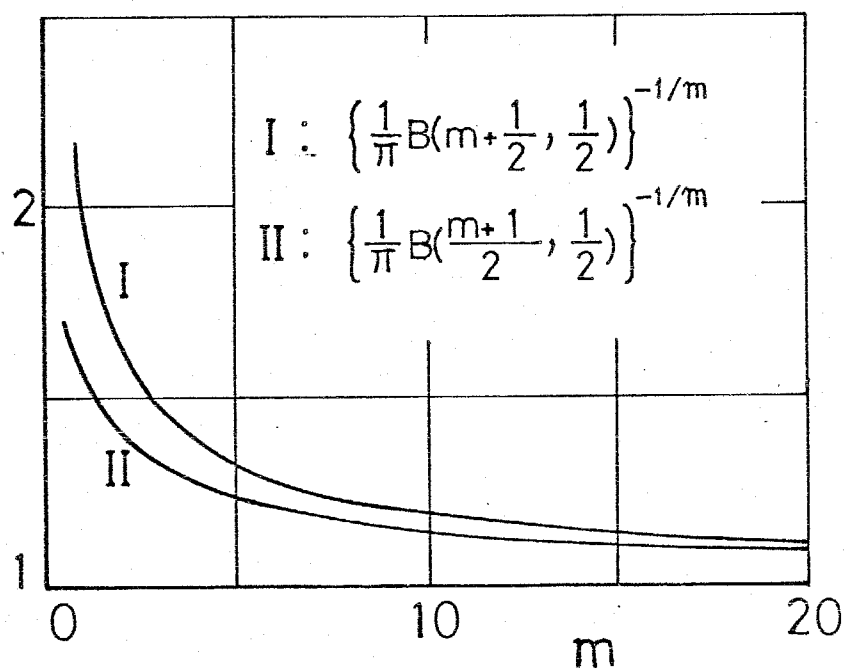


図 5-3 表面き裂に関する多軸分布関数における形式的
 パラメータ「 σ_0 」の比と m の関係

5.3 パラメータの推定

前節では3軸均等引張を基準にして比較係数を求め分布関数を計算したが、パラメータ m, σ_0 を求めるために極めて困難と思われる3軸均等引張試験を行う必要はない。その代わりに、1軸均等引張における分布関数である式(5-5), (5-14)等を用いて1軸均等引張試験データから最尤法によってこれらのパラメータを推定すればよい。ここでは内部き裂のみを考慮した場合についてパラメータの推定を行い、破壊応力の期待値についても若干の考察を行う。

3.3節で既に述べたように $F(\sigma)$ を分布関数、 n を標本数、 σ_i を実験値とすると尤度関数 L は次式で与えられる。

$$L = \log \prod_{i=1}^n \left[\frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma} \right]_{\sigma=\sigma_i} \quad (5-24)$$

$F(\sigma)$ の一例として式(5-5)を用いると、

$$L = \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{V_{0i}}{\sigma_0^m} \right) + n \log \frac{m}{2m+1} + (m-1) \sum_{i=1}^n \log \sigma_i - \frac{1}{2m+1} \sum_{i=1}^n \left\{ V_{0i} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right)^m \right\} \quad (5-25)$$

となる。パラメータ m, σ_0 の最尤推定量 $\hat{m}, \hat{\sigma}_0$ は式(5-25)の L を最大にするとき、次の連立方程式の根となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{n}{m} + (2m+1) \sum_{i=1}^n \log \frac{\sigma_i}{\sigma_0} + \frac{2}{2m+1} \sum_{i=1}^n \left\{ V_{0i} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right)^m \right\} \\ - \sum_{i=1}^n \left\{ V_{0i} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right)^m \log \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-26)$$

$$n\sigma_0^m - \frac{1}{2m+1} \sum_{i=1}^n U_{0i} \sigma_i^m = 0$$

連立方程式(5-26)を直接解くのは困難であるので3.3節と同様に漸近解法により $\hat{m}$, $\hat{\sigma}_0$ を求めた。

表5-4 は表3-1 に示した1軸均等引張試験結果から各分布関数について求めたパラメータの推定値である。

分布関数 \ パラメータ	$\hat{m}$	$\hat{\sigma}_0$
eq.(2)	9.2	2.81
eq.(5)	9.2	2.03
eq.(14)	9.2	2.21

これらのパラメータの値を用いて各分布関数を計算したところ、いずれ

も図3-11の実線と一致した。このことから、表5-4のパラメータの値は最尤推定量であると言える。同表より $\hat{m}$ の値は分布関数の相違によらず一定値 9.2 となっていることがわかる。ところで1軸均等引張と3軸均等引張とを基準にしたときの形式的パラメータは、表5-1, 5-2に示したようにパラメータ「 m 」はいずれの場合にも m となるのに対し、「 σ_0 」は基準のとり方によってそれぞれ係数 $(2m+1)^{1/m}$, $I_1^{-1/m}$ 倍だけ異なっている。そこで、式(5-5), (5-14)から最尤法によって求めた $\hat{\sigma}_0$ の値 2.03 と 2.21 に、対応する係数 $(2m+1)^{1/m}$, $I_1^{-1/m}$ ($m=9.2$) を乗じたところ、それぞれ 2.80, 2.78 となり、式(5-2)から求めた $\hat{\sigma}_0$ の値 2.81 にほぼ一致した。このことは非常に重要な結果であって、1軸均等引張と3軸均等引張のどちらを基準にとっても、同一のデータを用いる限り、形式的パラメータ「 σ_0 」の数値そのものに有意差がないことを意味している。

5.4 破壊応力の期待値

3軸均等引張を基準に1たときの1軸, 2軸, 3軸均等引張における破壊応力の期待値を $\sigma_0 = 1$ として求めてみる。

Weibull型多軸分布関数の場合, 式(5-5), (5-7), (5-2)より破壊応力の期待値 $E[\sigma]_i$ (i : i 軸均等引張) はそれぞれ以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} E[\sigma]_1 &= \sigma_0 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) (2m+1)^{1/m} \\ E[\sigma]_2 &= \sigma_0 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \left\{ \frac{1}{2} B\left(m+1, \frac{1}{2}\right) \right\}^{-1/m} \\ E[\sigma]_3 &= \sigma_0 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \end{aligned} \right\} \quad (5-27)$$

よって,

$$\frac{E[\sigma]_2}{E[\sigma]_1} = \left\{ (m + \frac{1}{2}) \cdot B\left(m+1, \frac{1}{2}\right) \right\}^{-1/m} \quad (5-28)$$

$$\frac{E[\sigma]_3}{E[\sigma]_1} = (2m+1)^{-1/m} \quad (5-29)$$

各型を別に考慮した場合は式(5-14), (5-15)より

$$E[\sigma]_1 = \sigma_0 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) I_1^{-1/m} \quad (5-30)$$

$$E[\sigma]_2 = \sigma_0 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) I_2^{-1/m} \quad (5-31)$$

$E[\sigma]_3$ は式(5-27)が3式と一致する。よって,

$$\frac{E[\sigma]_2}{E[\sigma]_1} = \left(\frac{I_1}{I_2} \right)^{1/m} \quad (5-32)$$

$$\frac{E[\sigma]_3}{E[\sigma]_1} = I_1^{1/m} \quad (5-33)$$

ただし I_1, I_2 はそれぞれ式(5-14), (5-15)中で与えられた量で

ある。前章までの議論からただちにわかるように、1軸均等引張を基準にしたときの $E[\sigma]_i / E[\sigma]_j$ は式(5-28), (5-29), (5-32), (5-33)とまったく一致し、 m (ないしは ν) のみの関数となる。

図5-4に式(5-28), (5-29) (以上実線), 式(5-32), (5-33) (以上実線, $\nu=0.3$) と m との関係を示す。同じ m 値に対して、き裂を陽に考慮した場合の σ が考慮しない場合に比べて比 $E[\sigma]_i / E[\sigma]_j$ の値が大きくなっている。

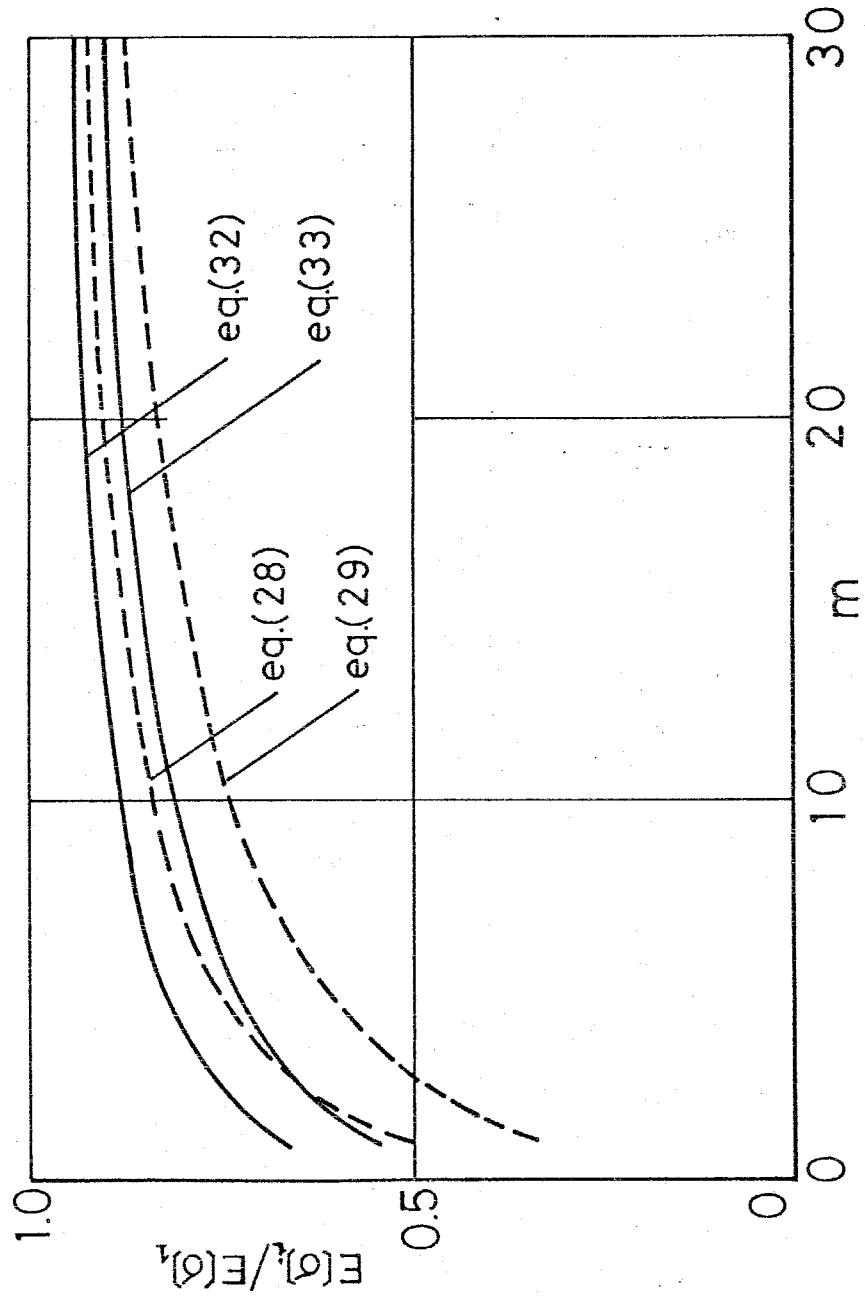


図 5-4 均等引張応力下における破壊応力の期待値の比と m の関係

5.5 考 察

最尤法によって得た 5.3 節の結論は、1 軸均等引張と 3 軸均等引張のいずれを基準にとっても形式的パラメータ「 m 」,「 σ_0 」の値そのものにほとんど変りがないということであつた。したがって破壊応力の期待値にもその影響が少ないことになる。換言すれば、多軸分布関数の比較係数を求めるとき物理的には 3 軸均等引張を基準にすべきであるが、実用上は 1 軸均等引張を基準にしておさしつかえないということである。

Oh S^{(6), (7)} は材料内にランダムに分布する楕円き裂を考え、き裂先端近傍の局所的な円周応力が理論強度に達したときに破壊が起るとして 3-パラメータの分布関数の計算を行つた結果、パラメータ m , σ_0 が応力状態によつて異なつた値をとるという結論を出している。しかし彼等の理論においては極値論的考察を行つて得た分布関数が、2 軸均等引張のとき Weibull の 3-パラメータ・1 軸分布関数に一致することを基本にしており、このときのパラメータを用いて任意の 2 軸応力状態における強度分布を計算することができるとしている。したがって上記論文中のパラメータ m , σ_0 は、(2-パラメータではあるが) 本章で定義した形式的パラメータ「 m 」,「 σ_0 」に相当するわけで、 m はともかくとして σ_0 が応力状態によつて大きく変動するのは当然のことと言える。また m , σ_0 を最小自乗法ならびに図式解法により決定しているがその精度には疑問があ

り、その数値からみて m 値が応力状態によって異なるとする結論にも疑問がある。さらに、Ohira の理論では、2 軸応力下におけるせい性破壊曲線が第 1 象限でカギ型の折れ線になっていて、ほとんどすべての実験結果と相違する。これに対して本章ではより一般的と思われる 3 軸均等引張を基準にして多軸分布関数を導いており、第 4 章でも述べたようにき裂を陽に考慮した多軸分布関数を用いた場合、引張応力が支配的な場における 2 軸破壊曲線は第 1 象限ならびに第 4 象限において多くの実験事実と合致している。

以上のことから、本章で示した 3 軸均等引張を基準にした破壊の多軸分布関数は、引張応力が支配的な場における実験結果をよりよく説明できる式であると考えられる。

5.6 結 言

本章では、せい性破壊の多軸分布関数における比較係数について考察し、以下のような結論を得た。

- ① 内部き裂のみを考慮した場合、3軸均等引張を基準にした比較係数はき裂を陽に考慮するか否か、またき裂の依り条件の相違によらず同一の式 $(2\pi\sigma_0^m)^{-1}$ となった。
- ② 表面き裂のみを考慮した場合、2軸均等引張を基準にした比較係数はき裂を陽に考慮するか否かにかかわらず同一の式 $(\pi\sigma_0^m)^{-1}$ となった。
- ③ 基準のとり方のいかんにかかわらずパラメータ m の値は不変であるがパラメータ σ_0 の値は異なる。しかし、形式的パラメータ「 σ_0 」の数値そのものは基準のとり方によらずほぼ一定値となる。

第6章 位置母数を持つ破壊の多軸確率分布関数の導出とその応用

6.1 緒言

前章までに述べたように、Weibull¹⁾, Batdorf²⁾, 著者らは、いわゆる位置母数 (location parameter) を持たない破壊の多軸確率分布関数について種々の研究を行ってきたが、信頼性解析を行うにあたって特に重要な、位置母数を持つ多軸確率分布関数の研究はまだなされていない。Vardar-Finnie³⁾ は、Weibull の多軸確率分布関数を位置母数を持つ場合に (直観的に) 拡張したとき、これと1軸分布関数とを接続することは不可能に近いと述べている。しかしこの困難は、第5章で述べたように⁵⁾、"Weibull の1軸分布関数は1軸均等引張のときではなく、3軸均等引張のときに厳密に成立する" と考えれば容易に解消できる。

本章では上述の考えをもとにして、位置母数を持つ破壊の多軸確率分布関数を導出し、1・2軸均等引張における確率分布関数を求め、破壊確率比等について考察を行う。

6.2 位置母数を持つ破壊の多軸確率分布関数の導出

はじめに、最弱リンク説に基づく Batdorf^{2), 10)} の解析法を用いて、位置母数 v_{ui} ($i=1, 2$) を持つ破壊の多軸確率分布関数が、引数 $\Sigma - v_{ui}$ を持つことを証明する。ここに Σ は第4章で提唱した等

等価直応力である。

解析にあたって、以下の仮定を行う。

- ① 考えている材料は巨視的には等方的な連続体であるが、位置ならびに方向に関して一様に分布した微細き裂を多数含む完全ぜい性材料である。
- ② 物体の巨視的応力はき裂の存在によって影響されず、き裂の相互作用もない。
- ③ 内部き裂としては円板状き裂を、表面き裂としては二次元直線き裂を想定する。
- ④ 物体全体の強度は最も危険なき裂を含む体積要素の強度により決定される。そのき裂は、等価直応力が、そのき裂を特徴づけるある限界応力 σ_{cr} を越えたとき不安定に伝播し、全体の破断に至る。

いま、物体内の任意の点に位置した、任意方向の内部き裂（円板状き裂）を考える。このき裂のき裂面に作用すると考える等価直応力 Σ が、不等式

$$\Sigma > \sigma_{cr} > \sigma_{ul} \quad \dots (6-1)$$

を満足するような、き裂の法線の集合を見込む立体角（半球）を Ω とする。ここで σ_{ul} は σ_{cr} の下限値であり、後にわかるように位置母数となっている。このき裂が σ なる巨視的応力状態の下で破壊する確率は

$$F_f = \Omega(\sigma, \sigma_{cr}, \sigma_{ul}) / 2\pi \quad \dots (6-2)$$

である。 ΔV を微小体積要素の体積とすると、この体積要素が破壊する確率は、

$$F_f = N \cdot \Delta V \cdot \Omega(\sigma, \sigma_{cr}, \sigma_{u1}) / 2\pi \quad \dots (6-3)$$

ここで $N = N(\sigma_{cr}, \sigma_{u1})$ であって、 σ_{u1} 以上かつ σ_{cr} 以下の限界応力を持つき裂の密度関数である。限界応力が $\sigma_{cr} (> \sigma_{u1})$ と $\sigma_{cr} + d\sigma_{cr}$ の間にある ΔV 中のき裂の数 dN_0 は

$$dN_0 = \Delta V \cdot \frac{dN(\sigma_{cr}, \sigma_{u1})}{d\sigma_{cr}} d\sigma_{cr} \quad \dots (6-4)$$

で与えられるので、限界応力が σ_{cr} と $\sigma_{cr} + d\sigma_{cr}$ の間にある ΔV 中の1本のき裂が破壊する確率は、

$$F_f(\Delta V, d\sigma_{cr}, \sigma_{u1}) = \Delta V \frac{dN(\sigma_{cr}, \sigma_{u1})}{d\sigma_{cr}} d\sigma_{cr} \frac{\Omega}{2\pi} \quad \dots (6-5)$$

となる。 ΔV が非常に小さく、破壊確率が極めて低いならば、任意の応力状態 σ における ΔV の破壊確率は式(6-5)を σ_{cr} について積分することにより次式のように求められる。

$$F_f(\Delta V, \sigma, \sigma_{u1}) = \Delta V \cdot \int_{\sigma_{u1}}^{\infty} \frac{\Omega}{2\pi} \frac{dN(\sigma_{cr}, \sigma_{u1})}{d\sigma_{cr}} d\sigma_{cr} \quad \dots (6-6)$$

よって生存確率 F_s は

$$F_s(\Delta V, \sigma, \sigma_{u1}) = 1 - F_f(\Delta V, \sigma, \sigma_{u1}) \quad \dots (6-7)$$

注目している物体の全体積を微小部分に分割し、 i 番目の要素の破壊確率を $(\Delta F_f)_i$ とすると、この要素が破壊しない確率は $(F_s)_i = 1 - (\Delta F_f)_i$ であるから、物体全体の生存確率は、破壊確率が極めて低ければ

$$F_s = \prod_i (F_s)_i = \prod_i \{1 - (\Delta F_f)_i\} \simeq \prod_i \exp\{- (\Delta F_f)_i\} = \exp\left\{- \sum_i (\Delta F_f)_i\right\} \quad \dots (6-8)$$

(142)
 で与えられる。 $(\Delta F)_i \equiv F_i(\Delta V, \theta, \sigma_{ui})$ として式(6-6)を上式に代入し、総和記号を積分記号に置き換えることにより、 F_s として次式を得る。

$$F_s = \exp \left\{ - \int dV \int_{\sigma_{ui}}^{\infty} \frac{\Omega}{2\pi} \frac{dN(\sigma_{cr}, \sigma_{ui})}{d\sigma_{cr}} d\sigma_{cr} \right\} \quad \dots (6-9)$$

ここで $Y(\cdot)$ を Heaviside の階段関数とし、座標を図6-1のようにとると、 Ω は

$$\Omega = \int_0^\pi \int_0^\pi \sin \varphi \cdot Y(z, \sigma_{cr}) \cdot Y(\sigma_{cr}, \sigma_{ui}) d\varphi d\theta \quad \dots (6-10)$$

で与えられる。⁶⁾ いま、積分

$$\int_{\sigma_{ui}}^{\infty} Y(z, \sigma_{cr}) \frac{dN(\sigma_{cr}, \sigma_{ui})}{d\sigma_{cr}} d\sigma_{cr} \quad \dots (6-11)$$

を考える。変数変換 $t = \sigma_{cr} - \sigma_{ui}$, $0 \leq t < \infty$ を行くと式(6-11)は

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Y(z, t + \sigma_{ui}) \frac{dN}{dt} dt &= \int_0^\infty Y(z - \sigma_{ui}, t) \frac{dN}{dt} dt \\ &= N(z - \sigma_{ui}) \end{aligned} \quad \dots (6-12)$$

となる。すなわち、き裂密度 N は $z - \sigma_{ui}$ を引数として持つことになる。よって、式(6-9)より破壊の確率分布関数は次式のようになる。

$$F(x) \equiv 1 - F_s = 1 - \exp \left\{ - \frac{1}{2\pi} \int dV \int_0^\pi \int_0^\pi N(z - \sigma_{ui}) \cdot Y(z, \sigma_{ui}) \sin \varphi d\varphi d\theta \right\} \quad \dots (6-13)$$

式(6-13)は $\sigma_{ui} = 0$ のとき Batdorf の式²⁾と一致する。また $N(z)$

の形を適当に選べば同式は Weibull¹⁾ ならばに前章までに導出した多軸確率分布関数^{3~5)} と一致する。

5章で述べたように、Weibull の 1 軸分布関数 (3 母数)

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ -V_0 \left(\frac{\sigma - \sigma_{u1}}{\sigma_0} \right)^{m_1} \right\}, \quad V_0: \text{物体の体積} \quad \dots (6-14)$$

は、3 軸均等引張応力状態 (σ, σ, σ) のときに厳密に成立すると考えられるので、そのとき式 (6-13) が式 (6-14) と一致すると仮定すると、 $N(z - \sigma_{u1})$ の最も自然な形として

$$N(z - \sigma_{u1}) = \left(\frac{z - \sigma_{u1}}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} \quad \dots (6-15)$$

を選ぶことが出来る。結局、位置母数 σ_{u1} を持つ破壊の多軸確率分布関数として次式を得る。

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_B \int_A \left(\frac{z - \sigma_{u1}}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} \cdot Y(z, \sigma_{u1}) dA dV \right\} \quad (6-16)$$

ここで $dA = \sin \varphi d\varphi d\theta$, A は単位球半表面 (図 6-1), B は物体内部についての積分を表わす。

表面を裂について、ほぼ同様の計算を行うことが出来る。すなわち、式 (6-1) へ (6-16) において、 $\Delta V \rightarrow \Delta \omega$ (物体表面の微小面積要素), $m_1 \rightarrow m_2$, $\sigma_{01} \rightarrow \sigma_{02}$, $\sigma_{u1} \rightarrow \sigma_{u2}$, $z \rightarrow z^*$ (表面を裂に関する等価垂直応力), $\Omega/2\pi \rightarrow \Omega/\pi$, 式 (6-10) の Ω のか

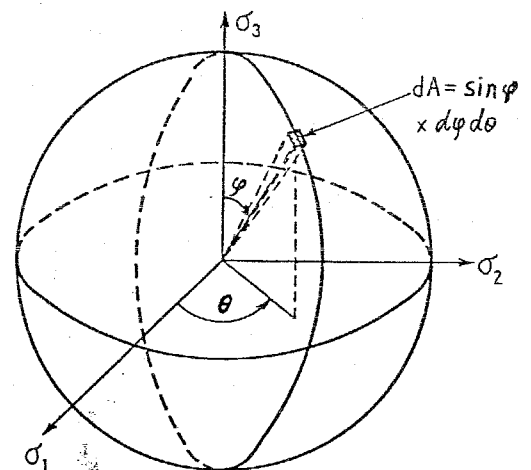


図 6-1 単位球

かりに、

$$\Omega = \int_0^\pi Y(z^*, \sigma_{cr}) \cdot Y(\sigma_{cr}, \sigma_{u2}) d\psi$$

と置き換え、さらに式(6-14)のかわりに、2軸均等引張 (σ, σ) において厳密に成立する Weibull の 1 軸分布関数

$$F^*(\sigma) = 1 - \exp \left\{ -A_0 \left(\frac{\sigma - \sigma_{u2}}{\sigma_{o2}} \right)^{m_2} \right\}, \quad A_0: \text{物体の表面積} \quad \dots (6-17)$$

を採用すると、表面き裂に関する多軸確率分布関数として

$$F^*(*) = 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{B^*} \int_{A^*} \left(\frac{z^* - \sigma_{u2}}{\sigma_{o2}} \right)^{m_2} \cdot Y(z^*, \sigma_{u2}) dA^* d\omega \right\} \quad \dots (6-18)$$

を得る。ここで $dA^* = d\psi$, $d\omega$ は物体表面の面積要素、 B^* , A^* はそれぞれ物体表面、単位円板半側面(図3-1参照)に関する積分を表わす。

最後に式(6-16), (6-18)から、表面き裂と内部き裂を同時に考慮した破壊の多軸確率分布関数は、いわゆる危険率 (risk of rupture) の加算性により次のように求まる。

$$F(*) = 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_B \int_A \left(\frac{z - \sigma_{u1}}{\sigma_{o1}} \right)^{m_1} \cdot Y(z, \sigma_{u1}) dA dV \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_{B^*} \int_{A^*} \left(\frac{z^* - \sigma_{u2}}{\sigma_{o2}} \right)^{m_2} \cdot Y(z^*, \sigma_{u2}) dA^* d\omega \right\} \quad \dots (6-19)$$

$\sigma_{u1} = \sigma_{u2} = 0$ のとき、式(6-19)は前章で求めた、3軸均等引張を基準とした多軸確率分布関数・式(5-23)に一致する。

6.3 1軸・2軸均等引張における確率分布関数

一般の応力状態における破壊の多軸確率分布関数・式(6-19)が求まったので、本節ではその重要な応用として、1軸・2軸均等引張の下における確率分布関数を計算することにする。

6.3.1 内部き裂のみを考慮した場合(せん断応力を無視) 先

にも述べたように、内部き裂の形状としては円板状き裂を想定する。物体に働く主応力を $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ とし、座標 (R, θ, φ) を図6-2のようにとり、さらに円板状き裂のき裂面の法線 n' を R 方向にとる。このとき、き裂先端の応力場に特異性を与える無限遠応力は、 $\sigma_R, \tau_{R\theta}, \tau_{R\varphi}$ である。せん断応力を無視した場合、等価垂直応力 Σ は σ_R に等しい。

(i) 1軸均等引張 1軸均等引張 $(0, 0, \sigma)$ においては、 $\Sigma = \sigma \cos^2 \varphi$ であるから、式(6-16)における積分は

$$\int_A \left(\frac{\Sigma - \sigma_{u1}}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} \cdot Y(\Sigma, \sigma_{u1}) dA = \frac{2\pi}{\sigma_{01}^{m_1}} \int_0^{\pi/2} (\sigma \cos^2 \varphi - \sigma_{u1})^{m_1} Y(\sigma \cos^2 \varphi, \sigma_{u1}) \sin \varphi d\varphi \quad \text{---(6-20)}$$

となる。変数変換 $y = (\sigma \cos^2 \varphi - \sigma_{u1}) / (\sigma - \sigma_{u1})$,

$0 \leq y \leq 1$ を行うと、

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{\sigma_{01}^{m_1} \sqrt{\sigma}} (\sigma - \sigma_{u1})^{m_1 + \frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{b}} \int_0^1 y^{m_1} \cdot \left(1 + \frac{1}{b} y\right)^{-1/2} dy \\ &= \frac{\pi (\sigma - \sigma_{u1})^{m_1 + \frac{1}{2}}}{\sigma_{01}^{m_1} \sqrt{\sigma} \sqrt{b}} \cdot \frac{1}{m_1 + 1} \cdot F(m_1 + 1, \frac{1}{2}, m_1 + 2; -\frac{1}{b}), \quad b = \frac{\sigma_{u1}}{\sigma - \sigma_{u1}} \end{aligned} \quad \text{---(6-21)}$$

となる。ただし $F(, , ;)$ はGaußの超幾何

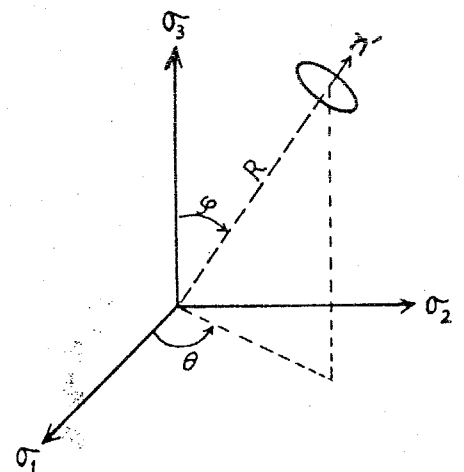


図6-2 座標系

関数で、次式のように収束単位円外に解析接続されているものとする。⁷⁾

$$\left. \begin{aligned} \left\{ F(\alpha, \beta, \gamma; z) \right\}_{0 \leq z < \infty} &= F(\alpha, \beta, \gamma; z) \cdot \left\{ 1 - Y(|z|, 1) \right\} \\ &+ \frac{\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)} (-z)^{-\alpha} \cdot F(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha + 1 - \beta; \frac{1}{z}) \cdot Y(|z|, 1) \\ &+ \frac{\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \beta)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} (-z)^{-\beta} \cdot F(\beta, \beta + 1 - \gamma, \beta + 1 - \alpha; \frac{1}{z}) \cdot Y(|z|, 1) \end{aligned} \right\} \quad (6-22)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}, \quad \operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0 \quad \text{--- (6-23)}$$

以上より、1軸均等引張の下における破壊の確率分布関数として次式を得る。

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ - \frac{V_0}{2\sigma_{01}^{m_1}} \frac{(\sigma - \sigma_{u1})^{m_1+1}}{\sqrt{\sigma \sigma_{u1}}} \cdot \frac{1}{m_1+1} \cdot F(m_1+1, \frac{1}{2}, m_1+2; 1 - \frac{\sigma}{\sigma_{u1}}) \right\} \quad (6-24)$$

(ii) 2軸均等引張 $z = \sigma \sin^2 \varphi$ であるから、式(6-16)における積分は

$$\int_A \left(\frac{z - \sigma_{u1}}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} \cdot Y(z, \sigma_{u1}) dA = \frac{2\pi}{\sigma_{01}^{m_1}} \int_0^{\pi/2} (\sigma \sin^2 \varphi - \sigma_{u1})^{m_1} \cdot Y(\sigma \sin^2 \varphi, \sigma_{u1}) \sin \varphi d\varphi \quad \text{--- (6-25)}$$

変数変換 $\sigma \sin^2 \varphi = x$, $0 \leq x \leq \sigma$ を行うと、上式は

$$\frac{\pi}{\sigma_{01}^{m_1}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \int_{\sigma_{u1}}^{\sigma} (\sigma - x)^{-1/2} (x - \sigma_{u1})^{m_1} dx = \frac{\pi}{\sigma_{01}^{m_1}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} (\sigma - \sigma_{u1})^{m_1 + \frac{1}{2}} \cdot B(m_1+1, \frac{1}{2})$$

となり、⁸⁾ 破壊の確率分布関数は

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ - \frac{V_0}{2\sigma_{01}^{m_1}} \frac{(\sigma - \sigma_{u1})^{m_1 + \frac{1}{2}}}{\sqrt{\sigma}} \cdot B(m_1+1, \frac{1}{2}) \right\} \quad \text{--- (6-26)}$$

となる。ここで $B(,)$ はベータ関数である。

6.3.2 内部き裂のみを考慮した場合 (せん断応力を考慮) 垂直応力のみならずせん断応力も考慮した等価垂直応力 Z として、簡単のために G -クワイテリオン に相当する次式を採用する。

$$Z = \sqrt{\sigma_R^2 + D \tau^2}, \quad D = \frac{4}{(2-\nu)^2}, \quad \tau = \sqrt{\tau_{R0}^2 + \tau_{R\varphi}^2}, \quad \nu: \text{ポアソン比} \quad \dots (6-27)$$

(i) 1軸均等引張 $\sigma_R = \sigma \cos^2 \varphi$, $\tau_{R0} = 0$, $\tau_{R\varphi} = -\sigma \sin \varphi \cos \varphi$ であ

るから、

$$Z = \sigma |\cos \varphi| \cdot \left\{ \cos^2 \varphi + D \sin^2 \varphi \right\}^{1/2} \quad \dots (6-28)$$

となる。 Z が上式で与えられるとき、式(6-16)中の積分を解析的に求めることはできないが、 $\nu=0$ という特別の場合には解析が可能である。 $\nu=0$ のとき、式(6-28)は $Z = \sigma |\cos \varphi|$ となり、式(6-16)の積分は次のようになる。

$$\begin{aligned} & - \frac{V_0}{2\pi} \int_A \left(\frac{Z - \sigma_{u1}}{\sigma_{o1}} \right)^{m_1} \cdot \gamma(Z, \sigma_{u1}) \sin \varphi d\varphi d\theta \\ & = - \frac{V_0}{\sigma_{o1}^{m_1}} \int_0^{\pi/2} (\sigma \cos \varphi - \sigma_{u1})^{m_1} \cdot \gamma(\sigma \cos \varphi, \sigma_{u1}) \sin \varphi d\varphi \quad \dots (6-29) \end{aligned}$$

変数変換 $\sigma \cos \varphi = x$, $0 \leq x \leq \sigma$ を行うと

$$- \frac{V_0}{\sigma_{o1}^{m_1}} \cdot \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma_{u1}}^{\sigma} (x - \sigma_{u1})^{m_1} dx = - \frac{V_0}{\sigma_{o1}^{m_1} (m_1 + 1)} \cdot \frac{(\sigma - \sigma_{u1})^{m_1 + 1}}{\sigma}$$

となり、 $\nu=0$ のときの破壊の確率分布関数として次式を得る。

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ - \frac{V_0}{\sigma_{o1}^{m_1} (m_1 + 1)} \cdot \frac{(\sigma - \sigma_{u1})^{m_1 + 1}}{\sigma} \right\} \quad \dots (6-30)$$

(ii) 2軸均等引張 $\sigma_R = \sigma \sin^2 \varphi$, $\tau_{R\theta} = 0$, $\tau_{R\varphi} = \sigma \sin \varphi \cos \varphi$ であるから、

$$Z = \sigma |\sin \varphi| \left\{ \sin^2 \varphi + D \cos^2 \varphi \right\}^{1/2} \quad \dots (6-31)$$

Z が上式で与えられるとき、(i)と同様に $\nu=0$ のときのみ式(6-16)中の積分を解析的に求めることができる。このとき、 $Z = \sigma |\sin \varphi|$ であるから、式(6-16)より、

$$\begin{aligned} & -\frac{V_0}{2\pi} \int_A \left(\frac{Z - \sigma_{u1}}{\sigma_{o1}} \right)^{m_1} \cdot Y(Z, \sigma_{u1}) \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \\ & = -\frac{V_0}{\sigma_{o1}^{m_1}} \int_0^{\pi/2} (\sigma \sin \varphi - \sigma_{u1})^{m_1} \cdot Y(\sigma \sin \varphi, \sigma_{u1}) \sin \varphi \, d\varphi \quad \dots (6-32) \end{aligned}$$

変数変換 $\sigma \sin \varphi = x$, $0 \leq x \leq \sigma$ を行くと、上式の積分は

$$\int_0^\sigma (x - \sigma_{u1})^{m_1} \cdot Y(x, \sigma_{u1}) \cdot \frac{x}{\sigma} \frac{dx}{\sqrt{\sigma^2 - x^2}} = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma_{u1}}^\sigma (x - \sigma_{u1})^{m_1} \cdot x \cdot (\sigma - x)^{-1/2} (\sigma + x)^{-1/2} dx$$

となる。さらに変数変換 $y = (x - \sigma_{u1}) / (\sigma - \sigma_{u1})$, $0 \leq y \leq 1$ を行くと、

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_{u1}}{\sigma} \frac{(\sigma - \sigma_{u1})^{m_1 + \frac{1}{2}}}{\sqrt{\sigma + \sigma_{u1}}} \int_0^1 y^{m_1} (1-y)^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{\sigma - \sigma_{u1}}{\sigma + \sigma_{u1}} y \right\}^{-1/2} dy \\ & + \frac{(\sigma - \sigma_{u1})^{m_1 + \frac{3}{2}}}{\sigma \sqrt{\sigma + \sigma_{u1}}} \int_0^1 y^{m_1+1} (1-y)^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{\sigma - \sigma_{u1}}{\sigma + \sigma_{u1}} y \right\}^{-1/2} dy \\ & = \frac{\sigma_{u1} (\sigma - \sigma_{u1})^{m_1 + \frac{1}{2}}}{\sigma \sqrt{\sigma + \sigma_{u1}}} \cdot B(m_1+1, \frac{1}{2}) \cdot F(m_1+1, \frac{1}{2}, m_1+\frac{3}{2}; \frac{\sigma_{u1}-\sigma}{\sigma+\sigma_{u1}}) \\ & + \frac{\sigma_{u1} (\sigma - \sigma_{u1})^{m_1 + \frac{3}{2}}}{\sigma \sqrt{\sigma + \sigma_{u1}}} \cdot B(m_1+2, \frac{1}{2}) \cdot F(m_1+2, \frac{1}{2}, m_1+\frac{5}{2}; \frac{\sigma_{u1}-\sigma}{\sigma+\sigma_{u1}}) \quad \dots (6-33) \end{aligned}$$

よって、 $\nu=0$ のときの破壊の確率分布関数は

$$\begin{aligned} F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ -V_0 \left(\frac{\sigma - \sigma_{u1}}{\sigma_{o1}} \right)^{m_1} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \left(\frac{\sigma - \sigma_{u1}}{\sigma + \sigma_{u1}} \right)^{1/2} \left[\sigma_{u1} \cdot B(m_1+1, \frac{1}{2}) \cdot F(m_1+1, \frac{1}{2}, m_1+\frac{3}{2}; -\frac{\sigma - \sigma_{u1}}{\sigma + \sigma_{u1}}) \right. \right. \\ \left. \left. + (\sigma - \sigma_{u1}) \cdot B(m_1+2, \frac{1}{2}) \cdot F(m_1+2, \frac{1}{2}, m_1+\frac{5}{2}; -\frac{\sigma - \sigma_{u1}}{\sigma + \sigma_{u1}}) \right] \right\} \quad (6-34) \end{aligned}$$

6.3.3 表面き裂のみを考慮した1軸均等引張における分布関数

(i) せん断応力を無視した場合 このときの等価垂直応力は

$z^* = \sigma_R = \sigma \cos^2 \psi$ であるから、式(6-18)において、

$$\frac{1}{\sigma_{02}^{m_2}} \int_{A^*} (z^* - \sigma_{u2})^{m_2} \cdot Y(z^*, \sigma_{u2}) dA^* = \frac{Z}{\sigma_{02}^{m_2}} \int_0^{\pi/2} (\sigma \cos^2 \psi - \sigma_{u2})^{m_2} \cdot Y(\sigma \cos^2 \psi, \sigma_{u2}) d\psi \quad \dots (6-35)$$

変数変換 $y = (\sigma \cos^2 \psi - \sigma_{u2}) / (\sigma - \sigma_{u2})$, $0 \leq y \leq 1$ を行うと上式は、

$$\begin{aligned} & \frac{(\sigma - \sigma_{u2})^{m_2 + \frac{1}{2}}}{\sqrt{\sigma_{u2}} \sigma_{02}^{m_2}} \int_0^1 y^{m_2} (1-y)^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{\sigma - \sigma_{u2}}{\sigma_{u2}} y \right\}^{-1/2} dy \\ &= \frac{(\sigma - \sigma_{u2})^{m_2 + \frac{1}{2}}}{\sqrt{\sigma_{u2}} \sigma_{02}^{m_2}} \cdot B(m_2 + 1, \frac{1}{2}) \cdot F(m_2 + 1, \frac{1}{2}, m_2 + \frac{3}{2}; 1 - \frac{\sigma}{\sigma_{u2}}) \quad \dots (6-36) \end{aligned}$$

よって式(6-18)より、破壊の確率分布関数は

$$F^*(\sigma) = 1 - \exp \left\{ -\frac{A_0}{\pi} \frac{(\sigma - \sigma_{u2})^{m_2 + \frac{1}{2}}}{\sigma_{02}^{m_2} \sqrt{\sigma_{u2}}} \cdot B(m_2 + 1, \frac{1}{2}) \cdot F(m_2 + 1, \frac{1}{2}, m_2 + \frac{3}{2}; 1 - \frac{\sigma}{\sigma_{u2}}) \right\} \quad \dots (6-37)$$

ただし、式(6-37)中の関数 $F(, , ;)$ は収束単位円の外に解析接続されているものとする。

(ii) せん断応力を考慮した場合 等価垂直応力として、 G - T ライ
テリオンに相当する次式を用いる。

$$z^* = \sqrt{\sigma_R^2 + \tau^2} \quad \dots (6-38)$$

1軸均等引張では $\sigma_R = \sigma \cos^2 \psi$, $\tau = -\sigma \sin \psi \cos \psi$ であるから、式(6-38)は $z^* = \sigma |\cos \psi|$ となる。このとき式(6-18)の積分は

$$\int_{A^*} \left(\frac{z^* - \sigma_{u2}}{\sigma_{02}} \right)^{m_2} \cdot Y(z^*, \sigma_{u2}) dA^* = \frac{Z}{\sigma_{02}^{m_2}} \int_0^{\pi/2} (\sigma \cos \psi - \sigma_{u2})^{m_2} \cdot Y(\sigma \cos \psi, \sigma_{u2}) d\psi$$

ここで変数変換 $y = (\sigma \cos \psi - \sigma_{u2}) / (\sigma - \sigma_{u2})$, $0 \leq y \leq 1$ を行くと,

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sigma_{02}^{m_2}} \frac{(\sigma - \sigma_{u2})^{m_2 + \frac{1}{2}}}{(\sigma + \sigma_{u2})^{1/2}} \int_0^1 y^{m_2} (1-y)^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{\sigma - \sigma_{u2}}{\sigma + \sigma_{u2}} y \right\}^{-1/2} dy \\ &= \frac{2}{\sigma_{02}^{m_2}} \frac{(\sigma - \sigma_{u2})^{m_2 + \frac{1}{2}}}{(\sigma + \sigma_{u2})^{1/2}} \cdot B(m_2 + 1, \frac{1}{2}) \cdot F(m_2 + 1, \frac{1}{2}, m_2 + \frac{3}{2}; -\frac{\sigma - \sigma_{u2}}{\sigma + \sigma_{u2}}) \quad \dots (6-39) \end{aligned}$$

したがって、破壊の確率分布関数は次式となる。

$$F^*(\sigma) = 1 - \exp \left\{ -\frac{2A_0}{\pi} \left(\frac{\sigma - \sigma_{u2}}{\sigma_{02}} \right)^{m_2} \cdot \left(\frac{\sigma - \sigma_{u2}}{\sigma + \sigma_{u2}} \right)^{1/2} \cdot B(m_2 + 1, \frac{1}{2}) \cdot F(m_2 + 1, \frac{1}{2}, m_2 + \frac{3}{2}; -\frac{\sigma - \sigma_{u2}}{\sigma + \sigma_{u2}}) \right\} \quad \dots (6-40)$$

6.4 破壊確率比 i 軸均等引張における破壊の確率分布関数を F_i と略記する ($i=1 \sim 3$)。一般に F_i の小さな値に対して、

$$\frac{\log(1 - F_i)}{\log(1 - F_3)} \simeq \frac{F_i}{F_3} \quad \dots (6-41)$$

が成立する。以下では式(6-41)の關係を利用して、第3章で得た各確率分布関数から破壊確率比 F_i/F_3 等を計算する。計算にあたっては $S = \sigma/\sigma_{u1}$ と置き、これを応力レベル比と呼ぶことにする。

6.4.1 内部き裂のみを考慮した場合(せん断応力を無視)

$S = \sigma/\sigma_{u1}$ とすると、式(6-24), (6-26), (6-14)より破壊確率比として以下の諸式を得る。

$$\frac{F_1}{F_3} = \frac{1}{2(m_1 + 1)} \cdot \frac{S - 1}{\sqrt{S}} \cdot F(m_1 + 1, \frac{1}{2}, m_1 + \frac{3}{2}; 1 - S) \quad \dots (6-42)$$

$$\frac{F_2}{F_3} = \frac{1}{2} \sqrt{1-1/s} \cdot B(m_1+1, \frac{1}{2}) \quad \dots (6-43)$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sqrt{s-1}}{(m_1+1) \cdot B(m_1+1, \frac{1}{2})} \cdot F(m_1+1, \frac{1}{2}, m_1+2; 1-s) \quad \dots (6-44)$$

6.4.2 内部き裂のみを考慮した場合 (せん断応力を考慮) 式

(6-16), (6-28), (6-31) において、 $z' = z/\sqrt{a_1}$ と置く。すると F_1/F_3 , F_2/F_3 はとくに

$$\frac{1}{(s-1)^{m_1}} \int_0^{\pi/2} (z'-1)^{m_1} \cdot Y(z', 1) \sin \varphi \, d\varphi \quad \dots (6-45)$$

で表わされる。

はじめに F_1/F_3 を計算する。式 (6-28) にて変数変換 $\cos \varphi = t$, $0 \leq t \leq 1$ を行くと、

$$z' = s \cdot t \cdot \left\{ D + t^2(1-D) \right\}^{1/2} \quad \dots (6-46)$$

上式の z' は $0 \leq t \leq 1$ の範囲で単調増加関数であるので、 F_1/F_3 は

$$\begin{aligned} \frac{F_1}{F_3} &= \frac{1}{(s-1)^{m_1}} \int_e^1 (z'-1)^{m_1} dt, \\ e &= \left\{ \frac{-D + \sqrt{D^2 + 4(1-D)/s^2}}{2(1-D)} \right\}^{1/2} \quad \dots (6-47) \end{aligned}$$

となる。

同様にして、式 (6-31) にて変数変換 $\cos \varphi = t$, $0 \leq t \leq 1$ を行くと、

$$z' = s \sqrt{1-t^2} \left\{ 1 + t^2(D-1) \right\}^{1/2} \quad \dots (6-48)$$

上式の z' は $0 \leq t \leq 1$ の範囲で単調減少関数であるので、

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_2}{F_3} &= \frac{1}{(s-1)^{m_1}} \int_0^1 (z'-1)^{m_1} dt, \\ t &= \left\{ \frac{D-z + \sqrt{(D-z)^2 - 4(D-1)(1/s^2-1)}}{2(D-1)} \right\}^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad \dots (6-49)$$

を得る。 $\nu=0$ のときは、式 (6-30), (6-34), (6-14) より、

$$\frac{F_1}{F_3} = \frac{1}{m_1+1} (1-1/s) \quad \dots (6-50)$$

$$\begin{aligned} \frac{F_2}{F_3} &= \left(\frac{s-1}{s+1} \right)^{1/2} \cdot \left\{ \frac{1}{s} \cdot B(m_1+1, \frac{1}{2}) \cdot F(m_1+1, \frac{1}{2}, m_1+\frac{3}{2}; -\frac{s-1}{s+1}) \right. \\ &\quad \left. + (1-1/s) \cdot B(m_1+2, \frac{1}{2}) \cdot F(m_1+2, \frac{1}{2}, m_1+\frac{5}{2}; -\frac{s-1}{s+1}) \right\} \\ &\quad \dots (6-51) \end{aligned}$$

6.4.3 表面き裂のみを考慮した場合 せん断応力を考慮しない

場合、式 (6-17), (6-37) より、

$$\frac{F_1^*}{F_2^*} = \frac{1}{\pi} (s-1)^{1/2} \cdot B(m_2+1, \frac{1}{2}) \cdot F(m_2+1, \frac{1}{2}, m_2+\frac{3}{2}; 1-s) \quad \dots (6-52)$$

せん断応力を考慮した場合、式 (6-17), (6-40) より、

$$\frac{F_1^*}{F_2^*} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{s-1}{s+1} \right)^{1/2} \cdot B(m_2+1, \frac{1}{2}) \cdot F(m_2+1, \frac{1}{2}, m_2+\frac{3}{2}; -\frac{s-1}{s+1}) \quad \dots (6-53)$$

6.5 破壊応力の期待値

これを確率変数 (たとえば巨視的意味での最大応力)、 $F(0)$ もその

確率分布関数とすると、 σ の期待値 $E[\sigma]$ は位置母数を持たない場合、つぎのように表わされる。

$$E[\sigma] = \int_0^{\infty} \sigma \cdot dF(\sigma) = \int_0^{\infty} \{1 - F(\sigma)\} d\sigma, \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left\{ \sigma \{1 - F(\sigma)\} \right\} = 0 \quad \text{--- (6-54)}$$

6.2, 6.3 節で導出したように、分布関数が位置母数 σ_{u1}, σ_{u2} を持つとき、 $E[\sigma]$ がどのように表わされるかを考えてみる。

式(6-14), (6-17), (6-24), (6-26) 等のように、確率分布関数の指数部の因数が、角度 θ, φ または ψ に関する積分の結果

$$(\bar{z} - \sigma_{ui})^{\alpha} \rightarrow (\sigma - \sigma_{ui})^{\alpha} \quad (\alpha: \text{正の実数})$$

に変換されるならば、 $E[\sigma]$ は単に

$$E[\sigma] = \sigma_{ui} + \int_{\sigma_{ui}}^{\infty} \{1 - F(\sigma)\} d\sigma \quad \text{--- (6-55)}$$

となる。しかし、 θ, φ または ψ に関する積分が解析的に実行できない場合は、さらに考察が必要である。

式(6-55) における積分の下限值は、 $F(\sigma) = 0$ を満足する σ の最大値と考えることができる。したがって、

$$(\bar{z})_{\max} - \sigma_{ui} = 0 \quad \text{--- (6-56)}$$

において、もし、

$$(\bar{z})_{\max} = C_0 \sigma \quad (C_0: \text{ある定数})$$

と表わされるならば、 $F(\sigma) = 0$ を満足する σ の最大値 $\sigma_{\sup}$ は

$$\sigma_{\sup} = \sigma_{ui} / C_0 \quad \text{--- (6-57)}$$

となり、 σ の期待値は次式で与えられることになる。

$$E[\sigma] = \sigma_{sup} + \int_{\sigma_{sup}}^{\infty} \{1 - F(\sigma)\} d\sigma \quad \cdots (6-58)$$

$\sigma_R > 0$ のときは $G = 1$ となる。

6.6 考 察

オラ章で明らかにしたように、位置母数を持たない破壊の多軸確率分布関数から求めた破壊確率比は、いわゆる均一性係数 m_1 , m_2 のみの関数であった。これに対し、新たに導出した確率分布関数から求めた破壊確率比は 6.4 節の諸式からわかるように、均一性係数と応力レベル比 S の関数となっている。これは注目すべき結果であって、均一性係数が同じでも破壊確率比が応力レベルによって異なることを意味する。以下に、内部き裂のみを考慮した場合についての計算結果を示す。

図 6-3 は内部き裂のみを考慮（せん断応力も無視）したときの破壊確率比 F_1/F_2 （式(6-44)）の、 S 値依存性を示したもので、 m_1 をパラメータとしてある。図からわかるように、 F_1/F_2 は S 値に大きく依存し、 $S \rightarrow 1$ ならびに $m \rightarrow \infty$ のときは $F_1/F_2 \rightarrow 0$ となっている。また、直観的にも明らかなることであるが、 $S \rightarrow \infty$ のとき、計算値は位置母数を持たない確率分布関数から求めた次式と一致する。

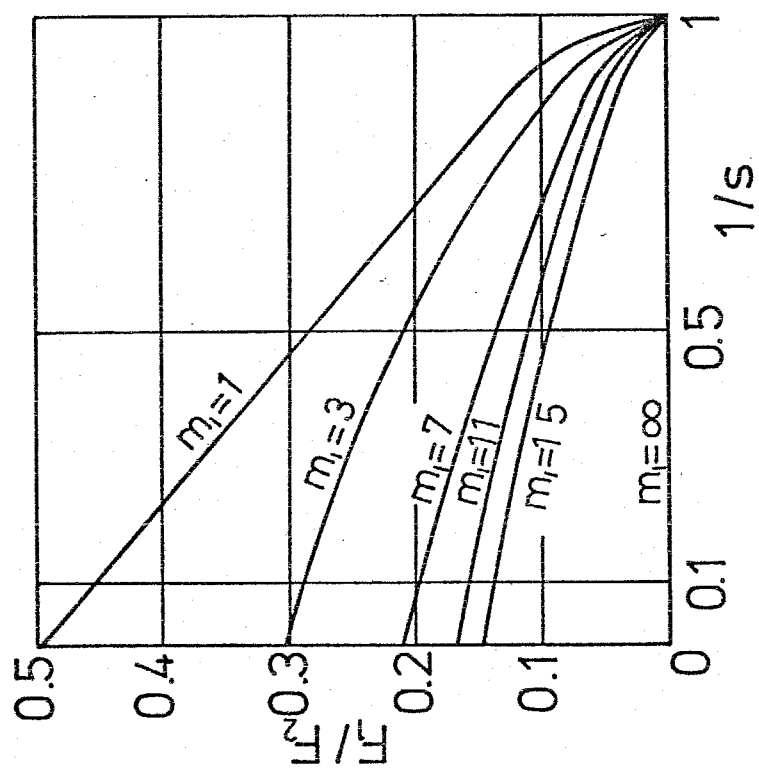


图 6-3 破壞確率比 F_1/F_2 と $1/s$ の關係 (内部き裂, せん断応力無視)

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\int_0^{\pi/2} (\cos^2 \varphi + D \sin^2 \varphi)^{m_1/2} \cos^{m_1} \varphi \sin \varphi d\varphi}{\int_0^{\pi/2} (\sin^2 \varphi + D \cos^2 \varphi)^{m_1/2} \sin^{m_1+1} \varphi d\varphi} \quad \text{---(6-59)}$$

図6-4は、せん断応力を考慮した場合、すなわち式(6-47)、(6-49)から求めた F_1/F_2 について、その S 値依存性を計算した結果である。図(a),(b),(c)はそれぞれポアソン比を $\nu=0, 0.3, 0.5$ にとってある。 m_1, S の同じ値に対し、 ν が大なるほど F_1/F_2 が増大している。また図6-3の場合よりも S 値依存性が大きくなっている。

式(6-47)、(6-49)を用いて、 $\nu=0.3$ とし、 S をパラメータにとったときの $F_1/F_2 \sim m_1$ 関係を図6-5に示す。 $F_1/F_2 \sim m_1$ 関係が S 値に大きく依存することがわかる。

6.7 結 言

本章では、位置母数を持つ破壊の多軸確率分布関数について研究した結果、以下に示す結論を得た。

- ① Weibull の 1 軸確率分布関数が 3 軸均等引張のときに厳密に成立すると考えることにより、従来極めて困難とされていた、位置母数を持つ多軸確率分布関数を導出した。
- ② 1 軸、2 軸均等引張の下における破壊の確率分布関数を解析的に求めた。

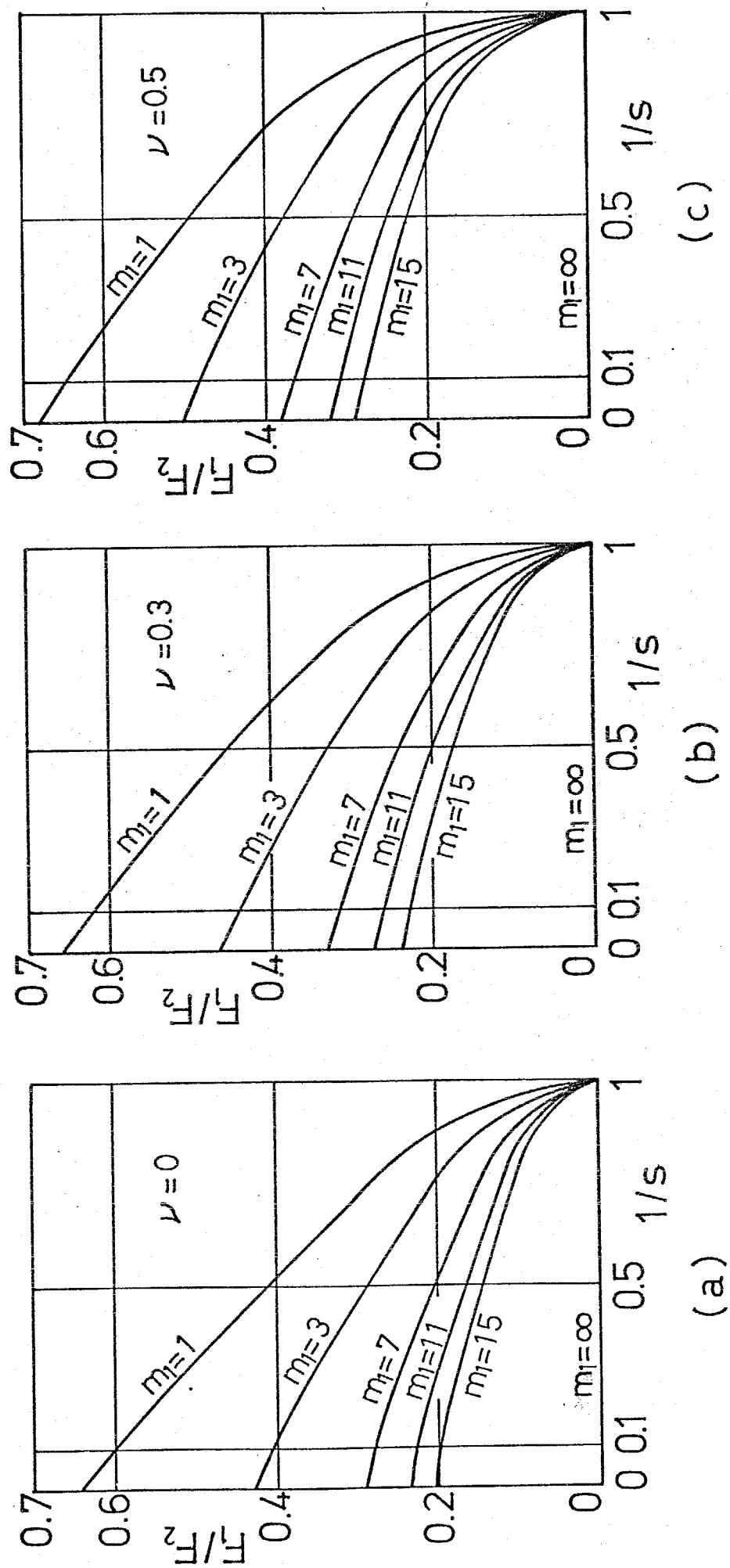


图 6-4 破壞確率比 F_1/F_2 と $1/s$ の関係 (内部き裂、せん断応力考慮)

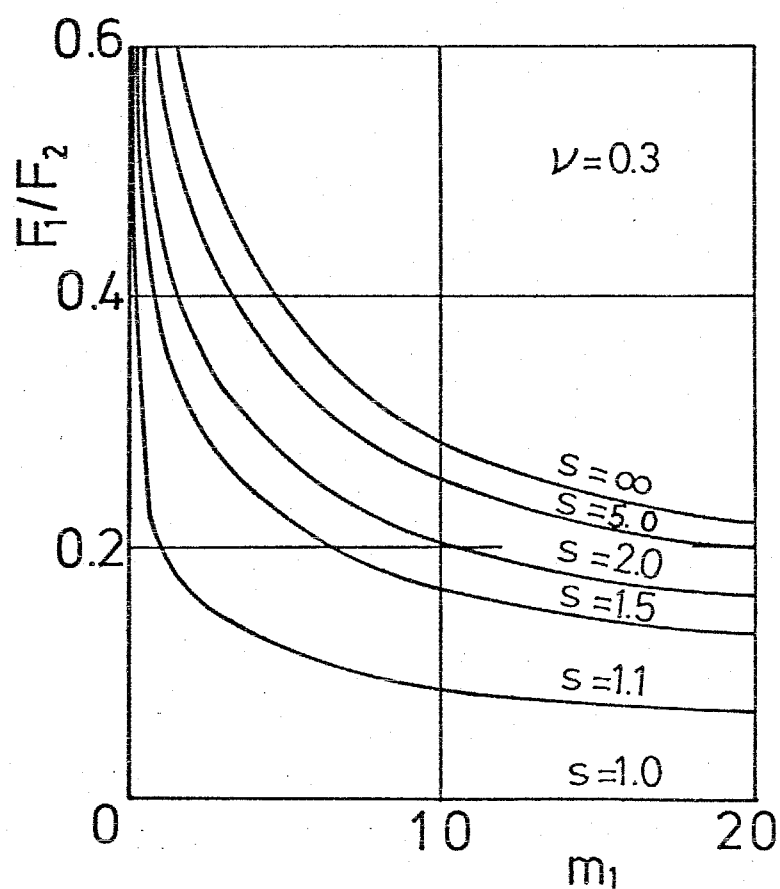


图 6-5 $F_1/F_2 \sim m_1$ 关系 (内部裂纹, せん断応力考慮)

- ③ 破壊確率比が均一性係数 m_i のみならず、応力レベル比 σ/σ_{ui} にも大きく依存することを明らかにした。
- ④ 破壊応力の期待値について一般的考察を行い、分布関数 $F(\sigma) = 0$ を満足する σ の最大値が必ずしも位置母数と一致しないことを見出した。

第7章 結 論

本論文では破壊の多軸確率分布関数とそのぜい性破壊への応用について研究した結果、以下のような結論を得た。

第1章では、ぜい性破壊に関する従来の学説を、決定論的理論と確率統計的理論に大別して概説し、本論文の目的と意義を述べた。

第2章では、Weibullの多軸確率分布関数が最小値確率論に立脚した最弱リンク説により導出されることを概説し、従来の定説とは異なつてWeibullの式が十分理論的根拠を持つことを説明した。

第3章では、Weibullの多軸確率分布関数を、表面き裂と内部き裂を同時に考慮した場合に拡張し、新たに求めた多軸確率分布関数を用いて、黒鉛からなる回転円板の破壊、ぜい性材料の側圧試験、ぜい性材料の内外面側圧試験の解析を行い、実験結果の説明を行った。

第4章では、等価垂直応力という概念を提唱し、これによりき裂を陽に考慮した多軸確率分布関数を求めた。新たに求めた分布関数を用いて、2軸応力下におけるぜい性破壊曲線の解析を行った結果、Weibullの多軸分布関数よりも実験結果をより良く説明できることを明らかにした。また、あわせて、回転円板の破壊強さ、側圧試験における破壊圧力、弱面を有するぜい性材料の破壊についても解析を行った。

第5章では、Weibullの1軸分布関数は、材料が弾性的にもき裂の分布のみをも等方的である限り、厳密には3軸均等引張の場合に成立するものと考え、3軸均等引張(表面き裂では2軸均等引張)を基準にした多軸確率分布関数を求めた結果、内部き裂ならば表面き裂に対する比較係数が、き裂モデルとき裂進展条件のいかんによらず極めて単純な式となり、それぞれ $(2\pi\sigma_0 m)^{-1}$, $(\pi\sigma_0^2 m)^{-1}$ となることを証明した。また、新たに提示した分布関数の形式的パラメータ「 m 」, 「 σ_0 」の値について実験値により比較した結果、1軸均等引張と3軸均等引張のいずれを基準にとっても「 m 」, 「 σ_0 」の値そのものには有意差がないことを明らかにした。

第6章では、従来極めて困難とされていた、位置母数を持つ破壊の多軸確率分布関数を導出し、これを用いて1・2軸均等引張の下における分布関数を解析的に求め、破壊確率比が均一性係数のみならず応力レベル比にも大きく依存することを明らかにした。また、破壊応力の期待値について一般的な考察を行い、分布関数 $F(\sigma)=0$ を満足する σ の最大値が必ずしも位置母数と一致しないこと、すなわち破壊応力の期待値の下限が必ずしも位置母数とはならないことを見出した。

終りにあたり、終始貴重な御指導、御助言をいただいた、東京工業大学・佐藤和郎教授、坂田勝教授、永井文雄助教授、青木繁助教授に深く感謝いたします。また、良き相談相手となった神保

勝久技官にも深く感謝いたします。

第1章

- (1) Wuerker, R.G., Mining Engineering, 7-10 (1959), 1022.
- (2) Tresca, H., Compt. Rend. 70 (1870), 27.
- (3) Coulomb, C.A., in Memoires de mathematique et de physique, Academie Royal des Sciences par divers savans, Vol. 7 (1776), 343.
- (4) Mohr, O., Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, 44 (1900), 1524.
- (5) Paul, B., in Fracture II (Liebowitz ed.) (1968), 313., Academic Press
- (6) 中西, 佐藤, 材料力学 (1970), 岩波全書
- (7) 佐藤, 塑性加工, 17-180 (1976), 5.
- (8) 佐藤・大津, 機論, 41-344 (昭50-4), 1094.
- (9) Griffith, A.A., Proc. 1st Int. Cong. Appl. Mech., Delft (1924), 55.
- (10) McClintock, F.A. and Walsh, J.B., Proc. 4th U.S. National Cong. Appl. Mech. (1962), 1015.
- (11) Freudenthal, A.M., in Fracture II (Liebowitz ed.) (1968), 591., Academic Press
- (12) Weibull, W., Ingenioersvetenskapsakad., Handl., 151 (1939), 45.
- (13) Batdorf, S.B. and Croce, J.G., Trans. ASME, Ser. E, 41-2 (1974), 459.
- (14) Batdorf, S.B., in Fracture Mechanics of Ceramics, Vol. 3 (1978), 1.
- (15) Barnett, R.L. et al., AFFDL-TR-66-220 (march 1967)

第2章

- (1) Gumbel, E.J., Statistics of Extremes, (1958), 20. Columbia Univ. Press
- (2) Fréchet, M., Ann. Soc. Polon. Mat., Cracow, 6 (1927), 93.
- (3) Freudenthal, A.M., in Fracture II (Liebowitz ed.) (1968), 591., Academic Press
- (4) Peirce, F.T., J. Textile Inst., Trans., 17 (1926), 355.
- (5) Wilks, S.S., Bull. Am. Math. Soc. 54 (1948), 6.
- (6) Weibull, W., Ingenioersvetenskapsakad., Handl., 151 (1939), 45.
- (7) Weibull, W., J. Appl. Mech., 18 (1951), 293.
- (8) Batdorf, S.B. and Croce, J.G., Trans. ASME, Ser. E, 41-2 (1974), 459.
- (9) Batdorf, S.B. in Fracture Mechanics of Ceramics, Vol. 3 (1978), 1.

第3章

- (1) Batdorf, S.B. and Chang, D.J., UCLA Rpt. No. UCLA-ENG-7723, Feb. (1977)
- (2) Bolotin, V.V., Statistical Methods in Structural Mechanics (1969), 64., Holden Day.
- (3) 佐藤・永井, 航空学会誌, 10-105 (1962-10)
- (4) 佐藤・永井, 航技研報告, TR-55 (1963-11)
- (5) 佐藤・永井, 機論, 32-240 (昭41-8), 1216.
- (6) 佐藤・永井, 機論, 33-254 (昭42-10), 1595.
- (7) 佐藤・永井, 機論, 35-270 (昭44-2), 268.
- (8) 佐藤・他2名, 機論, 40-330 (昭49-2), 316.
- (9) 佐藤・永井, 機誌, 69-575 (昭41-12), 1617.
- (10) 山本・他2名, 機論, 36-284 (昭45-4), 655.
- (11) 松尾・佐藤, 機論, 45-390 (昭54-2), 171.
- (12) Weill, N.A. and Daniel, M., J. Am. Cer. Soc., 47-6 (1964), 268.
- (13) Bridgeman, P.W., Phil. Mag., 24 (1912), 63.
- (14) Jaeger, J.C. and Cook, N.G.W., J. Geophys. Res., 68-6 (1963), 15.
- (15) 佐藤・直元, 機論, 42-359 (昭51-7), 2250.
- (16) 神保・佐藤, 機講論, 760-17 (昭51-10), 68.
- (17) 筧島・佐藤, 機講論, 760-17 (昭51-10), 71.
- (18) 松尾, 機論, 44-388 (昭53-12), 4074.
- (19) Rankin, A.W., J. Appl. Mech., 66 (1944), A77.
- (20) 斎藤, 機論, 20-91 (昭29), 185.
- (21) 森口・他2名, 岩波・数学公式Ⅲ, (昭43), 61.
- (22) 青木・他2名, 機論, 41-352 (昭50-12), 3341.
- (23) Matsuo, Y., Proc. 19th Japan Cong. Mater. Res., Soc. Mater. Sci., Japan, Kyoto (1976), 148.
- (24) Matsuo, Y. and Sato Y., Proc. 16th Japan Cong. Mater. Res., Soc. Mater. Sci., Japan (1973), 196.
- (25) Matsuo, Y., Proc. 17th Japan Cong. Mater. Res., Soc. Mater. Sci., Japan (1974), 144.
- (26) 佐藤・柳, 機論, 41-346 (昭50-6), 1658.

- (27) S. Aoki and M. Sakata, Int. J. Mech. Sci., Vol. 19 (1977), 345.
- (28) Van Dyke, P., AIAA J., 3-9 (1965), 1733.
- (29) 西谷・石田, 機論, 39-317 (1973), 7.
- (30) P.C. Paris and G.C. Sih, ASTM STP381, (1965), 30.
- (31) 佐藤, 機論, 44-377 (昭53-1), 8.
- (32) M. Sakata and S. Aoki, Trans. ASME, Ser. H, 95-2 (1973), 83.

第4章

- (1) Weibull, W., Ingenioersvetenskapsakad., Handl., 151 (1939), 45.
- (2) 松尾・佐藤, 機論, 45-390 (昭54-2), 171.
- (3) 松尾, 機論, 44-388 (昭53-12), 4074.
- (4) Erdogan, F. and Sih, G.C., Trans. ASME, Ser. D, 85 (1963), 519.
- (5) Nuismer, R.J., Int. J. Fracture, 11 (1975), 245.
- (6) Sih, G.C., Int. J. Fracture, 10 (1974), 305.
- (7) Broek, D., Elementary Engineering fracture Mechanics, (1974) 330., Noordhoff Int. Pub.
- (8) Petrovic, J.J. and Mendiratta, M.G., J. Am. Cer. Soc., 59-3 (1976), 163.
- (9) Awaji, H. and Sato, S., Trans. ASME, Ser. H, 100-2 (1978), 175.
- (10) Freudenthal, A.M., Fracture 11 (Liebowitz ed.) (1968), 591.
- (11) 岡村, 線形破壊力学入門 (昭51), 220., 培風館
- (12) Broutman, S.M. et. al., J. Am. Cer. Soc., 53-12 (1970), 649.
- (13) Ely, R., J. Am. Cer. Soc., 48-10 (1965), 505.
- (14) Cornet, I. and Grassi, R.C., J. Appl. Mech., June (1955), 172.
- (15) Batdorf, S.B. and Crose, J.G., J. Appl. Mech., June (1974), 459.
- (16) Barnett, R.L. et. al., AFFDL-TR-66-220 (March 1967)
- (17) Batdorf, S.B., Int. J. Fracture, 13-1 (1977), 5.
- (18) Kassir, M.K. and Sih, G.C., Three Dimensional Crack Problems, Mechanics of Fracture 11, (1975), 1. Noordhoff Int. Pub.
- (19) 松本・西松, 日本鉱業会誌, 92-1066 (昭51), 785.
- (20) 松尾, 機講論, 780-4 (昭53-4), 15. (投稿中)
- (21) 佐藤, 機論, 39-320 (昭48-4), 1096.
- (22) Grassi, R.C. and Cornet, I., J. Appl. Mech., 16-2 (1949), 178.
- (23) Clough, W.R. and Shank, M.E., Trans. ASM, 49 (1957), 241.
- (24) 松尾, 機講論, 790-12 (昭54-10), 268.
- (25) 西田・他2名, 日本鉱業会誌, 89-1019 (昭48-1), 2.

第5章

- (1) Weibull, W., Ingenioersvetenskapsakad., Handl., 151 (1939)
- (2) 松尾・佐藤, 機論, 45-390 (昭54-2), 171.
- (3) 松尾, 機論, 44-388 (昭53-12), 4074.
- (4) 松尾, 機講論, 780-4 (昭53-4), 15. (投稿中)
- (5) 文献(3), 西松の討論参照
- (6) Oh, K.P.L., Ph.D. thesis, Univ. Calif., Berkeley (1970)
- (7) Oh, K.P.L. et al., Int. J. Fracture, 9 (1973), 372.
- (8) 松尾, 機講論, 780-13 (昭53-10), 62. (投稿中)

第6章

- (1) Weibull, W., Ingenioersvetenskapsakad., Handl., 151 (1939)
- (2) Batdorf, S.B. and Crose, J.G., Trans. ASME, Ser. E, 41-2 (1974), 459.
- (3) 松尾・佐藤, 機論, 45-390 (昭54-2), 171.
- (4) 松尾, 機講論, 780-4 (1978), 15.
- (5) 松尾, 機講論, 780-13 (1978), 62.
- (6) Batdorf, S.B. and Chang, D.J., Int. J. Fracture, 15-2 (1979), 191.
- (7) 森口・他2名、岩波・数学公式Ⅲ、(昭43), 59.
- (8) 森口・他2名、岩波・数学公式Ⅰ、(昭43), 223.
- (9) Varder, O. and Finnie, I., Int. J. Fracture, 11-3 (1975), 495.
- (10) Batdorf, S.B., (Bradt et al ed.) Fracture Mechanics of Ceramics Vol. 3, (1978), 1, Plenum Press.
- (11) 松尾, 機講論, 800-1 (1980), 79.