

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	円筒殻の衝撃応答に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	宇治橋貞幸
Author(English)	SADAYUKI UJIHASHI
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:乙第1133号, 授与年月日:1982年5月31日, 学位の種別:論文博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:乙第1133号, Conferred date:1982/5/31, Degree Type:Thesis doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

0-3

工学博士論文

円筒殻の衝撃応答
に関する研究

東京工業大学 工学部 機械工学科

助手 宇治橋 貞幸

東京工業大学 493811

(i)

目 次

1. 緒 論	1
1.1 殻理論導出にいたる過程	2
1.2 円筒殻理論と研究の流れ	5
1.3 本研究の目的	9
1.4 本論文の概要	11
参考文献	16
2. 各種動的円筒殻理論とその特性	17
2.1 緒 言	18
2.2 平衡方程式	21
2.3 構成方程式	24
2.4 変位の方程式	37
2.5 変位の方程式の簡単化(古典理論)	49
2.6 円筒殻の境界条件	63
2.7 無限長円筒殻の特性値(位相速度)	68
2.8 有限長円筒殻の特性値(固有振動数)	81
2.9 結 言	104
参考文献	108
3. 集中衝撃力をうける円筒殻	111
3.1 緒 言	112
3.2 無限長円筒殻の解析	115
3.3 両縁自由支持円筒殻の解析	126

3.4	両縁自由円筒殻の解析	136
3.5	両縁固定円筒殻の解析	145
3.6	数値結果	168
3.7	結 言	199
	参考文献	202
4.	はり状曲げ衝撃をうける円筒殻	205
4.1	緒 言	206
4.2	Mirsky-Herrmann の理論による解析	209
4.3	Flügge の理論による解析	221
4.4	Donnell の理論による解析	232
4.5	数値結果	235
4.6	結 言	258
	参考文献	262
5.	衝撃的変位が与えられた円筒殻	263
5.1	緒 言	264
5.2	Mirsky-Herrmann の理論による解析	267
5.3	Flügge の理論による解析	276
5.4	数値結果	282
5.5	結 言	312
	参考文献	314
6.	衝撃的変位が与えられた円筒形液体貯槽	315
6.1	緒 言	316
6.2	問題の設定と基礎理論	319

(iii)

6.3	液体との連成運動を考慮した解析	325
6.4	液体を固定質量で近似した解析	339
6.5	数値結果	350
6.6	結 言	364
	参考文献	367
7.	円筒殻の衝撃応答に関する実験	369
7.1	緒 言	370
7.2	衝撃応力の測定方法	372
7.3	測定システムと機器	377
7.4	集中力による両縁自由円筒殻の衝撃実験	388
7.5	はり状曲げ力による片持ち円筒殻の衝撃実験	408
7.6	水を内蔵した片持ち円筒殻の衝撃実験	431
7.7	結 言	439
	参考文献	442
8.	結 論	443
8.1	本論文で得られた成果	444
8.2	今後の課題	448
	謝 辞	451

第 1 章

緒 論

1.1	殻理論導出にいたる過程	2
1.2	円筒殻理論と研究の流れ	5
1.3	本研究の目的	9
1.4	本論文の概要	11
	参考文献	16

1.1 殻理論導出にいたる過程

構造解析には、三次元弾性理論を一次元あるいは二次元化して導かれ体系化された梁・板・殻などの近似理論が主に用いられる。微小変形理論として厳密な三次元弾性理論に対して、これらの近似理論を総称して積分化理論あるいは構造理論と仮に呼ぶことにする。構造理論は単純化されていて扱いやすいただけでなく、梁・平板・曲面板など構造の変形様式の特徴をよく捕えて導かれているので、現象の把握に都合がよくしかも利用方法を誤らなければ実用上十分な精度をもっている。このような意味で構造理論は近似理論として大変な傑作であると言わなければならない。とりわけ梁理論のもつ簡単さと精度の良さと応用範囲の広さには、経験した技術者であれば驚かざるを得ないものがあると思う。ここでは、梁理論が殻理論を生みだすに至る過程を概観してみる。^[1]

梁の静たわみに関する微分方程式は D. Bernoulli (1700-1782) と L. Euler (1707-1783) によって 18 世紀の中頃初めて示され、続いてたわみ振動の微分方程式も示された。現在、古典理論とも呼ばれてよく利用されている梁の横振動方程式の原形となった式がこれであり、Bernoulli-Euler の式とも呼ばれている。この頃に芽生えた梁理論をほぼ現在のよる形に完成させたのが Navier (1785-1836) であり、

(1) 梁の断面は変形後も平面を保つ

という後に平板や殻の理論にも利用される重要な仮定を明示した。これが 19 世紀の初期で、この頃梁に関する古典理論が

確立され、平板への発展の基礎ができたといつてよい。

この成果を踏まえて、梁の考え方を応用して平板に関する理論導出のための試行錯誤が行われた。同じく Navier は平板の静たわみに関する微分方程式を初めて示したが、その根拠となる考え方は必ずしも明確ではなかった。平板のたわみ振動の微分方程式については、J. L. Lagrange (1736-1813) が 19 世紀の初期に初めて示した。平板の古典理論として現在でも有名な Lagrange の振動方程式がこれであるが、まだ基礎の考え方が完成されたとは言えなかった。弾性理論の二次元問題として板の理論を研究したのは、S. D. Poisson (1781-1840) であるが、ほぼ今日知られているような理論に整備したのは G. R. Kirchhoff (1824-1887) であり 1850 年のことである。彼は平板の理論を確立する際に著名ないわゆる Kirchhoff の仮定を設けた。それは次のとおりである。

(1) 板の中央面に垂直な直線素は変形後も直線を保ち中央面に垂直である。

(2) 板の中央面は変形後も伸び縮みしない。

仮定(1)は梁における Navier の仮定と完全に一致している。仮定(2)については、現在では板の中央面の伸び縮みを考慮しても線形理論の範囲では曲げによる変形と連成しないことが知られているので、結果として極めて妥当な仮定であったといえる。この Kirchhoff の板に関する理論の体系化によって初めて殻理論導出の基礎ができた。

その後、A. E. H. Love (1863-1940) は殻の振動の研究を最初に行った L. Rayleigh (1842-1919) の仕事を研究して、平板における Kirchhoff の仮定の考え方を曲面板(殻)にも適用し今日

(4)

の殻理論の基礎を確立した。Love は前述の Kirchhoff の仮定 (1) に加えて次の二つの仮定を設け、殻理論を展開した。

(1) 殻の肉厚は最小曲率半径に比べて十分に小さい。

(2) 殻の肉厚方向応力成分は他の応力成分に比べて十分に小さい。

これが、1892年のことであり、後に Kirchhoff-Love の仮定とも呼ばれるようになった。本論で議論する円筒殻に関する古典理論は、Love によってこのとき初めて完全な形で示された。すなわち、古典的な構造理論は19世紀の初頭から末期までの100年近い間に完成されたことになる。

これに対して、今日でいうせん断変形と回転慣性を考慮することによって古典理論を改良したいわゆる修正理論が導かれるのは20世紀に入ってからのものである。

梁については古典理論に回転慣性だけを付加したいわゆる Rayleigh の理論が1877年の "Theory of Sound" に示されているが^[2]、せん断変形をも考慮した完全な修正理論は1921年になって S. P. Timoshenko (1878-1972) により初めて示された。^[3]

これに続いて Mindlin が、Timoshenko の方法にならって平板に関する修正理論を示したのが1951年である。^[4]

殻についてもこの頃であり、Herrmann らが円筒殻に関する修正理論を示したのが1956年^[5]、Kalnins らが球殻に関する修正理論を示したのが1961年の事である。^[6] このように概観してみると、梁から殻までの理論が形成されるまでには互いに密接な関係と流れのあることがわかる。そして、Navier の断面の平面保持に代表される基本仮定に基づいた構造理論が、整備され現在の状況に至ったのは今世紀の中頃のことである。

1.2 円筒殻理論と研究の流れ

このような構造の動的理論を比較すれば、動的円筒殻理論の特徴をよく把握することができる。そこで、梁および板の動的理論と動的円筒殻理論との比較を、導出の歴史的過程と種々の因子について、行ったのが表 1.1 である。

変位成分に関する支配方程式の微分階数が、平板と比較して一挙に倍以上になっている点に注目すべきである。これは円筒殻が曲率をもっていることにすべての原因がある。曲率を有すると必然的に中央面の伸び縮み(表 1.1 における u_0 および v_0 に相当する)を無視することができなくなり、しかも伸び縮みを表す変位要素 (u_0, v_0) が他の曲げを表す変位要素である (ψ_x, ψ_y, w_0) と連成する。そのために連立微分方程式の元数が多くなり、微分の階数が高くなる。ところが、梁や板では曲率がないので (u_0, v_0) を無視することは可能で、仮に考慮したとしても (ψ_x, ψ_y, w_0) とは連成しない。円筒殻でも (u_0, v_0) を無視する近似を導入した伸びなし変形理論というものが考えられるが、精度が著しく失われ、適用範囲の極めて限られたものになってしまう。以上の理由により、円筒殻に関する一般理論は、古典理論において 8 階、面外せん断変形を考慮した修正理論においてはさらに階数が上がって実に 10 階となってしまふのである。

平板の理論では、実に都合よく梁と同じ 4 階の微分方程式に止まり、しかも修正理論においても階数は変化しない。この基礎理論の差は大きく、導出後の利用頻度に大きな影響を

(6)

表 1.1 動的な構造理論の比較

項目	梁理論		板理論		円筒殻理論	
	古典	修正	古典	修正	古典	修正
平衡方程式の元数	2	2	3	3	5	5
変位の方程式の最高階数	4	4	4	4	8	10
応力成分の数	2	2	6	6	10	10
提示	Bernoulli と Euler 1744年	Timoshenko 1921年	Lagrange 1828年	Mindlin 1951年	Love 1892年	Herrmann と Mirsky 1956年
基本仮定の確立	Navier の仮定 1826年		Kirchhoff の仮定 1850年		Love の仮定 1892年	
変位場の定義式	$u = z\psi_x$ $w = w_0$ <古典理論> $\psi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}$		$u = z\psi_x$ $v = z\psi_y$ $w = w_0$ <古典理論> $\psi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}$ $\psi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y}$		$u = u_0 + z\psi_x$ $v = v_0 + z\psi_y$ $w = w_0$ <古典理論> $\psi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}$ $\psi_y = \frac{1}{R}(v_0 + \frac{\partial w_0}{\partial \theta})$	

ここで、 (u_0, v_0) は中央面の面内変位、 w_0 は中央面の面外変位、 (ψ_x, ψ_y) は断面の回転角、 z は面外方向座標である。

及ぼしていると思われる。円筒殻理論を用いた研究が見られるのは、その導出の経緯からして20世紀に入ってからになる。国内外の文献を調べてみると、1930年台になって円筒殻に関する論文がぼつぼつ見られるようになる。その後40年

代、50年代と研究論文が急激に増え続けている。この時期は、ちょうど第二次世界大戦の終了と時を同じくしている。

動的問題になると、1950年代になってようやく見られるようになる。Love以来、円筒殻理論そのものに関する研究も盛んに行われた。この研究は1950年代に一段落しているが、円筒殻理論はその導出の過程において近似を導入する余地がいくつも存在するために、他の構造理論には見られないような数多くの理論が存在するに至った。平衡方程式・構成方程式・変位の方程式の各式において様々な近似が導入される余地があるので、それらの組合せにより多くの自由度を持っている。提案者の名前を付した円筒殻理論が数多く存在し、これらの理論間の比較研究も盛んに行われているが、初めて理論を利用しようとする技術者には無益な混乱を与えている。

表1.1に示したように円筒殻理論は古典理論でも8階の微分方程式を解かなければならないので、電子計算機の発達していなかった1960年以前にはごく限られた問題の解しか得られていない。特に衝撃問題では、静的問題とは比較にならない膨大な計算量を必要とするので、1960年以降の電子計算機の発達を待たなければならなかったという事情がある。したがって、1960年以前の研究論文の内容は理論そのものに関したものが、フーリエ変換を用いて特定の問題を解析したもののかの二種類に限られる。前者では、Loveの提示した理論を扱いやすいように単純化した試みや遂に精度を高めようとした試みが盛んに行われるとともに平行して各理論間の精度を比較検討する研究が盛んに行われた。後者の円筒殻理論を用いた解析に関する研究では、フーリエ級数もしくはフーリエ変

換による解析法が専一に用いられ、この方法が適用できない問題の解析は行われなかった。しかし現実には、解くことを迫られている重要な問題が多く、これらは1960年台から現在までの約20年間の課題であった。このように円筒殻に関する問題が実務上の要求に応ずる形で解析されるようになってからの歴史は、他の構造に比べて極めて浅いと言わなければならない。一方、この20年間の電子計算機の急速な発達には解析手段を大きく変化させることとなった。有限要素法に代表される数値解析が、電子計算機の発達と歩調を合わせて飛躍的に進歩し普及した。その結果、円筒殻の問題はいきなり数値解法により解析される時代に入った。研究論文にも、1960年代から時代が推移するにしたがって円筒殻理論に基づいた解析解を記述した内容のものがあまり見られなくなりつつある。時代の流れは、実在の複雑な問題を有限要素法などにより解析する方向に向っているように思われる。そして、数値解析した結果の信頼性については実験により検証するというのが現在によく用いられる手法である。その結果、静的問題に関しても基本的な問題の解析解が存在しないまま放置されている。

動的問題では、1960年以降になって比較的簡単な低次の固有振動数の解析が、各種の問題について行われるようになった。しかし現在、固有値解析の分野でもやはり有限要素法による解析が主流になりつつある。衝撃問題すなわち衝撃力によって円筒殻に生ずる変形や応力の応答を調べる問題では、数値解析法は計算時間などの点で有利ではないとしてかろうじて解析解が重要視される領域として残されている。けれど

も数値解法に関する研究が盛んに行われているので、いずれはこの方法が主流となる時期も近いと思われる。衝撃問題で現在までに解かれた例を調べてみると、静的問題と同様にフーリエ級数を用いた解析だけしか行われていないのが現状であり、この方法が適用できない問題に対する解析はまだ行われずに放置されている。

1.3 本研究の目的

以上のように、構造理論としての円筒殻理論が導出されるまでの過程と現在に至る円筒殻に関する研究の推移を概観した上で現状をよく認識し、本研究で取り組むべき課題を探った。まず円筒殻に固有の現象として、現在までに非常に数多くの種類の理論が提案されてきている点を考えるなければならない。特に動的な理論では、慣性項が付加されているためにその近似度によっても数種類の考え方が出てくる。これらの理論の特徴を明確にしておかなければ、円筒殻理論を使う場合に選択すべき基準がないことになる。従来、静的理論についてはこの試みがいろいろの方法により行われているが、まだ満足すべき体系化が行われていないと考える。特に動的理論については、まだ手つかずの状態であるので、最初に果さなければならない課題である。これは、理論の選択に際しての著者自身の切実な経験でもあった。

次に円筒殻の衝撃応答解析では、フーリエ級数を用いた方

法の適用できる問題だけしか扱われていない点を考えなければならぬ。そこで、一般的な解析方法と数値計算方法を確立しておかなければ、他の多くの問題へ適用する道が開けないので、この点をまず明らかにすることが必要である。この方面でも有限要素法に代表される数値解析法が主流となりつつあるが、基本的な衝撃問題に対する解析解というのは公式集のような意味で必ず導いておかなければならぬ。たとえば数値解析結果の精度検定、現象の定性的な把握などに欠くことができなぬものとする。

また円筒殻理論に基づいた衝撃応答解析結果は、実際の現象をどの程度に表現し得るかについても確認しておかなければならぬ問題である。円筒殻理論の精度検証に関しては、厳密な三次元弾性理論による解析結果と比較する方法と対応する実験結果と比較する方法とが考えられる。前者については、一般の問題の衝撃応答解析が極めて複雑であり、十分な精度をもって数値計算を行うことにも大変な困難を伴うことが予想される。そこで本研究では、前者の方法は採用せず後者の方法によることにした。解析では基本的な衝撃問題を対象とするので、各問題に対して実験が可能である。しかも、実際現象との対応関係が確認できれば動的円筒殻理論を現実の問題へ適用する場合にも、理論の精度に対する不安がなくなる。以上のような立場から本研究の目的を次の四点に置くことにした。

- (1) 動的円筒殻理論を整理・体系化して、各理論の導出過程における特徴を明示するとともに、記号・表現法などを統一した上で使いやすい形にまとめる。

- (2) 種類の多い動的円筒殻理論を対象として、可能なかぎり多くの基本的な動的問題について数値結果に及ぼす各理論の特徴を明らかにしつつその精度を比較する。
- (3) 円筒殻の基本的な衝撃問題を解析し数値結果を示すことにより、一般的な衝撃応答の解析方法と円筒殻固有の衝撃に対する応答を明らかにする。また、その解析方法がより複雑な衝撃問題へ適用できる可能性についても触れる。
- (4) 理論解析で対象とした問題と対応した円筒の衝撃実験を行い、解析結果がどの程度適用性があるかを調べることにより動的円筒殻理論の精度を検証する。

1.4 本論文の概要

上記四点の目的を達成するために行った本研究の成果を、第2章から第8章までにわたって記述した。各章において取り扱った問題と得られた成果の要点を示すと次のようになる。

第2章「各種動的円筒殻理論とその特性」では、古典理論と修正理論がいわゆる Kirchhoff-Love の仮定に準拠した円筒殻理論であると規定し、この内で最も精度の高いと思われる Mirsky-Herrmann の修正理論から最も精度が劣ると思われるところの Donnell の古典理論までの合計6種類の動的理論を対象として、これらの理論の導出の過程を相互の対応関係を明確にしながろ系統的に整理した。さらに、固有振動数と位相速度の計算により、これらの理論による結果が数値的にどのよ

うな相違をもたらすかについて調べた。古典理論については各種動的円筒殻理論を極めて利用しやすい形式にまとめることに成巧した。修正理論については、古典理論に比べて著しく扱いにくいから、それなりに利用価値の高いことを示した。

そして、Minsky-Herrmann, Flügge, Donnell の各理論が、各近似段階における代表的な理論であり、これらを目的によって使いわけるのが合理的であるとした。したがって、この三種類の理論については、第3章以下でさらに特性をくわしく調べておく必要があると述べた。

第3章「集中衝撃力をうける円筒殻」では、円筒殻の曲げに関する基本問題のうち局部変形が支配的な例として、集中衝撃荷重をうける円筒殻の問題を取り上げ、円筒殻に生ずる衝撃応力を無限長・自由支持・自由・固定の四種類の端末条件のもとで解析した。基礎理論には、Minsky-Herrmann, Flügge, Donnell の三種類を用いてそれぞれ例における解析方法を明示するとともに数値結果に与える理論と境界条件の影響を明らかにした。その結果、集中荷重の作用点では境界条件および理論によらず合応力成分は発散して無限大となるが、変位成分については古典理論を用いたときだけ有限値に収束すること、荷重の作用面積を有限にするとすべての量が収束することが明らかになった。また、本章で取り扱ったような荷重点とその近傍における局部変形や応力が重要な問題では、修正理論の利用価値はあまりなく、むしろ古典理論を用いた方が簡便で都合がよいこと、古典理論の内の Donnell の理論はその精度は主に円筒殻の長さ依存するけれどもある程度の誤差を覚悟すれば、使用に十分耐えうることを示した。

第4章「はり状曲げ衝撃をうける円筒殻」では、円筒殻のはり状曲げが支配的な例として、先端に衝撃荷重をうける片持ち円筒殻の問題を取り上げ、円筒殻に生ずる衝撃応力を三種類の理論 Mirsky-Herrmann, Flügge, Donnell を用いて解析し、はり状曲げ衝撃問題に対する各理論固有の解析方法を示すとともに解析結果に及ぼす理論の影響を明らかにした。円筒殻に生ずる変位と面内合応力成分の応答については、Flügge と Mirsky-Herrmann の理論は全く同等であるが、面外合応力成分の応答には Flügge を代表とする古典理論では正しい結果が得られない場合があること、古典理論の内の Donnell の理論は円筒殻が短い場合あるいは衝撃初期の応答に関しては Flügge の理論と全く同等であることを明らかにした。本章で取り扱った問題のように衝撃点から離れた位置における応答が重要な例では、応力波の伝播現象を正確に表現する修正理論を用いた方が無難であることがわかった。

第5章「衝撃的変位が与えられた円筒殻」では、変位衝撃をうける円筒殻の例として、一端固定の有限長円筒殻が固定基礎の衝撃的な移動をうける問題を取り上げ、円筒殻に生ずる衝撃応力を Mirsky-Herrmann および Flügge の両理論により解析し、変位衝撃のもとでの解析方法を確立するとともに衝撃応力と基礎の移動速度の時刻履歴との関係を調べた。その結果、移動速度が連続的に変化する場合の応答には修正理論と古典理論の結果の間に大きな差は見られないこと、移動速度が不連続的に変化する場合の応答には修正理論と古典理論の両結果の間に大きな差が認められ、特に古典理論による面外合応力成分の解は、不連続的に変化する時刻において発散す

るなど不自然な現象が多く見られることがわかった。また、立ち上がり時間が円筒殻の最低次固有周期よりも短くなるように基礎が移動すると円筒殻に生ずる変位および応力の値は円筒殻形状の如何にかかわらず急激に大きくなることが明らかになった。

第6章「衝撃的変位が与えられた円筒形液体貯槽」では、これまで展開してきた動的円筒殻理論とその解析法がより複雑な問題へ応用できる可能性を示す例として、円筒形液体貯槽の地震応答解析の問題を取り上げた。前半では、貯槽に円筒殻理論を液体に完全流体の理論をそれぞれ適用し、弾性体と流体の連成問題として解析する方法を示した。後半では、液体を固定質量で近似する考え方を示し、この考え方のもとで解析を行うと貯槽の応答に及ぼす液体の影響が、貯槽の肉厚比と液体との質量密度比とで与えられる極めて簡単な定数で表されることを示した。本章で示した解析方法を加えれば、前章までに示した解析法と合わせて、円筒殻に関するより多くの衝撃問題の解析が可能となることを示唆した。

第7章「円筒殻の衝撃応答に関する実験」では、Kirchhoff-Loveの仮定に準拠した動的円筒殻理論が現実の衝撃現象までこまで表現し得るかについての検証を行うために、第3章・第4章・第6章のそれぞれにおいて取り上げた問題に関連した薄肉円筒の衝撃実験を行い、計測された結果と解析結果との比較を行った。始めに、電気抵抗線ひずみゲージを用いた衝撃応力の測定に本実験で採用したシステムを紹介し、この種の実験を行う上で注意すべき事項を示した。このシステムを用いてまず集中衝撃力を円筒の中央の一点に加える実験を

行い、理論結果との比較により動的円筒殻理論が実用上十分な精度を持っていることを示した。次に、片持ち円筒の先端の一点に衝撃力を加える実験を行い、固定部近傍の応答を主として解析結果とよく一致することが確認でき、はり状曲げ衝撃の問題に対しても理論が適用できることを示した。最後に、水を内蔵した円筒の衝撃実験を行い、水を固定質量で近似する考え方は、近似方法の大胆さに比べて想像以上に精度のよいことが明らかになった。

第8章「結論」では、本論文で得られた成果を反すう吟味し、本研究を行うにあたって掲げた目的がどこまで達成されたかについて総括を行った。

参考文献

- [1] Timoshenko, S. P. (最上・川口訳), 材料力学史, (昭49), 鹿島出版会.
- [2] Rayleigh, J. W. S., The Theory of Sound, (1945), Dover.
- [3] Timoshenko, S. P., On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars, Philosophical Magazine, Ser. 6, Vol. 41 (1921), pp. 744-6.
- [4] Mindlin, R. D., Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, J. Appl. Mech., Vol. 18, No. 1 (1951), pp. 31-38.
- [5] Herrman, G. & Minsky, I., Three-Dimensional and Shell-Theory Analysis of Axially Symmetric Motions of Cylinders, J. Appl. Mech., Vol. 23, No. 4 (1956), pp. 563-568.
- [6] Kalnins, A., On Vibrations of Shallow Spherical Shells, J. Acous. Soc. Amer., Vol. 33, No. 8 (1961), pp. 1102-1107.

第 2 章

各種動的円筒殻理論とその特性

2.1	緒 言	18
2.2	平衡方程式	21
2.3	構成方程式	24
2.4	変位の方程式	37
2.5	変位の方程式の簡単化 (古典理論)	49
2.6	円筒殻の境界条件	63
2.7	無限長円筒殻の特性値 (位相速度)	68
2.8	有限長円筒殻の特性値 (固有振動数)	81
2.9	結 言	104
	参 考 文 献	108

2.1 緒 言

Love は平板における Kirchhoff の仮定を曲面板に適用して殻理論を展開した。^[1] 後に Kirchhoff-Love の仮定と呼ばれるようになったこの基本仮定は次の主要4項目からなる。

- (1) 殻の肉厚は最小曲率半径に比べて無視しうる程度に小さい。
- (2) 殻の中央面に垂直な直線素は変形後も直線を保ちかつ伸び縮みしない。
- (3) 殻の中央面に垂直な直線素は変形後も中央面に垂直である。
- (4) 殻の肉厚方向応力成分は他の応力成分に比べて無視しうる程度に小さい。

ここで、仮定(2)以下ははりにおける Navier, 平板における Kirchhoff の仮定に相当する。現在の円筒殻に関する曲げ理論(一般理論)も, Love によって殻理論が確立されたとき初めて導出されたといつてよい。このときの円筒殻理論は仮定(1)の存在によって一次近似理論(First Order Approximation Theory)と称されている。以来, 円筒殻理論は実用上の利用価値の高さも手伝ってしばしば研究の対象となってきた。その結果, 数多くの円筒殻理論が世の中に現われ, 著名なものだけでもその数は二桁に達するであろう。いずれも Love の

一次近似理論が出发点となっているのは言うまでもないが、大別するとこれを単純化しようとした試みと逆に高精度化しようとした試みとに分類できる。Loveの理論より明らかに単純化されていると思われる理論で有名なものに Donnell^[2] や Morley^[3] の理論がある。特殊な理論としてあげられる伸びなし変形理論や膜理論あるいはこれらと一般理論との中間的な理論などもこの内に入るであろう。逆にLoveの理論より明らかに高精度化されていると思われる理論で有名なものに仮定(1)を緩やかにした二次近似理論と称される Flugge の理論^[4]、あるいは殻の面外方向のせん断変形を許し仮定(3)を取り除いて修正された Naghdi^[5] や Herrmann と Mirsky^{[6][7]} の理論などがある。しかし、提案者が主張するほどに精度に相違があるか(または相違がないか)どうかは、ただ式を見ているだけではわからない。そこで、理論そのものの研究と平行して理論間の比較研究が盛んに行われることとなった。比較の方法としては、Hoff^[8] の論文に代表されるように基礎微分方程式の固有値を比較する方法、Yu^[9] の論文に代表されるある特定の境界条件のもとでの固有振動数を比較する方法、Yuan^{[10][11]} や Liao^[12] の論文に代表されるある具体的な問題の変形や応力を計算し比較する方法などがある。しかし、これまでの報告では、一部の理論間の比較であったり、比較結果が抽象的であったり、比較方法に統一性がなかったり、これも利用技術者にとって極めて不満足な状況である。理論そのものも記号の定義や記述方法がそれぞればらばらで、これもある意味では大きな障害となっているように思われる。

本章では、Kirchhoff-Love の基本仮定に準拠^{*}した円筒殻に関する一般理論から代表的なものの数例を選択^{**}して、まずその導出方法と利用方法を統一して紹介し、次にこれらの理論を利用しやすい形にまとめその精度を失うことなく簡単化する試みを行った。その結果を利用して最後に、位相速度と波長の関係および固有振動数と円筒殻形状の関係を計算し、取り上げた理論の精度や特徴を統一した比較方法により明らかにするとともに、本章で行った基礎方程式の簡単化が实用価値のあることを示した。これらの結果から、理論をさらに取捨選択して第3章以下の具体的な問題の応答解析に用いるべき理論、すなわち利用価値がありそのために特性をさらに調べる必要のある理論を三種類に絞った。

* 仮定(3)にこだわらないという意味である。すなわち殻の面外方向せん断変形を取り入れた理論も含めるという意図を示している。

** 導出過程に一貫した思想性があって不明瞭な点がなく、利用される頻度の高いことを選択基準とする。

2.2 平衡方程式

平均半径 R ，肉厚 h の円筒の中央面上に直交座標 (x, θ, z) を定める。任意の点を中心とする図 2.1 のような微小要素を考えると，各断面には垂直応力 $\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_z$ およびせん断応力 $\tau_{x\theta}, \tau_{xz}, \tau_{\theta z}, \tau_{\theta x}, \tau_{zx}, \tau_{z\theta}$ の合計 9 個の応力成分が作用する。座標 (x, θ, z) 軸方向の並進の釣り合いを考えると，次の平衡方程式が得られる。

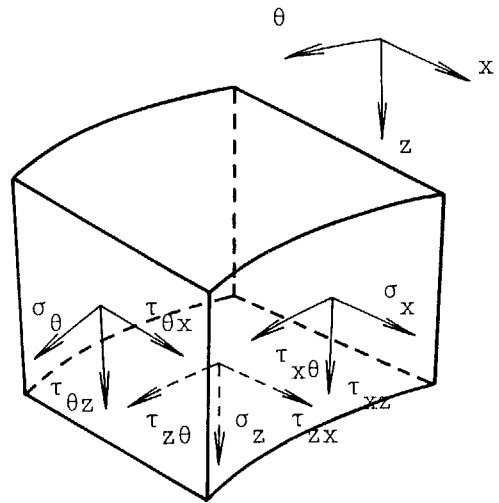


図 2.1 円筒の微小要素

$$(R-z) \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial \theta} + (R-z) \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \tau_{zx} = (R-z) \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + (R-z) \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial x} - \tau_{\theta z} + (R-z) \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} - \tau_{z\theta} = (R-z) \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + (R-z) \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \sigma_\theta + (R-z) \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \sigma_z = (R-z) \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.1c)$$

ここで， (u, v, w) はそれぞれ座標軸 (x, θ, z) 方向の変位成分であり， ρ は円筒の質量密度， t は時間である。式(2.1)の右辺は並進慣性の項であり，これらを零に等置すれば静的な平衡方程式となる。

次に座標 (x, θ, z) 軸まわりの回転の釣り合いを考えると，次の平衡方程式が得られる。

$$-R\tau_{z\theta} - z \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} - z(R-z) \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial x} + R\tau_{\theta z} = -z(R-z) \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.2a)$$

(2.2)

$$R\tau_{zx} + z(R-z)\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + z\frac{\partial\tau_{\theta x}}{\partial\theta} - R\tau_{xz} = z(R-z)\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.2b)$$

$$(R-z)(\tau_{\theta x} - \tau_{x\theta}) = 0 \quad (2.2c)$$

ここで、右辺は回転慣性の項であり、これを零に等置すれば静的な平衡方程式となる。なお、式(2.2c)の右辺において z 軸まわりの回転慣性は高次の微小量となるから無視してある。

円筒殻理論では、
 図2.1の三次元応力状態を二次元化するために平衡方程式(2.1)および(2.2)を肉厚方向(z 方向)に積分し、

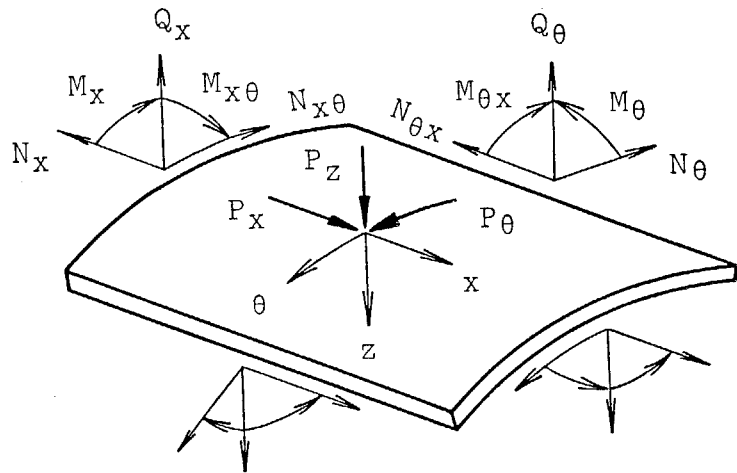


図2.2のように中央面(x, θ)に垂直

図2.2 円筒殻の微小要素

な断面だけに生ずる合計10個の合応力成分を導入する。

まず、式(2.1)を z について $-h/2$ から $h/2$ まで積分すれば、

$$R\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial\theta} + RP_x = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} u \cdot (R-z) dz \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta} + R\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - Q_\theta + RP_\theta = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} v \cdot (R-z) dz \quad (2.3b)$$

$$\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta} + R\frac{\partial Q_x}{\partial x} + N_\theta + RP_z = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} w \cdot (R-z) dz \quad (2.3c)$$

となり、式(2.2)を積分すれば以下のようになる。

$$-\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - R \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + R Q_\theta + m_x = -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} v z (R-z) dz \quad (2.4a)$$

$$R \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - R Q_x - m_\theta = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} u z (R-z) dz \quad (2.4b)$$

$$R(N_{\theta x} - N_{x\theta}) - M_{\theta x} = 0 \quad (2.4c)$$

$$\text{ここで, } P_x = (1-h/2R)(\tau_{zx})_{z=h/2} - (1+h/2R)(\tau_{zx})_{z=-h/2}$$

$$P_\theta = (1-h/2R)(\tau_{z\theta})_{z=h/2} - (1+h/2R)(\tau_{z\theta})_{z=-h/2}$$

$$P_z = (1-h/2R)(\sigma_z)_{z=h/2} - (1+h/2R)(\sigma_z)_{z=-h/2}$$

$$m_x = -(Rh/2) \{ (\tau_{z\theta})_{z=h/2} + (\tau_{z\theta})_{z=-h/2} \}$$

$$m_\theta = -(Rh/2) \{ (\tau_{zx})_{z=h/2} + (\tau_{zx})_{z=-h/2} \}$$

ただし, N_x および N_θ は垂直力, $N_{x\theta}$ および $N_{\theta x}$ は面内せん断力, Q_x および Q_θ は面外せん断力, M_x および M_θ は曲げモーメント, $M_{x\theta}$ および $M_{\theta x}$ はねじりモーメントとよばれ, その定義式は次のとおりである。

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz \quad (2.5a)$$

$$N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz \quad (2.5b)$$

$$N_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{x\theta} \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz \quad (2.5c)$$

$$N_{\theta x} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta x} dz \quad (2.5d)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz \quad (2.5e)$$

$$Q_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta z} dz \quad (2.5f)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{R}\right) z dz \quad (2.5g)$$

$$M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz \quad (2.5h)$$

$$M_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{x\theta} \left(1 - \frac{z}{R}\right) z dz \quad (2.5i)$$

$$M_{\theta x} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta x} z dz \quad (2.5j)$$

なお, 式(2.3)および(2.4)の右辺の慣性項には一次近似すな

(24)

わち $z \ll R$ なる近似を導入している場合がほとんどである。

したがって、 $(R-z) \Rightarrow R$ とした方がむしろ一般的であるとも言える。

逆に合応力成分から応力成分を求める場合には、肉厚方向すなわち z 軸方向の応力分布は直線であると仮定するのが普通で、この場合次の式により求められる。

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h} + \frac{12M_x}{h^3} z \quad (2.6a) \quad \sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h} + \frac{12M_\theta}{h^3} z \quad (2.6b)$$

$$\tau_{xz} = \frac{N_{xz}}{h} + \frac{12M_{xz}}{h^3} z \quad (2.6c) \quad \tau_{\theta z} = \frac{N_{\theta z}}{h} + \frac{12M_{\theta z}}{h^3} z \quad (2.6d)$$

面外方向のせん断応力は肉厚方向に放物状の分布形をもつものとするれば、次の式により求められる。

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \quad (2.7a) \quad \tau_{\theta z} = \frac{3Q_\theta}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \quad (2.7b)$$

2.3 構成方程式

構成方程式には今日までに様々な形のものがあるが提案されており、円筒殻理論の導出の過程では最も議論の対象となるところである。しかし、そのほとんどはいわゆる Kirchhoff-Love の基本仮定に基づいている。仮定(4) (2.1節参照)のもとでは次のような平面応力状態のもとでの応力とひずみの関係式を用いることができる。

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta) \quad (2.8a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x) \quad (2.8b) \quad \tau_{x\theta} = G \gamma_{x\theta} \quad (2.8c)$$

面外方向のせん断変形を考慮する場合には

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} \quad (2.9a) \quad \tau_{\theta z} = G \gamma_{\theta z} \quad (2.9b)$$

の関係式も用いる。ここで、 ε_x および ε_θ は垂直ひずみ、 $\gamma_{x\theta}$
 γ_{xz} および $\gamma_{\theta z}$ はせん断ひずみ成分であり

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.10a) \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R-z} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) \quad (2.10b)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{1}{R-z} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.10c) \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.10d)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{R-z} \left(v + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (2.10e)$$

のように定義される。ただし、 E は縦弾性係数、 G はせん断弾性係数、 ν はポアソン比である。

Kirchhoff-Loveの仮定(2)(2.1節参照)のもとでは変位成分は

$$u = u^0 - z \psi_x \quad (2.11a)$$

$$v = v^0 - z \psi_\theta \quad (2.11b)$$

$$w = w^0 \quad (2.11c)$$

と表される。ここで、 (u^0, v^0, w^0) は中央面上の変位成分、 (ψ_x, ψ_θ) は中央面に垂直な断面の傾き角成分であり、座標 x および θ だけの関数となる。

式(2.10)における $R/(R-z)$ を級数展開して

$$\frac{R}{R-z} \doteq 1 + \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} \quad (2.12)$$

(26)

と近似し、式(2.11)を代入すれば次式を得る。

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad (2.13a)$$

$$\varepsilon_\theta = \left(1 + \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2}\right) \left(\varepsilon_\theta^0 - \frac{z}{R} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}\right) \quad (2.13b)$$

$$\gamma_{x\theta} = \left(1 + \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2}\right) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u^0}{\partial \theta} - \frac{z}{R} \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial v^0}{\partial x} - z \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} \quad (2.13c)$$

$$\gamma_{xz} = -\psi_x + \frac{\partial w^0}{\partial x} \quad (2.13d)$$

$$\gamma_{\theta z} = -\psi_\theta + \left(1 + \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2}\right) \left(\frac{v^0}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial w^0}{\partial \theta} - \frac{z}{R} \psi_\theta\right) \quad (2.13e)$$

ここで、 $(\varepsilon_x^0, \varepsilon_\theta^0, \gamma_{x\theta}^0)$ は中央面上のひずみ成分であり

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x} \quad (2.14a) \quad \varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v^0}{\partial \theta} - w^0\right) \quad (2.14b)$$

$$\gamma_{x\theta}^0 = \frac{1}{R} \frac{\partial u^0}{\partial \theta} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \quad (2.14c)$$

となる。式(2.13)を式(2.8)および(2.9)に代入した後、式(2.5)の積分を実行すれば、次の構成方程式が得られる。

Mirsky-Herrmannの構成方程式

$$N_x = E_p (\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_\theta^0) + \frac{D}{R} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad (2.15a)$$

$$N_\theta = E_p (\varepsilon_\theta^0 + \nu \varepsilon_x^0) + \frac{D}{R^2} \left(\varepsilon_\theta^0 - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}\right) \quad (2.15b)$$

$$N_{x\theta} = G h \gamma_{x\theta}^0 + \frac{G I}{R} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} \quad (2.15c)$$

$$N_{\theta x} = Gk\gamma_{x\theta}^0 + \frac{GI}{R^2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u^0}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} \right) \quad (2.15d)$$

$$Q_x = \kappa_x Gk \left(\frac{\partial w^0}{\partial x} - \psi_x \right) \quad (2.15e)$$

$$Q_\theta = \kappa_\theta (1 + \kappa^2) Gk \left(\frac{v^0}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial w^0}{\partial \theta} - \psi_\theta \right) \quad (2.15f)$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{\epsilon_x^0}{R} \right) \quad (2.15g)$$

$$M_\theta = -D \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\epsilon_\theta^0}{R} \right) \quad (2.15h)$$

$$M_{x\theta} = -GI \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) \quad (2.15i)$$

$$M_{\theta x} = -GI \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial u^0}{\partial \theta} \right) \quad (2.15j)$$

ここで、 $E_p = Eh/(1-\nu^2)$ 、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 、 $I = h^3/12$ 、 $\kappa^2 = h^2/12R^2$ であり、面外方向せん断力 Q_x および Q_θ については、はり理論における Timoshenko の方法にならって修正係数 κ_x および κ_θ (< 1) を乗ずるものとする。以後、この修正係数をせん断係数と呼ぶことにする。

式(2.15)は Mirsky と Herrmann^[7] によって導かれた構成方程式と完全に一致する。これには面外方向のせん断変形が考慮されており、本論文ではこの構成方程式を用いた理論を Mirsky-Herrmann の理論または面外せん断変形を考慮した二次近似理論と呼ぶことにする。

式(2.15)に対して一次近似の構成方程式を導くために、

(28)

Kirchhoff-Love の仮定(1) (2.1節参照)に従って $z \ll R$ なる近似を導入し, 式(2.5)および(2.10)すなわち(2.13)における $R/(R-z)$ を式(2.12)のかわりに

$$\frac{R}{R-z} \doteq 1 \quad (2.16)$$

とする。そのうえで改めて, 式(2.15)の場合と同様に積分を実行すれば, 次の構成方程式が得られる。

面外せん断変形考慮による一次近似の構成方程式

$$N_x = E_p (\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_\theta^0) \quad (2.17a)$$

$$N_\theta = E_p (\varepsilon_\theta^0 + \nu \varepsilon_x^0) \quad (2.17b)$$

$$N_{x\theta} = N_{\theta x} = G h \gamma_{x\theta}^0 \quad (2.17c)$$

$$Q_x = \kappa_x G h \left(\frac{\partial w^0}{\partial x} - \psi_x \right) \quad (2.17d)$$

$$Q_\theta = \kappa_\theta G h \left(\frac{v^0}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial w^0}{\partial \theta} - \psi_\theta \right) \quad (2.17e)$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (2.17f)$$

$$M_\theta = -D \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) \quad (2.17g)$$

$$M_{x\theta} = M_{\theta x} = -GI \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} \right) \quad (2.17h)$$

Kirchhoff-Love の仮定(1)を用いたこの構成方程式による理論を, 式(2.15)と対比して面外せん断変形を考慮した一次近似理論と呼ぶことにする。

式(2.15)および(2.17)では面外せん断変形のため Kirchhoff-Love の仮定(3) (2.1節参照)は成立していない。

以下には、この仮定(3)も取り入れたいわゆる古典理論すなわち面外せん断変形を無視した場合の構成方程式を示す。

Kirchhoff-Love の仮定(3)のもとでは断面の傾き角とたわみ角が一致するので、次の関係が成立する。

$$\psi_x = \frac{\partial w^0}{\partial x} \quad (2.18a) \quad \psi_\theta = \frac{1}{R} \left(v^0 + \frac{\partial w^0}{\partial \theta} \right) \quad (2.18b)$$

Mirsky-Herrmann の構成方程式(2.15)に式(2.18)の関係を代入して変形すれば、次の構成方程式が得られる。

Flügge の構成方程式

$$N_x = E_p (\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_\theta^0) + \frac{D}{R} \chi_x \quad (2.19a)$$

$$N_\theta = E_p (\varepsilon_\theta^0 + \nu \varepsilon_x^0) + \frac{D}{R} \left(\frac{\varepsilon_\theta^0}{R} - \chi_\theta \right) \quad (2.19b)$$

$$N_{x\theta} = G h \gamma_{x\theta}^0 + \frac{GI}{R} \chi_{x\theta} \quad (2.19c)$$

$$N_{\theta x} = G h \gamma_{x\theta}^0 + \frac{GI}{R} \left(\frac{\gamma_{x\theta}^0}{R} - \chi_{x\theta} \right) \quad (2.19d)$$

$$M_x = -D \left(\chi_x + \nu \chi_\theta + \frac{\varepsilon_x^0}{R} \right) \quad (2.19e)$$

$$M_\theta = -D \left(\chi_\theta + \nu \chi_x - \frac{\varepsilon_\theta^0}{R} \right) \quad (2.19f)$$

$$M_{x\theta} = -2GI \chi_{x\theta} \quad (2.19g)$$

$$M_{\theta x} = -2GI \left(\chi_{x\theta} - \frac{\gamma_{x\theta}^0}{2R} \right) \quad (2.19h)$$

ここで、面外方向せん断変形を無視しているため面外方向せん断力 Q_x および Q_θ に対する構成方程式は存在しない。したがって、平衡方程式から求めなければならない。

式(2.19)は Flügge^[4]によって導かれた構成方程式と完全に一致する。すなわち、式(2.19)と式(2.15)は式(2.18)の関係を介して完全に一対一に対応する。そこで、本論文では構成方程式(2.19)を用いた理論を Flügge の理論または面外せん断変形を無視した二次近似理論と呼ぶことにする。

同様にして、面外せん断変形考慮による一次近似の構成方程式(2.17)に式(2.18)を代入すれば、面外せん断変形無視による一次近似の構成方程式が得られ次のようになる。

面外せん断変形無視による一次近似の構成方程式

$$N_x = E_p (\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_\theta^0) \quad (2.20a)$$

$$N_\theta = E_p (\varepsilon_\theta^0 + \nu \varepsilon_x^0) \quad (2.20b)$$

$$N_{x\theta} = N_{\theta x} = Gk \chi_{x\theta}^0 \quad (2.20c)$$

$$M_x = -D (\chi_x + \nu \chi_\theta) \quad (2.20d)$$

$$M_\theta = -D (\chi_\theta + \nu \chi_x) \quad (2.20e)$$

$$M_{x\theta} = M_{\theta x} = -GI (\chi_{x\theta} + \chi_{\theta x}) \quad (2.20f)$$

これには Kirchhoff-Love の基本仮定の(1)から(4)までのいづれもが用いられており、円筒殻に関する一般理論の原点とも言うべき構成方程式である。これは Love の一次近似の構成方程式に Reissner^[13]が一部手を加えたものとして知られている。

* Love の理論では式(2.20f)の右辺が $2GI \chi_{x\theta}$ となっているが、式(2.17)との対応関係からこの式により話を進める。

そこで本論文では、構成方程式(2.20)による理論を Love-Reissner の理論または面外せん断変形を無視した一次近似理論と呼ぶことにする。

なお、 χ_x および χ_θ は曲率変化、 $\chi_{x\theta}$ および $\chi_{\theta x}$ はねじれ角の変化率と呼ばれるもので、次式で定義される。

$$\chi_x = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \quad (2.21a)$$

$$\chi_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v^0}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w^0}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.21b)$$

$$\chi_{x\theta} = \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v^0}{\partial x} + \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial \theta} \right) \quad (2.21c)$$

$$\chi_{\theta x} = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial \theta} \quad (2.21d)$$

以上のように面外せん断変形を考慮した二次近似 (Mirsky-Herrmann) および一次近似の構成方程式は、この変形を無視するとそれぞれ Flügge および Love-Reissner の構成方程式と完全に一致することが明らかになった。

Kirchhoff-Love の基本仮定に準拠した理論は、面外せん断変形を無視した (仮定(3)を含む) 理論と考慮した (仮定(3)を含まない) 理論とに大別される。そこで、面外せん断変形を無視した理論を古典理論、考慮した理論を修正理論とも総称される。

他方、古典理論における一次近似の構成方程式において χ_θ および $\chi_{x\theta}$ を単純化して表した Donnell の構成方程式がある。

この理論は一次近似理論をさらに近似した理論として有名であり、その式がきわめて簡潔であるところから最も利用さ

れる頻度の高い理論の一つである。したがって、この理論も取り上げておかなければならない。

Donnellの構成方程式は次式で与えられる。

Donnellの構成方程式	
$N_x = E_p (\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_\theta^0)$	(2.22 a)
$N_\theta = E_p (\varepsilon_\theta^0 + \nu \varepsilon_x^0)$	(2.22 b)
$N_{x\theta} = N_{\theta x} = G h \gamma_{x\theta}^0$	(2.22 c)
$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w^0}{\partial \theta^2} \right)$	(2.22 d)
$M_\theta = -D \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w^0}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \right)$	(2.22 e)
$M_{x\theta} = M_{\theta x} = -2GI \chi_{\theta x}$	(2.22 f)

これらの他にも数多くの構成方程式が提案されている。たとえば、修正理論では Naghdi^[5], Yu^[14] などの式, 古典理論では Loveの二次近似^[1], Sanders^[15], 溝口^[16] などの式があり, 逐一取り上げているときりがない。

しかし, そのほとんどすべては精度の点で二次近似理論と一次近似理論もしくはDonnell型の理論との中間に位置しているものと考えてよい。Kirchhoff-Loveの基本仮定に基づく限り, 二次近似理論のもつ精度を大きく向上させることはほとんど期待できない。この基本仮定の一部を修正した面外せん断変形考慮による二次近似理論(Mirsky-Herrmannの理論)がその限界と考えられる。これ以上の大幅な精度向上を望むならば, もはやKirchhoff-Loveの基本仮定から完全に離れなければならない。この立場に立つならば, 三次元弾性理論もしくは殻の

肉厚方向の応力や横断面のゆがみを近似的に取り入れたいわゆる高次理論^{[17][18]}を用いる以外に方法はないであろう。しかし、これらの理論は数学的取り扱いが著しく複雑であるため実用的であるとはいえないのが現状である。

したがって、Kirchhoff-Loveの基本仮定に準拠した線形円筒殻理論の精度については、Minsky-Herrmannの理論からDonnellの理論までを対象として議論すれば、ほぼその全容を捕えることができるというてよい。

最後に特別な理論として、殻の曲げ剛性を無視した膜理論について簡単に触れておく。この理論では、面内合応力成分すなわち N_x と N_θ および $N_{x\theta}$ と $N_{\theta x}$ だけを考慮し、他の面外合応力成分はすべて無視し得るものとしている。したがって、この理論の構成方程式は、たとえば式(2.20)において $D = I = 0$ として得られ、次のようになる。

膜理論の構成方程式

$$N_x = E_p (\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_\theta^0) \quad (2.23 a)$$

$$N_\theta = E_p (\varepsilon_\theta^0 + \nu \varepsilon_x^0) \quad (2.23 b)$$

$$N_{x\theta} = N_{\theta x} = G h \gamma_{x\theta}^0 \quad (2.23 c)$$

この近似は極端に肉厚の薄い(たとえば石けん膜のような)殻に対して成立すると考えられる。したがって膜理論は、本論文の対象である一般理論に対する零次近似の理論として解釈することができる。

膜理論とは逆の特殊な理論として、曲げ変形だけを考慮した伸びなし変形理論があるが、膜理論と同様に適用範囲がきわめて限定されるので、本論文では取り扱わない。

軸対称変形の場合

これまでに示した構成方程式は一般形であるから、軸対称変形に対する構成方程式は単に変数 θ による微分を零と置くだけで得られるわけである。ここでは、後に参照する場合の便宜を考えて、無用のことをあえて記しておく。構成方程式に対する名称は一般形に対する名称をそのまま用いることにした。

面外せん断変形考慮による二次近似 (Mirsky-Herrmann) の構成方程式は次のようになる。

Mirsky-Herrmann の構成方程式 (軸対称)

$$N_x = E_p(\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_\theta^0) + \frac{D}{R} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad (2.24 a)$$

$$N_\theta = E_p(\varepsilon_\theta^0 + \nu \varepsilon_x^0) + \frac{D}{R^2} \varepsilon_\theta^0 \quad (2.24 b)$$

$$Q_x = \kappa_x G h \left(\frac{\partial w^0}{\partial x} - \psi_x \right) \quad (2.24 c)$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\varepsilon_x^0}{R} \right) \quad (2.24 d)$$

$$M_\theta = -D \left(\nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\varepsilon_\theta^0}{R} \right) \quad (2.24 e)$$

$$N_{x\theta} = G h \gamma_{x\theta}^0 + \frac{GI}{R} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} \quad (2.24 f)$$

$$N_{\theta x} = G h \gamma_{x\theta}^0 \quad (2.24 g)$$

$$Q_\theta = \kappa_\theta (1 + \kappa^2) G h \left(\frac{v^0}{R} - \psi_\theta \right) \quad (2.24 h)$$

$$M_{x\theta} = -GI \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v^\circ}{\partial x} \right) \quad (2.24 i)$$

$$M_{\theta x} = -GI \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} \quad (2.24 j)$$

面外せん断変形考慮による一次近似の構成方程式は、次のようになる。

面外せん断変形考慮による一次近似の構成方程式 (軸対称)

$$N_x = E_p (\varepsilon_x^\circ + \nu \varepsilon_\theta^\circ) \quad (2.25 a)$$

$$N_\theta = E_p (\varepsilon_\theta^\circ + \nu \varepsilon_x^\circ) \quad (2.25 b)$$

$$Q_x = \kappa_x G h \left(\frac{\partial w^\circ}{\partial x} - \psi_x \right) \quad (2.25 c)$$

$$M_x = -D \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad (2.25 d) \quad M_\theta = \nu M_x \quad (2.25 e)$$

$$N_{x\theta} = N_{\theta x} = G h \gamma_{x\theta}^\circ \quad (2.25 f)$$

$$Q_\theta = \kappa_\theta G h \left(\frac{v^\circ}{R} - \psi_\theta \right) \quad (2.25 g)$$

$$M_{x\theta} = M_{\theta x} = -GI \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} \quad (2.25 h)$$

ただし, $(\varepsilon_x^\circ, \varepsilon_\theta^\circ, \gamma_{x\theta}^\circ)$ は式(2.14)より次のようになる。

$$\varepsilon_x^\circ = \frac{\partial u^\circ}{\partial x} \quad (2.26 a) \quad \varepsilon_\theta^\circ = -\frac{w^\circ}{R} \quad (2.26 b)$$

$$\gamma_{x\theta}^\circ = \frac{\partial v^\circ}{\partial x} \quad (2.26 c)$$

式(2.24)および(2.25)によると, 変位成分 $(u^\circ, w^\circ, \psi_x)$ による合応力成分 (破線の上) と変位成分 (v°, ψ_θ) による合応力成

分(破線の下)とが分離されることがわかる。これは、軸対称変形のもとではねじりによる変形(ψ^0, ψ_θ)が分離し、他の曲げなどの変形と連成しないことを示唆している。

一方、面外方向せん断変形無視による二次近似(Flügge)の構成方程式は式(2.19)より次のようになる。

Flüggeの構成方程式(軸対称)

$$N_x = E_p(\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_\theta^0) + D \chi_x / R \quad (2.27a)$$

$$N_\theta = E_p(\varepsilon_\theta^0 + \nu \varepsilon_x^0) + D \varepsilon_\theta^0 / R^2 \quad (2.27b)$$

$$M_x = -D(\chi_x + \varepsilon_x^0 / R) \quad (2.27c)$$

$$M_\theta = -D(\nu \chi_x - \varepsilon_\theta^0 / R) \quad (2.27d)$$

$$N_{x\theta} = G h (1 + \kappa^2) \gamma_{x\theta}^0 \quad (2.27e)$$

$$N_{\theta x} = G h \gamma_{x\theta}^0 \quad (2.27f)$$

$$M_{x\theta} = -2GI \gamma_{x\theta}^0 / R \quad (2.27g)$$

$$M_{\theta x} = M_{x\theta} / 2 \quad (2.27h)$$

面外せん断変形無視による一次近似(Love-Reissner)の構成方程式は、式(2.20)より次のようになる。

面外せん断変形無視による一次近似の構成方程式(軸対称)

$$N_x = E_p(\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_\theta^0) \quad (2.28a)$$

$$N_\theta = E_p(\varepsilon_\theta^0 + \nu \varepsilon_x^0) \quad (2.28b)$$

$$M_x = -D \chi_x \quad (2.28c) \quad M_\theta = \nu M_x \quad (2.28d)$$

$$N_{x\theta} = N_{\theta x} = G h \gamma_{x\theta}^0 \quad (2.28e)$$

$$M_{x\theta} = M_{\theta x} = -GI \gamma_{x\theta}^0 / R \quad (2.28f)$$

ただし、 χ_x は式(2.21a)のとおりであり、面外せん断変形を無視した理論では Q_x および Q_θ は平衡方程式より求めなければならぬ。

式(2.27)および(2.28)によると、変位成分 (u^0, w^0) による合応力成分(破線の上)と変位成分 v^0 による合応力成分(破線の下)とは分離することがわかる。これは、軸対称変形のもとではねじりによる変形 v^0 が他の曲げなどの変形と連成しないことを示している。

Donnellの構成方程式は、ほとんど式(2.28)と同じになるが念のため記しておくと、次のようになる。

Donnellの構成方程式(軸対称)			
$N_x = E_p(\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_\theta^0)$		$(2.29a)$	
$N_\theta = E_p(\varepsilon_\theta^0 + \nu \varepsilon_x^0)$		$(2.29b)$	
$M_x = -D \chi_x$	$(2.29c)$	$M_\theta = \nu M_x$	$(2.29d)$

$N_{x\theta} = N_{\theta x} = G h \gamma_{x\theta}^0$		$(2.29e)$	
$M_{x\theta} = M_{\theta x} = 0$		$(2.29f)$	

2.4 変位の方程式

平衡方程式に構成方程式を代入すれば、境界値問題を解く際に必要な変位成分に関する連立微分方程式が得られる。以後、これを変位の方程式と呼ぶことにする。

変位の方程式の種類も提案された構成方程式の種類と同数だけ存在することになる。そこで、構成方程式の節で記述した順序に従って変位の方程式を示すことにする。

まず、面外せん断変形を考慮した理論すなわち修正理論から始める。二次近似理論すなわち Mirsky-Herrmann の理論では式(2.11)および(2.15)を式(2.3)および(2.4)に代入することにより、中央面上の変位成分(u^0, v^0, w^0)と中央面に垂直な断面の傾き角成分(ψ_x, ψ_θ)に関する5元連立微分方程式が得られる。これらの方程式を式(2.3a), (2.4b), (2.3b), (2.4a), (2.3c)の順に書けば、以下のようになる。

ただし、式(2.4c)は構成方程式により恒等的に満足されており、変位の方程式では用いない。

Mirsky-Herrmann の変位の方程式

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (1+\kappa^2)P_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} u^0 + \kappa^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - P_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) R\psi_x + P_2 \frac{\partial^2 v^0}{\partial \xi \partial \theta} - \nu \frac{\partial w^0}{\partial \xi} + R^2 \frac{P_x}{E_p} = 0 \quad (2.30a)$$

$$\kappa^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - P_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) u^0 + \left\{ \kappa^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + P_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) - \kappa_x P_1 \right\} R\psi_x + \kappa^2 P_2 R \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \xi \partial \theta} + \kappa_x P_1 \frac{\partial w^0}{\partial \xi} + \frac{m_\theta}{E_p} = 0 \quad (2.30b)$$

$$P_2 \frac{\partial^2 u^0}{\partial \xi \partial \theta} + \left\{ P_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (1+\kappa^2) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - P_4 + \kappa^2 \right\} v^0$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \kappa^2 \left(\beta_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) + \beta_4 - \kappa^2 \right\} R \psi_\theta \\
& - \beta_3 \frac{\partial w^0}{\partial \theta} + R^2 \frac{P_\theta}{E_p} = 0 \quad (2.30c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \kappa^2 \beta_2 R \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi \partial \theta} + \left\{ \kappa^2 \left(\beta_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) + \beta_4 - \kappa^2 \right\} v^0 \\
& + \left\{ \kappa^2 \left(\beta_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) - \beta_4 + \kappa^2 \right\} R \psi_\theta \\
& + \beta_4 \frac{\partial w^0}{\partial \theta} + \frac{m_x}{E_p} = 0 \quad (2.30d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v \frac{\partial u^0}{\partial \xi} - \kappa_x \beta_1 R \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} + \beta_3 \frac{\partial v^0}{\partial \theta} - \beta_4 R \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \left\{ \kappa_x \beta_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right. \\
& \left. + (\beta_4 - \kappa^2) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - (1 + \kappa^2) \right\} w^0 + R^2 \frac{P_z}{E_p} = 0 \quad (2.30e)
\end{aligned}$$

ここで, $\xi = \frac{x}{R}$, $\tau = \frac{c}{R} t$, $c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$,

$$\beta_1 = \frac{1-\nu}{2}, \quad \beta_2 = \frac{1+\nu}{2}, \quad \beta_3 = (1+\kappa^2)(1+\kappa_0 \beta_1),$$

$$\beta_4 = \kappa^2 + \kappa_0(1+\kappa^2)\beta_1$$

一方, 一次近似理論では, 式(2.3)および(2.4)の右辺の慣性項を $(R-z) \rightarrow R$ と近似し, その上で式(2.11)および(2.17)を代入する。すると, やはり (u^0, v^0, w^0) と (ψ_x, ψ_θ) に関する5元連立微分方程式が得られ, 以下のようなになる。

ただし, 一次近似理論では式(2.4c)は満足されていないが, この矛盾は一次近似を導入する以上やむを得ない。

面外せん断変形考慮による一次近似の変位の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) u^0 + \rho_2 \frac{\partial^2 v^0}{\partial \xi \partial \theta} - \nu \frac{\partial w^0}{\partial \xi} + R^2 \frac{P_x}{E_p} = 0 \quad (2.31a)$$

$$\left\{ \kappa^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) - \kappa_x \rho_1 \right\} R \psi_x + \kappa^2 \rho_2 R \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \xi \partial \theta} + \kappa_x \rho_1 \frac{\partial w^0}{\partial \xi} + \frac{m_\theta}{E_p} = 0 \quad (2.31b)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u^0}{\partial \xi \partial \theta} + \left(\rho_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \kappa_\theta \rho_1 \right) v^0 + \kappa_\theta \rho_1 R \psi_\theta - (1 + \kappa_\theta \rho_1) \frac{\partial w^0}{\partial \theta} + R^2 \frac{P_\theta}{E_p} = 0 \quad (2.31c)$$

$$\kappa^2 \rho_2 R \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi \partial \theta} + \kappa_\theta \rho_1 v^0 + \left\{ \kappa^2 \left(\rho_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) - \kappa_\theta \rho_1 \right\} R \psi_\theta + \kappa_\theta \rho_1 \frac{\partial w^0}{\partial \theta} + \frac{m_x}{E_p} = 0 \quad (2.31d)$$

$$\nu \frac{\partial u^0}{\partial \xi} - \kappa_x \rho_1 R \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} + (1 + \kappa_\theta \rho_1) \frac{\partial v^0}{\partial \theta} - \kappa_\theta \rho_1 R \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \left(\kappa_x \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \kappa_\theta \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 1 \right) w^0 + R^2 \frac{P_z}{E_p} = 0 \quad (2.31e)$$

以上のように，修正理論では変位の方程式は5元の連立微分方程式として得られる。なお，くどいようだが，式(2.30)および(2.31)には並進および回転の慣性が含まれている。

次に，面外せん断変形を無視した理論すなわち古典理論の変位の方程式を示す。

古典理論では面外せん断力 Q_x および Q_θ に対する構成方程式は存在しない。したがって、まず式(2.4a)および(2.4b)から Q_x および Q_θ を求め、これを式(2.3b)および(2.3c)に代入し、次に構成方程式を用いて変位の方程式を導くという手続きをふむことになる。

二次近似理論すなわち Flügge の理論では、式(2.11)および(2.19)を式(2.4)に代入することにより Q_x および Q_θ は

$$Q_x = -\frac{D}{R^3} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - p_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) u^0 + p_2 \frac{\partial^2 v^0}{\partial \xi \partial \theta} + \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \right\} - m_\theta / R \quad (2.32a)$$

$$Q_\theta = -\frac{D}{R^3} \left\{ 2 \left(p_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) v^0 + \left(\nabla^2 + 1 - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \frac{\partial w^0}{\partial \theta} \right\} - \frac{m_x}{R} \quad (2.32b)$$

のように求められる。これを式(2.3)に代入することにより中央面上の変位成分 (u^0, v^0, w^0) に関する3元連立微分方程式が得られる。これらの方程式を式(2.3a), (2.3b), (2.3c)の順に書けば、以下のようなになる。

Flügge の変位の方程式

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (1+k^2)p_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} u^0 + p_2 \frac{\partial^2 v^0}{\partial \xi \partial \theta} + \left(k^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - k^2 p_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - k^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nu \right) \frac{\partial w^0}{\partial \xi} + R^2 \frac{P_x}{E_p} = 0 \quad (2.33a)$$

$$p_2 \frac{\partial^2 u^0}{\partial \xi \partial \theta} + \left\{ (1+3k^2)p_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - (1+k^2) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} v^0 + \left\{ k^2(1+p_1) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - k^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 1 \right\} \frac{\partial w^0}{\partial \theta} + \frac{m_x + R^2 P_\theta}{E_p} = k^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(2v^0 + \frac{\partial w^0}{\partial \theta} \right) \quad (2.33b)$$

(42)

$$\begin{aligned} & \left(-\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \kappa^2 p_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \nu \right) \frac{\partial u^0}{\partial \xi} + \left\{ -\kappa^2 (1+p_1) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \right\} \frac{\partial v^0}{\partial \theta} \\ & - \left(\kappa^2 \nabla^4 + 2\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1 + \kappa^2 + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) w^0 - \left(R \frac{\partial m_\theta}{\partial x} + \frac{\partial m_x}{\partial \theta} \right. \\ & \left. - R^2 p_z \right) \frac{1}{E_p} = -\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\frac{\partial u^0}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial v^0}{\partial \theta} + \nabla^2 w^0 \right) \quad (2.33c) \end{aligned}$$

ここで、 $\nabla^2 \equiv \partial^2 / \partial \xi^2 + \partial^2 / \partial \theta^2$

各式の右辺は回転慣性の影響を示す項である。これを零と等置すれば、そのまま回転慣性を無視した場合の式となる。

ただし、式(2.4c)は構成方程式により恒等的に満足されており、ここでは用いない。

一次近似理論すなわち Love-Reissner の理論では式(2.4)の右辺の慣性項を $(R-z) \rightarrow R$ と近似し、その上で式(2.11)および(2.20)を代入することにより Q_x および Q_θ は

$$Q_x = -\frac{D}{R^3} \left\{ p_2 \frac{\partial^2 v^0}{\partial \xi \partial \theta} + \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \right\} - \frac{m_\theta}{R} \quad (2.34a)$$

$$Q_\theta = -\frac{D}{R^3} \left\{ \left(p_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) v^0 + \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \frac{\partial w^0}{\partial \theta} \right\} - \frac{m_x}{R} \quad (2.34b)$$

のように求められる。これを式(2.3)に代入することにより、やはり (u^0, v^0, w^0) に関する3元連立微分方程式が得られ、以下のようになる。ただし、一次近似理論では式(2.4c)は満足されていないが、この矛盾は一次近似を導入する以上やむを得ない。なお、各式の右辺は回転慣性の影響を示す項である。

面外せん断変形無視による一次近似の変位の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + P_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) u^0 + P_2 \frac{\partial^2 v^0}{\partial \xi \partial \theta} - \nu \frac{\partial w^0}{\partial \xi} + R^2 \frac{P_x}{E_p} = 0 \quad (2.35a)$$

$$P_2 \frac{\partial^2 u^0}{\partial \xi \partial \theta} + \left\{ (1 + \kappa^2) \left(P_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} v^0 + \left(\kappa^2 \nabla^2 - 1 \right) \frac{\partial w^0}{\partial \theta} + \frac{m_x + R^2 P_\theta}{E_p} = \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(v^0 + \frac{\partial w^0}{\partial \theta} \right) \quad (2.35b)$$

$$\nu \frac{\partial u^0}{\partial \xi} - (\kappa^2 \nabla^2 - 1) \frac{\partial v^0}{\partial \theta} - (\kappa^2 \nabla^4 + 1 + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}) w^0 - \left(\frac{\partial m_x}{\partial \theta} + R \frac{\partial m_\theta}{\partial x} - R^2 P_z \right) \frac{1}{E_p} = -\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\frac{\partial v^0}{\partial \theta} + \nabla^2 w^0 \right) \quad (2.35c)$$

一方 Donnell の理論では、式(2.4)の右辺の慣性項を $(R - \kappa) \rightarrow R$ と近似し、その上で式(2.11)および(2.22)を代入することにより Q_x および Q_θ は次のように求められる。

$$Q_x = -\frac{D}{R^3} \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \frac{\partial w^0}{\partial \xi} - \frac{m_\theta}{R} \quad (2.36a)$$

$$Q_\theta = -\frac{D}{R^3} \left\{ -\frac{\partial^2 v^0}{\partial \tau^2} + \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \frac{\partial w^0}{\partial \theta} \right\} - \frac{m_x}{R} \quad (2.36b)$$

次に式(2.3b)中の Q_θ の項を無視し、式(2.36)を式(2.3c)だけに代入する。このような新たな近似を導入することにより、以下のような (u^0, v^0, w^0) に関する3元連立微分方程式が得られる。ただし、第1式は一次近似理論における式(2.35a)と同形であり、第3式の右辺は回転慣性の影響を示す項である。

(44)

Donnellの変位の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + P_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) u^0 + P_2 \frac{\partial^2 v^0}{\partial \xi \partial \theta} - \nu \frac{\partial w^0}{\partial \xi} + R^2 \frac{P_x}{E_p} = 0$$

(2.37a)

$$P_2 \frac{\partial^2 u^0}{\partial \xi \partial \theta} + \left(P_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) v^0 - \frac{\partial w^0}{\partial \theta} + R^2 \frac{P_\theta}{E_p} = 0$$

(2.37b)

$$\nu \frac{\partial u^0}{\partial \xi} + \frac{\partial v^0}{\partial \theta} - (\kappa^2 \nabla^4 + 1 + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}) w^0 - \left(\frac{\partial m_x}{\partial \theta} + R \frac{\partial m_\theta}{\partial x} - R^2 P_z\right)$$

$$= -\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\frac{\partial v^0}{\partial \theta} + \nabla^2 w^0\right) \quad (2.37c)$$

最後に前節の構成方程式の稿では触れなかった修正一次近似理論を紹介しておく。^[19]

くどいようだが、一次近似理論では平衡方程式(2.4c)は満足されていない。この矛盾を取り去るために、面内せん断力の構成方程式として $N_{\theta x}$ については式(2.20c)をそのまま用いるものとし、 $N_{x\theta}$ については式(2.4c)から得られる関係式

$$N_{x\theta} = N_{\theta x} - M_{\theta x}/R$$

を用いる方法が考えられた。すなわち面内せん断力に対する構成方程式が、次のようになる。

$$N_{x\theta} = \frac{Gh}{R} \left\{ \frac{\partial u^0}{\partial \theta} + (1 + \kappa^2) \frac{\partial v^0}{\partial \xi} + 2\kappa^2 \frac{\partial^2 w^0}{\partial \xi \partial \theta} \right\} \quad (2.38a)$$

$$N_{\theta x} = \frac{Gh}{R} \left(\frac{\partial u^0}{\partial \theta} + \frac{\partial v^0}{\partial \xi} \right) \quad (2.38b)$$

その他の合応力成分については式(2.20)をそのまま用い、

一次近似理論の場合と全く同様の手続きにより変位の方程式を導けば、以下のようなになる。

面外せん断変形無視による修正一次近似の変位の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + p_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) u^0 + p_2 \frac{\partial^2 v^0}{\partial \xi \partial \theta} - \nu \frac{\partial w^0}{\partial \xi} + R^2 \frac{P_x}{E_p} = 0 \quad (2.39a)$$

$$\begin{aligned} p_2 \frac{\partial^2 u^0}{\partial \xi \partial \theta} + \left\{ (1 + 2k^2) p_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (1 + k^2) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} v^0 \\ + \left\{ k^2(2 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 1 \right\} \frac{\partial w^0}{\partial \theta} + \frac{m_x + R^2 P_\theta}{E_p} \\ = k^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(v^0 + \frac{\partial w^0}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.39b)$$

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial u^0}{\partial \xi} - (k^2 \nabla^2 - 1) \frac{\partial v^0}{\partial \theta} - (k^2 \nabla^4 + 1 + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}) w^0 - \left(\frac{\partial m_x}{\partial \theta} \right. \\ \left. + R \frac{\partial m_\theta}{\partial x} - R^2 P_z \right) \frac{1}{E_p} = -k^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\frac{\partial v^0}{\partial \theta} + \nabla^2 w^0 \right) \end{aligned} \quad (2.39c)$$

ここで、式(2.39a)および(2.39c)は一次近似理論における式(2.35a)および(2.35c)と同一形であり、各式の右辺は回転慣性の影響を示す項である。

以上のように、古典理論では変位の方程式は中央面上の変位成分(u^0, v^0, w^0)に関する3元の連立微分方程式として得られる。

なお、今までの式すべてに並進および回転の慣性が含まれている。

軸対称変形の場合

これまで示した変位の方程式は一般形であるから、軸対称変形に対する方程式は単に変数 θ による微分を零とするだけで得られる。後に参照するための便宜を考えて、あえて記しておく。変位の方程式に対する名称は一般形に対する名称をそのまま用いることにした。

面外せん断変形を考慮した理論すなわち修正理論から始める。二次近似すなわち Mirsky-Herrmann の変位の方程式は以下のようになる。

Mirsky-Herrmann の変位の方程式 (軸対称)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) u^0 + \kappa^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) R\psi_x - \nu \frac{\partial w^0}{\partial \xi} + R^2 \frac{P_x}{E_p} = 0$$

(2.40a)

$$\kappa^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) u^0 + \left\{ \kappa^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) - \kappa_x p_1 \right\} R\psi_x + \kappa_x p_1 \frac{\partial w^0}{\partial \xi}$$

$$+ m_\theta / E_p = 0$$

(2.40b)

$$\nu \frac{\partial u^0}{\partial \xi} - \kappa_x p_1 R \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} + \left\{ \kappa_x p_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - (1 + \kappa^2) \right\} w^0 + R^2 \frac{P_2}{E_p} = 0$$

(2.40c)

$$\left(p_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - p_4 + \kappa^2 \right) v^0 + \left\{ \kappa^2 \left(p_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) + p_4 - \kappa^2 \right\} R\psi_\theta$$

$$+ R^2 P_\theta / E_p = 0$$

(2.40d)

$$\left\{ \kappa^2 \left(p_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) + p_4 - \kappa^2 \right\} v^0 + \left\{ \kappa^2 \left(p_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) - p_4 + \kappa^2 \right\} R\psi_\theta$$

$$+ m_x / E_p = 0$$

(2.40e)

一次近似の変位の方程式は以下のようになる。

面外せん断変形を考慮による一次近似の変位の方程式 (軸対称)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) u^0 - \nu \frac{\partial w^0}{\partial \xi} + R^2 \frac{P_x}{E_p} = 0 \quad (2.41a)$$

$$\left\{ \kappa^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) - \kappa_x p_1 \right\} R \psi_x + \kappa_x p_1 \frac{\partial w^0}{\partial \xi} + \frac{m_\theta}{E_p} = 0 \quad (2.41b)$$

$$\nu \frac{\partial u^0}{\partial \xi} - \kappa_x p_1 R \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} + \left(\kappa_x p_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 1 \right) w^0 + R^2 \frac{P_z}{E_p} = 0 \quad (2.41c)$$

$$\left(p_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \kappa_\theta p_1 \right) v^0 + \kappa_\theta p_1 R \psi_\theta + R^2 \frac{P_\theta}{E_p} = 0 \quad (2.41d)$$

$$\kappa_\theta p_1 v^0 + \left\{ \kappa^2 \left(p_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) - \kappa_\theta p_1 \right\} R \psi_\theta + \frac{m_x}{E_p} = 0 \quad (2.41e)$$

ここで、変位成分 (u^0, ψ_x, w^0) に関する三元の連立微分方程式 (破線の上) は曲げによる連成した方程式であり、変位成分 (v^0, ψ_θ) に関する二元の連立微分方程式 (破線の下) はねじりによる連成した方程式である。すなわち、軸対称変形のもとでは曲げとねじりは連成しない。

次に、面外せん断変形を無視した理論すなわち古典理論について示す。二次近似すなわち Flugge の変位の方程式は、以下のようになる。

Flugge の変位の方程式 (軸対称)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) u^0 + \left(\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nu\right) \frac{\partial w^0}{\partial \xi} + R^2 \frac{P_x}{E_p} = 0 \quad (2.42a)$$

(48)

$$\begin{aligned} & \left(-\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \nu\right) \frac{\partial u^0}{\partial \xi} - \left(\kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 1 + \kappa^2 + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) w^0 - \left(\frac{\partial m_\theta}{\partial \xi} - R^2 P_z\right) \frac{1}{E_p} \\ & = -\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\frac{\partial u^0}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w^0}{\partial \xi^2}\right) \quad (2.42b) \end{aligned}$$

$$\left\{ (1+3\kappa^2) P_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - (1+\kappa^2) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} v^0 + \frac{m_x + R^2 P_\theta}{E_p} = \kappa^2 \frac{\partial^2 v^0}{\partial \tau^2} \quad (2.42c)$$

一次近似すなわち Love-Reissner の変位の方程式は式 (2.35) より次のようになる。

面外せん断変形無視による一次近似の変位の方程式 (軸対称)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) u^0 - \nu \frac{\partial w^0}{\partial \xi} + R^2 \frac{P_x}{E_p} = 0 \quad (2.43a)$$

$$\nu \frac{\partial u^0}{\partial \xi} - \left(\kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 1 + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) w^0 - \left(\frac{\partial m_\theta}{\partial \xi} - R^2 P_z\right) \frac{1}{E_p} = -\kappa^2 \frac{\partial^4 w^0}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} \quad (2.43b)$$

$$\left\{ (1+\kappa^2) P_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} v^0 + \frac{m_x + R^2 P_\theta}{E_p} = \kappa^2 \frac{\partial^2 v^0}{\partial \tau^2} \quad (2.43c)$$

ここで、変位成分 (u^0, v^0, w^0) に関する三元の連立微分方程式 (破線の上) は曲げによる連成した方程式であり、変位成分 v^0 に関する微分方程式 (破線の下) はねじりによる方程式である。すなわち、軸対称変形のもとでは曲げとねじりは連成しない。また、各式の右辺は回転慣性の影響を示す項である。Donnell の理論および修正一次近似理論は軸対称変形の場合、一次近似理論の式 (2.43) とほとんど同じになるので、記

述を省略する。

本節で示した連立微分方程式の微分演算子をマトリクス表示してみると、面外せん断変形を考慮するしないにかかわらず二次近似理論および一次近似理論には対称性がある。しかし、Donnellの理論および修正一次近似理論では対称性が失われている。

2.5 変位方程式の簡単化(古典理論)

前節までに示した理論を概念図にまとめると図2.3のようになる。各理論にはその導出過程から考えて精度の高いと思われる順番に番号(1), (2), (3), (4), (5), (6)を付してある。

図中の実線の矢印は構成方程式における近似により派生した理論間の相関を示しており、これは2.3節で示したとおりである。破線の矢印は慣性項における近似を示しており、第一段階として回転慣性(式(2.4)における右辺に相当する)を無視した理論が考えられる。したがって、これにも理論の種類と同数の式が存在する。そこで、これらの理論を基になる理論(3), (4), (5), (6)と対応させて(3-1), (4-1), (5-1), (6-1)と番号を付した。回転慣性の項は、変位方程式(たとえばFlüggeの式(2.33)を参照)をみてもわかるように高次項であるから、この近似はそれなりに妥当な考え方である。その反面、この近似を導入しても式の形はあまり簡単にならない。

一般には、この段階の式を動的な古典理論と呼ばれている*。

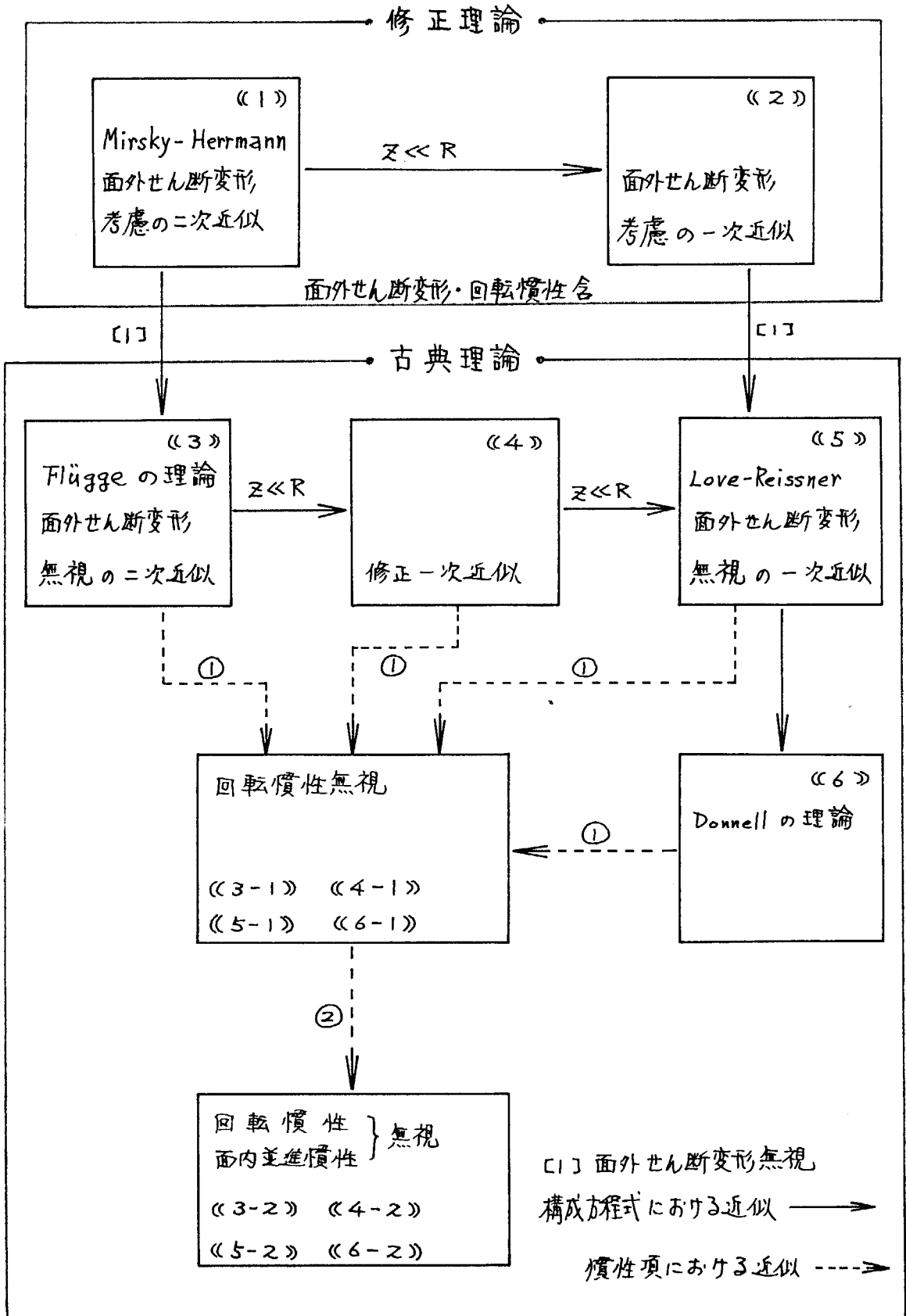
第二段階として、回転慣性に加え面内並進慣性(式(2.3a)および(2.3b)の右辺に相当する)も無視する近似方法がある。

これらの理論を基になる理論と対応させて《3-2》,《4-2》,《5-2》,《6-2》と番号を付した。この近似を導入すると、もはや半径方向の並進慣性(式(2.3c)の右辺に相当する)だけになってしまう。面内並進慣性項は半径(面外)方向並進慣性項と同じ次数であるため、これを無視した理論はその精度がかなり失われているものと思われる。しかし、式の形が非常に簡潔になるため、しばしば用いられる機会がある。円筒殻の振動で、半径方向成分の運動が支配的であると考えられるような問題に対しては妥当な近似方法とも思われるが、前述の理由により結果の精度については何らかの方法により検定しておかなければならない。

図2.3に示されている各理論を考慮しておけば、現存する動的円筒殻理論の種類と各段階における近似理論のほとんどすべてを包含しているものと思われる。

ところで変位の方程式は、修正理論では5元の、古典理論では3元のそれやれ連立微分方程式として与えられた。言い換えれば、面外せん断変形を考慮するか無視するかで方程式

* 本論文では面外せん断変形の有無をもって理論を体系化しているので、回転慣性の有無は修正理論と古典理論の分類には関係がない。なぜならば、回転慣性の有無は理論の導出過程に全く影響がなく、式の形も本質的にはほとんど変化がないからである。



① 回転慣性無視 ② 回転慣性・面内並進慣性ともに無視

図 2.3 本論文で取り扱っている理論の相関図

の元数がえだけ異なつた。

円筒殻の境界値問題では変位の方程式を直接解くことになる。したがって、連立微分方程式のままではなく単一の微分方程式にしておいた方が、解析がはるかに楽になり数値計算に要する時間も短縮できる。

しかし、面外せん断変形を考慮した修正理論における5元連立微分方程式から単一の微分方程式を導くのは著しく困難である。したがって、この理論に基づく解析では連立微分方程式をそのまま利用する以外に方法がないと思われる。

一方、古典理論における3元連立微分方程式ならば単一の微分方程式とすることができ。そこで本節では、古典理論に限って単一の方程式の誘導を行い、次にその単一の方程式の単純化を試みた。対象は図2.3における古典理論の枠内の理論である。

以下に Flügge の理論 (図2.3中の「3」に相当する)による変位の方程式(2.33)を例に単一の方程式の誘導と単純化の方法を示すことにする。

まず式(2.33a)および(2.33b)を変位成分(u^0, v^0, w^0)に関する連立方程式とみなして、 u^0 あるいは v^0 の係数が等しくなるように両式の両辺にそれぞれ微分演算子を乗ずる。そして、両式の辺々を引算し u^0 あるいは v^0 を消去すれば、それぞれ v^0 と u^0 が w^0 だけの関数として求められることになる。その結果だけを示すと以下のようになる。

ただし、式(2.33)中の円筒殻上下面における外力成分($P_x, P_\theta, P_z, m_x, m_\theta$)の項は零として計算を行うものとする。

$$\begin{aligned}
\Phi^4 u^0 = & \left\{ -\kappa^2(1+3\kappa^2) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 3\kappa^4 \rho_1 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + \nu(1+3\kappa^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right. \\
& - \left. \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \frac{\partial w^0}{\partial \xi} + \left\{ \kappa^2(1+3\kappa^2) \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \kappa^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + 3\kappa^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right. \\
& - \left. \kappa^2(1+3\kappa^2) \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - (1+3\kappa^2) \frac{\nu}{\rho_1} \right\} \frac{\partial^3 w^0}{\partial \xi \partial \tau^2} \quad (2.44a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^4 v^0 = & \left\{ -2\kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - \kappa^2(2+\kappa^2(1+\rho_1)) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + (2+\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right. \\
& + (1+\kappa^2) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left. \right\} \frac{\partial w^0}{\partial \theta} + 2 \left\{ \kappa^2 \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \kappa^2(1+\kappa^2) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right. \\
& - \left. \frac{\kappa^2}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2\rho_1} \right\} \frac{\partial^3 w^0}{\partial \theta \partial \tau^2} \quad (2.44b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{そこで, } \Phi^4 = & (1+3\kappa^2) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \left\{ 2+\kappa^2(4+3\kappa^2) \rho_1 \right\} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} \\
& + (1+\kappa^2) \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} - \left\{ (1+3\kappa^2) \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{1+\rho_1}{\rho_1} + 4\kappa^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + 3\kappa^4 \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - (1+3\kappa^2) \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}
\end{aligned}$$

次に、式(2.33c)の両辺に微分演算子 Φ^4 を乗じて式(2.44)を代入すれば、 u^0 と v^0 が消去され単一の微分方程式が得られる。これを半径方向変位 w^0 について書けば、以下のとおりである。

$$\begin{aligned}
(1+3\kappa^2)(1-\kappa^2) \frac{\partial^8 w^0}{\partial \xi^8} + \left\{ 4+\kappa^2(4+3\rho_1) + 9\kappa^4 \rho_1 \right\} \frac{\partial^8 w^0}{\partial \xi^6 \partial \theta^2} + \left\{ 6 \right. \\
\left. + 3\kappa^2(2-\nu) - \nu^2 \kappa^4 \right\} \frac{\partial^8 w^0}{\partial \xi^4 \partial \theta^4} + \left\{ 4+\kappa^2(2+3\rho_1) + 3\kappa^4 \rho_1 \right\} \frac{\partial^8 w^0}{\partial \xi^2 \partial \theta^6}
\end{aligned}$$

(54)

$$\begin{aligned}
& + (1+k^2) \frac{\partial^8 W^0}{\partial \theta^8} + 2\nu(1+k^2) \frac{\partial^6 W^0}{\partial \xi^6} + \{6 + 3k^2(2-\nu+\nu^2)\} \frac{\partial^6 W^0}{\partial \xi^4 \partial \theta^2} \\
& + \{2(4-\nu) + k^2(2+10P_1) + 6k^4 P_1\} \frac{\partial^6 W^0}{\partial \xi^2 \partial \theta^4} + 2(1+k^2) \frac{\partial^6 W^0}{\partial \theta^6} \\
& + (1+3k^2) \left(1 + \frac{1-\nu^2}{k^2}\right) \frac{\partial^4 W^0}{\partial \xi^4} + \{2(2-\nu) + 7k^2 P_1 + 3k^4 P_1\} \frac{\partial^4 W^0}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} \\
& + (1+k^2) \frac{\partial^4 W^0}{\partial \theta^4} = \left\{ (1+3k^2)(1-k^2) \frac{1}{P_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-k^2}{P_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right. \\
& - \left. \left(3 + \frac{1}{k^2}\right) \frac{1}{P_1} \right\} \frac{\partial^6 W^0}{\partial \tau^6} - \left\{ (1+3k^2)(1-k^2) \left(1 + \frac{2}{P_1}\right) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \left(2 \frac{2+P_1}{P_1} \right. \right. \\
& + \left. \left. k^2 \frac{4+P_1}{P_1} + 9k^4\right) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \left(\frac{2+P_1}{P_1} + k^2 \frac{3}{P_1} - k^4\right) \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} - (1+3k^2) \left(\frac{1+P_1}{P_1} \right. \right. \\
& - \left. \left. k^2 \frac{2\nu}{P_1}\right) \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \left(\frac{1+P_1}{P_1} - 2k^2 \frac{1+2P_2}{P_1} - 3k^4 \frac{1+P_1}{P_1}\right) \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right. \\
& + (1+k^2)(1+3k^2) \frac{1}{k^2} \frac{1}{P_1} \left. \right\} \frac{\partial^4 W^0}{\partial \tau^4} + \left\{ (1-k^2)(1+3k^2) \frac{1+2P_1}{P_1} \frac{\partial^6}{\partial \xi^6} + \left(3 \frac{1+2P_1}{P_1} \right. \right. \\
& + \left. \left. k^2 \frac{33-16\nu+3\nu^2}{4P_1} + 9k^4(1+P_1)\right) \frac{\partial^6}{\partial \xi^4 \partial \theta^2} + \left(3 \frac{1+2P_1}{P_1} + k^2 \frac{15-10\nu+\nu^2}{2P_1} \right. \right. \\
& + \left. \left. 2\nu k^4\right) \frac{\partial^6}{\partial \xi^2 \partial \theta^4} + \left(\frac{1+2P_1}{P_1} + 5k^2 + 3k^4\right) \frac{\partial^6}{\partial \theta^6} - (1+3k^2) \left(1 - 2\nu k^2 \frac{1+P_1}{P_1}\right) \frac{1}{k^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \right. \\
& - \left. \left(2 - k^2 \frac{13-3\nu-4\nu^2}{2P_1} - 3k^4 \frac{11-6\nu+3\nu^2}{4P_1}\right) \frac{1}{k^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} - \left(1 - k^2 \frac{2+5P_1}{P_1} - 12k^4 \right. \right. \\
& - \left. \left. 6k^6\right) \frac{1}{k^2} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + (1+3k^2) \left(3+2\nu + k^2 \frac{1+P_1}{P_1}\right) \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(1+k^2 \frac{1+5P_1}{P_1} + 14k^4 \right. \right. \\
& + \left. \left. 6k^6\right) \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \frac{\partial^2 W^0}{\partial \tau^2}
\end{aligned}$$

(2.45)

これは、円筒殻に関する8階の微分方程式としてよく知られている式である。境界値問題の解析では、式(2.45)の解を求めればよいことになる。しかし、実際の境界条件では変位成分 (u^0, v^0, w^0) のすべてが含まれるので、式(2.44)の関係も用いなければならぬ。

次に、式(2.44)と(2.45)を簡単化する。式中の定数 κ^2 は $h^2/12R^2$ であるから、 $h/R=0.1$ であるとしても $\kappa^2 \doteq 0.00083$ となる。 $h/R=0.1$ といえば、相当に厚肉の円筒殻であり、これ以上の肉厚の円筒殻に対しては円筒殻理論の基になっている Kirchhoff-Love の仮定そのものが到底成立し得ないものと思われる。つまり、通常の円筒殻に対しては定数 κ^2 は1に対して無視しうる程度に小さいものと考えてよい。そこで、 $\kappa^2 \ll 1$ たとえば

$$(1+3\kappa^2)(1-\kappa^2) \rightarrow 1$$

$$\kappa^2(1+3\kappa^2) \rightarrow \kappa^2$$

$$4+\kappa^2(4+3P_1)+9\kappa^4P_1 \rightarrow 4$$

$$2(z-\nu)+7\kappa^2P_1+3\kappa^4P_1 \rightarrow 2(z-\nu)$$

なる近似により式(2.44)および(2.45)を簡単化すれば、以下のようになる。^{*}

$$\left(\nabla^4 + \frac{1+P_1}{P_1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^2 + \frac{1}{P_1} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) u^0 = \left(-\kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 3\kappa^4 P_1 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right)$$

* 必ず単一の微分方程式を導いた後に簡単化を行わなければならない。なぜならば、連立微分方程式の段階でこの簡単化を行ってしまうと誤った式を導いてしまうからである。

(56)

$$+ \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial w^0}{\partial \xi} + \left(\kappa^2 \frac{1+p_1}{p_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \kappa^2 \frac{p_2}{p_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\kappa^2}{p_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\nu}{p_1} \right) \frac{\partial^3 w^0}{\partial \xi \partial \tau^2} \quad (2.46a)$$

$$\left(\nabla^4 + \frac{1+p_1}{p_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \nabla^2 + \frac{1}{p_1} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \right) w^0 = \left(-2\kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - 2\kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + (2+\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial w^0}{\partial \theta} + 2 \left(\kappa^2 \frac{1+p_1}{p_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\kappa^2}{p_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2p_1} \right) \frac{\partial^3 w^0}{\partial \theta \partial \tau^2} \quad (2.46b)$$

$$\left\{ \nabla^8 + 2\nu \frac{\partial^6}{\partial \xi^6} + 6 \frac{\partial^6}{\partial \xi^4 \partial \theta^2} + 2(4-\nu) \frac{\partial^6}{\partial \xi^2 \partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^6}{\partial \theta^6} + \frac{1-\nu^2}{\kappa^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2(2-\nu) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right\} w^0 = \frac{1}{p_1} \left(\nabla^2 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \frac{\partial^6 w^0}{\partial \tau^6} - \frac{1}{p_1} \left\{ (2+p_1) \nabla^4 - \frac{1+p_1}{\kappa^2} \nabla^2 + \frac{1}{\kappa^2 p_1} \right\} \frac{\partial^4 w^0}{\partial \tau^4} + \left(\frac{1+2p_1}{p_1} \nabla^6 - \frac{1}{\kappa^2} \nabla^4 + \frac{1}{\kappa^2} \nabla^2 + 4 \frac{p_2}{\kappa^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial^2 w^0}{\partial \tau^2} \quad (2.46c)$$

式(2.46)は式(2.44)および(2.45)と比べると著しく簡単になっているが、数値的にはその差は $\kappa/R \leq 1$ であれば1%以下である。したがって、境界値問題の解析には連立微分方程式である式(2.33)を用いるよりも単純化された単一の微分方程式(2.46)を用いた方がはるかに有利である。

同様にして、回転慣性や面内並進慣性を無視した場合の式も導かれる。また、他の理論における式についても同様である。

図2.3における古典理論の枠内における各理論について単純化した式を導いた。その結果だけを分類して示すと次のようになる。

[A] 回転慣性と並進慣性を含む場合

$$(\nabla^4 + L^4) u^0 = (\psi_1 + L_{1r}) \omega^0 \quad (2.47a)$$

$$(\nabla^4 + L^4) v^0 = (\psi_2 + L_{2r}) \omega^0 \quad (2.47b)$$

$$\Phi^8 \omega^0 = (L^6 + L_r^6) \omega^0 \quad (2.47c)$$

[B] 回転慣性を無視し並進慣性を含む場合

$$(\nabla^4 + L^4) u^0 = (\psi_1 + L_1) \omega^0 \quad (2.48a)$$

$$(\nabla^4 + L^4) v^0 = (\psi_2 + L_2) \omega^0 \quad (2.48b)$$

$$\Phi^8 \omega^0 = L^6 \omega^0 \quad (2.48c)$$

[C] 回転慣性と面内並進慣性をともに無視し、面外並進慣性だけを含む場合

$$\nabla^4 u^0 = \psi_1 \omega^0 \quad (2.49a)$$

$$\nabla^4 v^0 = \psi_2 \omega^0 \quad (2.49b)$$

$$\Phi^8 \omega^0 = -\frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \nabla^4 \omega^0 \quad (2.49c)$$

ここで、微分演算子 ∇ および ψ は座標 (x, θ) による微分を表し、微分演算子 L は時間微分を含むものでありこれを零と置くことにより静的な微分方程式が得られる。

これらの微分演算子の内で L^4 , L^6 , L_r^6 は各理論で共通しており、次のように表されるものである。

$$L^4 \equiv \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} - \frac{1 + \rho_1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \nabla^2 \quad (2.50a)$$

$$L^6 \equiv -\frac{1}{\kappa^2 \rho_1} \frac{\partial^6}{\partial \tau^6} - \left(\frac{1}{\rho_1} \nabla^4 - \frac{1}{\kappa^2} \frac{1 + \rho_1}{\rho_1} \nabla^2 + \frac{1}{\kappa^2 \rho_1} \right) \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \\ + \left(\frac{1 + \rho_1}{\rho_1} \nabla^6 - \frac{1}{\kappa^2} \nabla^4 + \frac{1}{\kappa^2} \nabla^2 + 4 \frac{\rho_2}{\kappa^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \quad (2.50b)$$

(58)

$$L_r^6 \equiv \frac{1}{P_1} \frac{\partial^6}{\partial \tau^6} \nabla^2 - \frac{1+P_1}{P_1} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \nabla^4 + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \nabla^6 \quad (2.50c)$$

他の微分演算子 $\Psi_1, \Psi_2, \Phi^8, L_{1r}, L_{2r}, L_1, L_2$ は理論によって異なり、まとめて整理すると以下のようになる。

(i) Flügge の理論 (二次近似理論)

$$\Psi_1 \equiv \left(-\kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 3\kappa^4 P_1 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (2.51a)$$

$$\Psi_2 \equiv \left\{ -2\kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - 2\kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + (2+\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.51b)$$

$$\begin{aligned} \Phi^8 \equiv & \nabla^8 + 2\nu \frac{\partial^6}{\partial \xi^6} + 6 \frac{\partial^6}{\partial \xi^4 \partial \theta^2} + 2(4-\nu) \frac{\partial^6}{\partial \xi^2 \partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^6}{\partial \theta^6} \\ & + \frac{1-\nu^2}{\kappa^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2(2-\nu) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \end{aligned} \quad (2.51c)$$

$$L_{1r} \equiv \left(\kappa^2 \frac{1+P_1}{P_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \kappa^2 \frac{P_2}{P_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\kappa^2}{P_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\nu}{P_1} \right) \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \tau^2} \quad (2.51d)$$

$$L_{2r} \equiv 2 \left(\kappa^2 \frac{1+P_1}{P_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\kappa^2}{P_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2P_1} \right) \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial \tau^2} \quad (2.51e)$$

$$L_1 \equiv \left(\kappa^2 \frac{1+P_1}{P_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \kappa^4 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\kappa^2}{P_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\nu}{P_1} \right) \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \tau^2} \quad (2.51f)$$

$$L_2 \equiv \left(\kappa^2 \frac{1+2P_1}{P_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\kappa^2}{P_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{P_1} \right) \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial \tau^2} \quad (2.51g)$$

式(2.3)および(2.4)の右辺の慣性項には一次近似するわけ
 $\varepsilon \ll R$ なる近似が導入されることが多い。この場合は L_1 およ
 L_2 だけが異なり、次のようになる。

$$L_1 \equiv \left(\frac{\kappa^2}{P_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\nu}{P_1} \right) \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \tau^2} \quad (2.51h)$$

(59)

$$L_2 \equiv \left(\kappa^2 \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial \tau^2} \quad (2.51i)$$

(ii) 修正一次近似理論

$$\Psi_1 \equiv \left\{ \kappa^2 \frac{(1+2\rho_1)\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \kappa^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (2.52a)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 \equiv & \left\{ -2\kappa^2 \frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - \kappa^2 \frac{4-3\nu+\nu^2}{2\rho_1} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} - \kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right. \\ & \left. + (2+\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.52b)$$

$$\begin{aligned} \Phi^8 \equiv & \nabla^8 + (3-\nu)(2+\nu) \frac{\partial^6}{\partial \xi^4 \partial \theta^2} + (7+\nu) \frac{\partial^6}{\partial \xi^2 \partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^6}{\partial \theta^6} \\ & + \frac{1-\nu^2}{\kappa^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + (3+\nu) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \end{aligned} \quad (2.52c)$$

$$L_{1r} \equiv - \left(\kappa^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\nu}{\rho_1} \right) \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \tau^2} \quad (2.52d)$$

$$L_{2r} \equiv \left(2\kappa^2 \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \kappa^2 \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\kappa^2}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial \tau^2} \quad (2.52e)$$

$$L_1 \equiv - \frac{\nu}{\rho_1} \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \tau^2} \quad (2.52f)$$

$$L_2 \equiv \left(\kappa^2 \frac{1+2\rho_1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\kappa^2}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial \tau^2} \quad (2.52g)$$

(iii) 一次近似理論 (Love-Reissner の理論)

$$\Psi_1 \equiv \left(\kappa^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \nabla^2 + \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (2.53a)$$

$$\Psi_2 \equiv \left\{ -\frac{\kappa^2}{\rho_1} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - \kappa^2 \frac{1+\nu}{\rho_1} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} - \kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + (z+\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.53b)$$

$$\Phi^8 \equiv \nabla^8 + z(z+\nu) \frac{\partial^6}{\partial \xi^4 \partial \theta^2} + z(3+\nu) \frac{\partial^6}{\partial \xi^2 \partial \theta^4} + z \frac{\partial^6}{\partial \theta^6} + \frac{1-\nu^2}{\kappa^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \frac{5+3\nu}{z} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \quad (2.53c)^*$$

$$L_{1r} \equiv - \left(\kappa^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\nu}{\rho_1} \right) \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \tau^2} \quad (2.53d)$$

$$L_{2r} \equiv \left(\frac{2\kappa^2}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \kappa^2 \frac{1+\nu}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\kappa^2}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial \tau^2} \quad (2.53e)$$

$$L_1 \equiv - \frac{\nu}{\rho_1} \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \tau^2} \quad (2.53f)$$

$$L_2 \equiv \frac{1}{\rho_1} (\kappa^2 \nabla^2 - 1) \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial \tau^2} \quad (2.53g)$$

(iv) Donnell の理論

$$\Psi_1 \equiv \left(\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (2.54a)$$

$$\Psi_2 \equiv \left\{ (z+\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.54b)$$

$$\Phi^8 \equiv \nabla^8 + \frac{1-\nu^2}{\kappa^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \quad (2.54c)$$

* Love の一次近似理論では，演算子 Φ^8 だけが異なり偶然にも修正一次近似理論の式 (2.52c) と完全に一致する。

$$L_{1r} \equiv L_1 \equiv -\frac{1}{P_1} \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \tau^2} \quad (2.54d)$$

$$L_{2r} \equiv L_2 \equiv -\frac{1}{P_1} \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial \tau^2} \quad (2.54e)$$

軸対称変形の場合

軸対称変形では二次近似および一次近似の両理論だけを対象とし、単純化された微分方程式の結果だけをまとめて以下に示すことにする。

[A] 回転慣性と並進慣性を含む場合

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) u^0 = (\psi_1 + L_1) w^0 \quad (2.55a)$$

$$\Phi^6 w^0 = (L^4 + L_r^4) w^0 \quad (2.55b)$$

[B] 回転慣性を無視し並進慣性を含む場合

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) u^0 = (\psi_1 + L_1) w^0 \quad (2.56a)$$

$$\Phi^6 w^0 = L^4 w^0 \quad (2.56b)$$

[C] 回転慣性と面内並進慣性をともに無視し、面外並進慣性だけを含む場合

$$\frac{\partial^2 u^0}{\partial \xi^2} = \psi_1 w^0 \quad (2.57a)$$

$$\Phi^6 w^0 = -\frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^4 w^0}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} \quad (2.57b)$$

ここで、微分演算子 L^4 は両理論で共通しており

(62)

$$L^4 \equiv \frac{1}{k^2} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} + \left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{k^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \quad (2.58)$$

である。他の微分演算子 $\Psi_1, \Phi^6, L_1, L_r^4$ は理論によって異なり、まとめて示すと以下のようになる。

(i) Flügge の理論 (二次近似理論, 軸対称)

$$\Psi_1 \equiv \left(-k^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \nu \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (2.59a)$$

$$\Phi^6 \equiv \frac{\partial^6}{\partial \xi^6} + 2\nu \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \frac{1-\nu^2}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad (2.59b)$$

$$L_1 \equiv k^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \tau^2} \quad (2.59c)$$

$$L_r^4 \equiv -\frac{\partial^6}{\partial \xi^2 \partial \tau^4} + \left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \quad (2.59d)$$

(ii) 一次近似理論 (軸対称)

$$\Psi_1 \equiv \nu \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (2.60a) \quad L_1 \equiv 0 \quad (2.60c)$$

$$\Phi^6 \equiv \frac{\partial^6}{\partial \xi^6} + \frac{1-\nu}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad (2.60b) \quad L_r^4 \equiv -\frac{\partial^6}{\partial \xi^2 \partial \tau^4} + \frac{\partial^6}{\partial \xi^4 \partial \tau^2} \quad (2.60d)$$

以上のように本節では、変位の連立微分方程式から単一の微分方程式を誘導し、さらに簡単化を行った。この処置により各理論における式をきわめて使いやすい形にまとめることができた。

以後に行う古典理論に基づいた解析では、原則として簡単化した微分方程式 (2.47), (2.48), (2.49) を用いるものとする。

2.6 円筒殻の境界条件

境界条件は勝手に定めることができない。円筒殻の各断面において然るべき組み合わせに従って変位成分あるいは合応力成分を定めなければならない。以下に完全円筒殻の場合に限って境界条件の定め方を修正理論と古典理論とに分けて記述することにする。なお言うまでもないが、完全(閉じた)円筒殻では x 軸に垂直な円形の断面に沿って定めることになる。

[A] 修正理論(面外せん断変形を考慮した理論)

修正理論では次の合計5組の内から各組一個づつの量について規定しなければならない。

$$(u^0 - N_x) \quad (2.61 a)$$

$$(v^0 - N_{x\theta}) \quad (2.61 b)$$

$$(w^0 - Q_x) \quad (2.61 c)$$

$$(\psi_x - M_x) \quad (2.61 d)$$

$$(\psi_\theta - M_{x\theta}) \quad (2.61 e)$$

ここで、すべて左側の量について規定すれば完全固定、逆にすべて右側の量について規定すれば完全自由である。左右の量をとりまぜて規定すれば完全固定と完全自由との中間的な状態となる。例として代表的な境界条件を取り上げて示すと次のようになる。

i) 自由縁

$$N_x = N_{x\theta} = Q_x = M_x = M_{x\theta} = 0 \quad (2.62 a)$$

ii) 支持縁 (1)

(64)

$$N_x = N_{x\theta} = W^0 = M_x = M_{x\theta} = 0 \quad (2.62b)$$

iii) 支持縁 (z)

$$N_x = v^0 = w^0 = M_x = \psi_\theta = 0 \quad (2.62c)$$

iv) 固定縁

$$u^0 = v^0 = w^0 = \psi_x = \psi_\theta = 0 \quad (2.62d)$$

一般の境界値問題では、変位の方程式を直接解くことになるので、応力成分を中央面上の変位成分 (u^0, v^0, w^0) と中央面に垂直な断面の傾き角成分 (ψ_x, ψ_θ) とで表示しておく必要がある。この表示式を二次近似と一次近似の理論について、まとめておくと次のようになる。

(A-1) Mirsky-Herrmann の理論 (二次近似理論) の表示式

$$\frac{R}{E_p} N_x = \frac{\partial u^0}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial v^0}{\partial \theta} - \nu w^0 + \kappa^2 R \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} \quad (2.63a)$$

$$\frac{R}{Gh} N_{x\theta} = \frac{\partial u^0}{\partial \theta} + \frac{\partial v^0}{\partial \xi} + \kappa^2 R \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \xi} \quad (2.63b)$$

$$\frac{R}{\kappa_x Gh} Q_x = \frac{\partial w^0}{\partial \xi} - R \psi_x \quad (2.63c)$$

$$\frac{R^2}{D} M_x = \frac{\partial u^0}{\partial \xi} - R \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} - \nu R \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \quad (2.63d)$$

$$\frac{R^2}{GI} M_{x\theta} = -\frac{\partial v^0}{\partial \xi} - R \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} - R \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \xi} \quad (2.63e)$$

(A-2) 一次近似理論における表示式

$$\frac{R}{E_p} N_x = \frac{\partial u^0}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial v^0}{\partial \theta} - \nu w^0 \quad (2.64a)$$

$$\frac{R}{Gh} N_{x\theta} = \frac{\partial u^0}{\partial \theta} + \frac{\partial v^0}{\partial \xi} \quad (2.64b)$$

$$\frac{R}{x_x G h} Q_x = \frac{\partial W^0}{\partial \xi} - R \psi_x \quad (2.64c)$$

$$\frac{R^2}{D} M_x = -R \frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} - \nu R \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \quad (2.64d)$$

$$\frac{R^2}{G I} M_{x\theta} = -R \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} - R \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \quad (2.64e)$$

[B] 古典理論 (面外せん断変形を無視した理論)

古典理論では次の合計4組の内から各組一個づつの量について規定しなければならない。

$$(u^0 \text{ --- } N_x) \quad (2.65a)$$

$$(v^0 \text{ --- } S_x) \quad (2.65b)$$

$$(w^0 \text{ --- } T_x) \quad (2.65c)$$

$$(\partial W^0 / \partial \xi \text{ --- } M_x) \quad (2.65d)$$

ここで、 S_x および T_x はそれぞれ周方向および半径方向の有効せん断力であり、次式で定義されるものである。

$$S_x = N_{x\theta} - M_{x\theta} / R \quad (2.66a)$$

$$T_x = Q_x + \partial M_{x\theta} / R \partial \theta \quad (2.66b)$$

式(2.65)において、すべて左側の量について規定すれば完全固定、逆にすべて右側の量について規定すれば完全自由である。左右の量をとりまぜて規定すれば、完全固定と完全自由との中間的な状態となる。例として代表的な境界条件を取り上げて示すと次のようになる。

i) 自由縁

$$N_x = S_x = T_x = M_x = 0 \quad (2.67a)$$

ii) 支持縁 (1)

$$N_x = S_x = w^0 = M_x = 0 \quad (2.67b)$$

iii) 支持縁 (2)

$$N_x = v^0 = w^0 = M_x = 0 \quad (2.67c)$$

iv) 固定縁

$$u^0 = v^0 = w^0 = \partial w^0 / \partial \xi = 0 \quad (2.67d)$$

一般の境界値問題では，変位の方程式を直接解くことになるので，合応力成分を中央面上の変位成分 (u^0, v^0, w^0) で表示しておく必要がある。この表示式を各理論について，まとめておくと次のようになる。

(B-1) Flüge の理論 (二次近似理論) における表示式

$$\frac{R}{E_p} N_x = \frac{\partial u^0}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial v^0}{\partial \theta} + (k^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \nu) w^0 \quad (2.68a)$$

$$\frac{k^2 R^3}{D p_1} S_x = \frac{\partial u^0}{\partial \theta} + (1+k^2) \frac{\partial v^0}{\partial \xi} + 3k^2 \frac{\partial^2 w^0}{\partial \xi \partial \theta} \quad (2.68b)$$

$$\begin{aligned} \frac{R^3}{D} T_x = & \left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + p_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) u^0 - (1+p_1) \frac{\partial^2 v^0}{\partial \xi \partial \theta} \\ & - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (2.68c)$$

$$\frac{R^2}{D} M_x = -\frac{\partial u^0}{\partial \xi} - \nu \frac{\partial v^0}{\partial \theta} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w^0 \quad (2.68d)$$

(B-2) 修正一次近似理論における表示式

$$\frac{R}{E_p} N_x = \frac{\partial u^0}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial v^0}{\partial \theta} - \nu w^0 \quad (2.69a)$$

$$\frac{k^2 R^3}{D p_1} S_x = \frac{\partial u^0}{\partial \theta} + (1+2k^2) \frac{\partial v^0}{\partial \xi} + 4k^2 \frac{\partial^2 w^0}{\partial \xi \partial \theta} \quad (2.69b)$$

$$\frac{R^3}{D} T_x = -\frac{\partial^2 v^0}{\partial \xi \partial \theta} - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \quad (2.69c)$$

$$\frac{R^2}{D} M_x = -\nu \frac{\partial v^0}{\partial \theta} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w^0 \quad (2.69d)$$

(B-3) Love-Reissner の理論 (一次近似理論) の表示式

$$\frac{R}{E_p} N_x = \frac{\partial u^0}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial v^0}{\partial \theta} - \nu w^0 \quad (2.70a)$$

$$\frac{\kappa^2 R^3}{D p_1} S_x = \frac{\partial u^0}{\partial \theta} + (1 + \kappa^2) \frac{\partial v^0}{\partial \xi} + 2\kappa^2 \frac{\partial^2 w^0}{\partial \xi \partial \theta} \quad (2.70b)$$

$$\frac{R^3}{D} T_x = -\frac{\partial^2 v^0}{\partial \xi \partial \theta} - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \quad (2.70c)$$

$$\frac{R^2}{D} M_x = -\nu \frac{\partial v^0}{\partial \theta} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w^0 \quad (2.70d)$$

(B-4) Donnell の理論における表示式

$$\frac{R}{E_p} N_x = \frac{\partial u^0}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial v^0}{\partial \theta} - \nu w^0 \quad (2.71a)$$

$$\frac{\kappa^2 R^3}{D p_1} S_x = \frac{\partial u^0}{\partial \theta} + \frac{\partial v^0}{\partial \xi} + 2\kappa^2 \frac{\partial^2 w^0}{\partial \xi \partial \theta} \quad (2.71b)$$

$$\frac{R^3}{D} T_x = -\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \quad (2.71c)$$

$$\frac{R^2}{D} M_x = -\frac{\partial^2 w^0}{\partial \xi^2} - \nu \frac{\partial^2 w^0}{\partial \theta^2} \quad (2.71d)$$

これらの式中の面外方向有効せん断力 T_x には時間微分を含む項があるが、これは回転慣性を考慮したことに由来するものである。したがって、回転慣性を無視した理論を用いる場合には、これらの時間微分項を零とすればよい。

2.7 無限長円筒殻の特性値(位相速度)

前節までに各種動的円筒殻理論についてその導出から利用方法まで統一的に記述した。その結果、各理論の特徴となっている因子や相互の関係の全容が明らかになった。これらの結果に基づいて本節と次節では、各理論を形成している諸因子すなわち構成方程式や各種慣性力などの相違が、具体的な問題に対してどのような形で現われてくるかを数値計算例をもって示すことにする。

動的円筒殻理論間の相違を調べる有力な手段として位相速度と波長の関係を計算する方法がある。

簡単のため円筒殻は無限長であるとし、軸方向波長 Λ で周方向波数 n の変形波が軸方向すなわち x 軸方向に速度 C_s で伝ばする問題を考える。そして波長 Λ と速度 C_s の関係を、修正理論については二次近似である Mirsky-Herrmann の理論により、古典理論については二次近似である Flugge の理論によりそれぞれ計算し、面外せん断変形と回転および面内並進の慣性の有無による相違を調べる。

2.7.1 Mirsky-Herrmann の理論による解析

ここで扱う理論は図 2.3 (p.2-35) における(1)に相当する。変位成分および断面の傾き角成分を次のように表すことにする。

$$u^0 = \Pi e^{i\alpha(\xi - \eta\tau)} \cos n\theta \quad (2.72a)$$

$$v^0 = V e^{i\alpha(\xi - \eta\tau)} \sin n\theta \quad (2.72b)$$

$$w^0 = W e^{i\alpha(\xi - \eta\tau)} \cos n\theta \quad (2.72c)$$

$$\Psi_x = \Psi_x e^{i\alpha(\xi - \eta\tau)} \cos n\theta \quad (2.72d)$$

$$\Psi_\theta = \Psi_\theta e^{i\alpha(\xi - \eta\tau)} \sin n\theta \quad (2.72e)$$

ここで、 $\alpha = 2\pi R/\Lambda$, $\eta = C_s/C$, $i = \sqrt{-1}$ であり、 $U, V, W, \Psi_x, \Psi_\theta$ は波の振幅を表す定数である。式(2.72)を Mirsky-Herrmann の変位の方程式(2.30)に代入すれば

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Psi_x \\ V \\ \Psi_\theta \\ W \end{bmatrix} = 0 \quad (2.73)$$

ここで、 $[A]$ は 5 次の対称行列であり、 k 行 l 列の成分 a_{kl} は次のとおりである。

$$a_{11} = \alpha^2 + (1 + \kappa^2)P_1 n^2 - \alpha^2 \eta^2, \quad a_{12} = \kappa^2(\alpha^2 - P_1 n^2 - \alpha^2 \eta^2),$$

$$a_{13} = -iP_2 n\alpha, \quad a_{14} = 0, \quad a_{15} = iV\alpha,$$

$$a_{22} = \kappa^2(\alpha^2 + P_1 n^2 - \alpha^2 \eta^2) + \kappa_x P_1, \quad a_{23} = 0, \quad a_{24} = -i\kappa^2 P_2 n\alpha,$$

$$a_{25} = -i\kappa_x P_1 \alpha, \quad a_{33} = -P_1 \alpha^2 - (1 + \kappa^2)n^2 + \kappa^2 - P_4 + \alpha^2 \eta^2,$$

$$a_{34} = -\kappa^2(P_1 \alpha - n^2) + P_4 - \kappa^2 + \kappa^2 \alpha^2 \eta^2, \quad a_{35} = P_3 n,$$

$$a_{44} = -\kappa^2(P_1 \alpha^2 + n^2) - P_4 + \kappa^2 + \kappa^2 \alpha^2 \eta^2, \quad a_{45} = -P_4 n,$$

$$a_{55} = -\kappa_x P_1 \alpha^2 - (P_4 - \kappa^2)n^2 - (1 + \kappa^2) + \alpha^2 \eta^2$$

式(2.73)より得られる方程式 $|A| = 0$ を、1 行目と 2 行目を $i\alpha$ で除し、1 列目と 2 列目に $i\alpha$ を乗じて、次のような形式に変形する。

$$\begin{vmatrix} T_{11}\eta^2 + S_{11} & \cdots & \gamma_{15}\eta^2 + S_{15} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{51}\eta^2 + S_{51} & \cdots & \gamma_{55}\eta^2 + S_{55} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.74)$$

(70)

$$\begin{aligned} \text{ここで, } r_{11} &= -\alpha^2, \quad r_{12} = -\kappa^2 \alpha^2, \quad r_{13} = r_{14} = r_{15} = 0, \quad r_{21} = r_{22} = -\kappa^2 \alpha^2, \\ r_{23} &= r_{24} = r_{25} = r_{31} = r_{32} = 0, \quad r_{33} = \alpha^2, \quad r_{34} = \kappa^2 \alpha^2, \quad r_{35} = r_{41} \\ &= r_{42} = 0, \quad r_{43} = r_{44} = \kappa^2 \alpha^2, \quad r_{45} = r_{51} = r_{52} = r_{53} = r_{54} = 0, \\ r_{55} &= \alpha^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{11} &= \alpha^2 + (1 + \kappa^2) p_1 n^2, \quad S_{12} = \kappa^2 (\alpha^2 - p_1 n^2), \quad S_{13} = -p_2 n, \quad S_{14} = 0, \\ S_{15} &= \nu, \quad S_{21} = \kappa^2 (\alpha^2 - p_1 n^2), \quad S_{22} = \kappa^2 (\alpha^2 + p_1 n^2) + \kappa_x p_1, \quad S_{23} = 0, \\ S_{24} &= -\kappa^2 p_2 n, \quad S_{25} = -\kappa_x p_1, \quad S_{31} = p_2 n \alpha^2, \quad S_{32} = 0, \\ S_{33} &= -p_1 \alpha^2 - (1 + \kappa^2) n^2 + \kappa^2 - p_4, \quad S_{34} = -\kappa^2 (p_1 \alpha^2 - n^2) + p_4 - \kappa^2, \\ S_{35} &= p_3 n, \quad S_{41} = 0, \quad S_{42} = \kappa^2 p_2 n \alpha^2, \quad S_{43} = -\kappa^2 (p_1 \alpha^2 - n^2) + p_4 - \kappa^2, \\ S_{44} &= -\kappa^2 (p_1 \alpha^2 + n^2) - p_4 + \kappa^2, \quad S_{45} = -p_4 n, \quad S_{51} = -\nu \alpha^2, \\ S_{52} &= \kappa_x p_1 \alpha^2, \quad S_{53} = p_3 n, \quad S_{54} = -p_4 n, \\ S_{55} &= -\kappa_x p_1 \alpha^2 - (p_4 - \kappa^2) n^2 - (1 + \kappa^2) \end{aligned}$$

次に式(2.74)を η^2 について展開すると、方程式 $|A| = 0$ は最終的に次のような形となる。

$$a_{10} \eta^{10} + a_8 \eta^8 + a_6 \eta^6 + a_4 \eta^4 + a_2 \eta^2 + a_0 = 0 \quad (2.75)$$

$$\text{ここで, } a_{10} = |X^{(10)}|, \quad a_8 = \sum_{j=1}^5 |X_j^{(8)}|, \quad a_6 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^5 |X_{ij}^{(6)}|,$$

$$a_4 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^5 |X_{ij}^{(4)}|, \quad a_2 = \sum_{j=1}^5 |X_j^{(2)}|, \quad a_0 = |X^{(0)}|$$

であり、 $[X^{(10)}], [X_j^{(8)}], [X_{ij}^{(6)}], [X_{ij}^{(4)}], [X_j^{(2)}], [X^{(0)}]$ は5次の行列であり長行 l 列の成分をそれぞれ $\chi_{kl}^{(10)}, \chi_{kl}^{(8)}, \chi_{kl}^{(6)}, \chi_{kl}^{(4)}, \chi_{kl}^{(2)}, \chi_{kl}^{(0)}$ とすると次のようになる。

$$(i) \chi_{kl}^{(10)} = r_{kl}$$

$$(ii) l=j \text{ のとき } \chi_{kl}^{(8)} = s_{kl}, \quad l \neq j \text{ のとき } \chi_{kl}^{(8)} = r_{kl}$$

$$(iii) l=i \text{ または } l=j \text{ のとき } \chi_{kl}^{(6)} = s_{kl}$$

$$l \neq i \text{ かつ } l \neq j \text{ のとき } \chi_{kl}^{(6)} = r_{kl}$$

$$(iv) \quad l=i \text{ または } l=j \text{ のとき } \chi_{kl}^{(4)} = r_{kl}$$

$$l \neq i \text{ かつ } l \neq j \text{ のとき } \chi_{kl}^{(4)} = s_{kl}$$

$$(v) \quad l=j \text{ のとき } \chi_{kl}^{(2)} = r_{kl}, \quad l \neq j \text{ のとき } \chi_{kl}^{(2)} = s_{kl}$$

$$(vi) \quad \chi_{kl}^{(0)} = s_{kl}$$

式(2.75)の数値解の求め方を簡単に説明する。まず κ^2 についての5次方程式とみなし、1根を試行錯誤法により求める。

この根を用いて数値的に因数分解し、式(2.75)から4次方程式を導く。この4次方程式を根の公式により求めれば、最初の根と合わせて5根がそろふことになる。この5根の平方根が速度 c_s となる。正のものは x 軸の正の方向に、負のものは逆に負の方向にそれぞれ伝はする波を意味する。式(2.75)は κ^2 について相異なる正の5実根をもつので、同一波長に対して異なる伝は速度をもつ5種類の波が常に存在する。

波長 Λ が零の場合と無限大の場合の極限值を求めると以下のようになる。

(I) $\Lambda \rightarrow \infty$ の場合

$$c_s \rightarrow \infty$$

(すべての波の伝は速度が無限大となる)

(II) $\Lambda \rightarrow 0$ の場合

$$c_s \rightarrow \sqrt{\kappa_2} c_2 \quad (\text{レ-リ-波})$$

$$c_s \rightarrow c_2 \quad (\text{せん断波, } c_2 = \sqrt{G/P})$$

$$c_s \rightarrow c \quad (\text{縦波, } c = \sqrt{E/(1-\nu^2)P})$$

(5種類の波が3種類の速度に収束する)

(72)

2.7.2 Flügge の理論による解析

ここで扱う理論は図 2.3 (p.2-35) における (3), (3-1), (3-2) に相当する。

Flügge の理論では, 半径方向変位 w^0 だけを

$$w^0 = W e^{i\alpha(\xi - \eta\tau)} \cos n\theta \quad (2.76)$$

と置き, 単純化された単一の微分方程式に代入する。まず, 式 (2.47c) および (2.48c) に代入すると, 次のような η^2 についての 3 次方程式が得られる。

$$a_6 \eta^6 + a_4 \eta^4 + a_2 \eta^2 + a_0 = 0 \quad (2.77)$$

$$\text{ここで } a_6 = \frac{1}{\rho_1} \frac{\alpha^6}{\kappa^2} + a_6^{(r)}, \quad a_6^{(r)} = \frac{1}{\rho_1} (\alpha^2 + n^2) \alpha^6$$

$$a_4 = - \left\{ (\alpha^2 + n^2)^2 + \frac{1 + \rho_1}{\kappa^2} (\alpha^2 + n^2) + \frac{1}{\kappa^2} \right\} \frac{\alpha^4}{\rho_1} + a_4^{(r)}$$

$$a_2 = \left\{ \frac{1 + \rho_1}{\rho_1} (\alpha^2 + n^2)^3 + \frac{1}{\kappa^2} (\alpha^2 + n^2)^2 + \frac{1}{\kappa^2} (\alpha^2 + n^2) + \frac{4\rho_2}{\kappa^2} \alpha^2 \right\} \alpha^2 + a_2^{(r)}$$

$$a_4^{(r)} = - \frac{1 + \rho_1}{\rho_1} (\alpha^2 + n^2)^2 \alpha^4, \quad a_2^{(r)} = (\alpha^2 + n^2)^3 \alpha^2$$

$$a_0 = - (\alpha^2 + n^2)^4 + 2\nu\alpha^6 + 6n^2\alpha^4 + 2(4 - \nu)n^4\alpha^2 + 2n^6 - \frac{1 - \nu^2}{\kappa^2} \alpha^4 - 2(2 - \nu)n^2\alpha^2 - n^4$$

回転慣性を無視した理論では $a_6^{(r)} = a_4^{(r)} = a_2^{(r)} = 0$ となる。

回転慣性と面内並進慣性をともに無視した理論では式 (2.76)

を式 (2.49c) に代入し, 次式が得られる。

$$(\alpha^2 + n^2)^2 \alpha^2 \eta^2 + \kappa^2 a_0 = 0 \quad (2.78)$$

式(2.77)および(2.78)はそれぞれ κ^2 についての3次および1次の方程式であるから、直接根の公式を用いることにより解が得られる。式(2.77)は κ^2 について相異なる正の3実根をもつので、同一波長に対して異なる伝ば速度をもつ種類の波が常に存在する。しかし式(2.78)では1実根しかないので、1種類の波しか存在しない。

波長 Λ が零と無限大の場合の極限值を求めると、以下のようになる。

(I) $\Lambda \rightarrow \infty$ の場合

$$\langle 3 \rangle C_s \rightarrow 0, \infty, \infty \quad (n=1)$$

$$C_s \rightarrow \infty, \infty, \infty \quad (n \geq 2)$$

$$\langle 3-1 \rangle C_s \rightarrow 0, \infty, \infty \quad (n=1)$$

$$C_s \rightarrow \infty, \infty, \infty \quad (n \geq 2)$$

$$\langle 3-2 \rangle C_s \rightarrow 0 \quad (n=1)$$

$$C_s \rightarrow \infty \quad (n \geq 2)$$

(II) $\Lambda \rightarrow 0$ の場合

$$\langle 3 \rangle C_s \rightarrow c_2, c, c$$

$$\langle 3-1 \rangle C_s \rightarrow c_2, c, \infty$$

$$\langle 3-2 \rangle C_s \rightarrow \infty$$

ただし、 $\langle 3 \rangle$ は回転と並進の慣性を考慮した理論

$\langle 3-1 \rangle$ は回転慣性だけを無視した理論

$\langle 3-2 \rangle$ は回転と面内並進の慣性を無視した理論

であり、図2.3 (p.2-35)を参照するとよい。

2.7.3 数値結果

数値計算ではポアソン比 ν は0.3とし、修正理論における

せん断係数は $\kappa_x = \kappa_\theta = \pi^2/12$ とした。

計算の対象とした円筒殻の肉厚比 h/R と変形波の周方向波数 n の組み合わせは5通りとし、図番との対応は次のとおりである。なお、いずれの場合も Mirsky-Herrmann および Flugge の両理論により計算した。

- ① $h/R = 0.1$, $n = 1$ \longrightarrow 図 2.4
- ② $h/R = 0.1$, $n = 2$ \longrightarrow 図 2.5
- ③ $h/R = 0.1$, $n = 4$ \longrightarrow 図 2.6
- ④ $h/R = 0.01$, $n = 1$ \longrightarrow 図 2.7
- ⑤ $h/R = 0.01$, $n = 2$ \longrightarrow 図 2.8

Mirsky-Herrmann の理論 (修正理論) では $(u^\circ, v^\circ, w^\circ)$ および (ψ_x, ψ_θ) に関連した5種類の波が存在する。5本の曲線は交差せず、 $\Delta \rightarrow 0$ のときの極限はいずれも有限値である。

Flugge の理論 (古典理論) では、並進慣性を考慮すれば $(u^\circ, v^\circ, w^\circ)$ に関連した3種類の波が存在する。3本の曲線は交差せず、 $\Delta \rightarrow 0$ のときの極限は回転慣性を考慮するか否かで大きく異なる。面外せん断変形を考慮することにより波が3種類から5種類に増加し、この変形を無視した理論では表し得なかった波の伝ばを表し得るようになる。

面内並進慣性をも無視し面外並進慣性だけを考慮した理論では1種類の波しか存在せず、 $\Delta \rightarrow 0$ の極限は無限大となる。

波長の短い領域では回転慣性の影響が大きく、この慣性を無視すると波長を無限小にしたとき伝ば速度が無限大となる波が現われる点に注目すべきである。

回転慣性に加えて面内並進慣性まで無視すると、もはや波動現象を表すとは言えない理論となってしまふ。

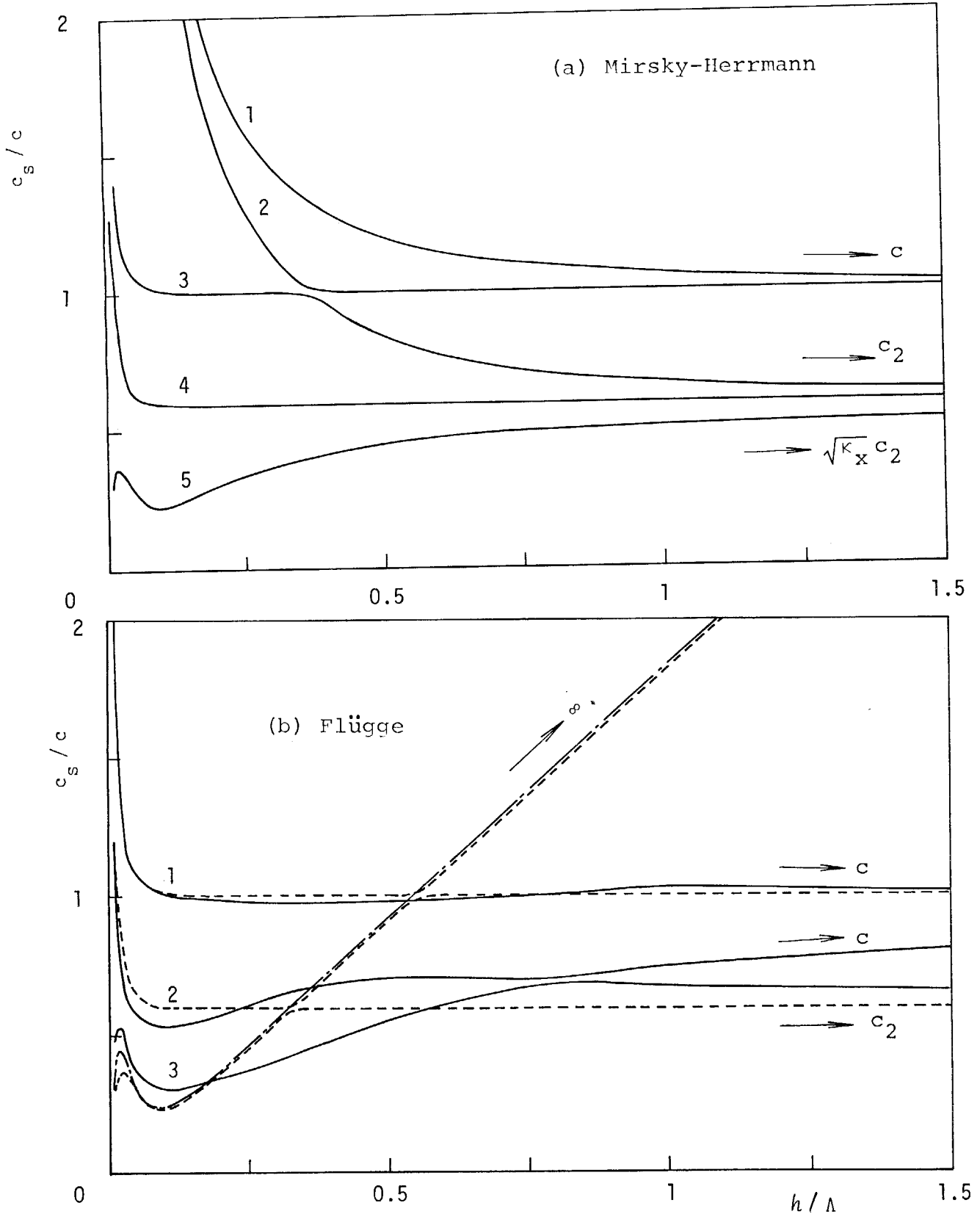


図 2.4 位相速度による円筒殻理論間の比較 (無限長, $h/R = 0.1$, $n = 1$)

- 回転慣性・並進慣性ともに考慮
- - - - - 回転慣性無視
- · - · - 回転慣性・面内並進慣性ともに無視

(76)

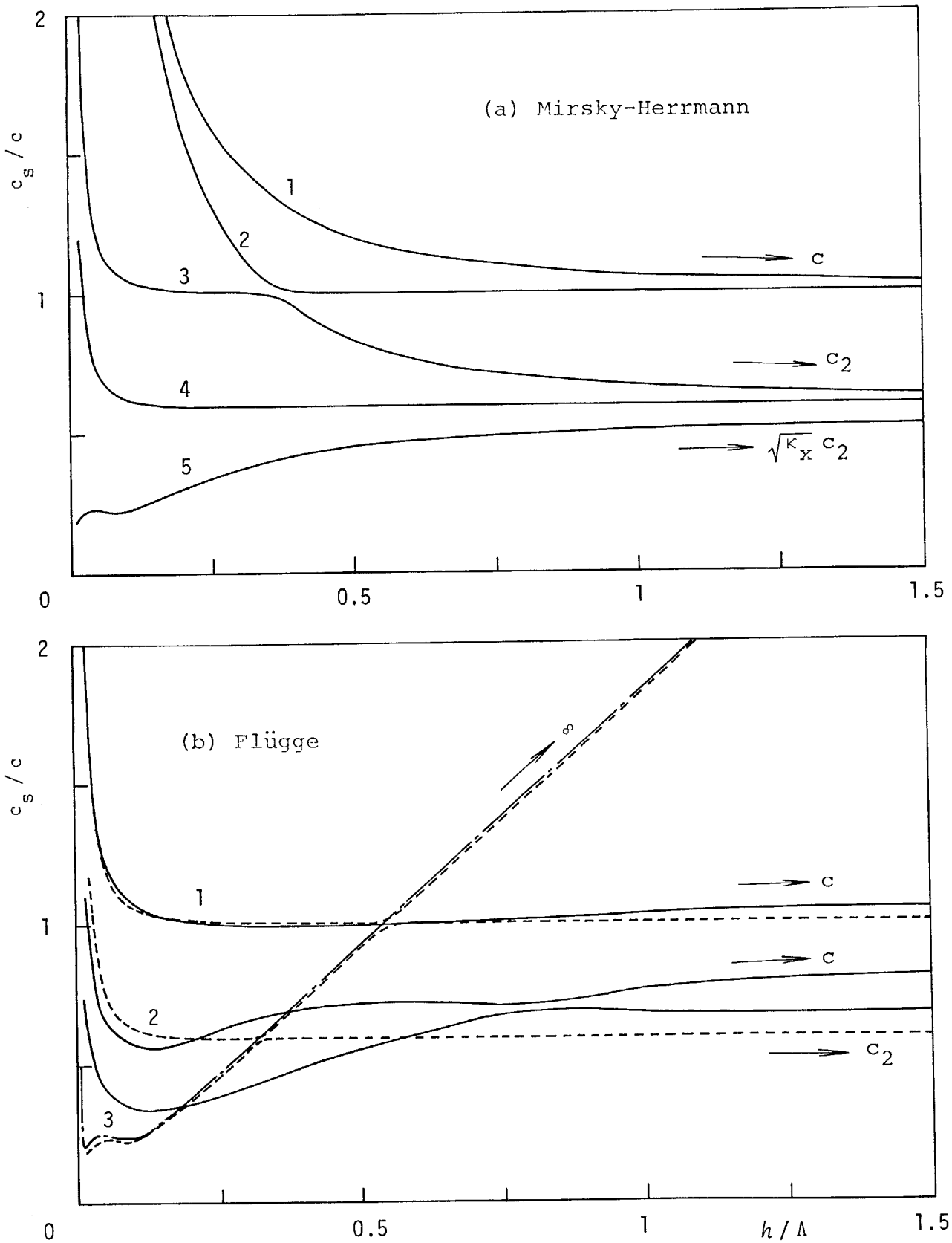


図2.5 位相速度による円筒殻理論間の比較 (無限長, $h/R=0.1$, $n=2$)

- 回転慣性・並進慣性ともに考慮
- - - - - 回転慣性無視
- · - · - 回転慣性・面内並進慣性ともに無視

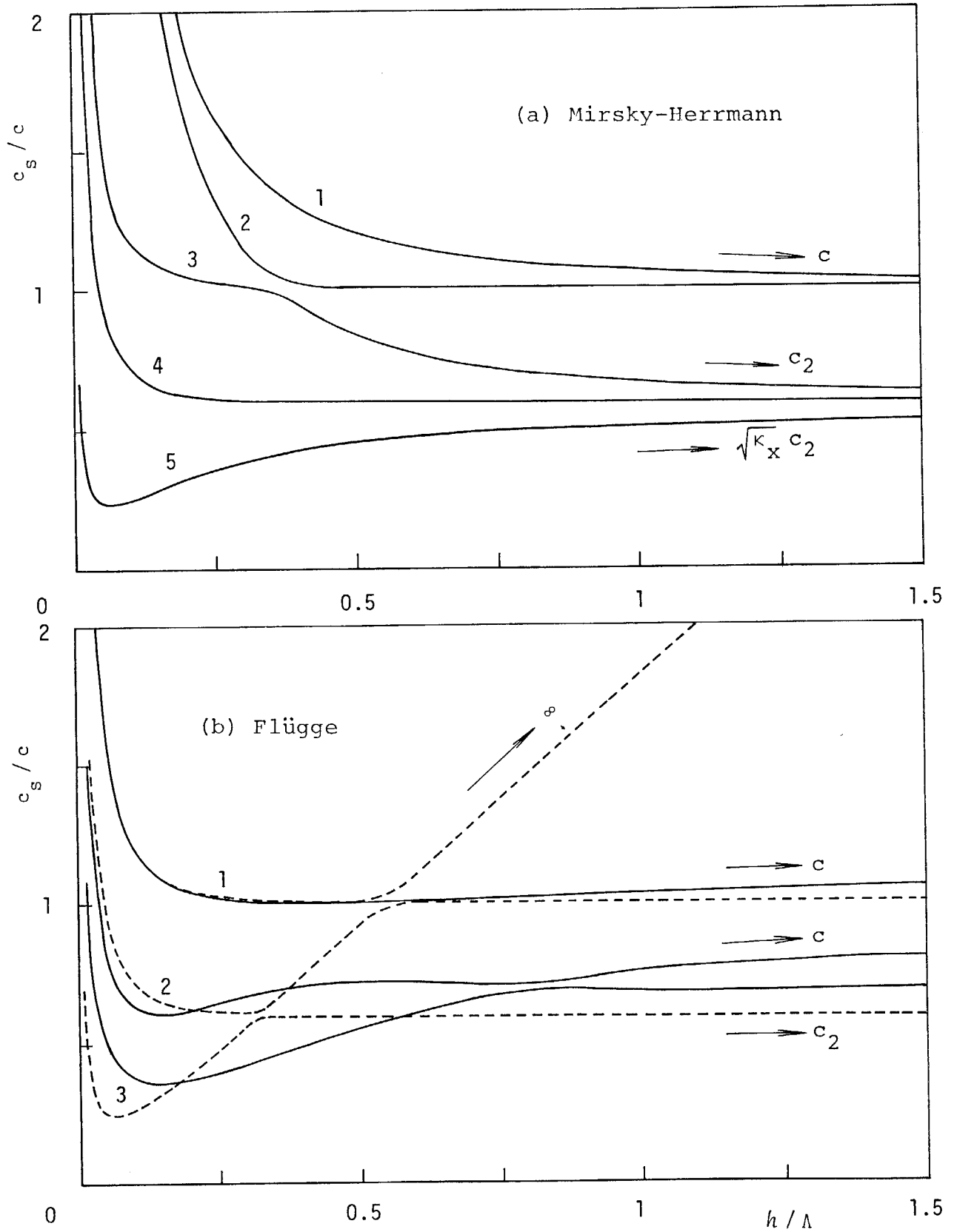


図2.6 位相速度による円筒殻理論間の比較 (無限長, $h/R = 0.1$, $n = 4$)

- 回転慣性・並進慣性ともに考慮
- - - - - 回転慣性無視
- · - · - 回転慣性・面内慣性ともに無視

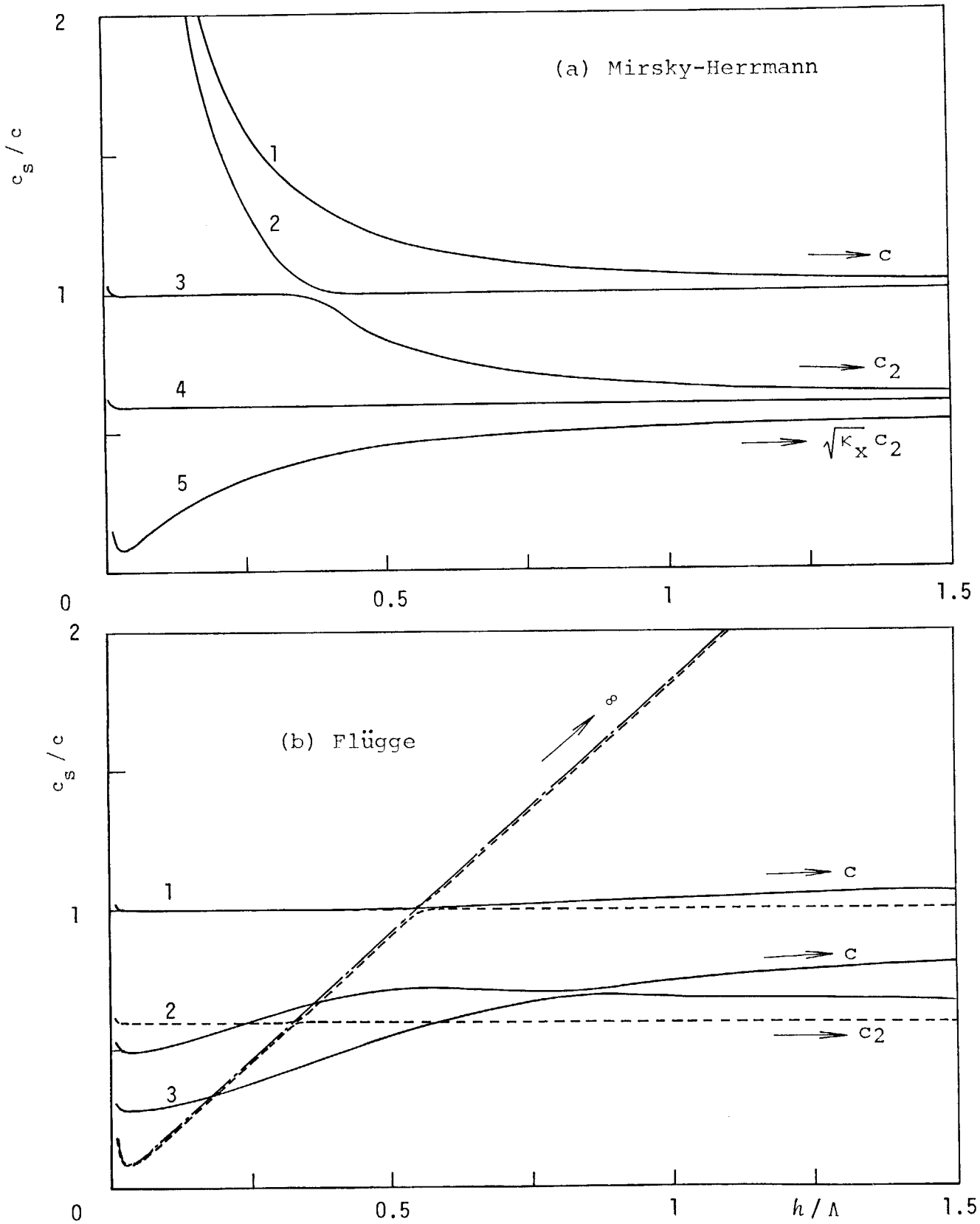


図2.7 位相速度による円筒殻理論間の比較 (無限長, $h/R=0.01$, $n=1$)

- 回転慣性・並進慣性ともに考慮
- - - - - 回転慣性無視
- · - · - 回転慣性・面内並進慣性ともに無視

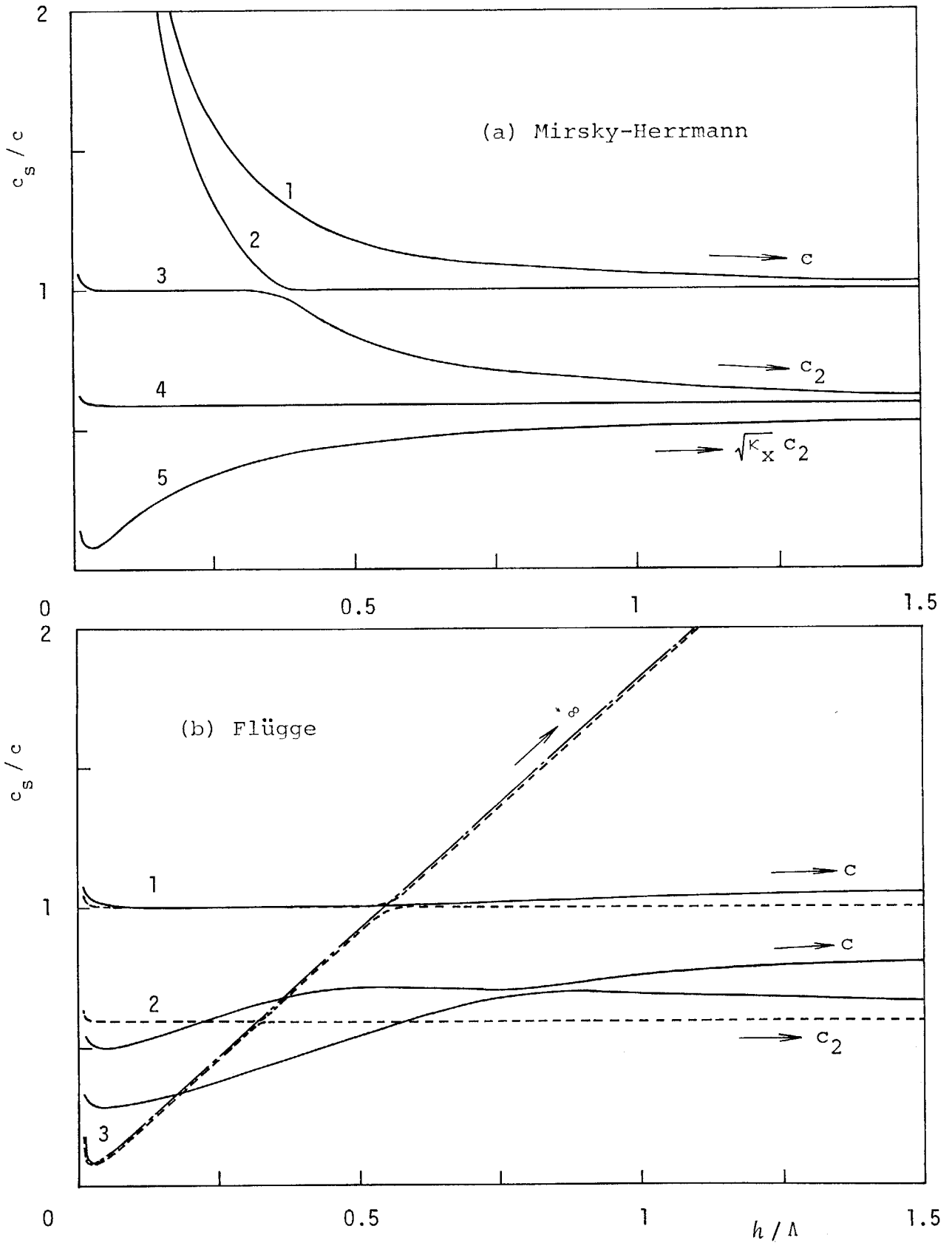


図2.8 位相速度による円筒殻理論間の比較(無限長, $h/R=0.01$, $n=2$)

- 回転慣性・並進慣性ともに考慮
- - - - - 回転慣性無視
- · - · - 回転慣性・面内並進慣性ともに無視

波動の伝は現象を考えると、伝は速度が c の縦波より速い伝は速度をもつ波が存在することは物理的に正当でない。したがって、波長が著しく長い領域を除けば、波動現象からみて正当な結果を与える理論は Mirsky-Herrmann の理論と回転慣性を考慮した Flüge の理論であると推測される。

とにかく、この位相速度の計算で明らかになった主要項目は二件ある。第一は面外せん断変形と面内並進慣性の影響が予想どおりに大きいことであり、第二は式を見ただけでは影響は少ないと思われた回転慣性が場合によっては意外に大きな効果を及ぼし無視できないことがある点である。

肉厚比 h/R や周方向波数 n が異なっても、これらの傾向はかわらない。

理論間の相違点の多くは図2.4～図2.8に立ちもどって定性的な説明を加えることができる。

2.8 有限長円筒殻の特性値 (固有振動数)

動的円筒殻理論間の相違を調べる簡便でしかも有力な手段として、位相速度を計算する方法と固有振動数を計算する方法がある。前者は円筒殻が無限長の場合に適しており、後者は有限長の場合に適している。この節では有限長円筒殻の特性値として、ある特定の境界条件のもとでの固有振動数を各理論に基づいて計算した。これらを互いに比較することにより特に面外せん断変形の有無および構成方程式の相違による影響と円筒殻の長さとの関係について調べた。

2.8.1 修正理論による解析

ここで扱う理論は図2.3 (p.2-35)における修正理論の枠内の「1」に相当する Mirsky-Herrmann の理論である。

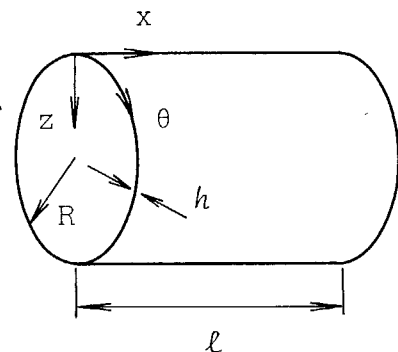


図2.9 有限長円筒殻

図2.9のような有限長円筒殻の固有振動数を解析するためには変位成分および断面の傾き角成分を次のように置けばよい。

$$U^0 = U_m(x) \cos n\theta e^{ipt} \quad (2.79 a)$$

$$V^0 = V_m(x) \sin n\theta e^{ipt} \quad (2.79 b)$$

$$W^0 = W_m(x) \cos n\theta e^{ipt} \quad (2.79 c)$$

$$\psi_x = \Phi_m(x) \cos n\theta e^{ipt} \quad (2.79 d)$$

$$\psi_\theta = \Psi_m(x) \sin n\theta e^{ipt} \quad (2.79 e)$$

ここで、 ν は固有振動数、 $n (= 1, 2, 3, \dots)$ は固有振動モードの周 (θ) 方向の波数であり、 $\{U_n(x), V_n(x), W_n(x), \Phi_n(x), \Psi_n(x)\}$ は $x = 0$ および l の両縁における境界条件によって定まる座標 x だけの関数である。いま簡単のため、この関数系に三角関数を用いて次のように置くことにする。

$$U_n(x) = A_{mn} \cos \frac{m\pi}{l} x \quad (2.80a)$$

$$V_n(x) = B_{mn} \sin \frac{m\pi}{l} x \quad (2.80b)$$

$$W_n(x) = C_{mn} \sin \frac{m\pi}{l} x \quad (2.80c)$$

$$\Phi_n(x) = D_{mn} \cos \frac{m\pi}{l} x \quad (2.80d)$$

$$\Psi_n(x) = E_{mn} \sin \frac{m\pi}{l} x \quad (2.80e)$$

ここで、 $m = 1, 2, 3, \dots$ であり、 (A_{mn}, \dots, E_{mn}) は周方向波数 n 、軸方向次数 m の固有振動モードに対する振幅を表す定数である。すると、両縁すなわち $x = 0$ および l において次の条件が恒等的に成立する。

$$N_x = v^0 = w^0 = M_x = \psi_\theta = 0 \quad (2.81)$$

この条件式は式(2.62c)の支持縁(2)と一致し、自由支持(Freely-Support)とも呼ばれている。要するに、 x 軸方向の固有振動モードが既知として式(2.80)で表される関数系を用いると、両縁自由支持円筒殻の固有振動数がきわめて簡単に求められるのである。

参考までに触れておくと、この固有振動モードを表す関数系が不明の場合は基礎方程式である変位の方程式の一般解から出発しなければならぬので、式(2.80)を用いた場合より

も著しく手間がかかる。なお、誤解のないように念を押しておくが、式(2.80)は境界条件式(2.81)のもとでの正解である。

式(2.80)を用いて式(2.79)を Mirsky-Herrmann の変位方程式(2.30)に代入すれば、次の式が得られる。

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{mn} \\ \vdots \\ E_{mn} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.82)$$

したがって、 $|A| = 0$ が固有振動数 λ を決定する固有方程式となる。方程式 $|A| = 0$ の具体形は次のようになる。

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda^2 b_{11} & a_{12} + \lambda^2 b_{12} & a_{13} & 0 & a_{15} \\ a_{21} + \lambda^2 b_{21} & a_{22} + \lambda^2 b_{22} & 0 & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & 0 & a_{33} + \lambda^2 b_{33} & a_{34} + \lambda^2 b_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} + \lambda^2 b_{43} & a_{44} + \lambda^2 b_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} + \lambda^2 b_{55} \end{vmatrix} = 0$$

(2.83)

ここで、 $\lambda (= R\beta/c)$ は無次元固有振動数であり、 a_{ij} および b_{ij} は以下のとおりである。

$$a_{11} = \alpha_m^2 + (1 + \kappa^2) P_1 \eta^2, \quad a_{12} = \kappa^2 \alpha_m^2 - \kappa^2 P_1 \eta^2, \quad a_{13} = -\alpha_m P_2 \eta,$$

$$a_{15} = \nu \alpha_m, \quad a_{22} = \kappa^2 \alpha_m^2 + (\kappa^2 \eta^2 + \kappa_x) P_1, \quad a_{24} = -\kappa^2 \alpha_m P_2 \eta,$$

$$a_{25} = -\kappa_x \alpha_m P_1, \quad a_{33} = \alpha_m^2 P_1 + (1 + \kappa^2) \eta^2 + P_4 - \kappa^2,$$

$$a_{34} = \kappa^2 \alpha_m^2 P_1 - \kappa^2 \eta^2 - P_4 + \kappa^2, \quad a_{35} = -P_3 \eta,$$

$$a_{44} = \kappa^2 \alpha_m^2 P_1 + \kappa^2 \eta^2 + P_4 - \kappa^2, \quad a_{45} = P_4 \eta,$$

$$a_{55} = \kappa_x \alpha_m^2 P_1 + (P_4 - \kappa^2) \eta^2 + 1 + \kappa^2$$

$$b_{11} = -1, \quad b_{12} = -\kappa^2, \quad b_{22} = -\kappa^2, \quad b_{33} = -1, \quad b_{34} = -\kappa^2, \quad b_{44} = -\kappa^2,$$

$$b_{55} = -1$$

$$\text{ただし, } a_{ij} = a_{ji}, \quad b_{ij} = b_{ji}, \quad \alpha_m = m\pi R/l$$

(84)

式(2.83)は展開すると形式的に次のような λ^2 に関する5次方程式となる。

$$a_{10}\lambda^{10} + a_8\lambda^8 + a_6\lambda^6 + a_4\lambda^4 + a_2\lambda^2 + a_0 = 0 \quad (2.84)$$

ここで、係数 (a_{10}, \dots, a_0) は式(2.74)から式(2.75)への過程と同じ方法により求められる。

この方程式は λ^2 について5個の正の実根を常にもつので、振動モードを示すパラメータ (n, m) の一组に対して合計5種類の固有振動数が求められることになる。これらの振動数はそれぞれ5種類の変位成分 $(u^0, v^0, w^0, \psi_x, \psi_\theta)$ のどれかが卓越した振動に分類される。分類は式(2.82)を用いて振幅を表す定数 (A_{mn}, \dots, E_{mn}) の比をそれぞれの振動数に対して計算することにより可能となる。

数値解は、式(2.83)をJacobi法で解くかまたは式(2.84)の形式にしてから式(2.75)において説明した方法により解くかいずれかの方法により求めればよい。

2.8.2 古典理論による解析

ここで扱う理論は図2.3 (p.2-35)における古典理論の枠内のすべての理論である。前項と同一の境界条件のもとでの固有振動数を求める。

古典理論では変位場が (u^0, v^0, w^0) だけで表されているので、それぞれの変位成分を式(2.79)および(2.80)と同形式で置けばよい。

古典理論では両縁すなわち $x=0$ および l における自由支持の条件は、次のようになる。

$$N_x = v^0 = w^0 = M_x = 0 \quad (2.85)$$

式(2.80)の形式の解は、すべての古典理論において式(2.85)の条件を完全に満足する。

式(2.80)を用いて式(2.79)を変位の方程式(2.33), (2.35), (2.37), (2.39)などに代入すれば、次の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{mn} \\ \vdots \\ C_{mn} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.86)$$

したがって、 $|A|=0$ が固有振動数 λ を決定する固有方程式となり、その具体形はFlüggeの式(2.33)を用いた場合

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda^2 b_{11} & a_{12} & a_{13} + \lambda^2 b_{13} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda^2 b_{22} & a_{23} + \lambda^2 b_{23} \\ a_{31} + \lambda^2 b_{31} & a_{32} + \lambda^2 b_{32} & a_{33} + \lambda^2 b_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.87)$$

ここで、 $\lambda (= R\rho/c)$ は無次元固有振動数であり

$$a_{11} = \alpha_m^2 + (1 + \kappa^2) \rho_1 n^2, \quad a_{12} = -\alpha_m \rho_2 n, \quad a_{13} = \kappa^2 \alpha_m^3 - \kappa^2 \alpha_m \rho_1 n^2 + \nu \alpha_m,$$

$$a_{22} = (1 + 3\kappa^2) \alpha_m^2 \rho_1 + n^2, \quad a_{23} = -\kappa^2 \alpha_m^2 n (1 + \rho_1) - n,$$

$$a_{33} = \kappa^2 (\alpha_m^2 + n^2)^2 - 2\kappa^2 n^2 + 1 + \kappa^2, \quad b_{11} = -1, \quad b_{13} = -\kappa^2 \alpha_m,$$

$$b_{22} = -(1 + 3\kappa^2), \quad b_{23} = 2\kappa^2 n, \quad b_{33} = -(1 + \kappa^2 \alpha_m^2 + \kappa^2 n^2)$$

である。ただし、 $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$, $\alpha_m = m\pi R/l$

式(2.87)を展開すると次のような λ^2 に関する3次方程式となる。

$$a_6 \lambda^6 + a_4 \lambda^4 + a_2 \lambda^2 + a_0 = 0 \quad (2.88)$$

ここで、係数 (a_6, \dots, a_0) は式(2.74)から式(2.75)への過程と同じ方法により求められる。

変位の方程式(2.33)のかわりに単純化された変位の方程式(2.47c)を用いた場合には、係数 (a_6, \dots, a_0) は簡単に求められる。

れ次のようになる。

$$a_6 = \frac{1}{\rho_1 \kappa^2} + a_6^{(r)}$$

$$a_4 = -\frac{1}{\rho_1} \left\{ (\alpha_m^2 + n^2)^2 + \frac{1 + \rho_1}{\kappa^2} (\alpha_m^2 + n^2) + \frac{1}{\kappa^2} \right\} + a_4^{(r)}$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{\rho_1}\right) (\alpha_m^2 + n^2)^3 + \frac{1}{\kappa^2} (\alpha_m^2 + n^2)^2 + \frac{1}{\kappa^2} (\alpha_m^2 + n^2) + \frac{4\rho_2}{\kappa^2} \alpha_m^2 + a_2^{(r)}$$

$$a_0 = -(\alpha_m^2 + n^2)^4 + 2\nu \alpha_m^6 + 6n^2 \alpha_m^4 + 2(4 - \nu)n^4 \alpha_m^2 + 2n^6 \\ - \frac{1 - \nu^2}{\kappa^2} \alpha_m^4 - 2(2 - \nu)n^2 \alpha_m^2 - n^4$$

$$a_6^{(r)} = \frac{1}{\rho_1} (\alpha_m^2 + n^2), \quad a_4^{(r)} = -\left(1 + \frac{1}{\rho_1}\right) (\alpha_m^2 + n^2)^2, \quad a_2^{(r)} = (\alpha_m^2 + n^2)^3$$

回転慣性を無視した場合の方程式(2.48c)を用いたならば
 $a_6^{(r)} = a_4^{(r)} = a_2^{(r)} = 0$ となる。

方程式(2.88)は λ^2 について3個の相異なる正の実根をもつので、振動モードを表すパラメータ (n, m) の一組に対して合計3種類の固有振動数が求められる。これらの振動数はそれぞれ3種類の変位成分 (u^0, v^0, w^0) のどれかが卓越した振動に分類される。

ところが、回転慣性と面内並進慣性をともに無視した場合、式(2.88)に相当する式は次の λ^2 に関する1次方程式となる。

$$(\alpha_m^2 + n^2)^2 \lambda^2 + \kappa^2 a_0 = 0 \quad (2.89)$$

したがってこの場合、 (n, m) の一組に対して1種類の固有振動しか得られない。

Flügge以外の理論を用いた場合も同様で、古典理論の範囲に入るものであれば、わずかに式(2.88)における係数 (a_6, \dots, a_0) が異なるだけである。

数値解は，式(2.88)あるいは(2.89)を根の公式により直接求めればよい。

2.8.3 数値結果

数値計算ではポアソン比 ν は0.3とし，修正理論における(Mirsky-Herrmann)せん断係数はMindlinが用いた数値を採用し $\kappa_x = \kappa_\theta = \pi^2/12$ とした。^[20]

まず構成方程式の相違による影響を調べた。

修正理論であるMirsky-Herrmannの理論，古典理論であるFlügge(=次近似)，修正一次近似，Love-Reissner(=次近似)，Donnellの各理論と単純化された変位の方程式によるFlüggeの理論の合計6種類を対象とした。図2.3によって示せば，「1」，「3」，「4」，「5」，「6」の各理論が対象であり，いずれにも並進慣性と回転慣性が含まれている。計算した結果を無次元固有振動数 λ で示したのが表2.1である。パラメータとして円筒殻形状については肉厚比を $h/R = 0.1, 0.01$ とし長さ比を $l/R = 0.1, 1, 10, 100$ とした。振動モードについては軸方向次数を $m = 1$ とし周方向波数を $n = 1, 2, 3, 4$ とした。

Mirsky-Herrmannの理論では面外せん断変形が考慮されているため，他の古典理論では表されない2個の固有振動数が存在する。残りの3個の固有振動数についてはFlüggeの理論による値とほとんど一致しているが，一般的にやや低い値となる傾向がある。しかし，この3個の振動数については実用上には問題とならない程度の差であるから，面外せん断変形の影響は古典理論では表し得ない2個の振動数の存在に集約さ

れるとってよい。

簡単化を行う前(式(2.33))と行った後(式(2.47c))の Flugge の理論による固有振動数では, すべての形状およびモードにおいて差はほんのわずかである。また, Flugge の理論と修正一次近似理論との差もわずかであり, 両者はいずれをとってもそんな色がない。しかし一次近似理論では, 円筒殻が長くなってくると Flugge の理論との差が見立っようになる。Donnell の理論になると, この傾向が著しく強くなり精度の低下が見られる。

次に Flugge の理論を対象として慣性力の影響を調べた。回転慣性と並進慣性をともに考慮した式, 回転慣性だけを無視した式, 回転慣性と面内並進慣性をともに無視した式の三種類について無次元固有振動数を計算した結果が表 2.2 である。

パラメータとしての円筒殻形状および振動モードは表 2.1 の場合と同様である。回転慣性の存在は固有振動数をやや低くする効果をもたらすが, 低次の振動モードでは実用上問題となる差は生じない。しかし, 面内並進慣性まで無視すると振動数も 1 種類だけになるなど影響は大きく, この慣性を無視した理論を用いる場合には十分な注意を必要とする。

Mirsky-Herrmann, Flugge, Donnell の三種類の理論について, 円筒殻形状との関係をさらによく調べるために表 2.1 および 2.2 の結果をもとに最も低い固有振動数だけについて図を作成した。その結果が, 図 2.10 ~ 図 2.16 である。横軸に長さ比 l/R , 縦軸に無次元固有振動数 $R\omega/c$ をそれぞれ対数目盛にとり, パラメータは肉厚比 h/R とモード (n, m) である。

表2.1 固有振動数 κ や C の値に及ぼす理論(構成方程式)の影響

- (1) Mirsky-Herrmann の理論 ($\kappa_x = \kappa_\theta = \pi^2/12$) 式(2.30)
- (2) Flügge の理論 式(2.33)
- (3) 単純化した方程式による Flügge の理論 式(2.47)
- (4) 修正一次近似理論 式(2.39)
- (5) 一次近似理論 (Love-Reissner) 式(2.35)
- (6) Donnell の理論 式(2.37)

ただし, $\nu = 0.3$ とし, すべての理論に回転慣性と並進慣性が含まれている。

[1] Shape $h/R=0.1, \ell/R=0.1$; Mode $n=1, m=1$

(1)	14.0894	18.5954	26.3184	31.4333	37.6892
(2)	——	18.5952	21.1209	31.4332	——
(3)	——	18.5571	21.1719	31.4290	——
(4)	——	18.5948	21.1325	31.4332	——
(5)	——	18.5949	21.1324	31.4332	——
(6)	——	18.5952	21.1321	31.4332	——

[2] Shape $h/R=0.1, \ell/R=0.1$; Mode $n=2, m=1$

(1)	14.1163	18.6238	26.3382	31.4811	37.7305
(2)	——	18.6231	21.1706	31.4808	——
(3)	——	18.5846	21.2222	31.4766	——
(4)	——	18.6216	21.1835	31.4808	——
(5)	——	18.6220	21.1831	31.4808	——
(6)	——	18.6232	21.1818	31.4809	——

[3] Shape $h/R=0.1, \ell/R=0.1$; Mode $n=3, m=1$

(1)	14.1610	18.6710	26.3712	31.5606	37.7992
(2)	——	18.6696	21.2533	31.5599	——
(3)	——	18.6303	21.3059	31.5558	——
(4)	——	18.6663	21.2683	31.5599	——
(5)	——	18.6672	21.2673	31.5600	——
(6)	——	18.6698	21.2646	31.5603	——

[4] Shape $h/R=0.1, \ell/R=0.1$; Mode $n=4, m=1$

(1)	14.2234	18.7369	26.4174	31.6716	37.8952
(2)	——	18.7345	21.3688	31.6704	——
(3)	——	18.6943	21.4226	31.6663	——
(4)	——	18.7288	21.3865	31.6703	——
(5)	——	18.7304	21.3849	31.6705	——
(6)	——	18.7349	21.3802	31.6710	——

[5] Shape $h/R=0.1, \ell/R=1$; Mode $n=1, m=1$

(1)	0.889190	1.98665	3.31836	18.7234	18.9675
(2)	0.890425	1.98666	3.31837	——	——
(3)	0.888281	1.99091	3.31809	——	——
(4)	0.891072	1.98910	3.31843	——	——
(5)	0.891877	1.98858	3.31853	——	——
(6)	0.894313	1.98699	3.31882	——	——

[6] Shape $h/R=0.1, \ell/R=1$; Mode $n=2, m=1$

(1)	0.739203	2.27228	3.75813	18.7453	19.0747
(2)	0.742306	2.27231	3.75818	——	——
(3)	0.739785	2.27922	3.75884	——	——
(4)	0.741349	2.27844	3.75900	——	——
(5)	0.743581	2.27734	3.75922	——	——
(6)	0.752285	2.27300	3.76012	——	——

[7] Shape $h/R=0.1, \ell/R=1$; Mode $n=3, m=1$

(1)	0.678249	2.63818	4.38736	18.7865	19.2466
(2)	0.687019	2.63826	4.38751	——	——
(3)	0.684317	2.64765	4.39001	——	——
(4)	0.685108	2.64734	4.39008	——	——
(5)	0.688410	2.64602	4.39035	——	——
(6)	0.705990	2.63894	4.39183	——	——

[8] Shape $h/R=0.1, \ell/R=1$; Mode $n=4, m=1$

(1)	0.752280	3.06392	5.13250	18.8477	19.4796
(2)	0.772981	3.06406	5.13283	——	——
(3)	0.769758	3.07570	5.13773	——	——
(4)	0.770152	3.07555	5.13776	——	——
(5)	0.773569	3.07424	5.13803	——	——
(6)	0.798616	3.06450	5.14001	——	——

[9] Shape $h/R=0.1, \ell/R=10$; Mode $n=1, m=1$

[10] Shape $h/R=0.1, \ell/R=10$; Mode $n=2, m=1$

(1)	0.0591839	0.659210	1.42787	18.6053	18.6615
(2)	0.0591839	0.659211	1.42788	-----	-----
(3)	0.0590485	0.659430	1.43003	-----	-----
(4)	0.0590444	0.659431	1.43003	-----	-----
(5)	0.0591849	0.659415	1.43003	-----	-----
(6)	0.0629955	0.658967	1.43007	-----	-----

(1)	0.0814300	1.20824	2.24701	18.6329	18.7662
(2)	0.0818797	1.20825	2.24707	-----	-----
(3)	0.0816036	1.21059	2.25202	-----	-----
(4)	0.0816303	1.21058	2.25202	-----	-----
(5)	0.0818781	1.21056	2.25202	-----	-----
(6)	0.107246	1.20778	2.25245	-----	-----

[11] Shape $h/R=0.1, \ell/R=10$; Mode $n=3, m=1$

[12] Shape $h/R=0.1, \ell/R=10$; Mode $n=4, m=1$

(1)	0.218282	1.78886	3.16713	18.6796	18.9375
(2)	0.221103	1.78889	3.16729	-----	-----
(3)	0.220196	1.79352	3.17473	-----	-----
(4)	0.220210	1.79352	3.17474	-----	-----
(5)	0.220322	1.79350	3.17474	-----	-----
(6)	0.248227	1.78817	3.17568	-----	-----

(1)	0.411212	2.37629	4.12235	18.7452	19.1729
(2)	0.420483	2.37636	4.12270	-----	-----
(3)	0.418609	2.38325	4.13255	-----	-----
(4)	0.418617	2.38324	4.13255	-----	-----
(5)	0.418681	2.38323	4.13255	-----	-----
(6)	0.447771	2.37539	4.13401	-----	-----

[13] Shape $h/R=0.1, \ell/R=100$; Mode $n=1, m=1$

[14] Shape $h/R=0.1, \ell/R=100$; Mode $n=2, m=1$

)	0.000665680	0.592604	1.41200	18.6031	18.6595
)	0.000665682	0.592605	1.41201	-----	-----
)	0.000664152	0.592785	1.41419	-----	-----
)	0.000664089	0.592785	1.41419	-----	-----
)	0.000764794	0.592785	1.41419	-----	-----
)	0.0204289	0.592359	1.41422	-----	-----

(1)	0.0770036	1.18395	2.23057	18.6314	18.7634
(2)	0.0774469	1.18396	2.23063	-----	-----
(3)	0.0771894	1.18620	2.23567	-----	-----
(4)	0.0771898	1.18620	2.23567	-----	-----
(5)	0.0771924	1.18620	2.23567	-----	-----
(6)	0.103136	1.18346	2.23608	-----	-----

[15] Shape $h/R=0.1, \ell/R=100$; Mode $n=3, m=1$

[16] Shape $h/R=0.1, \ell/R=100$; Mode $n=4, m=1$

(1)	0.215853	1.77567	3.15367	18.6784	18.9345
(2)	0.218618	1.77569	3.15383	-----	-----
(3)	0.217719	1.78024	3.16136	-----	-----
(4)	0.217719	1.78024	3.16136	-----	-----
(5)	0.217720	1.78024	3.16136	-----	-----
(6)	0.245589	1.77495	3.16229	-----	-----

(1)	0.408822	2.36744	4.11139	18.7441	19.1699
(2)	0.417987	2.36750	4.11174	-----	-----
(3)	0.416121	2.37431	4.12167	-----	-----
(4)	0.416121	2.37431	4.12167	-----	-----
(5)	0.416121	2.37431	4.12167	-----	-----
(6)	0.445168	2.36652	4.12312	-----	-----

[17] Shape $h/R=0.01, \ell/R=0.1$; Mode $n=1, m=1$

[18] Shape $h/R=0.01, \ell/R=0.1$; Mode $n=2, m=1$

(1)	2.95670	18.5953	31.4332	186.790	189.231
(2)	2.99371	18.5953	31.4332	-----	-----
(3)	2.99369	18.5955	31.4332	-----	-----
(4)	2.99454	18.5953	31.4332	-----	-----
(5)	2.99454	18.5953	31.4332	-----	-----
(6)	2.99455	18.5953	31.4332	-----	-----

(1)	2.96365	18.6236	31.4809	186.793	189.241
(2)	3.00091	18.6236	31.4809	-----	-----
(3)	3.00089	18.6239	31.4809	-----	-----
(4)	3.00173	18.6237	31.4809	-----	-----
(5)	3.00174	18.6236	31.4809	-----	-----
(6)	3.00176	18.6236	31.4809	-----	-----

[19] Shape $h/R=0.01, \ell/R=0.1$; Mode $n=3, m=1$

[20] Shape $h/R=0.01, \ell/R=0.1$; Mode $n=4, m=1$

(1)	2.97528	18.6708	31.5603	186.798	189.258
(2)	3.01295	18.6708	31.5603	-----	-----
(3)	3.01292	18.6710	31.5602	-----	-----
(4)	3.01375	18.6708	31.5603	-----	-----
(5)	3.01377	18.6708	31.5603	-----	-----
(6)	3.01383	18.6708	31.5603	-----	-----

(1)	2.99162	18.7365	31.6710	186.804	189.281
(2)	3.02986	18.7365	31.6710	-----	-----
(3)	3.02984	18.7367	31.6710	-----	-----
(4)	3.03065	18.7365	31.6710	-----	-----
(5)	3.03068	18.7365	31.6710	-----	-----
(6)	3.03078	18.7365	31.6710	-----	-----

(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)

[21] Shape $h/R=0.01$, $l/R=1$; Mode $n=1$, $m=1$

(1)	0.845404	1.98631	3.31882	185.872	185.897
(2)	0.845405	1.98631	3.31882	-----	-----
(3)	0.845383	1.98635	3.31882	-----	-----
(4)	0.845412	1.98633	3.31882	-----	-----
(5)	0.845421	1.98633	3.31882	-----	-----
(6)	0.845446	1.98631	3.31882	-----	-----

[22] Shape $h/R=0.01$, $l/R=1$; Mode $n=2$, $m=1$

(1)	0.653084	2.27160	3.76011	185.875	185.908
(2)	0.653085	2.27160	3.76011	-----	-----
(3)	0.653061	2.27166	3.76011	-----	-----
(4)	0.653079	2.27166	3.76011	-----	-----
(5)	0.653104	2.27165	3.76012	-----	-----
(6)	0.653201	2.27160	3.76013	-----	-----

[23] Shape $h/R=0.01$, $l/R=1$; Mode $n=3$, $m=1$

(1)	0.483461	2.63712	4.39180	185.879	185.926
(2)	0.483462	2.63712	4.39180	-----	-----
(3)	0.483441	2.63721	4.39182	-----	-----
(4)	0.483451	2.63720	4.39183	-----	-----
(5)	0.483497	2.63719	4.39183	-----	-----
(6)	0.483743	2.63712	4.39184	-----	-----

[24] Shape $h/R=0.01$, $l/R=1$; Mode $n=4$, $m=1$

(1)	0.360593	3.06248	5.13996	185.885	185.951
(2)	0.360598	3.06248	5.13996	-----	-----
(3)	0.360580	3.06259	5.14001	-----	-----
(4)	0.360588	3.06259	5.14001	-----	-----
(5)	0.360658	3.06258	5.14002	-----	-----
(6)	0.361178	3.06248	5.14004	-----	-----

[25] Shape $h/R=0.01$, $l/R=10$; Mode $n=1$, $m=1$

(1)	0.0591026	0.658948	1.43019	185.861	185.866
(2)	0.0591026	0.658948	1.43019	-----	-----
(3)	0.0591013	0.658950	1.43022	-----	-----
(4)	0.0591012	0.658950	1.43022	-----	-----
(5)	0.0591026	0.658950	1.43022	-----	-----
(6)	0.0591420	0.658946	1.43022	-----	-----

[26] Shape $h/R=0.01$, $l/R=10$; Mode $n=2$, $m=1$

(1)	0.0219563	1.20774	2.25254	185.863	185.877
(2)	0.0219565	1.20774	2.25254	-----	-----
(3)	0.0219555	1.20776	2.25258	-----	-----
(4)	0.0219565	1.20776	2.25258	-----	-----
(5)	0.0219658	1.20776	2.25259	-----	-----
(6)	0.0230297	1.20773	2.25259	-----	-----

[27] Shape $h/R=0.01$, $l/R=10$; Mode $n=3$, $m=1$

(1)	0.0242125	1.78813	3.17571	185.868	185.894
(2)	0.0242152	1.78813	3.17571	-----	-----
(3)	0.0242142	1.78818	3.17579	-----	-----
(4)	0.0242155	1.78818	3.17579	-----	-----
(5)	0.0242256	1.78818	3.17579	-----	-----
(6)	0.0267584	1.78813	3.17580	-----	-----

[28] Shape $h/R=0.01$, $l/R=10$; Mode $n=4$, $m=1$

(1)	0.0426279	2.37537	4.13399	185.875	185.918
(2)	0.0426377	2.37537	4.13399	-----	-----
(3)	0.0426358	2.37543	4.13409	-----	-----
(4)	0.0426367	2.37543	4.13409	-----	-----
(5)	0.0426428	2.37543	4.13409	-----	-----
(6)	0.0454251	2.37536	4.13410	-----	-----

[29] Shape $h/R=0.01$, $l/R=100$; Mode $n=1$, $m=1$

(1)	0.000664832	0.592361	1.41434	185.860	185.866
(2)	0.000664832	0.592361	1.41434	-----	-----
(3)	0.000664816	0.592363	1.41436	-----	-----
(4)	0.000664816	0.592363	1.41436	-----	-----
(5)	0.000665899	0.592363	1.41436	-----	-----
(6)	0.00214792	0.592359	1.41436	-----	-----

[30] Shape $h/R=0.01$, $l/R=100$; Mode $n=2$, $m=1$

(1)	0.00775013	1.18347	2.23617	185.863	185.876
(2)	0.00775059	1.18347	2.23617	-----	-----
(3)	0.00775033	1.18349	2.23622	-----	-----
(4)	0.00775036	1.18349	2.23622	-----	-----
(5)	0.00775062	1.18349	2.23622	-----	-----
(6)	0.0103320	1.18346	2.23623	-----	-----

[31] Shape $h/R=0.01$, $l/R=100$; Mode $n=3$, $m=1$

(1)	0.0219080	1.77496	3.16232	185.868	185.894
(2)	0.0219109	1.77496	3.16232	-----	-----
(3)	0.0219100	1.77501	3.16240	-----	-----
(4)	0.0219100	1.77501	3.16240	-----	-----
(5)	0.0219101	1.77501	3.16240	-----	-----
(6)	0.0246492	1.77495	3.16241	-----	-----

[32] Shape $h/R=0.01$, $l/R=100$; Mode $n=4$, $m=1$

(1)	0.0419990	2.36653	4.12309	185.874	185.918
(2)	0.0420088	2.36653	4.12309	-----	-----
(3)	0.0420069	2.36659	4.12320	-----	-----
(4)	0.0420069	2.36659	4.12320	-----	-----
(5)	0.0420070	2.36659	4.12320	-----	-----
(6)	0.0448086	2.36652	4.12321	-----	-----

表2.2 Flügelの理論による固有振動数 $R\rho/c$ に及ぼす慣性力の影響

- (1) 回転慣性と並進慣性をともに考慮した場合
 (2) 回転慣性を無視し, 並進慣性を考慮した場合
 (3) 回転慣性と面内並進慣性を無視し, 面外並進慣性だけを考慮した場合

[1] $h/R=0.1, \ell/R=0.1$

Mode	n=1, m=1			Mode	n=2, m=1		
(1)	18.5952	21.1209	31.4332	(1)	18.6231	21.1706	31.4808
(2)	18.6107	28.4882	31.4618	(2)	18.6386	28.5743	31.5099
(3)	28.5153	————	————	(3)	28.6016	————	————
Mode	n=3, m=1			Mode	n=4, m=1		
(1)	18.6696	21.2533	31.5599	(1)	18.7345	21.3688	31.6704
(2)	18.6851	28.7179	31.5899	(2)	18.7500	28.9188	31.7016
(3)	28.7454	————	————	(3)	28.9468	————	————

[2] Shape $h/R=0.1, \ell/R=1$

Mode	n=1, m=1			Mode	n=2, m=1		
(1)	0.890425	1.98666	3.31837	(1)	0.742306	2.27231	3.75818
(2)	0.893939	1.98876	3.31950	(2)	0.745767	2.27505	3.76086
(3)	0.917123	————	————	(3)	0.777363	————	————
Mode	n=3, m=1			Mode	n=4, m=1		
(1)	0.687019	2.63826	4.38751	(1)	0.772981	3.06406	5.13283
(2)	0.691404	2.64131	4.39235	(2)	0.779992	3.06720	5.14011
(3)	0.718422	————	————	(3)	0.803444	————	————

[3] Shape $h/R=0.1, \ell/R=10$

Mode	n=1, m=1			Mode	n=2, m=1		
(1)	0.0591839	0.659211	1.42788	(1)	0.0818797	1.20825	2.24707
(2)	0.0591863	0.659202	1.42969	(2)	0.0819232	1.20829	2.25150
(3)	0.0858177	————	————	(3)	0.0919124	————	————
Mode	n=3, m=1			Mode	n=4, m=1		
(1)	0.221103	1.78889	3.16729	(1)	0.420483	2.37636	4.12270
(2)	0.221624	1.78894	3.17431	(2)	0.422651	2.37640	4.13224
(3)	0.233804	————	————	(3)	0.435778	————	————

[4] Shape $h/R=0.1, \ell/R=100$

Mode	n=1, m=1			Mode	n=2, m=1		
(1)	0.000665682	0.592605	1.41201	(1)	0.0774469	1.18396	2.23063
(2)	0.000665682	0.592605	1.41378	(2)	0.0774856	1.18396	2.23507
(3)	0.000941787	————	————	(3)	0.0866263	————	————
Mode	n=3, m=1			Mode	n=4, m=1		
(1)	0.218618	1.77569	3.15383	(1)	0.417987	2.36750	4.11174
(2)	0.219126	1.77569	3.16088	(2)	0.420127	2.36750	4.12132
(3)	0.230966	————	————	(3)	0.433039	————	————

[5] Shape $h/R=0.01$, $l/R=0.1$

Mode	$n=1, m=1$			Mode	$n=2, m=1$		
(1)	2.99371	18.5953	31.4332	(1)	3.00091	18.6236	31.4809
(2)	3.00601	18.5955	31.4333	(2)	3.01327	18.6238	31.4810
(3)	3.00616	————	————	(3)	3.01344	————	————
Mode	$n=3, m=1$			Mode	$n=4, m=1$		
(1)	3.01295	18.6708	31.5603	(1)	3.02986	18.7365	31.6710
(2)	3.02542	18.6709	31.5603	(2)	3.04249	18.7367	31.6711
(3)	3.02562	————	————	(3)	3.04274	————	————

[6] Shape $h/R=0.01$, $l/R=1$

Mode	$n=1, m=1$			Mode	$n=2, m=1$		
(1)	0.845405	1.98631	3.31882	(1)	0.653085	2.27160	3.76011
(2)	0.845438	1.98633	3.31883	(2)	0.653116	2.27162	3.76013
(3)	0.866701	————	————	(3)	0.679879	————	————
Mode	$n=3, m=1$			Mode	$n=4, m=1$		
(1)	0.483462	2.63712	4.39180	(1)	0.360598	3.06248	5.13996
(2)	0.483494	2.63714	4.39185	(2)	0.360631	3.06251	5.14004
(3)	0.501621	————	————	(3)	0.370923	————	————

[7] Shape $h/R=0.01$, $l/R=10$

Mode	$n=1, m=1$			Mode	$n=2, m=1$		
(1)	0.0591026	0.658948	1.43019	(1)	0.0219565	1.20774	2.25254
(2)	0.0591026	0.658948	1.43021	(2)	0.0219566	1.20774	2.25258
(3)	0.0856937	————	————	(3)	0.0246344	————	————
Mode	$n=3, m=1$			Mode	$n=4, m=1$		
(1)	0.0242152	1.78813	3.17571	(1)	0.0426377	2.37537	4.13399
(2)	0.0242158	1.78814	3.17578	(2)	0.0426399	2.37537	4.13409
(3)	0.0255469	————	————	(3)	0.0439646	————	————

[8] Shape $h/R=0.01$, $l/R=100$

Mode	$n=1, m=1$			Mode	$n=2, m=1$		
(1)	0.000664832	0.592361	1.41434	(1)	0.00775059	1.18347	2.23617
(2)	0.000664832	0.592361	1.41436	(2)	0.00775062	1.18347	2.23622
(3)	0.000940584	————	————	(3)	0.00866580	————	————
Mode	$n=3, m=1$			Mode	$n=4, m=1$		
(1)	0.0219109	1.77496	3.16232	(1)	0.0420088	2.36653	4.12309
(2)	0.0219114	1.77496	3.16239	(2)	0.0420109	2.36653	4.12319
(3)	0.0230968	————	————	(3)	0.0433040	————	————

ただし, $\nu=0.3$ とし, 式(2.33)に基づいて計算を行った。

(94)

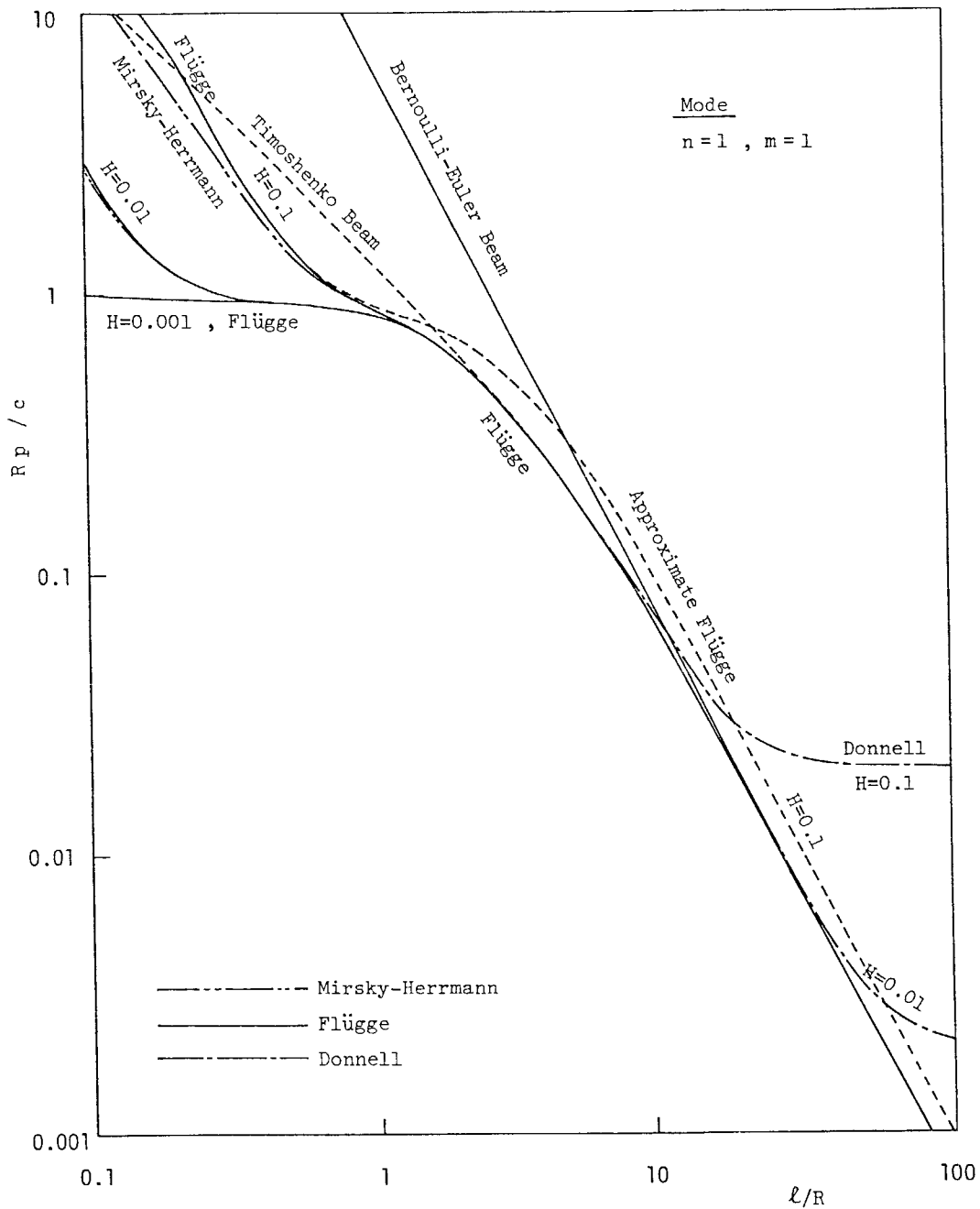


図 2.10 最低次固有振動数 R_p/c と内筒殻長さ l/R との関係 (1)

$$H = h/R = 0.1, 0.01, 0.001$$

(Mirsky-Herrmann, Flügge, Donnell は回転慣性と並進慣性を考慮)
 (Approximate Flügge 面外並進慣性だけを考慮)

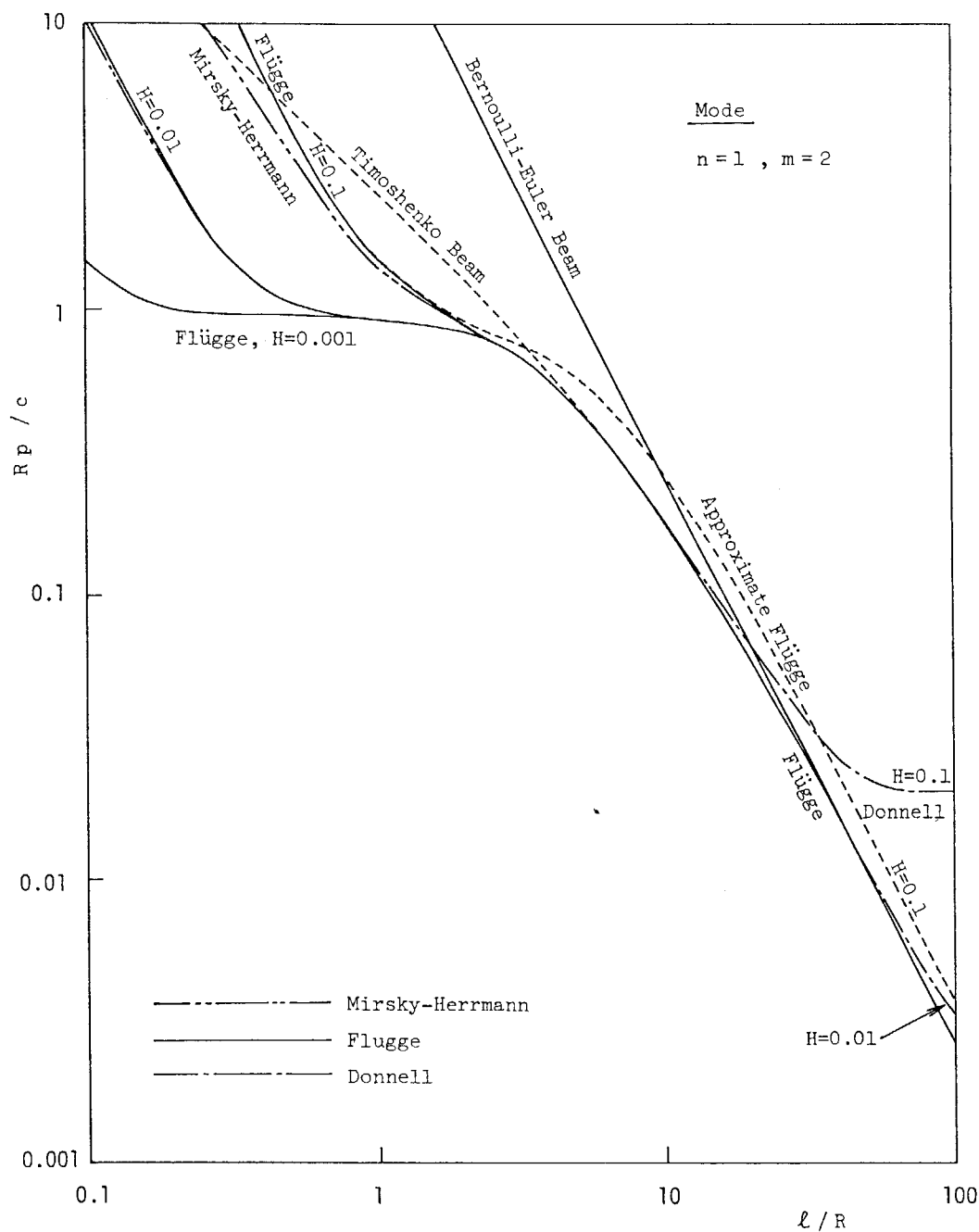


図2.11 最低次固有振動数 R_p/c と円筒殻長さ l/R との関係 (z)

$H = 0.1, 0.01, 0.001$

Mirsky-Herrmann, Flugge, Donnell は回転慣性と並進慣性を考慮
Approximate Flugge は面外並進慣性だけを考慮
Bernoulli-Euler は古典はり理論
Timoshenko は修正はり理論

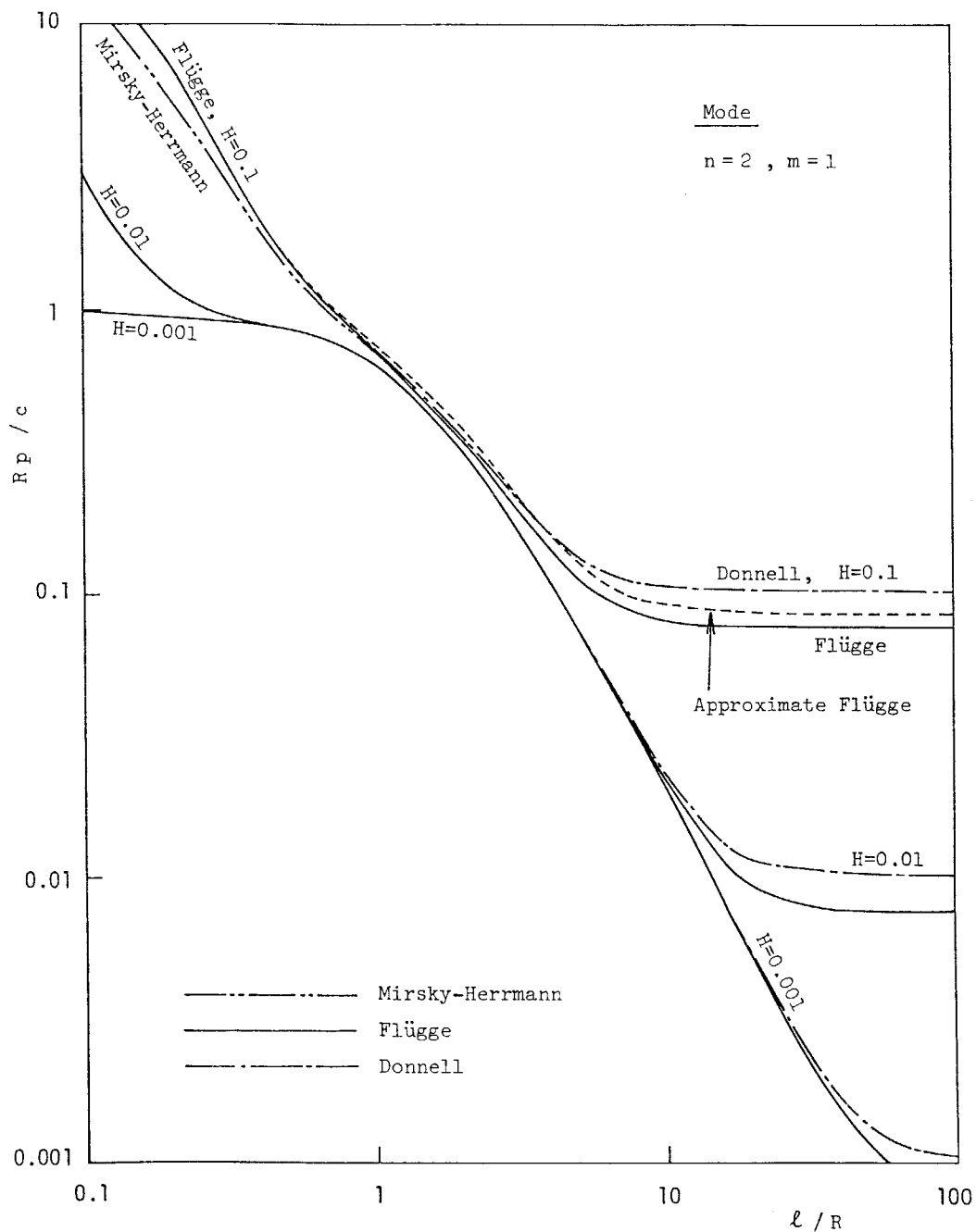


図2.12 最低次固有振動数 R_p/c と円筒殻長さ l/R との関係(3)

$H = h/R = 0.1, 0.01, 0.001$

(Mirsky-Herrmann, Flugge, Donnell は回転慣性と並進慣性を考慮)
 (Approximate Flugge は面外並進慣性だけを考慮)

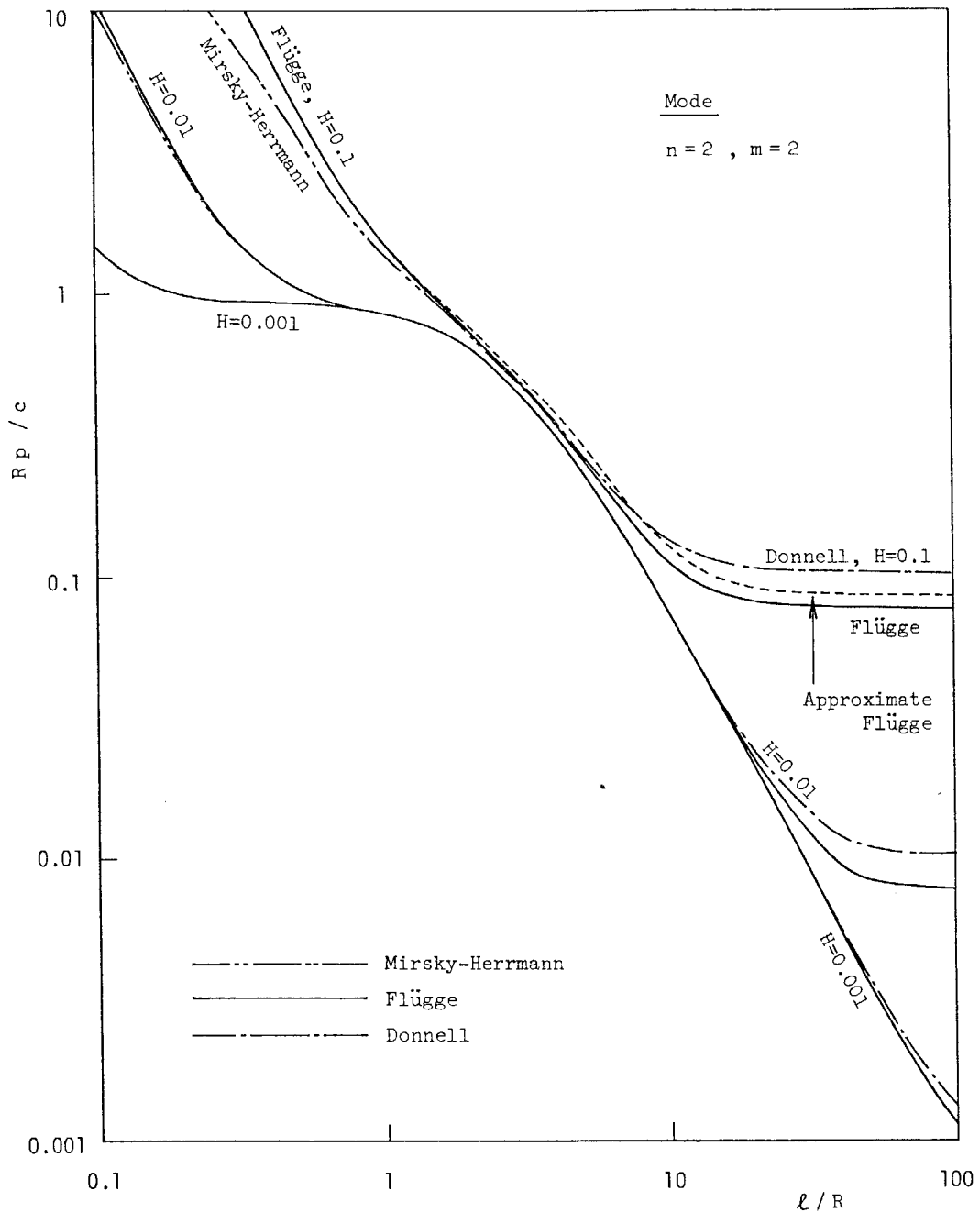


図2.13 最低次固有振動数 R_p/c と円筒殻長さ l/R との関係(4)

$$H = h/R = 0.1, 0.01, 0.001$$

(Mirsky-Herrmann, Flügge, Donnell は回転慣性と並進慣性を考慮)
 (Approximate Flügge は面外並進慣性だけを考慮)

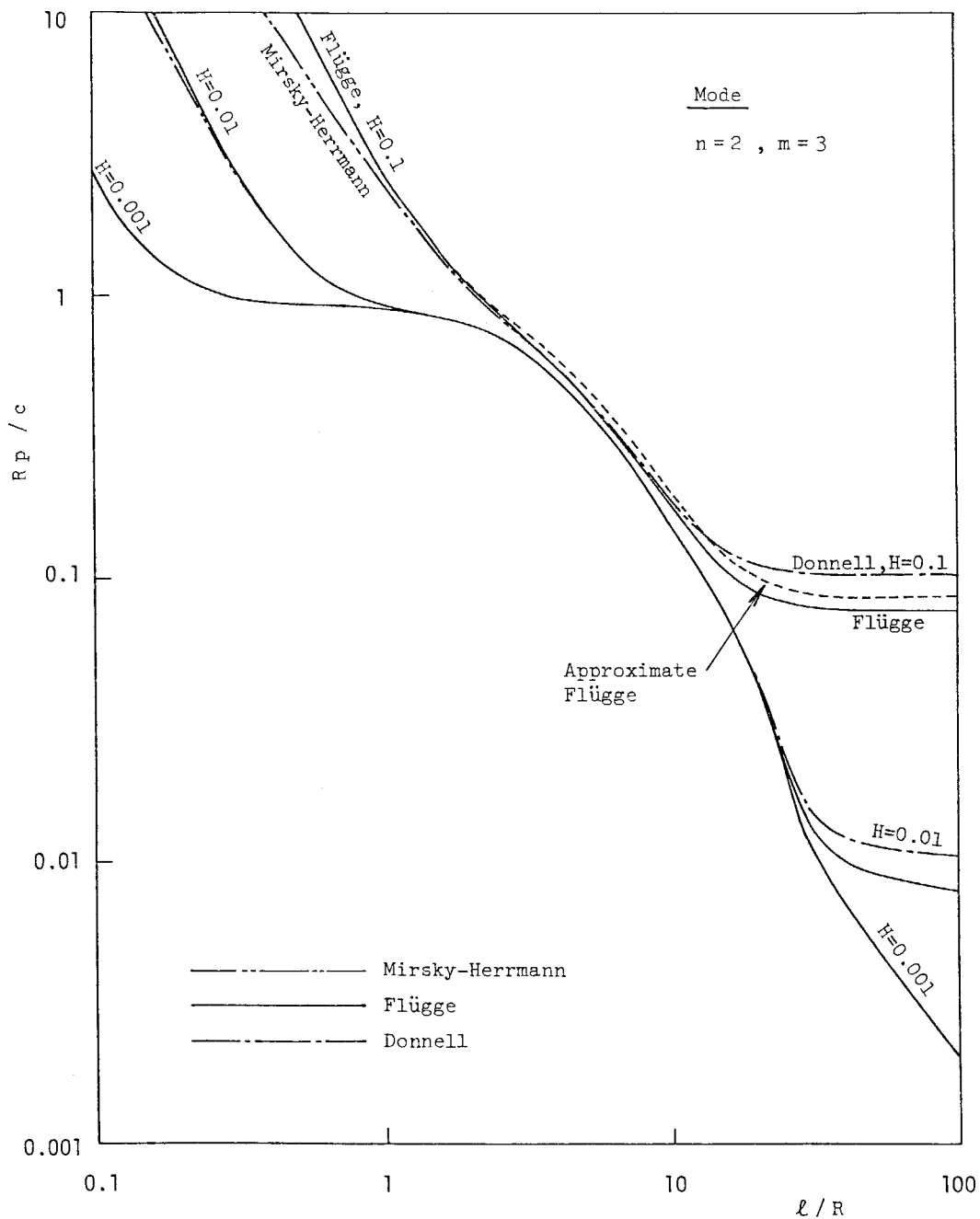


図2.14 最低次固有振動数 R_p/c と円筒殻長さ l/R との関係 (5)

$$H = h/R = 0.1, 0.01, 0.001$$

(Mirsky-Herrmann, Flügge, Donnell は回転慣性と並進慣性を考慮)
(Approximate Flügge は面外並進慣性を考慮)

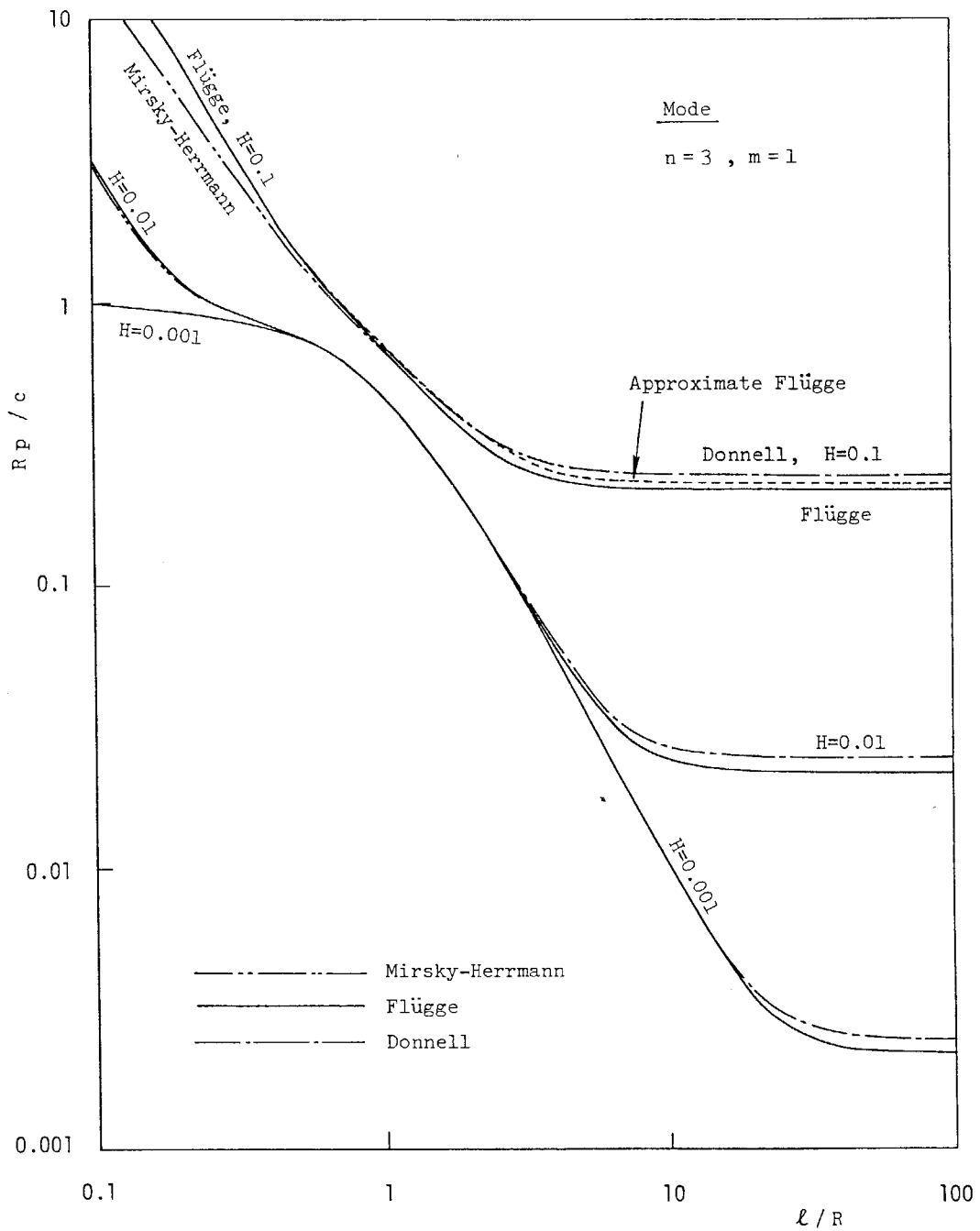


図2.15 最低次固有振動数 R_p/c と円筒殻長さ l/R との関係(6)

$$H = h/R = 0.1, 0.01, 0.001$$

(Mirsky-Herrmann, Flüge, Donnell は回転慣性と並進慣性を考慮)
(Approximate Flüge は面外並進慣性だけを考慮)

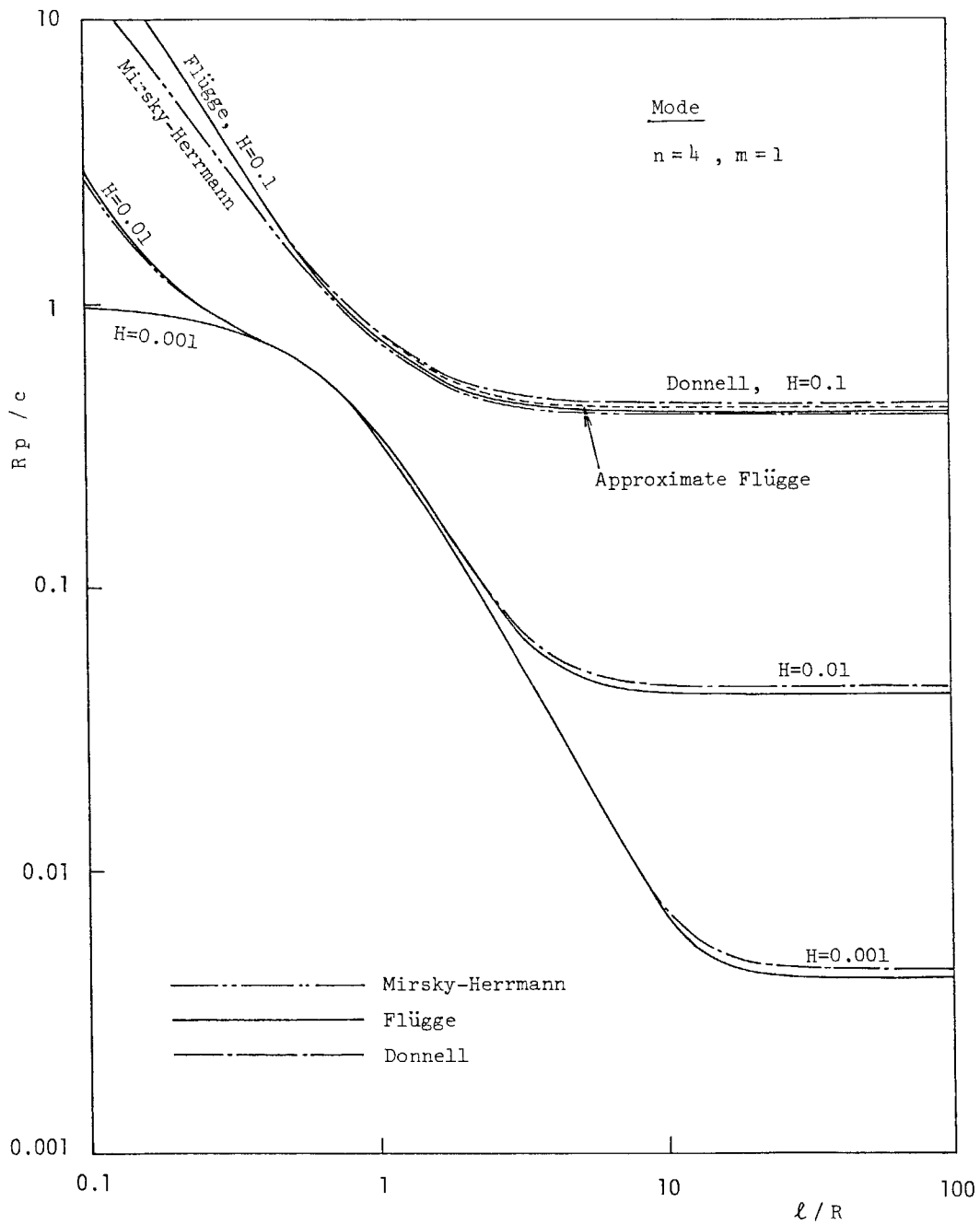


図2.16 最低次固有振動数 R_p/c と円筒殻長さ l/R との関係(7)

$$H = h/R = 0.1, 0.01, 0.001$$

(Mirsky-Herrmann, Flügge, Donnell は回転慣性と並進慣性を考慮)
(Approximate Flügge は面外並進慣性だけを考慮)

$n = 1$ は円筒殻の中心軸が移動しはり状に変形するモードであるから、二次近似理論すなわち Mirsky-Herrmann および Flügge の理論では l/R が大きくなると長さに対して一定の勾配(-2)をもって低下するようになり、Bernoulli-Euler のはり理論と一致する。参考のため Timoshenko のはり理論(せん断変形と回転慣性が考慮されている)による結果も示しておいた。なお、せん断係数は 0.5 として計算したが、殻理論に対する近似度が大幅に向上されているのがよくわかる。

$n \geq 2$ では円筒殻の中心軸は動かず、固有振動数は l/R が大きくなると一定値に漸近する。

Donnell の理論では、円筒殻が長くなると Flügge の理論から離れて精度が急激に悪化する。その挙動は $n = 1$ の場合と $n \geq 2$ の場合とで大きく異なる。 $n = 1$ の場合は差がひらく一方であるのに対し、 $n \geq 2$ ではある一定の差に落ち着く。この傾向は肉厚が厚いほどまたモードの次数が低いほど強く現われる。

Mirsky-Herrmann と Flügge の理論ではよほど円筒殻の長さが短かくなならない限り大きな差は生じない。

回転慣性と面内並進慣性をともに無視した Flügge の理論による結果は、これらを考慮した結果に対してほぼ一定の比率で高い値を示している。

これらの結果から、理論間の相違について定性的な傾向をまとめると以下のようなになる。

まず円筒殻の肉厚については厚くなるほどすべての理論間で差が広がる傾向にある。円筒殻の長さについては長くなるほど差が広がるのは、二次近似と一次近似および Donnell の式

との間である。逆に短くなるほど差が広がるのは修正理論と古典理論との間である。モードの影響をみると、次数が高いほどすなわち積 $m \times n$ の値が大きいほど差が広がるのは面外せん断変形と回転慣性を考慮した理論と無視した理論との間であり、逆に次数が低いほどすなわち積 $m \times n$ の値が小さいほど差が広がるのは二次近似理論と一次近似や Donnell の理論との間であり、面内慣性の影響も大きくなる。

最後に、 $n = 1$ のモードを有する場合について特別に検討を行った。この場合は、 $n \geq 2$ の場合と異なり円筒殻の中心軸が振動するはり状のモードを有する。簡単のため古典理論の変位の方程式について調べ、各理論の特徴となっている構成方程式の影響を明らかにしてみる。時間による微分項を零として静的理論にし、半径方向変位 w を

$$w = W_1(\xi) \cos \theta \quad (2.90)$$

と置き、変位の方程式 (2.47c) に代入すると、各理論は以下のようになる。

(i) 二次近似理論 (Flügge の理論)

$$\frac{d^4}{d\xi^4} \left\{ \frac{d^4 W_1}{d\xi^4} - 2(2-\nu) \frac{d^2 W_1}{d\xi^2} + \frac{1-\nu^2}{k^2} W_1 \right\} = 0 \quad (2.91a)$$

(ii) 修正一次近似理論

$$\frac{d^4}{d\xi^4} \left\{ \frac{d^4 W_1}{d\xi^4} - 4 \frac{d^2 W_1}{d\xi^2} + \left(\frac{1-\nu^2}{k^2} - \nu + \nu^2 \right) W_1 \right\} = 0 \quad (2.91b)$$

(iii) 一次近似理論 (Love-Reissner の理論)

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left\{ \frac{d^6 W_1}{d\xi^6} - 4 \frac{d^4 W_1}{d\xi^4} + \left(\frac{1-\nu^2}{k^2} + 2 - 2\nu \right) \frac{d^2 W_1}{d\xi^2} - \frac{1-\nu}{2} W_1 \right\} = 0$$

(2.91c)

(iv) Donnell の理論

$$\frac{d^8 W_1}{d\xi^8} - 4 \frac{d^6 W_1}{d\xi^6} + \left(\frac{1-\nu^2}{k^2} + 6 \right) \frac{d^4 W_1}{d\xi^4} - 4 \frac{d^2 W_1}{d\xi^2} + W_1 = 0 \quad (2.91d)$$

二次近似および修正一次近似理論では全体に4階の微分演算子がかかっており2階と零階の微分項がない。これに対し一次近似理論では2階微分の項が現われ、Donnellの理論ではさらに零階の項が現われる。

$d^4 W_1 / d\xi^4 = 0$ の微分方程式からは

$$W_1 = C_1 \xi^3 + C_2 \xi^2 + C_3 \xi + C_4 \quad (2.92)$$

のような一般解が得られ、これが円筒殻のはり状変形を忠実に表現する。したがって、一次近似およびDonnellの両理論の微分方程式は $n=1$ の場合に致命的な欠陥をもっていることがわかる。Donnellの理論によるモード $n=1$ の固有振動数の精度が、円筒殻が長くなると急激に悪化するのはいずれが原因である。このことは、一次近似理論においても同様である。

しかし、このような欠陥をもっている理論でも円筒殻が著しく長くないかぎり数値的には精度の高い理論とかけ離れた結果は生じない。

修正理論における変位の方程式についても同様である。二次近似理論(Mirsky-Herrmann)では $n=1$ の場合の静的な方程式は次のようになる。

$$\frac{d^4}{d\xi^4} \left(\frac{d^6 W_1}{d\xi^6} + a_4 \frac{d^4 W_1}{d\xi^4} + a_2 \frac{d^2 W_1}{d\xi^2} + a_0 W_1 \right) = 0 \quad (2.93)$$

したがって、はり状変形を表す式(2.92)の形式の解が存在する。

2.9 結 言

本章では、Kirchhoff-Love の仮定に準拠した動的円筒殻理論の内から代表的な6種類の理論を取り上げ、その導出方法と利用方法を統一して示し、理論間相互の関係ならびに特性を明らかにした。

本章で取り上げた理論の中で最も精度の劣ると思われる Donnell の理論と稜形円筒殻理論の内では最も精度が高いと言われている Mirsky-Herrmann の理論との間でも数値的にはほとんど完全に一致する例が多くあった。したがって、ある問題の解析に正確でないと言われている理論が用いられていてもその数値解までも正しくないとは結論することはできない。しかし、精度が高いと言われている理論は劣ると言われている理論よりもすべての場合において正しい数値解を与えることも事実である。何も考えずに最も精度の高い理論を用いるのも安全な方法であるし、直面した問題に対して正しい数値解を与える最も簡単な理論を用いるのも賢明な方法であろう。

最後に、本章で達成した具体的な成果と今後の方針についてまとめておく。

(1) 従来、個々に誘導されていた各種動的円筒殻理論について理論間相互の対応関係を見い出した。この関係を利用して理論体系を、利用技術者に便利なように整理・分類し、各理論間の相違の基となっている因子を明確にした。

(2) 面外せん断変形を無視したいわゆる古典理論については基礎方程式である変位の3元連立微分方程式から単一の微分方程式を導き、これを精度を失うことなく単純化する試みを行った。この試みにより各種の動的円筒殻理論をきわめて利用しやすい形式にまとめることに成功した。

この単純化された方程式は元の方程式に対してほとんど精度が失われていないことも数値的に確認した。

(3) 面外せん断変形を考慮したいわゆる修正理論は、波動の伝は現象あるいは振動現象のいずれをみても円筒殻形状とは関係なく古典理論と異なる点を多くもっている。したがって、修正理論の存在価値はきわめて高い。しかし、基礎式が5元連立微分方程式であるために解析ならびに数値計算が複雑となる欠点がある。

(4) 二次近似理論と一次近似理論とでは、解析上ならびに数値計算上の手間はほとんど変わらない。しかし、精度は二次近似理論の方が優れているので、一次近似理論の利用価値は低い。同じ意味から修正一次近似理論も二次近似理論に対して利用価値がほとんどない。

したがって、修正理論では Mirsky-Herrmann の理論がいわゆる Kirchhoff-Love の仮定に準拠した動的円筒殻理論の中で最も精度が高い理論として存在価値はきわめて高い。

古典理論では Flugge の理論が存在価値が高い。Flugge の

理論は基礎式が簡単であることから, Mirsky-Herrmann の理論に対して解析ならびに数値計算が楽になる有利な点をもっている。

(5) Donnell の理論はその簡単さのため, 精度が劣る場合もあるが利用価値がある。利用方法を間違わなければ, 高精度の理論と同等の結果が得られる。

Donnell の理論は, 肉厚が薄く長さが短い円筒殻あるいは高次の振動解析に対して適用したとき精度が高い。

(6) 回転慣性は, その有無によって式の複雑さに大きな変化はない。そのために従来は, この慣性に対してはほとんど関心をもたれなかった。しかし, 波動の伝ば現象や高次の振動に対して影響が大きく現われるので, 問題によっては回転慣性は無視できない大きな影響をもたらす可能性がある。

(7) 面内並進慣性を無視すると基礎式が著しく簡単になり, 解析や数値計算は非常に楽になる。しかし, 時間に関係した物理量の精度が大幅に低下するので, その誤差の検定を必ず行っておかなければならない。

(8) 以上の結果を踏まえて, 本章では Mirsky-Herrmann, Flügge, Donnell の三種類の理論が各近似段階における代表的な理論であり, 利用価値の高い理論であるという立場をとることにする。これらの理論を実際の問題に対して広く適用するためには, 本章で行った特性評価だけでは不十分であり, さらにあらゆる場合を想定して特性を調べなければならないと考える。

そこで第3章以下では, この三種類の理論を様々な境界

値問題に適用して、その特性をくわしく調べることにする。

その際、回転慣性および面内並進慣性の有無が各理論の特性に与える影響についても触れる予定である。

参 考 文 献

- [1] Love, A.E.H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, (1944), Dover.
- [2] Donnell, L.H., Beams, Plates, and Shells, (1976), McGraw-Hill.
- [3] Morley, L.S.D., An Improvement on Donnell's Approximation for Thin-Walled Circular Cylinders, Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol.12, No.1 (1959), pp. 89-99.
- [4] Flügge, W., Statik und Dynamik der Schalen, (1962), Springer-Verlag.
- [5] Naghdi, P.M. & Cooper, R.M., Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Shells, Including the Effects of Transverse Shear and Rotatory Inertia, J. Acous. Soc. Amer., Vol.28, No.1 (1956), pp. 56-63.
- [6] Herrmann, G. & Minsky, I., Three-Dimensional and Shell-Theory Analysis of Axially Symmetric Motions of Cylinders, J. Appl. Mech., Vol.23, No.4 (1956), pp. 563-568.
- [7] Minsky, I. & Herrmann, G., Nonaxially Symmetric Motions of Cylindrical Shells, J. Acous. Soc. Amer., Vol.29, No.10 (1957), pp. 1116-1123.
- [8] Hoff, N.J., The Accuracy of Donnell's Equations, J. Appl. Mech., Vol.22, No.3 (1955), pp. 329-334.

- [9] Yu, Y.-Y., Free Vibrations of Thin Cylindrical Shells Having Finite Lengths With Freely Supported and Clamped Edges, J. Appl. Mech., Vol. 22, No. 4 (1955), pp. 547-552.
- [10] Yuan, S. W., Thin Cylindrical Shells Subjected to Concentrated Loads, Quart. Appl. Math., Vol. 4, No. 1 (1946), pp. 13-26.
- [11] Yuan, S. W. & Ting, L., On Radial Deflections of a Cylinder Subjected to Equal and Opposite Concentrated Radial Loads, J. Appl. Mech., Vol. 24, No. 2 (1957), pp. 278-282.
- [12] Liao, E. N. K. & Kessel, P. G., Dynamic Response of Cylindrical Shells With Initial Stress and Subjected to General Three-Dimensional Surface Loads, Trans. ASME, Ser. E, Vol. 38, No. 4 (1971), pp. 978-986.
- [13] Reissner, E., A New Derivation of the Equations for Deformation of Elastic Shells, Amer. J. Math., Vol. 63 (1941), pp. 177-184.
- [14] Yu, Y.-Y., Vibrations of Thin Cylindrical Shells Analyzed by Means of Donnell-Type Equations, J. Aeros. Sci., Vol. 25, No. 11 (1958), pp. 699-715.
- [15] Sanders, J. L., An Improved First-Approximation Theory for Thin Shells, NASA-TR-R25 (1959), pp. 1-11.
- [16] 溝口孝喜, 等間隔に支持を有する横置貯そうの強さ (薄肉円筒の一般的解法 例題 1), 機論, 20 卷, 95 号 (昭 29), 483-491.

- [17] Hildebrand, F. B., Reissner, E. & Thomas, G. B., Notes on the Foundations of the Theory of Small Displacements of Orthotropic Shells, NACA T.N. No. 1833 (1949).
- [18] Naghdi, P. M., On the Theory of Thin Elastic Shells, Quart. Appl. Math., Vol. 14 (1957), pp. 369-380.
- [19] Toda, S. & Koga, T., Nat. Aeros. Lab., Tech. Rep., 330T (1973).
- [20] Mindlin, R. D., Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, J. Appl. Mech., Vol. 18, No. 1 (1951), pp. 31-38.

第 3 章

集中衝撃力をうける円筒殻

3.1	緒 言	112
3.2	無限長円筒殻の解析	115
3.3	両縁自由支持円筒殻の解析	126
3.4	両縁自由円筒殻の解析	136
3.5	両縁固定円筒殻の解析	145
3.6	数値結果	168
3.7	結 言	199
	参 考 文 献	202

3.1 緒 言

円筒殻の曲げに関する問題は、外力の加わり方によって局部変形が支配的な場合と円筒殻の中心軸線がたわむはり状変形が支配的な場合とに大別することができる。

本章では前者に関連して、集中衝撃荷重をうける円筒殻の問題を対象とし、様々な境界条件のもとでの解析方法を示すとともに解析結果に及ぼす基礎理論の影響についても調べた。

なお、後者に関連した問題は第4章にゆずることにした。

円筒殻の局部変形に関連した研究では、無限長円筒殻に一对の対向集中静荷重が作用する場合のたわみを Donnell および Flugge の両理論に基づいて解析した Yuan の論文が有名である。^{[1][2]} これらの論文で Yuan は鏡像の方法によって両縁自由

支持の有限長円筒殻に対する結果も導いている。その結果から Donnell および Flugge の両理論による結果の相違は円筒殻が長くなるほど大きくなり最大 25% 程度になることを示した。

集中静荷重の作用する問題を扱った研究はこの他にも Hoff, Seide らいくつかの論文があるが、基本的には Yuan と同様な解析方法が用いられている。^{[3][4][5][6]} これらの静的問題に対

し衝撃問題では、Yao が両縁自由支持有限長円筒殻に部分分布衝撃荷重が作用する問題を半径方向の慣性力だけを考慮した Morley の式に基づいて解析したのが、最初のものである。^[7]

その後、Liao が集中衝撃荷重が作用する両縁自由支持円筒殻の問題を並進慣性をすべて考慮した Flugge および Donnell の両理論に基づいて解析し、薄肉でかつ短い円筒殻に対しては

両理論によるたわみ変動は良く一致することを示した。^[8] また, Waingarten はやはり両縁自由支持円筒殻に部分分布衝撃荷重が作用する問題を, 三次元動弾性理論, Flügge および Mirsky-Herrmann 形の円筒殻理論に基づいて解析し, 応力変動を計算することにより殻理論による結果とリわけ修正理論であるところの Mirsky-Herrmann の理論による結果の妥当性を示した。^[9]

局部変形を对象とした衝撃問題の解析例はこの他にもいくつかあるが, いずれも変形の軸方向モードをフーリエ級数で表しており, その解析方法は両縁支持円筒殻に限られてしま^{[10][11][12]}う。

本章では, 部分分布荷重をうける円筒殻の衝撃問題を任意の境界条件のもとで解析する方法を提案し, 同時に解析結果に及ぼす境界条件の影響を明らかにした。その際, 第2章で示された三種類の理論すなわち Mirsky-Herrmann, Flügge および Donnell の各理論を用い, 局部変形の解析結果に及ぼす基礎理論ならびに各種の慣性力の影響についても明らかにし, 基礎理論選択のための一つの指針を示した。

負荷形式としては, 局部変形だけを取り出すために円筒殻の中央部に一對の対向集中衝撃荷重が同時に作用する問題を考えた。荷重の時刻変化はステップ関数状に変動する場合を中心とした。

最後に, 各節の問題で用いられている理論の一覧表を参考のために示しておく。なお, Donnell および Flügge の両理論による解析では, 回転慣性はすべての場合において無視されている。

表 3.1 本章の各節で用いている理論の一覧表 (丸印が使用)

節	境界条件	Donnell		Flügge		Minsky - Herrmann
		面内慣性		面内慣性		
		無視	考慮	無視	考慮	
3.2	無限長	○	○	○	○	—
3.3	自由支持	○	○	○	○	—
3.4	自由	○	—	—	—	—
3.5	固定	○	—	○	○	○

注: Donnell および Flügge の各理論では回転慣性は無視されている。

3.2 無限長円筒殻の解析

図3.1(a)のように半径方向部分分布荷重が時間に関してステップ関数状に無限長円筒殻の外面に作用する問題を考える。

この場合、基礎方程式(2.3)および(2.4)における荷重成分 $(P_x, P_\theta, P_z, m_x, m_\theta)$ は $h \ll 2R$ とすると次のように表される。

$$P_x = P_\theta = m_x = m_\theta = 0 \quad (3.1a)$$

$$P_z = \frac{4\beta_x\beta_\theta}{\pi^2} P_0 H(t) \left(1 + 2 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\beta_\theta \cos n\theta}{n\beta_\theta} \right) \int_0^\infty \frac{\sin \alpha\beta_x}{\alpha\beta_x} \cos \alpha z d\alpha$$

(3.1b)

ここで、 $H(t)$ はHeavisideの単位ステップ関数である。

式(3.1b)は $\beta_x = \beta_\theta = 0$, $4\beta_x\beta_\theta R^2 P_0 = F_0$ とおけば、集中荷重 F_0 の作用する場合の表示となり、次のようになる。

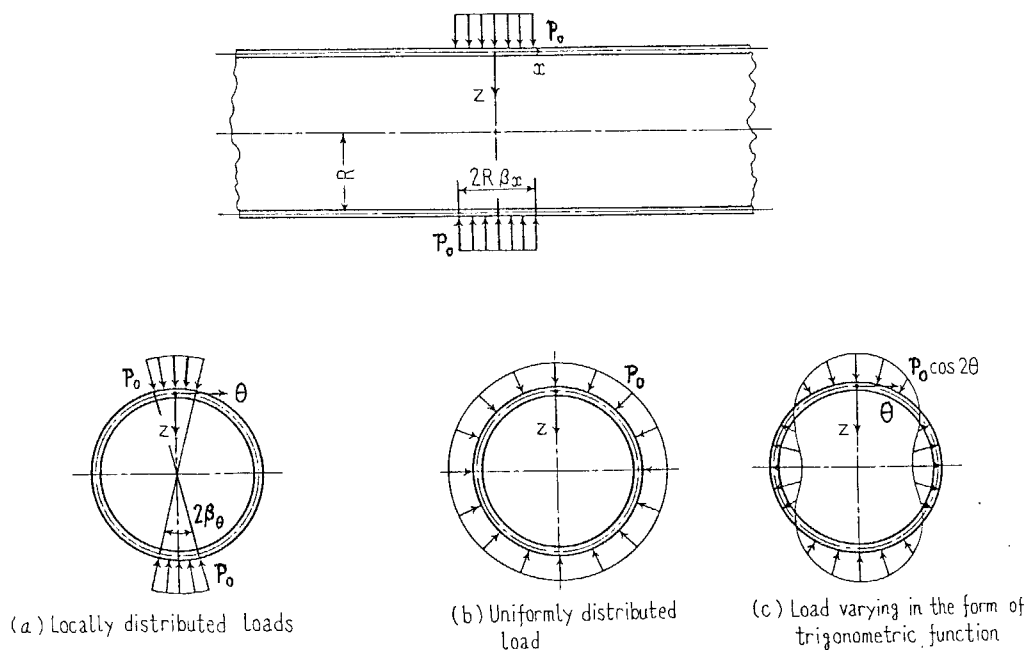


図3.1 部分分布荷重をうける無限長円筒殻

$$P_z = \frac{F_0 H(t)}{\pi^2 R^2} \left(1 + 2 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \cos n\theta \right) \int_0^{\infty} \cos \alpha \xi \, d\alpha \quad (3.2)$$

式(3.1)および(3.2)の荷重表示は軸対称部分と余弦状の非軸対称部分からなっているので、それぞれの荷重に対する結果を重ね合わせれば部分分布荷重あるいは集中荷重をうける円筒殻に対する結果が得られる。そこで、軸対称分布と余弦状分布の衝撃荷重をうける無限長円筒殻の問題を別個に解析することにした。

主に Flügge および Donnell の両理論間の差違ならびに面内並進慣性の影響を調べるために、基礎式は次のものを選んだ。

軸対称問題に対しては、一次近似理論による式(2.43a)および(2.43b)を用いる。非軸対称問題に対しては、Flügge の理論による式(2.33)および Donnell の理論による式(2.37)を用いる。なお、各式において面内並進慣性を無視した場合の式も用いるものとするが、いずれの場合も回転慣性は無視するものとする。

3.2.1 軸対称分布衝撃荷重をうける無限長円筒殻

図3.1(b)のように大きさ P_0 の軸対称分布衝撃荷重が無限長円筒殻の外面にステップ関数状に作用する問題を考えると、荷重成分 P_z は次のように表される。

$$P_z = \begin{cases} P_0 H(t) & (|x| \leq R\beta_x) \\ 0 & (|x| > R\beta_x) \end{cases} \quad (3.3)$$

回転慣性を無視した場合の一次近似理論による基礎方程式(2.43a)および(2.43b)を用いるものとし、式(2.43b)の右辺を零

と置き, $P_x = m_\theta = 0$ および式(3.3)を代入する。

初期条件として

$$(f)_{t=0} = (\partial f / \partial t)_{t=0} = 0 \quad (3.4)$$

が成立するものとして時間を t についてラプラス変換し, 円筒殻の変形の $x=0$ の面に関する対称性と無限遠方において変位が零となることを利用してフーリエ変換すれば, 基礎方程式は変位成分の二重積分変換形に関する単なる連立代数方程式となる。これを行列表示すれば, 次のとおりである。

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 + \lambda^2 & -\nu\alpha \\ -\nu\alpha & 1 + k^2\alpha^4 + \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_s \\ \bar{w}_c \end{pmatrix} = \frac{R^2 P_0}{E_p} \frac{\sin \alpha \beta_x}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\text{ここで } \bar{f} = \int_0^\infty f e^{-\lambda t} dt, \quad \lambda = R p / c$$

$$f_s = \int_0^\infty f \sin \alpha \xi d\alpha, \quad f_c = \int_0^\infty f \cos \alpha \xi d\alpha$$

式(3.5)を解き, 留数定理を用いてラプラス逆変換し, さらにフーリエ逆変換すれば, 本問題の解が得られ以下のようになる。

$$\frac{E_p}{R^2 P_0} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha \beta_x}{\alpha} \sum_{j=1}^2 \frac{1 - \cos \lambda_{0j} z}{\lambda_{0j}^2 (z \lambda_{0j}^2 - a_{11} - a_{22})} \begin{pmatrix} a_{12} \sin \alpha \xi \\ (\lambda_{0j}^2 - a_{11}) \cos \alpha \xi \end{pmatrix} d\alpha \quad (3.6)$$

ここで, λ_{0j} ($j=1, 2$) は次式の相異なる正の実根である。

$$\lambda^4 - (a_{11} + a_{22}) \lambda^2 + |A| = 0 \quad (3.7)$$

$$\text{ただし } (A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & -\nu\alpha \\ -\nu\alpha & 1 + k^2\alpha^4 \end{pmatrix}$$

面内並進慣性すなわち x 軸方向の慣性力を無視する場合には式(2.43a)中の時間微分項を零とすることになる。この場合

の解も同様にして得られ次のようになる。

$$\frac{E_p}{R^2 P_0} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha \beta x}{\alpha} \frac{1 - \cos \lambda_0 z}{|A|} \begin{pmatrix} -a_{12} \sin \alpha \xi \\ a_{11} \cos \alpha \xi \end{pmatrix} d\alpha \quad (3.8)$$

$$\text{ここで, } \lambda_0 = \sqrt{|A|/a_{11}}$$

式(3.6)および(3.8)の数値解は、原則として数値積分法によって求めなければならぬ。

3.2.2 余弦状分布衝撃荷重をうける無限長円筒殻

図3.1(c)のように大きさ P_0 の余弦状分布衝撃荷重が無限長円筒殻の外面にステップ関数状に作用する問題を考えると、荷重成分 P_z は次のように表される。

$$P_z = \begin{cases} P_0 \cos n\theta H(t) & (|x| \leq R\beta x) \\ 0 & (|x| > R\beta x) \end{cases} \quad (3.9)$$

そこで、変位成分の変数分離解を

$$u = U_m \cos n\theta, \quad v = V_m \sin n\theta, \quad w = W_m \cos n\theta \quad (3.10)$$

のように置くことにする。ここで、 (U_m, V_m, W_m) は座標 x と時間 t だけの関数である。

回転慣性を無視した場合のFlüggeおよびDonnellの理論による基礎方程式(2.33)および(2.37)を用いるものとし、各式の右辺を零と置き、 $P_x = P_\theta = m_x = m_\theta = 0$ および式(3.9)と(3.10)を代入する。その際、慣性項については一次近似を導入するものとする(p.23参照)。

初期条件として式(3.4)が成立するものとし時間 t についてラプラス変換し、円筒殻の変形の $x=0$ の面に関する対称性と無限遠方において変位が零となることを利用してフーリエ

変換すれば、基礎方程式は変位成分 (U_m, V_m, W_m) の二重積分変換形に関する単なる連立代数方程式となる。これを行列表示すれば、次のとおりである。

$$\begin{pmatrix} b_{11} + \lambda^2 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} + \lambda^2 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} + \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_{m,s} \\ \bar{V}_{m,c} \\ \bar{W}_{m,c} \end{pmatrix} = \frac{R^2 P_0}{E_p} \frac{\sin \alpha \beta x}{p \alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

ここで、成分 b_{ij} から成る行列を (B) とすれば、その定義は各理論について次のようになる。

(I) Flugge の理論を用いた場合

$$(B) = \begin{pmatrix} \alpha^2 + (1+k^2)p_1 n^2 & p_2 \alpha n & -\nu \alpha - k^2 \alpha (\alpha^2 - p_1 n^2) \\ p_2 \alpha n & (1+3k^2)p_1 \alpha^2 + n^2 & -n - k^2(1+p_1)\alpha^2 n \\ -\nu \alpha - k^2 \alpha (\alpha^2 - p_1 n^2) & -n - k^2(1+p_1)\alpha^2 n & 1+k^2 - 2k^2 n^2 + k^2(\alpha^2 + n^2)^2 \end{pmatrix}$$

(II) Donnell の理論を用いた場合

$$(B) = \begin{pmatrix} \alpha^2 + p_1 n^2 & p_2 \alpha n & -\nu \alpha \\ p_2 \alpha n & p_1 \alpha^2 + n^2 & -n \\ -\nu \alpha & -n & 1+k^2(\alpha^2 + n^2)^2 \end{pmatrix}$$

式(3.11)を解き、留数定理を用いてラプラス逆変換し、さらにフーリエ逆変換すれば、本問題の変位成分 (U_m, V_m, W_m) に対する解が得られ以下のようなになる。

$$\frac{E_p}{R^2 P_0} \begin{pmatrix} U_m \\ V_m \\ W_m \end{pmatrix} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha \beta x}{\alpha} \sum_{j=1}^3 \frac{1 - \cos \lambda_{mj} z}{\lambda_{mj}^2 \{ 3\lambda_{mj}^4 - 2(b_{11} + b_{22} + b_{33})\lambda_{mj}^2 + (B_{11} + B_{22} + B_{33}) \}}$$

$$\times \begin{pmatrix} (B_{31} + b_{31} \lambda_{nj}^2) \sin \alpha \xi \\ (-B_{32} - b_{32} \lambda_{nj}^2) \cos \alpha \xi \\ \{ B_{33} - (b_{11} + b_{22}) \lambda_{nj}^2 + \lambda_{nj}^4 \} \cos \alpha \xi \end{pmatrix} d\alpha \quad (3.12)$$

ここで、 λ_{nj} ($j=1, 2, 3$)は次式の相異なる正の3実根である。

$$\lambda^6 - (b_{11} + b_{22} + b_{33}) \lambda^4 + (B_{11} + B_{22} + B_{33}) \lambda^2 - |B| = 0 \quad (3.13)$$

面内並進慣性すなわち x および θ 軸方向の慣性力を無視する場合には式(2.33a), (2.33b), (2.37a) および (2.37b) 中の時間微分項を零とすることになる。この場合の解も同様にして得られ次のようになる。

$$\frac{E_p}{R^2 p_0} \begin{pmatrix} U_m \\ V_m \\ W_m \end{pmatrix} = \frac{z}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha \beta x}{\alpha} \frac{1 - \cos \lambda_m z}{|B|} \begin{pmatrix} B_{31} \sin \alpha \xi \\ B_{32} \cos \alpha \xi \\ B_{33} \cos \alpha \xi \end{pmatrix} d\alpha \quad (3.14)$$

ここで、 $\lambda_m = \sqrt{|B| / B_{33}}$

式(3.12)および(3.14)の数値解は、原則として数値積分法によって求めなければならぬ。

3.2.3 部分分布衝撃荷重をうける無限長円筒殻

図3.1(a)のような部分分布衝撃荷重に対する結果(u, v, w)は3.2.1および3.2.2項の結果を重ね合わせるにより得られ

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{z \beta_0}{\pi} \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ w_0 \end{pmatrix} + \frac{4 \beta_0}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\sin n \beta_0}{n \beta_0} \begin{pmatrix} U_n \cos n \theta \\ V_n \sin n \theta \\ W_n \cos n \theta \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

となる。ここで、 (u_0, w_0) は3.2.1項の軸対称分布衝撃荷重の場合の結果である。たとえば、面内並進慣性を無視した基礎式を用いた場合の解は、式(3.8)および(3.14)を式(3.15)に代

入して次のようになる。

$$\frac{E_p}{4\beta_x\beta_\theta R^2 P_0} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha \beta_x}{\alpha \beta_x} \frac{1 - \cos \lambda_0 \tau}{|A|} \begin{pmatrix} -a_{12} \sin \alpha \xi \\ 0 \\ a_{11} \cos \alpha \xi \end{pmatrix} d\alpha$$

$$+ \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=2,4,\dots}^\infty \frac{\sin n\beta_\theta}{n\beta_\theta} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha \beta_x}{\alpha \beta_x} \frac{1 - \cos \lambda_n \tau}{|B|} \begin{pmatrix} B_{31} \sin \alpha \xi \\ B_{32} \cos \alpha \xi \\ B_{33} \cos \alpha \xi \end{pmatrix} d\alpha$$

(3.16)

ここで、集中荷重 F_0 の場合には $\beta_x = \beta_\theta = 0$, $4\beta_x\beta_\theta R^2 P_0 = F_0$ と置けばよい。

数値積分には、ミンフソンの第1公式を用いた。

3.2.4 静的解の閉形化

式(3.8)および(3.14)における時間 τ に無関係な部分は、ラプラス逆変換の際に原点 $\alpha = 0$ ($\lambda = 0$) における留数から求められたもので、それぞれ荷重が静的に作用した場合の解である。

すなわち、軸対称分布荷重のもとでは次式が静的解である。

$$\frac{E_p}{R^2 P_0} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha \beta_x}{\alpha |A|} \begin{pmatrix} -a_{12} \sin \alpha \xi \\ a_{11} \cos \alpha \xi \end{pmatrix} d\alpha \quad (3.17)$$

一方、式(3.6)における時間 τ に無関係な部分も静的解であるが、これは式(3.7)を用いて λ_{0j} を消去すると式(3.17)と完全

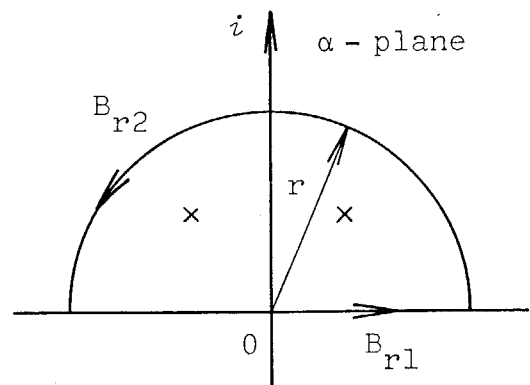


図3.2 一周積分路

に一致する。

式(3.17)の無限積分は図3.2のような積分路 B_{r1} および B_{r2} からなる一周積分路を用いることにより留数計算に置き換えられる。この積分路内に存在する極は $|A| = 0$ を満足する4個の複素根の内の2根である。 $r \rightarrow \infty$ とすると B_{r2} に沿っての積分値は零となるので、第1および第2象限における2個の極における留数の和に πi を乗じたものが式(3.17)の積分結果となる。したがって、式(3.17)の無限積分は以下のような閉じた形の式となる。

(i) $0 \leq \xi < \beta_x$ においては

$$\frac{k^2 E_p}{R^2 P_0} u = \frac{\nu}{16c^5} \left[4c\xi + e^{-c(\beta_x - \xi)} \{ \sin c(\beta_x - \xi) - \cos c(\beta_x - \xi) \} \right. \\ \left. - e^{-c(\beta_x + \xi)} \{ \sin c(\beta_x + \xi) - \cos c(\beta_x + \xi) \} \right]$$

$$\frac{k^2 E_p}{R^2 P_0} w = \frac{1}{8c^4} \{ z - e^{-c(\beta_x - \xi)} \cos c(\beta_x - \xi) - e^{-c(\beta_x + \xi)} \cos c(\beta_x + \xi) \}$$

(3.18a)

(ii) $\beta_x \leq \xi$ においては

$$\frac{k^2 E_p}{R^2 P_0} u = \frac{\nu}{16c^5} \left[4c\beta_x + e^{-c(\xi - \beta_x)} \{ \sin c(\xi - \beta_x) - \cos c(\xi - \beta_x) \} \right. \\ \left. - e^{-c(\xi + \beta_x)} \{ \sin c(\xi + \beta_x) - \cos c(\xi + \beta_x) \} \right]$$

$$\frac{k^2 E_p}{R^2 P_0} w = \frac{1}{8c^4} \{ e^{-c(\xi - \beta_x)} \cos c(\xi - \beta_x) - e^{-c(\xi + \beta_x)} \cos c(\xi + \beta_x) \}$$

(3.18b)

ここで、 $c = \sqrt{J/Z}$, $J^2 = (1 - \nu^2)/k^2$, $k^2 = h^2/12R^2$

余弦状分布荷重のもとでは、次式が静的解である。

$$\frac{E_p}{R^2 P_0} \begin{bmatrix} U_m \\ V_m \\ W_m \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha \beta x}{\alpha |B|} \begin{bmatrix} B_{31} \sin \alpha \xi \\ B_{32} \cos \alpha \xi \\ B_{33} \cos \alpha \xi \end{bmatrix} d\alpha \quad (3.19)$$

一方，式(3.12)における時間 t に無関係な部分も静的解であるが，これは式(3.13)を用いて λ_{mj} を消去すると式(3.19)と完全に一致する。

式(3.17)の場合と同様に，式(3.19)の閉形化した結果をDonnellの理論を用いた場合について示す。

式(3.19)の積分結果は，図3.2のような一周積分路内における4個の極(すなわち $|B|=0$ を満足する8個の複素根の内の第1および第2象限にある根に相当する。)における留数の総和に πi を乗じたものとなり，以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{k^2 E_p}{R^2 P_0} U_m = & -\frac{1}{4J^2 n^4 S^2} \left[\left\{ \frac{J}{2} E_2 - (1+\nu) n^2 E_1 - J n^2 S^2 b \right\} \frac{X_5(\xi)}{a^2 + b^2} \right. \\ & + \left\{ \frac{J}{2} E_1 + (1+\nu) n^2 E_2 + J n^2 S^2 a \right\} \frac{X_6(\xi)}{a^2 + b^2} \\ & - \left\{ \frac{J}{2} E_4 - (1+\nu) n^2 E_3 - J n^2 S^2 g \right\} \frac{X_7(\xi)}{f^2 + g^2} \\ & \left. + \left\{ \frac{J}{2} E_3 + (1+\nu) n^2 E_4 - J n^2 S^2 f \right\} \frac{X_8(\xi)}{f^2 + g^2} \right] \quad (3.20a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{k^2 E_p}{R^2 P_0} V_m = & \frac{1}{4J^2 n^5 S^2} \left[\left\{ n^2 (E_1 b + E_2 a) + J (E_1 f + E_2 g) \right. \right. \\ & \left. \left. + \nu n^2 (E_1 g - E_2 f) \right\} \frac{X_1(\xi)}{a^2 + b^2} + \left\{ n^2 (E_1 a - E_2 b) + J (E_1 g - E_2 f) \right. \right. \\ & \left. \left. - \nu n^2 (E_1 f + E_2 g) \right\} \frac{X_2(\xi)}{a^2 + b^2} - \left\{ n^2 (E_3 g - E_4 f) - J (E_3 a - E_4 b) \right. \right. \end{aligned}$$

(124)

$$\begin{aligned}
& + \nu n^2 (E_3 b + E_4 a) \left\} \frac{X_3(\xi)}{f^2 + g^2} - \left\{ n^2 (E_3 f + E_4 g) - J (E_3 b + E_4 a) \right. \right. \\
& \left. \left. - \nu n^2 (E_3 a - E_4 b) \right\} \frac{X_4(\xi)}{f^2 + g^2} \right] \quad (3.20b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa^2 E_p}{R^2 P_0} W_m = \frac{1}{4J n^4 S^2} \left\{ \frac{E_1 f + E_2 g}{a^2 + b^2} X_1(\xi) + \frac{E_1 g - E_2 f}{a^2 + b^2} X_2(\xi) \right. \\
\left. + \frac{E_3 a - E_4 b}{f^2 + g^2} X_3(\xi) + \frac{E_3 b + E_4 a}{f^2 + g^2} X_4(\xi) \right\} \quad (3.20c)
\end{aligned}$$

ここで、関数 $X_i(\xi)$ は次のとおりである。

(i) $0 \leq \xi < \beta_x$ においては

$$\begin{aligned}
X_1(\xi) &= \sin a(\beta_x - \xi) e^{-b(\beta_x - \xi)} + \sin a(\beta_x + \xi) e^{-b(\beta_x + \xi)} \\
X_2(\xi) &= 2 - \cos a(\beta_x - \xi) e^{-b(\beta_x - \xi)} - \cos a(\beta_x + \xi) e^{-b(\beta_x + \xi)} \\
X_3(\xi) &= \sin f(\beta_x - \xi) e^{-g(\beta_x - \xi)} + \sin f(\beta_x + \xi) e^{-g(\beta_x + \xi)} \\
X_4(\xi) &= 2 - \cos f(\beta_x - \xi) e^{-g(\beta_x - \xi)} - \cos f(\beta_x + \xi) e^{-g(\beta_x + \xi)} \\
X_5(\xi) &= \sin a(\beta_x + \xi) e^{-b(\beta_x + \xi)} - \sin a(\beta_x - \xi) e^{-b(\beta_x - \xi)} \\
X_6(\xi) &= \cos a(\beta_x - \xi) e^{-b(\beta_x - \xi)} - \cos a(\beta_x + \xi) e^{-b(\beta_x + \xi)} \\
X_7(\xi) &= \sin f(\beta_x + \xi) e^{-g(\beta_x + \xi)} - \sin f(\beta_x - \xi) e^{-g(\beta_x - \xi)} \\
X_8(\xi) &= \cos f(\beta_x - \xi) e^{-g(\beta_x - \xi)} - \cos f(\beta_x + \xi) e^{-g(\beta_x + \xi)}
\end{aligned}$$

(ii) $\beta_x \leq \xi$ においては

$$\begin{aligned}
X_1(\xi) = X_5(\xi) &= \sin a(\xi + \beta_x) e^{-b(\xi + \beta_x)} - \sin a(\xi - \beta_x) e^{-b(\xi - \beta_x)} \\
X_2(\xi) = X_6(\xi) &= \cos a(\xi - \beta_x) e^{-b(\xi - \beta_x)} - \cos a(\xi + \beta_x) e^{-b(\xi + \beta_x)} \\
X_3(\xi) = X_7(\xi) &= \sin f(\xi + \beta_x) e^{-g(\xi + \beta_x)} - \sin f(\xi - \beta_x) e^{-g(\xi - \beta_x)} \\
X_4(\xi) = X_8(\xi) &= \cos f(\xi - \beta_x) e^{-g(\xi - \beta_x)} - \cos f(\xi + \beta_x) e^{-g(\xi + \beta_x)}
\end{aligned}$$

また式(3.20)に含まれる記号は次式で定義される。

$$\left. \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mp (n^2 - \eta) + \sqrt{(n^2 - \eta)^2 + \left(\frac{J}{2} - \phi \right)^2} \right]^{1/2}$$

$$\left. \begin{matrix} f \\ g \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mp (n^2 + \eta) + \sqrt{(n^2 + \eta)^2 + \left(\frac{J}{2} + \phi\right)^2} \right]^{1/2}$$

$$\left. \begin{matrix} \phi \\ \eta \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{J}{2}} \sqrt{n^2 s^2 \pm \frac{J}{4}}, \quad s^2 = \sqrt{1 + \frac{J^2}{16n^4}}$$

$$E_1 = a\phi + b\eta, \quad E_2 = a\eta - b\phi, \quad E_3 = f\phi - g\eta, \quad E_4 = f\eta + g\phi$$

Flügge の理論を用いた場合についても同様の手法により閉形化した式を導くことができるが、ここでは記述を省略する。

以上、変位成分に対する解だけを示してきたが、応力成分に対する解は、変位成分の解をそれぞれの理論における構成方程式（2.3 節）に代入することにより簡単に求められるので、記述は省略する。

3.3 両縁自由支持円筒殻の解析

図3.3(a)のように半径方向部分分布荷重が時間に関してステップ関数状に両縁の自由支持された有限長円筒殻の外面に作用する問題を考える。

この場合、基礎方程式(2.3)および(2.4)における荷重成分 $(P_x, P_\theta, P_z, m_x, m_\theta)$ は $h \ll 2R$ とすると次のように表される。

$$P_x = P_\theta = m_x = m_\theta = 0 \quad (3.21a)$$

$$P_z = \frac{4\beta_x \beta_\theta R}{\pi l} P_0 H(t) \left(1 + 2 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\beta_\theta}{n\beta_\theta} \cos n\theta \right)$$

$$\times \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m \beta_x}{\alpha_m \beta_x} \cos \alpha_m \frac{x}{R} \quad (3.21b)$$

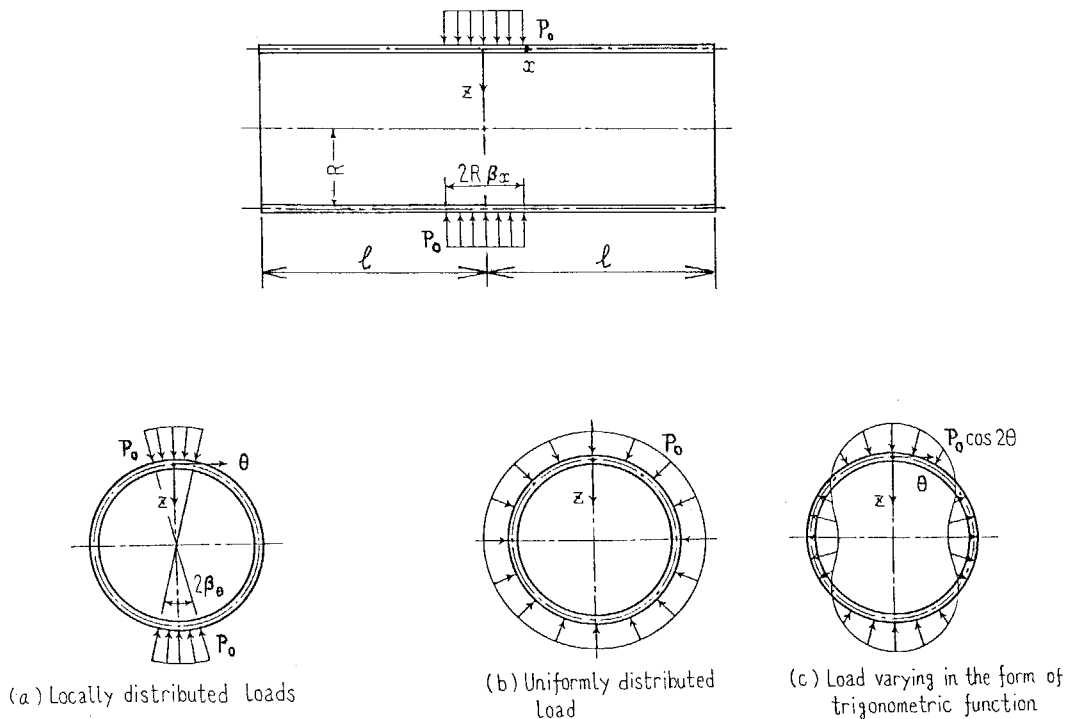


図3.3 部分分布荷重をうける両縁自由支持円筒殻

ここで、 $\alpha_m = m\pi R / 2l$ である。

式(3.21b)は $\beta_x = \beta_\theta = 0$ 、 $4\beta_x\beta_\theta R^2 P_0 = F_0$ と置けば、集中荷重 F_0 の作用する場合の表示となり、次のようになる。

$$P_z = \frac{F_0 H(t)}{\pi R l} \left(1 + 2 \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \cos m\theta\right) \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos \alpha_m \frac{x}{R} \quad (3.22)$$

式(3.21)および(3.22)の荷重表示は軸対称部分と余弦状の非軸対称部分からなっているので、それぞれの荷重に対する結果を重ね合わせれば部分分布荷重あるいは集中荷重をうける円筒殻に対する結果が得られる。そこで、軸対称分布と余弦状分布の衝撃荷重をうける両縁自由支持円筒殻の問題を別個に解析することにした。

主に Flügge および Donnell の両理論間の差違ならびに面内並進慣性の影響を調べるために、基礎式は無限長円筒殻の解析で用いた式と同じものを選んだ。

なお、両縁における自由支持の境界条件は

$$x = \pm l \text{ において } N_x = v = w = M_x = 0 \quad (3.23)$$

である。

3.3.1 軸対称分布衝撃荷重をうける両縁自由支持円筒殻

図3.3(b)のように大きさ P_0 の軸対称分布荷重が両縁自由支持円筒殻の外面にステップ関数状に作用する問題を考えると、荷重成分 P_z は次のように表される。

$$P_z = \begin{cases} P_0 H(t) & (|x| \leq R\beta_x) \\ 0 & (|x| > R\beta_x) \end{cases} \quad (3.24)$$

両縁における自由支持の境界条件は、 $x = \pm l$ において

(128)

$$N_x = W = M_x = 0 \quad (3.25)$$

である。これを変位成分だけで表せば

$$k^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial U}{\partial \xi} - \nu W = 0 \quad (3.26a)$$

$$W = 0 \quad (3.26b)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0 \quad (3.26c)$$

となるので、境界条件として最終的に次の関係式が得られる。

$$\xi = \pm \frac{l}{R} \text{ において } W = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0 \quad (3.27)$$

そこで、変位成分の解および荷重成分 P_z を以下のように置けば、境界条件を満足する解が容易に得られることになる。

$$U = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} U \sin \alpha_m \xi \quad (3.28a)$$

$$W = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} W \cos \alpha_m \xi \quad (3.28b)$$

$$P_z = 2 \frac{R^3 P_0 H(t)}{l E_p} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m \beta x}{\alpha_m} \cos \alpha_m \xi \quad (3.28c)$$

前節と同様に回転慣性を無視した場合の一次近似理論による基礎方程式(2.43a)および(2.43b)を用いるものとし、式(3.28)を代入した後、前節と同じ初期条件のもとでラプラス変換すれば、基礎方程式は変位成分 (U, W) のラプラス変換形に関する単なる代数方程式となる。これを行列表示すれば

$$\begin{pmatrix} \alpha_m^2 + \lambda^2 & -\nu \alpha \\ -\nu \alpha & 1 + k^2 \alpha_m^4 + \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{W} \end{pmatrix} = 2 \frac{R^3 P_0}{l E_p} \frac{\sin \alpha_m \beta x}{\alpha_m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

となる。これを解き、留数定理を用いてラプラス逆変換すれば

ば、本問題の解が得られ以下のようなになる。

$$\frac{E_p}{R^2 P_0} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = z \frac{R}{l} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m \beta x}{\alpha_m} \sum_{j=1}^2 \frac{1 - \cos \lambda_{0j} z}{\lambda_{0j}^2 (2\lambda_{0j}^2 - a_{11} - a_{22})} \begin{pmatrix} a_{12} \sin \alpha_m \xi \\ (\lambda_{0j}^2 - a_{11}) \cos \alpha_m \xi \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

ここで、 λ_{0j} ($j=1,2$) は次式の相異なる正の2実根である。

$$\lambda^4 - (a_{11} + a_{22}) \lambda^2 + |A| = 0 \quad (3.31)$$

$$\text{ただし } (A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_m^2 & -\nu \alpha_m \\ -\nu \alpha_m & 1 + k^2 \alpha_m^4 \end{pmatrix}$$

面内並進慣性すなわち x 軸方向の慣性力を無視する場合には式(2.43a)中の時間微分項をすべて零とすることになる。

この場合の解も同様にして得られ次のようになる。

$$\frac{E_p}{R^2 P_0} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = z \frac{R}{l} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m \beta x}{\alpha_m} \frac{1 - \cos \lambda_0 z}{|A|} \begin{pmatrix} -a_{12} \sin \alpha_m \xi \\ a_{11} \cos \alpha_m \xi \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$$\text{ここで、 } \lambda_0 = \sqrt{|A| / a_{11}}$$

3.3.2 余弦状分布衝撃荷重をうける両縁自由支持円筒殻

図3.3(c)のように大きさを P_0 の余弦状分布荷重が両縁自由支持円筒殻の外面にステップ関数状に作用する問題を考えると、荷重成分 P_z は次のように表される。

$$P_z = \begin{cases} P_0 \cos n\theta H(t) & (|x| \leq R \beta x) \\ 0 & (|x| > R \beta x) \end{cases} \quad (3.33)$$

そこで、変位成分の変数分離解を

$$u = U_m \cos n\theta, \quad v = V_m \sin n\theta, \quad w = W_m \cos n\theta \quad (3.34)$$

と置くことにする。ここで、 (U_m, V_m, W_m) は座標 x と時間 t だけ

(130)

の関数である。両縁自由支持の境界条件式(3.23)を構成方程式(2.28)により変位成分だけで表し、式(3.34)を代入すると

$$k^2 \frac{\partial^2 W_m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial U_m}{\partial \xi} - \nu(nV_m + W_m) = 0 \quad (3.35a)$$

$$V_m = 0 \quad (3.35b)$$

$$\frac{\partial^2 W_m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial U_m}{\partial \xi} - \nu n(V_m + nW_m) = 0 \quad (3.35c)$$

$$W_m = 0 \quad (3.35d)$$

となるので、境界条件として最終的に次の関係式が得られる。

$$\xi = \frac{l}{R} \text{において} \quad V_m = W_m = \frac{\partial^2 W_m}{\partial \xi^2} = \frac{\partial U_m}{\partial \xi} = 0 \quad (3.36)$$

そこで、変位成分の解および荷重成分 P_z を以下のように置けば、境界条件を満足する解が容易に得られることになる。

$$U_m = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} U_{mn} \sin \alpha_m \xi \quad (3.37a)$$

$$V_m = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} V_{mn} \cos \alpha_m \xi \quad (3.37b)$$

$$W_m = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} W_{mn} \cos \alpha_m \xi \quad (3.37c)$$

$$P_z = 2 \cos n\theta \frac{R^3 P_0 H(t)}{l E_p} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m \beta x}{\alpha_m} \cos \alpha_m \xi \quad (3.37d)$$

前節と同様に回転慣性を無視した場合の Flugge と Donnell の理論による基礎方程式(2.33)および(2.37)を用いるものとし、各式の右辺を零と置き、 $P_x = P_\theta = m_x = m_\theta = 0$ および式(3.34)と(3.37)を代入する。その際、慣性項については一次近似を導入するものとする。(p.23 参照)

基礎方程式に式(3.34)および(3.37)を代入し，前節と同じ初期条件のもとでラプラス変換すれば，変位成分 $(\bar{U}_{mn}, \bar{V}_{mn}, \bar{W}_{mn})$ のラプラス変換形に関する単なる代数方程式となる。これを行列表示すれば，次のようになる。

$$\begin{pmatrix} b_{11} + \lambda^2 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} + \lambda^2 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} + \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_{mn} \\ \bar{V}_{mn} \\ \bar{W}_{mn} \end{pmatrix} = \mathcal{Z} \frac{R^3 P_0}{l E_p} \frac{\sin \alpha_m \beta_x}{\rho \alpha_m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

ここで，成分 b_{ij} から成る行列を (B) とすれば，その定義は各理論について次のようになる。

(I) Flügge の理論を用いた場合

$$(B) = \begin{pmatrix} \alpha_m^2 + (1+k^2) \rho_1 n^2 & \rho_2 \alpha_m n & -\nu \alpha_m - k^2 \alpha_m (\alpha_m^2 - \rho_1 n^2) \\ \rho_2 \alpha_m n & (1+3k^2) \rho_1 \alpha_m^2 + n^2 & -n - k^2 (1+\rho_1) \alpha_m^2 n \\ -\nu \alpha_m - k^2 \alpha_m (\alpha_m^2 - \rho_1 n^2) & -n - k^2 (1+\rho_1) \alpha_m^2 n & 1+k^2 - 2k^2 n^2 + k^2 (\alpha_m^2 + n^2)^2 \end{pmatrix}$$

(II) Donnell の理論を用いた場合

$$(B) = \begin{pmatrix} \alpha_m^2 + \rho_1 n^2 & \rho_2 \alpha_m n & -\nu \alpha_m \\ \rho_2 \alpha_m n & \rho_1 \alpha_m^2 + n^2 & -n \\ -\nu \alpha_m & -n & 1+k^2 (\alpha_m^2 + n^2)^2 \end{pmatrix}$$

式(3.38)を解き，留数定理を用いてラプラス逆変換し，式(3.37)に代入すれば，本問題の変位成分 (U_m, V_m, W_m) に対する解が得られ以下のようなになる。

$$\frac{E_p}{R^3 P_0} \begin{pmatrix} U_m \\ V_m \\ W_m \end{pmatrix} = \mathcal{Z} \frac{R}{l} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m \beta_x}{\alpha_m} \sum_{j=1}^3 \frac{1 - \cos \lambda_{nj} \tau}{\lambda_{nj}^2 \{ 3\lambda_{nj}^4 - 2(b_{11} + b_{22} + b_{33}) \lambda_{nj}^2 + (B_{11} + B_{22} + B_{33}) \}}$$

(132)

$$\times \begin{bmatrix} (B_{31} + b_{31} \lambda_{nj}^2) \sin \alpha_m \xi \\ (-B_{32} - b_{32} \lambda_{nj}^2) \cos \alpha_m \xi \\ \{B_{33} - (b_{11} + b_{22}) \lambda_{nj}^2 + \lambda_{nj}^4\} \cos \alpha_m \xi \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

ここで、 λ_{nj} ($j=1,2,3$) は次式の相異なる正の3実根である。

$$\lambda^6 - (b_{11} + b_{22} + b_{33}) \lambda^4 + (B_{11} + B_{22} + B_{33}) \lambda^2 - |B| = 0 \quad (3.40)$$

面内並進慣性すなわち x および θ 軸方向の慣性力を無視する場合には式(2.33a), (2.33b), (2.37a) および (2.37b) 中の時間微分項を零とすることになる。この場合の解も同様にして得られ次のようになる。

$$\frac{F_p}{R^2 P_0} \begin{bmatrix} U_m \\ V_m \\ W_m \end{bmatrix} = 2 \frac{R}{l} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m \beta_x}{\alpha_m} \frac{1 - \cos \lambda_n \tau}{|B|} \begin{bmatrix} B_{31} \sin \alpha_m \xi \\ B_{32} \cos \alpha_m \xi \\ B_{33} \cos \alpha_m \xi \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

ここで、 $\lambda_n = \sqrt{|B|/B_{33}}$ であり、 B_{ij} は b_{ij} の余因子である。

3.3.3 部分分布衝撃荷重をうける両縁自由支持円筒殻

図3.3(a)のような部分分布荷重に対する結果(u, v, w)は3.3.1 および 3.3.2 項の結果を重ね合わせるにより得られ

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \frac{2\beta_\theta}{\pi} \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \\ w_0 \end{bmatrix} + \frac{4\beta_\theta}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\beta_\theta}{n\beta_\theta} \begin{bmatrix} U_n \cos n\theta \\ V_n \sin n\theta \\ W_n \cos n\theta \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

となる。ここで、 (u^0, w^0) は 3.3.1 項の軸対称分布衝撃荷重の場合の結果である。たとえば、面内並進慣性を無視した基礎式を用いた場合の解は、式(3.32) および (3.41) を式(3.42)に代入して次のようになる。

$$\frac{E_p}{4\beta_x\beta_\theta R^2 P_0} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{R}{\pi l} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m \beta_x}{\alpha_m \beta_x} \frac{1 - \cos \lambda_0 \tau}{|A|} \begin{pmatrix} -a_{12} \sin \alpha_m \xi \\ 0 \\ a_{11} \cos \alpha_m \xi \end{pmatrix} \\ + \frac{2R}{\pi l} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\sin n \beta_\theta}{n \beta_\theta} \begin{pmatrix} \cos n \theta \\ \sin n \theta \\ \cos n \theta \end{pmatrix} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m \beta_x}{\alpha_m \beta_x} \frac{1 - \cos \lambda_n \tau}{|B|} \begin{pmatrix} B_{31} \sin \alpha_m \xi \\ B_{32} \cos \alpha_m \xi \\ B_{33} \cos \alpha_m \xi \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

ここで、集中荷重 F_0 の場合には $\beta_x = \beta_\theta = 0$, $4\beta_x\beta_\theta R^2 P_0 = F_0$ と置けばよい。

3.3.4 静的解の閉形化

式(3.43)における時間 τ に無関係な部分は、ラプラス逆変換の際に原点 $\tau = 0$ ($\lambda = 0$) における留数から求められたもので、それぞれの荷重が静的に作用した場合の解である。

これは m と n に関する二重級数となっているが、集中荷重の場合には m についての無限級数を閉じた形の式に変形することができる。

たとえば非軸対称部分の解析に Donnell の理論を用いた場合の変位 w を対象とすると、次式が静的解である。

$$\frac{k^2 E_p}{F_0} w = \frac{R}{\pi l} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\cos \alpha_m \xi}{\alpha_m^4 + J^2} \\ + \frac{2R}{\pi l} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \cos n \theta \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(\alpha_m^2 + n^2)^2}{(\alpha_m^2 + n^2)^4 + J^2 \alpha_m^4} \cos \alpha_m \xi \quad (3.44)$$

ここで、 $J^2 = (1 - \nu^2) / \kappa^2$, $\alpha_m = m\pi R / 2l$

α_m に関する超越方程式すなわち式(3.44)の分母を零とする

(134)

根を用いて，式(3.44)を変形すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{k^2 E_p}{F_0} \omega = & -\frac{iR}{2\pi l J} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_m^2 - \alpha_0^2} - \frac{1}{\alpha_m^2 - \alpha_0^2} \right) \cos \alpha_m \xi \\ & + \frac{R}{\pi l} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \cos n\theta \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_m^2 - \alpha_4^2} \left(\frac{1}{\alpha_m^2 - \alpha_1^2} - \frac{1}{\alpha_m^2 - \alpha_4^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\alpha_m^2 - \alpha_3^2} \left(\frac{1}{\alpha_m^2 - \alpha_2^2} - \frac{1}{\alpha_m^2 - \alpha_3^2} \right) \right\} \cos \alpha_m \xi \end{aligned} \quad (3.45)$$

ここで， α_0 は超越方程式 $\alpha^4 + J^2 = 0$ の根であり

$$\alpha_0 = (1+i) / J/2 \quad (3.46)$$

となり， $\alpha_1, \dots, \alpha_4, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_4$ は超越方程式 $(\alpha^2 + \eta^2)^4 + J^2 \alpha^4 = 0$ の根であり，次のようになる。

$$\begin{aligned} \alpha_1 = A + iB, \quad \alpha_2 = -A + iB \\ \alpha_3 = F + iG, \quad \alpha_4 = -F + iG \end{aligned} \quad (3.47)$$

ここで， $A, B, F, G > 0$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-(\eta^2 - \eta) + \sqrt{(\eta^2 - \eta)^2 + \left(\phi - \frac{J}{2}\right)^2} \right]^{1/2}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\eta^2 - \eta) + \sqrt{(\eta^2 - \eta)^2 + \left(\phi - \frac{J}{2}\right)^2} \right]^{1/2}$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-(\eta^2 + \eta) + \sqrt{(\eta^2 + \eta)^2 + \left(\phi + \frac{J}{2}\right)^2} \right]^{1/2}$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\eta^2 + \eta) + \sqrt{(\eta^2 + \eta)^2 + \left(\phi + \frac{J}{2}\right)^2} \right]^{1/2}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{J}{2}} \sqrt{\eta^2 s^2 - \frac{J}{4}}$$

$$\phi = \sqrt{\frac{J}{2}} \sqrt{\eta^2 s^2 + \frac{J}{2}}$$

$$s^2 = \sqrt{1 + \frac{J^2}{16\eta^4}}$$

Fourier 級数公式

$$\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\cos mx}{m^2 - a^2} = \frac{\pi}{4a} \frac{\sin a \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{\cos \frac{a\pi}{2}} \quad (3.48)$$

を用いて式(3.45)を変形すると次のようになり, m についての無限級数が閉じた形の式となり, n についての級数だけとなる。

$$\begin{aligned} \frac{k^2 E_p}{F_0} w = & -\frac{1}{2\pi J} \operatorname{Im} \left[\frac{\sin \alpha_0 \left(\frac{l}{R} - \xi \right)}{\alpha_0 \cos \alpha_0 \frac{l}{R}} \right] \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \cos n\theta \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\alpha_1^2 - \alpha_4^2} \left\{ \frac{\sin \alpha_1 \left(\frac{l}{R} - \xi \right)}{\alpha_1 \cos \alpha_1 \frac{l}{R}} - \frac{\sin \alpha_4 \left(\frac{l}{R} - \xi \right)}{\alpha_4 \cos \alpha_4 \frac{l}{R}} \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.49)$$

ここで, $\operatorname{Re}[a]$ および $\operatorname{Im}[a]$ はそれぞれ a の実部および虚部の意味である。

残りの変位成分および Flügge の理論を用いた場合についても同様の手法により閉形化した式を導くことができるが, ここでは記述を省略する。

以上本節では, 変位成分に対する解だけを示してきたが, 応力成分に対する解は変位成分の解をそれぞれの理論における構成方程式(2.3節)に代入することにより簡単に求められるので, 記述は省略した。

3.4 両縁自由円筒殻の解析

図3.4のように一対の半径方向集中荷重が時間に関してステップ関数状に両縁自由の有限長円筒殻の中央に作用する問題を考える。両縁における境界条件が同一であるから、対称性により $x \geq 0$ の部分だけを対象として解析を行うことができる。

荷重を x 軸に垂直な断面に生ずる有効せん断力と等置させる考え方に基づいて解析を行うものとすれば、本問題は $x=0$ および l の両縁において次の境界条件を有する長さ l の円筒殻の問題と等価になる。

(i) $x=0$ において

$$u = \partial w / \partial x = S_x = 0 \quad (3.50 a)$$

$$T_x = -F_0 \{ \delta(\theta) + \delta(\theta - \pi) \} H(t) / 2R \quad (3.50 b)$$

(ii) $x=l$ において

$$N_x = M_x = S_x = T_x = 0 \quad (3.50 c)$$

ここで、 S_x および T_x は周方向および半径方向の有効せん断力であり、 $\delta(\theta)$ は Dirac のデルタ関数である。式(3.50b)の右辺をフーリエ級数に展開して、 $F_0/R = f_0$ とおけば

$$T_x = -\frac{f_0}{2} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \cos n\theta \right) H(t) \quad (3.51)$$

となる。この表示式は軸対称部分と余弦状の非軸対称部分とから構成されているので、それぞれの荷重に対する結果を重

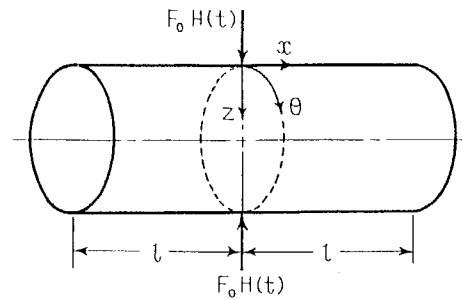


図3.4 集中衝撃荷重を
うける両縁自由円筒殻

ね合せることにより集中荷重に対する結果が得られることを示している。そこで、軸対称分布と余弦状分布の線衝撃荷重が両縁自由円筒殻の中央に作用する問題を別個に解析することにした。これらの問題は前項の問題とは異なり、 x 軸方向の振動モードを表す固有関数が不明であるため、基礎方程式の一般解から最終的には試行錯誤法により求めなければならない。

本節では解析方法の提示を主目的とするため、理論には最も簡単なものを選んだ。軸対称問題に対しては面外方向並進慣性だけを考慮した一次近似理論による式(2.57)を、非軸対称問題に対しては面外方向並進慣性だけを考慮したDonnellの理論による式(2.49)をそれぞれ用いた。

3.4.1 軸対称分布線衝撃荷重をうける両縁自由円筒殻

図3.5(a)のように大きさ q_0 の軸対称分布線荷重が長さ $2l$ の両縁自由円筒殻中央にステップ関数状に作用する問題を考える。両縁は自由であるから一次近似理論に $N_x = 0$ の近似を

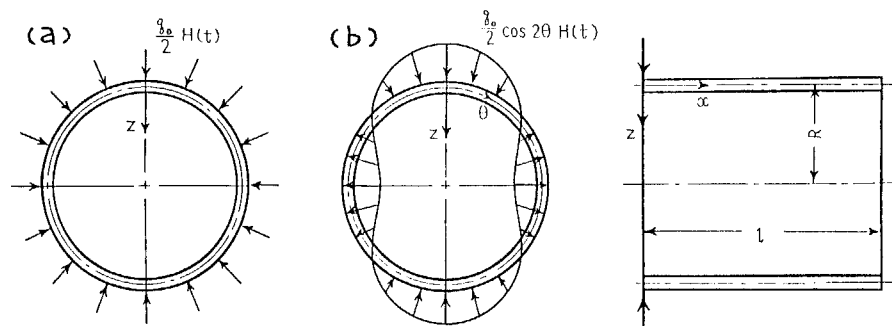


図3.5 中央に線衝撃荷重をうける両縁自由円筒殻

導入した。すると基礎方程式(2.57b)は次のようになる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \left(J^2 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w = 0 \quad (3.52)$$

問題の対称性から $x \geq 0$ の部分だけを対象とすればよく、本問題の境界条件は次のようになる。

(i) $x = 0$ において

$$\partial w / \partial x = 0 \quad (3.53a), \quad Q_x = -\rho_0 H(t) / 2 \quad (3.53b)$$

(ii) $x = l$ において

$$M_x = Q_x = 0 \quad (3.53c)$$

式(3.52)を初期条件式(3.4)のもとでラプラス変換すれば

$$\frac{d^4 \bar{w}}{d\xi^4} + \left(J^2 + \frac{\lambda^2}{k^2} \right) \bar{w} = 0 \quad (3.54)$$

のような常微分方程式となる。ここで、 $J^2 = (1 - v^2) / \kappa^2$

そこで、ラプラス変換された変位 \bar{w} の一般解を

$$\bar{w} = c_1 \cosh \alpha \xi + c_2 \sinh \alpha \xi + c_3 \cos \alpha \xi + c_4 \sin \alpha \xi \quad (3.55)$$

と置くことにする。ここで、 α は式(3.54)から導かれる次の特性方程式の根である。

$$\alpha^4 + J^2 + \lambda^2 / \kappa^2 = 0 \quad (3.56)$$

係数 c_j ($j = 1, \dots, 4$) を決定するために境界条件式(3.53)を変位成分 w だけで表し、ラプラス変換すれば次のようになる。

(i) $x = 0$ において

$$d\bar{w} / d\xi = 0 \quad (3.57a) \quad d^3 \bar{w} / d\xi^3 = \rho_0 R^3 / 2 + D \quad (3.57b)$$

(ii) $x = l$ において

$$d^2 \bar{w} / d\xi^2 = d^3 \bar{w} / d\xi^3 = 0 \quad (3.57c)$$

これらの式を用いれば係数 c_j が決定され、式(3.55)は次のようになる。

$$\frac{D\bar{w}}{R^3 g_0} = -\frac{1}{4\alpha^3 \rho N_0} \{ F_1 \cosh \alpha \xi + F_2 \cos \alpha \xi + N_0 (\sin \alpha \xi - \sinh \alpha \xi) \}$$

ここで

(3.58)

$$F_1(\alpha L) = 1 + \cosh \alpha L \cos \alpha L + \sinh \alpha L \sin \alpha L$$

$$F_2(\alpha L) = 1 + \cosh \alpha L \cos \alpha L - \sinh \alpha L \sin \alpha L$$

$$N_0(\alpha L) = \cosh \alpha L \sin \alpha L + \sinh \alpha L \cos \alpha L, \quad L = \ell / R$$

式(3.58)のラプラス逆変換は、 p すなわち λ 平面の原点($p=0$)および虚軸上にだけ存在する特異点($N_0=0$ を満足する根)における留数の総和を計算することにより行うことができる。これらの特異点を 0 および $\pm i p_m$ ($0 < p_0 < p_1 < p_2 < \dots$)と表せば、式(3.58)のラプラス逆変換結果すなわち本問題の解は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{R^3 g_0} &= \frac{1}{8a^3 M_0(aL)} \frac{f(\xi)}{\tau} - \frac{\cos \lambda_0 \tau}{2J^2 L} \\ &\quad - \frac{\kappa^2}{2L} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_1(\alpha_m L) \cosh \alpha_m \xi + F_2(\alpha_m L) \cos \alpha_m \xi}{\lambda_m^2 \cosh \alpha_m L \cos \alpha_m L} \cos \lambda_m \tau \end{aligned}$$

ここで

(3.59)

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \cosh^2 aL (\cosh a\xi \cos a\xi - \sinh a\xi \sin a\xi) \\ &\quad + \cos^2 aL (\cosh a\xi \cos a\xi + \sinh a\xi \sin a\xi) \\ &\quad + M_0(aL) \cdot (\cosh a\xi \sin a\xi - \sinh a\xi \cos a\xi) \end{aligned}$$

$$M_0(aL) = \cosh aL \sinh aL + \cos aL \sin aL$$

$$a = \sqrt{J/2}, \quad D = Eh^3/12(1-\nu^2), \quad \tau = ct/R$$

$\lambda_0 = \kappa J$ であり、 α_m ($m=1, 2, 3, \dots$)は次式の正実根である。

$$\tanh \alpha L + \tan \alpha L = 0 \quad (3.60)$$

λ_m ($0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$)は α_m ($0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$)により次式で与えられる。

(140)

$$\lambda_m = \kappa \sqrt{\alpha_m^4 + J^2}, \quad \lambda_m = R \rho_m / c$$

式(3.59)右辺第1項は原点($\rho=0$)における留数から求められたもので、荷重が静的に作用した場合の解に対応している。第2項は $\alpha=0$ すなわち $\lambda=\pm i\lambda_0$ における留数から、第3項は $\alpha=0$ を除く式(3.60)から求められる α_m すなわち特異点、 $\pm i\lambda_1, \pm i\lambda_2, \dots$ における留数から求められたものである。

λ_m は両縁自由円筒殻の m 次の無次元固有振動数であるから、解は静的結果と各次の固有振動モードの重ね合せで表示されていることになる。式(3.60)の α_m は試行錯誤法により求めるなければならないので、固有振動数 λ_m はいいかえれば固有モードを表す固有関数も試行錯誤法によらなければならないことになる。

x 軸方向変位 u に対する解は次式により求められる。

$$\partial u / \partial x = \nu w \quad (3.61)$$

積分定数は、 $x=0$ において $u=0$ なる条件式により決定される。

3.4.2 余弦状分布線衝撃荷重をうける両縁自由円筒殻

図3.5(b)のように大きさ $f_0 \cos n\theta$ の余弦状分布線衝撃荷重が長さ l の両縁自由円筒殻中央にステップ関数状に作用する問題を考える。問題の対称性から $x \geq 0$ の部分だけを対象とすればよく、本問題の境界条件は次のようになる。

(i) $x=0$ において

$$u = S_x = \partial w / \partial x = 0 \quad (3.62a)$$

$$T_x = -f_0 \cos n\theta H(t) / 2 \quad (3.62b)$$

(ii) $x = l$ において

$$N_x = M_x = S_x = T_x = 0 \quad (3.62c)$$

そこで、変位成分の変数分離解を

$$u = U_m \cos n\theta \quad (3.63a) \quad v = V_m \sin n\theta \quad (3.63b)$$

$$w = W_m \cos n\theta \quad (3.63c)$$

と置くことにする。ここで、 (U_m, V_m, W_m) は座標 x と時間 t だけの関数である。回転慣性と面内並進慣性をともに無視した Donnell の理論による式 (2.49) を用いるものとし、初期条件式 (3.4) のもとで式 (2.49c) をラプラス変換し式 (3.63c) を代入すれば、変位成分 W_m のラプラス変換形に関する常微分方程式

$$\frac{d^8 \bar{W}_m}{d\xi^8} - 4n^2 \frac{d^6 \bar{W}_m}{d\xi^6} + \left(6n^4 + \frac{1-\nu^2}{k^2} + \frac{\lambda^2}{k^2}\right) \frac{d^4 \bar{W}_m}{d\xi^4} - \left(4n^6 + 2n^2 \frac{\lambda^2}{k^2}\right) \frac{d^2 \bar{W}_m}{d\xi^2} + \left(n^8 + n^4 \frac{\lambda^2}{k^2}\right) \bar{W}_m = 0 \quad (3.64)$$

そこで、ラプラス変換された変位成分 $(\bar{U}_m, \bar{V}_m, \bar{W}_m)$ の一般解を次のように置くことにする。

$$\bar{U}_m = \sum_{j=1}^8 f_j c_j e^{\alpha_j \xi} \quad (3.65a) \quad \bar{V}_m = \sum_{j=1}^8 g_j c_j e^{\alpha_j \xi} \quad (3.65b)$$

$$\bar{W}_m = \sum_{j=1}^8 c_j e^{\alpha_j \xi} \quad (3.65c)$$

ここで、 f_j および g_j は式 (3.63) および (3.65) を式 (2.49a) および (2.49b) に代入することにより得られる次の係数である。

$$f_j = \frac{\nu \alpha_j^2 + n^2}{(\alpha_j^2 - n^2)^2} \alpha_j \quad g_j = \frac{n^2 - (2 + \nu) \alpha_j^2}{(\alpha_j^2 - n^2)^2} n$$

α_j ($j=1, \dots, 8$) は式 (3.65c) を式 (3.64) に代入して得られる 8 次の特性方程式の相異なる 8 根である。

(142)

係数 c_j を決定するために構成方程式 (2.71) を用いて境界条件式 (3.62) を変位成分だけで表し式 (3.63) を代入した後，ラプラス変換すれば，以下のようになる。

(i) $x=0$ においては

$$\bar{U}_m = d\bar{V}_m/d\xi = d\bar{W}_m/d\xi = 0 \quad (3.66a)$$

$$d^3\bar{W}_m/d\xi^3 = \rho_0 R^3/2\rho D \quad (3.66b)$$

(ii) $x=l$ においては

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{U}_m}{d\xi} + \nu(n\bar{V}_m - \bar{W}_m) &= \frac{d^2\bar{W}_m}{d\xi^2} - \nu n^2\bar{W}_m = n\bar{U}_m - \frac{d\bar{V}_m}{d\xi} + 2k^2n \frac{d\bar{W}_m}{d\xi} \\ &= \frac{d^3\bar{W}_m}{d\xi^3} - n^2(2-\nu) \frac{d\bar{W}_m}{d\xi} = 0 \end{aligned} \quad (3.66c)$$

式 (3.66) により係数 c_j が定まり， $(\bar{U}_m, \bar{V}_m, \bar{W}_m)$ の解が定まる。

ラプラス逆変換は， s 平面の原点および虚軸上だけに存在する極における留数の総和を計算することにより行うことができる。これらの特異点を 0 および $\pm i p_m$ ($0 < p_0 < p_1 < p_2 < \dots$) と表せば，ラプラス逆変換結果すなわち本問題の解は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{D}{R^3 \rho_0} \begin{bmatrix} \bar{U}_m \\ \bar{V}_m \\ \bar{W}_m \end{bmatrix} &= \left[\frac{1}{2|B|} \sum_{j=1}^8 \begin{bmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{bmatrix} B_{aj} e^{\alpha_j \xi} \right]_{\lambda_m=0} - \frac{1}{4n^5 L} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ n \end{bmatrix} \cos \lambda_0 \tau \\ &\quad - 2k^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_m \tau}{\lambda_m^2 \sum_{k=1}^8 |B_{ak}^*|} \sum_{j=1}^8 \begin{bmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{bmatrix} B_{aj} e^{\alpha_j \xi} \end{aligned} \quad (3.67)$$

ここで， $[B]$ は 8 次の行列であり i 行 j 列の成分 b_{ij} は

$$\begin{aligned} b_{1j} &= \alpha_j / d_j^2, & b_{2j} &= \alpha_j^3 / d_j^2, & b_{3j} &= \alpha_j, & b_{4j} &= \alpha_j^3 \\ b_{5j} &= \alpha_j^2 e^{\alpha_j L} / d_j^2, & b_{6j} &= (\alpha_j^2 - \nu n^2) e^{\alpha_j L} \end{aligned}$$

$$b_{7j} = \{(1+\nu)\alpha_j^3/d_j^2 + \kappa^2\alpha_j\} e^{\alpha_j L}, \quad b_{8j} = \{\alpha_j^2 - \pi^2(z-\nu)\} \alpha_j e^{\alpha_j L}$$

$$\text{ただし, } d_j = \alpha_j^2 - \pi^2$$

である。[B₈^{*}]は8次の行列であり、i行j列の成分b_{ij}^{*}は以下のようなになる。

$$(i) \quad j = k \text{ のとき} \quad b_{ij}^* = b_{ij}$$

$$(ii) \quad j = k \text{ のとき}$$

$$b_{1j}^* = (\pi^2 + 3\alpha_j)\beta_j / d_j^3, \quad b_{2j}^* = (3\pi^2 + \alpha_j^2)\alpha_j^2 \beta_j / d_j^3, \quad b_{3j}^* = -\beta_j$$

$$b_{4j}^* = -3\alpha_j^2 \beta_j, \quad b_{5j}^* = \{z(\pi^2 + \alpha_j^2) - \alpha_j d_j L\} \alpha_j \beta_j e^{\alpha_j L} / d_j^3$$

$$b_{6j}^* = (\nu L \pi^2 - z\alpha_j - L\alpha_j^2) \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{7j}^* = (\alpha_j^2 + 3\pi^2 - \alpha_j d_j L)(1+\nu)\alpha_j^2 \beta_j e^{\alpha_j L} / d_j^3 - \kappa^2(1+\alpha_j L)\beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{8j}^* = \{\pi^2(z-\nu)(1+\alpha_j L) - 3\alpha_j^2 - L\alpha_j^3\} \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$\text{ただし} \quad \beta_j = \frac{d_j^2}{\alpha_j(z d_j^3 + J^2 \alpha_j^2 - \lambda_m^2 d_j / \kappa^2)}$$

$\lambda_0 = \kappa \pi^2$ であり、 λ_m ($m=1, 2, 3, \dots$)は超越方程式 $|B|=0$ の根として与えられ、両縁自由円筒殻のm次の固有振動数である。 α_j は次の特性方程式の相異なる8根である。

$$\alpha^8 - 4\pi^2 \alpha^6 + (6\pi^4 + J^2 - \lambda_m^2 / \kappa^2) \alpha^4$$

$$- 2\pi^2(z\pi^4 - \lambda_m^2 / \kappa^2) \alpha^2 + \pi^4(\pi^4 - \lambda_m^2 / \kappa^2) = 0 \quad (3.68)$$

式(3.67)の右辺第1項は原点($p=0$)における留数から求められたもので、荷重が静的に作用した場合の解に対応している。第2項は $\alpha=0$ すなわち $\lambda=\pm i\lambda_0$ における留数から、第3項は $\alpha=0$ を除く $|B|=0$ の根すなわち $\lambda=\pm i\lambda_1, \pm i\lambda_2, \dots$ における留数からそれぞれ求められたものである。

したがって、解は静的結果と各次の固有振動モードの重ね合せで表示されていることになる。

λ_m の数値解は、次のような試行錯誤法によらなければ求め

られぬ。まず λ_m に初期値として適当に零に近い値を与えて式(3.68)により特性根 α_j を求め、これらの値を用いて行列式 $|B|$ の値を計算する。次に λ_m の値を少し増して同じ手順により行列式 $|B|$ の値を計算する。この手順を順次繰り返すことにより $|B| \div 0$ となる λ_m の値が求められる。

3.4.3 集中衝撃荷重をうける両縁自由円筒殻

図3.4のように大きさ F_0 の集中荷重に対する結果 (u, v, w) は3.4.1および3.4.2項の結果を重ね合わせるにより得られ、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ w_0 \end{pmatrix} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \begin{pmatrix} U_n \cos n\theta \\ V_n \sin n\theta \\ W_n \cos n\theta \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

ここで、 (u_0, w_0) は3.4.1項の軸対称分布線衝撃荷重の場合の結果である。

ここでは記述しないが、他の理論に基づいた解析も同じようにして行うことができ、式(3.67)などと同形式の解が得られる。

応力成分に対する解は、変位成分の解と2.3節の構成方程式を利用することにより簡単に求められるので、記述は省略した。

3.5 両縁固定円筒殻の解析

図3.6のように一對の半径方向集中荷重が時間に関してステップ関数状に両縁固定の有限長円筒殻の中央に作用する問題を考える。殻の面外方向せん断変

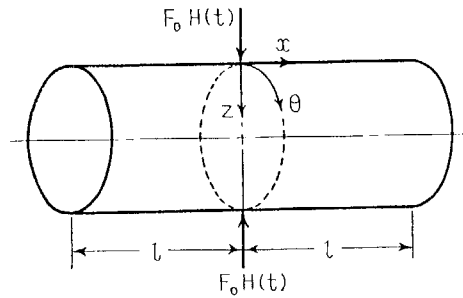


図3.6 集中衝撃荷重を
うける両縁固定円筒殻

形の有無による影響, Flüge および Donnell の両理論間の相違, 面内並進慣性の有無による影響の三点について調査するために, 修正理論として Minsky-Herrmann の理論および古典理論として並進慣性をすべて考慮した場合と面外方向並進慣性だけを考慮した場合の Flüge および Donnell の両理論を用いた。

3.5.1 Minsky-Herrmann の理論による解析

両縁における境界条件が同一であるから, 対称性により $x \geq 0$ の部分だけを対象として解析を行うことができる。荷重を x 軸に垂直な断面に生ずるせん断力と等置させる方法を採用すれば, 本問題は $x=0$ および l の両縁において次の境界条件を有する長さ l の円筒殻の問題と等価になる。

(i) $x=0$ において

$$u = N_{x0} = \psi_x = M_{x0} = 0 \quad (3.70a)$$

$$Q_x = -F_0 \{ \delta(\theta) + \delta(\theta - \pi) \} H(t) / zR \quad (3.70b)$$

(ii) $x=l$ において

$$u = v = w = \psi_x = \psi_\theta = 0 \quad (3.70c)$$

(146)

式(3.70b)の右辺をフーリエ級数に展開して、 $F_0/R = q_0$ とおけば次のようになる。

$$Q_x = -\frac{q_0}{z} \left\{ \frac{1}{\pi} + \frac{z}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \cos n\theta \right\} H(t) \quad (3.71)$$

この表示式は軸対称部分と余弦状の非軸対称部分とから構成されているので、それぞれの荷重に対する結果を重ね合わせることにより集中荷重に対する結果が得られることを示している。本節における解析方法は3.4節の両縁自由円筒殻の場合と基本的に同じである。

[1] 軸対称分布線衝撃荷重をうける両縁固定円筒殻

図3.7(a)のように大きさ q_0 の軸対称分布線荷重が長さ $2l$ の両縁固定円筒殻中央にステップ関数状に作用する問題を考える。問題の対称性から $x \geq 0$ の部分だけを対象とすればよく、この問題の境界条件は次のようになる。

(i) $x=0$ において

$$u = \psi_x = 0 \quad (3.72a)$$

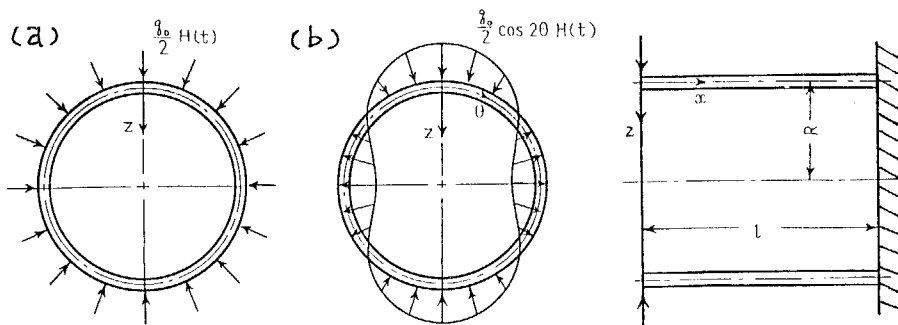


図3.7 中央に線衝撃荷重をうける両縁固定円筒殻

$$K_x G \frac{\hbar}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} (= Q_x) = -\frac{\rho_0}{2} H(t) \quad (3.72b)$$

(ii) $x = l$ において

$$u = \psi_x = w = 0 \quad (3.72c)$$

基礎方程式には軸対称変形における Minsky-Herrmann の方程式 (2.40a), (2.40b) および (2.40c) を用いるものとし, ラプラス変換すれば次のような変位成分のラプラス変換形 ($\bar{u}, \bar{\psi}_x, \bar{w}$) に関する連立常微分方程式が得られる。

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \lambda^2\right) \bar{u} + k^2 \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \lambda^2\right) R \bar{\psi}_x - \nu \frac{d\bar{w}}{d\xi} = 0 \quad (3.73a)$$

$$k^2 \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \lambda^2\right) \bar{u} + (k^2 \frac{d^2}{d\xi^2} - k^2 \lambda^2 - K_x P_1) R \bar{\psi}_x + K_x P_1 \frac{d\bar{w}}{d\xi} = 0 \quad (3.73b)$$

$$-\nu \frac{d\bar{u}}{d\xi} + K_x P_1 R \frac{d\bar{\psi}_x}{d\xi} + (-K_x P_1 \frac{d^2}{d\xi^2} + \lambda^2 + 1 + k^2) \bar{w} = 0 \quad (3.73c)$$

そこで, $(\bar{u}, \bar{\psi}_x, \bar{w})$ の一般解を次のように置くことにする。

$$\begin{pmatrix} \bar{u}/R \\ \bar{\psi}_x \\ \bar{w}/R \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^6 \begin{pmatrix} e_j \\ f_j \\ 1 \end{pmatrix} c_j e^{\alpha_j \xi} \quad (3.74)$$

これを式 (3.73) に代入すれば, 次のようになる。

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_j \\ f_j \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.75)$$

ここで, $[A]$ は 3 次の対称行列であり, l 行 l 列の成分 a_{ll} は

$$a_{11} = \alpha_j^2 - \lambda^2, \quad a_{12} = k^2(\alpha_j^2 - \lambda^2), \quad a_{13} = -\nu \alpha_j$$

$$a_{22} = k^2 \alpha_j^2 - k^2 \lambda^2 - K_x P_1, \quad a_{23} = K_x P_1 \alpha_j, \quad a_{33} = -K_x P_1 \alpha_j^2 + \lambda^2 + 1 + k^2$$

である。したがって, α_j ($j=1, \dots, 6$) は方程式 $|A|=0$ から導

(148)

かかる次の特性方程式の相異なる6根である。

$$a_6 \alpha^6 + a_4 \alpha^4 + a_2 \alpha^2 + a_0 = 0 \quad (3.76)$$

$$\text{ここで, } a_6 = |X^{(6)}|, \quad a_4 = \sum_{j=1}^5 |X_j^{(4)}|, \quad a_2 = \sum_{j=1}^5 |X_j^{(2)}|, \quad a_0 = |X^{(0)}|$$

であり, $[X^{(6)}], [X_j^{(4)}], [X_j^{(2)}], [X^{(0)}]$ は3次の行列であり, l 行 l 列の成分をそれぞれ $X_{ll}^{(6)}, X_{ll}^{(4)}, X_{ll}^{(2)}, X_{ll}^{(0)}$ とすると, 以下のようになる。

$$(i) X_{ll}^{(6)} = r_{ll}$$

$$(ii) l=j \text{ のとき } X_{ll}^{(4)} = s_{ll}, \quad l \neq j \text{ のとき } X_{ll}^{(4)} = r_{ll}$$

$$(iii) l=j \text{ のとき } X_{ll}^{(2)} = r_{ll}, \quad l \neq j \text{ のとき } X_{ll}^{(2)} = s_{ll}$$

$$(iv) X_{ll}^{(0)} = s_{ll}$$

ただし, r_{ll} および s_{ll} は次のように定義されるものである。

$$r_{11} = 1, \quad r_{12} = k^2, \quad r_{13} = 0, \quad r_{21} = k^2, \quad r_{22} = k^2, \quad r_{23} = 0, \quad r_{31} = -\nu$$

$$r_{32} = k_x p_1, \quad r_{33} = -k_x p_1$$

$$s_{11} = -\lambda^2, \quad s_{12} = -k^2 \lambda^2, \quad s_{13} = -\nu, \quad s_{21} = -k^2 \lambda^2, \quad s_{22} = -(k^2 \lambda^2 + k_x p_1)$$

$$s_{23} = k_x p_1, \quad s_{31} = s_{32} = 0, \quad s_{33} = \lambda^2 + 1 + k^2$$

係数 (e_j, f_j) は次式を解くことにより得られる。

$$\begin{bmatrix} A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_j \\ f_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu \alpha_j \\ -k_x p_1 \alpha_j \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

ここで, $[A_{33}]$ は行列 $[A]$ の3行3列に関する2次の小行列である。境界条件式(3.72)をラプラス変換し, 式(3.74)における係数 c_j を決定すれば次のようになる。

$$c_j = -\frac{\delta_0}{2k_x G h} \frac{B_{3j}}{p|B|} \quad (3.78)$$

ここで, $[B]$ は6次の行列であり i 行 j 列の成分 b_{ij} は

$$b_{1j} = e_j, \quad b_{2j} = f_j, \quad b_{3j} = \alpha_j$$

$$b_{4j} = e_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{5j} = f_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{6j} = e^{\alpha_j L}$$

である。式(3.78)を式(3.74)に代入し、留数定理によりラプラス逆変換を行えば解が得られ、次のようになる。

$$\frac{2K_x G h}{R g_0} \begin{bmatrix} u \\ R\psi_x \\ w \end{bmatrix} = - \left[\frac{1}{|B|} \sum_{j=1}^6 \begin{bmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{bmatrix} B_{3j} e^{\alpha_j \xi} \right]_{\lambda=0} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^6 |B_k^*|} \sum_{j=1}^6 \begin{bmatrix} e_j \\ f_j \\ 1 \end{bmatrix} B_{3j} e^{\alpha_j \xi} \right]_{\lambda=i\lambda_m} \frac{\cos \lambda_m \tau}{\lambda_m^2} \quad (3.79)$$

ここで、 λ_m は超越方程式 $|B|=0$ の根として与えられ、両縁固定円筒殻の軸対称モードを有する m 次の固有振動数に対応している。右辺第1項は荷重が静的に作用した場合の解であり、第2項は各次の固有振動モードの重ね合せを意味している。 α_j は $\lambda=i\lambda_m$ と置いた場合の式(3.76)の根であり、 $[B_k^*]$ は6次の行列であり i 行 j 列の成分 b_{ij}^* は次のようになる。

(i) $j \neq k$ のとき

$$b_{ij}^* = b_{ij}$$

(ii) $j = k$ のとき

$$b_{1j}^* = E_j, \quad b_{2j}^* = F_j, \quad b_{3j}^* = 1, \quad b_{4j}^* = (L\beta_j e_j + E_j) e^{\alpha_j L}$$

$$b_{5j}^* = (L\beta_j f_j + F_j) e^{\alpha_j L}, \quad b_{6j}^* = L\beta_j e^{\alpha_j L}$$

ここで、 (E_j, F_j) は次式を解くことにより得られる。

$$\begin{bmatrix} A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_j \\ F_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu\beta_j \\ -\kappa_x \rho_1 \beta_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_j \\ f_j \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

ただし、 $[A_{33}]$ および $[D_{33}]$ はそれぞれ3次の対称行列 $[A]$ および $[D]$ の3行3列に関する2次の小行列であり、行列 $[D]$

(150)

の l 行 l 列の成分 d_{kl} は次のとおりである。

$$d_{11} = \gamma_{11} \beta_j - 1, \quad d_{12} = \gamma_{12} \beta_j - \kappa^2, \quad d_{13} = \gamma_{13} \beta_j$$

$$d_{22} = \gamma_{22} \beta_j - \kappa^2, \quad d_{23} = \gamma_{23} \beta_j, \quad d_{33} = \gamma_{33} \beta_j + 1$$

$$\text{ここで, } \gamma_{11} = z\alpha_j, \quad \gamma_{12} = z\kappa^2\alpha_j, \quad \gamma_{13} = -\nu, \quad \gamma_{22} = z\kappa^2\alpha_j$$

$$\gamma_{23} = \kappa_x p_l, \quad \gamma_{33} = -z\kappa_x p_l \alpha_j$$

β_j は次のように定義されるものである。

$$\beta_j = - \frac{\sum_{i=1}^3 |M_i|}{\sum_{i=1}^3 |N_i|} \quad (3.81)$$

ここで, $[M_i]$ および $[N_i]$ は 3 次の行列であり l 行 l 列の成分をそれぞれ m_{kl} および n_{kl} とすると, 次のようになる。

$$(i) \quad l \neq i \quad \text{のとき} \quad m_{kl} = n_{kl} = a_{kl}$$

$$(ii) \quad l = i \quad \text{のとき} \quad m_{kl} = (d_{kl})_{\beta_j=0}, \quad n_{kl} = \gamma_{kl}$$

[2] 余弦状分布線衝撃荷重をうける両縁固定円筒殻

図 3.7(b) のように大きさ $q_0 \cos n\theta$ の余弦状分布線荷重が長さ $2l$ の両縁固定円筒殻中央にステップ関数状に作用する問題を考える。問題の対称性から $x \geq 0$ の部分だけを対象とすればよく, この問題の境界条件は次のようになる。

(i) $x = 0$ において

$$u = \psi_x = N_{x0} = M_{x0} = 0 \quad (3.82a)$$

$$Q_x = -q_0 \cos n\theta H(t) / z \quad (3.82b)$$

(ii) $x = l$ において

$$u = \psi_x = v = \psi_\theta = w = 0 \quad (3.82c)$$

そこで, 変位成分の変数分離解を

$$u/R = U_n \cos n\theta \quad (3.83a) \quad \psi_x = \Psi_{xn} \cos n\theta \quad (3.83b)$$

$$V/R = V_m \sin n\theta \quad (3.83c) \quad \Psi_\theta = \Psi_{\theta n} \sin n\theta \quad (3.83d)$$

$$W/R = W_m \cos n\theta \quad (3.83e)$$

と置くことにする。基礎方程式には Minsky-Herrmann の方程式 (2.30) を用いるものとし, 式 (3.83) を代入してラプラス変換すれば, 次のような変位成分のラプラス変換形 ($\bar{U}_m, \bar{\Psi}_{xm}, \bar{V}_m, \bar{\Psi}_{\theta n}, \bar{W}_m$) に関する連立常微分方程式が得られる。

$$\left\{ \frac{d^2}{d\xi^2} - (1+\kappa^2)n^2\rho_1 - \lambda^2 \right\} \bar{U}_m + \kappa^2 \left(\frac{d^2}{d\xi^2} + n^2\rho_1 - \lambda^2 \right) \bar{\Psi}_{xm} + n\rho_2 \frac{d\bar{V}_m}{d\xi} - \nu \frac{d\bar{W}_m}{d\xi} = 0 \quad (3.84a)$$

$$\kappa^2 \left(\frac{d^2}{d\xi^2} + n^2\rho_1 - \lambda^2 \right) \bar{U}_m + \left\{ \kappa^2 \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - n^2\rho_1 - \lambda^2 \right) - \kappa_x \rho_1 \right\} \bar{\Psi}_{xm} + \kappa^2 n \rho_2 \frac{d\bar{\Psi}_{\theta n}}{d\xi} + \kappa_x \rho_1 \frac{d\bar{W}_m}{d\xi} = 0 \quad (3.84b)$$

$$n\rho_2 \frac{d\bar{U}_m}{d\xi} - \left\{ \rho_1 \frac{d^2}{d\xi^2} - (1+\kappa^2)n^2 + \kappa^2 - \rho_4 - \lambda^2 \right\} \bar{V}_m - \left\{ \kappa^2 \left(\rho_1 \frac{d^2}{d\xi^2} + n^2 - \lambda^2 \right) + \rho_4 - \kappa^2 \right\} \bar{\Psi}_{\theta n} - n\rho_3 \bar{W}_m = 0 \quad (3.84c)$$

$$\kappa^2 n \rho_2 \frac{d\bar{\Psi}_{xm}}{d\xi} - \left\{ \kappa^2 \left(\rho_1 \frac{d^2}{d\xi^2} + n^2 - \lambda^2 \right) + \rho_4 - \kappa^2 \right\} \bar{V}_m - \left\{ \kappa^2 \left(\rho_1 \frac{d^2}{d\xi^2} - n^2 - \lambda^2 \right) - \rho_4 + \kappa^2 \right\} \bar{\Psi}_{\theta n} + n\rho_4 \bar{W}_m = 0 \quad (3.84d)$$

$$-\nu \frac{d\bar{U}_m}{d\xi} + \kappa_x \rho_1 \frac{d\bar{\Psi}_{xm}}{d\xi} - n\rho_3 \bar{V}_m + n\rho_4 \bar{\Psi}_{\theta n} - \left\{ \kappa_x \rho_1 \frac{d^2}{d\xi^2} - (\rho_4 - \kappa^2)n^2 - \lambda^2 - (1+\kappa^2) \right\} \bar{W}_m = 0 \quad (3.84e)$$

(152)

そこで, $(\bar{U}_m, \bar{\Psi}_{xm}, \bar{V}_m, \bar{\Psi}_{\theta m}, \bar{W}_m)$ の一般解を

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_m \\ \bar{\Psi}_{xm} \\ \bar{V}_m \\ \bar{\Psi}_{\theta m} \\ \bar{W}_m \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{10} \begin{pmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \\ 1 \end{pmatrix} c_j e^{\alpha_j \xi} \quad (3.85)$$

のように置くことにする。これを式(3.84)に代入すれば

$$\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.86)$$

となる。ここで, $[A]$ は5次の対称行列であり l 行 l 列の成分 a_{kl} は次のとおりである。

$$a_{11} = \alpha_j^2 - (1 + \kappa^2) n^2 p_1 - \lambda^2, \quad a_{12} = \kappa^2 (\alpha_j^2 + n^2 p_1 - \lambda^2), \quad a_{13} = n p_2 \alpha_j,$$

$$a_{14} = 0, \quad a_{15} = -\nu \alpha_j, \quad a_{22} = \kappa^2 (\alpha_j^2 - n^2 p_1 - \lambda^2) - \kappa_x p_1, \quad a_{23} = 0,$$

$$a_{24} = \kappa^2 n p_2 \alpha_j, \quad a_{25} = \kappa_x p_1 \alpha_j, \quad a_{33} = -p_1 \alpha_j^2 + (1 + \kappa^2) n^2 - \kappa^2 + p_4 + \lambda^2,$$

$$a_{34} = -\kappa^2 (p_1 \alpha_j^2 + n^2 - \lambda^2) - p_4 + \kappa^2, \quad a_{35} = -n p_3,$$

$$a_{44} = -\kappa^2 (p_1 \alpha_j^2 - n^2 - \lambda^2) + p_4 - \kappa^2, \quad a_{45} = n p_4$$

$$a_{55} = -\kappa_x p_1 \alpha_j^2 + (p_4 - \kappa^2) n^2 + \lambda^2 + 1 + \kappa^2$$

したがって, α_j ($j=1, \dots, 10$) は方程式 $|A|=0$ から導かれる次の特性方程式の相異なる10根である。

$$a_{10} \alpha^{10} + a_8 \alpha^8 + a_6 \alpha^6 + a_4 \alpha^4 + a_2 \alpha^2 + a_0 = 0 \quad (3.87)$$

$$\text{ここで, } a_{10} = |X^{(10)}|, \quad a_8 = \sum_{j=1}^5 |X_j^{(8)}|, \quad a_6 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^5 |X_{ij}^{(6)}|$$

$$a_4 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^5 |X_{ij}^{(4)}|, \quad a_2 = \sum_{j=1}^5 |X_j^{(2)}|, \quad a_0 = |X^{(0)}|$$

であり, $[X^{(10)}], [X_j^{(8)}], [X_j^{(6)}], [X_j^{(4)}], [X_j^{(2)}], [X^{(0)}]$ は5次の行列であり各行各列の成分をそれぞれ $\chi_{kl}^{(10)}, \chi_{kl}^{(8)}, \chi_{kl}^{(6)}, \chi_{kl}^{(4)}, \chi_{kl}^{(2)}, \chi_{kl}^{(0)}$ とすると次のようになる。

$$(i) \chi_{kl}^{(10)} = r_{kl}$$

$$(ii) l=j \text{ のとき } \chi_{kl}^{(8)} = s_{kl}, l \neq j \text{ のとき } \chi_{kl}^{(8)} = r_{kl}$$

$$(iii) l=i \text{ または } l=j \text{ のとき } \chi_{kl}^{(6)} = s_{kl}, l \neq i \text{ かつ } l \neq j \text{ のとき } \chi_{kl}^{(6)} = r_{kl}$$

$$(iv) l=i \text{ または } l=j \text{ のとき } \chi_{kl}^{(4)} = r_{kl}, l \neq i \text{ かつ } l \neq j \text{ のとき } \chi_{kl}^{(4)} = s_{kl}$$

$$(v) l=j \text{ のとき } \chi_{kl}^{(2)} = r_{kl}, l \neq j \text{ のとき } \chi_{kl}^{(2)} = s_{kl}$$

$$(vi) \chi_{kl}^{(0)} = s_{kl}$$

ただし, r_{kl} および s_{kl} は以下のとおりである。

$$r_{11} = 1, r_{12} = k^2, r_{13} = r_{14} = r_{15} = 0, r_{21} = r_{22} = k^2, r_{23} = r_{24} = r_{25} = 0$$

$$r_{31} = n p_2, r_{32} = 0, r_{33} = -p_1, r_{34} = -k^2 p_1, r_{35} = r_{41} = 0, r_{42} = k^2 n p_2$$

$$r_{43} = r_{44} = -k^2 p_1, r_{45} = 0, r_{51} = -v, r_{52} = k_x p_1, r_{53} = r_{54} = 0, r_{55} = -k_x p_1$$

$$s_{11} = -(1+k^2)n^2 p_1 - \lambda^2, s_{12} = k^2(n^2 p_1 - \lambda^2), s_{13} = n p_2, s_{14} = 0, s_{15} = -v$$

$$s_{21} = k^2(n^2 p_1 - \lambda^2), s_{22} = -k^2(n^2 p_1 + \lambda^2) - k_x p_1, s_{23} = 0, s_{24} = k^2 n p_2$$

$$s_{25} = k_x p_1, s_{31} = s_{32} = 0, s_{33} = (1+k^2)n^2 - k^2 + p_4 + \lambda^2,$$

$$s_{34} = -k^2(n^2 - \lambda^2) - p_4 + k^2, s_{35} = -n p_3, s_{41} = s_{42} = 0,$$

$$s_{43} = -k^2(n^2 - \lambda^2) - p_4 + k^2, s_{44} = k^2(n^2 + \lambda^2) + p_4 - k^2, s_{45} = n p_4, s_{51} = 0$$

$$s_{52} = 0, s_{53} = -n p_3, s_{54} = n p_4, s_{55} = n^2(p_4 - k^2) + \lambda^2 + 1 + k^2$$

係数 (e_j, f_j, g_j, h_j) は次式を解くことにより得られる。

$$\begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ A_{55} & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \alpha_j \\ -k_x p_1 \alpha_j \\ n p_3 \\ -n p_4 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

ここで, $[A_{55}]$ は行列 $[A]$ の5行5列に関する4次の小行列である。境界条件式(3.82)を Minsky-Herrmann の構成方程式(2.63)

により変位成分だけで表し, 式(3.83)を代入してラプラス変換すれば式(3.85)における係数 c_j が求められる

$$c_j = - \frac{q_0}{2\kappa_x G h} \frac{B_{sj}}{p|B|} \quad (3.89)$$

となる。ここで, $[B]$ は10次の行列であり i 行 j 列の成分 b_{ij} は次のとおりである。

$$b_{1j} = e_j, \quad b_{2j} = f_j, \quad b_{3j} = \alpha_j g_j, \quad b_{4j} = \alpha_j h_j, \quad b_{5j} = \alpha_j$$

$$b_{6j} = e_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{7j} = f_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{8j} = g_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{9j} = h_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{10j} = e^{\alpha_j L}$$

式(3.89)を式(3.85)に代入し留数定理によりラプラス逆変換を行えば解が得られ, 次のようになる。

$$\frac{2\kappa_x G h}{q_0} \begin{pmatrix} U_m \\ \Psi_{xm} \\ V_m \\ \Psi_{\theta m} \\ W_m \end{pmatrix} = - \left[\frac{1}{|B|} \sum_{j=1}^{10} \begin{pmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \\ 1 \end{pmatrix} B_{sj} e^{\alpha_j \xi} \right]_{\lambda=0} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^{10} |B_k^*|} \sum_{j=1}^{10} \begin{pmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \\ 1 \end{pmatrix} B_{sj} e^{\alpha_j \xi} \right]_{\lambda=i\lambda_m} \frac{\cos \lambda_m \tau}{\lambda_m^2} \quad (3.90)$$

ここで, λ_m は超越方程式 $|B|=0$ の根として与えられ, 両縁固定円筒殻の周方向に $\cos n\theta$ 状の非軸対称モードを有する m 次の固有振動数に対応している。右辺第1項は荷重が静的に作用した場合の解であり, 第2項は各次の固有振動モードの重ね合せを意味している。 α_j は $\lambda=i\lambda_m$ と置いた場合の式(3.87)の根であり, $[B_k^*]$ は10次の行列であり i 行 j 列の成分

b_{ij}^* は次のようになる。

(i) $j \neq \ell$ のとき

$$b_{ij}^* = b_{ij}$$

(ii) $j = \ell$ のとき

$$\begin{aligned} b_{1j}^* &= E_j, \quad b_{2j}^* = F_j, \quad b_{3j}^* = \alpha_j G_j + \beta_j g_j, \quad b_{4j}^* = \alpha_j H_j + \beta_j h_j, \quad b_{5j}^* = \beta_j \\ b_{6j}^* &= (E_j + L\beta_j e_j) e^{\alpha_j L}, \quad b_{7j}^* = (F_j + L\beta_j f_j) e^{\alpha_j L}, \quad b_{8j}^* = (G_j + L\beta_j g_j) e^{\alpha_j L} \\ b_{9j}^* &= (H_j + L\beta_j h_j) e^{\alpha_j L}, \quad b_{10j}^* = L\beta_j e^{\alpha_j L} \end{aligned}$$

ここで, (E_j, F_j, G_j, H_j) は次式を解くことにより得られる。

$$\begin{bmatrix} A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_j \\ F_j \\ G_j \\ H_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu \beta_j \\ -\kappa_x \rho_1 \beta_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

ただし, $[A_{55}]$ および $[D_{55}]$ はそれぞれ 5 次の対称行列 $[A]$ および $[D]$ の 5 行 5 列に関する 4 次の小行列であり, 行列 $[D]$ の ℓ 行 ℓ 列の成分 $d_{\ell\ell}$ は次のとおりである。

$$\begin{aligned} d_{11} &= \gamma_{11} \beta_j - 1, \quad d_{12} = \gamma_{12} \beta_j - \kappa^2, \quad d_{13} = \gamma_{13} \beta_j, \quad d_{14} = 0, \quad d_{15} = \gamma_{15} \beta_j \\ d_{22} &= \gamma_{22} \beta_j - \kappa^2, \quad d_{23} = 0, \quad d_{24} = \gamma_{24} \beta_j, \quad d_{25} = \gamma_{25} \beta_j, \quad d_{33} = \gamma_{33} \beta_j + 1 \\ d_{34} &= \gamma_{34} \beta_j + \kappa^2, \quad d_{35} = 0, \quad d_{44} = \gamma_{44} \beta_j + \kappa^2, \quad d_{45} = 0, \quad d_{55} = \gamma_{55} \beta_j + 1 \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } \gamma_{11} = 2\alpha_j, \quad \gamma_{12} = 2\kappa^2 \alpha_j, \quad \gamma_{13} = n \rho_2, \quad \gamma_{14} = 0, \quad \gamma_{15} = -\nu$$

$$\gamma_{22} = 2\kappa^2 \alpha_j, \quad \gamma_{23} = 0, \quad \gamma_{24} = \kappa^2 n \rho_2, \quad \gamma_{25} = \kappa_x \rho_1, \quad \gamma_{33} = -2\rho_1 \alpha_j$$

$$\gamma_{34} = -2\kappa^2 \rho_1 \alpha_j, \quad \gamma_{35} = 0, \quad \gamma_{44} = -2\kappa^2 \rho_1 \alpha_j, \quad \gamma_{45} = 0, \quad \gamma_{55} = -2\kappa_x \rho_1 \alpha_j$$

β_j は次のように定義されるものである。

$$\beta_j = -\frac{\sum_{i=1}^5 |M_i|}{\sum_{i=1}^5 |N_i|} \quad (3.92)$$

ここで, $[M_i]$ および $[N_i]$ は 5 次の行列であり ℓ 行 ℓ 列の成分をそれぞれ $m_{\ell\ell}$ および $n_{\ell\ell}$ とすると, 次のようになる。

(156)

(i) $l \neq i$ のとき $m_{kl} = n_{kl} = a_{kl}$

(ii) $l = i$ のとき $m_{kl} = (d_{kl})_{\beta_j=0}$, $n_{kl} = \nu_{kl}$

[3] 集中衝撃荷重をうける両縁固定円筒殻

図 3.6 のような大きさ F_0 の集中荷重に対する結果 (u, v, w) , (ψ_x, ψ_θ) は [1] および [2] の結果を次の式にしたがって重ね合せ $F_0 = R g_0$ と置くことにより得られる。

$$\begin{bmatrix} u \\ \psi_x \\ v \\ \psi_\theta \\ w \end{bmatrix} = \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} u_0 \\ \psi_{x0} \\ 0 \\ 0 \\ w_0 \end{bmatrix} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \begin{bmatrix} U_n \cos n\theta \\ \Psi_{xn} \cos n\theta \\ V_n \sin n\theta \\ \Psi_{\theta n} \sin n\theta \\ W_n \cos n\theta \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

ここで, (u_0, ψ_{x0}, w_0) は [1] の軸対称分布線衝撃荷重の場合の結果である。

応力成分に対する解は, 式 (3.93) を Mirsky - Herrmann の構成方程式 (2.15) に代入することにより容易に得られるので, ここでは記載を省略する。

3.5.2 Flügge および Donnell の理論による解析

図 3.6 の問題は両縁における境界条件が同一であるから, 対称性により $x \geq 0$ の部分だけを対象として解析を行うことができる。荷重を x 軸に垂直な断面に生ずる有効せん断力と等置させる方法を採用すれば, 本問題は $x=0$ および l の両

縁において次の境界条件を有する長さ l の円筒殻の問題と等価になる。

(i) $x = 0$ において

$$u = s_x = \partial w / \partial x = 0 \quad (3.94a)$$

$$T_x = -F_0 \{ \delta(\theta) + \delta(\theta - \pi) \} H(t) / 2R \quad (3.94b)$$

(ii) $x = l$ において

$$u = v = w = \partial w / \partial x = 0 \quad (3.94c)$$

式(3.94b)の右辺をフーリエ級数に展開して $F_0/R = \delta_0$ と置けば、次のようになる。

$$T_x = -\frac{\delta_0}{z} \left\{ \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \cos n\theta \right\} H(t) \quad (3.95)$$

この表示式は軸対称部分と余弦状の非軸対称部分とから構成されているので、それぞれの荷重に対する結果を重ね合わせることにより集中荷重に対する結果が得られることを示している。

[1] 軸対称分布線衝撃荷重をうける両縁固定円筒殻

図3.7(a)のように大きさ δ_0 の軸対称分布線荷重が長さ $2l$ の両縁固定円筒殻中央にステップ関数状に作用する問題を考える。問題の対称性から $x \geq 0$ の部分だけを対象とすればよく、この問題の境界条件は次のようになる。

(i) $x = 0$ において

$$u = \partial w / \partial x = 0 \quad (3.96a)$$

$$Q_x = -\delta_0 H(t) / z \quad (3.96b)$$

(ii) $x = l$ において

$$u = w = \partial w / \partial x = 0 \quad (3.96c)$$

基礎方程式には一次近似理論による式(2.56)を用いるものとし、ラプラス変換すれば式(2.56b)からは変位成分 w のラプラス変換形に関する次の常微分方程式が得られる。

$$\frac{d^6 \bar{w}}{d\xi^6} - \lambda^2 \frac{d^4 \bar{w}}{d\xi^4} + (J^2 + \frac{\lambda^2}{k^2}) \frac{d^2 \bar{w}}{d\xi^2} - \frac{\lambda^2}{k^2} (1 + \lambda^2) \bar{w} = 0 \quad (3.97)$$

そこで、ラプラス変換された変位成分 (\bar{u}, \bar{w}) の一般解を

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^6 f_j c_j e^{\alpha_j \xi} \quad (3.98a) \quad \bar{w} = \sum_{j=1}^6 c_j e^{\alpha_j \xi} \quad (3.98b)$$

と置くことにする。ここで、 α_j は式(3.97)から導かれる特性方程式の根であり、 f_j は式(2.56a)により定められる係数である。境界条件式(3.96)を変位成分だけで表しラプラス変換して係数 c_j を決定し、ラプラス逆変換を行えば本問題の解が得られ、以下のようなになる。

$$\frac{D}{R^3 \rho_0} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^s \\ w^s \end{bmatrix} - k^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_m z}{\lambda_m^2 \sum_{k=1}^6 |B_{k1}^*|} \sum_{j=1}^6 \begin{bmatrix} f_j \\ 1 \end{bmatrix} B_{3j} e^{\alpha_j \xi} \quad (3.99)$$

ここで、 $[B_{k1}^*]$ は6次の行列であり i 行 j 列の成分 b_{ij}^* は

(i) $j \neq k$ のとき

$$b_{ij}^* = b_{ij}$$

(ii) $j = k$ のとき

$$b_{1j}^* = r_j \beta_j, \quad b_{2j}^* = \beta_j, \quad b_{3j}^* = 3\alpha_j^2 \beta_j, \quad b_{4j}^* = (r_j + L f_j) \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{5j}^* = L \beta_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{6j}^* = (1 + L \alpha_j) \beta_j e^{\alpha_j L}$$

である。ただし、 b_{ij} は次のように定義されるものであり、 b_{ij} から成る6次の行列を $[B]$ とする。

$$b_{1j} = f_j, \quad b_{2j} = \alpha_j, \quad b_{3j} = \alpha_j^3$$

$$b_{4j} = f_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{5j} = e^{\alpha_j L}, \quad b_{6j} = \alpha_j e^{\alpha_j L}$$

係数 f_j, r_j, β_j は次のとおりである。

$$f_j = \frac{\nu \alpha_j}{\alpha_j^2 + \lambda_m^2}, \quad r_j = \frac{-\nu(\alpha_j^2 - \lambda_m^2) + 2\nu \kappa^2 \alpha_j / \beta_j}{(\alpha_j^2 + \lambda_m^2)^2}$$

$$\beta_j = \frac{\kappa^2 \alpha_j^4 - \alpha_j^2 + 1 - 2\lambda_m^2}{\alpha_j (3\alpha_j^4 + 2\alpha_j^2 \lambda_m^2 + J^2 - \lambda_m^2 / \kappa^2)}$$

λ_m は超越方程式 $|B|=0$ の根として与えられ、両縁固定円筒殻の軸対称モードを有する m 次の無次元固有振動数である。

α_j ($j=1, \dots, 6$) は次の特性方程式の相異なる 6 根である。

$$\alpha^6 + \lambda_m^2 \alpha^4 + (J^2 - \lambda_m^2 / \kappa^2) \alpha^2 + \lambda_m^2 (1 - \lambda_m^2) / \kappa^2 = 0 \quad (3.100)$$

一方、面内並進慣性を無視し面外並進慣性だけを考慮した一次近似理論による式(2.57)を用いた場合には、式(3.97)に対応する常微分方程式は次のようになる。

$$\frac{d^6 \bar{w}}{d\xi^6} + \left(J^2 + \frac{\lambda^2}{\kappa^2} \right) \frac{d^2 \bar{w}}{d\xi^2} = 0 \quad (3.101)$$

したがって、式(2.57a)の關係を用いるとラプラス変換された変位成分 (\bar{u}, \bar{w}) の一般解は次のようになる。

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^4 f_j c_j e^{\alpha_j \xi} + \frac{1 + \lambda^2}{\nu} c_5 \xi + c_6 \quad (3.102a)$$

$$\bar{w} = \sum_{j=1}^4 c_j e^{\alpha_j \xi} + c_5 \quad (3.102b)$$

境界条件式(3.96)を用いて係数 c_j を決定して、ラプラス逆変換すれば以下のような解が得られる。

$$\frac{D}{R^3 \delta_0} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^s \\ w^s \end{bmatrix} - \kappa^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_m \tau}{\lambda_m^2 \sum_{j=1}^6 |B_{3j}^*|} \left\{ \sum_{j=1}^4 \begin{bmatrix} f_j \\ 1 \end{bmatrix} B_{3j} e^{\alpha_j \xi} + \begin{bmatrix} (1 - \lambda_m^2) B_{35} \xi / \nu + B_{36} \\ B_{35} \end{bmatrix} \right\} \quad (3.103)$$

(160)

ここで, $[B_{\ell}^*]$ は 6 次の行列であり i 行 j 列の成分 b_{ij}^* は

(i) $j \neq \ell$ のとき

$$b_{ij}^* = b_{ij}$$

(ii) $j = \ell$ のとき, $j = 1, \dots, 4$ に対しては

$$b_{1j}^* = r_j \beta_j, \quad b_{2j}^* = \beta_j, \quad b_{3j}^* = \alpha_j^2 \beta_j, \quad b_{4j}^* = (r_j + L f_j) \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{5j}^* = L \beta_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{6j}^* = (1 + L \alpha_j) \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$j = 5, 6$ に対しては

$$b_{45}^* = 2 \kappa^2 L / \nu, \quad b_{15}^* = b_{16}^* = b_{25}^* = b_{26}^* = \dots = b_{65}^* = b_{66}^* = 0$$

$$\text{ここで, } f_j = \nu / \alpha_j, \quad r_j = 3 / 2 \alpha_j^4, \quad \beta_j = -1 / 2 \alpha_j^3$$

である。ただし, b_{ij} は次のように定義されるものであり, b_{ij} から成る 6 次の行列を $[B]$ とする。

(i) $j = 1, \dots, 4$ のとき

$$b_{ij} = f_j, \quad b_{2j} = \alpha_j, \quad b_{3j} = \alpha_j^3, \quad b_{4j} = f_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{5j} = e^{\alpha_j L}, \quad b_{6j} = \alpha_j e^{\alpha_j L}$$

(ii) $j = 5, 6$ のとき

$$b_{45} = (1 - \lambda_m^2) L / \nu, \quad b_{46} = b_{55} = b_{16} = 1$$

$$b_{15} = b_{25} = b_{26} = b_{35} = b_{36} = b_{56} = b_{65} = b_{66} = 0$$

λ_m は超越方程式 $|B| = 0$ の根として与えられ, α_j は次の特性方程式の相異なる 4 根である。

$$\alpha^4 + J^2 - \lambda_m^2 / \kappa^2 = 0 \quad (3.104)$$

式 (3.99) および (3.103) の右辺第 1 項に相当する静的結果は

$$\begin{bmatrix} u^s \\ w^s \end{bmatrix} = \frac{1}{2|B|} \left\{ \sum_{j=1}^4 \begin{bmatrix} f_j \\ 1 \end{bmatrix} B_{3j} e^{\alpha_j \xi} + \begin{bmatrix} B_{35} \xi / \nu + B_{36} \\ B_{35} \end{bmatrix} \right\} \quad (3.105)$$

であり, α_j は $\lambda_m = 0$ とした場合の式 (3.104) の根であり, f_j および行列 $[B]$ の成分 b_{ij} は式 (3.103) において定義した式に $\lambda_m = 0$ を代入したものである。

前節の軸対称分布線衝撃荷重をうける両縁自由円筒殻の解析 (p.137) では, 一次近似理論に面内並進慣性無視および $N_x = 0$ の近似を導入した理論による基礎方程式 (3.52) を用いた。ここでも, この基礎方程式に基づいた解を導いて, 基礎方程式 (2.57) に基づいた解である式 (3.103) などと比較することにした。解析方法については前の記述と重複するので省略し, 結果だけを次に示すことにする。

$$\frac{Dw}{r^3 g_0} = \frac{1}{8a^3} \frac{g(\xi)}{M_0(aL)} - \frac{\kappa^2}{2L} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_1(\alpha_m L) \cosh \alpha_m \xi - F_2(\alpha_m L) \cos \alpha_m \xi}{\lambda_m^2 \cosh \alpha_m L \cos \alpha_m L} \cos \lambda_m z \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } g(\xi) &= \sinh^2 aL (\cosh a\xi \cos a\xi + \sinh a\xi \sin a\xi) \\ &\quad + \sin^2 aL (\cosh a\xi \cos a\xi - \sinh a\xi \sin a\xi) \\ &\quad + M_0(aL) \cdot (\cosh a\xi \sin a\xi + \sinh a\xi \cos a\xi) \end{aligned}$$

$$M_0(aL) = \cosh aL \sinh aL + \cos aL \sin aL$$

$$F_1(\alpha_m L) = -1 + \cosh \alpha_m L \cos \alpha_m L + \sinh \alpha_m L \sin \alpha_m L$$

$$F_2(\alpha_m L) = -1 + \cosh \alpha_m L \cos \alpha_m L - \sinh \alpha_m L \sin \alpha_m L$$

$$a = \sqrt{J/2}$$

$\alpha_m (0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots)$ は方程式

$$\tanh \alpha L + \tan \alpha L = 0 \quad (3.107)$$

の正の実根 ($\alpha = 0$ を除く) であり, $\lambda_m (0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots)$ は

$$\lambda_m = \kappa \sqrt{\alpha_m^4 + J^2}$$

により求められる。x軸方向変位 u に対する解は式 (3.61) により求められる。

(162)

[2] 余弦状分布線衝撃荷重をうける両縁固定円筒殻

図3.7(b)のように大きさ $\delta_0 \cos n\theta$ の余弦状分布線衝撃荷重が長さ $z=l$ の両縁固定円筒殻中央にスラッパ関数状に作用する問題を考える。問題の対称性から $x \geq 0$ の部分だけを対象とすればよく、この問題の境界条件は次のようになる。

(i) $x = 0$ において

$$U = S_x = \partial w / \partial x = 0 \quad (3.108a)$$

$$T_x = -\delta_0 \cos n\theta H(t) / z \quad (3.108b)$$

(ii) $x = l$ において

$$U = V = W = \partial w / \partial x = 0 \quad (3.108c)$$

そこで、変位成分の変数分離解を

$$U = U_m \cos n\theta \quad (3.109a) \quad V = V_m \sin n\theta \quad (3.109b)$$

$$W = W_m \cos n\theta \quad (3.109c)$$

と置くことにする。

基礎方程式には面内並進慣性をすべて考慮した Flugge の理論による式(2.48)を用いるものとし、ラプラス変換すれば式(2.48c)からは変位成分 w のラプラス変換形に関する次の常微分方程式が得られる。

$$\frac{d^8 \bar{w}_m}{d\xi^8} + a_6 \frac{d^6 \bar{w}_m}{d\xi^6} + a_4 \frac{d^4 \bar{w}_m}{d\xi^4} + a_2 \frac{d^2 \bar{w}_m}{d\xi^2} + a_0 \bar{w}_m = 0 \quad (3.110)$$

ここで、 (a_6, \dots, a_0) は n と λ を含む定係数である。そこで、ラプラス変換された変位成分 $(\bar{U}_m, \bar{V}_m, \bar{W}_m)$ の一般解を

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_m \\ \bar{V}_m \\ \bar{W}_m \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^8 \begin{bmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{bmatrix} c_j e^{\alpha_j \xi} \quad (3.111)$$

と置くことにする。ここで、 α_j は式 (3.110) から導かれる特性方程式の根であり、 f_j および g_j は式 (2.48a) および (2.48b) により定められる係数である。境界条件式 (3.108) を構成方程式 (2.68) により変位成分だけで表し、式 (3.109) を代入しラプラス変換して係数 g_j を決定し、最後にラプラス逆変換を行えば本問題の解が得られ、以下のようなになる。

$$\frac{D}{R^3 g_0} \begin{bmatrix} U_m \\ V_m \\ W_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z|B|} \sum_{j=1}^8 \begin{bmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{bmatrix} B_{4j} e^{\alpha_j z} \\ \lambda_m = 0 \end{bmatrix} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_m z}{\lambda_m^2 \sum_{k=1}^8 |B_k^*|} \sum_{j=1}^8 \begin{bmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{bmatrix} B_{4j} e^{\alpha_j z} \quad (3.112)$$

ここで、 $[B]$ は 8 次の行列であり i 行 j 列の成分 b_{ij} は

$$b_{1j} = f_j, \quad b_{2j} = \alpha_j g_j, \quad b_{3j} = \alpha_j, \quad b_{4j} = \alpha_j^3 + \alpha_j^2 f_j$$

$$b_{5j} = f_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{6j} = g_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{7j} = e^{\alpha_j L}, \quad b_{8j} = \alpha_j e^{\alpha_j L}$$

であり、 $[B_k^*]$ も同じく 8 次の行列で i 行 j 列の成分 b_{ij}^* は

(i) $j \neq k$ のとき

$$b_{ij}^* = b_{ij}$$

(ii) $j = k$ のとき

$$b_{1j}^* = r_j \beta_j, \quad b_{2j}^* = (g_j + \alpha_j s_j) \beta_j, \quad b_{3j}^* = \beta_j$$

$$b_{4j}^* = (3\alpha_j + \alpha_j r_j + 2f_j) \alpha_j \beta_j, \quad b_{5j}^* = (r_j + L f_j) \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{6j}^* = (s_j + L g_j) \beta_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{7j}^* = L \beta_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{8j}^* = (1 + L \alpha_j) \beta_j e^{\alpha_j L}$$

である。ただし、

$$f_j = \frac{\alpha_j}{d_j} \left\{ -k^2 \alpha_j^4 + (\nu - 3k^4 n^2 p_1 - \frac{k^2 \lambda_m^2}{p_1}) \alpha_j^2 + n^2 + k^2 n^4 + \frac{\nu}{p_1} \lambda_m^2 - k^2 n^2 \lambda_m^2 \right\}$$

$$g_j = \frac{n}{d_j} \left\{ 2k^2 \alpha_j^4 - (2 + \nu + 2k^2 n^2 - k^2 \lambda_m^2) \frac{1 + p_1}{p_1} \alpha_j^2 + n^2 - \frac{\lambda_m^2}{p_1} \right\}$$

(164)

$$r_j = \frac{1}{d_j} \left\{ -5x^2 \alpha_j^4 + \frac{2k^2}{P_1} \frac{\alpha_j^3}{\beta_j} + 3 \left(\nu - 3k^4 n^2 P_1 - \frac{k^2 \lambda_m^2}{P_1} \right) \alpha_j^2 \right. \\ \left. - \left(\frac{2\nu}{P_1} - 2k^2 n^2 \right) \frac{\alpha_j}{\beta_j} + n^2 + k^2 n^4 + \frac{\nu}{P_1} \lambda_m^2 - k^2 n^2 \lambda_m^2 \right\} - \frac{f_j}{d_j} \left\{ 4\alpha_j^3 \right. \\ \left. - 2 \frac{1+P_1}{P_1} \frac{\alpha_j^2}{\beta_j} - 2 \left(2n^2 - \frac{1+P_1}{P_1} \lambda_m^2 \right) \alpha_j + 2 \frac{1+P_1}{P_1} \frac{n^2}{\beta_j} - \frac{4}{\beta_j} \frac{\lambda_m^2}{P_1} \right\}$$

$$s_j = \frac{2n}{d_j} \left\{ 4k^2 \alpha_j^3 - k^2 \frac{1+P_1}{P_1} \frac{\alpha_j^2}{\beta_j} - (2+\nu) + 2k^2 n^2 - k^2 \lambda_m^2 \frac{1+P_1}{P_1} \right\} \alpha_j \\ + \frac{1}{P_1 \beta_j} \left\{ -2 \frac{g_j}{d_j} \left\{ 2\alpha_j^3 - \frac{1+P_1}{P_1} \frac{\alpha_j^2}{\beta_j} - \left(2n^2 - \frac{1+P_1}{P_1} \lambda_m^2 \right) \alpha_j + \frac{1+P_1}{P_1} \frac{n^2}{\beta_j} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\lambda_m^2}{P_1 \beta_j} \right\} \right.$$

$$d_j = \alpha_j^4 - \left(2n^2 - \frac{1+P_1}{P_1} \lambda_m^2 \right) \alpha_j^2 + n^4 - \frac{1+P_1}{P_1} n^2 \lambda_m^2 + \frac{\lambda_m^4}{P_1}$$

$$\beta_j = \left\{ \frac{1+P_1}{P_1} \alpha_j^6 - \left(3n^2 \frac{1+P_1}{P_1} + \frac{1}{k^2} - \frac{2\lambda_m^2}{P_1} \right) \alpha_j^4 + \left(3n^4 \frac{1+P_1}{P_1} + 2 \frac{n^2}{k^2} + \frac{3+2\nu}{k^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4n^2}{P_1} \lambda_m^2 - \frac{2}{k^2} \frac{1+P_1}{P_1} \lambda_m^2 \right) \alpha_j^2 - \left(n^6 \frac{1+P_1}{P_1} + \frac{n^4}{k^2} + \frac{n^2}{k^2} - \frac{2n^4}{P_1} \lambda_m^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2n^2}{k^2} \frac{1+P_1}{P_1} \lambda_m^2 - \frac{2\lambda_m^2}{k^2 P_1} + \frac{3\lambda_m^4}{k^2 P_1} \right) \right\} / \alpha_j (4\alpha_j^6 + 3a_6 \alpha_j^4 + 2a_4 \alpha_j^2 + a_2)$$

λ_m は超越方程式 $|B|=0$ の根として与えられ、 α_j は

$$\alpha^8 + a_6 \alpha^6 + a_4 \alpha^4 + a_2 \alpha^2 + a_0 = 0 \quad (3.113)$$

のような特性方程式の相異なる 8 根である。ここで、

$$a_6 = -4n^2 + 2\nu + \frac{1+P_1}{P_1} \lambda_m^2$$

$$a_4 = 6n^4 - 6n^2 + \nu^2 - 3n^2 \lambda_m^2 \frac{1+P_1}{P_1} - \frac{\lambda_m^2}{k^2} + \frac{1}{P_1} \lambda_m^4$$

$$a_2 = -4n^6 + 2(4-\nu)n^4 - 2(2-\nu)n^2 + 3n^4 \lambda_m^2 \frac{1+P_1}{P_1} + \frac{2n^2}{k^2} \lambda_m^2$$

$$\begin{aligned}
& + (3+2\nu) \frac{\lambda_m^2}{k^2} - \frac{2n^2}{\rho_1} \lambda_m^4 - \frac{1+\rho_1}{k^2 \rho_1} \lambda_m^4 \\
a_0 & = n^8 - 2n^6 + n^4 - \left(n^6 \frac{1+\rho_1}{\rho_1} + \frac{n^4}{k^2} + \frac{n^2}{k^2} \right) \lambda_m^2 + \left(\frac{n^4}{\rho_1} + \frac{n^2}{k^2} \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \right. \\
& \left. + \frac{1}{k^2 \rho_1} \right) \lambda_m^4 - \frac{1}{k^2 \rho_1} \lambda_m^6
\end{aligned}$$

一方、面内並進慣性を無視し面外並進慣性だけを考慮した Flüge の理論による式(2.49)を用いた場合に対する解も全く同様の手続きにより導かれる。その解は式(3.112)と全く同じ形式となるが、係数 $(f_j, g_j, r_j, s_j, \beta_j)$ などが異なり、以下のようになる。

$$f_j = \frac{\alpha_j}{d_j} \left\{ -k^2 \alpha_j^4 + (\nu - 3k^2 n^2 \rho_1) \alpha_j^2 + n^2 + k^2 n^4 \right\}$$

$$g_j = \frac{n}{d_j} \left\{ 2k^2 \alpha_j^4 - (2+\nu + 2k^2 n^2) \alpha_j^2 + n^2 \right\}$$

$$r_j = \frac{1}{d_j} \left\{ -5k^2 \alpha_j^4 + 3(\nu - 3k^2 n^2 \rho_1) \alpha_j^2 + n^2 + k^2 n^4 - 4\alpha_j f_j (\alpha_j^2 - n^2) \right\}$$

$$s_j = \frac{2}{d_j} \left\{ 4k^2 n \alpha_j^3 - n(2+\nu + 2k^2 n^2) \alpha_j - 2\alpha_j g_j (\alpha_j^2 - n^2) \right\}$$

$$\beta_j = -d_j / k^2 \alpha_j (4\alpha_j^6 + 3a_6 \alpha_j^4 + 2a_4 \alpha_j^2 + a_2)$$

$$d_j = (\alpha_j^2 - n^2)^2$$

特性方程式(3.113)の係数 (a_6, \dots, a_0) は次のとおりである。

$$a_6 = -4n^2 + 2\nu$$

$$a_4 = 6n^4 - 6n^2 + J^2 - \lambda_m^2 / k^2$$

$$a_2 = -4n^6 + 2(4-\nu)n^4 - 2(2-\nu)n^2 + 2n^2 \lambda_m^2 / k^2$$

$$a_0 = n^8 - 2n^6 + n^4 - n^4 \lambda_m^2 / k^2$$

前節の余弦状分布線衝撃荷重をうける両縁自由円筒殻の解析では、面外方向並進慣性だけを考慮した Donnell の理論による式(2.49)を用いた。ここでも、この基礎方程式に基づいた解を導いて、Flügge の理論に基づいた解析結果である式(3.112)と比較することにした。

面外慣性だけを含まない Donnell の理論による解は式(3.112)と全く同じ形式となるが、記号の定義式は異なり次のようになる。

行列 $[B]$ の i 行 j 列の成分 b_{ij} は

$$b_{1j} = \alpha_j / d_j, \quad b_{2j} = \alpha_j^3 / d_j, \quad b_{3j} = \alpha_j, \quad b_{4j} = \alpha_j^3, \quad b_{5j} = f_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{6j} = g_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{7j} = e^{\alpha_j L}, \quad b_{8j} = \alpha_j e^{\alpha_j L}$$

であり、行列 $[B_{\ell}^*]$ の i 行 j 列の成分 b_{ij}^* は次のとおりである。

(i) $j = \ell$ のとき

$$b_{ij}^* = b_{ij}$$

(ii) $j \neq \ell$ のとき

$$b_{1j}^* = (\eta^2 + 3\alpha_j^2) \beta_j / (\alpha_j^2 - \eta^2) d_j, \quad b_{2j}^* = (3\eta^2 + \alpha_j^2) \alpha_j^2 \beta_j / (\alpha_j^2 - \eta^2) d_j$$

$$b_{3j}^* = -\beta_j, \quad b_{4j}^* = -3\alpha_j^2 \beta_j,$$

$$b_{5j}^* = \beta_j [\eta^4 (1 + L\alpha_j) + \{3(1+\nu) - (1-\nu)L\alpha_j\} \eta^2 \alpha_j^2 + \nu(1-L\alpha_j)\alpha_j^4] e^{\alpha_j L} / d_j$$

$$b_{6j}^* = \beta_j [L\eta^4 - \{2\nu + (3+\nu)L\alpha_j\} \eta^2 \alpha_j - 2(2+\nu)(1-L\alpha_j)\alpha_j^3] \times \eta e^{\alpha_j L} / d_j$$

$$b_{7j}^* = -L\beta_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{8j}^* = -(1+L\alpha_j)\beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$\text{ここで, } f_j = \frac{\nu\alpha_j^3 + \eta^2\alpha_j}{d_j}, \quad g_j = \frac{\eta^3 - (2+\nu)\eta\alpha_j^2}{d_j}$$

$$\beta_j = \frac{d_j}{2k^2\alpha_j \{(\alpha_j^2 - \eta^2)(2d_j - \lambda_m^2/k^2) + J^2\alpha_j^2\}}$$

$$d_j = (\alpha_j^2 - \eta^2)^2$$

特性方程式(3.113)の係数 (a_6, \dots, a_0) は次のとおりである。

$$a_6 = -4\pi^2$$

$$a_4 = 6\pi^4 + J^2 - \lambda_m^2 / \kappa^2$$

$$a_2 = -4\pi^6 + 2\pi^2 \lambda_m^2 / \kappa^2$$

$$a_0 = \pi^8 - \pi^4 \lambda_m^2 / \kappa^2$$

[3] 集中衝撃荷重をうける両縁固定円筒殻

図3.6のような大きさ F_0 の集中荷重に対する結果 (u, v, w) は[1]および[2]の結果を次の式にしたがって重ね合せ $F_0 = Rq_0$ と置くことにより得られる。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ w_0 \end{pmatrix} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \begin{pmatrix} U_m \cos m\theta \\ V_m \sin m\theta \\ W_m \cos m\theta \end{pmatrix} \quad (3.114)$$

ここで、 (u_0, w_0) は[1]の軸対称分布線衝撃荷重の場合の解である。面内並進慣性を考慮したFlüggeの式による結果を用いる場合には式(3.99)を、面内並進慣性を無視したFlüggeの式による結果を用いる場合には式(3.103)を、Donnellの式による結果を用いる場合には式(3.106)をそれぞれ (u_0, w_0) の解として用いるものとする。

応力成分に対する解は式(3.114)をFlüggeあるいはDonnellの構成方程式に代入することにより容易に得られるので、ここでは記載を省略する。

3.6 数値結果

数値計算ではポアソン比 ν は0.3とし、修正理論(Mirsky-Herrmann)におけるせん断係数は $K_x = K_\theta = \pi^2/12$ とした。

まず静的結果について計算した。

荷重点における半径方向変位の収束状況を調べるために余弦状分布線荷重が作用した場合の $\alpha = \theta = 0$ における計算結果を示したのが、表3.2, 3.3, 3.4, 3.5および3.6である。理論はMirsky-Herrmann, FlüggeおよびDonnellの三種類、境界条件は無限長、自由および固定の三種類であり、各 n の値に対する半径方向変位 $(w)_n$, x 軸方向垂直力 $(N_x)_n$ および θ 軸まわりの曲げモーメント $(M_x)_n$ の値を示した。

変位 $(w)_n$ については n の値が小さい範囲でFlüggeとDonnellの両理論間に差があり、逆に n の値が大きい範囲ではMirsky-HerrmannとFlüggeの両理論間に差がある。集中荷重に対する結果を求める場合には、これらの数値を合計することになる。この立場に立ててみると、古典理論(FlüggeおよびDonnell)では n に対する収束が良好であることがわかる。ところが修正理論では n の値とともに減少率が小さくなる。実はこれらの数値の合計は無限大となる。すなわち、集中荷重の場合の荷重点におけるたわみは面外方向せん断変形を無視する古典理論では有限値となるが、この変形を考慮した修正理論では無限大となり計算不能となってしまふ。これは修正理論の重大な欠点となる。簡単な古典理論の方が都合がよいというのは皮肉であるが、反面古典理論によって得られた値

も無条件に信用できる性質のものでないことを示唆している。

厳密な理論によって計算しても解の特異性によりやはり変位は無限大となるであろうから、この有限値が実用に供し得るかどうかの判定は実験によるしかなくなる。ここでは、この議論の続きは後の実験の章にゆずることにする。

垂直力 $(N_x)_m$ については、 n の値が小さい範囲で三種類の理論による結果はほぼ一致しているが、 n の値が大きくなると三者ともに異った値となる。しかし、いずれの場合にもこれらの値の合計すなわち集中荷重の場合の荷重点における垂直力は無限大となる。 $n \times (N_x)_m$ の値が、 n の値が大きくなるとほぼ一定となってくるのが発散の証拠である。

曲げモーメント $(M_x)_m$ については、すべての n の値に対して三種類の理論による結果はほぼ一致している。集中荷重の場合に解が発散する点は垂直力の場合と同様である。

しかし、荷重点を離れるかまたは集中荷重を部分分布荷重とすれば、すべての解は収束する。このとき理論間の差も小さくなる。

要約すると集中荷重の場合、荷重点における合応力成分は古典理論ではすべて発散する。一方修正理論では、合応力成分に加えて変形も発散するので、全く計算を行うことができない。そこで、以後は古典理論による結果についてだけ計算を行った。

表3.2 余弦状分布線荷重をうける場合の半径方向変位 $D(W)_m / R^3 g_0$ の値 (静的結果, $h/R=0.05$, $x=\theta=0$, $\beta_x=0$, n :周方向波数, B.C.:境界条件, $\times 10^{-3}$)

Theory	Donnell			Flügge		Mirsky-Herrmann
B.C.	Infinite	Free	Clamped	Clamped		Clamped
l/R n	∞	4	4	2	4	4
2	11.9131	12.7078	8.66503	3.54947	10.3512	10.3805
4	2.99991	2.99994	2.99986	3.26191	3.28432	3.34257
6	1.07795	1.07795	1.07795	1.12439	1.12440	1.17780
8	0.476639	0.476639	0.476639	0.488321	0.488321	0.531877
10	0.247490	0.247490	0.247490	0.251391	0.251391	0.287092
12	0.143968	0.143968	0.143968	0.145551	0.145551	0.175550
14	0.0908663	0.0908663	0.0908663	0.0916048	0.0916048	0.117401
16	0.0609401	0.0609401	0.0609401	0.0613219	0.0613219	0.0839756
18	0.0428252	0.0428252	0.0428252	0.0430269	0.0430269	0.0651244
20	0.0312300	0.0312300	0.0312300	0.0313574	0.0313574	0.0470173
30	—	—	0.00925808	—	0.00927586	0.0213428
40	—	—	0.00390609	—	0.00391065	0.0129594
50	—	—	0.00199996	—	0.00200182	0.00923983

表3.3 余弦状分布線荷重をうける場合の垂直力 $(N_x)_m / g_0$ の値 (静的結果, $h/R=0.05$, $l/R=8$, $x=\theta=0$, 両縁固定, n :周方向波数, $\times 10^{-3}$) $\beta_x=0$

Theory	Donnell		Flügge		Mirsky-Herrmann	
n	$(N_x)_n$	$-n \times (N_x)_n$	$(N_x)_n$	$-n \times (N_x)_n$	$(N_x)_n$	$-n \times (N_x)_n$
2	-2482.83	4965.66	-2989.13	5978.26	-2992.19	5984.38
4	-1343.96	5375.84	-1443.09	5772.36	-1463.22	5852.88
6	-560.460	3362.76	-592.780	3556.68	-618.845	3713.07
8	-256.047	2048.37	-271.871	2174.96	-294.750	2358.00
10	-134.219	1342.19	-144.672	1446.72	-163.833	1638.33
20	-17.0443	340.886	-21.4856	429.712	-31.3500	627.000
40	-2.13267	85.3068	-4.32419	172.967	-9.26287	370.514
60	-0.631936	37.9161	-2.09143	125.485	-5.38371	323.022
80	-0.266600	21.3280	-1.36094	108.875	-3.83003	306.402
100	-0.136499	13.6499	-1.01188	101.188	-2.98709	298.709
120	-0.0789929	9.47914	-0.808442	97.0130	-2.45441	294.529
140	-0.0497448	6.96427	-0.674969	94.4956	-2.08578	292.009
160	-0.0333251	5.33201	-0.580386	92.8617	-1.81484	290.374
180	-0.0234053	4.21295	-0.509676	91.7416	-1.60696	289.252
200	-0.0170624	3.41248	-0.454702	90.9404	-1.44225	288.450
220	-0.0128193	2.82024	-0.410671	90.3476	-1.30844	287.856
240	-0.00987413	2.36979	-0.374570	89.8968	-1.19752	287.404
260	-0.00776627	2.01923	-0.344407	89.5458	-1.10405	287.053
280	-0.00621811	1.74107	-0.318813	89.2676	-1.02420	286.776
300	-0.00505555	1.51666	-0.296810	89.0430	-0.955170	286.551

表3.4 余弦状分布線荷重をうける場合の垂直力 $(N_x)_m / R_0$ の値
 (静的結果, $\alpha = \theta = 0$, $\beta_x = 0$, n : 周方向波数, B.C.: 境界条件, $\times 10^{-3}$)

Theory	Donnell		Flügge		Mirsky-Herrmann	
h/R	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.02
l/R	4	4	2	4	4	4
B.C.	Free	Clamped	Clamped	Clamped	Clamped	Clamped
n						
2	-2611.57	-2592.80	-1757.18	-2983.07	-2970.10	-3726.51
4	-1343.95	-1343.95	-1455.49	-1443.08	-1463.20	-2670.14
6	-560.460	-560.460	-592.772	-592.780	-618.845	-2391.72
8	-256.047	-256.047	-271.871	-271.871	-294.750	-1386.76
10	-134.219	-134.219	-144.672	-144.672	-163.833	-806.504
12	-72.3497	-72.3497	-86.3555	-86.3555	-102.587	-495.895
14	-42.5251	-42.5251	-56.1191	-56.1191	-70.1289	-324.042
16	-33.2387	-33.2387	-38.8915	-38.8915	-51.1901	-227.771
18	-23.3673	-23.3673	-28.3354	-28.3354	-39.2858	-160.992
20	-17.0443	-17.0443	-21.4856	-21.4856	-31.3500	-120.394
22	-12.8099	-12.8099	-16.8306	-16.8306	-25.8030	-92.8468
24	-9.86905	-9.86905	-13.5446	-13.5446	-21.7718	-73.4808
26	-7.76337	-7.76337	-11.1499	-11.1499	-18.7457	-59.4506
28	-6.21638	-6.21638	-9.35697	-9.35697	-16.4110	-49.0197
30	-5.05449	-5.05449	-7.98295	-7.98295	-14.5672	-41.0892
32	-4.16497	-4.16497	-6.90849	-6.90849	-13.0815	-34.9406
34	-3.47248	-3.47248	-6.05326	-6.05326	-11.8633	-30.0906
36	-2.92537	-2.92537	-5.36178	-5.36178	-10.8491	-26.2062
38	-2.48740	-2.48740	-4.79485	-4.79485	-9.99345	-23.0523
40	-2.13267	-2.13267	-4.32418	-4.32418	-9.26287	-20.4500
42	-1.84230	-1.84230	-3.92903	-3.92903	-8.63253	-18.3055
44	-1.60234	-1.60234	-3.59388	-3.59388	-8.08358	-16.4969
46	-1.40230	-1.40230	-3.30700	-3.30700	-7.60147	-14.9646
48	-1.23422	-1.23422	-3.05934	-3.05934	-7.17486	-13.6556
50	-1.09197	-1.09197	-2.84391	-2.84391	-6.79478	-12.5286

表3.5 余弦状分布線荷重をうける場合の曲げモーメント $(M_x)_m / R_0$ の値
 (静的結果, $h/R = 0.05$, $l/R = 8$, $\alpha = \theta = 0$, $\beta_x = 0$, 両縁固定, n : 周方向波数, $\times 10^{-3}$)

Theory	Donnell		Flügge		Mirsky-Herrmann	
n	$(M_x)_n$	$n \times (M_x)_n$	$(M_x)_n$	$n \times (M_x)_n$	$(M_x)_n$	$n \times (M_x)_n$
2	61.9016	123.803	64.8112	129.622	64.2524	128.504
4	62.3983	249.593	63.8153	255.261	63.2976	253.190
6	50.4485	302.691	51.1566	306.939	50.8844	305.306
8	39.6564	317.251	39.9981	319.984	39.8678	318.942
10	32.1737	321.737	32.3565	323.565	32.2879	322.879
20	16.2396	324.792	16.2642	325.284	16.2557	325.114
40	8.12467	324.986	8.12838	325.135	8.12689	325.075
60	5.41662	324.997	5.41803	325.081	5.41719	325.031
80	4.06248	324.998	4.06327	325.061	4.06263	325.010
100	3.24999	324.999	3.25051	325.051	3.24999	324.999
120	2.70833	324.999	2.70872	325.046	2.70827	324.992
140	2.32142	324.998	2.32173	325.042	2.32135	324.989
160	2.03124	324.998	2.03150	325.040	2.03116	324.985
180	1.80555	324.999	1.80577	325.038	1.80547	324.984
200	1.62500	325.000	1.62519	325.038	1.62491	324.982
220	1.47727	324.999	1.47744	325.036	1.47719	324.981
240	1.35416	324.998	1.35432	325.036	1.35408	324.979
260	1.24999	324.997	1.25014	325.036	1.24992	324.979
280	1.16071	324.998	1.16084	325.035	1.16064	324.979
300	1.08333	324.999	1.08345	325.035	1.08326	324.978

表3.6 余弦状分布線荷重をうける場合の曲げモーメント
 $(Mx)_m / Rg_0$ の値 (静的結果, $h/R = 0.05$, $x = \theta = 0$,
 $\beta_x = 0$, n : 周方向波数, B.C.: 境界条件, $\times 10^{-3}$)

Theory	Donnell			Flügge		Mirsky-
B.C.	Infinite	Free	Clamped	Clamped		Clamped
l/R n	∞	4	4	2	4	4
2	61.9482	62.9986	58.2467	51.0160	58.5105	57.8121
4	62.3983	62.3983	62.3981	63.7811	63.8150	63.2972
6	50.4484	50.4484	50.4485	51.1565	51.1566	50.8844
8	39.6564	39.6564	39.6564	39.9981	39.9981	39.8678
10	32.1737	32.1737	32.1737	32.3565	32.3565	32.2879
12	26.9508	26.9508	26.9508	27.0588	27.0588	27.0191
14	23.1527	23.1527	23.1527	23.2217	23.2217	23.1968
16	20.2808	20.2808	20.2808	20.3276	20.3276	20.3111
18	18.0379	18.0379	18.0379	18.0712	18.0712	18.0596
20	16.2396	16.2396	16.2396	16.2642	16.2642	16.2557
22	14.7662	14.7662	14.7662	14.7850	14.7850	14.7786
24	13.5374	13.5374	13.5374	13.5521	13.5521	13.5471
26	12.4972	12.4972	12.4972	12.5089	12.5089	12.5049
28	11.6052	11.6052	11.6052	11.6147	11.6147	11.6114
30	10.8319	10.8319	10.8319	10.8398	10.8398	10.8371
32	10.1552	10.1552	10.1552	10.1619	10.1619	10.1595
34	9.55809	9.55809	9.55809	9.56375	9.56375	9.56168
36	9.02722	9.02722	9.02722	9.03209	9.03209	9.03026
38	8.55221	8.55221	8.55221	8.55644	8.55644	8.55479
40	8.12467	8.12467	8.12467	8.12838	8.12838	8.12689
42	7.73784	7.73784	7.73784	7.74112	7.74112	7.73975
44	7.38616	7.38616	7.38616	7.38908	7.38908	7.38781
46	7.06505	7.06505	7.06505	7.06767	7.06767	7.06649
48	6.77070	6.77070	6.77070	6.77306	6.77306	6.77195
50	6.49989	6.49989	6.49989	6.50203	6.50203	6.50098

図3.8 および 3.9 は無限長円筒殻の場合の Donnell の理論による変位成分の点 $x = \theta = 0$ を通る軸方向および周方向分布であり, 同様に図3.10 および 3.11 は曲げモーメントの軸方向および周方向分布であり, パラメータは荷重の分布角度 β ($= \beta_x = \beta_\theta$) である。 $\beta = 0$ (集中荷重) の場合, 荷重点で変位は有限であるが, 曲げモーメントは無限大である。しかし, $\beta \neq 0$ であれば荷重点の曲げモーメントも有限である。そのため荷重点における曲げモーメントは荷重面積によって著しく異なるが, 荷重点を離れた位置における曲げモーメントは荷重面積をある程度小さくすることによって集中荷重の場合の結果とほとんど一致する。

図3.12 は同様にたわみおよび曲げモーメントに及ぼす肉厚の影響を Donnell の理論により計算したものである。円筒殻の肉厚が厚いほど荷重点における値に対する減少率が大きい。

同様に図3.13 は荷重の分布面積を一定にして, その形状を変化させた場合の荷重点における曲げモーメントを Donnell の理論により計算したものである。軸方向に長く分布するほど M_x は小さくなり周方向に長く分布するほど M_θ は小さくなるが, 著しく細長くなる限り荷重分布形状の影響は小さい。

図3.14, 3.15 および 3.16 は集中荷重をうける両縁自由および固定の有限長円筒殻の長さ比 $l/R = 1, 2, 4, 8$ の場合について, たわみおよび曲げモーメントの軸方向分布を同様に Donnell の理論により計算したものである。円筒殻の長さが長くなるとたわみおよび曲げモーメントは, 両縁自由の場合には減少し, 両縁固定の場合には増加し, それぞれ無限長の場合の分布とほぼ一致する。両縁自由では円筒殻の長さに関係な

く常に M_x より M_θ の方が大きく、短い場合には自由縁でも M_θ の値が残る。両縁固定では固定縁に近づくとも M_x が増加し、 M_θ より大きくなる。

図 3.17 は同じくたわみおよび曲げモーメントの周方向分布を計算したものである。たわみは円筒殻の長さに対してほぼ相似な分布形を示している。 $\theta = \pi/2$ の点では、両縁自由のとき負の最大値をとるが、両縁固定では正の値をとる場合がある。これに対し曲げモーメントは円筒殻の長さの影響をあまり受けない。

図 3.18 は集中荷重のもとでの荷重点におけるたわみと殻の長さとの関係に及ぼす理論、境界条件および円筒殻の肉厚の影響をまとめたものである。

たわみは殻の長さが長くなると境界条件のいかにかわらなくある値で一定となるが、肉厚の厚い場合が一定となるのがはやい。Flügge と Donnell の理論間の差は長さが長くなるほど広がるが、これをある比率で一定となる。殻の長さが短くなると理論間の差はなくなるが、境界条件の影響が顕著に見られるようになり、自由支持・固定・自由の順でたわみが大きくなる。

図 3.19 は両縁自由支持円筒殻における荷重点の曲げモーメントと分布荷重の分布角度 β との関係を Donnell の理論により計算したものである。曲げモーメントの値は、円筒殻の長さが長い方が大きい。いずれの場合にも β の減少によって一様に増加して $\beta = 0$ では無限大となり、常に M_x より M_θ の方が大きい。

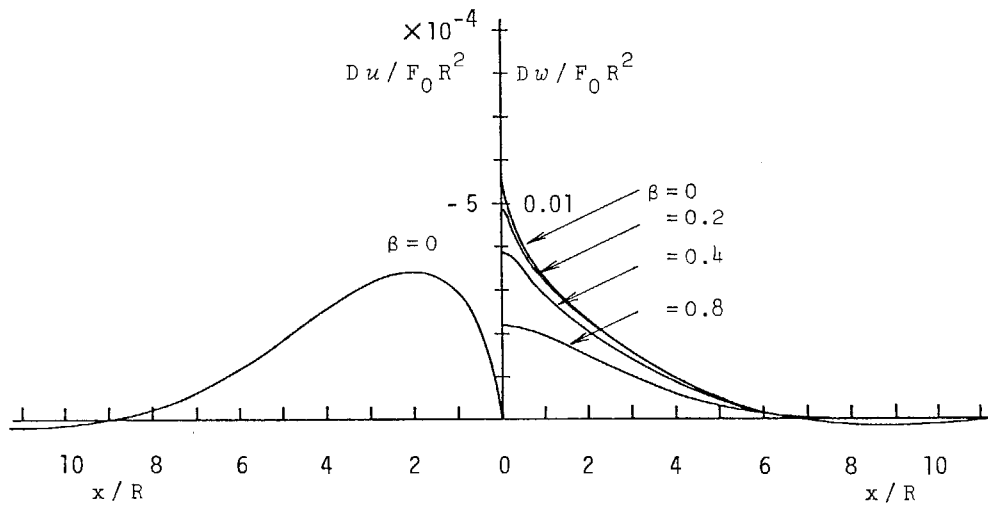


図3.8 無限長円筒殻に生ずる変位成分の軸方向分布
 (Donnellの理論, $h/R = 0.05$, $\theta = 0$)
 ($\beta = \beta_x = \beta_\theta$, $F_0 = 4\beta_x \beta_\theta R^2 P_0$)

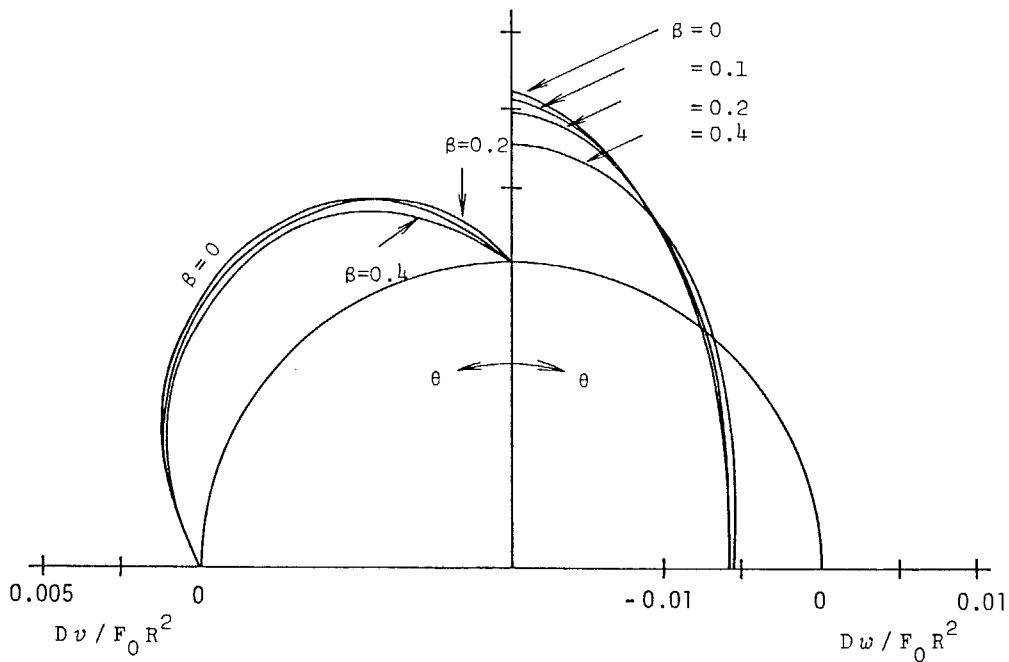


図3.9 無限長円筒殻に生ずる変位成分の周方向分布
 (Donnellの理論, $h/R = 0.05$, $x = 0$)
 ($\beta = \beta_x = \beta_\theta$, $F_0 = 4\beta_x \beta_\theta R^2 P_0$)

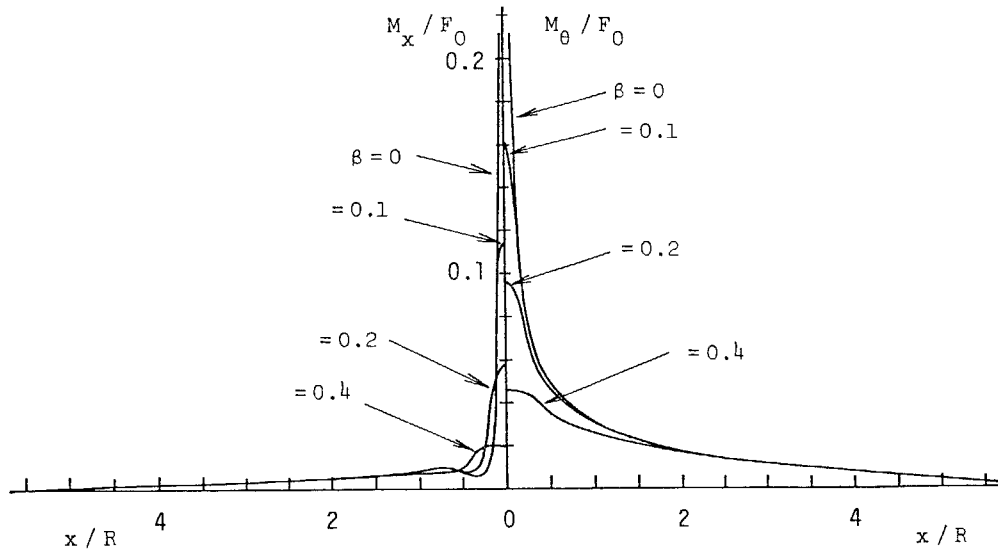


図3.10 無限長円筒殻に生ずる曲げモーメントの軸方向分布
(Donnellの理論, $h/R = 0.05, \theta = 0$)
($\beta = \beta_x = \beta_\theta, F_0 = 4\beta_x\beta_\theta R^2 P_0$)

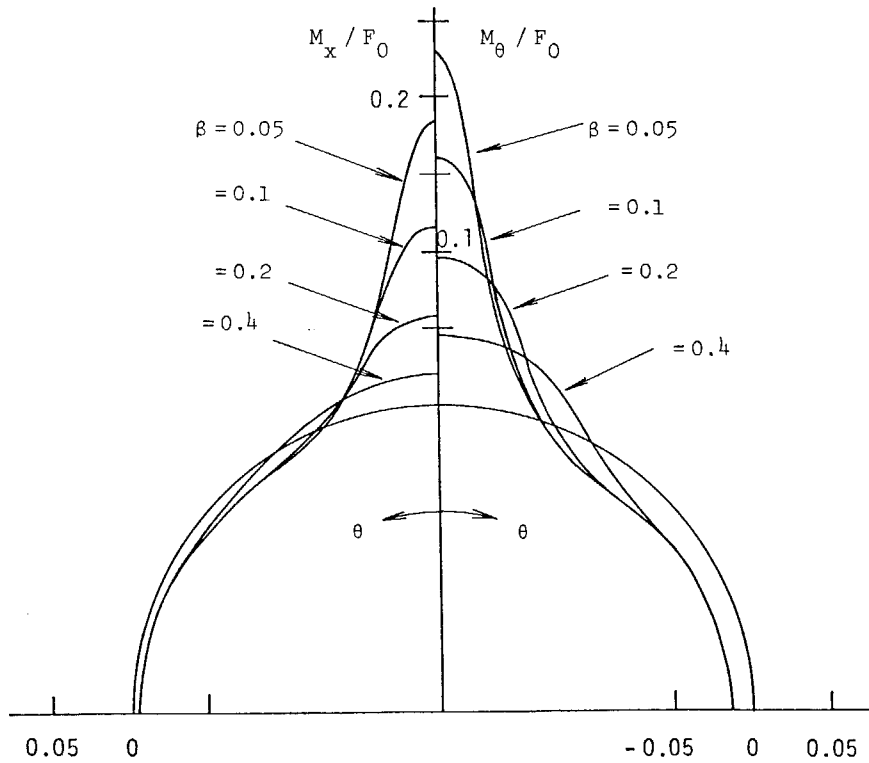


図3.11 無限長円筒殻に生ずる曲げモーメントの周方向分布
(Donnellの理論, $h/R = 0.05, x = 0$)
($\beta = \beta_x = \beta_\theta, F_0 = 4\beta_x\beta_\theta R^2 P_0$)

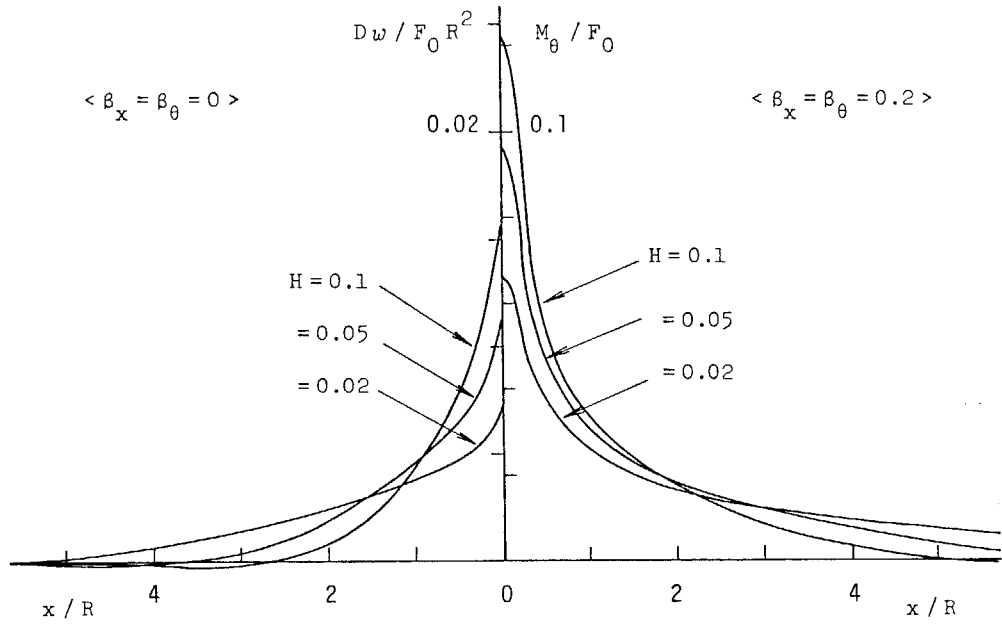


図3.12 無限長円筒殻に生ずるたわみと曲げモーメントの軸方向分布
 (Donnellの理論, $H = h/R$, $\theta = 0$, $F_0 = 4\beta_x\beta_\theta R^2 P_0$)

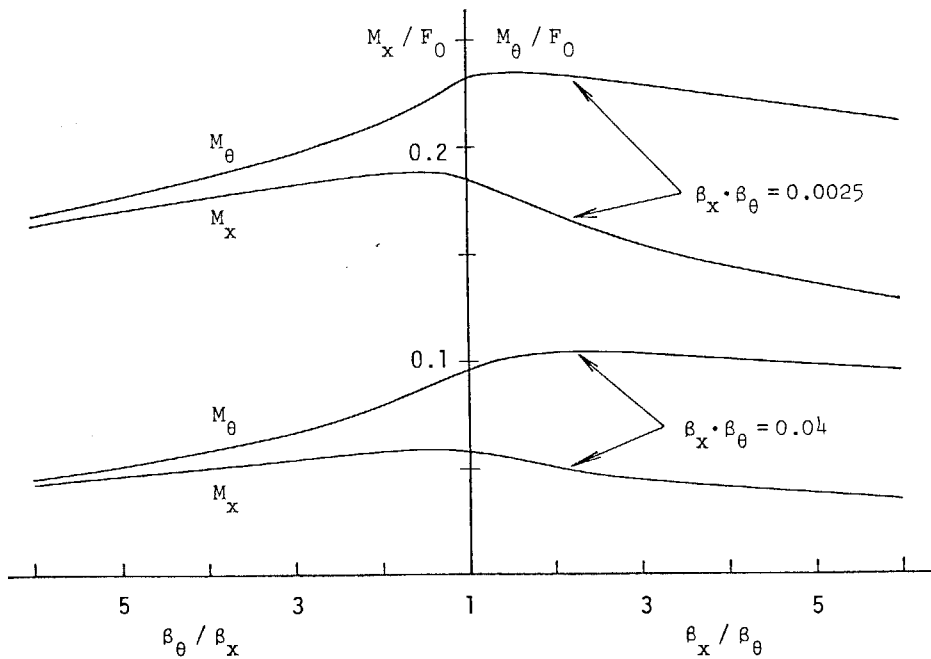


図3.13 無限長円筒殻の荷重面中央に生ずる曲げモーメント
 と荷重の分布形状との関係
 (Donnellの理論, $h/R = 0.05$, $x = \theta = 0$, $F_0 = 4\beta_x\beta_\theta R^2 P_0$)

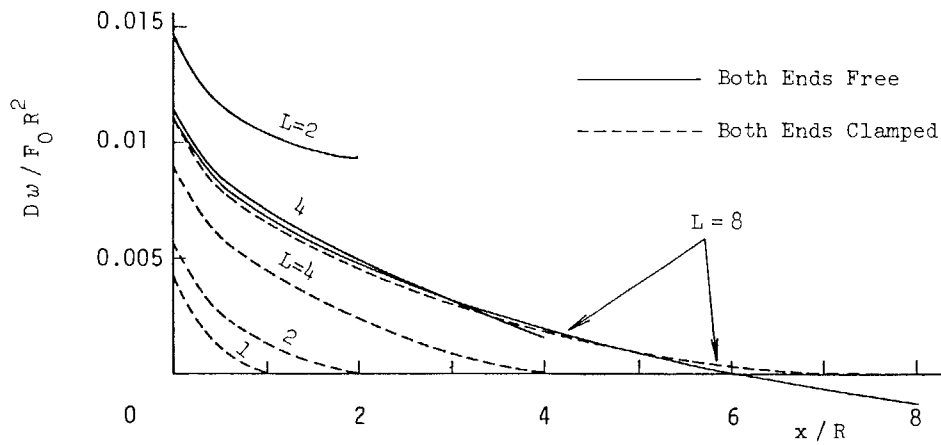


図3.14 有限長円筒殻に生ずるたわみの軸方向分布
 (Donnellの理論, 集中荷重, $\theta = 0$, — 両縁自由
 $h/R = 0.05$, $L = l/R$, - - - - 両縁固定)

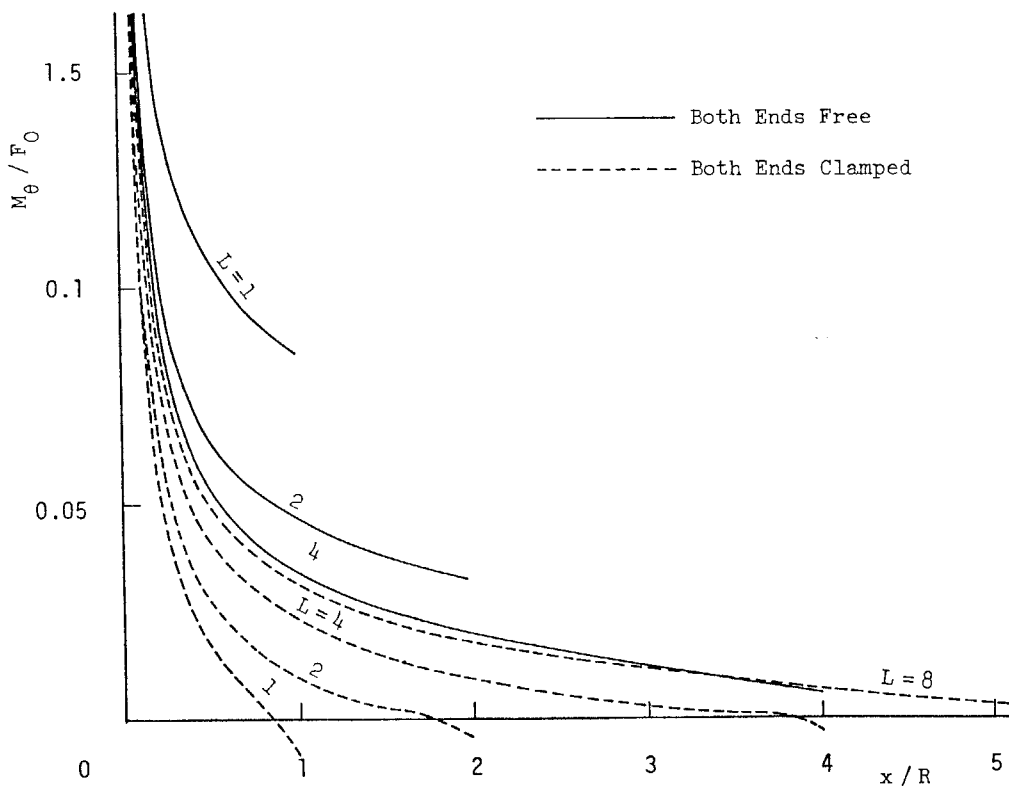


図3.15 有限長円筒殻に生ずる曲げモーメントの軸方向分布
 (Donnellの理論, 集中荷重, $h/R = 0.05$, $L = l/R$
 $\theta = 0$, — 両縁自由, - - - - 両縁固定)

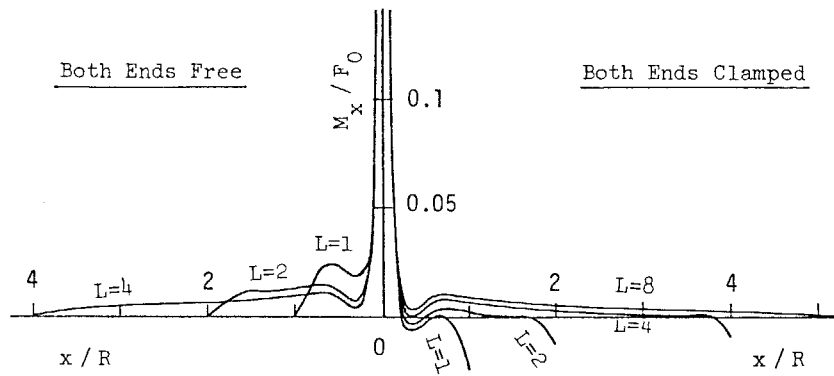


図3.16 有限長円筒殻に生ずる曲げモーメントの軸方向分布
 (Donnellの理論, 集中荷重, $h/R=0.05$, $L=l/R$)
 ($\theta=0$, 左:両縁自由, 右:両縁固定)

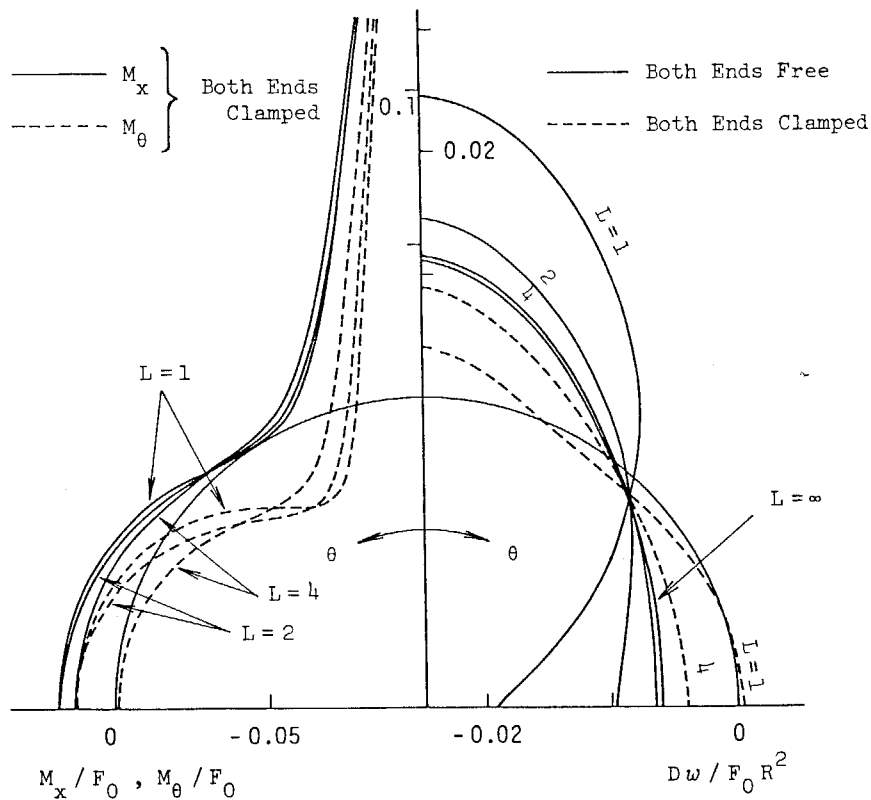


図3.17 有限長円筒殻に生ずるたわみと曲げモーメントの周方向分布
 (Donnellの理論, 集中荷重, $h/R=0.05$, $L=l/R$, $\theta=0$)
 左: 曲げモーメント = 両縁固定 -----
 右: たわみ = 両縁自由 — および 両縁固定 -----

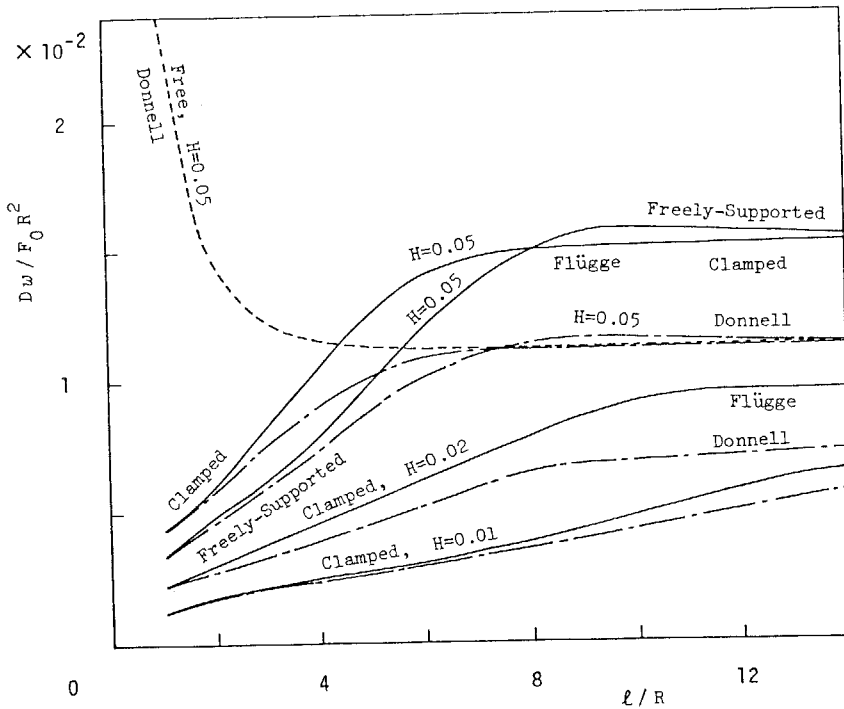


図 3.18 荷重点に生ずるたわみと円筒殻の長さとの関係に及ぼす
 (肉厚・境界条件・理論の影響 集中荷重, $\alpha = \theta = 0$)
 ($H = h/R$, — Flügge, - - - - Donnell)

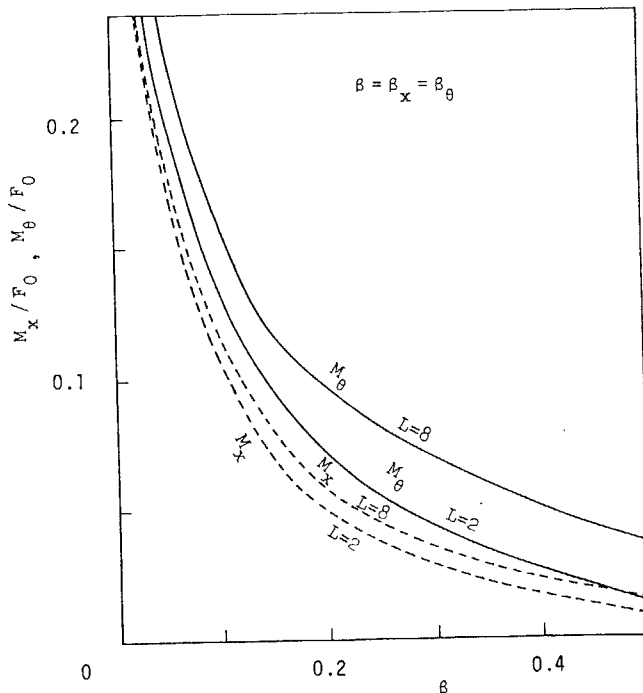


図 3.19 荷重点に生ずる曲げモーメントと荷重の分布角度の関係
 (Donnell の理論, 両縁自由支持, $h/R = 0.05$)
 ($L = l/R$, $\alpha = \theta = 0$, $F_0 = 4\beta_x\beta_\theta R^2 P_0$)

次に振動数を計算した。

表 3.7 および 3.8 は面外方向並進慣性だけを含んだ Donnell の理論を用いた場合の無次元固有振動数 $\lambda_m (=R\rho_m/c)$ と境界条件の関係を示したもので、 n は振動モードの周方向波数、 m は次数である。円筒殻形状は肉厚比 $H (=h/R)$ が 0.05 で、長さ比 $L (=l/R)$ が 1 と 2 である。境界条件は上段が両縁自由、中段が両縁自由支持、下段が両縁固定である。

$n=2, 4, \dots$ の非軸対称モードでは両縁自由の固有振動数が最も低く、ついで両縁固定、両縁自由支持の順で高くなる。

各 n の値に対する最低次の固有振動数は、両縁自由の場合円筒殻長さに関係なく一定である。

表 3.9, 3.10 および 3.11 は両縁固定の場合の無次元固有振動数と理論の関係を示したものである。円筒殻形状は $H = 0.05$ で $L = 2, 4, 8$ であり、上段は並進慣性をすべて考慮した Flügge の理論、中段および下段は面外方向並進慣性だけを考慮した Flügge および Donnell の理論である。面内並進慣性を考慮した場合とこれを無視した場合とでは、固有振動数の値は大きく異なり、この慣性の影響は大きい。特に次数が高くなると全く違ってくるが、これは面内並進慣性を考慮することによって、これを無視した場合には表されない振動数が出てくるのも大きな原因となっている。Flügge および Donnell の両理論間の差は、次数が低いほどすなわち $m \times n$ の値が小さい場合ほど、あるいは円筒殻が長い場合ほど大きく表れる。

しかし、次数が高くなれば、長い円筒殻に対しても両者の差はなくなる。

表3.7 無次元固有振動数 λ_m と境界条件との関係

($h/R=0.05, l/R=1$)

m \ n	0	2	4	6	8
1	0.953939 0.954603 0.957349	0.0577350 0.707726 0.434095	0.230940 0.521418 0.343719	0.519615 0.693157 0.575694	0.923760 1.073806 0.969022
2	0.957349 1.006347 1.048967	0.648004 1.069621 0.945092	0.440480 1.049771 0.854544	0.655063 1.198259 0.988511	1.049764 1.537283 1.328054
3	1.048967 1.304882 1.438963	1.001752 1.621240 1.162528	0.965887 1.715428 1.493658	1.119265 1.925350 1.752979	1.474545 2.274474 1.998854
4	1.438963 1.988794 2.218812	1.464448 2.515406 2.253756	1.566906 2.655467 2.370828	1.791395 2.904709 2.594030	2.159047 3.274189 2.939756
5	2.218812 3.038359 3.352725	2.268727 3.738882 3.399135	2.424265 3.896701 3.542726	2.695888 4.165044 3.790595	3.090202 4.548659 4.151999
6	3.352725 4.413601 4.805567	3.410319 5.271225 4.856237	3.584208 5.436520 5.010678	3.876320 5.714044 5.271926	4.287555 6.105900 5.645763
7	4.805567 6.093871 6.560353	4.865610 7.101360 6.613621	5.045782 7.270136 6.773037	5.345934 7.552302 7.042948	5.765341 7.948847 7.421369
8	6.560353 8.069702 8.609244	6.621144 9.223724 8.662504	6.803303 9.394273 8.826889	7.106292 9.678933 9.099752	7.529061 10.078201 9.483000
9	8.609244 10.336520 10.948384	8.670177 11.635409 11.004899	8.852742 11.806930 11.168770	9.156369 12.093009 11.444541	9.580128 12.493911 11.833512
10	10.948384 12.891947 13.575729	11.009242 14.334801 13.631167	11.191595 14.506890 13.797920	11.494972 14.793819 14.075298	11.918587 15.195737 14.465013
11	13.575729 15.734659 16.490125	13.636436 17.320960 16.546387	13.818356 17.493396 16.713165	14.121123 17.780856 16.992126	14.544057 18.183428 17.383987
12	16.490125 18.863871 19.690878	16.550656 20.593305 19.747391	16.732101 20.765964 19.915482	17.034113 21.053769 20.195587	17.456177 21.456774 20.588196
13	19.690878 22.279099 23.177556	19.751221 24.151465 23.233276	19.932190 24.324273 23.402161	20.233414 24.612309 23.682709	20.654572 25.015609 24.076889
14	23.177556 25.980028 26.949875	23.237747 27.995197 27.006195	23.418243 28.168105 27.174469	23.718719 28.456301 27.457748	24.138992 28.859808 27.851349
15	26.949875 29.966449 31.007645	27.009949 32.124331 31.064087	27.190018 32.297310 31.233337	27.489777 32.585619 31.515518	27.909180 32.989273 31.910782

表3.8 無次元固有振動数 λ_m と境界条件との関係

($h/R=0.05, l/R=2$)

m \ n	0	2	4	6	8
1	0.953939 0.953980 0.954152	0.0577350 0.375721 0.205967	0.230940 0.295458 0.251480	0.519615 0.558590 0.530887	0.923760 0.960027 0.933780
2	0.954152 0.957298 0.960154	0.284639 0.707726 0.585408	0.273455 0.521418 0.424033	0.551078 0.693157 0.627981	1.073280 1.073806 1.015662
3	0.960154 0.979563 0.991230	0.676237 0.892461 0.825640	0.480396 0.782004 0.682283	0.673514 0.915580 0.823981	1.061438 1.268317 1.182663
4	0.991230 1.048966 1.077413	0.869462 1.069621 1.008831	0.744054 1.049771 0.954361	0.884818 1.198259 1.092416	1.246865 1.537283 1.430156
5	1.077413 1.195868 1.247265	1.032931 1.304377 1.230762	1.006590 1.353158 1.252854	1.157826 1.533250 1.416635	1.505086 1.873547 1.749445
6	1.247265 1.438963 1.515405	1.246224 1.621240 1.528646	1.295452 1.715428 1.603347	1.480322 1.925350 1.796958	1.828927 2.274474 2.135368
7	1.515405 1.781594 1.882289	1.539774 2.025534 1.912520	1.638563 2.148110 2.020752	1.856401 2.381000 2.239064	2.215247 2.740761 2.587050
8	1.882289 2.218812 2.342123	1.921222 2.515406 2.382145	2.050583 2.655467 2.511297	2.293656 2.904709 2.747858	2.664844 3.274189 3.105562
9	2.342123 2.744240 2.888749	2.389330 3.087507 2.934510	2.537144 3.238434 3.076793	2.797795 3.498989 3.326348	3.180042 3.876420 3.692470
10	2.888749 3.352725 3.517375	2.940686 3.738882 3.566667	3.099645 3.896701 3.717359	3.372068 4.165044 3.975985	3.763080 4.548659 4.349025
11	3.517375 4.040648 4.224732	3.572094 4.467314 4.276254	3.737857 4.629617 4.432486	4.018071 4.903356 4.697567	4.415630 5.291670 5.075989
12	4.224732 4.805567 5.008620	4.281131 5.271225 5.061602	4.451123 5.436520 5.221594	4.736461 5.714044 5.491368	5.138855 6.105900 5.873909
13	5.008620 5.645840 5.867549	5.066030 6.149502 5.921520	5.238657 6.316845 6.084143	5.527450 6.597063 6.357306	5.933131 6.991588 6.769597
14	5.867549 6.560353 6.800488	5.925582 7.101365 6.855160	6.099909 7.270136 7.019662	6.390927 7.552302 7.295236	6.798935 7.948847 7.683524
15	6.800488 7.548336 7.806748	6.859241 8.126237 7.861930	7.034322 8.296038 8.027815	7.326803 8.579633 8.324567	7.736431 8.977718 8.695751

面内並進慣性無視の Donnell 理論

m : 周方向波数, n : 次数

- 上段 : 両縁自由
- 中段 : 両縁自由支持
- 下段 : 両縁固定

表3.9 無次元固有振動数 λ_m と理論との関係

($h/R=0.05, l/R=2$)
両縁固定

m	n	0	1	2	3	4
1		0.940006 0.959037 0.954152	0.307658 0.411312 0.411875	0.180525 0.201624 0.205967	0.158751 0.167681 0.178979	0.229942 0.237425 0.251480
2		0.978162 0.983736 0.960154	0.768713 0.818851 0.819799	0.544448 0.582413 0.585408	0.419866 0.440062 0.446954	0.400018 0.412778 0.424033
3		1.00147 1.00233 0.991230	0.926923 0.938709 0.940299	0.803306 0.822344 0.825640	0.698160 0.716464 0.722616	0.657633 0.672744 0.682283
4		1.07608 1.07916 1.07741	1.04896 1.05445 1.05679	0.995848 1.00504 1.00883	0.946523 0.958574 0.964610	0.932781 0.945690 0.954361
5		1.24494 1.24800 1.24726	1.23394 1.23864 1.24166	1.22093 1.22657 1.23076	1.21511 1.22328 1.22923	1.23471 1.24483 1.25285
6		1.50945 1.51579 1.51540	1.32559 1.51457 1.51807	1.51998 1.52422 1.52864	1.54239 1.54852 1.55433	1.58779 1.59588 1.60334
7		1.61312 1.88250 1.88228	1.51149 1.88575 1.88956	1.67168 1.90800 1.91252	1.94411 1.94918 1.95480	2.00700 2.01380 2.02075
8		1.88297 2.34226 2.34212	1.55436 2.34801 2.35200	1.90424 2.37758 2.38214	2.10400 2.42901 2.43444	2.49870 2.50476 2.51129
9		2.34158 2.88882 2.88874	1.88027 2.89602 2.90012	2.24900 2.92996 2.93451	2.42451 2.98769 2.99295	2.60513 3.07062 3.07679
10		2.88734 3.51742 3.51737	1.96028 3.52550 3.52966	2.37472 3.56213 3.56666	2.73783 3.62383 3.62895	3.06504 3.71147 3.71735
11		3.15645 4.22477 4.22473	2.34589 4.23340 4.23760	2.45302 4.27174 4.27625	2.98321 4.33604 4.34105	3.14967 4.42684 4.43248
12		3.51720 5.00864 5.00862	2.43350 5.01763 5.02186	2.83080 5.05711 5.06160	3.21229 5.12317 5.12807	3.70612 5.21614 5.22159
13		4.22391 5.86756 5.86754	2.89396 5.87679 5.88103	2.92890 5.91705 5.92152	3.41661 5.98433 5.98915	3.80225 6.07883 6.08414
14		4.72154 6.80050 6.80048	3.22300 6.80990 6.81415	3.41623 6.85072 6.85516	3.61948 6.91886 6.92362	4.18129 7.01449 7.01966
15		5.00841 7.80675 7.80674	3.40272 7.81627 7.82054	3.55892 7.85750 7.86193	3.80445 7.92628 7.93099	4.41342 8.02275 8.02781

表3.10 無次元固有振動数 λ_m と理論との関係

($h/R=0.05, l/R=4$)
両縁固定

m	n	0	1	2	3	4
1		0.716237 0.954267 0.953952	0.135698 0.191715 0.192438	0.0737643 0.0827746 0.0916926	0.116228 0.122742 0.136817	0.213061 0.219888 0.234353
2		0.933995 0.956162 0.954328	0.435013 0.560090 0.560731	0.247865 0.277739 0.281590	0.192998 0.204376 0.214790	0.247677 0.256076 0.270063
3		0.952824 0.961809 0.956312	0.686593 0.762127 0.762947	0.447692 0.487955 0.491060	0.331101 0.349206 0.356996	0.330595 0.341844 0.354308
4		0.967841 0.974125 0.962120	0.821018 0.853953 0.855025	0.615451 0.649125 0.652171	0.480915 0.501992 0.508741	0.446539 0.460439 0.471497
5		0.988672 0.993240 0.974861	0.890276 0.908299 0.909687	0.741908 0.765163 0.768354	0.620745 0.640488 0.646828	0.575831 0.590904 0.601016
6		1.00151 1.00271 0.998325	0.900539 0.954932 0.956684	0.842001 0.857479 0.860900	0.747709 0.764237 0.770421	0.708652 0.723379 0.732862
7		1.02916 1.03740 1.03661	0.946637 1.00777 1.00991	0.933007 0.943641 0.947318	0.867750 0.881024 0.877151	0.843218 0.856717 0.865745
8		1.05161 1.09400 1.09360	1.00226 1.07473 1.07725	1.02770 1.03542 1.03934	0.988813 0.999455 1.00555	0.981859 0.993848 1.00250
9		1.09489 1.27546 1.17246	1.07060 1.16076 1.16363	1.13436 1.14030 1.14444	1.11776 1.12644 1.13250	1.12819 1.13873 1.14706
10		1.17209 1.40320 1.27529	1.15730 1.26886 1.27204	1.18385 1.26285 1.26716	1.25958 1.26684 1.27286	1.28566 1.29495 1.30298
11		1.27440 1.55605 1.40308	1.26501 1.40057 1.40401	1.25802 1.40562 1.41005	1.41756 1.42379 1.42974	1.45701 1.46527 1.47301
12		1.40179 1.73352 1.55596	1.29160 1.55637 1.56001	1.33032 1.56985 1.57437	1.59365 1.59915 1.60501	1.64420 1.65163 1.65910
13		1.55308 1.93487 1.73345	1.39783 1.73604 1.73984	1.40151 1.75594 1.76052	1.78896 1.79390 1.79967	1.84852 1.85530 1.86250
14		1.61323 2.15925 1.93482	1.43736 1.93904 1.94296	1.56620 1.96381 1.96842	1.86211 2.00851 2.01418	2.07079 2.07705 2.08401
15		1.73358 2.40585 2.15921	1.54471 2.16466 2.16867	1.63543 2.19314 2.19777	2.00395 2.24307 2.24865	2.31145 2.31732 2.32407

n : 周方向波数, m : 次数

上段: 面内並進慣性考慮の Flugge 理論
中段: 同 無視の Flugge 理論
下段: 同 無視の Donnell 理論

表3.11 無次元固有振動数 λ_m と
理論との関係

$$\left(\frac{h}{R} = 0.05, \frac{l}{R} = 8 \right)$$

両縁固定

m \ n	0	1	2	3	4
1	0.372497 0.954436 0.953940	0.0481364 0.0686328 0.0702644	0.0429544 0.0481258 0.0616648	0.110336 0.116434 0.128756	0.210483 0.217164 0.225054
2	0.713315 0.955234 0.953963	0.187563 0.268240 0.268909	0.0942119 0.106177 0.113764	0.122072 0.129086 0.142976	0.216264 0.223307 0.237839
3	0.893201 0.956734 0.954087	0.351063 0.474042 0.474665	0.185237 0.208891 0.213575	0.157294 0.166665 0.178669	0.231330 0.239129 0.253543
4	0.931375 0.959258 0.954452	0.506319 0.625891 0.626570	0.289503 0.323762 0.327416	0.214857 0.227728 0.237689	0.258978 0.267936 0.281857
5	0.943402 0.963179 0.955260	0.634147 0.725251 0.726017	0.393502 0.433347 0.436593	0.285449 0.301942 0.310458	0.299467 0.309887 0.323041
6	0.950285 0.968918 0.956773	0.692406 0.790178 0.791051	0.489575 0.529476 0.532563	0.361303 0.380606 0.388212	0.350392 0.362352 0.374679
7	0.956405 0.976919 0.959314	0.728644 0.834681 0.835678	0.574261 0.610505 0.613553	0.437488 0.458323 0.465365	0.408501 0.421833 0.433414
8	0.963366 0.987535 0.963261	0.794325 0.867448 0.868585	0.647201 0.678219 0.681296	0.511234 0.532325 0.539016	0.470940 0.485292 0.496253
9	0.972016 0.997762 0.969041	0.840593 0.893771 0.895065	0.709878 0.735569 0.738717	0.581322 0.601680 0.608150	0.535654 0.550592 0.561052
10	0.982780 1.00350 0.977124	0.875131 0.917018 0.918482	0.764583 0.785556 0.788802	0.647596 0.666599 0.672933	0.601371 0.616469 0.626527
11	0.994466 1.04282 0.988010	0.892935 0.939463 0.941108	0.813743 0.830822 0.834182	0.710570 0.727919 0.734170	0.667453 0.682355 0.692084
12	1.00133 1.06994 1.00221	0.904276 0.962736 0.964570	0.859589 0.873570 0.877056	0.771120 0.786747 0.792949	0.733729 0.748168 0.757624
13	1.00637 1.10230 1.02025	0.929798 0.988070 0.990097	0.904038 0.915597 0.919212	0.830278 0.844256 0.850429	0.800343 0.814144 0.823366
14	1.01899 1.14024 1.04263	0.955238 1.01643 1.01865	0.948678 0.958355 0.962100	0.889090 0.901565 0.907721	0.867633 0.880701 0.889716
15	1.03899 1.18403 1.06981	0.982054 1.04860 1.05101	0.994796 1.00301 1.00688	0.948539 0.959686 0.965829	0.936042 0.948338 0.957166

n : 周方向波数, m : 次数

上段: 面内並進慣性考慮の Flugge 理論

中段: 同 無視の Flugge 理論

下段: 同 無視の Donnell 理論

最後に変位および合応力成分の時間変動を計算した。

図3.1(a)あるいは図3.4のように一対の対向部分分布荷重または集中荷重が、円筒殻中央に図3.20のようなステップ関数状に作用する場合を対象とした。

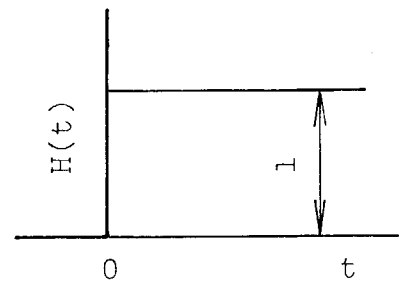


図3.20 ステップ関数

まず無限長円筒殻の場合の結果を示す。

図3.21は集中荷重($\beta=0$)の場合で、荷重点における半径方向変位(たわみ)を肉厚比 $h/R=0.02$ および 0.05 の場合について計算した結果である。実線は面外並進慣性だけを考慮した理論、破線は並進慣性をすべて考慮した理論によりそれぞれ計算したものであり、一点鎖線と数値は荷重が静的に作用した場合の結果である。式(3.15)における n による級数の打ち切りは $n=20$ とした。静的結果、変動周期および動的最大応答の値のいづれについても Donnell の理論による結果は円筒殻の肉厚に関係なく Flugge の理論による結果に対して75%程度の値となる。最大応答と静的結果との比は比較的小さく理論および肉厚に関係なく約1.6である。面内並進慣性を無視した理論による結果は、これを考慮した場合の結果に対して変動周期が約90%程度と短くなるが、最大応答の値については大差はない。

図3.22は部分分布荷重($\beta=0$)の場合で、荷重域の中央における曲げモーメントを肉厚比 $h/R=0.05$ の場合について面外並進慣性だけを考慮した理論により計算したものである。

Flugge と Donnell の両理論間の差は、変動周期についてはた

わみの場合と同じく25%程度であるが、静的結果および最大応答の値については小さく10%以下である。この差は荷重の分布角度 β が小さいほど小さくなる。最大応答と静的結果との比はたわみの場合よりも小さく、変動振幅が静的結果に対して著しく小さいのが特徴的である。この傾向は M_θ より M_x の方があるいは β が小さい方が強い。

次に両縁自由支持の有限長円筒殻の場合の結果を示す。

図3.23は集中荷重の場合で、荷重点における半径方向変位を円筒殻の長さ比 $l/R=4$ および8の場合について計算した結果である。式(3.43)における級数の打ち切りは $n=40$, $m=60$ とした。円筒殻が短い場合は、FlüggeおよびDonnellの両理論間の差も面内並進慣性の影響も小さい。長い場合の $l/R=8$ では無限長の場合とほぼ一致しているが、最大応答と静的結果との比は無限長の場合よりも大きい。無限長の場合には応答が時間の経過とともに減衰するのに対し、有限長の場合では常に振動状態にあり減衰しない。これが無限長の場合との相違点の主な原因と考えられる。

図3.24, 3.25および3.26は部分分布荷重の場合で、荷重点における曲げモーメントを面外並進慣性だけを考慮したFlüggeおよびDonnellの両理論により計算したものである。

無限長の場合と同様で両縁自由支持の場合にも、曲げモーメントの変動振幅は静的結果に比べて小さく、荷重の分布角度 β の値が小さいほどこの傾向が強くなる。同じく、変位の場合よりも曲げモーメントの場合の方が理論間の差が小さい。

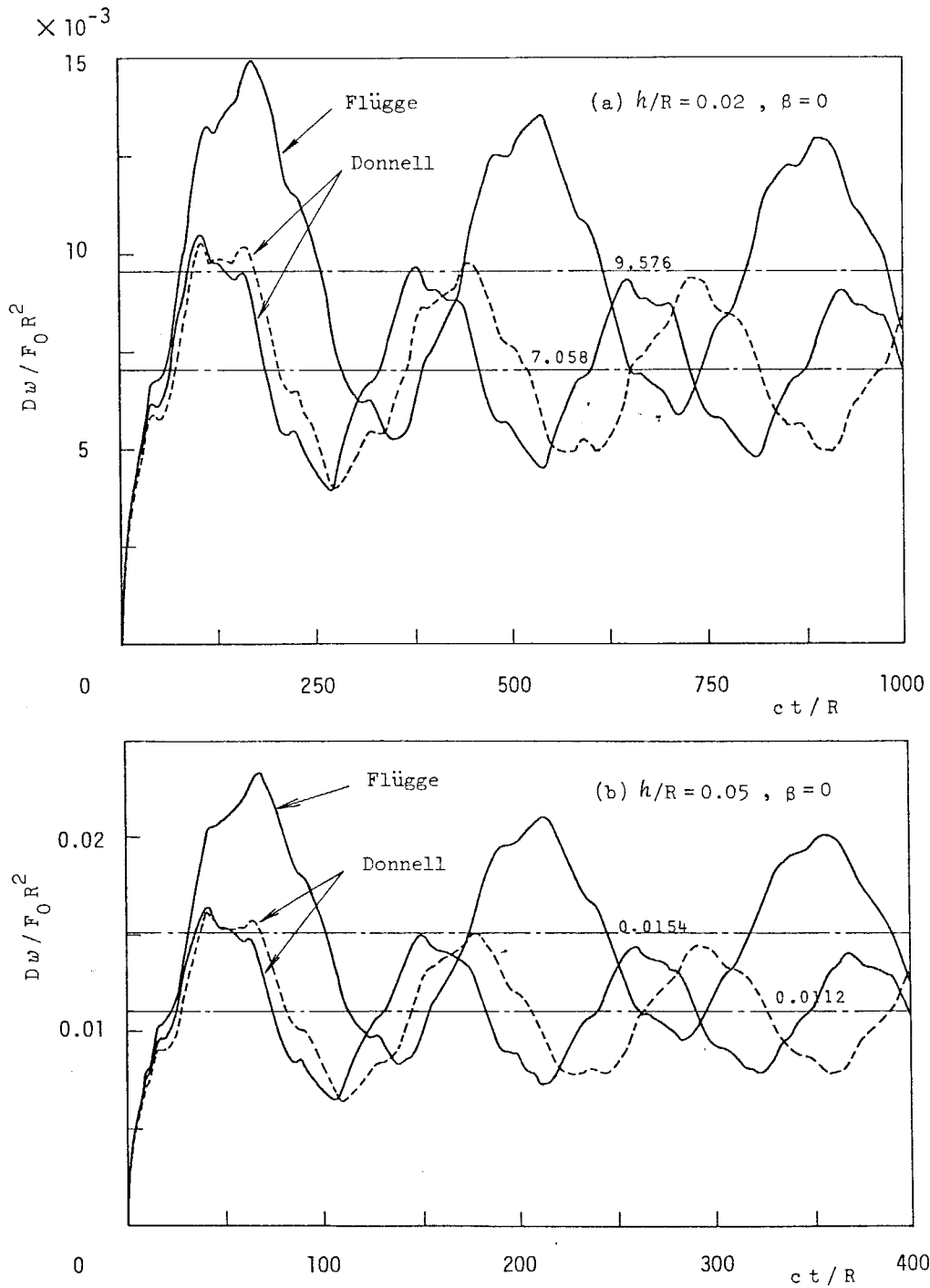


図 3.21 無限長円筒殻の荷重点に生ずるたわみの時間変動

集中荷重, $x = \theta = 0, \beta = \beta_x = \beta_\theta, n = 20$
 ——— 面内並進慣性無視, ----- 同考慮
 - - - 静的結果

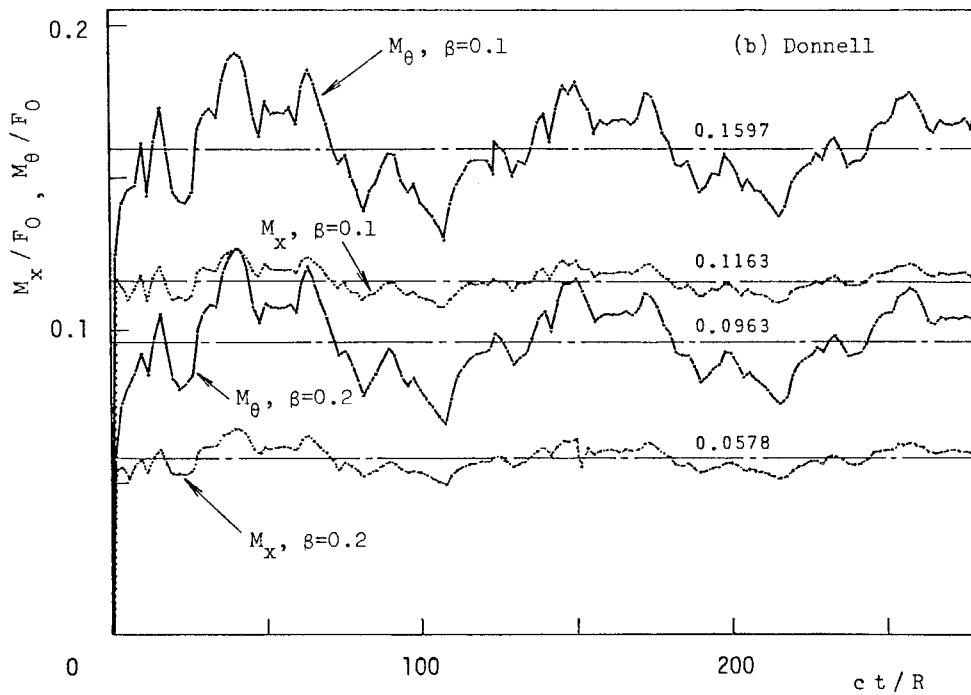
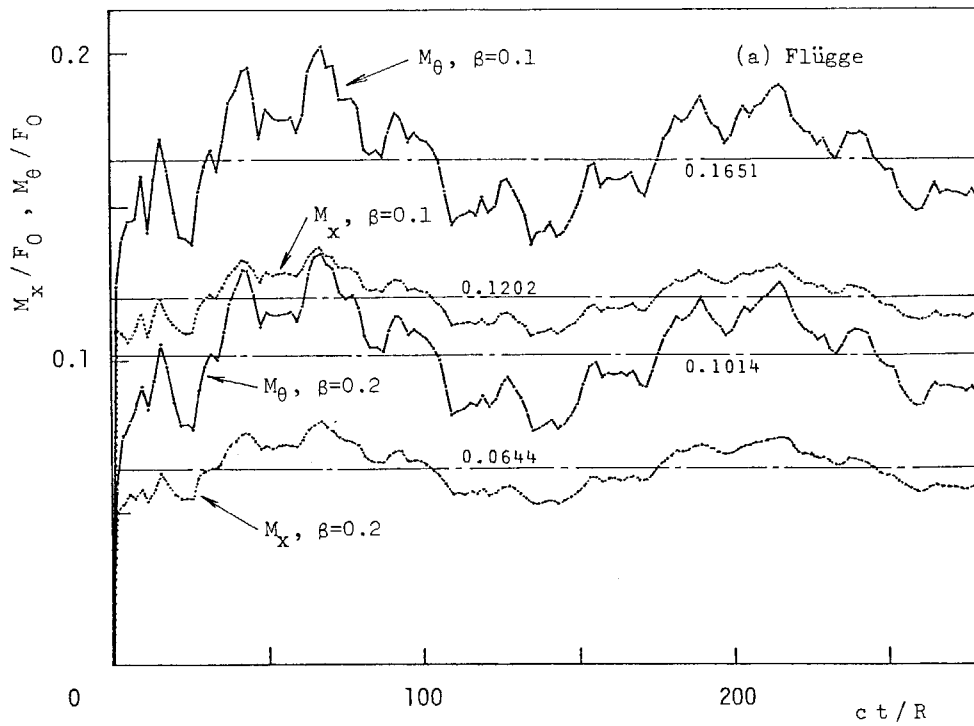


図 3.22 無限長円筒殻の荷重点に生ずる曲げモーメントの時間変動

$\left[\begin{array}{l} \text{部分分布荷重, } h/R = 0.05, x = \theta = 0, \beta = \beta_x = \beta_\theta \\ F_0 = 4\beta^2 R^2 P_0, \text{ 面内並進慣性無視, } \text{---} \text{ 静的結果} \end{array} \right]$

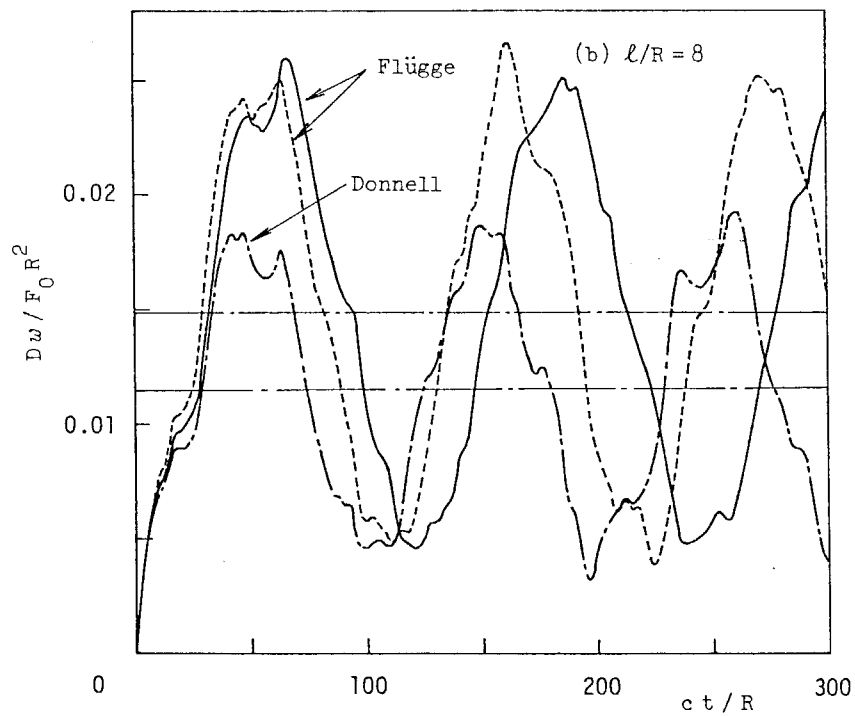
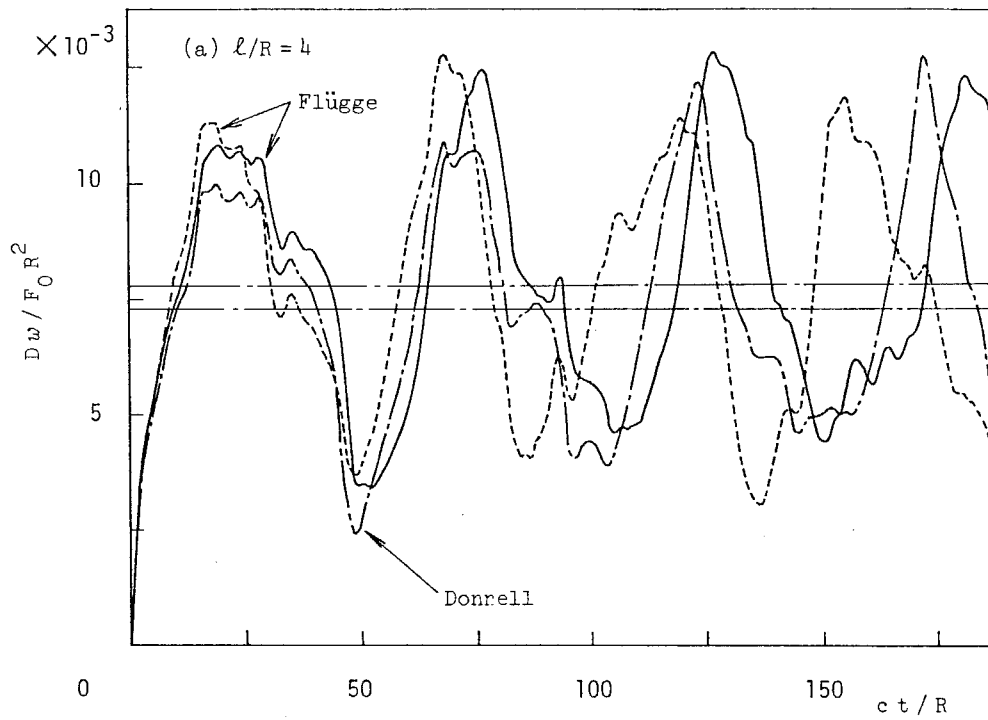


図3.23 両縁自由支持円筒殻の荷重点に生ずるたわみの時間変動

[集中荷重, $h/R = 0.05$, $\alpha = \theta = 0$, $n = 40$, $m = 60$
 ——— 面内並進慣性考慮, ----- 同無視, - - - 静的結果]

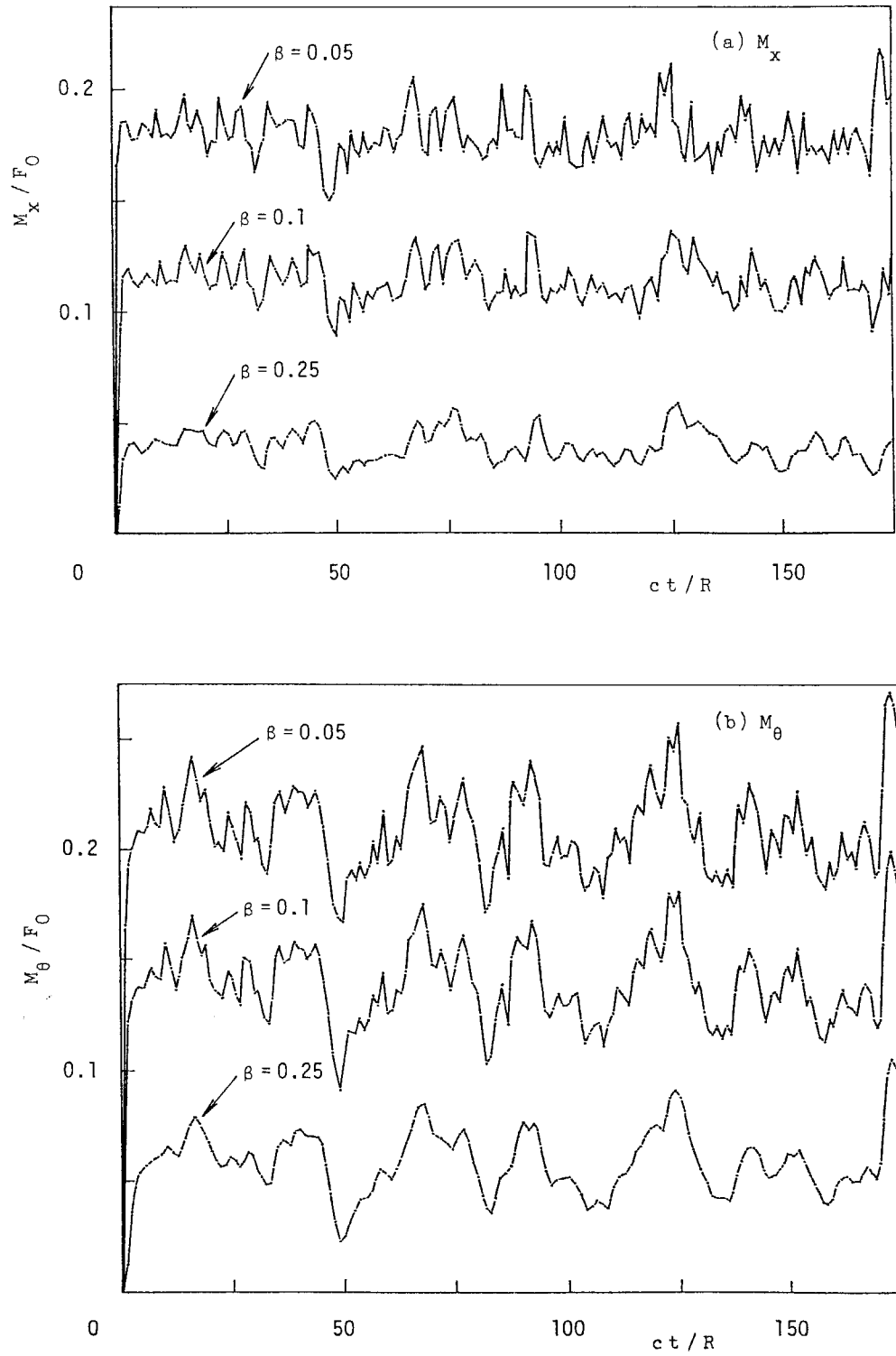


図3.24 両縁自由支持円筒殻の荷重点に生ずる曲げモーメントの時間変動
〔部分分布荷重, $h/R=0.05$, $l/R=4$, $x=\theta=0$, $\beta=\beta_x=\beta_\theta$ 〕
〔 $F_0=4\beta^2R^2P_0$, 面内並進慣性無視のFlügge理論〕

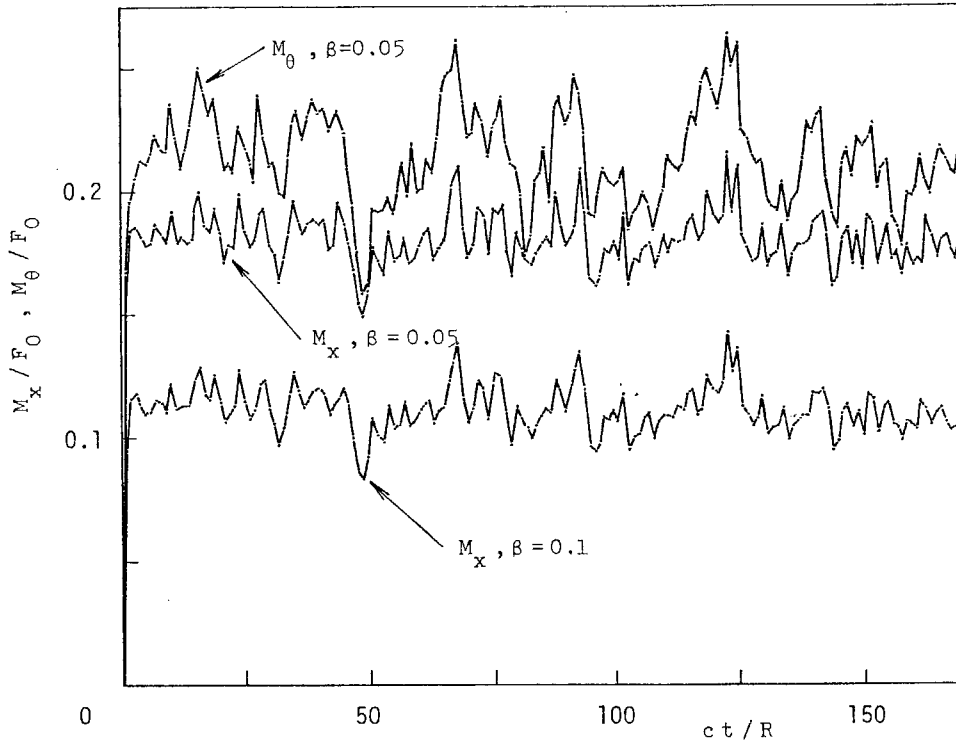


図3.25 両縁自由支持円筒殻の荷重点に生ずる曲げモーメントの時間変動

〔部分分布荷重, $h/R=0.05$, $l/R=4$, $x=\theta=0$, $\beta=\beta_x=\beta_\theta$
 $F_0=4\beta^2R^2P_0$, $n=m=190$, 面内並進慣性無視のDonnell理論〕

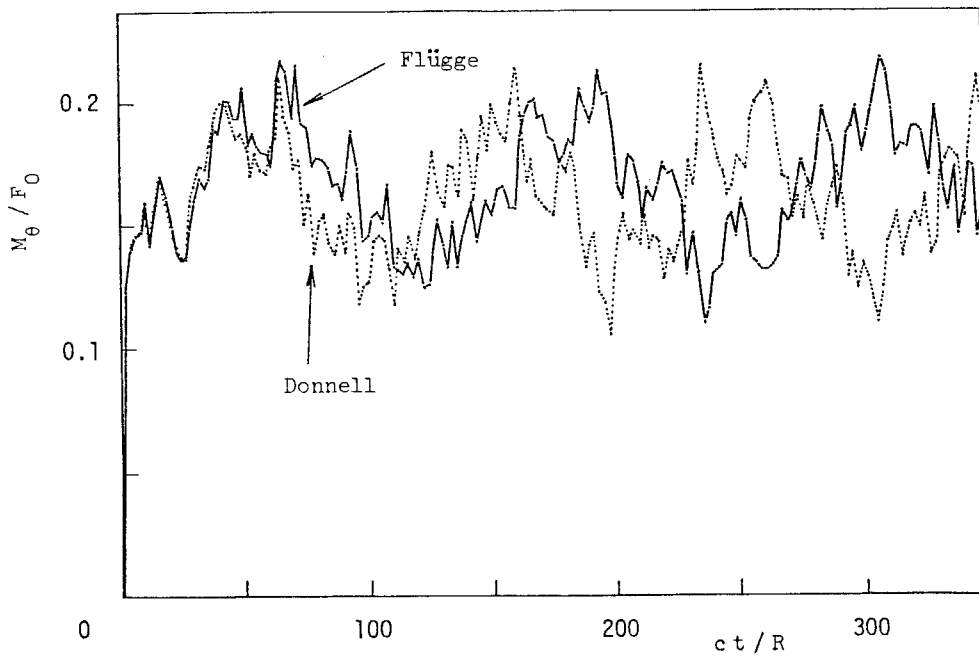


図3.26 両縁自由支持円筒殻の荷重点に生ずる曲げモーメントの時間変動

〔部分分布荷重, $h/R=0.05$, $l/R=8$, $x=\theta=0$, $\beta=\beta_x=\beta_\theta=0.1$
 $F_0=4\beta^2R^2P_0$, $n=m=100$, 面内並進慣性無視〕

次に両縁自由の有限長円筒殻の場合の結果を示す。

図 3.27 および 3.28 は集中荷重の場合で、荷重点における半径方向変位および荷重点から少し離れた点における曲げモーメントを面外並進慣性だけを考慮した Donnell の理論により計算したものである。変動の最長周期は円筒殻の長さに関係なく式 (3.67) における $n=2$ の場合の λ_0 によるものであり、これは薄肉円環の $\cos 2\theta$ 状のモードを有する固有周期と一致している。したがって、円筒殻が短いほどこの λ_0 ($n=2$) による振動が支配的となってくる。遂に円筒殻が長くなり $l/R=4$ 程度になると、無限長の場合に近い波形となってくる。曲げモーメントは荷重点から離れると M_x が急激に減少するので、 M_θ の方がはるかに大きくなる。

次に両縁固定の有限長円筒殻の場合の結果を示す。

図 3.29, 3.30, 3.31 および 3.32 は集中荷重の場合で、荷重点における半径方向変位および固定縁における曲げモーメントを Flugge と Donnell の理論により計算したものである。

円筒殻が短く $l/R=2$ であれば、理論間の差も面内並進慣性の影響も小さく 5% 程度である。両縁固定では両縁自由の場合と異なり、 $l/R=4$ ではまだ無限長円筒殻の波形には近づいていない。円筒殻が短い領域では、変動周期は長さの影響を強く受ける。固定部に近づくと曲げモーメントの大小関係が逆転し、 M_θ より M_x の方が大きくなる。

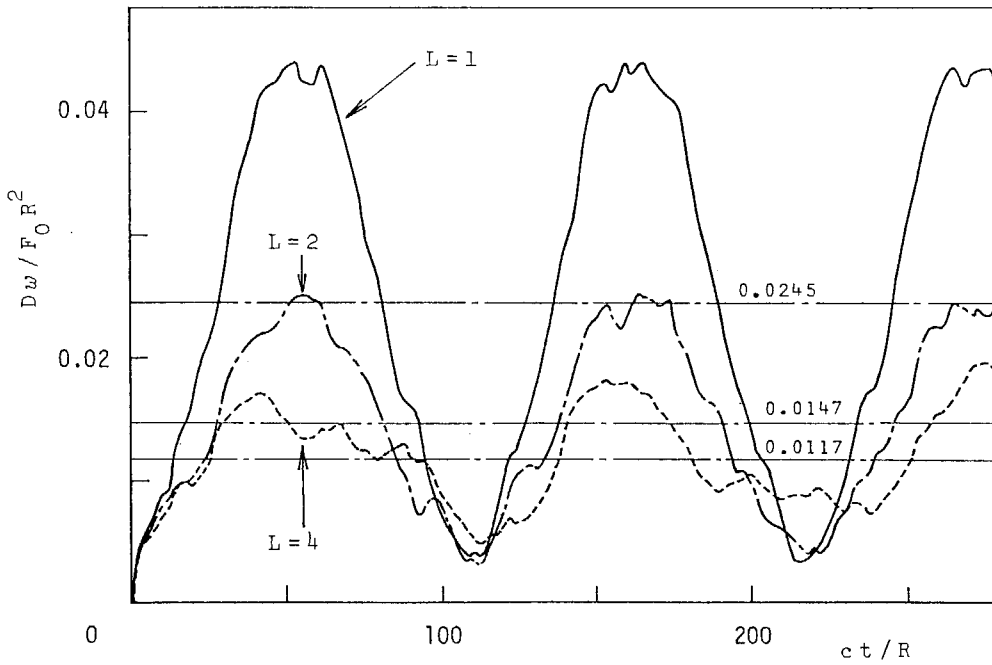


図3.27 両縁自由円筒殻の荷重点に生ずるたわみの時間変動
〔集中荷重, $h/R=0.05$, $L=l/R$, $x=\theta=0$ 〕
〔面内並進慣性無視のDonnell理論, — — — 静的結果〕

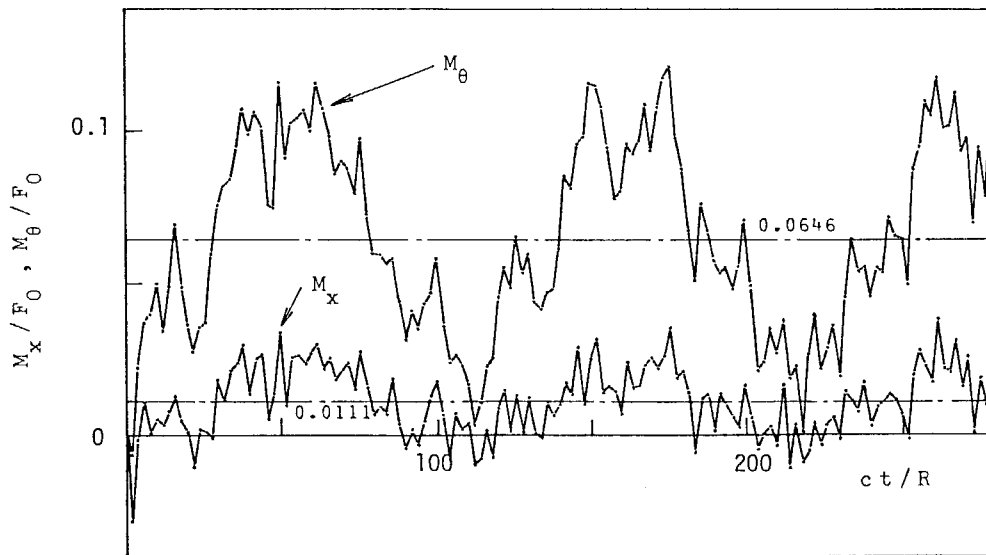


図3.28 両縁自由円筒殻に生ずる曲げモーメントの時間変動
〔集中荷重, $h/R=0.05$, $l/R=2$, $x/R=0.5$; $\theta=0$ 〕
〔面内並進慣性無視のDonnell理論, — — — 静的結果〕

(194)

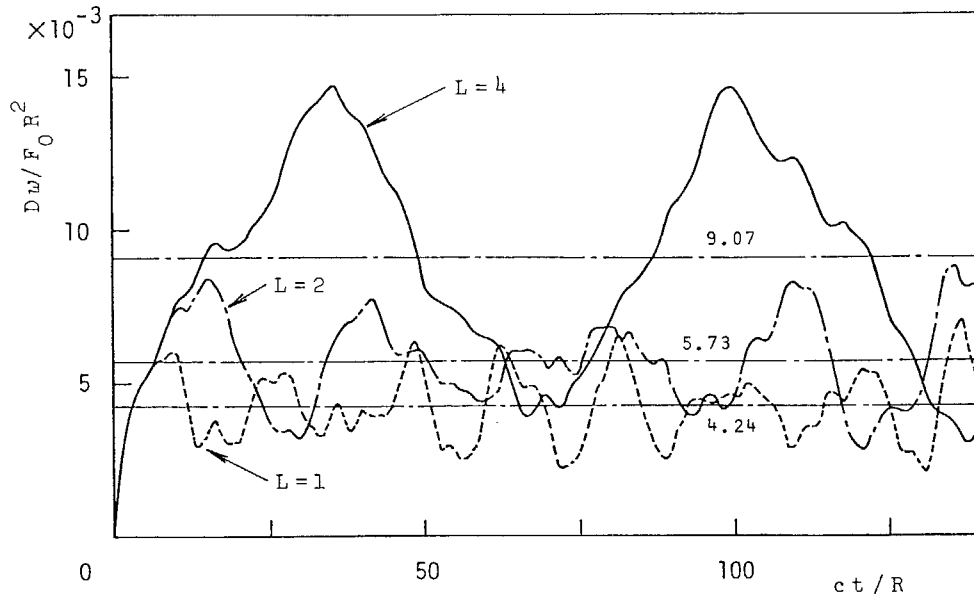


図 3.29 両縁固定円筒殻の荷重点に生ずるたわみの時間変動
 [集中荷重, $h/R=0.05$, $L=l/R$, $x=\theta=0$
 面内並進慣性無視の Donnell 理論, — — — 静的結果]

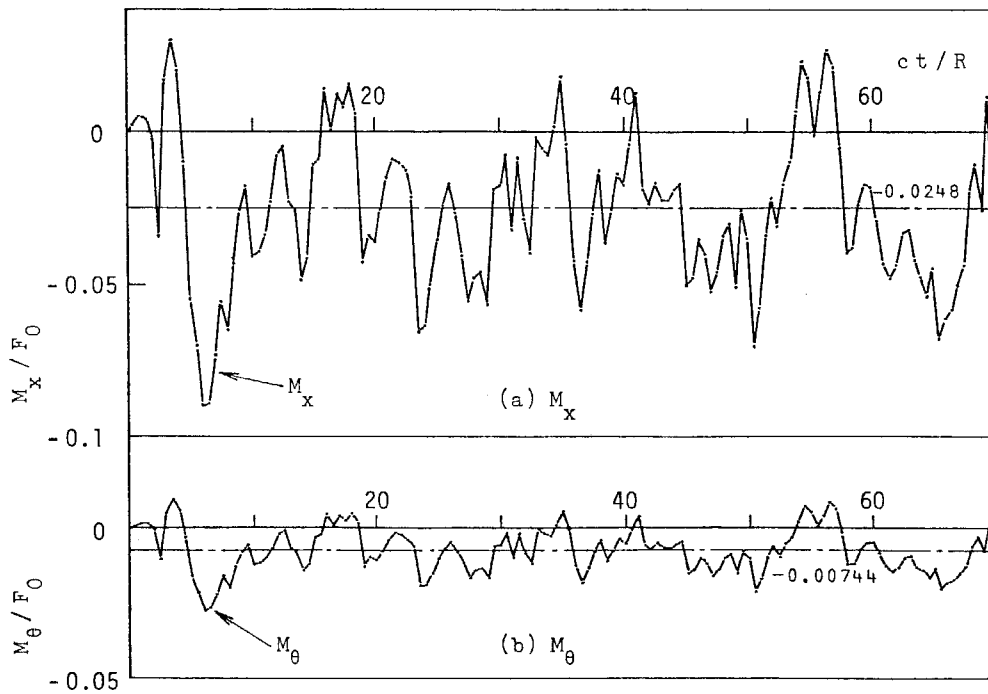


図 3.30 両縁固定円筒殻の固定縁に生ずる曲げモーメントの時間変動
 [集中荷重, $h/R=0.05$, $l/R=1$, $x=l$; $\theta=0$
 面内並進慣性無視の Donnell 理論, — — — 静的結果]

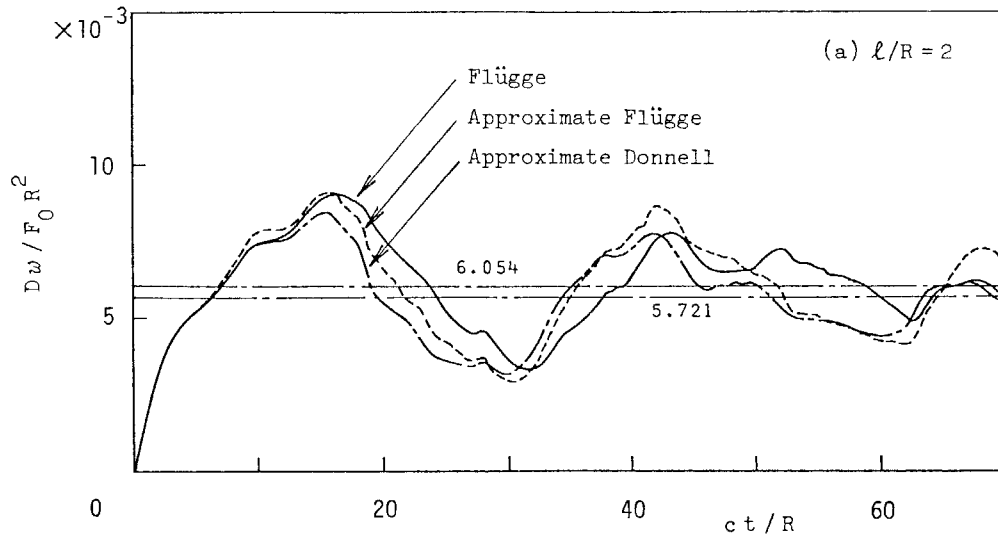


図 3.31 両縁固定円筒殻の荷重点に生ずるたわみの時間変動

集中荷重, $h/R=0.05$, $l/R=2$, $x=\theta=0$
 — 面内並進慣性考慮の Flügge 理論, - - - 同無視の Flügge
 - · - 同無視の Donnell 理論・静的結果

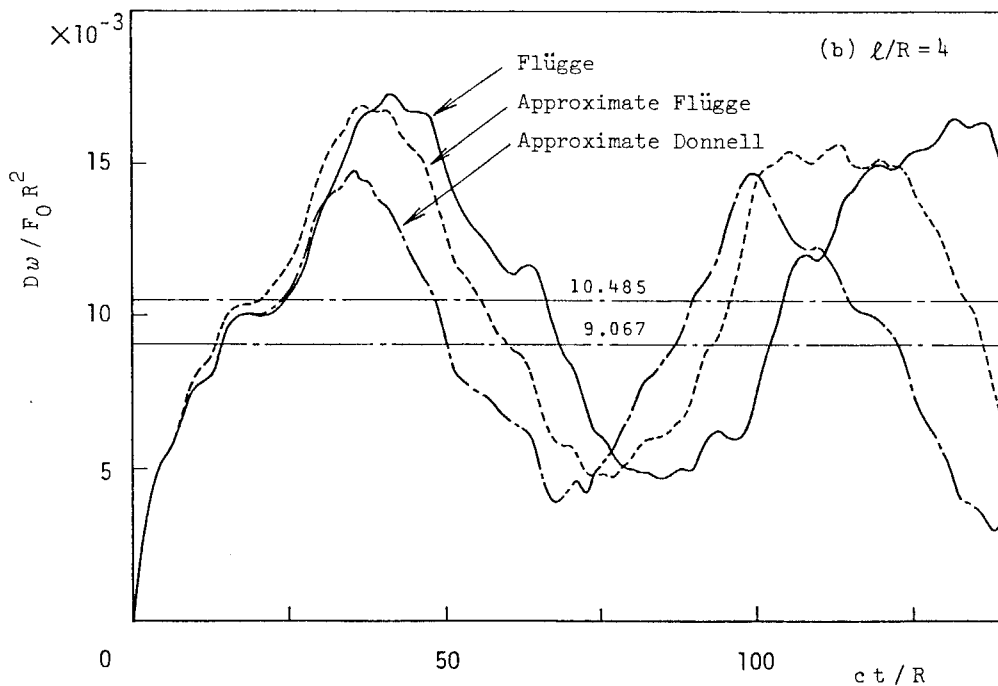


図 3.32 両縁固定円筒殻の荷重点に生ずるたわみの時間変動

集中荷重, $h/R=0.05$, $l/R=4$, $x=\theta=0$
 — 面内並進慣性考慮の Flügge 理論, - - - 同無視の Flügge 理論
 - · - 同無視の Donnell 理論・静的結果

最後に、荷重変動がステップ関数以外の場合について計算を行った。

図3.33 および3.34 は部分分布荷重が三角形と正弦状のパルス状に作用した場合で、荷重点における曲げモーメントを無限長および両縁自由支持の円筒殻について計算したものである。荷重点における曲げモーメントは荷重変動の波形とほぼ相似な波形で応答するのが、特徴である。荷重が零となつてからの変動の振幅は荷重が作用している間の最大応答に比べて著しく小さくなる。この傾向は、円筒殻の形状や境界条件あるいは理論によって影響をうけない。

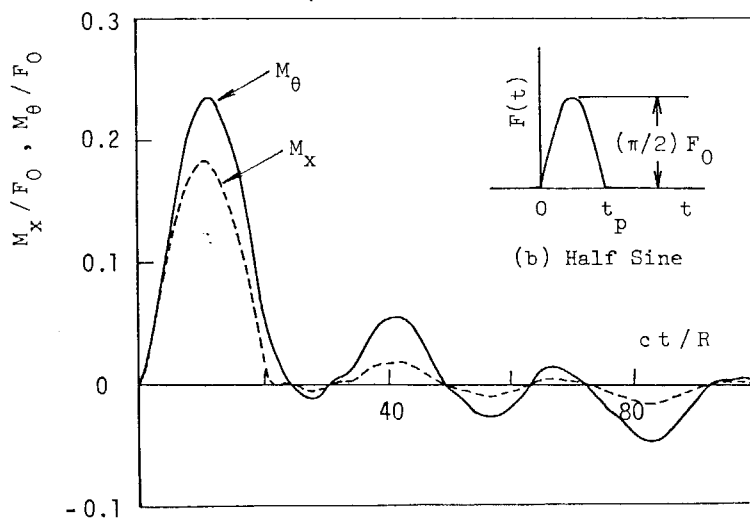
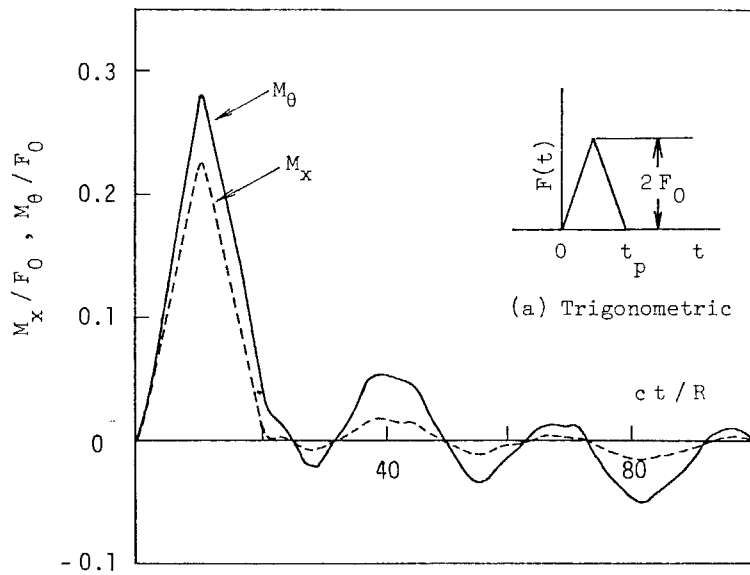


図3.33 三角形および正弦波のパルス状荷重をうける無限長円筒殻に生ずる曲げモーメントの時間変動

$\left[\begin{array}{l} \text{部分分布荷重, } \epsilon/R = 0.05, \alpha = \theta = 0, ct_p/R = 20 \\ \beta = \beta_x = \beta_\theta = 0.1, F_0 = 4\beta^2 R^2 P_0, \pi = 60 \\ \text{面内並進慣性無視の Donnell 理論} \end{array} \right]$

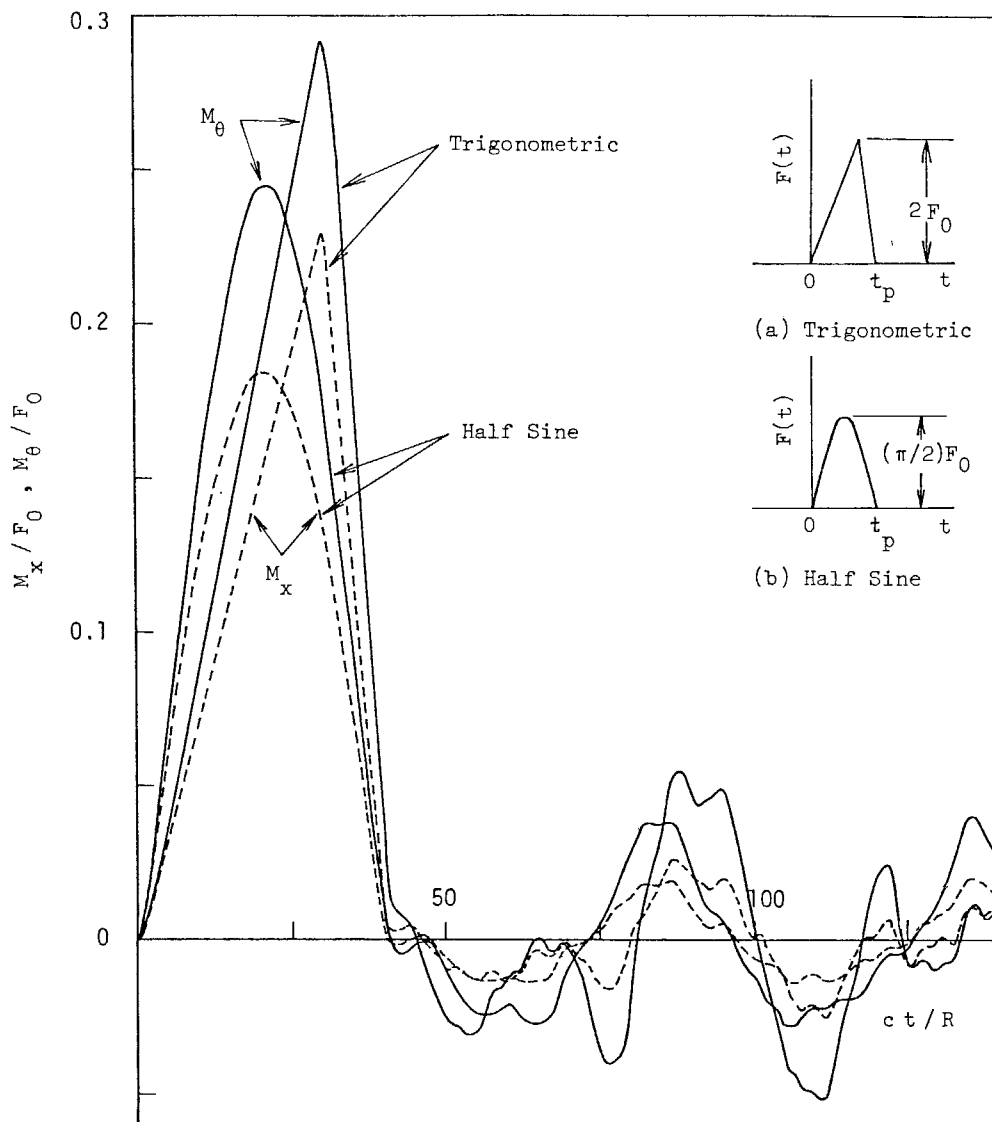


図 3.34 三角形および正弦波のパルス状荷重をうける
 両縁自由支持円筒殻に生ずる曲げモーメントの時間変動

$\left[\begin{array}{l} \text{部分分布荷重, } h/R=0.05, l/R=4, x=\theta=0 \\ \beta=\beta_x=\beta_\theta=0.1, F_0=4\beta^2R^2P_0, ct_p/R=40 \\ \text{面内並進慣性無視の Flügge 理論} \end{array} \right]$

3.7 結 言

本章では、円筒殻の曲げに関する問題のうち局部変形が支配的な例題として、集中衝撃荷重あるいは部分分布衝撃荷重をうける円筒殻の問題を取り上げ、その衝撃応力を主にラプラス変換法を用いて解析した。両縁における境界条件には無限長・自由支持・自由および固定の4種類を対象とし、基礎理論には Mirsky-Herrmann, Flügge および Donnell の三種類を用いた。そのために本章は、不本意ながら大変に長くなってしまった。対象とした境界条件ならびに理論はいずれにも特徴があり、省略するのは惜しい気がしたので、冗長となるのを覚悟で単調な記述を続けた。反面、どのような場合に対しても本章のどこかを参照してもらえば、必ず役に立つものと思っている。最後に、本章で得られた主要な成果を箇条書きにしてまとめておく。

(1) 本章で示した解析方法を踏襲すれば、集中衝撃荷重または部分分布荷重をうける円筒殻の問題は任意の境界条件のもとで解析可能である。

もちろん、荷重の作用する位置ならびに荷重の数や時間変動の如何んによらないことは言うまでもない。

(2) 集中荷重の問題を面外方向せん断変形を考慮した修正理論により解析すると、荷重点における変位および合応力成分はいずれも発散し、数値計算を行うことができない。

中心軸の変形を伴わない円筒殻の局部変形問題では、荷重点における応答が最も重要である。にもかかわらず最も

重要な位置で数値計算を行うことができないのは大変に不都合である。残念ながら、この種の問題に対しては修正理論を用いても利点はないように思われる。

しかし、集中荷重でなく分布荷重の場合すなわち荷重の分布面積が零でない場合であれば、いずれの量も有限値に収束する。

- (3) 面外方向せん断変形を無視した古典理論により解析すると、集中荷重の作用点において合応力成分については発散するが、変位成分は発散せず数値計算を行うことができる。修正理論よりはるかに簡単な古典理論の方が都合が良いとは皮肉としか言い方がない。

一方、合応力成分の発散を防ぐには、殻理論の基礎となっているいわゆる Kirchhoff-Love の仮定そのものを排除して殻の肉厚方向ひずみや横断面のゆがみを考慮して修正した理論を考えなければならぬであろう。

- (4) 古典理論である Flugge と Donnell の両理論における差は円筒殻の長さの影響を強く受ける。短い円筒殻に対しては、Donnell の理論は Flugge の理論とまったく同等である。しかし、円筒殻が長くなると静的解・振幅・周期のいずれについても誤差が増大するが、しばらくすると誤差が一定となり無限長の場合における最大誤差と一致する。

この傾向は円筒殻の肉厚によらない。

Donnell の理論による誤差は変位成分より合応力成分の方が小さい。

- (5) 面内並進振動性は応答の周期に強く影響する。しかし、円筒殻が短くなるとこの影響も小さくなる傾向にある。

本章で取り扱った理論の範囲では、円筒殻が短くなるとすべての理論が一致する傾向があり、極論すれば最も簡単な理論でよいことになる。しかし、面内並進慣性を無視した理論の使用には注意を払った方が無難である。

- (6) 荷重点から縁までの距離がある程度以上離れていれば、静的結果はもちろん応答波形においても境界条件の影響はほとんどなくなり、無限長の場合の結果とほぼ一致する。しかし、この距離は円筒殻の肉厚が薄ければ長くなる。
- (7) 部分分布荷重のもとで荷重点における合応力の時間変動を計算したところ、荷重の時間変動波形とほぼ相似な波形で応答する特徴が見られた。

参 考 文 献

- [1] Yuan, S. W., Thin Cylindrical Shells Subjected to Concentrated Loads, *Quart. Appl. Math.*, Vol. 4, No. 1 (1946), pp. 13-26.
- [2] Yuan, S. W. & Ting, L., On Radial Deflections of a Cylinder Subjected to Equal and Opposite Concentrated Radial Loads, *J. Appl. Mech.*, Vol. 24, No. 2 (1957), pp. 278-282.
- [3] Hoff, N. J., Kempner, J. & Pohle, F. V., Line Load Applied Along Generators of Thin-Walled Circular Cylindrical Shells of Finite Length, *Quart. Appl. Math.*, Vol. 11, No. 4 (1954), pp. 411-425.
- [4] Sheng, J. & Kempner, J., Residual Analysis for Circular Cylindrical Shells under Segmental Line-Load, *AIAA J.*, Vol. 1, No. 11 (1963), pp. 2558-2564.
- [5] Seide, P., Effect of Internal Pressure on an Infinite Cylindrical Shell Subjected to Concentrated Radial Loads, Vol. 7, No. 10 (1969), pp. 1944-1949.
- [6] Yao, J. C., Long Cylindrical Tube Subjected to Two Diametrically Opposite Loads, *Aeron. Quart.*, Vol. 20, (1969), pp. 365-381.
- [7] Yao, J. C., An Analytical and Experimental Study of Cylindrical Shells under Localised Impact Loads, *Aeron. Quart.*, Vol. 17, No. 1 (1966), pp. 72-82.

- [8] Liao, E. N. K. & Kessel, P. G., Dynamic Response of Cylindrical Shells With Initial Stress and Subjected to General Three-Dimensional Surface Loads, *Trans. ASME, Ser. E, Vol. 38, No. 4 (1971), pp. 978-986.*
- [9] Weingarten, L. I. & Reismann, H., *ZAMM, Vol. 54, No. 3 (1974), pp. 181-191.*
Forced Motion of Cylindrical Shells — A Comparison of Shell Theory with Elasticity Theory.
- [10] Bushnell, D., Dynamic Response of Two-Layered Cylindrical Shells to Time-Dependent Loads, *AIAA J., Vol. 3, No. 9 (1965), pp. 1698-1703.*
- [11] Liao, E. N. K. & Kessel, P. G., Response of Pressurized Cylindrical Shells Subjected to Moving Loads, *Trans. ASME, Ser. E, Vol. 39, No. 1 (1972), pp. 227-234.*
- [12] 白川馨, 浅野憲治, 集中衝撃力を受ける円筒かくの動的応答, *機論, 43巻, 370号 (昭52), 2064-2070.*

(204)

第 4 章

はり状曲げ衝撃をうける円筒殻

4.1	緒 言	206
4.2	Mirsky-Herrmann の理論による解析	209
4.3	Flügge の理論による解析	221
4.4	Donnell の理論による解析	232
4.5	数値結果	235
4.6	結 言	258
	参 考 文 献	262

4.1 緒 言

円筒殻の曲げに関する問題は、外力の加わり方によって局部変形が支配的な場合と円筒殻の中心軸がたわむはり状変形が支配的な場合とに大別することができる。

前者に関連した問題については、第3章で取り上げ詳細に記述した。本章では後者の問題に関連して、先端に衝撃荷重をうける片持ち円筒殻の問題を対象とし、はり状曲げ衝撃問題に対する解析方法と解析結果に及ぼす基礎理論の影響を明らかにすることを目的とした。

円筒殻のはり状曲げは、貯蔵用タンク・各種配管および建築部材の自重や外力に対する強度あるいは風や地震などに起因する各種の振動に対する強度に関連して、しばしば問題となる。しかし、この場合の変形や応力あるいは振動はほとんどの場合はり理論により近似的に解析されるのが現状であり、短い円筒殻に対してはその精度の保証は得られていない。

より正確な円筒殻理論により解析された例は、まだ研究論文にたまに見られる程度である。たとえば溝口は、先端が支持された片持ち円筒殻の固定縁を平行移動させる問題について溝口の円筒殻理論に基づいて解析し、はり理論による近似解と比較して両者はたわみについてはほぼ一致するが、応力については著しく異なることを明らかにしている。^[1] また、風圧をうける煙突の問題を、Rish は膜理論と伸びなし理論を組み合わせて解析し、^[2] Krajeinovic は膜理論に似た Vlasov の理論により解析している。^[3] その後、Rish の問題について

Gopalacharyulu は Donnell の理論を用いて解析し、前述の解の信頼性に対して疑問を提起した。^[4] ところが円筒殻理論にも、このような中心軸の変形を伴う問題に対して適用すると精度に問題の生ずる理論がある。このことは第2章 (p.2-86参照) で触れたとおりであり、理論の選択には注意を払わなければならない。特に動的な場合では、構成方程式の相違による特性だけでなく、殻の面内並進慣性や回転慣性などによる特性も問題となり、検討すべき事項が多い。にもかかわらず、この種の問題に対する円筒殻理論に基づいた動的な解析は、従来ほとんど行われていない。

本章では、図4.1のように長さ l の片持ち円筒殻の先端の自由縁に沿って余弦状に分布した面外方向線荷重 $g_1 \cos \theta$ と正弦状に分布した面内方向線荷重 $g_2 \sin \theta$ がステップ関数状に作用するはり状曲げ衝撃問題を取り上げた。

解析には第3章の局部変形問題と同様に、修正理論として Mirsky-Herrmann の理論を、古典理論として Flügge および Donnell の理論をそれぞれ用いた。図4.1の片持ち円筒殻の問題では、局部変形問題とは異なり荷重点から最も離れた位置である固定縁における応答が重要になる。したがって、各種慣性の影響が特に問題になるものと予想される。そこで、Flügge の理論については並進と回転の慣性をすべて考慮した式、回転慣性だけを無視した式および回転と面内並進の慣性をともに無視した式の三種類を用いた。そして、はり状曲げ衝撃問題に対する各理論固有の解析方法を示すとともに、解析結果に及ぼす理論の影響を明らかにして、基礎理論選択のための指針を示した。すなわち、Mirsky-Herrmann と Flügge の

理論を比較することにより面外方向せん断変形の影響が、Flügge の三理論を比較することにより各慣性の影響が、さらに Flügge と Donnell の理論を比較することにより Donnell の理論の精度がそれぞれ明らかになるものと思われる。

最後に、本章で用いられる各理論と主要な因子の有無を表 4.1 にまとめておく。

表 4.1 本章で用いられる理論の一覧表(○考慮, ×無視)

因子	面外方向 せん断変形	回転慣性	面内並進 慣性	面外並進 慣性
Mirsky-Herrmann	○	○	○	○
Flügge	I	×	○	○
	II	×	×	○
	III	×	×	×
Donnell	×	×	○	○

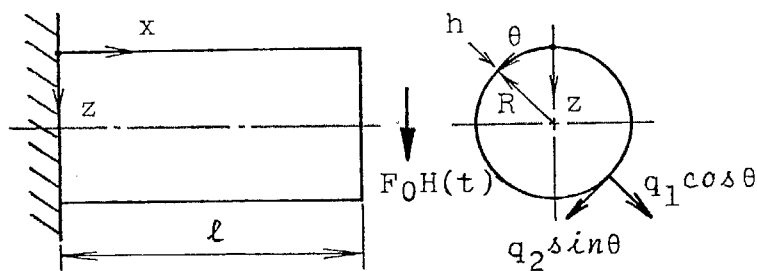


図 4.1 先端に衝撃荷重をうける片持ち円筒殻

4.2 Mirsky-Herrmann の理論による解析

図 4.1 のように平均半径 R , 肉厚 h , 長さ l の片持ち円筒殻の先端の自由縁に沿って余弦状に分布した面外方向せん断力 g_1 と正弦状に分布した面内方向せん断力 g_2 がステップ関数状に同時に作用する問題では, 境界条件は修正理論によると次のようになる。

(i) 固定縁 ($x = 0$) において

$$u = \psi_x = v = \psi_\theta = w = 0 \quad (4.1a)$$

(ii) 自由縁 ($x = l$) において

$$N_x = M_x = M_{x\theta} = 0 \quad (4.1b)$$

$$Q_x = g_1 \cos \theta H(t) \quad (4.1c)$$

$$N_{x\theta} = g_2 \sin \theta H(t) \quad (4.1d)$$

ここで, $H(t)$ は単位関数である。

そこで荷重状態を考慮して, 殻の中央面上の変位成分 (u, v, w) および断面の傾き角成分 (ψ_x, ψ_θ) の変数分離解を

$$u/R = U \cos \theta \quad (4.2a) \quad \psi_x = \Psi_x \cos \theta \quad (4.2b)$$

$$v/R = V \sin \theta \quad (4.2c) \quad \psi_\theta = \Psi_\theta \sin \theta \quad (4.2d)$$

$$w/R = W \cos \theta \quad (4.2e)$$

のように置き, (U, V, W) および (Ψ_x, Ψ_θ) は座標 x と時間 t の関数とする。変位および変位速度が零とした初期条件

$$(f)_{t=0} = (\partial f / \partial t)_{t=0} = 0 \quad (4.3)$$

が成立するものとする。そして Mirsky-Herrmann の理論による変位の方程式 (2.30) に式 (4.2) を代入し, ラプラス変換を行えば以下のような変位成分と傾き角成分のラプラス変換形

(210)

$(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ および $(\bar{\Psi}_x, \bar{\Psi}_0)$ に関する5元連立常微分方程式が得られる。

$$\left\{ \frac{d^2}{d\xi^2} - (1+k^2)\rho_1 - \lambda^2 \right\} \bar{U} + k^2 \left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \rho_1 - \lambda^2 \right) \bar{\Psi}_x + \rho_2 \frac{d\bar{V}}{d\xi} - \nu \frac{d\bar{W}}{d\xi} = 0 \quad (4.4a)$$

$$k^2 \left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \rho_1 - \lambda^2 \right) \bar{U} + \left\{ k^2 \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \rho_1 - \lambda^2 \right) - k_x \rho_1 \right\} \bar{\Psi}_x + k^2 \rho_2 \frac{d\bar{\Psi}_0}{d\xi} + k_x \rho_1 \frac{d\bar{W}}{d\xi} = 0 \quad (4.4b)$$

$$\rho_2 \frac{d\bar{U}}{d\xi} - \left(\rho_1 \frac{d^2}{d\xi^2} - \rho_3 - \lambda^2 \right) \bar{V} - \left(k^2 \rho_1 \frac{d^2}{d\xi^2} + \rho_4 - k^2 \lambda^2 \right) \bar{\Psi}_0 - \rho_3 \bar{W} = 0 \quad (4.4c)$$

$$k^2 \rho_2 \frac{d\bar{\Psi}_x}{d\xi} - \left(k^2 \rho_1 \frac{d^2}{d\xi^2} + \rho_4 - k^2 \lambda^2 \right) \bar{V} - \left(k^2 \rho_1 \frac{d^2}{d\xi^2} - \rho_4 - k^2 \lambda^2 \right) \bar{\Psi}_0 + \rho_4 \bar{W} = 0 \quad (4.4d)$$

$$-\nu \frac{d\bar{U}}{d\xi} + k_x \rho_1 \frac{d\bar{\Psi}_x}{d\xi} - \rho_3 \bar{V} + \rho_4 \bar{\Psi}_0 - \left(k_x \rho_1 \frac{d^2}{d\xi^2} - \rho_3 - \lambda^2 \right) \bar{W} = 0 \quad (4.4e)$$

式(4.4)からは ξ に関して10階の常微分方程式が得られるので $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ および $(\bar{\Psi}_x, \bar{\Psi}_0)$ の一般解を

$$\begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{\Psi}_x \\ \bar{V} \\ \bar{\Psi}_0 \\ \bar{W} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{10} \begin{bmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \\ 1 \end{bmatrix} c_j e^{\alpha_j \xi} \quad (4.5)$$

と置くことにする。式(4.5)を式(4.4)に代入すれば

$$\begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.6)$$

となる。ここで、 $[A]$ は5次の対称行列であり、 k 行 l 列の成分 a_{kl} は次のようになる。

$$a_{11} = -\alpha_j^2 + \lambda^2 + (1 + \kappa^2)P_1, \quad a_{12} = -\kappa^2(\alpha_j^2 - \lambda^2 + P_1), \quad a_{13} = -P_2\alpha_j$$

$$a_{14} = 0, \quad a_{15} = \nu\alpha_j, \quad a_{22} = -\kappa^2(\alpha_j^2 - \lambda^2 - P_1) + \kappa_x P_1, \quad a_{23} = 0$$

$$a_{24} = -\kappa^2 P_2 \alpha_j, \quad a_{25} = -\kappa_x P_1 \alpha_j, \quad a_{33} = P_1 \alpha_j^2 - \lambda^2 - P_3$$

$$a_{34} = \kappa^2(P_1 \alpha_j^2 - \lambda^2) + P_4, \quad a_{35} = P_3, \quad a_{44} = \kappa^2(P_1 \alpha_j^2 - \lambda^2) - P_4$$

$$a_{45} = -P_4, \quad a_{55} = \kappa_x P_1 \alpha_j^2 - \lambda^2 - P_3$$

したがって、 α_j ($j=1, \dots, 10$)は特性方程式 $|A|=0$ の相異なる10根であり、係数 (e_j, f_j, g_j, h_j) は式(4.6)から導かれる次の方程式を解くことにより得られる。

$$\begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu\alpha_j \\ \kappa_x P_1 \alpha_j \\ -P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

ここで、行列 $[A_{55}]$ は行列 $[A]$ の5行5列に関する4次の小行列である。係数 c_j は $x=0$ および l における合計10個の境界条件すなわち式(4.1)によって決まる定数である。

特性方程式 $|A|=0$ は1および2行目を α_j で除し、1および2列目に α_j を乗ずると次のように成分はすべて α_j に関して2次と0次の項の和になる。

(212)

$$\begin{vmatrix} r_{11}\alpha_j^2 + s_{11} & \dots & r_{15}\alpha_j^2 + s_{15} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{51}\alpha_j^2 + s_{51} & \dots & r_{55}\alpha_j^2 + s_{55} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.8)$$

ここで、 l 行 l 列の成分 r_{ll} および s_{ll} は次のとおりである。

$$r_{11} = -1, \quad r_{12} = -k^2, \quad r_{13} = r_{14} = r_{15} = 0, \quad r_{21} = r_{22} = -k^2$$

$$r_{23} = r_{24} = r_{25} = 0, \quad r_{31} = -p_2, \quad r_{32} = 0, \quad r_{33} = p_1, \quad r_{34} = k^2 p_1$$

$$r_{35} = r_{41} = 0, \quad r_{42} = -k^2 p_2, \quad r_{43} = r_{44} = k^2 p_1, \quad r_{45} = 0, \quad r_{51} = v$$

$$r_{52} = -k_x p_1, \quad r_{53} = r_{54} = 0, \quad r_{55} = k_x p_1$$

$$s_{11} = (1+k^2)p_1 + \lambda^2, \quad s_{12} = -k^2(p_1 - \lambda^2), \quad s_{13} = -p_2, \quad s_{14} = 0$$

$$s_{15} = v, \quad s_{21} = -k^2(p_1 - \lambda^2), \quad s_{22} = (k^2 + k_x)p_1 + k^2 \lambda^2, \quad s_{23} = 0$$

$$s_{24} = -k^2 p_2, \quad s_{25} = -k_x p_1, \quad s_{31} = s_{32} = 0, \quad s_{33} = -p_3 - \lambda^2$$

$$s_{34} = p_4 - k^2 \lambda^2, \quad s_{35} = p_3, \quad s_{41} = s_{42} = 0, \quad s_{43} = p_4 - k^2 \lambda^2$$

$$s_{44} = -p_4 - k^2 \lambda^2, \quad s_{45} = -p_4, \quad s_{51} = s_{52} = 0, \quad s_{53} = p_3,$$

$$s_{54} = -p_4, \quad s_{55} = -p_3 - \lambda^2$$

式(4.8)を α_j^2 について展開すると、特性方程式 $|A| = 0$ は最終的に次のような形式をとる。

$$a_{10}\alpha^{10} + a_8\alpha^8 + a_6\alpha^6 + a_4\alpha^4 + a_2\alpha^2 + a_0 = 0 \quad (4.9)$$

$$\text{ここで, } a_{10} = |X^{(10)}|, \quad a_8 = \sum_{j=1}^5 |X_j^{(8)}|, \quad a_6 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^5 |X_{ij}^{(6)}|$$

$$a_4 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^5 |X_{ij}^{(4)}|, \quad a_2 = \sum_{j=1}^5 |X_j^{(2)}|, \quad a_0 = |X^{(0)}|$$

であり、 $[X^{(10)}]$, $[X_j^{(8)}]$, $[X_{ij}^{(6)}]$, $[X_{ij}^{(4)}]$, $[X_j^{(2)}]$, $[X^{(0)}]$ は5次の行列であり、 l 行 l 列の成分をそれぞれ $\chi_{ll}^{(10)}$, $\chi_{ll}^{(8)}$, $\chi_{ll}^{(6)}$, $\chi_{ll}^{(4)}$, $\chi_{ll}^{(2)}$, $\chi_{ll}^{(0)}$ とすると、以下のようになる。

$$(i) \quad \chi_{ll}^{(10)} = r_{ll}$$

$$(ii) \quad l = j \text{ のとき } \chi_{ll}^{(8)} = s_{ll}$$

- $l \neq j$ のとき $\chi_{kl}^{(8)} = \gamma_{kl}$
 (iii) $l = i$ または $l = j$ のとき $\chi_{kl}^{(6)} = S_{kl}$
 $l \neq i$ かつ $l \neq j$ のとき $\chi_{kl}^{(6)} = \gamma_{kl}$
 (iv) $l = i$ または $l = j$ のとき $\chi_{kl}^{(4)} = \gamma_{kl}$
 $l \neq i$ かつ $l \neq j$ のとき $\chi_{kl}^{(4)} = S_{kl}$
 (v) $l = j$ のとき $\chi_{kl}^{(2)} = \gamma_{kl}$
 $l \neq j$ のとき $\chi_{kl}^{(2)} = S_{kl}$
 (vi) $\chi_{kl}^{(0)} = S_{kl}$

Minsky-Herrmann の構成方程式 (2.63) を用いて境界条件式 (4.1) を (u, v, w) および (ψ_x, ψ_0) で表わし式 (4.2) を代入し, ラプラス変換した後, 一般解である式 (4.5) を代入すれば C_j を決定する係数方程式が得られ, 次のようになる。

$$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] [B] \left[\begin{array}{c} C_1 \\ \vdots \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \end{array} \right] = \frac{1}{pGh} \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_1/k_x \\ g_2 \end{array} \right] \quad (4.10)$$

ここで, $[B]$ は 10 次の行列であり, i 行 j 列の成分 b_{ij} は
 $b_{1j} = e_j, b_{2j} = f_j, b_{3j} = g_j, b_{4j} = h_j, b_{5j} = 1$
 $b_{6j} = \zeta_{1j} e^{\alpha_j L}, b_{7j} = \zeta_{2j} e^{\alpha_j L}, b_{8j} = \zeta_{3j} e^{\alpha_j L}, b_{9j} = \zeta_{4j} e^{\alpha_j L}, b_{10j} = \zeta_{5j} e^{\alpha_j L}$
 である。ここで, $L = l/R$ であり ζ_{nj} ($n=1, \dots, 5$) は

$$\zeta_{1j} = (e_j + k^2 f_j) \alpha_j + \nu g_j - \nu, \quad \zeta_{2j} = (e_j + f_j) \alpha_j + \nu h_j$$

$$\zeta_{3j} = -f_j + (g_j + h_j) \alpha_j, \quad \zeta_{4j} = -f_j + \alpha_j$$

$$\zeta_{5j} = -e_j + (g_j + k^2 h_j) \alpha_j$$

である。式 (4.10) を解けば

(214)

$$C_j = \frac{1}{G\hbar} \frac{1}{p|B|} \left\{ \frac{\delta_1}{k_x} B_{qj} + \delta_2 B_{10j} \right\} \quad (4.11)$$

となる。ここで、 B_{qj} および B_{10j} はそれぞれ b_{qj} および b_{10j} に関する余因子である。式(4.11)を式(4.5)に代入すれば、 $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ および $(\bar{\Psi}_x, \bar{\Psi}_\theta)$ の解が定まり、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{\Psi}_x \\ \bar{V} \\ \bar{\Psi}_\theta \\ \bar{W} \end{pmatrix} = \frac{1}{pG\hbar|B|} \sum_{j=1}^{10} \begin{pmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ \frac{\delta_1}{k_x} B_{qj} + \delta_2 B_{10j} \right\} e^{\alpha_j \xi} \quad (4.12)$$

ラプラス逆変換は次式で定義される。

$$f = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \bar{f} e^{pt} dp \quad (a > 0) \quad (4.13)$$

本問題では、右辺の被積分関数 \bar{f} すなわち式(4.12)の右辺に相当する関数はラプラス変換パラメータ p についての一価関数であり、 p 平面の原点および虚軸上だけに極を有する。したがって、式(4.13)の複素線積分はこれらの極における留数の総和を計算することに置き換えられる。これらの極を 0 および $\pm i p_m$ ($0 < p_1 < p_2 < p_3 < \dots$) とすれば、式(4.12)のラプラス逆変換結果は、以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} U \\ \Psi_x \\ V \\ \Psi_\theta \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^s \\ \Psi_x^s \\ V^s \\ \Psi_\theta^s \\ W^s \end{pmatrix} - \frac{1}{G\hbar} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^{10} |B_k^*|} \sum_{j=1}^{10} \begin{pmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ \frac{\delta_1}{k_x} B_{qj} + \delta_2 B_{10j} \right\} e^{\alpha_j \xi} \right] \frac{\cos \lambda_m \tau}{\lambda_m} \Big|_{\lambda = i\lambda_m} \quad (4.14)$$

ここで、 $\lambda_m = R\rho_m/c$ は超越方程式 $|B| = 0$ の根として与えられ、片持ち円筒殻の m 次の無次元固有振動数である。右辺第 1 項は原点における留数に対応し、荷重が静的に作用した場合の解であるが、この留数計算は非常に複雑で大変な努力を必要とする。そこでこの静的解については、静的問題として別個に解析を行って導くことにした。その方がはるかに簡単である。その解析については後で記述する。次に、右辺第 2 項は虚軸上の極における留数の総和に対応し、各次の固有振動モードの重ね合せを意味している。

α_j は $\lambda = i\lambda_m$ と置いた場合の式 (4.9) の相異なる 10 根であり、 $[B_{\ell}^*]$ は 10 次の行列であり、 i 行 j 列の成分 b_{ij}^* は

(i) $j \neq \ell$ のとき

$$b_{ij}^* = b_{ij}$$

(ii) $j = \ell$ のとき

$$b_{1j}^* = E_j, \quad b_{2j}^* = F_j, \quad b_{3j}^* = G_j, \quad b_{4j}^* = H_j, \quad b_{5j}^* = 0$$

$$b_{6j}^* = (L\beta_j \zeta_{1j} + z_{1j}) e^{\alpha_j L}, \quad b_{7j}^* = (L\beta_j \zeta_{2j} + z_{2j}) e^{\alpha_j L}$$

$$b_{8j}^* = (L\beta_j \zeta_{3j} + z_{3j}) e^{\alpha_j L}, \quad b_{9j}^* = (L\beta_j \zeta_{4j} + z_{4j}) e^{\alpha_j L}$$

$$b_{10j}^* = (L\beta_j \zeta_{5j} + z_{5j}) e^{\alpha_j L}$$

である。ここで、 (E_j, F_j, G_j, H_j) は次式を解くことにより得られる。

$$A_{55} \begin{bmatrix} E_j \\ F_j \\ G_j \\ H_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu\beta_j \\ \kappa_x \rho_j \beta_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - D_{55} \begin{bmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

ここで、 $[A_{55}]$ および $[D_{55}]$ はそれぞれ行列 $[A]$ および $[D]$ の 5 行 5 列に関する 4 次の小行列であり、行列 $[D]$ の ℓ 行 ℓ 列

(216)

の成分 $d_{\ell l}$ は次のとおりである。

$$\begin{aligned}d_{11} &= \gamma_{11} \beta_j + 1, & d_{12} &= \gamma_{12} \beta_j + k^2, & d_{13} &= \gamma_{13} \beta_j, & d_{14} &= 0 \\d_{15} &= \gamma_{15} \beta_j, & d_{22} &= \gamma_{22} \beta_j + k^2, & d_{23} &= 0, & d_{24} &= \gamma_{24} \beta_j, & d_{25} &= \gamma_{25} \beta_j \\d_{33} &= \gamma_{33} \beta_j - 1, & d_{34} &= \gamma_{34} \beta_j - k^2, & d_{35} &= 0, & d_{44} &= \gamma_{44} \beta_j - k^2 \\d_{45} &= 0, & d_{55} &= \gamma_{55} \beta_j - 1, & d_{\ell l} &= d_{\ell l}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &= -2\alpha_j, & \gamma_{12} &= -2k^2\alpha_j, & \gamma_{13} &= -\rho_2, & \gamma_{14} &= 0, & \gamma_{15} &= \nu \\ \gamma_{22} &= -2k^2\alpha_j, & \gamma_{23} &= 0, & \gamma_{24} &= -k^2\rho_2, & \gamma_{25} &= -k_x\rho_1, & \gamma_{33} &= 2\rho_1\alpha_j \\ \gamma_{34} &= 2k^2\rho_1\alpha_j, & \gamma_{35} &= 0, & \gamma_{44} &= 2k^2\rho_1\alpha_j, & \gamma_{45} &= 0, & \gamma_{55} &= 2k_x\rho_1\alpha_j\end{aligned}$$

また, $(z_{1j}, z_{2j}, z_{3j}, z_{4j}, z_{5j})$ は

$$\begin{aligned}z_{1j} &= (E_j + k^2 F_j) \alpha_j + (e_j + k^2 f_j) \beta_j + \nu G_j \\ z_{2j} &= (E_j + F_j) \alpha_j + (e_j + f_j) \beta_j + \nu H_j \\ z_{3j} &= -F_j + (G_j + H_j) \alpha_j + (g_j + h_j) \beta_j \\ z_{4j} &= -F_j + \beta_j \\ z_{5j} &= -E_j + (G_j + k^2 H_j) \alpha_j + (g_j + k^2 h_j) \beta_j\end{aligned}$$

であり, β_j は次のように定義されるものである。

$$\beta_j = -\frac{\sum_{i=1}^5 |M_i|}{\sum_{i=1}^5 |N_i|} \quad (4.16)$$

ここで, $[M_i]$ および $[N_i]$ は 5 次の行列であり, ℓ 行 l 列の成分をそれぞれ $m_{\ell l}$ および $n_{\ell l}$ とすると次のようになる。

(i) $l \neq i$ のとき

$$m_{\ell l} = n_{\ell l} = a_{\ell l}$$

(ii) $l = i$ のとき

$$m_{\ell l} = (d_{\ell l})_{\beta_j=0}, \quad n_{\ell l} = \gamma_{\ell l}$$

静的問題に対する解析

ここでは、式(4.14)の右辺第1項に相当する静的問題の解を導く方法を示す。

静的結果は留数計算で求め難い。その原因は、 $\lambda (= \mu) = 0$ とした場合に特性方程式(4.9)における係数のうち a_2 と a_0 が零となり

$$\alpha^4(a_{10}\alpha^6 + a_8\alpha^4 + a_6\alpha^2 + a_4) = 0 \quad (4.17)$$

のような特別な形式となるためである。つまり $\alpha = 0$ の4重根をもつので、式(4.12)そのままの形では $\lambda = 0$ における留数が不定形となってしまふからである。この状態は、円筒殻のはり状曲げ問題を扱うと必ず起こるので、この場合に対する対処の方法を確立しておく必要がある。

特性方程式(4.17)は次の二種類の方程式となる。

$$a_{10}\alpha^6 + a_8\alpha^4 + a_6\alpha^2 + a_4 = 0 \quad (4.18a)$$

$$\alpha^4 = 0 \quad (4.18b)$$

すなわち静的問題では、変位成分(U, V, W)および断面の傾き角成分(Ψ_x, Ψ_θ)に対する一般解は、式(4.18a)の相異なる6個の特性根を用いた指数関数による解と ξ についての3次の多項式による解との和で表されるなければならない。すなわちはり状曲げ変形の静的問題に対しては、一般解は

$$\begin{bmatrix} U \\ \Psi_x \\ V \\ \Psi_\theta \\ W \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^6 \begin{bmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \\ 1 \end{bmatrix} c_j e^{\alpha_j \xi} + \sum_{j=7}^{10} \begin{bmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \\ 1 \end{bmatrix} c_j \xi^{j-7} \quad (4.19)$$

(218)

となる。ここで、 $\alpha_j (j=1, \dots, 6)$ は特性方程式(4.18a)の相異なる6根であり、定係数(a_{10}, \dots, a_4)は式(4.9)で定義したものに $\lambda=0$ を代入したものである。係数(e_j, f_j, g_j, h_j)は $\lambda=0$ と置いた基礎方程式(4.4)により決まり次のとおりである。

(i) $j=1, \dots, 6$ のとき、 $\lambda=0$ とした場合の式(4.7)を解くことにより得られる。

(ii) $j=7, \dots, 10$ のとき

$$\left\{ \begin{array}{l} e_7 C_7 = C_8 + 3\gamma_6 C_{10} \\ e_8 C_8 = 2C_9 \\ e_9 C_9 = 3C_{10} \\ e_{10} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} f_7 C_7 = C_8 + 3\gamma_7 C_{10} \\ f_8 C_8 = 2C_9 \\ f_9 C_9 = 3C_{10} \\ f_{10} = 0 \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} g_7 C_7 = C_7 - 2\gamma_8 C_9 \\ g_8 C_8 = C_8 - 6\gamma_8 C_{10} \\ g_9 C_9 = 1 \\ g_{10} C_{10} = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} h_7 C_7 = -2\gamma_9 C_9 \\ h_8 C_8 = -6\gamma_9 C_{10} \\ h_9 = 0 \\ h_{10} = 0 \end{array} \right.$$

係数 c_j を決定する境界条件は、 $H(t) \equiv 1$ とした場合の式(4.1)である。係数方程式は次のようになる。

$$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} C_1 \\ \vdots \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \end{array} \right] = \frac{1}{Gh} \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta_1/k_x \\ \delta_2 \end{array} \right] \quad (4.20)$$

ここで、 $[B]$ は10次の行列であり、 i 行 j 列の成分 b_{ij} は表4.2のようになる。

表4.2 行列[B]の成分 b_{ij}

$i \backslash j$	1, ..., 6	7	8	9	10
1	e_j	0	1	0	$3\gamma_6$
2	f_j	0	1	0	$3\gamma_7$
3	g_j	1	0	$-2\gamma_8$	0
4	h_j	0	0	$-2\gamma_9$	0
5	1	1	0	0	0
6	$\zeta_{ij} e^{\alpha_j L}$	0	0	γ_{10}	$3L\gamma_{10}$
7	$\zeta_{zj} e^{\alpha_j L}$	0	0	γ_{12}	$3L\gamma_{12}$
8	$\zeta_{3j} e^{\alpha_j L}$	0	0	0	$-3\gamma_{13}$
9	$\zeta_{4j} e^{\alpha_j L}$	0	0	0	$-3\gamma_7$
10	$\zeta_{5j} e^{\alpha_j L}$	0	0	0	$-3\gamma_{11}$

ここで, $\gamma_1, \dots, \gamma_{13}$ は次のとおりである。

$$\gamma_1 = (1+k^2)(1+k_\theta p_1), \quad \gamma_2 = k^2 + k_\theta(1+k^2)p_1$$

$$\gamma_3 = 2\{2 - \nu p_2(1 + \gamma_1 k^2 / \gamma_2)\} / p_1, \quad \gamma_4 = k^2 + k_x(1+k^2)$$

$$\gamma_5 = \{2(2+\nu) + \gamma_3\} / \gamma_4, \quad \gamma_6 = 2(2+\nu) + k^4 \gamma_5$$

$$\gamma_7 = k^2(1+k^2)\gamma_5, \quad \gamma_8 = \nu(1+k^2), \quad \gamma_9 = \nu(1+k^2\gamma_1/\gamma_2)$$

$$\gamma_{10} = 2(1-\nu^2)(1+k^2), \quad \gamma_{11} = \gamma_6 + 2\gamma_8 + 2k^2\gamma_9$$

$$\gamma_{12} = 2(2-\nu\gamma_9), \quad \gamma_{13} = \gamma_7 + 2\gamma_8 + 2\gamma_9$$

また, $\zeta_{ij}, \dots, \zeta_{5j}$ は式(4.10)において定義したものと同形である。式(4.20)を解けば

$$c_j = \frac{1}{Gh} \frac{1}{|B|} \left\{ \frac{\delta_1}{k_x} B_{9j} + \delta_2 B_{10j} \right\} \quad (4.21)$$

となる。これを式(4.19)に代入すれば (U, V, W) および (Ψ_x, Ψ_θ) の静的解が求められ, 次のようになる。

(220)

$$\begin{pmatrix} \square \\ \Psi_x \\ \nabla \\ \Psi_\theta \\ W \end{pmatrix} = \frac{1}{Gh|B|} \left(\sum_{j=1}^6 \begin{pmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ \frac{\delta_1}{K_x} B_{qj} + \delta_2 B_{10j} \right\} e^{\alpha_j \xi} \right)$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\xi & 3(\eta_6 + \xi^2) \\ 0 & 1 & 2\xi & 3(\eta_7 + \xi^2) \\ 1 & \xi & \xi^2 - 2\eta_8 & \xi^3 - 6\eta_8 \xi \\ 0 & 0 & -2\eta_9 & -6\eta_9 \xi \\ 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 B_{q,7}/K_x + \delta_2 B_{10,7} \\ \delta_1 B_{q,8}/K_x + \delta_2 B_{10,8} \\ \delta_1 B_{q,9}/K_x + \delta_2 B_{10,9} \\ \delta_1 B_{q,10}/K_x + \delta_2 B_{10,10} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

なお、応力成分に対する解は変位成分の解を Minsky-Herrmann の構成方程式(2.15)に代入することにより容易に得られるので、ここでは記載を省略する。

4.3 Flüge の理論による解析

図 4.1 の問題では，境界条件は古典理論によると

(i) 固定縁 ($x=0$) において

$$u = v = w = \partial w / \partial x = 0 \quad (4.23a)$$

(ii) 自由縁 ($x=l$) において

$$N_x = M_x = 0 \quad (4.23b)$$

$$T_x = \delta_1 \cos \theta H(t) \quad (4.23c)$$

$$S_x = \delta_2 \sin \theta H(t) \quad (4.23d)$$

となる。ここで， T_x および S_x は面外および面内方向の有効せん断力である。そこで荷重状態を考慮して，殻の中央面上の変位成分 (u, v, w) の変数分離解を

$$u = U \cos \theta \quad (4.24a)$$

$$v = V \sin \theta \quad (4.24b)$$

$$w = W \cos \theta \quad (4.24c)$$

のように置き， (U, V, W) は座標 x と時間 t の関数とする。

基礎式には，Flüge の理論による簡単化された変位の方程式 (2.47)，(2.48) および (2.49) を用いるものとする。これらの基礎方程式に式 (4.24c) を代入し，初期条件式 (4.3) のもとでラプラス変換を行えば，次のような定係数の常微分方程式が得られる。

$$\frac{d^8 \bar{W}}{d\xi^8} + a_6 \frac{d^6 \bar{W}}{d\xi^6} + a_4 \frac{d^4 \bar{W}}{d\xi^4} + a_2 \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} + a_0 \bar{W} = 0 \quad (4.25)$$

ここで，係数 (a_6, a_4, a_2, a_0) は用いた基礎方程式によって異なり，次のようになる。

(222)

(I) 回転と並進慣性をともに考慮した場合

(式(2.47)を用いた場合)

$$a_6 = -2(z-v) - (z + \frac{1}{\rho_1}) \lambda^2$$

$$a_4 = \frac{1-v^2}{k^2} + \left\{ \frac{1}{k^2} + 3(z + \frac{1}{\rho_1}) \right\} \lambda^2 + (1 + \frac{z}{\rho_1}) \lambda^4$$

$$a_2 = - \left\{ \frac{3+4\rho_2}{k^2} + 3(z + \frac{1}{\rho_1}) \right\} \lambda^2 - \left\{ \frac{1}{k^2} (1 + \frac{1}{\rho_1}) + 2(1 + \frac{z}{\rho_1}) \right\} \lambda^4 - \frac{1}{\rho_1} \lambda^6$$

$$a_0 = \left(\frac{z}{k^2} + z + \frac{1}{\rho_1} \right) \lambda^2 + (1 + \frac{z}{\rho_1}) (1 + \frac{1}{k^2}) \lambda^4 + \frac{1}{\rho_1} (1 + \frac{1}{k^2}) \lambda^6$$

(II) 回転慣性を無視し、並進慣性を考慮した場合

(式(2.48)を用いた場合)

$$a_6 = -2(z-v) - (1 + \frac{1}{\rho_1}) \lambda^2$$

$$a_4 = \frac{1-v^2}{k^2} + \left\{ \frac{1}{k^2} + 3(1 + \frac{1}{\rho_1}) \right\} \lambda^2 + \frac{1}{\rho_1} \lambda^4$$

$$a_2 = - \left\{ \frac{3+4\rho_2}{k^2} + 3(1 + \frac{1}{\rho_1}) \right\} \lambda^2 - \left\{ \frac{1}{k^2} (1 + \frac{1}{\rho_1}) + \frac{z}{\rho_1} \right\} \lambda^4$$

$$a_0 = \left(\frac{z}{k^2} + 1 + \frac{1}{\rho_1} \right) \lambda^2 + \left\{ \frac{1}{k^2} (1 + \frac{z}{\rho_1}) + \frac{1}{\rho_1} \right\} \lambda^4 + \frac{1}{k^2 \rho_1} \lambda^6$$

(III) 回転と面内並進慣性をともに無視し、面外並進慣性

だけを考慮した場合(式(2.49)を用いた場合)

$$a_6 = -2(z-v)$$

$$a_4 = \frac{1-v^2}{k^2} + \frac{1}{k^2} \lambda^2$$

$$a_2 = -\frac{z}{k^2} \lambda^2$$

$$a_0 = \frac{1}{k^2} \lambda^2$$

そこで、ラプラス変換された変位成分(\bar{u} , \bar{v} , \bar{w})の一般解を次のように置くことにする。

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^8 \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{pmatrix} c_j e^{\alpha_j z} \quad (4.26)$$

ここで、 α_j ($j=1, \dots, 8$)は式(4.25)から導かれる特性方程式

$$\alpha^8 + a_6 \alpha^6 + a_4 \alpha^4 + a_2 \alpha^2 + a_0 = 0 \quad (4.27)$$

の相異なる8根であり、係数(f_j, g_j)は用いた基礎式によって異なり、次のとおりである。

(I) 回転慣性考慮 (式(2.47a)と(2.47b)を用いた場合)

$$f_j = \frac{\alpha_j}{d_j} \left\{ -k^2 \alpha_j^4 + (\nu - 3\beta_1 k^4 + \frac{1+\beta_1}{\beta_1} k^2 \lambda^2) \alpha_j^2 + 1 + k^2 \right. \\ \left. - \left(\frac{\nu}{\beta_1} - k^2 \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_1} k^2 \lambda^2 \right) \lambda^2 \right\}$$

$$g_j = \frac{1}{d_j} \left\{ 2k^2 \alpha_j^4 - (z + \nu + 2k^2 + \frac{1+\beta_1}{\beta_1} k^2 \lambda^2) \alpha_j^2 + 1 \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2\beta_1} + k^2 + \frac{1}{\beta_1} k^2 \lambda^2 \right) \lambda^2 \right\}$$

(II) 回転慣性無視 (式(2.48a)と(2.48b)を用いた場合)

$$f_j = \frac{\alpha_j}{d_j} \left\{ -k^2 \alpha_j^4 + (\nu - 3\beta_1 k^4 + \frac{1+\beta_1}{\beta_1} k^2 \lambda^2) \alpha_j^2 + 1 + k^2 \right. \\ \left. - \left(\frac{\nu}{\beta_1} - k^4 \right) \lambda^2 - \frac{1}{\beta_1} k^2 \lambda^4 \right\}$$

$$g_j = \frac{1}{d_j} \left\{ 2k^2 \alpha_j^4 - (z + \nu + 2k^2 + \frac{1+2\beta_1}{\beta_1} k^2 \lambda^2) \alpha_j^2 + 1 + \left(\frac{1}{\beta_1} + k^2 \right) \lambda^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_1} k^2 \lambda^4 \right\}$$

ただし、(I)の回転慣性考慮の場合は $b_{\eta j}$ だけが異なり

$$b_{\eta j} = \{(\alpha_j^2 + p_1 - \lambda^2) f_j + (1 + p_1) \alpha_j g_j + \alpha_j^3 - (z - \nu) \alpha_j - \alpha_j \lambda^2\} e^{\alpha_j z}$$

である。式(4.28)を解けは

$$C_j = - \frac{R^3}{p D |B|} \left\{ g_1 \cdot B_{\eta j} + \frac{k^2}{p_1} g_2 \cdot B_{\delta j} \right\} \quad (4.29)$$

となる。これを式(4.26)に代入すれば、 (U, V, W) の解が決まり、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \end{pmatrix} = - \frac{R^3}{p D |B|} \sum_{j=1}^8 \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ g_1 \cdot B_{\eta j} + \frac{k^2}{p_1} g_2 \cdot B_{\delta j} \right\} e^{\alpha_j z} \quad (4.30)$$

これを前節と同様な手法によってラプラス逆変換すれば、以下のような解が得られる。

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^s \\ V^s \\ W^s \end{pmatrix} + \frac{R^3}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^8 |B_{k\ell}^*|} \sum_{j=1}^8 \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ g_1 \cdot B_{\eta j} + \frac{k^2}{p_1} g_2 \cdot B_{\delta j} \right\} e^{\alpha_j z} \right] \frac{\cos \lambda_m z}{\lambda_m^2} \Bigg|_{\lambda = i\lambda_m} \quad (4.31)$$

ここで、 $\lambda_m = R p_m / c$ は超越方程式 $|B| = 0$ の根として与えられ、片持ち円筒殻の m 次の無次元固有振動数である。右辺第1項の静的解は、前節と同じ理由により静的問題としての別個の解析により導くことにした。

α_j は $\lambda = i\lambda_m$ を代入した式(4.27)の相異なる8根であり、 $[B_{k\ell}^*]$ は8次の行列であり、 i 行 j 列の成分 b_{ij}^* は次のとおりである。

(i) $j \neq \ell$ のとき

$$b_{ij}^* = b_{ij}$$

(ii) $j = k$ のとき

$$b_{1j}^* = r_j \beta_j, \quad b_{2j}^* = s_j \beta_j, \quad b_{3j}^* = 0, \quad b_{4j}^* = \beta_j$$

$$b_{5j}^* = (z + L\alpha_j) \alpha_j \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{6j}^* = \{ (1 + L\alpha_j) f_j - \nu L(1 - g_j) + \alpha_j r_j + \nu s_j \} \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{7j}^* = \{ (\alpha_j^2 + \rho_1)(L f_j + r_j) + (1 + L\alpha_j)(g_j + \rho_1 g_j - z + \nu) \\ + (z f_j + s_j + \rho_1 s_j) \alpha_j + (3 + L\alpha_j) \alpha_j^2 \} \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{8j}^* = \{ r_j + L f_j + 3k^2(1 + L\alpha_j) - (1 + 3k^2)(1 + L\alpha_j) g_j \\ - (1 + 3k^2) \alpha_j s_j \} \beta_j e^{\alpha_j L}$$

ただし, (I) の回転慣性考慮の場合は b_{7j}^* だけが異なり

$$b_{7j}^* = [\{ (L\alpha_j^2 + 2\alpha_j + L\rho_1) f_j + (1 + \rho_1)(1 + L\alpha_j) g_j + (\alpha_j^2 + \rho_1) r_j \\ + (1 + \rho_1) \alpha_j s_j + (3 + L\alpha_j) \alpha_j^2 - (z - \nu)(1 + L\alpha_j) \\ - \lambda^2(L f_j + L\alpha_j + r_j + 1) \} \beta_j - z \lambda^2(\alpha_j + f_j)] e^{\alpha_j L}$$

ここで, (β_j, r_j, s_j) は用いた理論によって異なり, 次のようになる。

(I) 回転慣性考慮 (式(2.47)を用いた場合)

$$\beta_j = \left[\left(z + \frac{1}{\rho_1} \right) \alpha_j^6 - \left\{ \frac{1}{k^2} + 3 \left(z + \frac{1}{\rho_1} \right) + z \left(1 + \frac{z}{\rho_1} \right) \lambda^2 \right\} \alpha_j^4 \right. \\ + \left\{ \frac{3 + 4\rho_2}{k^2} + 3 \left(z + \frac{1}{\rho_1} \right) + z \left(\frac{1}{k^2} \frac{1 + \rho_1}{\rho_1} + \frac{4}{\rho_1} + z \right) \lambda^2 \right. \\ + \left. \left. \frac{3}{\rho_1} \lambda^4 \right\} \alpha_j^2 - \left\{ \frac{z}{k^2} + \frac{1}{\rho_1} + z + z \left(1 + \frac{z}{\rho_1} \right) \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) \lambda^2 \right. \right. \\ + \left. \left. \frac{3}{\rho_1} \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) \lambda^4 \right\} \right] / \alpha_j (4\alpha_j^6 + 3a_3\alpha_j^4 + 2a_4\alpha_j^2 + a_2)$$

$$r_j = z \frac{f_j}{d_j} \left\{ -z\alpha_j^3 + \left(z + \frac{1 + \rho_1}{\rho_1} \lambda^2 \right) \alpha_j + \frac{1}{\beta_j} \left(\frac{1 + \rho_1}{\rho_1} \alpha_j^2 - \frac{z}{\rho_1} \lambda^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1 + \rho_1}{\rho_1} \right) \right\} + \frac{1}{d_j} \left\{ -5k^2\alpha_j^4 + 3(\nu - 3\rho_1 k^4 + \frac{1 + \rho_1}{\rho_1} k^2 \lambda^2) \alpha_j^2 \right.$$

$$+ z \frac{\alpha_j}{\beta_j} \left(\frac{1+\beta_1}{\beta_1} k^2 \alpha_j^2 + \frac{\beta_2}{\beta_1} k^2 - \frac{\nu}{\beta_1} - \frac{z}{\beta_1} k^2 \lambda^2 \right) + 1 + k^2$$

$$+ \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} k^2 - \frac{\nu}{\beta_1} \right) \lambda^2 - \frac{1}{\beta_1} k^2 \lambda^4 \}$$

$$S_j = z \frac{g_j}{d_j} \left\{ -z \alpha_j^3 + \left(z + \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \lambda^2 \right) \alpha_j + \left(\frac{1+\beta_1}{\beta_1} \alpha_j^2 - \frac{z}{\beta_1} \lambda^2 - \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \right) \frac{1}{\beta_j} \right\} + \frac{1}{d_j} \left\{ 4k^2 \alpha_j^3 - (z + \nu + z k^2 \lambda^2) \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \right.$$

$$\left. + z k^2 \right) \alpha_j - \left(z k^2 \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \alpha_j^2 - z k^2 - \frac{1}{\beta_1} - \frac{z}{\beta_1} k^2 \lambda^2 \right) \frac{1}{\beta_j} \}$$

(II) 回転慣性無視 (式(2.48)を用いた場合)

$$\beta_j = \left[\left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \alpha_j^6 - \left\{ \frac{z}{\beta_1} \lambda^2 - \frac{1}{k^2} + 3 \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \right\} \alpha_j^4 - \left\{ \frac{z}{k^2} \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \lambda^2 \right. \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\beta_1} \lambda^2 + \frac{3+4\beta_2}{k^2} + 3 \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \right\} \alpha_j^2 - \left\{ \frac{3}{k^2 \beta_1} \lambda^4 + \frac{z}{k^2} \left(1 + \frac{z}{\beta_1} \right) \lambda^2 \right.$$

$$\left. + \frac{z}{\beta_1} \lambda^2 + \frac{z}{k^2} + \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \right\} \right] / \alpha_j (4\alpha_j^6 + 3a_6 \alpha_j^4 + 2a_4 \alpha_j^2 + a_2)$$

$$r_j = z \frac{f_j}{d_j} \left\{ -z \alpha_j^3 + \left(z + \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \lambda^2 \right) \alpha_j + \frac{1}{\beta_j} \left(\frac{1+\beta_1}{\beta_1} \alpha_j^2 - \frac{z}{\beta_1} \lambda^2 - \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \right) \right\}$$

$$+ \frac{1}{d_j} \left\{ -5k^2 \alpha_j^4 + 3(\nu - 3\beta_1 k^4 + \frac{1+\beta_1}{\beta_1} k^2 \lambda^2) \alpha_j^2 + z \frac{\alpha_j}{\beta_j} \left(\frac{1+\beta_1}{\beta_1} k^2 \alpha_j^2 \right. \right.$$

$$\left. - \frac{z}{\beta_1} k^2 \lambda^2 + k^4 - \frac{\nu}{\beta_1} \right) + 1 + k^2 + \left(k^4 - \frac{\nu}{\beta_1} \right) \lambda^2 - \frac{1}{\beta_1} k^2 \lambda^4 \}$$

$$S_j = z \frac{g_j}{d_j} \left\{ -z \alpha_j^3 + \left(z + \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \lambda^2 \right) \alpha_j + \frac{1}{\beta_j} \left(\frac{1+\beta_1}{\beta_1} \alpha_j^2 - \frac{z}{\beta_1} \lambda^2 - \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \right) \right\}$$

$$+ \frac{z}{d_j} \left\{ 4k^2 \alpha_j^3 - (z + \nu + z k^2 + \frac{1+z\beta_1}{\beta_1} k^2 \lambda^2) \alpha_j - \frac{1}{\beta_j} \left(\frac{1+z\beta_1}{\beta_1} k^2 \alpha_j^2 \right. \right.$$

$$\left. - k^2 - \frac{1}{\beta_1} - \frac{z}{\beta_1} k^2 \lambda^2 \right) \}$$

(228)

ただし、 d_j は (I) および (II) の場合ともに次のとおりである。

$$d_j = \alpha_j^4 - \left(2 + \frac{1+p_1}{p_1} \lambda^2\right) \alpha_j^2 + 1 + \frac{1+p_1}{p_1} \lambda^2 + \frac{1}{p_1} \lambda^4$$

(III) 面内並進慣性無視 (式(2.49)を用いた場合)

$$\beta_j = -d_j / k^2 \alpha_j (4\alpha_j^6 + 3a_6 \alpha_j^4 + 2a_4 \alpha_j^2 + a_2)$$

$$r_j = \frac{1}{d_j} \left\{ -5k^2 \alpha_j^4 + 3(\nu - 3p_1 k^4) \alpha_j^2 - 4d_j f_j (\alpha_j^2 - 1) + 1 + k^2 \right\}$$

$$s_j = \frac{2}{d_j} \left\{ 4k^2 \alpha_j^2 - 2g_j (\alpha_j^2 - 1) - 2 - \nu - 2k^2 \right\} \alpha_j$$

$$d_j = (\alpha_j^2 - 1)^2$$

静的問題に対する解析

ここでは、式(4.31)の右辺第1項に相当する静的問題の解を導く方法を示す。

静的結果を留数計算で求め難いその原因は、 $\lambda (= \nu) = 0$ とした場合に特性方程式(4.27)における係数のうち a_2 と a_0 が零となり、次のような特別な形式となるためである。

$$\alpha^4 (\alpha^4 + a_6 \alpha^2 + a_4) = 0 \quad (4.32)$$

すなわち $\alpha = 0$ の4重根をもつので、式(4.30)そのままの形では $\lambda = 0$ における留数が不定形となってしまふからである。この状態は、円筒殻のはり状曲げ問題を扱うと必ず起こるので、この場合に対する対処の方法を確立しておく必要がある。このことは、第2章 (p.2-86)でも触れたとおりである。

特性方程式(4.32)は次の二種類の方程式となる。

$$\alpha^4 - 2(2 - \nu) \alpha^2 + (1 - \nu^2) / k^2 = 0 \quad (4.33a)$$

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = - \frac{R^4}{D|B|} \left[\sum_{j=1}^4 \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ \rho_1 \cdot B_{1j} + \frac{\kappa^2}{\rho_1} \rho_2 \cdot B_{8j} \right\} e^{\alpha_j \xi} \right. \\
 \left. + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\xi & 3(\xi^2 + 4 + 2\nu) \\ 1 & \xi & \xi^2 - 2\nu & \xi^3 - 6\nu\xi \\ 1 & \xi & 2\xi & \xi^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \cdot B_{15} + \frac{\kappa^2}{\rho_1} \rho_2 \cdot B_{85} \\ \rho_1 \cdot B_{16} + \frac{\kappa^2}{\rho_1} \rho_2 \cdot B_{86} \\ \rho_1 \cdot B_{17} + \frac{\kappa^2}{\rho_1} \rho_2 \cdot B_{87} \\ \rho_1 \cdot B_{18} + \frac{\kappa^2}{\rho_1} \rho_2 \cdot B_{88} \end{pmatrix} \right]$$

(4.37)

念のため触れておくが、(I)(II)(III)の各式における相違は慣性項についてだけであるから、静的解はいずれの場合も同じで式(4.37)となる。

なお、応力成分に対する解は、変位成分の解を Flugge の構成方程式(2.19)に代入することにより容易に得られるので、ここでは記載を省略する。

表4.3 行列[B]の成分 b_{ij}

$i \backslash j$	1, ..., 4	5	6	7	8
1	f_j	0	1	0	$6(z+v)$
2	g_j	1	0	$-2v$	0
3	1	1	0	0	0
4	α_j	0	1	0	0
5	$\zeta_{1j} e^{\alpha_j L}$	0	0	2	$6L$
6	$\zeta_{2j} e^{\alpha_j L}$	0	0	$2(1-v^2)$	$6L(1-v^2)$
7	$\zeta_{3j} e^{\alpha_j L}$	0	0	0	$3(1-\frac{v}{z})L^2 + 6(3-2v)$
8	$\zeta_{4j} e^{\alpha_j L}$	0	0	0	$6(z+2v+3vk^2)$

$$\text{ここで } \zeta_{1j} = \alpha_j^2$$

$$\zeta_{2j} = \alpha_j f_j + v g_j - v$$

$$\zeta_{3j} = (\alpha_j^2 + p_1) f_j + (1+p_1) \alpha_j g_j + \alpha_j^3 - (z-v) \alpha_j$$

$$\zeta_{4j} = f_j - (1+3k^2) \alpha_j g_j + 3k^2 \alpha_j$$

4.4 Donnell の理論による解析

Donnell の理論も Flugge の理論と同様に古典理論であるから、境界条件は式(4.23)と同じである。したがって、殻の中央面上の変位成分 (u, v, w) に対する変数分離解も式(4.24)のように置くことができる。基礎式には Donnell の理論による回転慣性を無視し並進慣性を考慮した場合の単純化された変位の方程式(2.48)を用いるものとする。前節と同様にラプラス変換法を導入すれば、基礎方程式(2.48)は次のようになる。

$$\frac{d^8 \bar{w}}{d\xi^8} + a_6 \frac{d^6 \bar{w}}{d\xi^6} + a_4 \frac{d^4 \bar{w}}{d\xi^4} + a_2 \frac{d^2 \bar{w}}{d\xi^2} + a_0 \bar{w} = 0 \quad (4.38)$$

$$\text{ここで, } a_6 = -4 - \frac{1 + \beta_1}{\beta_1} \lambda^2$$

$$a_4 = 6 + \frac{1 - \nu^2}{k^2} + \left(\frac{1}{k^2} + 3 \frac{1 + \beta_1}{\beta_1} \right) \lambda^2 + \frac{1}{\beta_1} \lambda^4$$

$$a_2 = -4 - \left(\frac{3 + 4\beta_2}{k^2} + 3 \frac{1 + \beta_1}{\beta_1} \right) \lambda^2 - \left(\frac{1}{k^2} \frac{1 + \beta_1}{\beta_1} + \frac{2}{\beta_1} \right) \lambda^4$$

$$a_0 = 1 + \left(\frac{2}{k^2} + \frac{1 + \beta_1}{\beta_1} \right) \lambda^2 + \left(\frac{1}{k^2} \frac{2 + \beta_1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_1} \right) \lambda^4 + \frac{1}{k^2 \beta_1} \lambda^6$$

ところで、無次元ラプラス変換パラメータ $\lambda (= R\alpha/c)$ を零とすれば、式(4.38)は静的な場合の方程式となる。

ここで注目すべき点は、係数 (a_6, a_4, a_2, a_0) のいづれもが $\lambda \rightarrow 0$ としても零とならないことである。Flugge の理論では $\lambda \rightarrow 0$ のとき $a_2 = a_0 = 0$ となり、別個に解析を行って静的解を導かなければならなかった。しかし、Donnell の理論では、零とならないためその必要がない。円筒殻が長くなると精度

が著しく悪くなるという欠点を有するものの、これは Donnell の理論の大変に便利な点である。

この点については第 2 章 (p. 2-86) でも触れたとおりである。話が逸れたが、動的な場合の解析に戻る。

式 (4.38) よりラプラス変換された変位成分 ($\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$) の一般解を前節と同様に次のように置くことにする。

$$\begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^8 \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{pmatrix} c_j e^{\alpha_j \xi} \quad (4.39)$$

ここで、 α_j ($j=1, \dots, 8$) は式 (4.38) より導かれる特性方程式

$$\alpha^8 + a_6 \alpha^6 + a_4 \alpha^4 + a_2 \alpha^2 + a_0 = 0 \quad (4.40)$$

の相異なる 8 根であり、係数 (f_j, g_j) は式 (2.48a) と (2.48b) により与えられ次のようになる。

$$f_j = \frac{\alpha_j}{d_j} (\nu \alpha_j^2 + 1 - \frac{\nu}{\rho_1} \lambda^2), \quad g_j = \frac{1}{d_j} \left\{ -(z + \nu) \alpha_j^2 + 1 + \frac{1}{\rho_1} \lambda^2 \right\}$$

$$d_j = \alpha_j^4 - (z + \frac{1 + \rho_1}{\rho_1} \lambda^2) \alpha_j^2 + 1 + \frac{1 + \rho_1}{\rho_1} \lambda^2 + \frac{1}{\rho_1} \lambda^4$$

係数 c_j ($j=1, \dots, 8$) は $x=0$ および l における合計 8 個の境界条件すなわち式 (4.23) によって決まる定数である。

Donnell の構成方程式 (2.71) により境界条件式 (4.23) を変位成分だけで表して係数 c_j を決定し、4.2 節と同様な手法によりラプラス逆変換を行えば、以下のような解が得られる。

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = -\frac{R^3}{D} \left[\frac{1}{|B|} \sum_{j=1}^8 \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ \beta_1 \cdot B_{\beta_1} + \frac{\kappa^2}{\rho_1} \beta_2 \cdot B_{\beta_2} \right\} e^{\alpha_j \xi} \right]_{\lambda=0}$$

(234)

$$+ \frac{R^3}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^8 |B_{k\ell}^*|} \sum_{j=1}^8 \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ g_1 \cdot B_{7j} + \frac{k^2}{P_1} g_2 \cdot B_{8j} \right\} e^{\alpha_j \xi} \right] \frac{\cos \lambda_m \tau}{\lambda_m^2} \Bigg|_{\lambda = i \lambda_m} \quad (4.41)$$

ここで, $[B]$ は 8 次の行列であり, i 行 j 列の成分 b_{ij} は
 $b_{1j} = f_j$, $b_{2j} = g_j$, $b_{3j} = 1$, $b_{4j} = \alpha_j$, $b_{5j} = (\alpha_j^2 - \nu) e^{\alpha_j L}$
 $b_{6j} = (\alpha_j f_j + \nu g_j - \nu) e^{\alpha_j L}$, $b_{7j} = \alpha_j (\alpha_j^2 - z + \nu) e^{\alpha_j L}$
 $b_{8j} = (f_j - \alpha_j g_j + z k^2 \alpha_j) e^{\alpha_j L}$

であり, $[B_{k\ell}^*]$ も 8 次の行列であり i 行 j 列の成分 b_{ij}^* は

(i) $j = \ell$ のとき

$$b_{ij}^* = b_{ij}$$

(ii) $j \neq \ell$ のとき

$$b_{1j}^* = r_j \beta_j, \quad b_{2j}^* = s_j \beta_j, \quad b_{3j}^* = 0, \quad b_{4j}^* = \beta_j$$

$$b_{5j}^* = \{(z + L\alpha_j)\alpha_j - \nu L\} \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{6j}^* = \{(1 + L\alpha_j)\alpha_j + \nu L g_j + \alpha_j r_j + \nu s_j - \nu L\} \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{7j}^* = \{(3 + L\alpha_j)\alpha_j^2 - (z - \nu)(1 + L\alpha_j)\} \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{8j}^* = \{L f_j + (1 + L\alpha_j)(z k^2 - g_j) + r_j - \alpha_j s_j\} \beta_j e^{\alpha_j L}$$

である。ただし, (β_j, r_j, s_j) は次のように定義される。

$$\beta_j = \left\{ \frac{1+P_1}{P_1} \alpha_j^6 - \left(\frac{z}{P_1} \lambda^2 + \frac{1}{k^2} + 3 \frac{1+P_1}{P_1} \right) \alpha_j^4 - \left(\frac{z}{k^2} \frac{1+P_1}{P_1} \lambda^2 + \frac{4}{P_1} \lambda^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3+4P_2}{k^2} + 3 \frac{1+P_1}{P_1} \right) \alpha_j^2 - \left(\frac{3}{k^2 P_1} \lambda^4 + \frac{2z+P_1}{k^2 P_1} \lambda^2 + \frac{2}{P_1} \lambda^2 + \frac{z}{k^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1+P_1}{P_1} \right) \right\} / \alpha_j (4\alpha_j^6 + 3a_6 \alpha_j^4 + 2a_4 \alpha_j^2 + a_2)$$

$$r_j = z \frac{f_j}{d_j} \left\{ -z \alpha_j^3 + \left(z + \frac{1+P_1}{P_1} \lambda^2 \right) \alpha_j + \frac{1}{\beta_j} \left(\frac{1+P_1}{P_1} \alpha_j^2 - \frac{z}{P_1} \lambda^2 - \frac{1+P_1}{P_1} \right) \right\}$$

$$+ \frac{1}{d_j} \left(3\nu \alpha_j^2 + 1 - \frac{\nu}{P_1} \lambda^2 - \frac{2\nu}{P_1} \frac{\alpha_j}{\beta_j} \right)$$

$$S_j = z \frac{g_j}{d_j} \left\{ -z \alpha_j^3 + \left(z + \frac{1+P_1}{P_1} \lambda^2 \right) \alpha_j + \frac{1}{\beta_j} \left(\frac{1+P_1}{P_1} \alpha_j^2 - \frac{z}{P_1} \lambda^2 - \frac{1+P_1}{P_1} \right) \right\} \\ - \frac{z}{d_j} \left\{ (z+\nu) \alpha_j - \frac{1}{P_1 \beta_j} \right\}$$

α_j ($j=1, \dots, 8$) は式(4.41)の右辺第1項では $\lambda=0$ とした場合の, 第2項では $\lambda=i\lambda_m$ とした場合の式(4.40)のそれぞれ相異なる8根である。

$\lambda_m = R p_m / c$ は超越方程式 $|B|=0$ の根として与えられ, 片持ち円筒殻の m 次の無次元固有振動数である。

式(4.41)の右辺第1項は荷重が静的に作用した場合の解であり, 第2項は各次の固有振動モードの重ね合せである。

なお応力成分に対する解は, 変位成分の解を Donnell の構成方程式(2.22)に代入することにより容易に得られるので, ここでは記載を省略する。

4.5 数値結果

数値計算にあたっては，ポアソン比 ν を 0.3 とし，修正理論における (Mirsky-Herrmann) セン断係数は $\kappa_x = \kappa_\theta = \pi^2/12$ とした。

荷重の大きさは $f_1 = f_2 = f_0$ とした。この場合，図4.2のように自由縁に沿って大きさ f_0 の荷重が一方方向に向って一様に作用する荷重状態となり，荷重方向の合力 F_0 は

$2\pi R f_0$ となる。数値結果は荷重の合力 F_0 ，円筒殻の肉厚比 $H (= h/R)$ ，長さ比 $L (= l/R)$ および曲げ剛性 $D (= Eh^3/12(1-\nu^2))$ を用いて整理した。

まず，静的結果について計算した。

表4.4 (a), (b) および (c) は先端の $\theta = 0$ における静たわみ $Dw/F_0 R^2$ の値について4種類の理論による結果を比較したものである。Beam はせん断変形を考慮したはり理論によるもので，次式により計算した。

$$w = F_0 l^3 \{1 + 6(1+\nu)/L^2\} / 3\pi ER^3 h \quad (4.42)$$

なおせん断係数には，薄肉円環状断面における平均せん断応力と最大せん断応力との比である 0.5 を用いた。

Mirsky-Herrmann の理論による結果を基準としてみると，Flügge の理論ではほとんど誤差を生じない。しかし Donnell の理論では，円筒殻の長さがある程度長くなると急に誤差が大

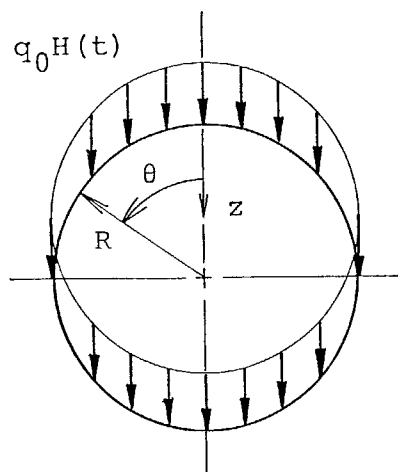


図4.2 円筒殻の先端における荷重状態

きくなる。この傾向は円筒殻の肉厚が厚いほど早く現われ、第3章の局部変形問題における結果と傾向が似ている。

逆にはり理論は、円筒殻の長さが短くなるほど誤差が大きくなり、この傾向は円筒殻の肉厚が薄いほど早く現われる。

したがって Donnell の理論とはり理論とまうまく使いわければ、本範囲の円筒殻形状に対して良好な結果が得られる。ただし、このことはたわみを対象とした場合にだけしか成立しないと考えておいた方が無難である。なお、せん断変形を無視したはり理論では、式(4.42)に対応する式が

$$w = F_0 l^3 / 3\pi ER^3 h \quad (4.43)$$

となるので、誤差は非常に大きくなる。

図4.3は $\theta = 0$ の母線上に沿ったたわみ曲線と円筒殻の長さとの関係を Flügge の理論により計算した結果である。はりと殻の両理論による結果は、円筒殻が短くなると単にたわみの絶対値が一致しなくなるだけでなく、たわみ曲線の形状そのものも異なってくるのがわかる。

図4.4は同じく $\theta = 0$ の母線上に沿った曲げモーメント M_x と垂直力 N_x の分布と円筒殻形状との関係を Flügge の理論により計算した結果である。 M_x は荷重の作用している自由縁からわずかに離れた位置と固定縁とに集中して分布している。自由縁近傍における極大値は円筒殻の長さに関係なく一定であり、固定縁における絶対値は長さに正比例して大きくなる。

一方 N_x の分布形は単純で円筒殻の肉厚および長さに関係なく一本の直線で表され、固定縁で最大値をとる。これははり理論で表現されるところの曲げモーメントの分布形と対応している。

表 4.4 片持ち円筒殻の
先端における無次元静
たわみ $DW/F_0 R^2$ の値
($x=l, \theta=0, \times 10^{-2}$)

(a) $h/R = 0.02$

L	Mirsky-Herrmann	Flügge	Donnell	Beam
0.5	0.012177	0.012122	0.012135	0.0015641
1	0.014010	0.013955	0.013976	0.0034198
2	0.019718	0.019663	0.019706	0.0091713
4	0.047389	0.047333	0.047449	0.036996
6	0.11227	0.11222	0.11216	0.10212
8	0.23303	0.23298	0.23091	0.22322
10	0.42831	0.42827	0.41716	0.41893

(b) $h/R = 0.05$

L	Mirsky-Herrmann	Flügge	Donnell	Beam
0.5	0.051714	0.051158	0.051272	0.0097710
1	0.063033	0.062465	0.062682	0.021362
2	0.098522	0.097959	0.098442	0.057291
4	0.27075	0.27020	0.27059	0.23110
6	0.67516	0.67470	0.66210	0.63796
8	1.4282	1.4280	1.3318	1.3944
10	2.6466	2.6467	2.2420	2.6169

(c) $h/R = 0.1$

L	Mirsky-Herrmann	Flügge	Donnell	Beam
0.5	0.15190	0.14903	0.14933	0.039011
1	0.20294	0.19983	0.20078	0.085291
2	0.34228	0.33905	0.34120	0.22873
4	1.0270	1.0243	1.0108	0.92269
6	2.6375	2.6366	2.4068	2.5471
8	5.6390	5.6419	4.3364	5.5671
10	10.496	10.506	6.1421	10.448

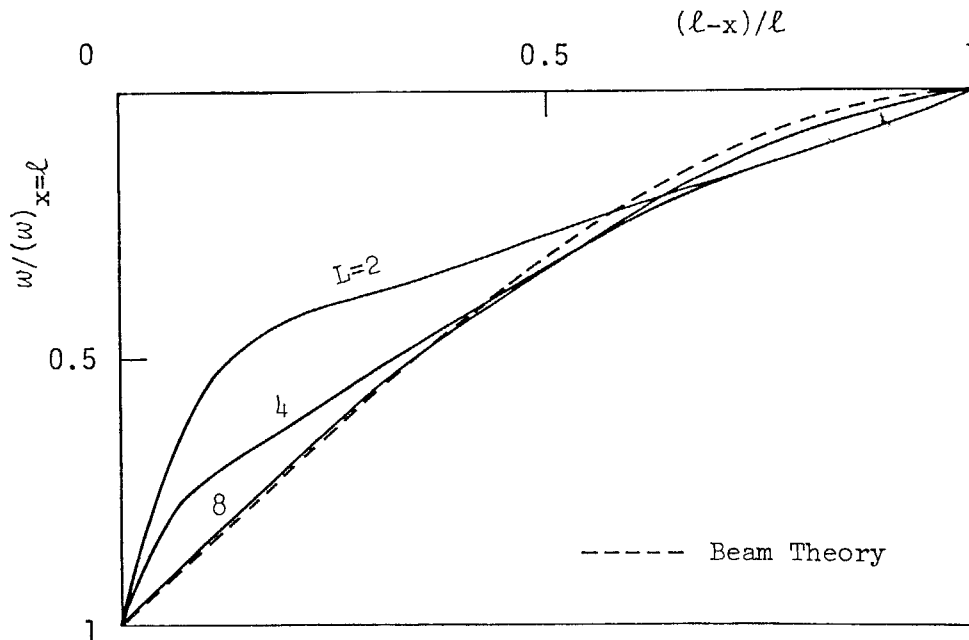


図 4.3 たわみ曲線と円筒殻の長さとの関係

($h/R = 0.05, \theta = 0, \text{—— Flügge の理論}$
 ----- せん断変形考慮のはり理論)

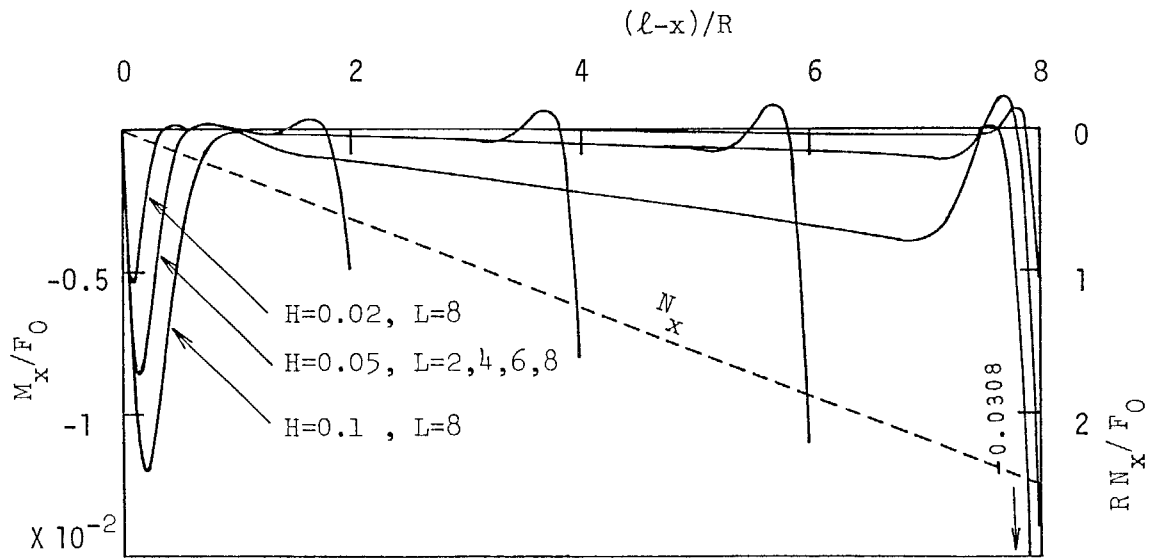


図4.4 曲げモーメント M_x および垂直力 N_x の軸方向分布と円筒殻形状との関係

($\theta = 0$, Flüggeの理論, — M_x , - - - N_x)

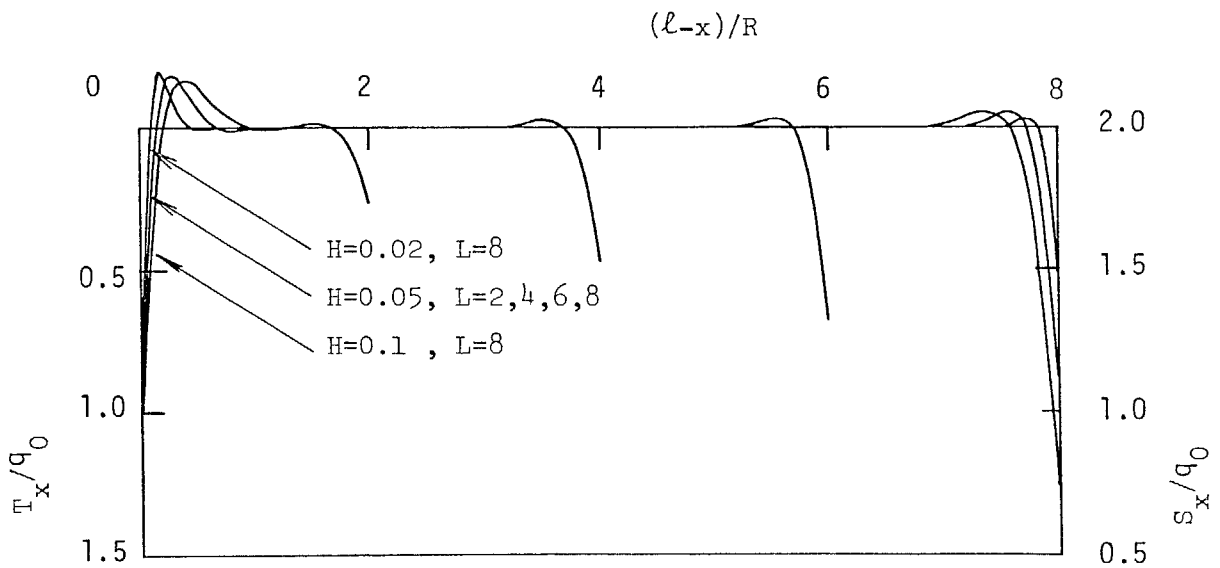


図4.5 面内および面外方向有効せん断力 (s_x, T_x) の軸方向分布と円筒殻形状との関係

($s_x : \theta = \pi/2, T_x : \theta = 0$, Flüggeの理論)
 (注: 無次元化に δ_0 を使用)

(240)

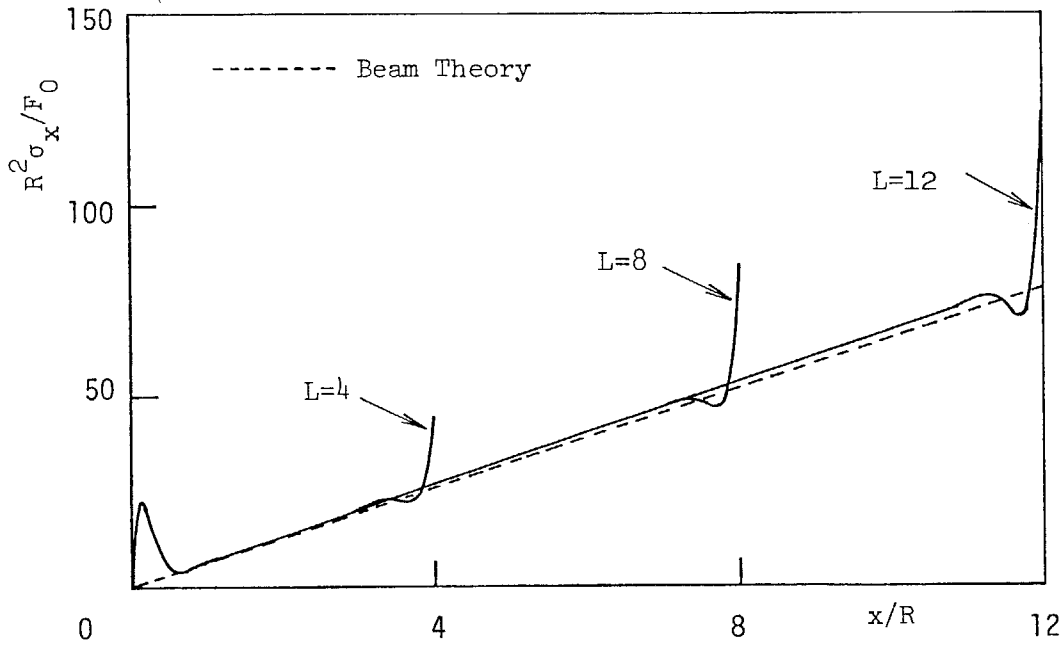


図4.6 外面における垂直応力 σ_x の軸方向分布と円筒殻の長さとの関係 ($h/R=0.05$, $\theta=0$, Flugge の理論)

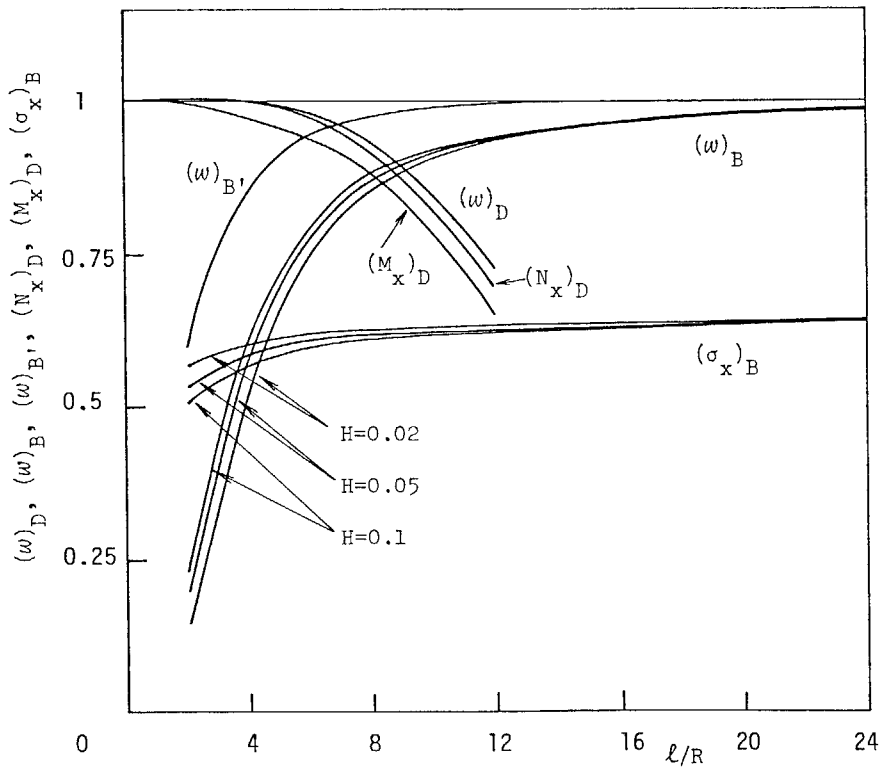


図4.7 静的結果に及ぼす理論の影響と円筒殻形状との関係

$h/R=0.05$, $x=0$ or l , $\theta=0$, $()_D$: Donnell の理論
 $()_B$: せん断変形考慮のはり理論, $()_{B'}$: 同無視のはり理論
 Flugge の理論による結果をすべて 1 とする。

図4.5は面内および面外方向の有効せん断力 S_x および T_x と円筒殻形状との関係を示したものであり、 S_x は $\theta = \pi/2$ 、 T_x は $\theta = 0$ のそれぞれ母線上に沿った分布である。 S_x と T_x の和はすべての位置において $-S$ となっており、その合力は荷重の合力と一致している。 T_x は両縁に集中して分布し、両縁から離れると急速に減少して零となる。一方、 S_x の分布形はその逆で、両縁で減ずる。全体としては、 S_x が荷重のほとんどを負担している。

図4.6は、円筒殻の肉厚方向に沿っての応力分布は直線との仮定に立って、外表面における x 軸方向垂直応力 σ_x の $\theta = 0$ の母線上に沿った分布を計算したものである。用いた理論は Flugge であり、計算式は次のとおりである。

$$\sigma_x = N_x / h - 6 M_x / h^2 \quad (4.44)$$

破線ははり理論によって計算した結果であり、計算式は

$$\sigma_x = -M(R + h/2) / I \quad (4.45)$$

$$\text{ここで、 } M = -F_0 x, \quad I = \pi R^3 h$$

である。殻理論とはり理論との差は、固定縁と自由縁近傍だけに見られ、これは殻理論における曲げモーメントの存在による。この M_x は円筒殻の断面変形によるものであり、はり理論では表し得ない応力成分である。すなわち、はり理論における曲げモーメントは殻理論における垂直力 N_x に相当する。

要するに、横断面が円形からゆがむことに起因する応力成分の分だけ差が現われる。なお、固定縁における差は、円筒殻の長さに関係なく一定比率である。

最後に図4.7は、Donnell およびはりの両理論による結果を Flugge の理論による対応した結果で除した諸量について円筒

殻形状との関係を示したものである。Donnellの理論による自由縁のたわみ $(w)_D$ は円筒殻が長くなるにつれて、はり理論によるたわみ $(w)_B$ は逆に短くなるにつれて、Flüggeの値より小さくなる。せん断変形を考慮したはり理論のたわみ $(w)_{B'}$ は $(w)_B$ に比べて円筒殻の短い領域でFlüggeの結果をよく近似している。はり理論による外面の垂直応力 $(\sigma_x)_B$ ($x=0$)は、円筒殻が長い場合でも肉厚に関係なくFlüggeの理論による結果の64%程度の値を示すにすぎない。Donnellの理論による固定縁の曲げモーメント $(M_x)_D$ および垂直力 $(N_x)_D$ は、 $(w)_D$ と同様な傾向にある。

いずれの結果も円筒殻の肉厚の影響は小さく、その絶対値はFlüggeの理論による結果を上回ることはない。

以上の結果は、主にFlüggeの理論により計算したものであるが、Minsky-Herrmannの理論を用いた場合もこれとほとんど一致する。したがって、静的問題では特に修正理論を用いる必要はないように思われる。

次に、動的結果について計算した。

変位や応力の応答を計算するためには、まず超越方程式の根すなわち固有振動数 λ_m の値を $m=1, 2, 3, \dots$ の順に試行錯誤法により数値的に求めてゆかなければならない。表4.5および4.6がその結果の一部である。肉厚比 $H=0.02$ 、長さ比 $L=8$ の円筒殻について、1次から20次までの固有振動数と理論間の関係を示したのが、表4.5である。この例では、薄肉で長さが短いため理論間の差はほとんど見られない。慣性力の影響をみると、面外並進慣性だけを考慮し他の慣性力をすべて無視した場合の結果(Flügge(III))が、他の結果と著しく異なっており、円筒殻に生ずる変形や応力の応答にも大きな差の現われることが予想される。しかし、他の結果はいずれの例をとっても低次から高次にいたるまで極めて小さな差しか現われていないので、変形や応力の応答にも大きな差はないと推論することもできる。最低次の固有振動数について、円筒殻の形状と理論間の関係を示したのが表4.6である。並進慣性をすべて考慮したFlügge(II)とMinsky-Herrmannは、どの形状をとっても差はほとんど見られないので、回転慣性とせん断変形の有無は最低次の固有振動数には大きな影響を及ぼさないことがわかる。Donnellの理論は、肉厚が薄くても長さが長くなると誤差は大きくなる一方である。面外並進慣性だけを考慮したFlügge(III)は長さに関係なくほぼ一定比率の誤差を生ずる。表4.7は表4.6に対応した固有振動数をはり理論により計算し、比較のために示したものであり、これは円筒殻の肉厚に関係なく一定の値である。Bernoulli-Eulerは古典理論、Timoshenkoは回転慣性とせん断変形を考慮した修正

表4.5 固有振動数と理論の関係(1次~20次)
($H=0.02$, $L=2$, $\nu=0.3$, $R\rho_m/c$ の値)

m	Mirsky-Herrmann	Flügge			Donnell
		(I)	(II)	(III)	
1	0.275955	0.275944	0.275949	0.370454	0.276023
2	0.708609	0.708509	0.708572	0.798120	0.708749
3	0.860089	0.860120	0.860263	0.899387	0.860428
4	0.923968	0.923950	0.924108	0.941312	0.924258
5	0.936952	0.936973	0.937542	0.979527	0.937909
6	0.978612	0.978827	0.979784	1.00105	0.980295
7	1.00073	1.00063	1.00015	1.03679	0.999958
8	1.03337	1.03418	1.03564	1.12229	1.03639
9	1.11721	1.11928	1.12143	1.24322	1.12238
10	1.23473	1.23909	1.24221	1.40273	1.24335
11	1.38161	1.38352	1.38403	1.60173	1.38409
12	1.39335	1.39967	1.40367	1.83934	1.40486
13	1.58108	1.59469	1.60100	2.11415	1.60241
14	1.80588	1.82197	1.82534	2.42455	1.82566
15	1.83274	1.83825	1.84370	2.76916	1.84477
16	2.06996	2.10151	2.11354	3.14680	2.11511
17	2.20005	2.20010	2.20021	3.55654	2.20019
18	2.36304	2.40782	2.42404	3.99766	2.42567
19	2.68454	2.73856	2.74427	4.46958	2.74436
20	2.74836	2.75608	2.77187	4.97185	2.77337

表4.6 固有振動数と円筒殻形状との関係
(最低次 $R\rho_m/c$ の値, $\nu=0.3$)

H	L	Mirsky-Herrmann	(II) Flügge	Donnell	(III) Flügge
0.02	0.5	0.82934	0.82956	0.82969	0.85246
	1	0.55583	0.55575	0.55595	0.64742
	2	0.27595	0.27594	0.27602	0.37045
	4	0.10801	0.10800	0.10810	0.15381
	8	0.033536	0.033528	0.033783	0.047885
	12	0.015720	0.015713	0.016238	0.022350
	16	0.0090222	0.0090151	0.0098972	0.012795
	20	0.0058297	0.0058226	0.0071101	0.0082544
0.1	2	0.28028	0.28000	————	————
	8	0.033693	0.033490	0.039292	0.047869

表4.7 はり理論による最低次固有振動数($h=0.5$)

L	Timoshenko	Bernoulli-Euler
0.5	1.138	4.742
1	0.6308	2.371
2	0.3250	0.5928
4	0.1086	0.1482
8	0.03352	0.03705
12	0.01570	0.01646
16	0.009015	0.009263
20	0.005825	0.005928

理論である。はりの修正理論は、古典理論に比べてよく円筒殻理論による結果を近似しているが、長さ比 L が 2 以下になると誤差が大きくなる。または、次数が高くなることも誤差は大きくなる。

固有振動数 λ_m の値を用いて変位あるいは合応力成分の時間変動を計算した。以下にその結果を示すことにする。

まず各理論間の差が小さいと思われる薄肉短円筒すなわち肉厚比 $H=0.02$ 、長さ比 $L=2$ の円筒に対して計算を行った。なお、この形状の円筒殻の最低次の無次元固有周期 $T_1 (=2\pi/\lambda_1)$ は 22.7 である。図 4.8 は円筒殻先端における $\theta=0$ の半径方向変位 w と $\theta=\pi/2$ の周方向変位 v の時間変動を並進慣性をすべて考慮した Flugge の理論 (II) により計算したものである。円筒殻断面の変形は先端が最も大きいので、 w の値は v の値の 2 倍以上にもなっている。 v の変動は単純な最低次の固有モードによる正弦波形に近く、はり理論による波形はこれに最も近い。 w の変動は v の波形に断面のゆがみに関係した高次の変形モードが重なり、複雑な波形となっている。図 4.9 は、面内有効せん断力 S_x の時間変動を固定部 (a) $x=0$ と円筒殻の中央 (b) $x=l/2$) において Flugge の理論により計算したものである。実線は並進慣性をすべて考慮した理論 (Flugge (II)) であり、破線は面外並進慣性だけを考慮した理論 (Flugge (III)) である。点 A は荷重端から伝ばした応力波のうちの縦波が最初に到達した時刻 ($T=L$)、点 B は横波 (せん断応力波) が到達した時刻 ($T=L\sqrt{2(1-\nu)}$) にそれぞれ対応している。 S_x の波形には、円筒殻中央部においては大きさ $1/2\pi$ 、固定部においては大きさ $1/\pi$ の不連続点か

見られる。これは、荷重の面内せん断力成分の大きさと伝ばに要する時間と対応しており、面内のせん断応力波の伝ばと反射の現象の様子を正確に表していることがうかがわれる。ところが、面内並進慣性を無視した場合の波形(破線)にはこれが全く見られず、応力波の伝ば現象を全く表さないことがわかる。なお、図4.8および4.9については、Minsky-HerrmannおよびDonnell型の理論によっても計算を行ったが、Flüggeの理論による結果と完全に一致した。

図4.10は固定部における曲げモーメント M_x の時間変動を計算したものであり、(a)および(b)は並進慣性をすべて考慮したFlüggeの理論(Ⅱ)による結果、(c)はMinsky-Herrmannの理論による結果である。(a)は(b)の時間初期の部分を拡大した図であり、逆に(b)と(c)の時間軸を縮小して長時間にわたる応答を示したものが図4.11である。図4.10の(b)と(c)あるいは図4.11の(a)と(b)を比較するとわかるように、 δ_x の場合と異なり波形にやゝ相違が目立っている。特に衝撃初期の波形に注目すると、両理論による結果に明確な差がある。Flüggeの理論による結果では、最も伝ば速度の速い応力波である縦波の到達時刻(A点)以前に現象が先行して現われるといった明白な矛盾を呈している。これに対してMinsky-Herrmannの理論では、A点以後に現象が徐々に現われるといった応力波の伝ば現象に照らして妥当な結果を示している。なお、Flüggeの理論による結果とDonnellの理論による結果はほとんど一致した。

図4.12は面外方向せん断力 Q_x の時間変動をMinsky-Herrmannの理論により計算したものであるが、この例でもA点を過ぎ

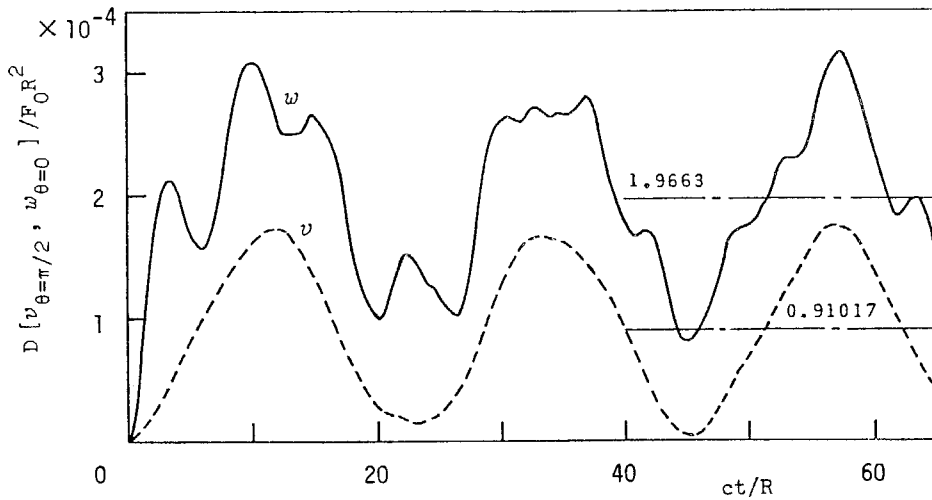


図4.8 円筒殻先端における変位の時間変動

($h/R=0.02, l/R=2, x=l, \theta=0 \text{ \& } \pi/2, m=80$)
 (Flügge(II), 一点鎖線は静的結果, $\nu=0.3$)

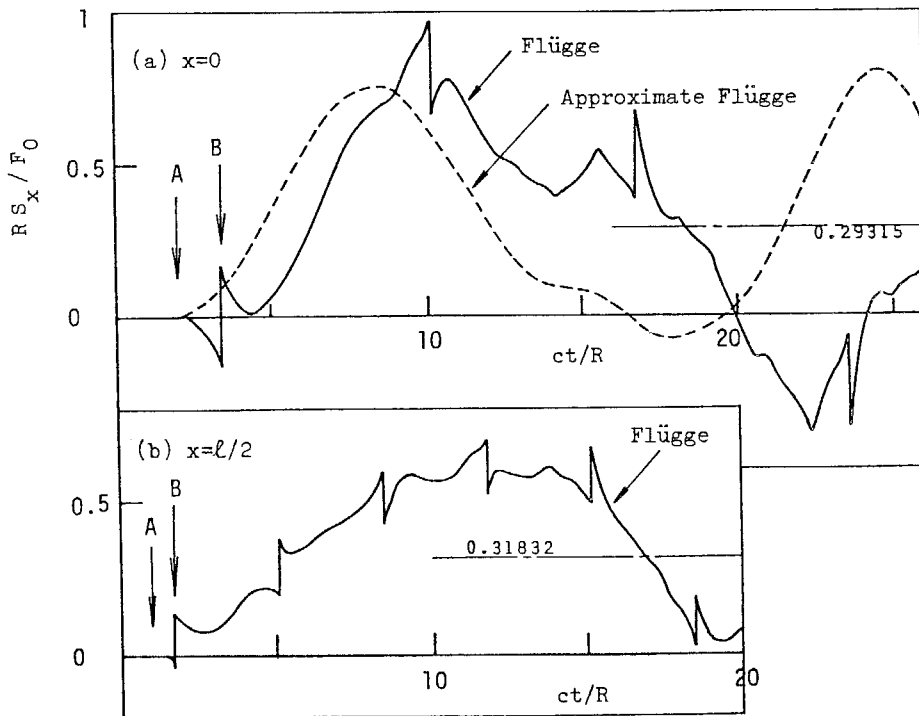


図4.9 円筒殻に生ずる面内有効せん断力の時間変動

($h/R=0.02, l/R=2, x=l/2 \text{ \& } l, \theta=\pi/2$)
 ($m=200, \text{ Flügge(II) } \text{---}, \text{ Flügge(III) } \text{-----}$)

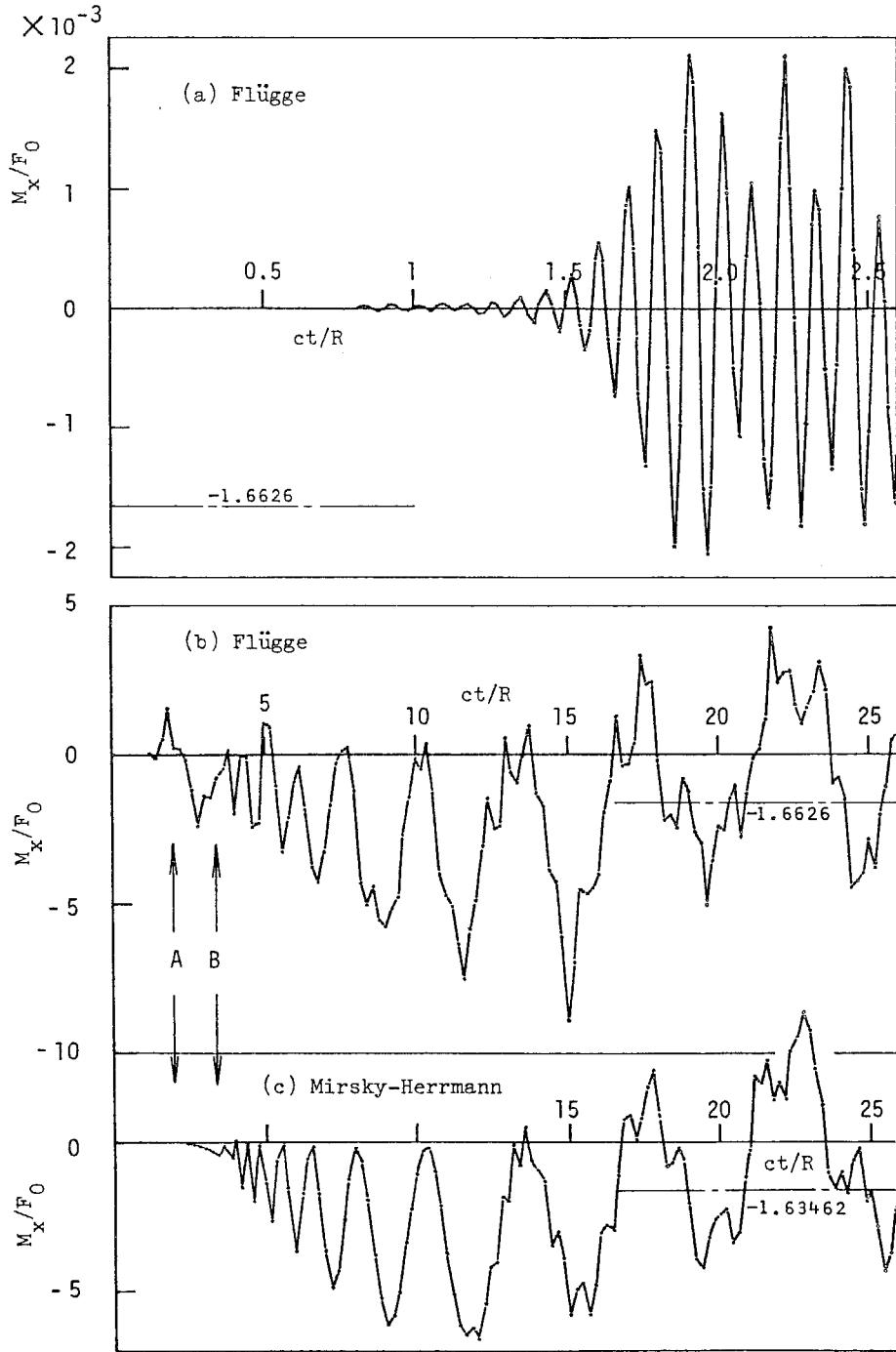


図4.10 円筒殻の固定部に生ずる曲げモーメントの時間変動

$\left[\begin{array}{l} r/R=0.02, l/R=2, x=\theta=0, m=200 \\ \text{一点鎖線は静的結果, } \nu=0.3 \\ \text{Mirsky-Herrmann \& Flüge (II)} \end{array} \right]$

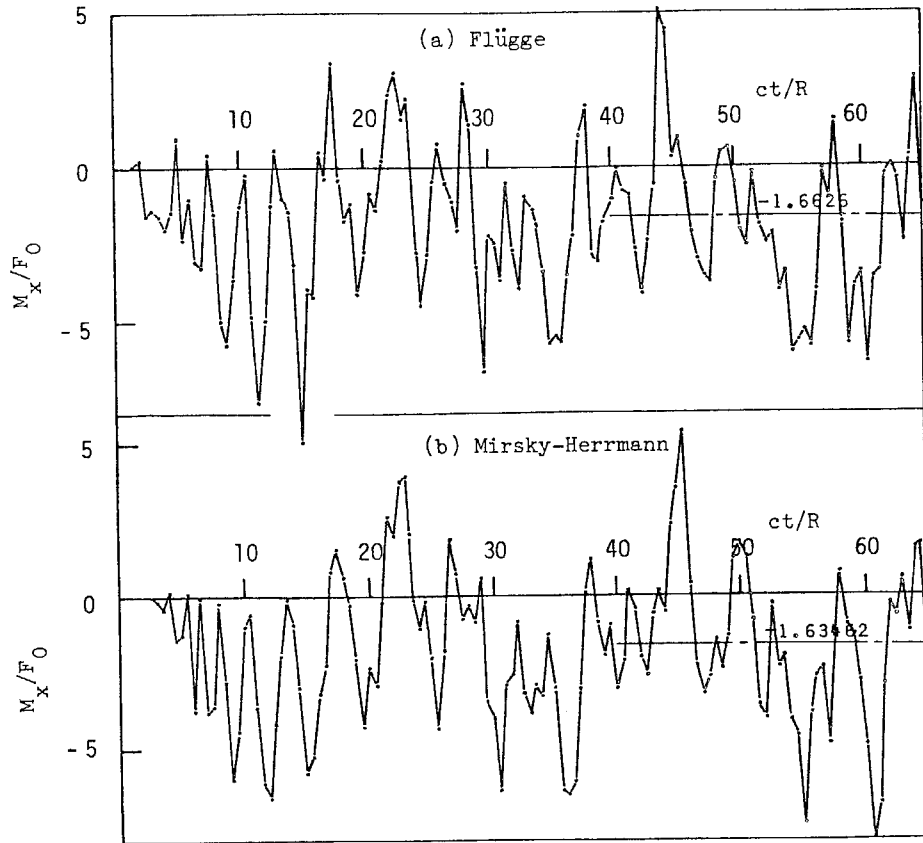


図4.11 円筒殻の固定部に生ずる曲げモーメントの時間変動
($h/R=0.02, l/R=2, \alpha=\theta=0, m=200$)

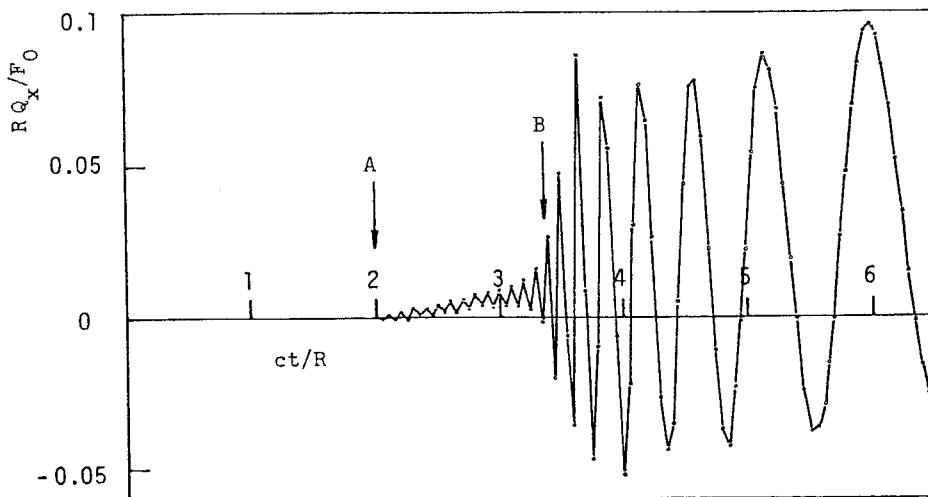


図4.12 円筒殻の固定部に生ずる面外せん断力の時間変動
($h/R=0.02, l/R=2, \alpha=\theta=0, m=200$)
(Mirsky-Herrmann の理論)

てから徐々に現象が現われている。しかし, Donnell および Flüge の理論では, m による級数の収束が著しく悪く数値計算不能であった。このように, 面外方向せん断力にいたるといゆる修正理論 (Mirsky-Herrmann) と古典理論 (Flüge) とに極めて大きな差の現われることがわかった。

次に肉厚を5倍にして, 肉厚比 $H=0.1$, 長さ比 $L=2$ の円筒殻に対して計算を行った。最低次の無次元固有周期 τ_1 はいずれの理論によっても 22.4 である。図 4.13 および 4.14 は固定部における曲げモーメント M_x の時間変動を並進慣性をすべて考慮した Flüge (II) および Mirsky-Herrmann の両理論により計算した結果であり, 図 4.14 の時間初期の部分拡大したものが, 図 4.13 である。図 4.13 に見られるように Flüge の理論による衝撃初期の応答には, 図 4.10 において解説したような現象の先行が見られる。また図 4.14 に見られるように, (a) の Flüge の理論による結果は (b) の結果に比べて高次の振動モードが強調され過ぎているように思われる。円筒殻の肉厚が厚くなると Flüge の理論では高次の振動モードがより強調されるようになり, Mirsky-Herrmann の理論では逆に高次の振動モードが弱まる傾向がある。図 4.15 は, 固定部における垂直力 N_x の時間変動を並進慣性をすべて考慮した Flüge の理論により計算した結果である。この合応力成分の応答には何ら矛盾は見られず, Mirsky-Herrmann の理論により計算した結果と完全に一致する。図 4.16 は, やはり固定部における面外せん断力 Q_x の時間変動を Mirsky-Herrmann の理論により計算した結果である。 Q_x については図 4.12 の場合と同じように, 古典理論では収束が悪く数値計算ができなかった。

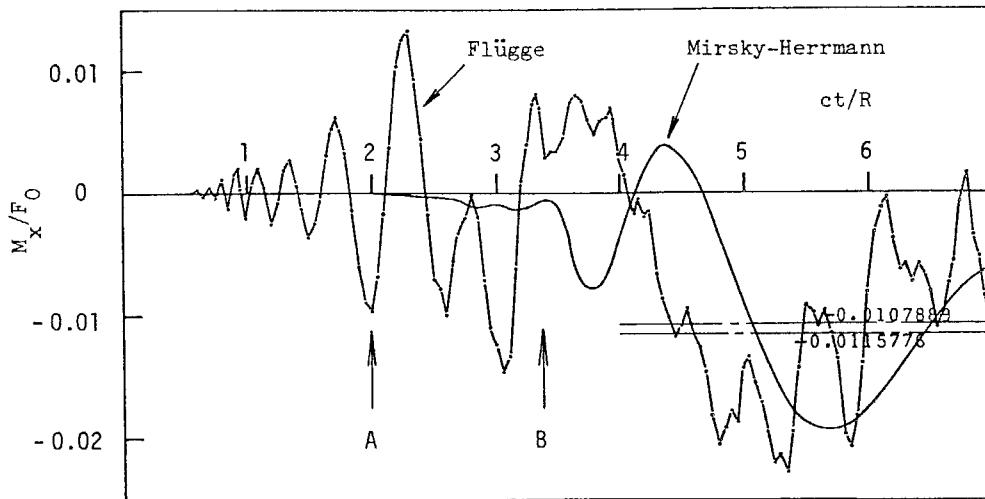


図4.13 円筒殻の固定部に生ずる曲ゲモーメントの時間変動

($h/R=0.1, l/R=2, \alpha=\theta=0, m=130$)
 (一点鎖線は静的結果, Flügge & Mirsky-Herrmann)

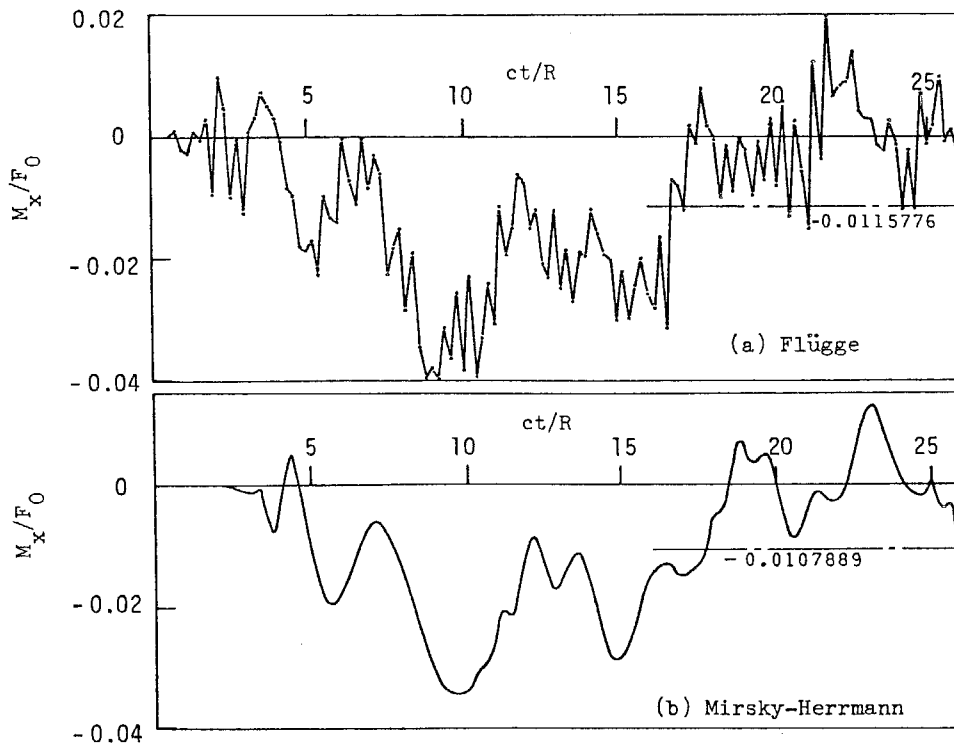


図4.14 円筒殻の固定部に生ずる曲ゲモーメントの時間変動

($h/R=0.1, l/R=2, \alpha=\theta=0, m=130$)
 (一点鎖線は静的結果, Flügge & Mirsky-Herrmann)



図4.15 円筒殻の固定部に生ずる垂直力の時間変動

($h/R=0.1, l/R=2, \alpha=\theta=0, m=130$)
Flügge(II), 一点鎖線は静的結果

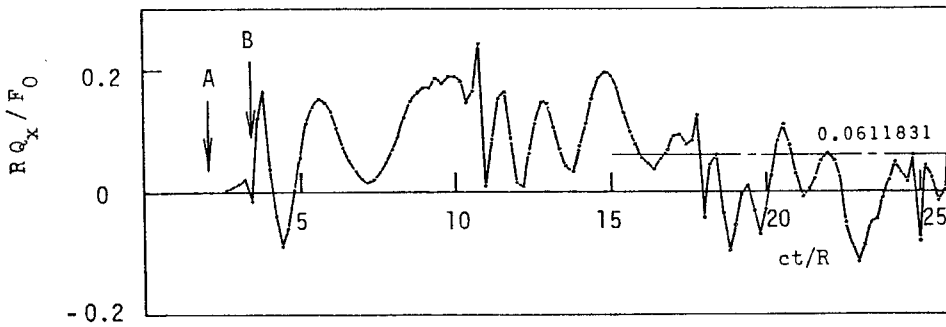


図4.16 円筒殻の固定部に生ずる面外せん断力の時間変動

($h/R=0.1, l/R=2, \alpha=\theta=0, m=300$)
Mirsky-Herrmann, 一点鎖線は静的結果

最後に長さを4倍にして肉厚比 $H=0.1$, 長さ比 $L=8$ の円筒殻に対して計算を行った。この円筒殻の最低次の無次元固有周期 $T_1 (=2\pi/\lambda_1)$ は Flügge の理論によると, 188 である。

図4.17 および 4.18 は先端における半径方向変位 w と固定部における垂直力 N_x の時間変動を三種類の古典理論により計算した結果である。Flügge および Donnell の両理論による結果は衝撃初期には一致しているが, 時間の経過とともに振幅および周期ともに大きく異なっている。面外並進慣性だけを考慮した Flügge の理論による結果は初期の応答から異なっているが, 応答の最大値については並進慣性をすべて考慮した場合の結果と一致している。なお, Minsky-Herrmann の理論による結果は Flügge の理論による結果と完全に一致する。

図4.19 は, 固定部における曲げモーメント M_x の衝撃初期の応答を四種類の理論により計算した結果である。Donnell と Flügge の両理論による結果は完全に一致し, 面外並進慣性だけを考慮した Flügge の理論による結果は, これらとは異なった応答を示す。Minsky-Herrmann の理論による結果に対して, 古典理論による結果ではやはり現象の先行が見られるが, その差は円筒殻が短い場合よりも目立たなくなっている。古典理論では, 円筒殻の長さが長くなると高次の振動モードの強調される傾向が弱くなり, 短い場合の衝撃初期に見られる矛盾点や定常振動状態に見られる過大な応答が目立たなくなり, Minsky-Herrmann の理論による結果に近づく傾向をみせるようになる。この傾向は, 面内並進慣性を無視した場合の結果についても見られる。図4.20 は, 古典理論による面外有効せん断力 T_x と修正理論による面外せん断力 Q_x を計算した結果

である。 T_x は円筒殻が短い場合には計算ができなかった合応力成分であるけれども、長くなると数値計算が可能となってくる。これも、円筒殻が長くなると古典理論における高次の振動モードが小さくおさえられるようになるための影響である。図4.20に見られる傾向は、図4.19において見られた傾向と全く一致する。

以上により次のような傾向がまとめられることになる。

古典理論すなわちFlüggeの理論による応答と修正理論すなわちMinsky-Herrmannの理論による応答とは、変位成分および面内合応力成分すなわち垂直力や面内せん断力については完全に一致するが、面外合応力成分すなわち曲げモーメントや面外せん断力については大いにその様相が異なる。したがって、面外合応力成分を対象として解析を行う場合には、古典理論は応力波の伝播現象とは矛盾した結果を与えるので、目的によっては適当でない場合が多い。しかし、比較的低次の固有振動数や静的応力および変形を求める場合には、古典理論でも十分な精度をもっている。

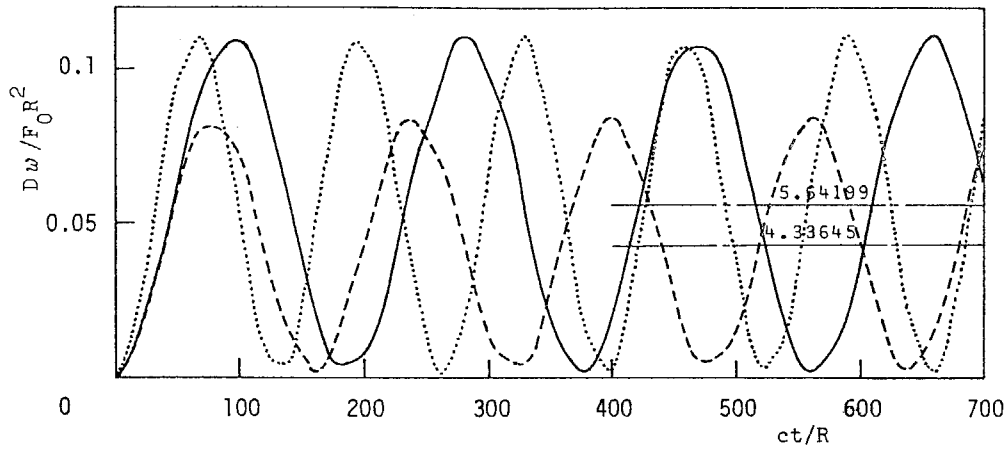


図4.17 円筒殻の先端における半径方向変位の時間変動
 $(r/R=0.1, l/R=8, x=l, \theta=0, m=40)$
 — Flügge (II), Flügge (III), ---- Donnell

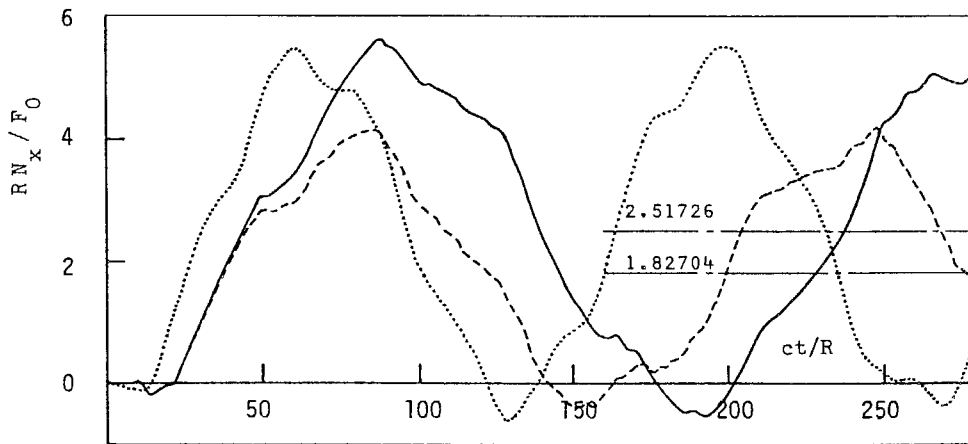


図4.18 円筒殻の固定部における垂直力の時間変動
 $(r/R=0.1, l/R=8, x=\theta=0, m=90)$
 — Flügge (II) 並進慣性すべて考慮
 ---- Donnell
 Flügge (III) 面内並進慣性無視

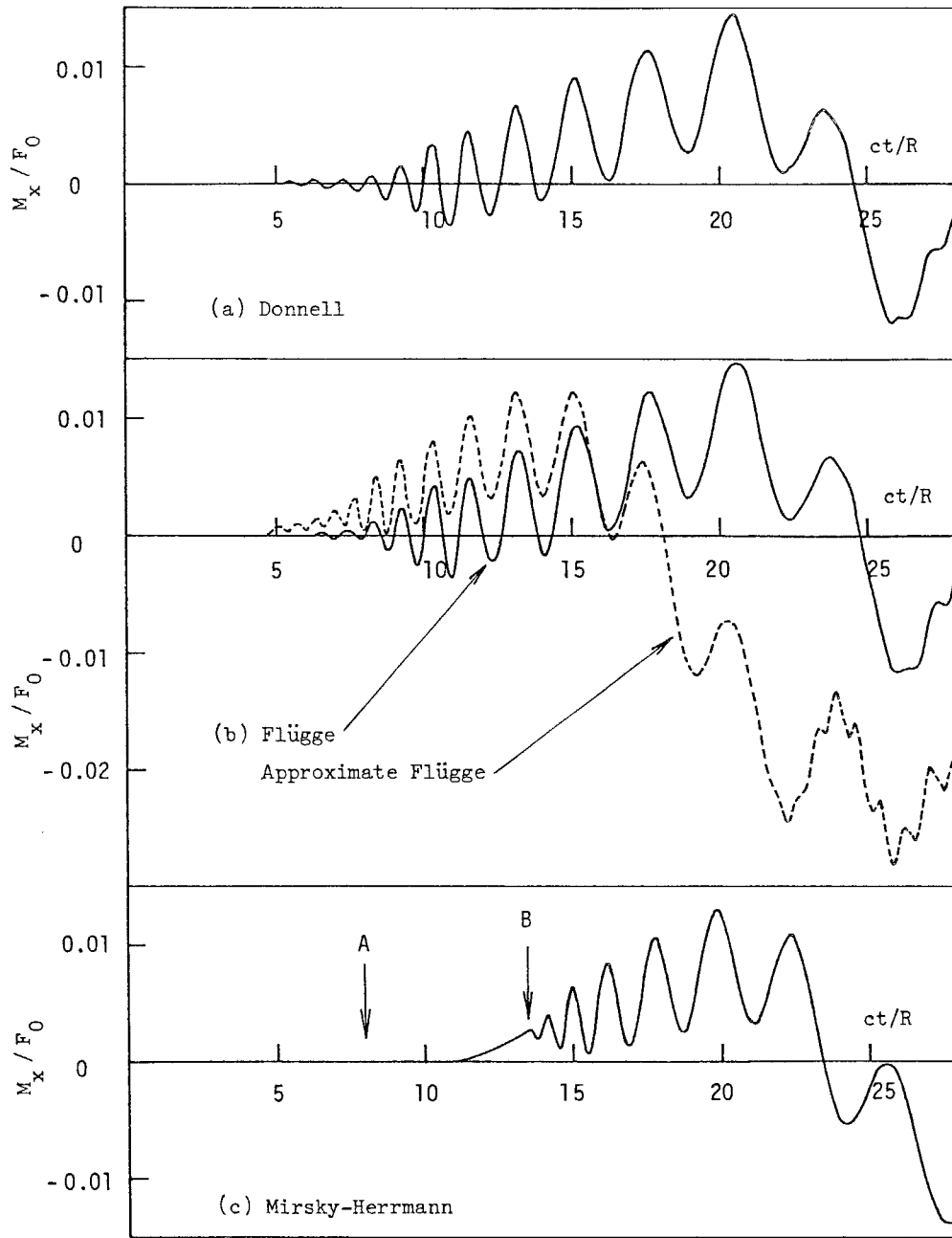


図4.19 円筒殻の固定部における曲げモーメントの時間変動

$$\left(k/R=0.1, l/R=8, \alpha=\theta=0, m=130 \right)$$
$$\left(\text{Donnell, Flügge (II) \cdot (III), Mirsky-Herrmann} \right)$$

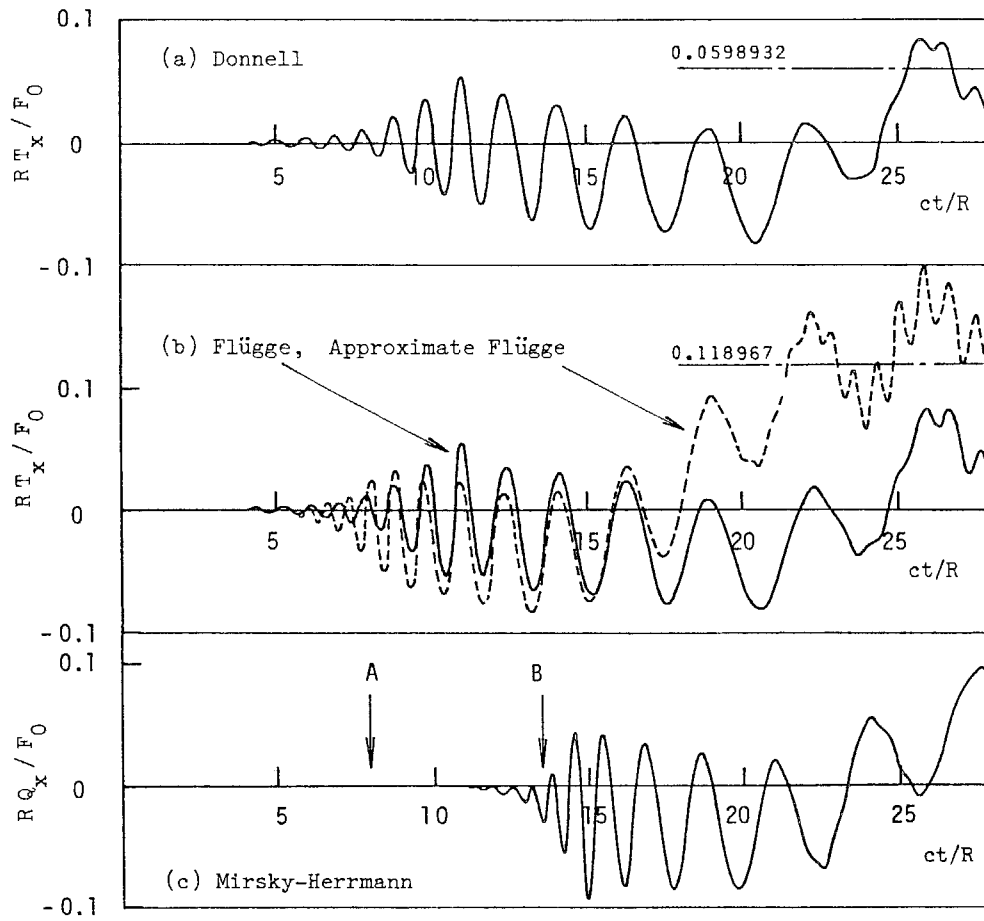


図4.20 円筒殻の固定部における面外有効せん断力
および面外せん断力の時間変動

$$\left[\begin{array}{l} h/R=0.1, \quad l/R=8, \quad x=\theta=0, \quad m=130 \\ \text{Donnell, Flüge (II) \cdot (III), Mirsky-Herrmann} \\ \text{一点鎖線は静的結果} \end{array} \right]$$

4.6 結 言

本章では、片持ち円筒殻の先端にはり状曲げ衝撃荷重がステップ関数状に作用する問題を取り上げ、変位および合応力成分の応答を、古典理論としては Donnell および Flügge の両理論により、修正理論としては Mirsky-Herrmann の理論によりそれぞれ解析した。三種類の理論を用いることにより、円筒殻のはり状曲げ衝撃問題に対する各理論固有の解析方法を示すとともに、各理論の特徴となっている諸因子が数値結果に与える影響について明らかにした。修正理論と古典理論との解析上の相違は、主に支配方程式が前者は10階、後者は8階のそれぞれ微分方程式である点に由来する。具体的には、この微分方程式から導かれる特性方程式が4次に帰着されるか5次に帰着されるかの違いとなって現われる。このことは、特性方程式の根が閉形解で与えられるか試行錯誤法により求めなければならないかの違いともなるので、数値計算上の手数が大きく異なることを意味する。しかも、古典理論では簡単化された単一の変位の方程式が導かれているので、これを解けばよいが、修正理論ではこの式が導かれていないために5元連立微分方程式のまま解かなければならない。これらの原因により、最終的な応答を計算するのに要する時間に大きな隔りがある。したがって、なるべくならば修正理論は使いたくないというのが本音である。しかし、修正理論はやはりそれなりに優れた点をもっているので、解析の目的によって使い分けをする必要があるように思う。そのためには、古典

理論と修正理論との違いが、具体的にどのような形となって現われるかを調べておかなければならない。

Flügge の理論と Donnell の理論の解析上の違いについて若干触れておく。衝撃応答の解は、荷重が静的に作用した場合の解（静的解）と各次の固有振動モードの重ね合わせによる解（動的解）との和で表されている場合が多い。つまり静的解も必要となるわけであるが、円筒殻のはり状曲げ変形の静的問題では、第2章の2.8.3項（p.2-86）でも触れたように二次近似理論による変位の方程式が特別な形となる。したがって、円筒殻のはり状曲げ衝撃問題の解を導くためには、静的解と動的解を個別に解析しなければならぬ手間を要することになる。ところが、Donnell の理論だけは別で、静的解と動的解とが同じ形式の解ですむので解析の手間は半分になる。この点は大変に便利ではあるが、反面精度に問題が生ずるので、逆にこの点を調べておく手間が必要となる。

以上の目的に沿って調べたのが、本章の主な内容である。以下に明らかになった各理論の特徴を、個条書にして示すことにする。

- (1) 静荷重のもとでの変形や応力を解析するのが目的であれば、修正理論を用いる必要は特になく、古典理論で十分である。修正理論である Minsky-Herrmann の理論は動的な問題の解析に利用して初めてその存在価値がある。
- (2) 円筒殻の肉厚が著しく厚くなる ($h/R > 0.1$) かまたは長さが極端に短くなる ($h/l > 0.1$)、古典理論と修正理論との差が目立ってくる。しかし、このような形状になると理論の基礎となっている Kirchhoff-Love の仮定そのものがある。

やしくなるので、違いがあるからといって修正理論による結果が正しいという保証はないわけである。したがって、修正理論を用いることによって円筒殻の形状に関して適用範囲が広くなるとは、考えない方がよいと思う。

- (3) 円筒殻に生ずる変位と面内合応力成分（垂直力・面内せん断力）の応答については、回転慣性とせん断変形の影響はほとんどない。したがって、Flüggeの理論は応力波の伝ば現象を正確に表現し、Minsky-Herrmannの理論と全く同等である。
- (4) 円筒殻に生ずる面外合応力成分（曲げモーメント・ねじりモーメント・面外せん断力）の応答には、回転慣性とせん断変形の影響が強く現われ、Flüggeの理論では正しい解を得ることができない場合が多い。このような場合には、面倒でもMinsky-Herrmannの理論を用いなければならない。
- (5) Donnellの理論は、短い円筒殻であれば、肉厚に関係なくFlüggeの理論と全く同等の結果を与える。円筒殻が長い場合でもFlüggeの理論に対する誤差は時間の経過とともに現われてくるので、衝撃初期であればやはりFlüggeの理論と全く同等である。はり状曲げ変形問題では、Donnellの理論による解析はFlüggeの理論に比べて大分簡単であり、数値計算も楽になるので、前述の適用範囲を心得て利用すれば大変に便利である。
- (6) 面内並進慣性を無視し、面外並進慣性だけにした理論によると応力波の伝ば現象を全く表さなくなるが、応答の最大値にだけ注目すればあまり大きな誤差は生じない。
- (7) たわみだけを対象とした場合、せん断変形を考慮したは

り理論は広い適用範囲をもっている。しかし、はり理論は固定部付近の局部応力や断面の変形に起因する応力を表現することができないので、その利用は変形やごく低次の固有振動数の解析に止めるべきである。

参 考 文 献

- [1] 溝口孝喜, 薄肉片持管のせん断遅れについて(薄肉円筒の一般的解法 例題4), 機論, 24巻, 139号 (昭33), 142-148.
- [2] Rish, R. F., Forces in Cylindrical Chimneys Due to Wind, Proc. Inst. Civ. Engr., Vol. 36, No. 4 (1967), pp. 791-803.
- [3] Krajcinovic, D., Semimembrane Analysis of Cylindrical Shells Subjected to Wind Loading, Trans. ASME, Ser. E, Vol. 37, No. 4 (1970), pp. 995-1001.
- [4] Gopalacharyulu, S. & Johns, D. J., Cantilever Cylindrical Shells Under Assumed Wind Pressures, Proc. Amer. Soc. Civ. Engr., Vol. 99, No. EM5 (1973), pp. 943-956.

第 5 章

衝撃的変位が与えられた円筒殻

5.1 緒 言	264
5.2 Mirsky-Herrmann の理論による解析	267
5.3 Flügge の理論による解析	276
5.4 数値結果	282
5.5 結 言	312
参 考 文 献	314

5.1 緒 言

円筒殻の曲げ衝撃に関する問題について、第3章および第4章では外力の大きさと時刻変化が既知である場合を対象として、その解析方法ならびに結果を示した。

しかし現実の衝撃問題では、被衝撃体に作用している外力の大きさや時刻変化を知る事が困難な場合が多い。たとえば簡単な例として、二物体の衝突問題を挙げる事ができる。

この問題では、二物体相互に作用する力を知ることは多くの場合まず不可能である。別な例としては、地震荷重をうける構造物に見られるような、対象とする構造物の基礎が衝撃荷重をうけそのために基礎の衝撃的な移動をうける問題いわゆる変位衝撃の問題を挙げる事ができる。この場合では、構造物に働く荷重を力として検出するのは極めて困難であるため、基礎の動きすなわち変位または変位速度を荷重条件として与えて応答解析を行う方法が必要になる。

本章では、後者の例に見られるような変位衝撃をうける円筒殻の問題を取り扱うことにする。

この種の問題は、構造物の耐震設計上きわめて重要であるため従来より多くの研究が行われている。^{[1]~[5]}しかし複雑な構造物を対象とするため、そのほとんどは有限要素法に代表される数値解析かあるいは実験的な解析に限られている。基本的な部材に対して、変位衝撃のもとでの動弾性学的な応答解析を行った例は非常に少い。著者の知る限りではMiklowitzの論文が数少ない貴重な例であるように思われる。Miklowitzは

一端固定の半無限長および有限長帯板が固定基礎の衝撃的な移動をうける問題(面内せん断)を二次元動弾性理論により厳密に解析し、固定部の角においてせん断ひずみは有限であるが垂直ひずみは無限大となることを示した。^[6]しかし、厳密な理論に基づいているためにその解析方法が実用的ではないのが惜まれる。したがって、この種の問題を板理論のような構造理論と呼ばれる近似理論により解析する実用的な方法が求められている。

そこで本章では、図5.1のように長さ l の片持ち円筒殻が固定基礎の衝撃的な移動をうける場合を対象として、変位衝撃のもとでの円筒殻に生ずる変位および応力の過渡応答ならびに定常応答をラプラス変換法により解析する方法を示した。

固定基礎の動きは関数 $f(t)$ で定義するものとし(荷重関数と呼ぶ)、図5.2に示したような余弦状、指数関数状およびランフ状の立ち上がりをもって一定値に達する三種類の関数を用いるものとした。これらの荷重関数の導関数すなわち変位速度は図5.2に示したような特徴をもっている。すなわち余弦状の場合は連続関数、指数関数状の場合は時間 $t=0$ において不連続、ランフ状の場合は時間 $t=0$ および t において不連続となる。

解析には、修正理論として Mirsky-Herrmann の理論、古典理論として Flügge の理論を用い、片持ち円筒殻の先端は自由と固定の二種類を対象とした。以上の解析に基づいて数値計算を行い、円筒殻に生ずる変位および応力に及ぼす理論すなわち円筒殻の面外せん断変形の影響、固定基礎の移動速度とその時刻変化の影響および円筒殻形状と境界条件の影響を明ら

かにした。

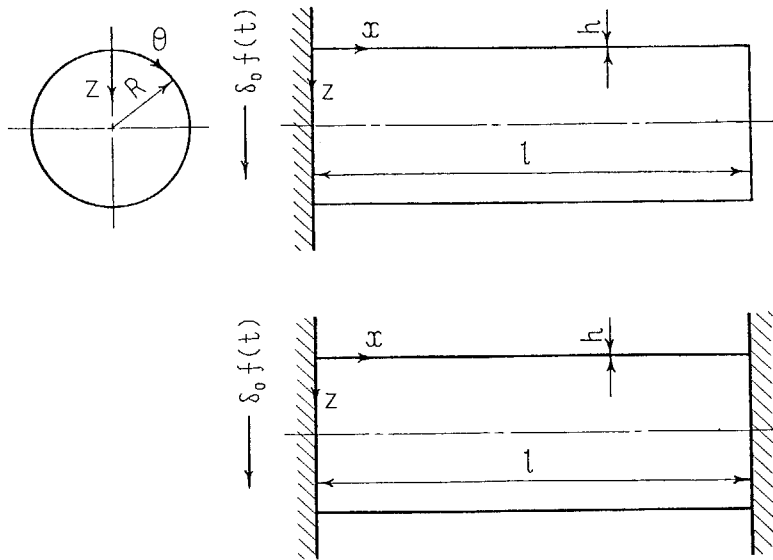
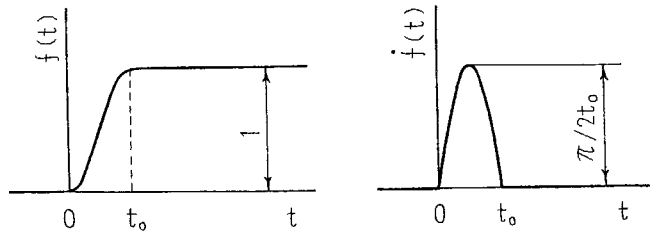
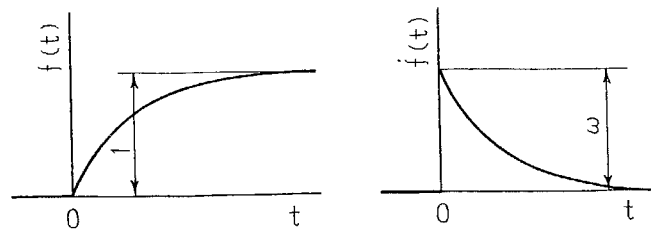


図5.1 固定基礎の衝撃的な移動をうける片持ち円筒殻

(A) 余弦状の立ち上がりを含む場合



(B) 指数関数状の立ち上がりを含む場合



(C) ランプ状の立ち上がりを含む場合

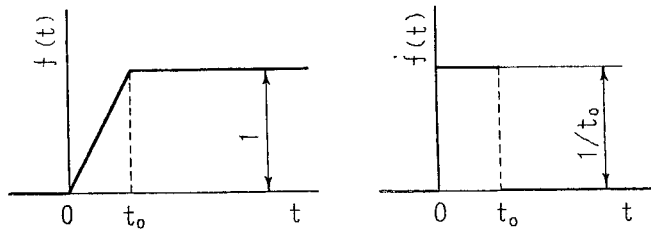


図5.2 荷重関数とその導関数

5.2 Mirsky-Herrmann の理論による解析

図 5.1 のように平均半径 R , 肉厚 h , 長さ l の片持ち円筒殻の固定基礎が図 5.2 に示したような荷重関数 $f(t)$ に従って δ_0 だけ平行移動する問題を考える。先端が自由である場合を対象とすると, 境界条件は修正理論によれば

(i) 移動基礎の固定縁 ($x=0$) において

$$u = \psi_x = \psi_\theta = 0 \quad (5.1a)$$

$$v = \delta_0 f(t) \sin \theta \quad (5.1b)$$

$$w = \delta_0 f(t) \cos \theta \quad (5.1c)$$

(ii) 先端の自由縁 ($x=l$) において

$$N_x = M_x = M_{x\theta} = Q_x = N_{x\theta} = 0 \quad (5.1d)$$

となる。したがって, 円筒殻の振動ははり状変形モードだけとなるので, 中央面上の変位成分 (u, v, w) と断面の傾き角成分 (ψ_x, ψ_θ) の変数分離解は前章と同じく

$$u/R = U \cos \theta \quad (5.2a) \quad \psi_x = \Psi_x \cos \theta \quad (5.2b)$$

$$v/R = V \sin \theta \quad (5.2c) \quad \psi_\theta = \Psi_\theta \sin \theta \quad (5.2d)$$

$$w/R = W \cos \theta \quad (5.2e)$$

となる。時間 $t=0$ においては変位および変位速度は零であるから, 次の初期条件が成立する。

$$(f)_{t=0} = (\partial f / \partial t)_{t=0} = 0 \quad (5.3)$$

これから先の解析は前章の 4.2 節と全く同様の手順を経ることになるので, 途中を省略することにする。解析の結果, ラプラス変換された変位成分 ($\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$) および傾き角成分 ($\bar{\Psi}_x, \bar{\Psi}_\theta$) の解は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{\Psi}_x \\ \bar{v} \\ \bar{\Psi}_0 \\ \bar{w} \end{pmatrix} = \frac{\delta_0 \bar{f}(p)}{R|B|} \sum_{j=1}^{10} \begin{pmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \\ 1 \end{pmatrix} (B_{4j} + B_{5j}) e^{\alpha_j s} \quad (5.4)$$

ここで、 $[B]$ は10次の行列であり、 i 行 j 列の成分 b_{ij} は次のように定義されるものである。

$$\begin{aligned} b_{1j} &= e_j, & b_{2j} &= f_j, & b_{3j} &= h_j, & b_{4j} &= g_j, & b_{5j} &= 1 \\ b_{6j} &= \zeta_{1j} e^{\alpha_j L}, & b_{7j} &= \zeta_{2j} e^{\alpha_j L}, & b_{8j} &= \zeta_{3j} e^{\alpha_j L} \\ b_{9j} &= \zeta_{4j} e^{\alpha_j L}, & b_{10j} &= \zeta_{5j} e^{\alpha_j L} \end{aligned}$$

B_{ij} は成分 b_{ij} に関する余因子である。

本章で扱っている問題のように荷重の時刻変化(ここでは $f(t)$ に相当する)がステップ関数でない場合にはラプラス逆変換を行う際に注意を払わなければならない。

単純に式(5.4)をそのままの形で留数定理によってラプラス逆変換を行い級数解を導くと、収束が極めて悪い数値計算には向かない不都合な形式の解となってしまう。対策としてはあらかじめ収束の悪い部分を静的解として閉じた形式で分離しておく方法を採用する。そのために、式(5.4)に以下のような工夫を施すことになる。

記述を簡潔にするために、式(5.4)を

$$\bar{h}(p) = \bar{f}(p) \cdot \bar{g}(p) \quad (5.5)$$

のように表すことにする。ここで、 $\bar{h}(p)$ は式(5.4)の左辺、 $\bar{g}(p)$ は右辺の $\bar{f}(p)$ を除いた部分である。

式(5.5)のラプラス逆変換 $\mathcal{L}^{-1}\{\bar{h}(p)\}$ は合成則により

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{h}(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(p) \cdot \bar{g}(p)\} = \int_0^t f(s) \cdot g(t-s) ds$$

(5.6)

となる。しかし、このままでは収束の悪い解となってしまふ。

荷重関数 $f(t)$ は閉じた式で与えられているものとすれば、微分しても収束に何の問題も生じない。そこで、式(5.6)を

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{h}(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{p \bar{f}(p) \times \frac{\bar{g}(p)}{p}\right\} = \int_0^t \frac{df(s)}{ds} G(t-s) ds \quad (5.7)$$

ここで、 $G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\bar{g}(p)}{p}\right\}$

のように書き換えてやることにする。したがって、 $\bar{G}(p) = \bar{g}(p)/p$ のラプラス逆変換解を与えてやればよいことになる。

$\bar{G}(p)$ は式(5.4)より次のようになる。

$$\bar{G}(p) = \frac{\delta_0}{R p |B|} \sum_{j=1}^{10} \begin{pmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \\ 1 \end{pmatrix} (B_{4j} + B_{5j}) e^{\alpha_j s} \quad (5.8)$$

このラプラス変換パラメータ p の関数 $G(p)$ は、前章の 4.2 節と同様に原点および虚軸上だけに極を有することになる。

すなわち、ラプラス逆変換結果は式(4.14)との対応から

$$G(t) = \begin{pmatrix} U^s \\ \Psi_x^s \\ V^s \\ \Psi_\theta^s \\ W^s \end{pmatrix} - \frac{\delta_0}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^{10} |B_k^*|} \sum_{j=1}^{10} \begin{pmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \\ 1 \end{pmatrix} (B_{4j} + B_{5j}) e^{\alpha_j s} \right] \frac{\cos \lambda_m t}{\lambda_m^2} \quad (5.9)$$

$\lambda = i\lambda_m$

ここで、右辺第 1 項は固定基礎が静的に δ_0 だけ平行移動し

た場合の解であり，静的問題としての別個の解析により導かれる閉じた形の式である。右辺第2項は固有振動モードの重ね合せを意味しているが，発散級数である。しかし，式(5.7)の積分により収束可能な解となる。なお，式(5.9)は固定基礎が時間 $t=0$ の瞬間に δ_0 だけ平行移動した場合の解となっている。

持って回った記述になったが，要するに最初から固定基礎がステップ関数状に移動するといった現実には起り得ない問題を解いて，その解を合成則するわけ式(5.7)の積分に代入して最終的な解を誘導しても全く同じことである。静的解を閉形解として分離する処置をとっておけば，どちらの方法によっても全く同じである。

結局，変位成分 (U, V, W) および傾き角成分 (Ψ_x, Ψ_θ) に対する解は式(5.9)と式(5.7)に代入することにより得られ，以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} U \\ \Psi_x \\ V \\ \Psi_\theta \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^s \\ \Psi_x^s \\ V^s \\ \Psi_\theta^s \\ W^s \end{pmatrix} + f(t) - \frac{\delta_0}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^{10} |B_{k\ell}^*|} \sum_{j=1}^{10} \begin{pmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \\ 1 \end{pmatrix} (B_{4j} + B_{5j}) e^{\alpha_j \xi} \right] \frac{F_m(t)}{\lambda_m^2} \Big|_{\lambda = i\lambda_m} \quad (5.10)$$

ここで，静的解の求め方は前章の4.2節で示したとおりであるが，先端が自由の片持ち円筒殻では解析を行うまでもなく次のとおりである。

$$[U^s, \Psi_x^s, V^s, \Psi_\theta^s, W^s] = [0, 0, \delta_0/R, 0, \delta_0/R]$$

無次元固有振動数 $\lambda_m (= R\rho_m/c)$ は超越方程式 $|B|=0$ の根

として与えられ、 $f(\tau)$ は荷重関数の無次元表示であり、 $F_m(\tau)$ は次のとおりである。

$$F_m(\tau) = \int_0^\tau \frac{df(s)}{ds} \cos \lambda_m(\tau-s) ds \quad (5.11)$$

図 5.2 に示した荷重関数に対する積分結果はそれぞれ次のようになる。

(A) 余弦状の立ち上がりを有する場合

$$f(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\tau_0} \tau\right) & (0 \leq \tau < \tau_0) \\ 1 & (\tau_0 \leq \tau) \end{cases} \quad (5.12a)$$

$$F_m(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\pi^2/\tau_0^2}{\pi^2/\tau_0^2 - \lambda_m^2} (\cos \lambda_m \tau - \cos \frac{\pi}{\tau_0} \tau) & (0 \leq \tau < \tau_0) \\ \frac{1}{2} \frac{\pi^2/\tau_0^2}{\pi^2/\tau_0^2 - \lambda_m^2} \{ \cos \lambda_m \tau + \cos \lambda_m(\tau_0 - \tau) \} & (\tau_0 \leq \tau) \end{cases} \quad (5.12b)$$

ただし、 $\pi/\tau_0 = \lambda_m$ の場合には

$$F_m(\tau) = \begin{cases} \lambda_m \tau (\sin \lambda_m \tau) / 4 & (0 \leq \tau < \tau_0) \\ \lambda_m \tau_0 (\sin \lambda_m \tau) / 4 & (\tau_0 \leq \tau) \end{cases} \quad (5.12c)$$

(B) 指数関数状の立ち上がりを有する場合

$$f(\tau) = 1 - e^{-\Omega \tau} \quad (5.13a)$$

$$F_m(\tau) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \lambda_m^2} (\cos \lambda_m \tau - e^{-\Omega \tau} + \frac{\lambda_m}{\Omega} \sin \lambda_m \tau) \quad (5.13b)$$

(C) ランプ状の立ち上がりを有する場合

$$f(\tau) = \begin{cases} \tau/\tau_0 & (0 \leq \tau < \tau_0) \\ 1 & (\tau_0 \leq \tau) \end{cases} \quad (5.14a)$$

$$F_m(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_0 \lambda_m} \sin \lambda_m \tau & (0 \leq \tau < \tau_0) \\ \frac{1}{\tau_0 \lambda_m} \{ \sin \lambda_m \tau - \sin \lambda_m (\tau - \tau_0) \} & (\tau_0 \leq \tau) \end{cases} \quad (5.14b)$$

式(5.10)において, $[B_k^*]$ は 10 次の行列であり, i 行 j 列の成分 b_{ij}^* は以下のようになる。

(i) $j \neq k$ のとき

$$b_{ij}^* = b_{ij}$$

(ii) $j = k$ のとき

$$b_{1j}^* = E_j, \quad b_{2j}^* = F_j, \quad b_{3j}^* = H_j, \quad b_{4j}^* = G_j, \quad b_{5j}^* = 0$$

$$b_{6j}^* = (L\beta_j \zeta_{1j} + z_{1j}) e^{\alpha_j L}, \quad b_{7j}^* = (L\beta_j \zeta_{2j} + z_{2j}) e^{\alpha_j L}$$

$$b_{8j}^* = (L\beta_j \zeta_{3j} + z_{3j}) e^{\alpha_j L}, \quad b_{9j}^* = (L\beta_j \zeta_{4j} + z_{4j}) e^{\alpha_j L}$$

$$b_{10j}^* = (L\beta_j \zeta_{5j} + z_{5j}) e^{\alpha_j L}$$

ここで, $(\zeta_{1j}, \dots, \zeta_{5j})_{j=1, \dots, 10}$ は

$$\zeta_{1j} = (e_j + k^2 f_j) \alpha_j + \nu g_j - \nu, \quad \zeta_{2j} = (e_j + f_j) \alpha_j + \nu h_j$$

$$\zeta_{3j} = -f_j + (g_j + h_j) \alpha_j, \quad \zeta_{4j} = -f_j + \alpha_j$$

$$\zeta_{5j} = -e_j + (g_j + k^2 h_j) \alpha_j$$

であり, $(z_{1j}, \dots, z_{5j})_{j=1, \dots, 10}$ は

$$z_{1j} = (E_j + k^2 F_j) \alpha_j + (e_j + k^2 f_j) \beta_j + \nu G_j$$

$$z_{2j} = (E_j + F_j) \alpha_j + (e_j + f_j) \beta_j + \nu H_j$$

$$z_{3j} = -F_j + (G_j + H_j) \alpha_j + (g_j + h_j) \beta_j$$

$$z_{4j} = -F_j + \beta_j$$

$$z_{5j} = -E_j + (G_j + k^2 H_j) \alpha_j + (g_j + k^2 h_j) \beta_j$$

であり, 係数 $(e_j, f_j, g_j, h_j)_{j=1, \dots, 10}$ は次式を解くことにより得られる。

$$\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} A_{55} \begin{pmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v\alpha_j \\ k_x p_1 \alpha_j \\ -p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

ここで、行列 $[A_{55}]$ は 5 次の対称行列 $[A]$ の 5 行 5 列に関する 4 次の小行列であり、 $[A]$ の k 行 l 列の成分 a_{kl} は

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\alpha_j^2 + (1+k^2)p_1 - \lambda_m^2, & a_{12} &= -k^2(\alpha_j^2 + p_1 + \lambda_m^2), & a_{13} &= -p_2\alpha_j \\ a_{14} &= 0, & a_{15} &= v\alpha_j, & a_{22} &= -k^2\alpha_j^2 + p_1(k^2 + k_x) - k^2\lambda_m^2, & a_{23} &= 0 \\ a_{24} &= -k^2p_2\alpha_j, & a_{25} &= -k_x p_1 \alpha_j, & a_{33} &= p_1\alpha_j^2 - p_3 + \lambda_m^2 \\ a_{34} &= k^2p_1\alpha_j^2 + p_4 + k^2\lambda_m^2, & a_{35} &= p_3, & a_{44} &= k^2p_1\alpha_j^2 - p_4 + k^2\lambda_m^2 \\ a_{45} &= -p_4, & a_{55} &= k_x p_1 \alpha_j^2 - p_3 + \lambda_m^2 \end{aligned}$$

である。 $(E_j, F_j, G_j, H_j)_{j=1, \dots, 10}$ は

$$\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} A_{55} \begin{pmatrix} E_j \\ F_j \\ G_j \\ H_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\beta_j \\ k_x p_1 \beta_j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} D_{55} \begin{pmatrix} e_j \\ f_j \\ g_j \\ h_j \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

を解くことにより得られる。ここで、行列 $[D_{55}]$ は 5 次の対称行列 $[D]$ の 5 行 5 列に関する 4 次の小行列であり、 $[D]$ の k 行 l 列の成分 d_{kl} は次のとおりである。

$$\begin{aligned} d_{11} &= \gamma_{11}\beta_j + 1, & d_{12} &= \gamma_{12}\beta_j + k^2, & d_{13} &= \gamma_{13}\beta_j, & d_{14} &= 0 \\ d_{15} &= \gamma_{15}\beta_j, & d_{22} &= \gamma_{22}\beta_j + k^2, & d_{23} &= 0, & d_{24} &= \gamma_{24}\beta_j \\ d_{25} &= \gamma_{25}\beta_j, & d_{33} &= \gamma_{33}\beta_j - 1, & d_{34} &= \gamma_{34}\beta_j - k^2, & d_{35} &= 0 \\ d_{44} &= \gamma_{44}\beta_j - k^2, & d_{45} &= 0, & d_{55} &= \gamma_{55}\beta_j - 1 \end{aligned}$$

$$\text{ただし } \gamma_{11} = -2\alpha_j, \quad \gamma_{12} = -2k^2\alpha_j, \quad \gamma_{13} = -p_2, \quad \gamma_{14} = 0$$

$$\gamma_{15} = v, \quad \gamma_{22} = -2k^2\alpha_j, \quad \gamma_{23} = 0, \quad \gamma_{24} = -k^2p_2$$

$$\gamma_{25} = -k_x p_1, \quad \gamma_{33} = 2p_1\alpha_j, \quad \gamma_{34} = 2k^2p_1\alpha_j, \quad \gamma_{35} = 0$$

(274)

$$\gamma_{44} = 2k^2 p_1 \alpha_j, \quad \gamma_{45} = 0, \quad \gamma_{55} = 2k_x p_1 \alpha_j$$

β_j ($j=1, \dots, 10$) は

$$\beta_j = - \frac{\sum_{i=1}^5 |M_{ij}|}{\sum_{i=1}^5 |N_{ij}|}$$

である。ここで、 $[M_{ij}]$ および $[N_{ij}]$ は 5 次の行列であり、 l 行 l 列の成分をそれぞれ m_{kl} および n_{kl} とすると

(i) $l \neq i$ のとき $m_{kl} = n_{kl} = a_{kl}$

(ii) $l = i$ のとき $m_{kl} = (d_{kl})_{\beta_j=0}$, $n_{kl} = \gamma_{kl}$

となる。特性根 α_j ($j=1, \dots, 10$) は特性方程式 $|A| = 0$ から導かれる次のような α についての 10 次方程式の相異なる 10 根である。

$$a_{10} \alpha^{10} + a_8 \alpha^8 + a_6 \alpha^6 + a_4 \alpha^4 + a_2 \alpha^2 + a_0 = 0 \quad (5.17)$$

ここで、 $a_{10} = |X^{(10)}|$, $a_8 = \sum_{j=1}^5 |X_j^{(8)}|$, $a_6 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^5 |X_{ij}^{(6)}|$

$$a_4 = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^5 |X_{ij}^{(4)}|, \quad a_2 = \sum_{j=1}^5 |X_j^{(2)}|, \quad a_0 = |X^{(0)}|$$

であり、 $[X^{(10)}]$, $[X_j^{(8)}]$, $[X_{ij}^{(6)}]$, $[X_{ij}^{(4)}]$, $[X_j^{(2)}]$, $[X^{(0)}]$ は 5 次の行列であり、 l 行 l 列の成分をそれぞれ $\chi_{kl}^{(10)}$, $\chi_{kl}^{(8)}$, $\chi_{kl}^{(6)}$, $\chi_{kl}^{(4)}$, $\chi_{kl}^{(2)}$, $\chi_{kl}^{(0)}$ とすると、次のようになる。

(i) $\chi_{kl}^{(10)} = \gamma_{kl}$

(ii) $l = j$ のとき $\chi_{kl}^{(8)} = s_{kl}$

$l \neq j$ のとき $\chi_{kl}^{(8)} = \gamma_{kl}$

(iii) $l = i$ または $l = j$ のとき $\chi_{kl}^{(6)} = s_{kl}$

$l \neq i$ かつ $l \neq j$ のとき $\chi_{kl}^{(6)} = \gamma_{kl}$

(iv) $l = i$ または $l = j$ のとき $\chi_{kl}^{(4)} = \gamma_{kl}$

$l \neq i$ かつ $l \neq j$ のとき $\chi_{kl}^{(4)} = s_{kl}$

$$(v) \quad l = j \text{ のとき } \chi_{kl}^{(2)} = \gamma_{kl}$$

$$l = j \text{ のとき } \chi_{kl}^{(2)} = s_{kl}$$

$$(vi) \quad \chi_{kl}^{(0)} = s_{kl}$$

ただし, γ_{kl} および s_{kl} は以下のとおりである。

$$\gamma_{11} = -1, \quad \gamma_{12} = -k^2, \quad \gamma_{13} = \gamma_{14} = \gamma_{15} = 0, \quad \gamma_{21} = \gamma_{22} = -k^2$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{24} = \gamma_{25} = 0, \quad \gamma_{31} = -p_2, \quad \gamma_{32} = 0, \quad \gamma_{33} = p_1, \quad \gamma_{34} = k^2 p_1$$

$$\gamma_{35} = \gamma_{41} = 0, \quad \gamma_{42} = -k^2 p_2, \quad \gamma_{43} = \gamma_{44} = k^2 p_1, \quad \gamma_{45} = 0,$$

$$\gamma_{51} = 0, \quad \gamma_{52} = -k_x p_1, \quad \gamma_{53} = \gamma_{54} = 0, \quad \gamma_{55} = k_x p_1$$

$$s_{11} = (1+k^2)p_1 + \lambda^2, \quad s_{12} = -k^2(p_1 - \lambda^2), \quad s_{13} = -p_2, \quad s_{14} = 0$$

$$s_{15} = \nu, \quad s_{21} = -k^2(p_1 - \lambda^2), \quad s_{22} = (k^2 + k_x)p_1 + k^2 \lambda^2, \quad s_{23} = 0$$

$$s_{24} = -k^2 p_2, \quad s_{25} = -k_x p_1, \quad s_{31} = s_{32} = 0, \quad s_{33} = -p_3 - \lambda^2$$

$$s_{34} = p_4 - k^2 \lambda^2, \quad s_{35} = p_3, \quad s_{41} = s_{42} = 0, \quad s_{43} = p_4 - k^2 \lambda^2$$

$$s_{44} = -p_4 - k^2 \lambda^2, \quad s_{45} = -p_4, \quad s_{51} = s_{52} = 0, \quad s_{53} = p_3$$

$$s_{54} = -p_4, \quad s_{55} = -p_3 - \lambda^2$$

なお, 応力成分に対する解は変位成分の解を Minsky-Herrmann の構成方程式(2.15)に代入することにより簡単に得られるので, ここでは記載を省略する。

5.3 Flüge の理論による解析

図 5.1 の問題で先端が自由および固定の場合を対象とすると、古典理論による境界条件は次のようになる。

(i) 移動基礎の固定縁 ($x=0$) において

$$u = \partial w / \partial x = 0 \quad (5.18a)$$

$$v = \delta_0 f(t) \sin \theta \quad (5.18b)$$

$$w = \delta_0 f(t) \cos \theta \quad (5.18c)$$

(ii) 先端が自由縁 ($x=l$) の場合

$$N_x = M_x = T_x = S_x = 0 \quad (5.18d)$$

(iii) 先端が固定縁 ($x=l$) の場合

$$u = v = w = \partial w / \partial x = 0 \quad (5.18e)$$

ここで、 T_x および S_x は面外および面内方向有効せん断力である。そこで、殻の中央面上の変位成分 (u, v, w) を

$$u = U \cos \theta \quad (5.19a) \quad v = V \sin \theta \quad (5.19b)$$

$$w = W \cos \theta \quad (5.19c)$$

のような変数分離形で置くことができる。

基礎式には、回転慣性を無視した Flüge の理論による単純化された変位の方程式 (2.48) を用いるものとする。

これから先は前章の 4.3 節と全く同じ手順の解析になり、ラプラス変換された変位成分 ($\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$) の一般解は

$$\begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^8 \begin{bmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{bmatrix} c_j e^{\alpha_j \xi} \quad (5.20)$$

となる。ここで、 α_j ($j=1, \dots, 8$) は式 (2.48) から導かれる次の特

性方程式の相異なる 8 根である。

$$\alpha^8 + a_6 \alpha^6 + a_4 \alpha^4 + a_2 \alpha^2 + a_0 = 0 \quad (5.21)$$

$$\text{ここで } a_6 = -2(z - \nu) - \left(1 + \frac{1}{\rho_1}\right) \lambda^2$$

$$a_4 = \frac{1 - \nu^2}{k^2} + \left\{ \frac{1}{k^2} + 3 \left(1 + \frac{1}{\rho_1}\right) \right\} \lambda^2 + \frac{1}{\rho_1} \lambda^4$$

$$a_2 = - \left\{ \frac{3 + 4\rho_2}{k^2} + 3 \left(1 + \frac{1}{\rho_1}\right) \right\} \lambda^2 - \left\{ \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{1}{\rho_1}\right) + \frac{z}{\rho_1} \right\} \lambda^4$$

$$a_0 = \left(\frac{z}{k^2} + 1 + \frac{1}{\rho_1} \right) \lambda^2 + \left\{ \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{z}{\rho_1}\right) + \frac{1}{\rho_1} \right\} \lambda^4 + \frac{1}{k^2 \rho_1} \lambda^6$$

係数 (f_j, g_j) は

$$f_j = \frac{\alpha_j}{d_j} \left\{ -k^2 \alpha_j^4 + (\nu - 3\rho_1 k^4 + \frac{1 + \rho_1}{\rho_1} k^2 \lambda^2) \alpha_j^2 + 1 + k^2 \right. \\ \left. - \left(\frac{\nu}{\rho_1} - k^4 \right) \lambda^2 - \frac{1}{\rho_1} k^2 \lambda^4 \right\}$$

$$g_j = \frac{1}{d_j} \left\{ 2k^2 \alpha_j^4 - (2 + \nu + 2k^2 + \frac{1 + 2\rho_1}{\rho_1} k^2 \lambda^2) \alpha_j^2 + 1 \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\rho_1} + k^2 \right) \lambda^2 + \frac{1}{\rho_1} k^2 \lambda^4 \right\}$$

である。係数 c_j を $x=0$ および l における合計 8 個の境界条件式 (5.18) によって定めれば、変位成分のラプラス変換が得られ次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix} = \frac{\delta_0 \bar{f}(p)}{|B|} \sum_{j=1}^8 \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{pmatrix} (B_{3j} + B_{4j}) e^{\alpha_j \xi} \quad (5.22)$$

ここで、 $[B]$ は 8 次の行列であり、 i 行 j 列の成分 b_{ij} は次のようになる。

(i) 先端が自由の場合

$$b_{1j} = f_j, \quad b_{2j} = \alpha_j, \quad b_{3j} = g_j, \quad b_{4j} = 1$$

$$b_{5j} = \alpha_j^2 e^{\alpha_j L}, \quad b_{6j} = (\alpha_j f_j + \nu g_j + \alpha_j^2 - \nu) e^{\alpha_j L}$$

(278)

$$b_{7j} = \{ (\alpha_j^2 + p_1) f_j + (1 + p_1) \alpha_j g_j + \alpha_j^3 - (z - \nu) \alpha_j \} e^{\alpha_j L}$$

$$b_{8j} = \{ f_j - (1 + 3k^2) \alpha_j g_j + 3k^2 \alpha_j \} e^{\alpha_j L}$$

(ii) 先端が固定の場合

$$b_{1j} = f_j, \quad b_{2j} = \alpha_j, \quad b_{3j} = g_j, \quad b_{4j} = 1$$

$$b_{5j} = f_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{6j} = g_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{7j} = e^{\alpha_j L}, \quad b_{8j} = \alpha_j e^{\alpha_j L}$$

B_{ij} は成分 b_{ij} に関する余因子である。

式(5.22)を前節(5.2節)と同じ方法によりラプラス変換すれば、変位成分 (U, V, W) に対する解は以下のような形式で得られる。

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^s \\ V^s \\ W^s \end{pmatrix} f(\tau) - \delta_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{z}{\sum_{k=1}^8 |B_{k\ell}^*|} \sum_{j=1}^8 \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{pmatrix} (B_{3j} + B_{4j}) e^{\alpha_j \xi} \right]_{\lambda = i\lambda_m} \frac{F_m(\tau)}{\lambda_m^2} \quad (5.23)$$

$$\text{ここで } F_m(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{df(s)}{ds} \cos \lambda_m (\tau - s) ds$$

右辺第1項は固定基礎が静的に δ_0 だけ平行移動した場合の解であり、別個の解析により導かれる閉形解である。第2項は固有振動モードの重ね合せを意味し、 λ_m は超越方程式 $|B| = 0$ の根として与えられる無次元固有振動数である。 $[B^*]$ は8次の行列であり、 i 行 j 列の成分 b_{ij}^* は次のようになる。

(i) $j = \ell$ のとき

$$b_{ij}^* = b_{ij}$$

(ii) $j \neq \ell$ のとき

<先端が自由の場合>

$$b_{ij}^* = r_j \beta_j, \quad b_{2j}^* = \beta_j, \quad b_{3j}^* = s_j \beta_j, \quad b_{4j}^* = 0$$

$$b_{5j}^* = (z + L\alpha_j) \alpha_j \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{1j}^* = \{(1+L\alpha_j)f_j + (z+L\alpha_j+r_j)\alpha_j + \nu(s_j+Lg_j-L)\} \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{2j}^* = \{z\alpha_j f_j + (3+L\alpha_j)\alpha_j^2 - (z-\nu)(1+L\alpha_j) + (\alpha_j^2 + \rho_1)(Lf_j + r_j) \\ + (1+\rho_1)(1+L\alpha_j)g_j + (1+\rho_1)\alpha_j s_j\} \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{3j}^* = \{r_j + Lf_j + 3k^2(1+L\alpha_j) - (1+3k^2)(1+L\alpha_j)g_j \\ - (1+3k^2)\alpha_j s_j\} \beta_j e^{\alpha_j L}$$

<先端が固定の場合>

$$b_{1j}^* = r_j \beta_j, \quad b_{2j}^* = \beta_j, \quad b_{3j}^* = s_j \beta_j, \quad b_{4j}^* = 0$$

$$b_{5j}^* = (r_j + Lf_j) \beta_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{6j}^* = (s_j + Lg_j) \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{7j}^* = L \beta_j e^{\alpha_j L}, \quad b_{8j}^* = (1+L\alpha_j) \beta_j e^{\alpha_j L}$$

ここで, (r_j, s_j, β_j) は次のとおりである。

$$r_j = z \frac{f_j}{g_j} \left\{ -z\alpha_j^3 + \left(z + \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \lambda^2 \right) \alpha_j + \frac{1}{\beta_j} \left(\frac{1+\rho_1}{\rho_1} \alpha_j^2 - \frac{z}{\rho_1} \lambda^2 - \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \right) \right\} \\ + \frac{1}{d_j} \left\{ -5k^2 \alpha_j^4 + 3(\nu - 3\rho_1 k^4 + \frac{1+\rho_1}{\rho_1} k^2 \lambda^2) \alpha_j^2 + z \frac{\alpha_j}{\beta_j} \left(\frac{1+\rho_1}{\rho_1} k^2 \alpha_j^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{z}{\rho_1} k^2 \lambda^2 + k^4 - \frac{\nu}{\rho_1} \right) + 1 + k^2 + \left(k^4 - \frac{\nu}{\rho_1} \right) \lambda^2 - \frac{1}{\rho_1} k^2 \lambda^4 \right\}$$

$$s_j = z \frac{g_j}{d_j} \left\{ -z\alpha_j^3 + \left(z + \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \lambda^2 \right) \alpha_j + \frac{1}{\beta_j} \left(\frac{1+\rho_1}{\rho_1} \alpha_j^2 - \frac{z}{\rho_1} \lambda^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \right) \right\} + \frac{z}{d_j} \left\{ 4k^2 \alpha_j^3 - (z + \nu + 2k^2 + \frac{1+2\rho_1}{\rho_1} k^2 \lambda^2) \alpha_j \right. \\ \left. - \frac{1}{\beta_j} \left(\frac{1+2\rho_1}{\rho_1} k^2 \alpha_j^2 - k^2 - \frac{1}{\rho_1} - \frac{z}{\rho_1} k^2 \lambda^2 \right) \right\}$$

$$\beta_j = \left[\left(1 + \frac{1}{\rho_1} \right) \alpha_j^6 - \left\{ \frac{z}{\rho_1} \lambda^2 - \frac{1}{k^2} + 3 \left(1 + \frac{1}{\rho_1} \right) \right\} \alpha_j^4 - \left\{ \frac{z}{k^2} \left(1 + \frac{1}{\rho_1} \right) \lambda^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4}{\rho_1} \lambda^2 + \frac{3+4\rho_2}{k^2} + 3 \left(1 + \frac{1}{\rho_1} \right) \right\} \alpha_j^2 - \left\{ \frac{3}{k^2 \rho_1} \lambda^4 + \frac{z}{k^2} \left(1 + \frac{z}{\rho_1} \right) \lambda^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{z}{\rho_1} \lambda^2 + \frac{z}{k^2} + 1 + \frac{1}{\rho_1} \right\} \right] / \alpha_j (4\alpha_j^6 + 3a_6 \alpha_j^4 + 2a_4 \alpha_j^2 + a_2)$$

$$\text{ただし } d_j = \alpha_j^4 - (z + \frac{1+\nu_1}{\rho_1} \lambda^2) \alpha_j^2 + 1 + \frac{1+\nu_1}{\rho_1} \lambda^2 + \frac{1}{\rho_1} \lambda^4$$

静的問題に対する解析

先端が自由の片持ち円筒殻では解析を行うまでもなく

$$[U^s, V^s, W^s] = [0, \delta_0, \delta_0] \quad (5.24)$$

である。先端が固定の場合は解析を行わなければならないが、静的なはり状の曲げ変形問題であるから、解析方法は前章の4.3節で示したとおりとなる。変位成分に対する一般解は

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^4 \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{pmatrix} c_j e^{\alpha_j \xi} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\xi & 3(\xi^2 + 4 + 2\nu) \\ 1 & \xi & \xi^2 - 2\nu & \xi^3 - 6\nu\xi \\ 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

である。ここで、 α_j ($j=1, \dots, 4$) は特性方程式

$$\alpha^4 - 2(z - \nu)\alpha^2 + (1 - \nu^2)/k^2 = 0 \quad (5.26)$$

の相異なる4根であり、係数(f_j, g_j)は

$$f_j = \frac{-k^2 \alpha_j^5 + \nu \alpha_j^3 + \alpha_j}{(\alpha_j^2 - 1)^2}, \quad g_j = \frac{2k^2 \alpha_j^4 - (z + \nu) \alpha_j^2 + 1}{(\alpha_j^2 - 1)^2}$$

である。係数 c_j ($j=1, \dots, 8$)を境界条件式(5.18)を用いて(ただし、 $f(\xi) \equiv 1$ とする)決定すれば、変位成分(U, V, W)に対する静的解が直ちに求められ以下のようなになる。

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \frac{\delta_0}{|B|} \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{pmatrix} (B_{3j} + B_{4j}) e^{\alpha_j \xi}$$

$$+ \begin{pmatrix} 3(\xi^2+4+2\nu) & 2\xi & 1 & 0 \\ \xi^3-6\nu\xi & \xi^2-2\nu & \xi & 1 \\ \xi^3 & \xi^2 & \xi & 1 \\ B_{35}+B_{45} \\ B_{36}+B_{46} \\ B_{37}+B_{47} \\ B_{38}+B_{48} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

ここで, $[B]$ は 8 次の行列であり, i 行 j 列の成分 b_{ij} は表 5.1 のとおりである。

表 5.1 行列 $[B]$ の成分 b_{ij} ($L = \ell/R$)

i	$j=1, \dots, 4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$
1	f_j	$6(2+\nu)$	0	1	0
2	α_j	0	0	1	0
3	g_j	0	-2ν	0	1
4	1	0	0	0	1
5	$f_j e^{\alpha_j L}$	$3(L^2+4+2\nu)$	$2L$	1	0
6	$g_j e^{\alpha_j L}$	$L^3-6\nu L$	$L^2-2\nu$	L	1
7	$e^{\alpha_j L}$	L^3	L^2	L	1
8	$\alpha_j e^{\alpha_j L}$	$3L^2$	$2L$	1	0

なお, 応力成分に対する解は変位成分の解を Flugge の構成方程式 (2.19) に代入することにより簡単に得られるので, ここでは記載を省略する。

5.4 数値結果

数値計算にあたっては、ポアソン比 ν を0.3とし、修正理論におけるせん断係数は $k_x = k_\theta = \pi^2/12$ とした。数値結果は固定基礎の移動量 δ_0 、円筒殻の肉厚比 $H (= h/R)$ および長さ比 $L (= l/R)$ および曲げ剛性 $D (= Eh^3/12(1-\nu^2))$ 、縦波の伝ば速度 $C (= \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)})$ を用いて整理した。

5.4.1 静的結果

まず静的結果について計算した。

先端が自由の場合は片持ち円筒殻全体が δ_0 だけ平行移動するだけであるから、静的には無応力状態である。

そこで先端が固定の場合だけを対象とし、Flüggeの理論による式(5.27)に基づいて数値計算を行った。図5.3は $\theta = 0$ の母線上に沿ったたわみ曲線と円筒殻の長さとの関係を示したものである。円筒殻が短い場合にははり理論により計算した曲線と一致しないが、中央においてはいずれの結果も0.5となる。図5.4は同じく $\theta = 0$ の母線上に沿った垂直力 N_x と曲げモーメント M_x の分布と円筒殻長さの関係を示したものである。中央の $x/l = 0.5$ においてはすべての結果が零であり、この位置を中心とした点対称の分布形となっている。 N_x は直線的に、 M_x は固定縁に集中して分布しており、いずれも固定縁において最大となり円筒殻の長さが短いほど大きい。

図5.5は $\theta = \pi/2$ の母線上に沿った面内方向有効せん断力

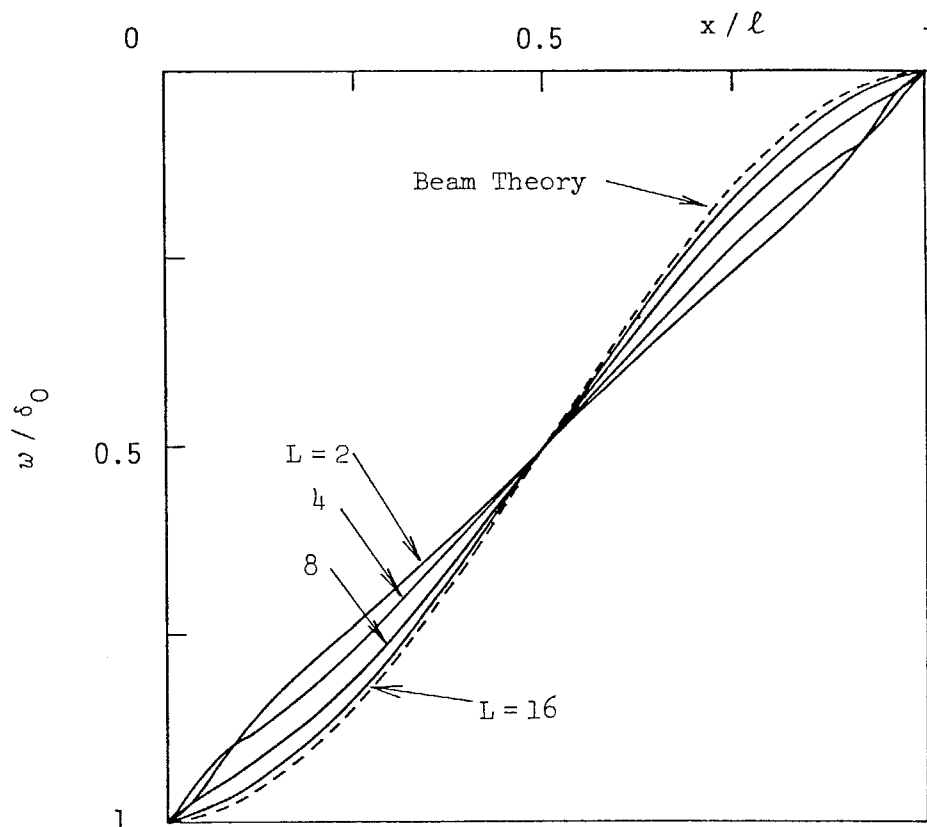


図5.3 たわみ曲線と円筒殻の長さとの関係

($h/R=0.02$, $\theta=0$, 先端:固定)

(— Flügge の理論, - - - - はり理論)

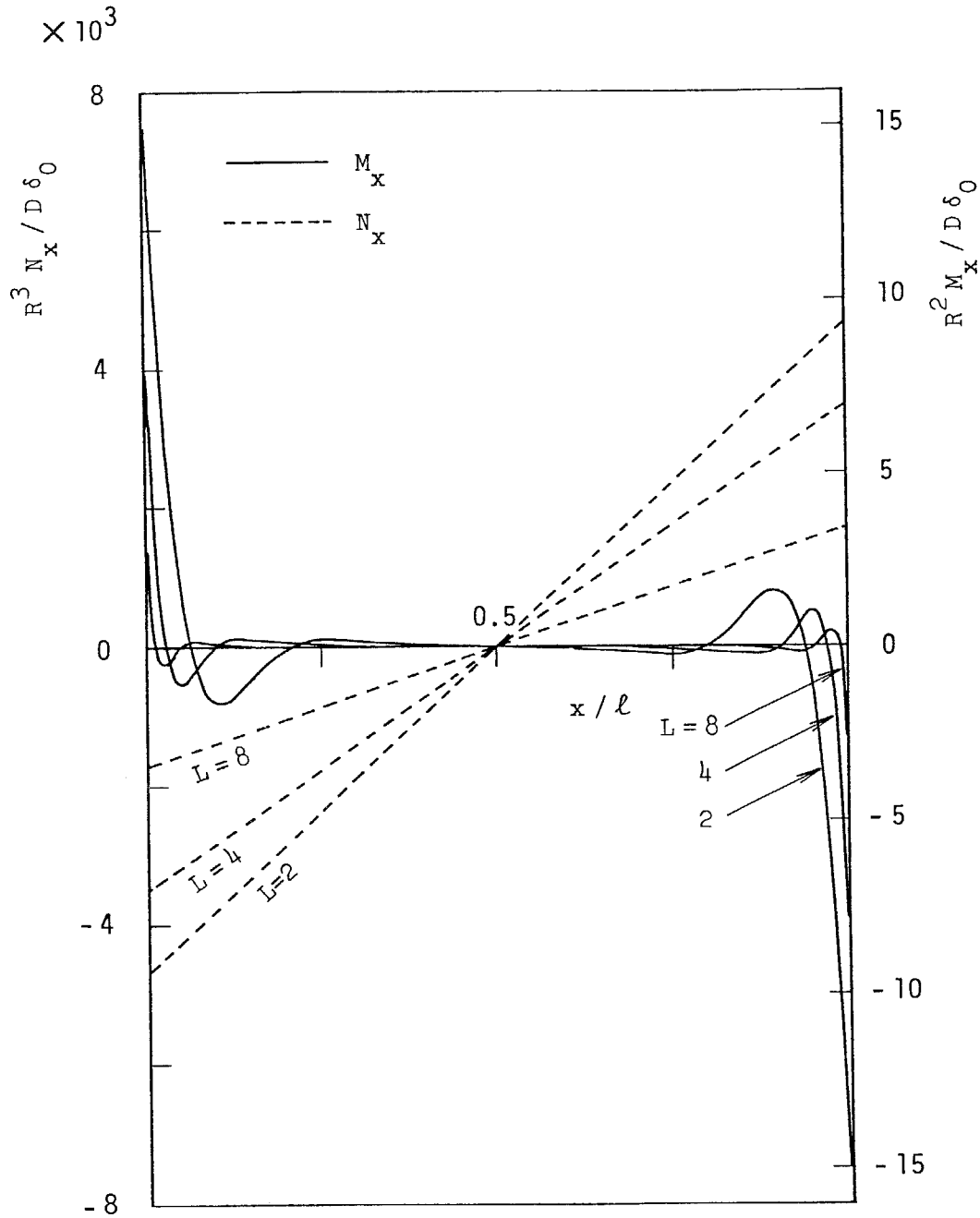


図5.4 曲げモーメント M_x および垂直力 N_x の軸方向分布と円筒殻の長さとの関係

($h/R = 0.02$, Flugge の理論, 先端: 固定)
 (— M_x , - - - N_x , $\theta = 0$)

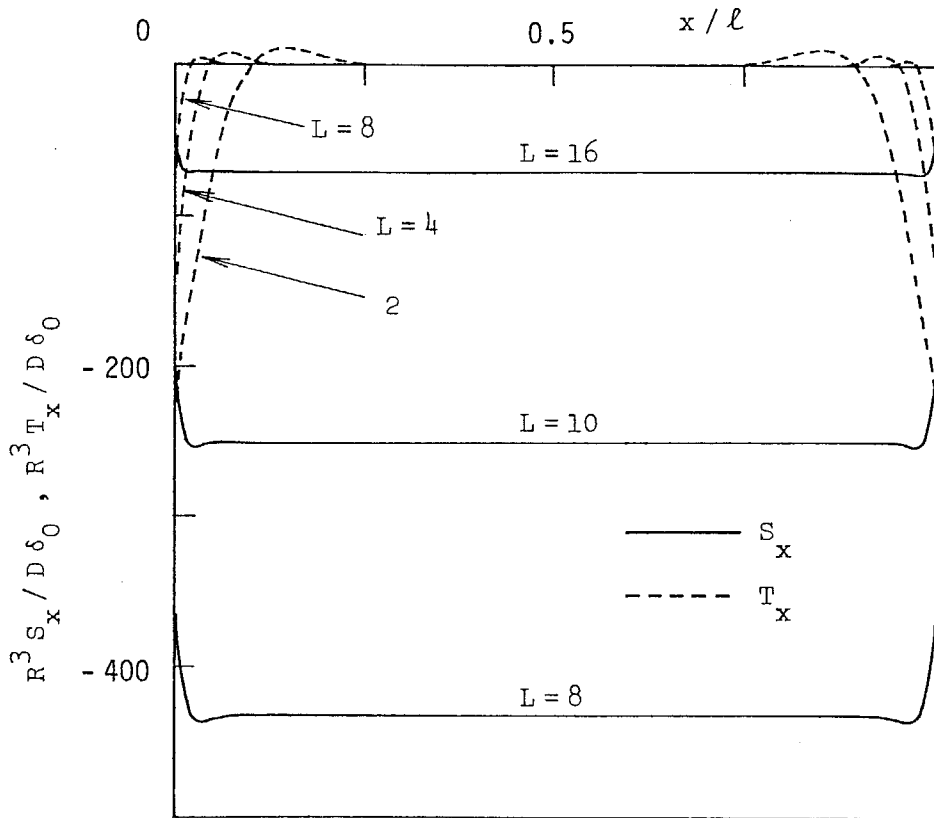


図5.5 面内および面外方向有効せん断力 (S_x, T_x)
の軸方向分布と円筒殻の長さとの関係
 $a/R=0.02$, Flüggeの理論, 先端: 固定
—— $S_x : \theta = \frac{\pi}{2}$, - - - - $T_x : \theta = 0$

S_x と $\theta = 0$ の母線上に沿った面外方向有効せん断力 T_x の分布と円筒殻長さの関係を示したものである。中央の $x/l = 0.5$ の位置を中心として面対称の分布形となっている。 S_x と T_x の合計は x に関係なく一定であるが、この値は円筒殻が短いほど大きい。 T_x は固定縁に集中して分布して中央で零であるから、円筒殻中央においては面内せん断応力だけしか生じないことになる。固定基礎に生ずる移動方向の反力 F_x は

$$F_x = \int_0^{2\pi} (T_x \cos \theta + S_x \sin \theta) R d\theta \quad (5.28)$$

で表されるので

$$F_x / \pi R = (T_x)_{\theta=0} + (S_x)_{\theta=\pi/2} \quad (5.29)$$

となる。したがって、図 5.5 における S_x と T_x の合計値に対応する。

5.4.2 過渡応答

式 (5.10) あるいは (5.23) を利用すれば、変位および応力成分の過渡応答を計算することができる。数値計算に際しては超越方程式 $|B| = 0$ の根として与えられる無次元固有振動数 λ_m を $m = 1$ から "順次必要なる数だけ" 試行錯誤法により求めなければならない。まず λ_m に正の実数を等間隔に与え、それぞれに対する行列式 $|B|$ の値を計算し、その値が最小となる λ_m の値を探しこれを第 1 近似とした。この近似値を初期値として Newton 法を用い所定の精度が得られるまで計算を繰り返した。なお、 λ_m の値を有効数字 10 桁以上で計算する場合、Newton 法は 3 ~ 4 回で収束した。先端が自由の片持ち円筒殻の固有

振動数については、第4章で詳細に示したので、ここでは先端が固定の場合の固有振動数を示すことにする。表5.2は Flügge の理論により計算した無次元固有振動数 λ_m を1次から10次まで示したものである。これらは両縁固定円筒殻のはり状曲げ振動モードを有する固有振動数である。表中の括弧内の値は回転慣性とせん断変形を無視したはり理論によるもので計算式は次のとおりである。

$$\lambda_m = (\delta_m/L)^2 \sqrt{(1-\nu^2)/\varepsilon} \quad (5.30)$$

ここで、 $\delta_1 = 4.730$ 、 $\delta_2 = 7.853$ 、 $\delta_3 = 10.996$

殻理論による結果との差は円筒殻が短いほどあるいは次数が高いほど大きい。回転慣性とせん断変形を考慮したはり理論を用いれば、この差は修正されて小さくなる。その修正率は第4章における先端が自由の片持ち円筒殻の場合と同程度と考えてよいから、4.5節(p.4-39)の項を参照してもらえば推定できると思う。

これらの λ_m の値を用いて、変位および応力成分の過渡応答に対する計算を行った。

まず先端が自由の片持ち円筒殻についての結果を示すことにする。図5.6および5.7は、半径方向変位および曲げモーメントの時間変動と立ち上がり時間 t_0 との関係におよぼす理論の影響を示したものであり、荷重関数には余弦状の立ち上がりを用いた。立ち上がり時間 t_0 が長い場合は Minsky-Herrmann 理論と Flügge 理論との差はないが、短い場合は Flügge 理論の方が過大な応答を示すことがわかる。

図5.8および5.9は、同じく曲げモーメントおよび面外方向せん断力の時間変動と荷重関数の関係におよぼす理論の影響

響を示したものであり、余弦状とランフ状の場合とで立ち上がり時間を等しくした。荷重関数が余弦状の立ち上がりを有する場合には、Minsky-Herrmann の理論と Flügge の理論とはほぼ一致しているが、ランフ状の立ち上がりを有する場合には Flügge の理論は異常に過大な応答を示しており、この傾向は特に面外方向せん断力において顕著に現われている。

この現象は、荷重関数の導関数すなわち基礎の移動速度に不連続点が存在することに起因するものである。

そこで、移動速度が不連続となる時刻すなわち $t = 0$ における合応力成分の応答を詳細に調べることにした。

図 5.10 は荷重関数がランフ状の場合について固定基礎における 4 種類の合応力成分の時刻 $t = 0$ 近傍すなわち衝撃初期の応答を拡大して示したものである。垂直力 N_x および面内方向せん断力 (N_{x0}, S_x) には両理論による差はほとんどなく、 $t = 0$ においては垂直力は零に、 N_{x0} (Minsky-Herrmann) と S_x (Flügge) は -35.5 にそれぞれ漸近している。この数値について解説を加えておく。円筒殻が固定基礎に変位速度 V_0 (この場合は \dot{v}_0/t_0 となる) を不連続にうけた瞬間のせん断応力 τ_{xz} は正確な考慮によれば

$$\tau_{xz} = -G V_0 / C_s \quad \text{ただし } C_s = \sqrt{G/\rho} \quad (5.31)$$

であるから、合せん断力 N_{x0} あるいは S_x は

$$N_{x0} = S_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz = -G h V_0 / C_s \quad (5.32)$$

となる。前記の数値 -35.5 は式 (5.32) による値と完全に一致する。つまり面内合応力成分すなわち垂直力および面内方向せん断力については両理論ともに正しい応答を示しているも

のと考えられる。ところが、曲げモーメント M_x および面外方向せん断力 (Q_x, T_x) には、両理論による差が明瞭に現われている。 Q_x (Mirsky-Herrmann 理論) と T_x (Flügge 理論) は面内方向せん断力と同じ数値 -35.5 に漸近しているように見うけられる。しかし、 m による級数の打ち切り項数を多くすると Flügge の理論による結果は $t=0$ の近傍において発散の傾向を強め、この理論では変位速度が不連続となっている時刻における正しい応答を求めることができない。逆に、Mirsky-Herrmann の理論では項数を多くとると、応答波形は一定値にさらに近づき正しい結果が得られる。

なお、この現象は移動部分すなわち固定基礎における応答にだけ現われるのであり、固定基礎から離れた位置においては前記の時刻に対応した応答に発散傾向は見られない。

Mirsky-Herrmann の理論の方が正確に現象を表すことは、前章までの詳細な調査で明らかになっていることであるから、Flügge の理論による結果に問題のあることは言うまでもない。

したがって、基礎の移動速度に不連続な時刻変化が存在するような場合の面外方向合応力成分の応答を Flügge の理論により求めると不自然な結果をもたらすことがあるので、注意を要することになる。しかし、変位成分ならがに面内合応力成分にはこのような現象は現われず、両理論ともに正しい解を手える。

次に、先端が自由の場合で明らかになった事柄を再確認する意味によって先端が固定すなわち両縁固定の場合に対する結果を示すことにする。基礎理論にはすべて Flügge の理論を用いた。

表5.2 無次元固有振動数 λ_m (両縁固定)

m	H=0.02			H=0.01
	L=4	L=8	L=16	L=8
1	0.306287 (0.94321)	0.135319 (0.23580)	0.0480614 (0.05895)	0.135175 (0.23580)
2	0.573871 (2.59990)	0.277350 (0.64998)	0.111535 (0.16249)	0.277168 (0.64998)
3	0.761393 (5.09748)	0.434041 (1.27437)	0.187309 (0.31859)	0.433805 (1.27437)
4	0.846958	0.573479	0.268324	0.573165
5	0.893017	0.683629	0.350652	0.683079
6	0.902502	0.692536	0.430651	0.692244
7	0.927132	0.760675	0.505583	0.759774
8	0.942049	0.812421	0.573235	0.810951
9	0.965489	0.848011	0.619833	0.845891
10	0.987888	0.871582	0.632647	0.868263

(括弧内の値ははり理論による結果)

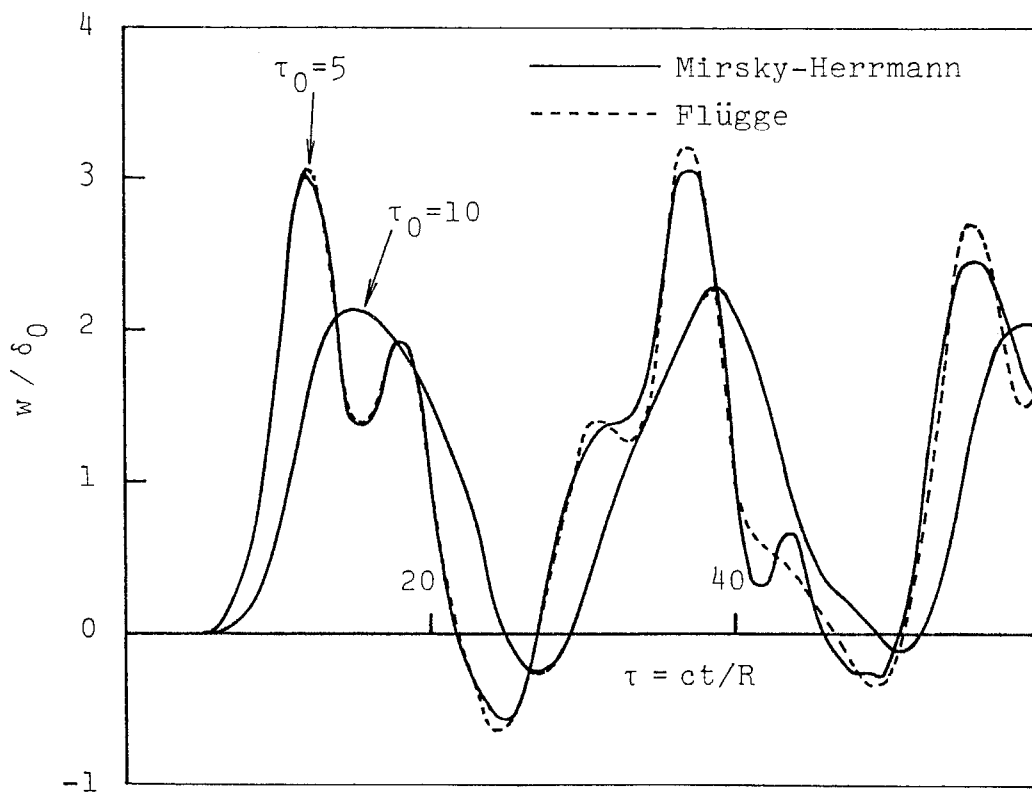


図5.6 先端における半径方向変位の時間変動
 ($h/R=0.1$, $l/R=2$, 先端:自由, $x=l$, $\theta=0$)
 (荷重関数:余弦状, $\tau_0 = ct_0/R$, $2\pi/\lambda_1 = 22.4$)

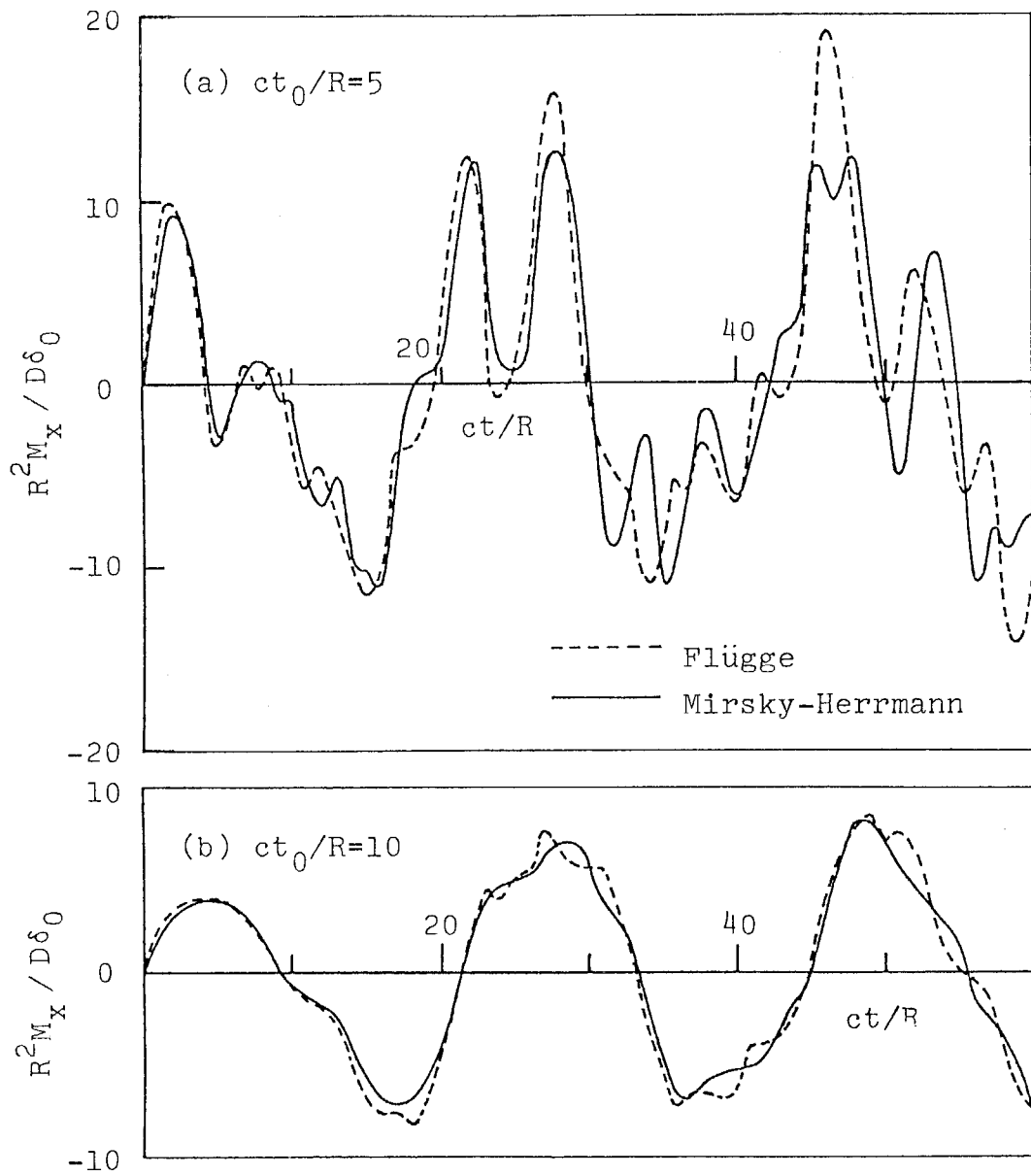


図5.7 固定基礎における曲げモーメントの時間変動

($k/R=0.1$, $l/R=2$, 先端:自由, $\alpha=\theta=0$)
 (荷重関数:余弦状, $2\pi/\lambda_1=22.4$)

(292)

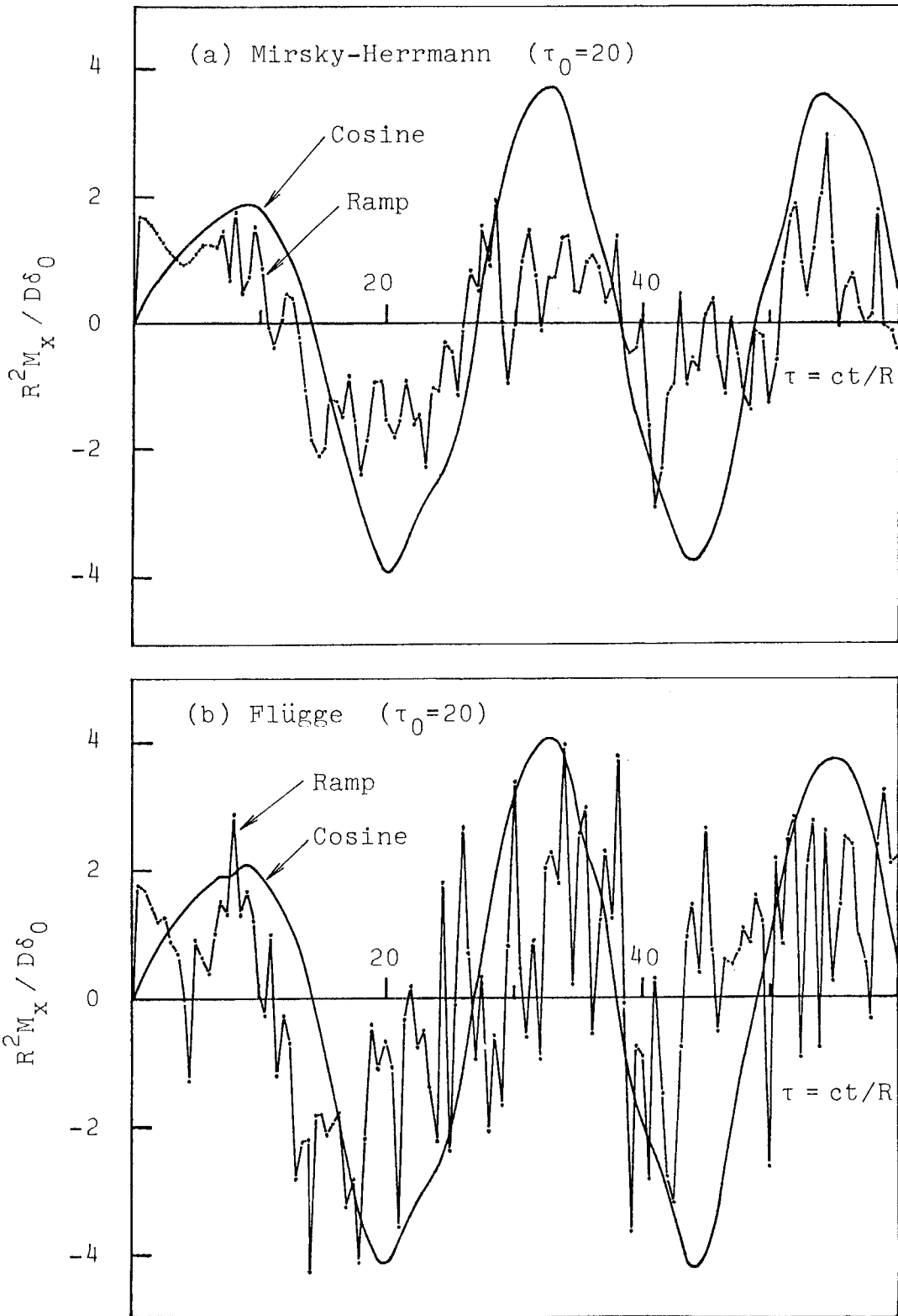


図5.8 固定基礎における曲げモーメントの時間変動

$$\left(\begin{array}{l} k/R=0.1, \quad l/R=2, \quad \text{先端:自由}, \quad \alpha=\theta=0 \\ \tau_0=ct_0/R, \quad 2\pi/\lambda_1=22.4 \end{array} \right)$$

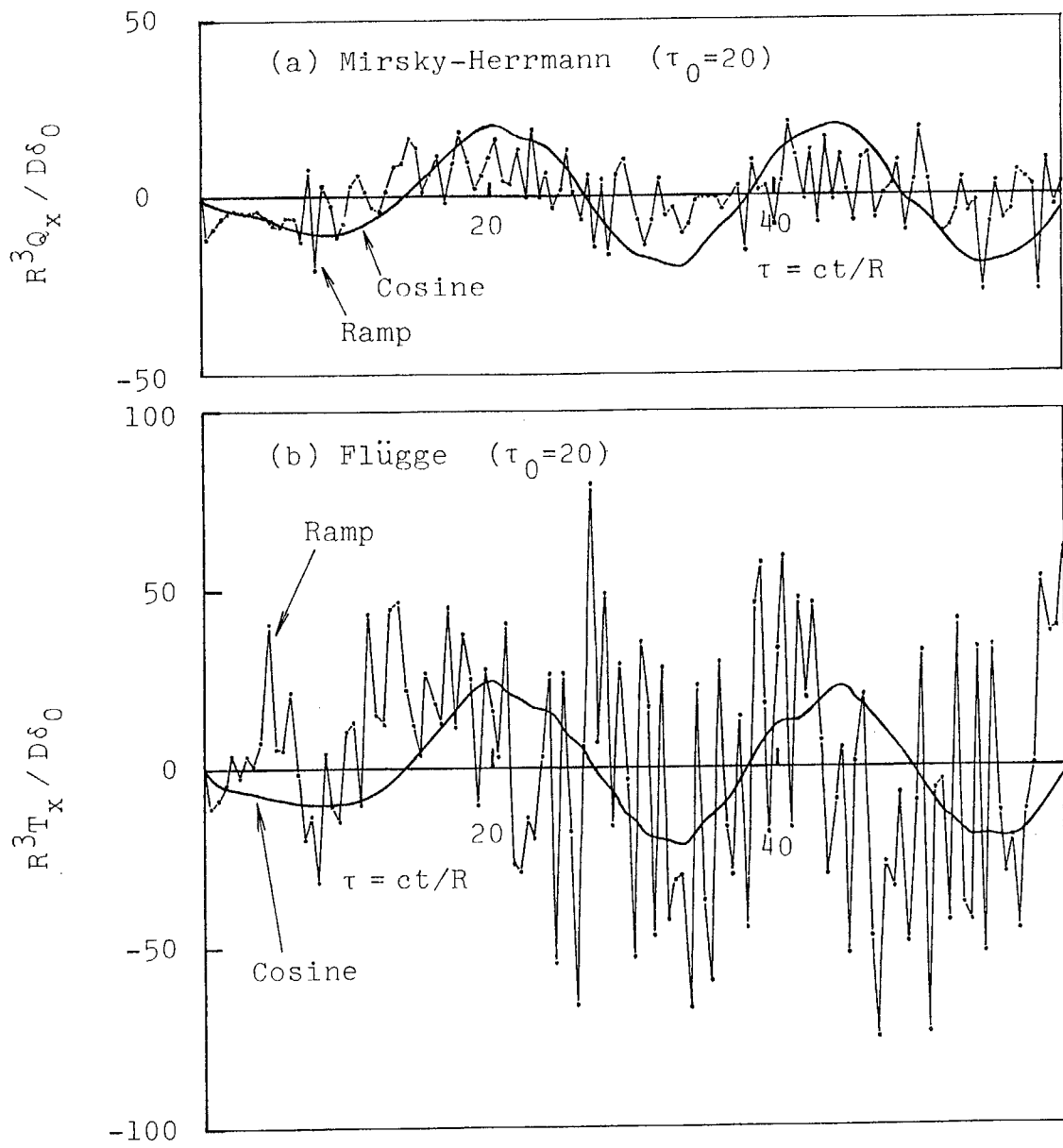


図5.9 固定基礎における面外方向せん断力の時間変動

$$\left(\begin{array}{l} h/R=0.1, \quad l/R=2, \quad \text{先端:自由}, \quad \alpha=\theta=0 \\ \tau_0=ct_0/R, \quad 2\pi/\lambda_1=22.4 \end{array} \right)$$

(294)

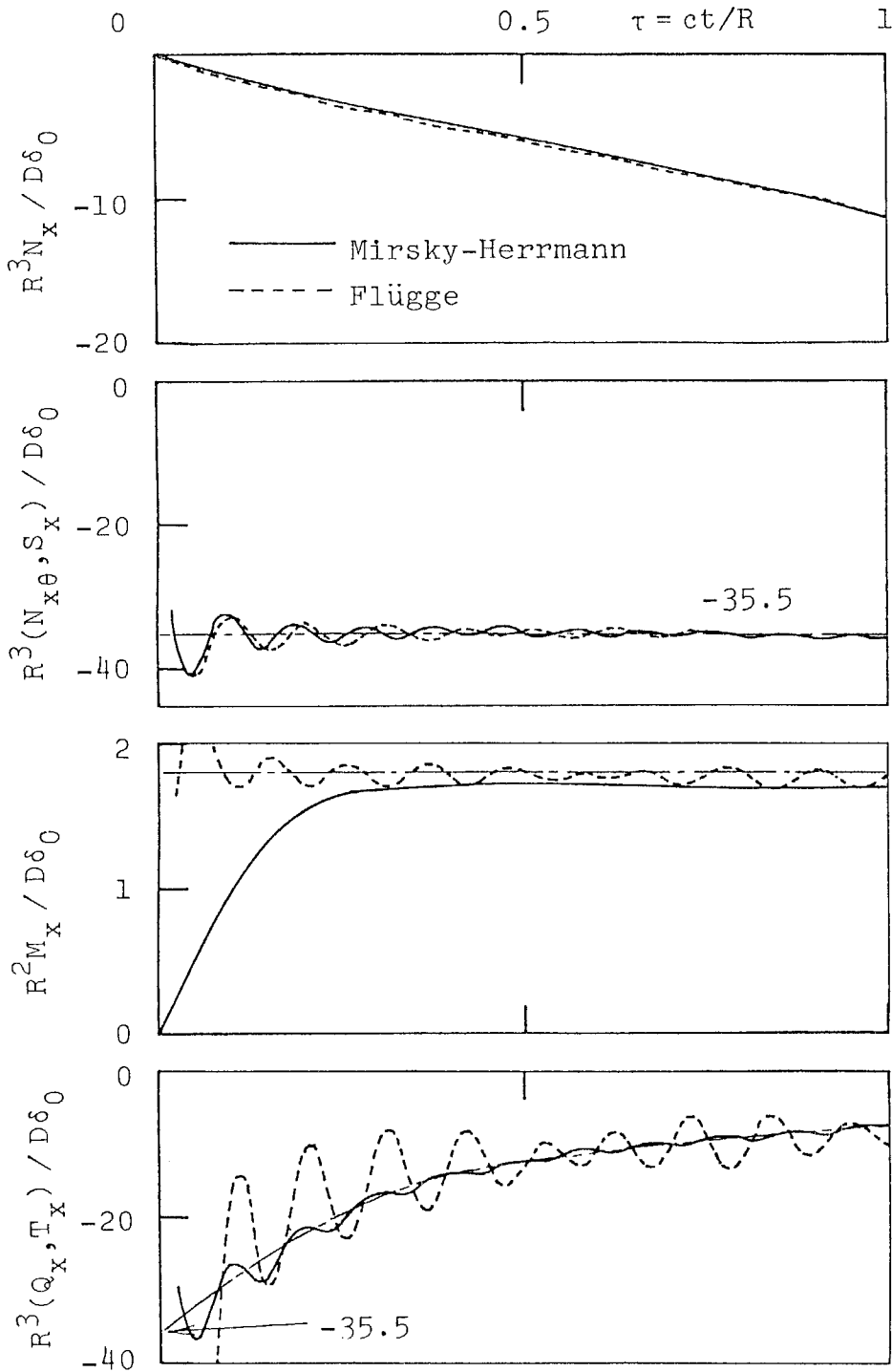


図5.10 固定基礎における垂直力・面内方向せん断力・曲げモーメント
面外方向せん断力の初期応答

($h/R = 0.1, l/R = 2, \text{先端:自由}, x=0: \theta = 0 \text{ or } \pi/2$)
(ランク状の立ち上がりがある場合, $ct_0/R = 20, m = 130$)

図 5.11, 5.12 および 5.13 は, 半径方向変位 w , 垂直力 N_x , 曲げモーメント M_x および式 (5.29) によるせん断力の合力 F_x の時間変動におよぼす無次元立ち上がり時間 τ_0 の影響を, 荷重関数が余弦状の場合について示したものである。 τ_0 が短くなると最大応答の値は非常に大きくなるが, 逆に τ_0 が長くなると静的結果に対するオーバーシュートの量が小さくなり, 準静的解に近づく。

図 5.14, 5.15 および 5.16 は, 円筒殻中央における半径方向変位 w と移動側の固定基礎における垂直力 N_x および曲げモーメント M_x の時間変動と荷重関数の関係を示したものである。ここで, 荷重関数が余弦状とランフ状の場合については立ち上がり時間 τ_0 を等置し, 指数関数状の場合には移動の初速度がランフ状の場合と等しくなるように $\Omega = 1/\tau_0$ として計算を行った。これらの図には荷重関数の導関数すなわち固定基礎の変位速度の特性がよく表れている。ランフ状および指数関数状の場合の方が余弦状の場合よりも変位の初速度が大きいので, 応答の立ち上がりが早い。しかし, 時間が十分に経過した後には現われる最大応答の値は余弦状の場合が最も大きい。これは, 余弦状の場合の最大変位速度が他の場合と比べて高いためと考えられる。

曲げモーメントの応答は, 固定基礎の移動速度が不連続的に変化する時刻において不連続となっている。すなわち, 図 5.16 において荷重関数がランフ状の場合には $\tau = 0$ および 40 の時刻に, 指数関数状の場合には $\tau = 0$ の時刻にそれぞれ見られる。これらの結果は $m = 254$ として計算したものであり, 級数の項数をこの場合のように多く取ると同時刻において発

散の傾向を示すようになる。この事は、図5.10の説明においても触れたとおり、変位速度が不連続的に変化するような場合に対する Flügge の理論による解はその時刻において発散することが再確認できたこととなる。ところが、移動部分すなわち変位速度（荷重）を与えている部分から離れた位置たとえば図5.17に示されているような静止側の固定基礎における曲げモーメントの応答には図5.16にみられるような発散点がどこにも見られない。

要するに Flügge の理論すなわち古典理論によると解が発散してしまうのは、不連続的に変化する変位速度が荷重として与えられた場合でしかもその荷重の作用位置における面外合力成分だけに限られることになる。

図5.18 および 5.19 は、半径方向変位 w と垂直力 N_x の時間変動と観測位置の関係を示したものである。 w は各位置において同位相の応答を示しているが、 N_x は移動側と静止側の固定壁で位相が半周期ずれた形の応答を示している。

図5.20 は、円筒殻の長さを短くした場合の移動側の固定基礎における曲げモーメント M_x の時間変動と無次元立ち上がり時間 τ_0 との関係を示したものである。円筒殻が長い場合（図5.13(a)）よりも τ_0 が短くならないと大きな動的最大値は生じないことを示している。これは、長さが短くなると円筒殻自体の固有周期が短くなることと関係があるものと考えられる。

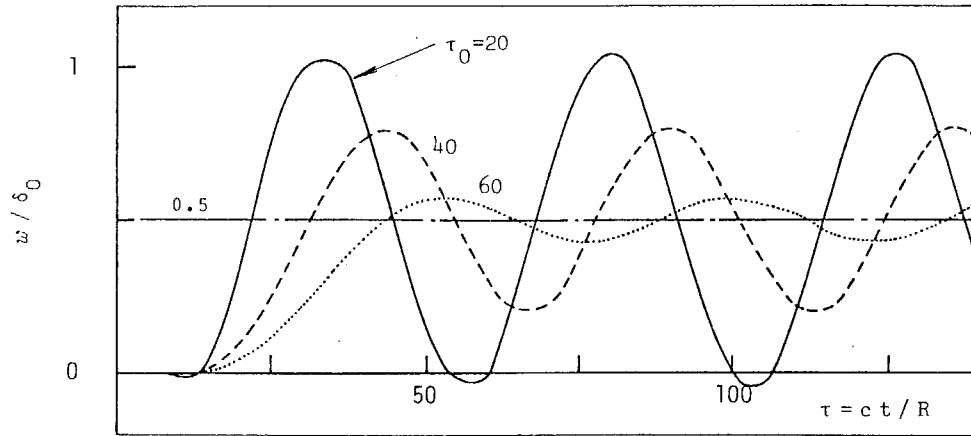


図5.11 円筒殻中央における半径方向変位の時間変動

$\left[\begin{array}{l} h/R = 0.02, \quad l/R = 8, \quad \alpha = l/2 : \theta = 0, \text{ Flüggeの理論} \\ \text{先端: 固定, 余弦状の立ち上がりをもつ場合, } \tau_0 = ct_0/R \\ \text{一点鎖線: 静的結果} \end{array} \right]$

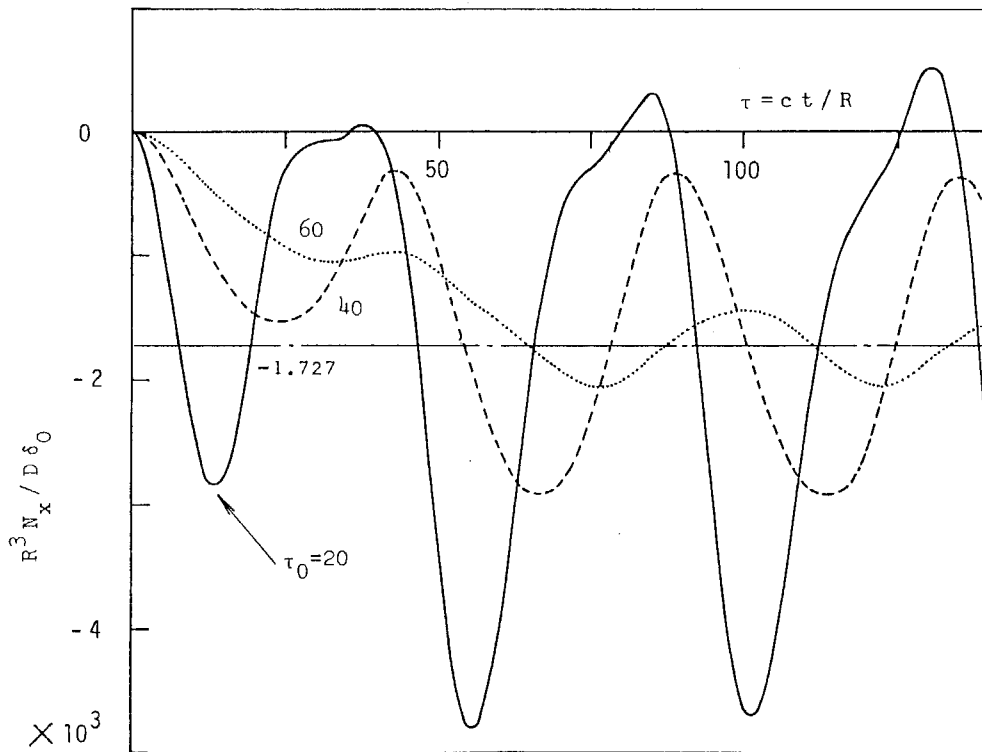


図5.12 固定基礎における垂直力の時間変動

$\left(\begin{array}{l} h/R = 0.02, \quad l/R = 8, \quad \alpha = \theta = 0, \text{ Flüggeの理論, 先端: 固定} \\ \text{余弦状の立ち上がりをもつ場合, 一点鎖線: 静的結果} \end{array} \right)$

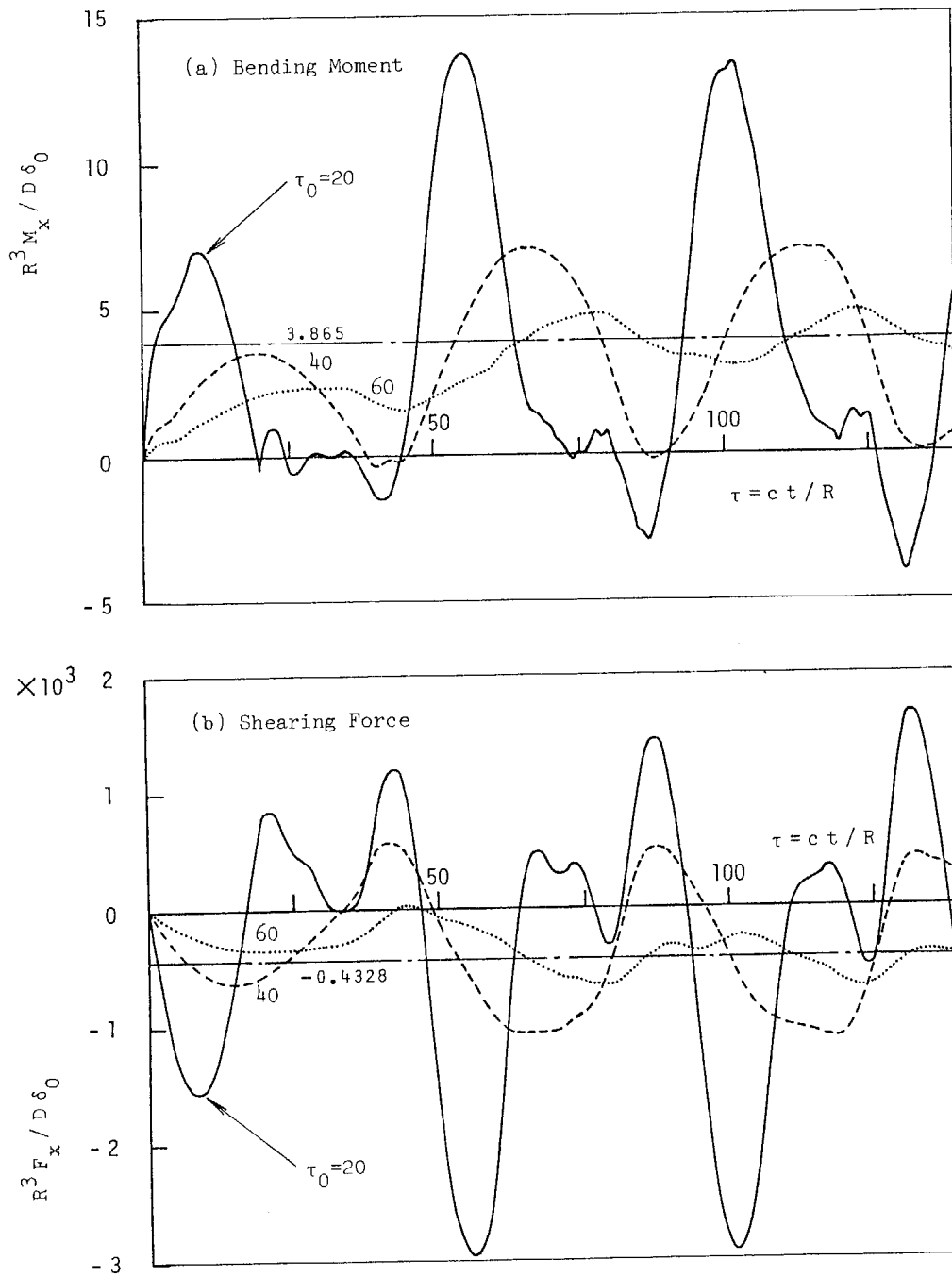


図5.13 固定基礎における曲げモーメントおよび面外方向有効せん断力の時間変動

$h/R = 0.02, l/R = 8, \alpha = \theta = 0, \text{先端: 固定}$
 $\text{Flügge の理論, 余弦状の立ち上がり正有する場合}$
 $\text{一点鎖線: 静的結果, } m = 254$

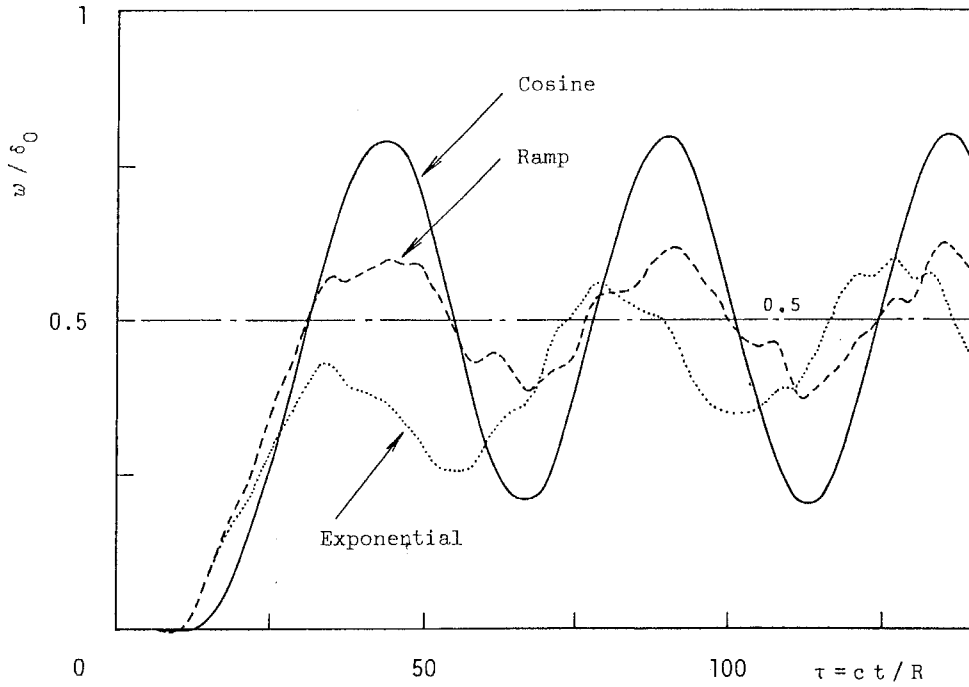


図5.14 円筒殻中央における半径方向変位の時間変動

($h/R=0.02, l/R=8, x=l/2: \theta=0, \text{先端: 固定}$)
 (Flüggeの理論, $\tau_0=ct_0/R=40, m=254$)

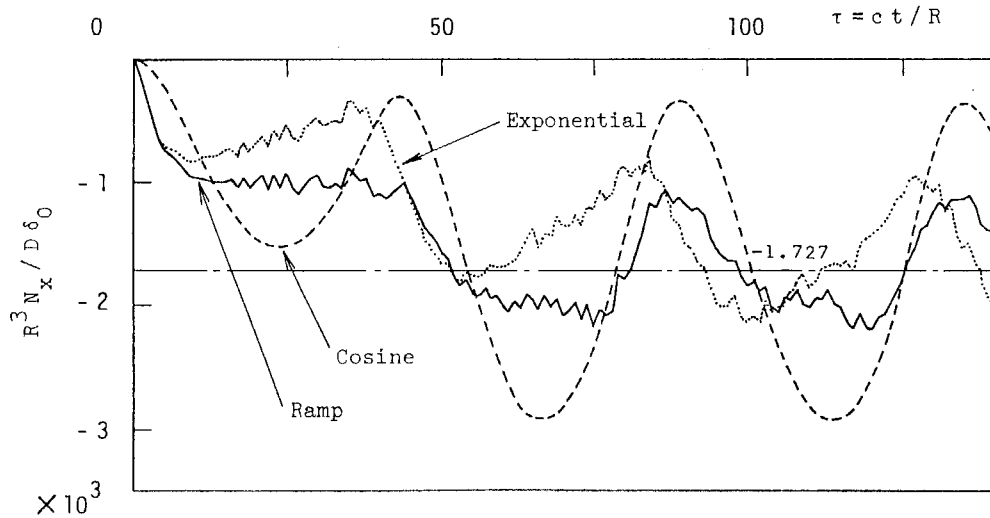


図5.15 固定基礎における垂直力の時間変動

($h/R=0.02, l/R=8, x=\theta=0, \text{先端: 固定}, ct_0/R=40$)
 (Flüggeの理論, 一点鎖線: 静的結果, $m=254$)

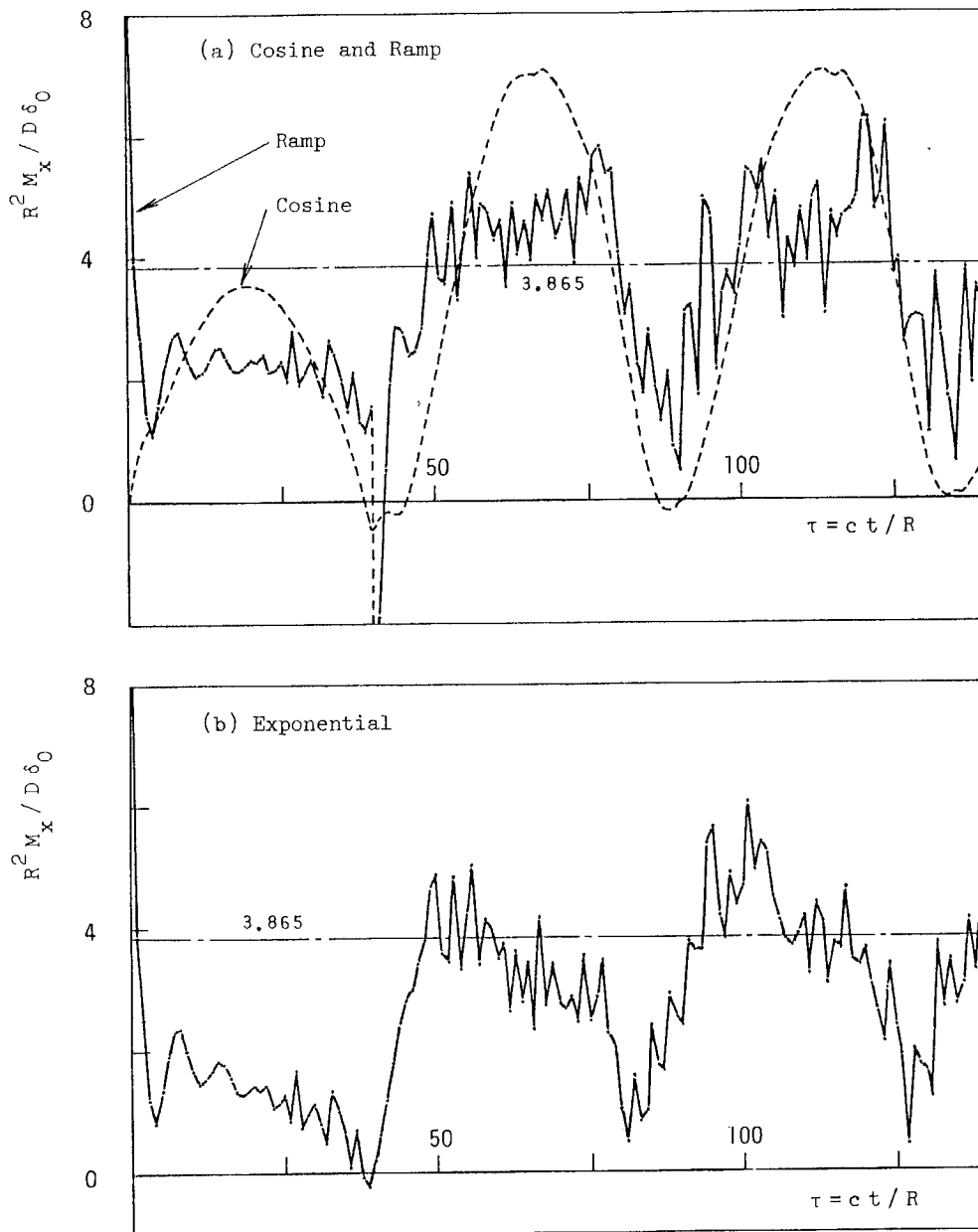


図5.16 固定基礎における曲げモーメントの時間変動

($h/R=0.02$, $l/R=8$, $\alpha=\theta=0$, 先端:固定, $ct_0/R=40$)
(Flügeの理論, 一点鎖線:静的結果, $m=254$)

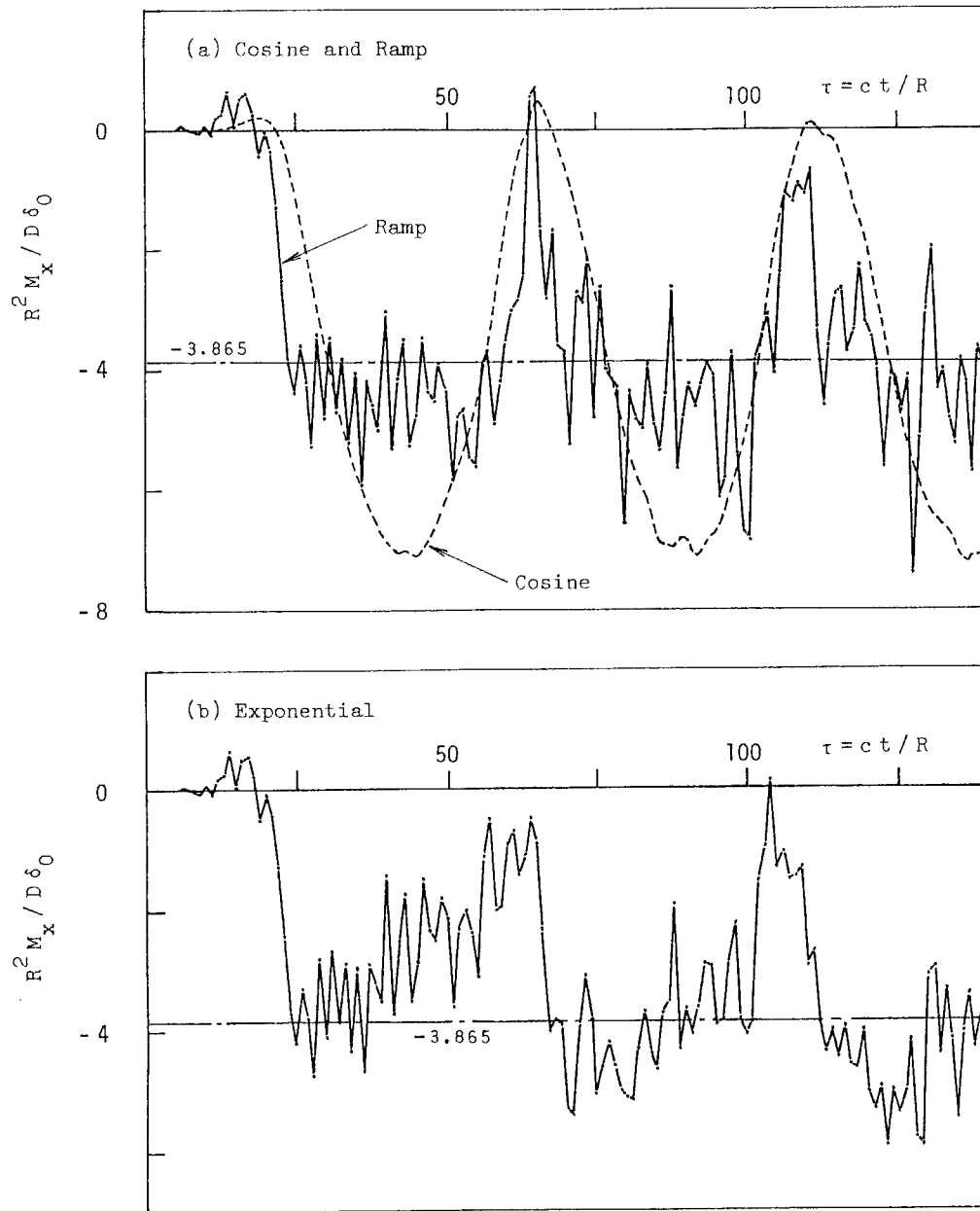


図5.17 静止側の固定基礎における曲げモーメントの時間変動

($h/R=0.02$, $l/R=8$, $x=l:\theta=0$, 先端:固定)
 ($ct_0/R=40$, Flügeの理論, 一点鎖線:静的結果)

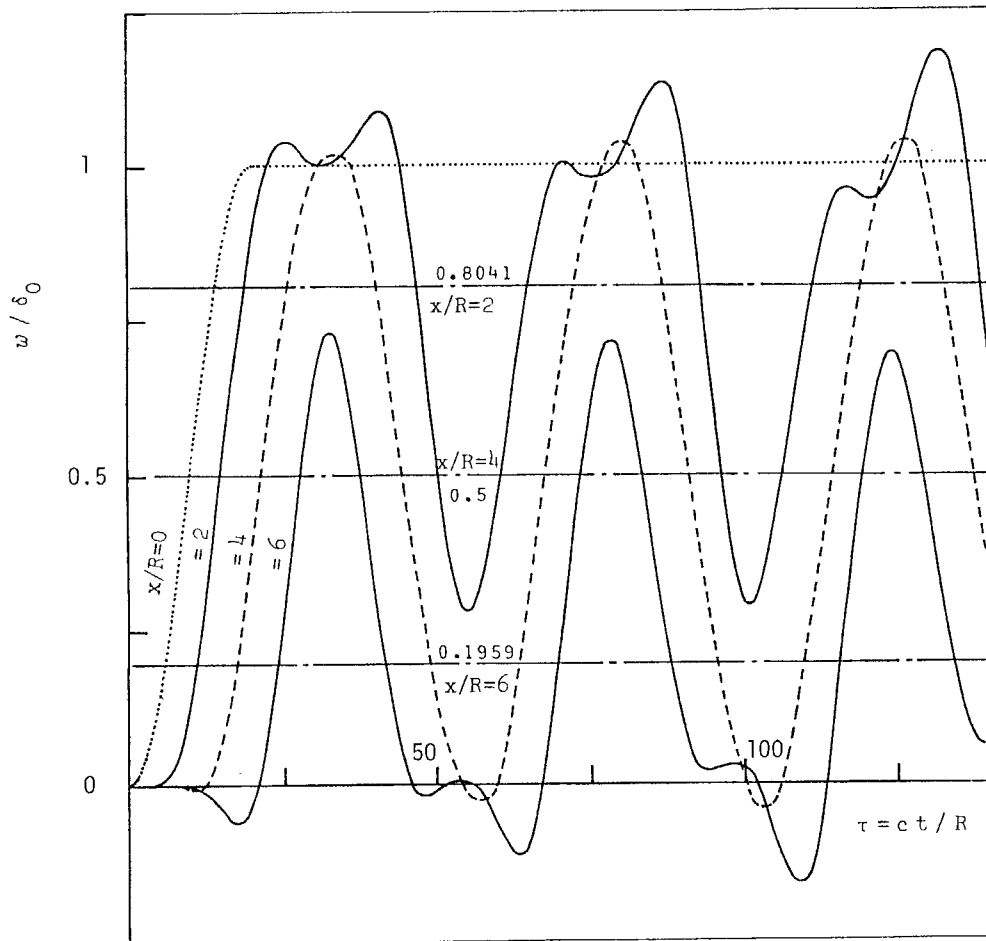


図5.18 半径方向変位の時間変動と位置の関係

$h/R=0.02, l/R=8, \theta=0, \text{先端:固定}, ct_0/R=20$
Flüggeの理論, 一点鎖線: 静的結果
余弦状の立ち上がりを有する場合

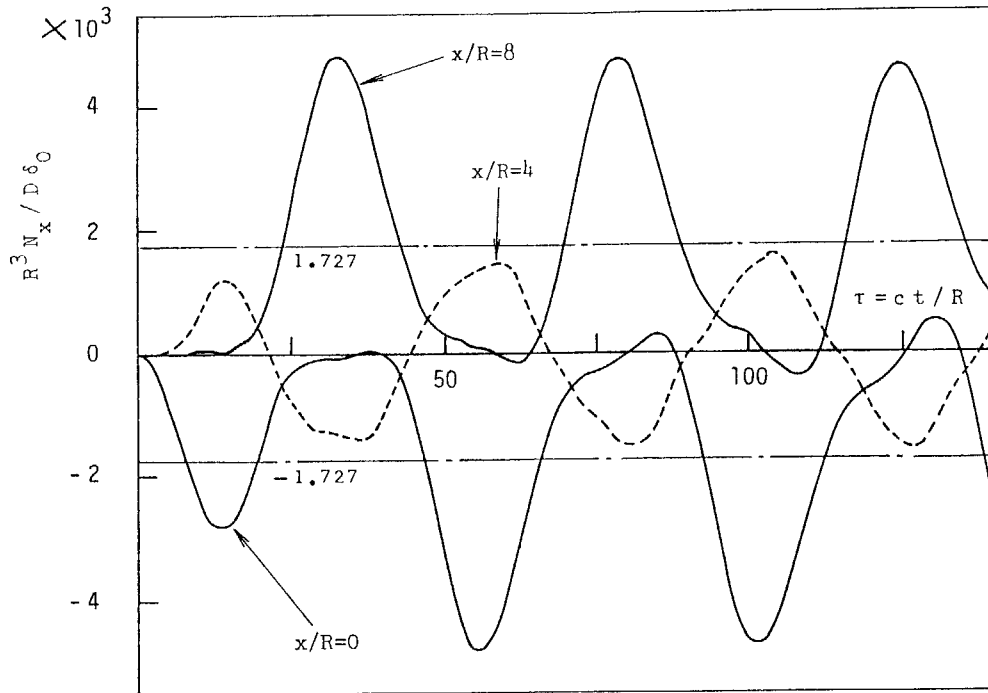


図5.19 垂直力の時間変動と位置の関係

($h/R=0.02$, $l/R=8$, $\theta=0$, 先端:固定, $ct_0/R=20$)
 (Flüggeの理論, 余弦状の立ち上がりを有する場合)

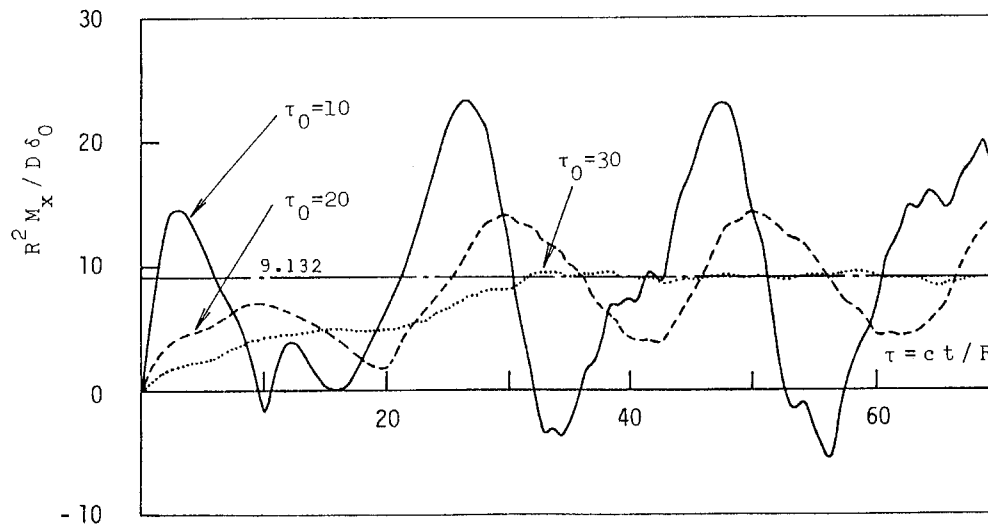


図5.20 固定基礎における曲げモーメントの時間変動

($h/R=0.02$, $l/R=4$, $\alpha=\theta=0$, 先端:固定, Flüggeの理論)
 (余弦状の立ち上がりを有する場合, 一点鎖線:静的結果, $t_0=ct_0/R$)

5.4.3 定常応答

変位および応力の時間変動における動的最大値は、衝撃初期いわゆる過渡的な時間領域に現われる場合と長時間が経過した後いわゆる定常的な時間領域に現われる場合とがある。

過渡応答における初期最大値を求めるためには、各変位あるいは応力成分の時間変動を計算して求める以外に方法はない。しかし、定常応答における最大値を求めるためならば、いろいろな方法が考えられる。時間変動を長時間にわたって計算して最大応答を求める方法は大変な計算量を必要として非合理的であるから、定常応答には適さない。

そこで、ここでは時間変動を長時間計算した場合に考えられる最大値の上限を簡単に求める方法を考えた。

変位成分の解析結果である式(5.10)および(5.23)における時間の関数 $F_m(t)$ は、式(5.12)、(5.13)および(5.14)で定義したように基礎が静止した後の時間領域においては周期 $2\pi/\lambda_m$ の関数だけで構成されている。したがって、関数 $F_m(t)$ は無次元時間 $t = 2n\pi/\lambda_m + \alpha/\lambda_m$ (ただし、 n は整数、 α は荷重関数によって異なる位相角)ごとに極値をとる。そこで、その時刻における応答の振幅の絶対値を m について重ね合わせれば、上限値が求められる。

この上限値を定常応答における理論最大値と定義することにする。たとえば、Flüggeの理論による解析結果である式(5.23)の理論最大値をそれぞれの荷重関数について計算すると以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}_{\max} = \begin{pmatrix} |U^s| \\ |V^s| \\ |W^s| \end{pmatrix} + \delta_0 \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} |U_m| \\ |V_m| \\ |W_m| \end{pmatrix} \frac{F_m^*(\tau_0)}{\lambda_m^2} \quad (5.33)$$

ここで

$$\begin{pmatrix} U_m \\ V_m \\ W_m \end{pmatrix} = \frac{2}{\sum_{k=1}^8 |B_k^*|} \sum_{j=1}^8 \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{pmatrix} (B_{3j} + B_{4j}) e^{\alpha_j \xi}$$

(A) 余弦状の立ち上がりを有する場合 ($\tau_0 < \tau$ の時間領域)

$$\alpha = \lambda_m \tau_0 / 2$$

$$F_m^*(\tau_0) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \lambda_m^2} \cos \frac{\lambda_m \tau_0}{2}$$

$$\Omega = \pi / \tau_0$$

(B) 指数関数状の立ち上がりを有する場合 ($e^{-\omega \tau} \ll 1$ の時間領域)

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + \lambda_m^2}}$$

$$F_m^*(\tau_0) = \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + \lambda_m^2}}$$

$$\Omega = R\omega / c$$

(C) ランプ状の立ち上がりを有する場合 ($\tau_0 < \tau$ の時間領域)

$$\alpha = \lambda_m \tau_0 / 2$$

$$F_m^*(\tau_0) = \frac{2}{\tau_0 \lambda_m} \sin \frac{\lambda_m \tau_0}{2}$$

式(5.33)を用いれば定常応答における変位および合応力成分の理論最大値を計算することができ、図5.11~5.20の過渡

応答における初期最大値と比較することができる。

以下に初期最大値と理論最大値とをまとめて動的最大値としてまとめた結果を示すことにする。

図 5.21, 5.22 および 5.23, 5.24 は, 先端が固定の場合について円筒殻中央における半径方向変位 w および静止側の固定基礎における垂直力 N_x , 曲げモーメント M_x , せん断力 F_x の動的最大値と立ち上がり時間 t_0 の関係におよぼす荷重関数の影響をまとめたものである。縦軸は動的最大値 $()_{max}$ を対応する静的結果 $()_{st}$ で, 横軸は t_0 を円筒殻の最低次固有周期 T_1 でそれぞれ除した値をとり, Flügge の理論により計算した。

丸印などの点群は衝撃の瞬間から t_0 までの時間範囲に生じた初期最大値であり, 曲線群は式 (5.33) により計算した理論最大値である。初期最大値は理論最大値を越えることがなく, 式 (5.33) が動的最大値を評価する式として有効であることを示している。動的最大値は, 立ち上がり時間が円筒殻の最低次固有周期よりも短くなると急速に大きくなることを示している。初期最大値は, 指数関数状, ランフ状, 余弦状の順で大きくなっているが, 理論最大値は必ずしもこの順序のとおりになっているとは言えない。しかし, 余弦状の場合が最も大きな動的最大値を生ずると見なして大きな誤りはないようである。これは余弦状の場合の最大移動速度が, 他の場合よりも高いからであると考えられる。

なお, 荷重関数が指数関数状およびランフ状の場合の固定部における曲げモーメントおよびせん断力に対する理論最大値は発散してしまうため, 図 5.23 および 5.24 では余弦状の場合に対する理論最大値だけしか記入していない。

これは、理論最大値が級数の各項を同符号にして加算して得られる値であり、この同符号の級数が発散するためである。

変位速度が不連続的に変化する荷重関数に対しては、古典理論を用いると同様の現象が起る。

図 5.25, 5.26 および 5.27 は、同じく先端が固定で荷重関数が余弦状の場合について、円筒殻中央における半径方向変位 w と固定基礎（静止側でも移動側でも理論最大値は完全に同じで、初期最大値はほぼ同じである）における垂直力 N_x および曲げモーメント M_x の動的 maximum と立ち上がり時間 t_0 との関係におよぼす円筒殻形状の影響を Flügge の理論により示したものである。横軸は t_0 をそれぞれの円筒殻形状に対する最低次固有周期 T_1 で除した値とした。このような整理方法を用いると、円筒殻形状の相違による結果の「バラツキ」が非常に小さくなった。

すなわち、いずれの場合も t_0 がそれぞれの円筒殻の最低次固有周期 T_1 より短くなると、動的 maximum は急激に増大することが明確になった。

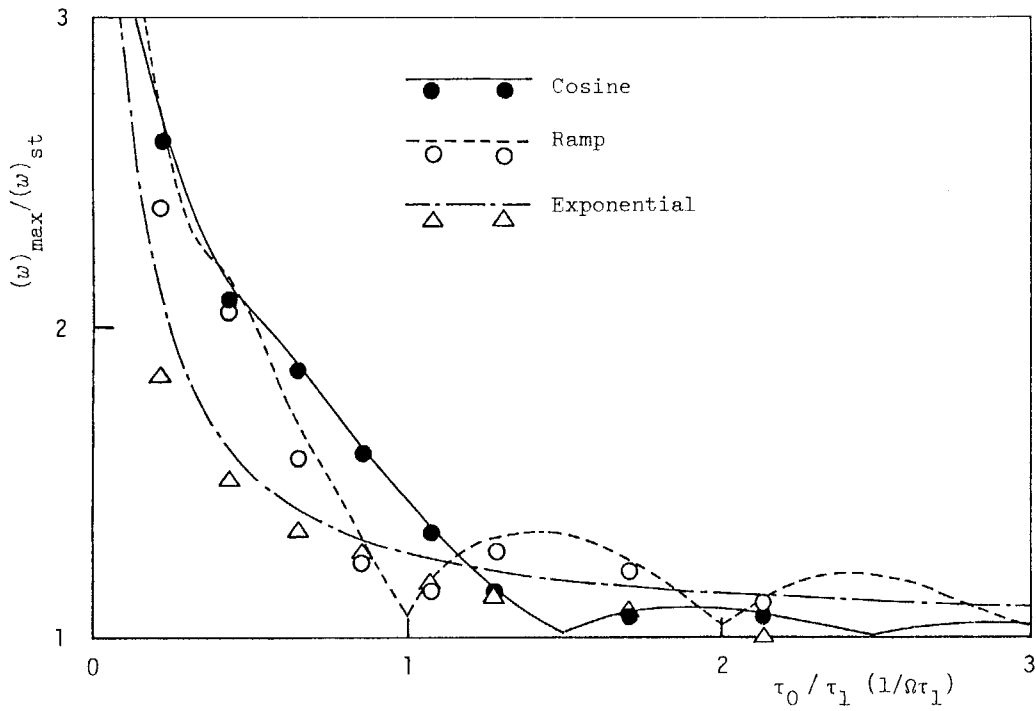


図 5.21 円筒殻中央における半径方向変位の動的最大値

$h/R=0.02, l/R=8, x=l/2: \theta=0, \text{先端: 固定}$
 Flüggeの理論, $\tau_1=2\pi/\lambda_1=46.4, \tau_0=ct_0/R$
 $(w)_{st}$: 静的結果, $\bullet \circ \triangle$ 初期最大値

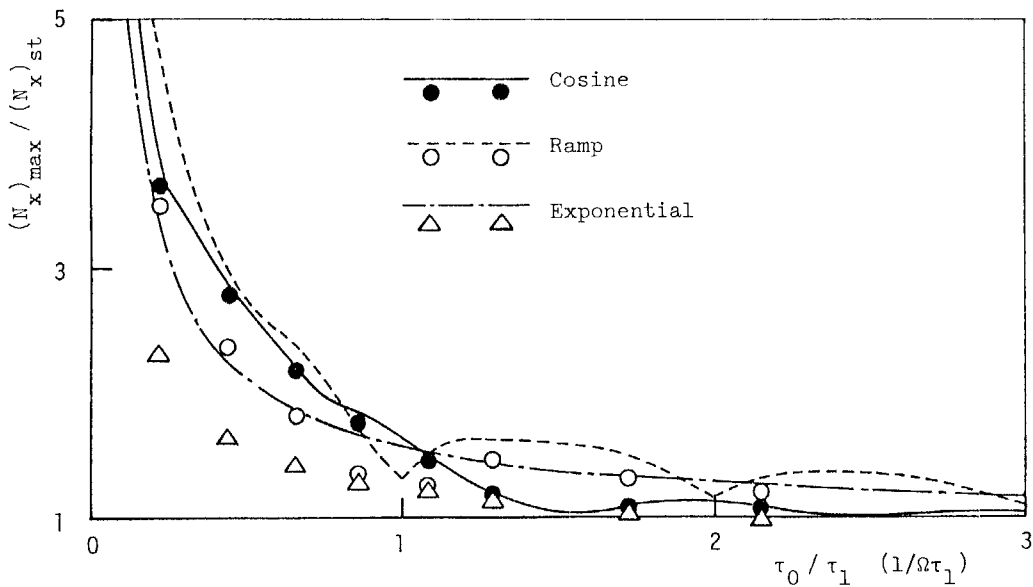


図 5.22 静止側の固定基礎における垂直力の動的最大値
 $(h/R=0.02, l/R=8, x=l: \theta=0, \text{先端: 固定}, \tau_0=ct_0/R)$
 Flüggeの理論, $\tau_1=46.4, (N_x)_{st}$: 静的結果, $\bullet \circ \triangle$ 初期最大値

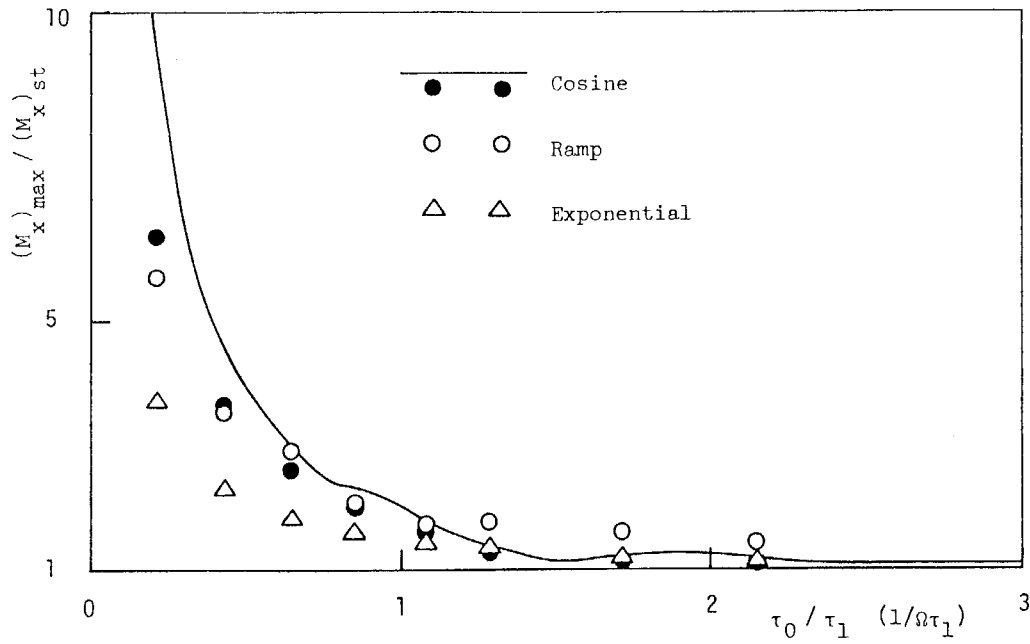


図5.23 静止側の固定基礎における曲げモーメントの動的最大値

$\left[\begin{array}{l} h/R=0.02, l/R=8, \chi=l:\theta=0, \text{先端:固定}, \tau_0=ct_0/R \\ \text{Flüggeの理論}, \tau_1=2\pi/\lambda_1=46.4, (M_x)_{st}: \text{静的結果} \\ \bullet \circ \Delta \text{ 初期最大値}, \Omega=R\omega/C, \text{--- 理論最大値} \end{array} \right]$

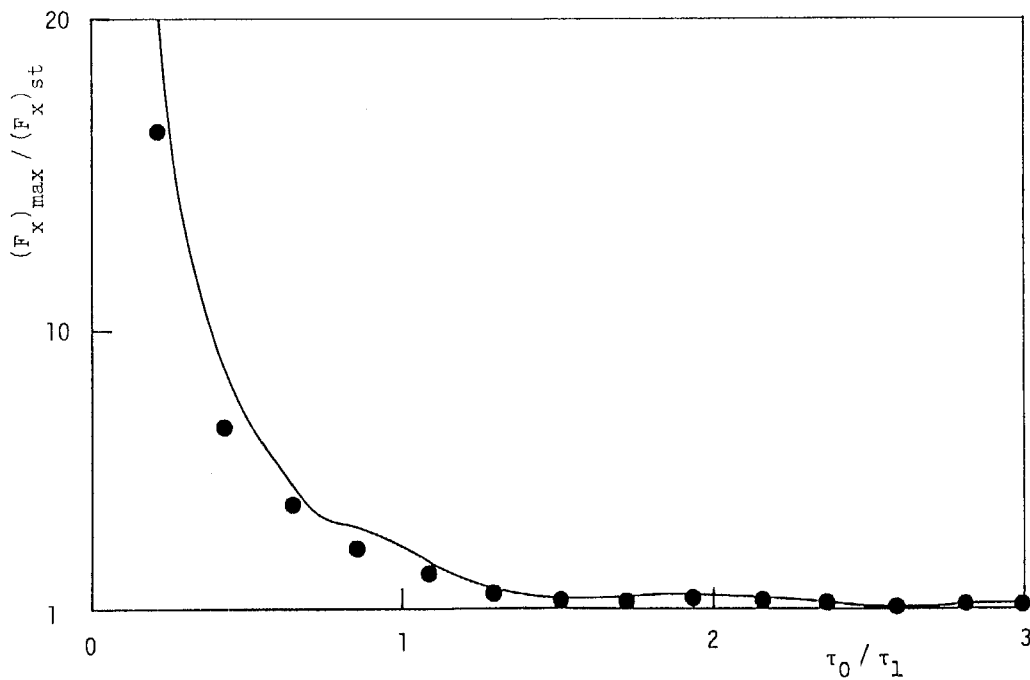


図5.24 静止側の固定基礎におけるせん断力(合力)の動的最大値

$\left(\begin{array}{l} h/R=0.02, l/R=8, \chi=l, \text{先端:固定}, \text{Flüggeの理論}, \tau_1=46.4 \\ \text{余弦状の立ち上がり正有する場合}, \bullet \text{ 初期最大値}, \text{--- 理論最大値} \end{array} \right)$

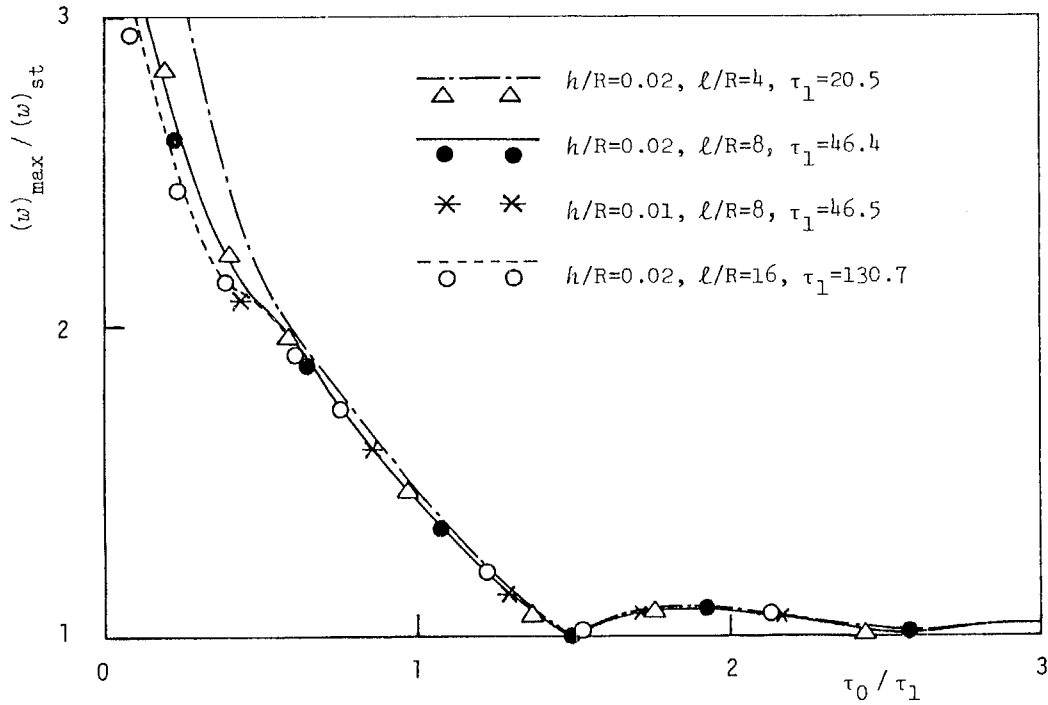


図5.25 円筒殻中央における半径方向変位の動的最大値

($x=l/2: \theta=0$, 先端:固定, $\tau_0=ct_0/R$, $\tau_1=2\pi/\lambda_1$, Flüggeの理論)
 (余弦状の立ち上がりをも有する場合, ●○△* 初期最大値, --- 理論最大値)

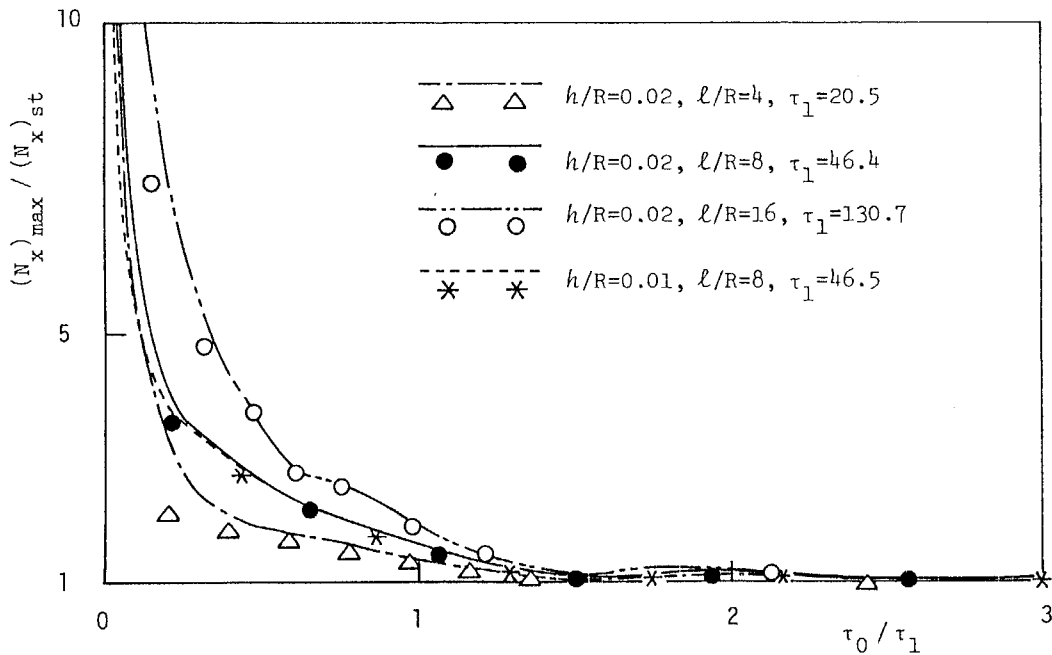


図5.26 固定基礎における垂直力の動的最大値

($x=\theta=0$, 先端:固定, $\tau_0=ct_0/R$, $\tau_1=2\pi/\lambda_1$, Flüggeの理論)
 (余弦状の立ち上がりをも有する場合, ●○△* 初期最大値)
 ($(N_x)_{st}$: 静的結果, --- 理論最大値)

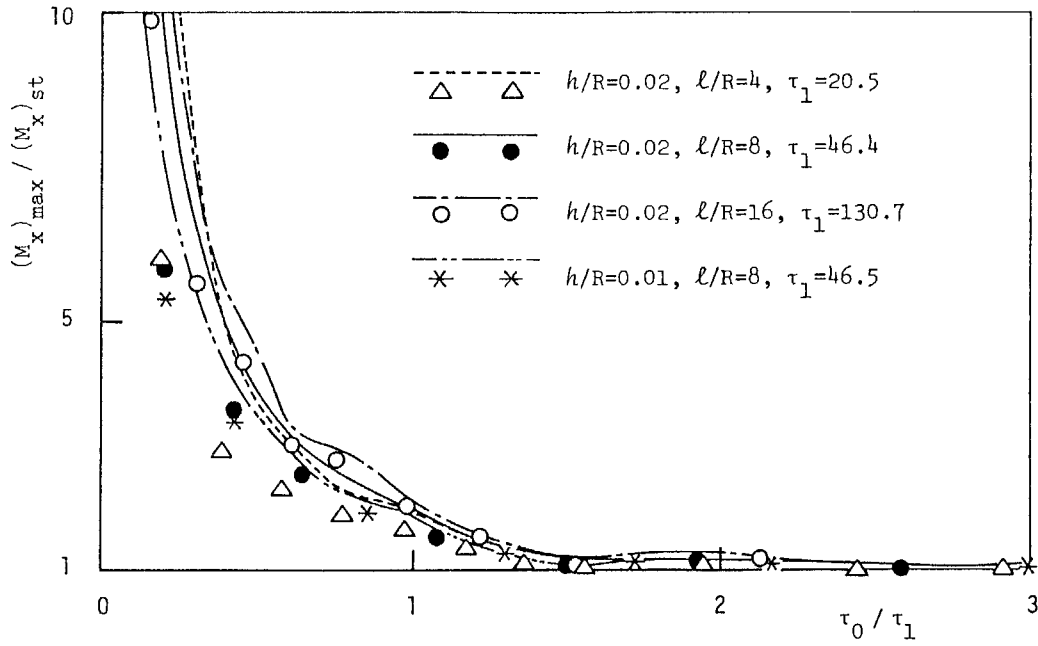


図 5.27 固定基礎における曲げモーメントの動的最大値

$x = \theta = 0$, 先端: 固定, $\tau_0 = ct_0/R$, $\tau_1 = 2\pi/\lambda_1$, Flugge の理論
 余弦状の立ち上がりをもつ場合, $(M_x)_{st}$: 静的結果
 $(M_x)_{max}$: 動的最大値, ●○△* 初期最大値, ≡≡≡≡ 理論最大値

5.5 結 言

本章では、変位衝撃をうける円筒殻の問題として、一端固定の有限長円筒殻が固定基礎の衝撃的な移動をうける問題を取り上げ、円筒殻に生ずる衝撃応力を修正理論である Mirsky-Herrmann および古典理論である Flügge の両理論に基づいて解析した。その際、固定基礎の動きをその変位速度の時刻履歴に不連続変化がある場合とない場合の関数によって規定した。

理論解析の部分では変位衝撃の問題に対する解析方法と注意すべき事柄を明らかにし、数値結果の部分では衝撃応力の時間変動を示しながら両理論の特性を明らかにするとともに最後には衝撃応力の最大応答を能率よく計算し整理する方法を提案した。

本章で得られた主要な成果を箇条書きにしてまとめて、締め括りとする。

- (1) 本章で示した解析方法によって変位衝撃の問題が解析可能となった。
- (2) 変位速度の時間変化が連続関数となるように変位衝撃を与えた場合には修正理論と古典理論の結果の間に大きな差は生じない。
- (3) 変位速度の時間変化に不連続変化があるように変位衝撃を与えた場合には、面外合応力成分の応答において修正理論と古典理論の結果の間に大きな差違を生ずる。古典理論による結果では異常に大きな振幅の応答を示すなど極めて不自然な点が多く見られる。したがって、この場合の応答

解析には古典理論を用いない方がよい。

(4) 変位速度が不連続的に変化する時刻において荷重端における面外合応力成分は古典理論によると発散する。

(5) 変位および応力成分の動的最大値の上限を評価する理論最大値が、応答の初期における最大値とほぼ一致した。

つまり、理論最大値の考え方と計算式が動的最大応答の評価方法として妥当であることが確認された。

(6) 変位衝撃のもとでの変位および応力成分の動的最大値はその立ち上がり時間が円筒殻の最低次固有周期よりも短くなったとき、急激に大きくなる。また、動的最大値の結果を、静的結果と円筒殻の最低次固有周期により無次元化して整理すると円筒殻形状の相違による結果のバラツキが極めて小さくなった。

参 考 文 献

- [1] Miles, J. W., On the Sloshing of Liquid in a Flexible Tank, J. Appl. Mech., Vol. 25, No. 2 (1958), pp. 277-283.
- [2] Chu, W.-H., Breathing Vibrations of a Partially Filled Cylindrical Tank — Linear Theory, Trans. ASME, Ser. E, Vol. 30, No. 4 (1963), pp. 532-536.
- [3] Bauer, H. F., Hsu, T.-M. & Wang, J. T.-S., Interaction of a Sloshing Liquid With Elastic Containers, Trans. ASME, Ser. D, Vol. 90, No. 3 (1968), pp. 373-377.
- [4] Stillman, W. E., Free Vibration of Cylinders Containing Liquid, Vol. 30, No. 4 (1973), pp. 509-524.
J. Sound & Vibr.
- [5] 藤田勝久, 液体貯蔵円筒タンクの地震応答解析, 機論, 46巻, 410号 (昭55), 1225-1234.
- [6] Miklowitz, J. & Garrott, W. R., Transient Response of Two-Dimensional Cantilevered Plates Subjected to Base Motions, Modern Problems in Elastic Wave Propagation (1977), John Wiley & Sons, pp. 373-400.

第 6 章

衝撃的変位が与えられた円筒形液体貯槽

6.1	緒言	316
6.2	問題の設定と基礎理論	319
6.3	液体との連成運動を考慮した解析	325
6.4	液体を固定質量で近似した解析	339
6.5	数値結果	350
6.6	結言	364

	参考文献	367
--	------	-----

6.1 緒 言

第2章から第5章までの4章で、円筒殻の衝撃応答に関する基本的な問題とその解析方法ならびに結果におよぼす各種動的円筒殻理論の影響についての予定していた記述を終えた。

残る本章と次章では、衝撃応答解析の応用問題と薄肉円筒の衝撃実験について記述することにする。

本章では応用問題として円筒形液体貯槽の地震応答問題を取り上げ、これまでの衝撃応力に対する解析手法がそのまま適用できることを示すことにする。

地震荷重をうける円筒形液体貯槽の動的応答に関する研究は、近年盛んに行われている。しかしこの問題は、内部に存在する液体と貯槽との連成振動問題となるため現象は複雑であり、厳密な意味での解析例はまだ存在していないといつてよい。この分野の研究では、問題をいかに理想化して解析可能でしかも現実の現象を近似し得る問題とするかに多くの努力が注がれてきたように思われる。そのため研究手段や方法は千差万別である。貯槽を剛体と仮定して液体の運動だけを解析し、その動圧などから貯槽に作用する外力環境を推定する方法は古くから用いられている。これには Jacobsen^[1], Housner^[2], Epstein^[3] の論文など多くの研究成果があり、実用的な手法として現在でもよく利用されている。

連成問題として扱った研究では、貯槽の振動モードにはり理論による既知の結果を利用して近似解析したものが多く、Miles^[4], Arya^[5], Veletsos^[6] などの研究がある。貯槽の振動モー

ドをより正確に求めるために円筒殻理論を導入した例としては Chu の研究が最初のものである。Chu は両縁自由支持貯槽の固有振動数を Donnell 型の近似的な動的円筒殻理論を用いて連成問題としての解析を行った。^[7]その後, Bauer,^{[8][9]} Stillmann^[10], Fischer,^[11] 近藤^[12] などによってより正確な固有振動数の連成問題としての解析が行われたが, 解析を簡単化するために軸対称変形だけを扱った例や軸方向モードにフーリエ級数を用いたために両縁自由支持貯槽にしか適用できない例あるいは貯槽の変形に対して何らかの近似を導入した例が, ほとんどである。さらに貯槽に生ずる衝撃応力の解析まで行った研究となると, もう全くその例が見られない。

このように概観してみると, 流体には圧縮性を無視した理想流体の理論を用いたものがほとんどであるが, 貯槽に対しては実に様な理論や近似方法の用いられているのが対称的である。このことは貯槽に対して用いるべき理論や解析方法が確立されていないことを物語っていると見ることができる。

そこで本章では, 円筒形液体貯槽の地震応答解析へこれまでに示した動的円筒殻理論に基づいた解析手法を応用することを試みた。そのために, この問題を内部に流体を有する片持ち円筒殻が基礎の周期的な移動をうける問題としてとらえ, まず流体に対しては圧縮性を無視した理想流体の理論を, 貯槽に対しては Flügge の動的円筒殻理論をそれぞれ用いて貯槽に生ずる衝撃応力を連成問題として解析する方法を示した。

次に貯槽に対してだけ正確な解析を行う手段として, 内部の液体を固定質量で近似する解析方法について記述し, 連成問題としての解析に対して著しく簡単になることを示した。

最後に、液体の固定質量近似による解析結果に対する数値計算結果を紹介して、連成問題としての解析と固定質量近似による解析の優劣についての考え方を述べるとともに、他の衝撃問題への本解析手法の適用性について触れることにする。

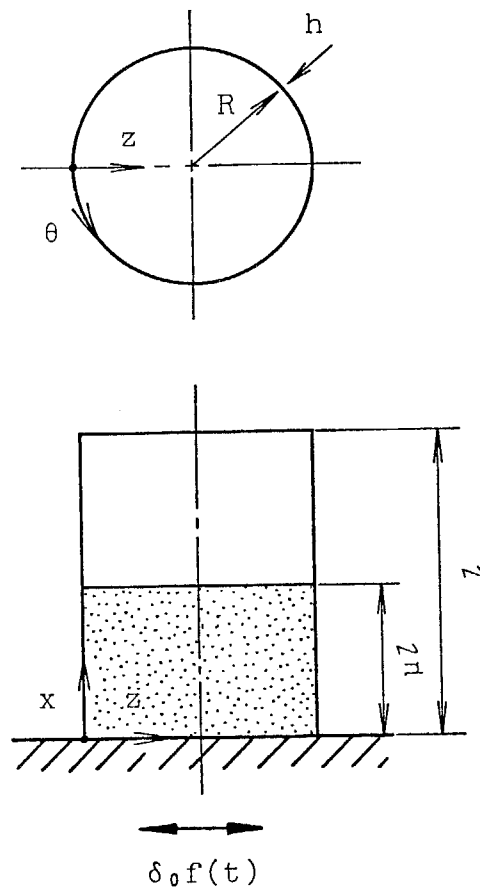


図6.1 固定基礎の周期的な水平移動をうける円筒形液体貯槽

6.2 問題の設定と基礎理論

図6.1のように円筒形貯槽を一端固定・他端自由の片持ち円筒殻でモデル化する。これが地震動を模擬した荷重関数にしたがった固定基礎の周期的な水平移動をうける問題を考える。貯槽は高さ l 肉厚 t で内部には質量密度 ρ_0 の液体が高さ μl ($0 \leq \mu \leq 1$)まで満たされているものとし、液面の高さは振動中も不変であり空の部分との境界は一定であるものとする。貯槽に対しては古典理論であるFlüggeの動的円筒殻理論を、液体に対しては非圧縮性完全流体の理論をそれぞれ用いることを前提として、地震動を模擬する荷重関数 $f(t)$ には図6.2(a)に示したような波形を用いた。

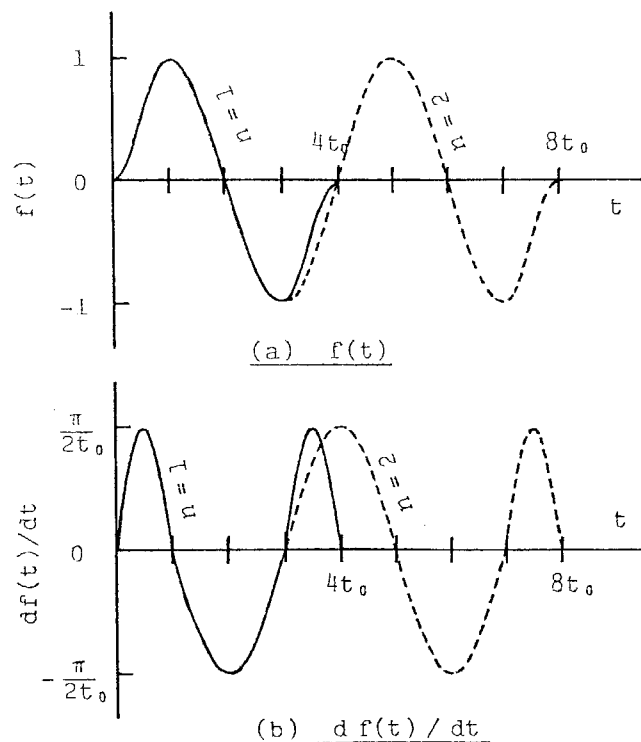


図6.2 荷重関数とその導関数

定義式は次のとおりである。

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{\pi}{t_0} t) & : 0 \leq t < t_0 \\ \sin \frac{\pi}{2t_0} t & : t_0 \leq t < (4n-1)t_0 \\ -\frac{1}{2} (1 - \cos \frac{\pi}{t_0} t) & : (4n-1)t_0 \leq t < 4nt_0 \\ 0 & : 4nt_0 \leq t \end{cases} \quad (6.1)$$

ここで、 n は地震動の波数である。

この場合の基礎の変位速度は式(6.1)を微分すれば求められ、図6.2(b)のような連続関数となる。動的円筒殻理論に古典理論を用いる場合には、変位速度が連続関数となるように荷重関数 $f(t)$ を定めなければならぬ。なぜならば変位速度履歴に不連続変化があると、荷重端における応力成分の解がその時刻において発散し数値計算が不可能となる場合があるからである。この点については、第5章で詳細に述べたとおりである。

座標系としては、貯槽に対しては中央面上の固定基礎に原点をとった直交座標 (x, θ, z) を定め、液体に対しては中央の固定基礎に原点をとった円柱座標 (r, θ, z) を定める。

円筒殻の単位面積あたりに作用する荷重成分 (P_x, P_θ, P_z) および (x, θ, z) 軸方向並進慣性の項を付加したFlüggeの理論を変位の方程式で示せば、式(2.33)より次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \rho_1 (1 + \kappa^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \rho_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \theta} - \nu \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ + \kappa^2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} - \rho_1 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \theta^2} \right) + \kappa^2 \frac{R^4}{D} P_x = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \end{aligned} \quad (6.2a)$$

$$P_z \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + P_1 (1 + 3k^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial w}{\partial \theta} + k^2 (1 + P_1) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \theta} + k^2 \frac{R^4}{D} P_\theta = \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} \quad (6.2b)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial \xi} + k^2 \left(P_1 \frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial \theta^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} \right) + \frac{\partial v}{\partial \theta} - k^2 (1 + P_1) \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^2 \partial \theta} - w - k^2 (\nabla^4 w + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w) + k^2 \frac{R^4}{D} P_z = \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \quad (6.2c)$$

ここで、慣性項には一次近似を導入している。

流体を完全流体として扱う場合には、貯槽に作用する流体力は殻の垂直方向にだけしか働かないと考えればよいから、式(6.2)中の P_z だけを残し P_x および P_θ についてはこれを無視することができる。すると、簡単化された変位の方程式は

$$(\nabla^4 + L^4) u = (\psi_1 + L_1) w \quad (6.3a)$$

$$(\nabla^4 + L^4) v = (\psi_2 + L_2) w \quad (6.3b)$$

$$\Phi^8 w = L^6 w + \frac{R^4}{D} (\nabla^4 + L^4) P_z \quad (6.3c)$$

次に、流体を固定質量で近似する場合の考え方と方程式を示す。円筒殻の壁面に単位面積あたり m_0 の質量が一様に固着しているものとし、これは円筒殻の変形を妨げることなく慣性質量として振る舞うだけであるとする。この場合、式(6.2)に含まれる荷重成分を次のように置くだけでよいことになる。

$$(P_x, P_\theta, P_z) = -m_0 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (u, v, w) \quad (6.4)$$

これを式(6.2)に代入して変位 w だけの微分方程式を導き、簡単化された変位の方程式として示せば、次のようになる。

$$(\nabla^4 + L^{*4})u = (\psi_1 + L_1^*)w \quad (6.5a)$$

$$(\nabla^4 + L^{*4})v = (\psi_2 + L_2^*)w \quad (6.5b)$$

$$\Phi^8 w = L^{*6}w \quad (6.5c)$$

$$\text{ここで, } L^{*4} \equiv \frac{\eta^4}{\rho_1} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} - \eta^2 \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \nabla^2$$

$$L_1^* \equiv \eta^2 \left(\frac{\kappa^2}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\nu}{\rho_1} \right) \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \tau^2}$$

$$L_2^* \equiv \eta^2 \left(\kappa^2 \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial \tau^2}$$

$$L^{*6} \equiv -\frac{\eta^6}{\kappa^2 \rho_1} \frac{\partial^6}{\partial \tau^6} - \eta^4 \left(\frac{1}{\rho_1} \nabla^4 - \frac{1}{\kappa^2} \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \nabla^2 + \frac{1}{\kappa^2 \rho_1} \right) \frac{\partial^4}{\partial \tau^4}$$

$$+ \eta^2 \left(\frac{1+\rho_1}{\rho_1} \nabla^6 - \frac{1}{\kappa^2} \nabla^4 + \frac{1}{\kappa^2} \nabla^2 + 4 \frac{\rho_2}{\kappa^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

ここに含まれる定数 η は固定質量の慣性効果を表す定数であり、次のようになる。

$$\eta = \sqrt{1 + m_0 / \rho P} \quad (6.6)$$

固定質量のない場合は $m_0 = 0$ すなわち $\eta = 1$ となる。

したがって、式(6.5)では時間に新変数 τ^* を導入し

$$\tau / \eta = \tau^* \quad (6.7)$$

なる変数変換を行えば、固定質量のない場合の式と完全に一致することがわかる。式(6.4)のように固定質量の慣性効果を三次元とすれば、式(6.7)のような対応関係が成立する。

一方、流体を完全流体として扱う場合にならって、固定質量の慣性効果を一次元すなわち円筒殻の垂直方向成分だけとする考え方が成立する。この場合は式(6.4)に相当する式が

$$(P_x, P_\theta, P_z) = -m_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (0, 0, w) \quad (6.8)$$

となる。すると、簡単化された変位の方程式は式(6.3)から

$$(\nabla^4 + L^4)u = (\Psi_1 + L_1)w \quad (6.9a)$$

$$(\nabla^4 + L^4)v = (\Psi_2 + L_2)w \quad (6.9b)$$

$$\begin{aligned} \Phi^8 w = & -\frac{\eta^2}{k^2 \rho_1} \frac{\partial^6 w}{\partial z^6} - \left(\frac{1}{\rho_1} \nabla^4 - \frac{\eta^2}{k^2} \frac{1 + \rho_1}{\rho_1} \nabla^2 + \frac{1}{k^2 \rho_1} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \\ & + \left(\frac{1 + \rho_1}{\rho_1} \nabla^6 - \frac{\eta^2}{k^2} \nabla^4 + \frac{1}{k^2} \nabla^2 + 4 \frac{\rho_2}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (6.9c) \end{aligned}$$

となる。このように慣性効果を一次元とした場合の式には、慣性効果を三次元とした場合とは異なり、式(6.7)のような固定質量のない場合との対応関係は成立しない。

非圧縮性の完全流体では、速度ポテンシャル φ が存在し基礎方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (6.10)$$

この方程式の変数分離による一般解は、以下のようになる。

$$\varphi = \left\{ \begin{matrix} J_m(\beta r) \\ Y_m(\beta r) \end{matrix} \right\} \times \left\{ \begin{matrix} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{matrix} \right\} \times \left\{ \begin{matrix} \sinh \beta x \\ \cosh \beta x \end{matrix} \right\} \quad (6.11a)$$

または

$$\varphi = \left\{ \begin{matrix} I_m(\beta r) \\ K_m(\beta r) \end{matrix} \right\} \times \left\{ \begin{matrix} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{matrix} \right\} \times \left\{ \begin{matrix} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{matrix} \right\} \quad (6.11b)$$

ここで、 β は変数分離に関わる分離定数であり、 $\beta = 0$ とすれば式(6.11)は次のようになる。

$$\varphi = r^{\pm n} \times \left\{ \begin{matrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{matrix} \right\} \times \left\{ \begin{matrix} 1 \\ x \end{matrix} \right\} \quad (6.12)$$

(324)

ただし, $J_n(pr)$ および $Y_n(pr)$ は n 次の第1種および第2種のベッセル関数, $I_n(pr)$ および $K_n(pr)$ は n 次の第1種および第2種の変形ベッセル関数である。

速度ポテンシャルと各物理量との関係式は次のとおりである。まず, 座標 (r, θ, x) 軸方向の速度成分 (v_r, v_θ, v_x) は速度ポテンシャルの定義により

$$(v_r, v_\theta, v_x) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (6.13)$$

で与えられる。流体中の圧力 p_0 は圧力方程式の線形化により

$$p_0 = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (6.14)$$

で与えられる。ここで, ρ_0 は流体の質量密度である。

流体の自由表面における変形すなわち流体の波高 χ は, 同じく圧力方程式の線形化により次のようになる。

$$\chi = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (6.15)$$

ここで, g は重力加速度である。

なお, 自由液面における境界条件は式(6.13)および(6.15)から, $v_x = \partial \chi / \partial t$ すなわち

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (6.16)$$

と置いて得られる次の式によって与えられる。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (6.17)$$

6.3 液体との連成運動を考慮した解析

ここでは、貯槽は満配の状態すなわち $\mu = 1$ の場合における解析を示すことにする。連成問題としての解析であるから貯槽に対しては Flügge の円筒殻理論である式 (6.3) を、液体に対しては完全流体の理論である式 (6.10) をそれぞれ用いることになる。

まず貯槽における境界条件は次のようになる。

(i) $x = 0$ において

$$u = 0 \quad (6.18a) \quad v = \delta_0 f(t) \sin \theta \quad (6.18b)$$

$$w = \delta_0 f(t) \cos \theta \quad (6.18c) \quad \partial w / \partial x = 0 \quad (6.18d)$$

(ii) $x = l$ において

$$N_x = M_x = S_x = T_x = 0 \quad (6.18e)$$

貯槽に作用する荷重 P_z は流体の圧力に等しいから、速度ポテンシャルを用いて次のように与えられる。

$$P_z = -(\rho_0)_{r=R} = \rho_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{r=R} \quad (6.19)$$

次に流体における境界条件は、以下のようになる。

(iii) $x = 0$ において

$$\partial \varphi / \partial x = 0 \quad (6.20a)$$

(iv) $x = l$ において

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (6.20b)$$

さらに貯槽の壁面においては、貯槽の速度と流体の速度が等しいものとするれば、次の関係が成立する。

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=R} \quad (6.21)$$

解析にはラプラス変換法を用いる。

貯槽における変位成分(u, v, w)および速度ポテンシャル φ の変数分離解を次のように置くことができる。

$$u = U \cos \theta \quad (6.22a) \quad v = V \sin \theta \quad (6.22b)$$

$$w = W \cos \theta \quad (6.22c) \quad \varphi = \Phi \cos \theta \quad (6.22d)$$

ここで、(U, V, W)は座標 x と時間 t の関数、 Φ は座標(r, x)と時間 t の関数である。

まず速度ポテンシャル Φ の一般解を求めることにする。式(6.10)は時間微分項を含まないので、 Φ のラプラス変換解として式(6.11)および(6.12)がそのまま利用できる。まず境界条件式(6.20a)を満足する解を選ぶと次のようになる。

$$\bar{\Phi} = A_0 J_1(\beta_0 r) \cosh \beta_0 x + A_m I_1(\beta_m r) \cos \beta_m x \quad (6.23)$$

境界条件式(6.20b)を、式(6.22d)を代入した後ラプラス変換すれば、次のようになる。

$$p^2 \bar{\Phi} + g(\partial \bar{\Phi} / \partial x) = 0 \quad : x=l \quad (6.24)$$

これに式(6.23)を代入して恒等的に式(6.24)が成立するための条件より、分離定数 β_0 および β_m は次式を満足しなくてはならないことになる。

$$p^2 \cosh \beta_0 l + g \beta_0 \sinh \beta_0 l = 0 \quad (6.25a)$$

$$p^2 \cos \beta_m l + g \beta_m \sin \beta_m l = 0 \quad (6.25b)$$

ここで、ラプラス変換パラメータ p が純虚数のとき式(6.25a)はただ1個の実根 β_0 ($0 < \beta_0$)を、式(6.25b)は無数個の実根 β_m ($0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots$)をもつことから式(6.23)の解を改めて

$$\bar{\Phi} = A_0 J_1(\beta_0 r) \cosh \beta_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_1(\beta_n r) \cos \beta_n x \quad (6.26)$$

のように置くことにする。

次に貯槽の半径方向変位 W の一般解を求める。

式(6.22d)を代入したのちの式(6.19)をラプラス変換すれば

$$\bar{P}_z = P_0 \phi (\bar{\Phi})_{r=R} \cos \theta \quad (6.27)$$

となる。円筒殻の基礎式(6.3c)をラプラス変換して、式(6.22c)

のラプラス変換形および式(6.27)を代入すれば

$$\begin{aligned} & (R^8 \frac{d^8}{dx^8} + a_6 R^6 \frac{d^6}{dx^6} + a_4 R^4 \frac{d^4}{dx^4} + a_2 R^2 \frac{d^2}{dx^2} + a_0) \bar{W} \\ &= P_0 \phi \frac{R^4}{D} \left\{ (R^2 \frac{d^2}{dx^2} - 1)^2 - \rho^2 \frac{R^2}{c^2} \left(1 + \frac{1}{\rho_1}\right) (R^2 \frac{d^2}{dx^2} - 1) + \frac{\rho^4}{\rho_1} \frac{R^4}{c^4} \right\} (\bar{\Phi})_{r=R} \end{aligned} \quad (6.28)$$

となる。したがって、式(6.26)を用いれば \bar{W} の一般解を

$$\begin{aligned} \bar{W} = \sum_{j=1}^8 c_j e^{\alpha_j x} + P_0 \phi \frac{R^4}{D} \left\{ \frac{\mu_0}{\Delta_0} A_0 J_1(\beta_0 R) \cosh \beta_0 x \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\Delta_n} A_n I_1(\beta_n R) \cos \beta_n x \right\} \end{aligned} \quad (6.29)$$

と置くことができる。ここで、 α_j ($j=1, \dots, 8$) は特性方程式

$$(R\alpha)^8 + a_6 (R\alpha)^6 + a_4 (R\alpha)^4 + a_2 (R\alpha)^2 + a_0 = 0 \quad (6.30)$$

の相異なる 8 根である。ここで、 (a_6, a_4, a_2, a_0) は

$$a_6 = -2(2-\nu) - \rho^2 \frac{R^2}{c^2} \left(1 + \frac{1}{\rho_1}\right)$$

$$a_4 = \frac{1-\nu^2}{k^2} + \left\{ \frac{1}{k^2} + 3 \left(1 + \frac{1}{\rho_1}\right) \right\} \frac{R^2}{c^2} \rho^2 + \frac{1}{\rho_1} \frac{R^4}{c^4} \rho^4$$

(328)

$$a_2 = - \left\{ \frac{3+4\beta_2}{k^2} + 3 \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \right\} \frac{R^2}{c^2} p^2 - \left\{ \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) + \frac{2}{\beta_1} \right\} \frac{R^4}{c^4} p^4$$

$$a_0 = \left(\frac{2}{k^2} + 1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \frac{R^2}{c^2} p^2 + \left\{ \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{2}{\beta_1} \right) + \frac{1}{\beta_1} \right\} \frac{R^4}{c^4} p^4 + \frac{1}{k^2 \beta_1} \frac{R^6}{c^6} p^6$$

であり、係数 $(\mu_0, \mu_m, \Delta_0, \Delta_m)$ は次のとおりである。

$$\mu_0 = R^4 \beta_0^4 - \left\{ 2 + \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \frac{R^2}{c^2} p^2 \right\} R^2 \beta_0^2 + 1 + \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \frac{R^2}{c^2} p^2 + \frac{R^4}{c^4} \frac{p^4}{\beta_1}$$

$$\mu_m = R^4 \beta_m^4 + \left\{ 2 + \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \frac{R^2}{c^2} p^2 \right\} R^2 \beta_m^2 + 1 + \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \frac{R^2}{c^2} p^2 + \frac{R^4}{c^4} \frac{p^4}{\beta_1}$$

$$\Delta_0 = R^8 \beta_0^8 + a_6 R^6 \beta_0^6 + a_4 R^4 \beta_0^4 + a_2 R^2 \beta_0^2 + a_0$$

$$\Delta_m = R^8 \beta_m^8 - a_6 R^6 \beta_m^6 + a_4 R^4 \beta_m^4 - a_2 R^2 \beta_m^2 + a_0$$

係数 c_j ($j=1, \dots, 8$)は境界条件式(6.18)により決定される定数である。係数 A_0 および A_m を係数 c_j で表すために、速度の連続条件式(6.21)を用いる。式(6.21)をラプラス変換して式(6.22)のラプラス変換形を代入すれば

$$\psi \bar{W} = - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (6.31)$$

であるから、式(6.26)および(6.29)を代入して

$$\begin{aligned} & \left\{ \beta_0 p^2 \frac{R^4}{D} \frac{\mu_0}{\Delta_0} J_1(\beta_0 R) + \frac{J_1(\beta_0 R)}{R} - \beta_0 J_0(\beta_0 R) \right\} A_0 \cosh \beta_0 x \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \beta_0 p^2 \frac{R^4}{D} \frac{\mu_m}{\Delta_m} I_1(\beta_m R) + \frac{I_1(\beta_m R)}{R} - \beta_m I_0(\beta_m R) \right\} A_m \cos \beta_m x \\ & = p \sum_{j=1}^8 c_j e^{\alpha_j x} \end{aligned} \quad (6.32)$$

のような関係式が得られる。まず A_0 を c_j で表すために式(6.32)の両辺に $\cosh \beta_0 x$ を乗じて x について0から l まで積分する。

そこで式(6.25)の関係を用いれば A_m が消去されて、次のような関係式が得られ A_0 が C_j で表されたことになる。

$$\frac{z\beta_0 l + \sinh z\beta_0 l}{z\beta_0 R} \left\{ (1+T_0)J_1(\beta_0 R) - \beta_0 R J_0(\beta_0 R) \right\} A_0 = \rho \sum_{j=1}^8 b_{0j} C_j$$

ここで

(6.33)

$$b_{0j} = \frac{1}{\alpha_j^2 - \beta_0^2} \left\{ e^{\alpha_j l} (\alpha_j \cosh \beta_0 l - \beta_0 \sinh \beta_0 l) - \alpha_j \right\}$$

$$T_0 = \frac{R^5}{D} \frac{\mu_0}{\Delta_0} \rho_0 \rho^2$$

次に A_m を C_j で表すために式(6.32)の両辺に $\cos \beta_m x$ を乗じて x について 0 から l まで積分する。そこで式(6.25)の関係を用いれば A_0 が消去されて、次のような関係式が得られ A_m が C_j で表されたことになる。

$$\frac{z\beta_m l + \sin z\beta_m l}{z\beta_m R} \left\{ (1+T_m)I_1(\beta_m R) - \beta_m R I_0(\beta_m R) \right\} A_m = \rho \sum_{j=1}^8 b_{mj} C_j$$

ここで

(6.34)

$$b_{mj} = \frac{1}{\alpha_j^2 + \beta_m^2} \left\{ e^{\alpha_j l} (\alpha_j \cos \beta_m l + \beta_m \sin \beta_m l) - \alpha_j \right\}$$

$$T_m = \frac{R^5}{D} \frac{\mu_m}{\Delta_m} \rho_0 \rho^2$$

式(6.33)および(6.34)を A_0 および A_m について解き、式(6.29)に代入すれば \bar{w} の一般解は未定係数については C_j だけで表されることになる。そこで、他の変位成分も含めてラプラス変換された変位成分 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ の一般解を、第4章における式(4.26)にならって、次のように置くことにする。

$$\bar{U} = \sum_{j=1}^8 c_j (f_j e^{\alpha_j x} + h_{0j} f_0 \cosh \beta_0 x + \sum_{m=1}^{\infty} h_{mj} f_m \cos \beta_m x) \quad (6.35a)$$

$$\bar{V} = \sum_{j=1}^8 c_j (g_j e^{\alpha_j x} + h_{0j} g_0 \cosh \beta_0 x + \sum_{m=1}^{\infty} h_{mj} g_m \cos \beta_m x) \quad (6.35b)$$

$$\bar{W} = \sum_{j=1}^8 c_j (e^{\alpha_j x} + h_{0j} \cosh \beta_0 x + \sum_{m=1}^{\infty} h_{mj} \cos \beta_m x) \quad (6.35c)$$

ここで, $h_{0j} = \kappa_0 b_{0j}$, $h_{mj} = \kappa_m b_{mj}$

$$\kappa_0 = \frac{z}{z\beta_0 l + \sinh z\beta_0 l} \frac{T_0 \beta_0 J_1(\beta_0 R)}{(1+T_0) J_1(\beta_0 R) - \beta_0 R J_0(\beta_0 R)}$$

$$\kappa_m = \frac{z}{z\beta_m l + \sinh z\beta_m l} \frac{T_m \beta_m I_1(\beta_m R)}{(1+T_m) I_1(\beta_m R) - \beta_m R I_0(\beta_m R)}$$

係数 (f_j, g_j) , (f_0, g_0) , (f_m, g_m) は式(6.35)を式(6.3a)および(6.3b)に代入することにより得られ, 次のように与る。

$$f_j = F(\alpha_j), \quad f_0 = F(\beta_0), \quad f_m = F(i\beta_m)$$

$$g_j = G(\alpha_j), \quad g_0 = G(\beta_0), \quad g_m = G(i\beta_m)$$

ただし
$$F(\alpha) = \frac{\alpha}{D(\alpha)} \left\{ -\kappa^2 \alpha^4 + (\nu - 3\kappa^2 \rho_1 + \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \frac{R^2}{c^2} \kappa^2 \rho^2) \alpha^2 + 1 + \kappa^2 + (\kappa^2 - \frac{\nu}{\rho_1}) \frac{R^2}{c^2} \rho^2 \right\}$$

$$G(\alpha) = \frac{1}{D(\alpha)} \left\{ 2\kappa^2 \alpha^4 - (z + \nu + 2\kappa^2 + \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \frac{R^2}{c^2} \kappa^2 \rho^2) \alpha^2 + 1 + \frac{R^2}{c^2} \frac{\rho^2}{\rho_1} \right\}$$

$$D(\alpha) = \alpha^4 - (z + \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \frac{R^2}{c^2} \rho^2) \alpha^2 + 1 + \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \frac{R^2}{c^2} \rho^2 + \frac{R^4}{c^4} \frac{\rho^4}{\rho_1}$$

係数 c_j を決定するために, 構成方程式(2.68)を用いて貯槽における境界条件式(6.18)を変位成分だけで表し, 式(6.22)を代入する。そして, ラプラス変換したのち式(6.35)を代入

することにより係数 c_j を決定すれば、次のようになる。

$$c_j = \delta_0 \bar{f}(p) \frac{A_{2j} + A_{3j}}{|A|} \quad (6.36)$$

ここで、 $[A]$ は 8 次の行列であり i 行 j 列の成分 a_{ij} は以下のとおりである。

$$a_{1j} = f_j + f_0 h_{0j} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n h_{nj}$$

$$a_{2j} = g_j + g_0 h_{0j} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n h_{nj}$$

$$a_{3j} = 1 + h_{0j} + \sum_{n=1}^{\infty} h_{nj}$$

$$a_{4j} = \alpha_j + \beta_0 h_{0j} - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n h_{nj}$$

$$\begin{aligned} a_{5j} = & (R\alpha_j f_j + \nu g_j + \kappa^2 R^2 \alpha_j^2 - \nu) e^{\alpha_j l} \\ & + R\beta_0 f_0 h_{0j} \sinh \beta_0 l - R \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n h_{nj} \sin \beta_n l \\ & + (\nu g_0 + \kappa^2 R^2 \beta_0^2 - \nu) h_{0j} \cosh \beta_0 l \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu g_n - \kappa^2 R^2 \beta_n^2 - \nu) h_{nj} \cos \beta_n l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{6j} = & (R\alpha_j f_j + \nu g_j + R^2 \alpha_j^2 - \nu) e^{\alpha_j l} \\ & + R\beta_0 f_0 h_{0j} \sinh \beta_0 l - R \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n h_{nj} \sin \beta_n l \\ & + (\nu g_0 + R^2 \beta_0^2 - \nu) h_{0j} \cosh \beta_0 l \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu g_n - R^2 \beta_n^2 - \nu) h_{nj} \cos \beta_n l \end{aligned}$$

$$a_{7j} = (f_j - R\alpha_j g_j + 3\kappa^2 R\alpha_j) e^{\alpha_j l} + (3\kappa^2 - g_0) R\beta_0 h_{0j} \sinh \beta_0 l$$

$$\begin{aligned}
& + R \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - 3k^2) \beta_n h_{nj} \sin \beta_n l \\
a_{8j} = & \left\{ (R^2 \alpha_j^2 + P_1) f_j + (1 + P_1) R \alpha_j g_j + (R^2 \alpha_j^2 - 2 + \nu) R \alpha_j \right\} e^{\alpha_j l} \\
& + \left\{ (1 + P_1) g_0 + R^2 \beta_0^2 - 2 + \nu \right\} R \beta_0 h_{0j} \sinh \beta_0 l \\
& + R \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ R^2 \beta_n^2 - (1 + P_1) g_n + 2 - \nu \right\} \beta_n h_{nj} \sin \beta_n l \\
& + (R^2 \beta_0^2 + P_1) f_0 h_{0j} \cosh \beta_0 l + \sum_{n=1}^{\infty} (P_1 - R^2 \beta_n^2) f_n h_{nj} \cos \beta_n l
\end{aligned}$$

式(6.36)を式(6.35)に代入すればラプラス変換された変位成分 $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ の解が, 式(6.33), (6.34)および(6.36)を式(6.26)に代入すればラプラス変換された速度ポテンシャル $\bar{\Phi}$ の解が, それぞれ定まり以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \end{pmatrix} &= \frac{\delta_0 \bar{f}(p)}{|A|} \sum_{j=1}^8 (A_{2j} + A_{3j}) \left\{ \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{pmatrix} e^{\alpha_j x} + \begin{pmatrix} f_0 \\ g_0 \\ 1 \end{pmatrix} h_{0j} \cosh \beta_0 x \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \\ 1 \end{pmatrix} h_{nj} \cos \beta_n x \right\} \quad (6.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi} &= \frac{p \delta_0 \bar{f}(p)}{|A|} \sum_{j=1}^8 (A_{2j} + A_{3j}) \left\{ \varepsilon_0 b_{0j} J_1(\beta_0 r) \cosh \beta_0 x \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n b_{nj} I_1(\beta_n r) \cos \beta_n x \right\} \quad (6.38)
\end{aligned}$$

$$\text{ここで, } \varepsilon_0 = \frac{2\beta_0 R}{2\beta_0 l + \sinh 2\beta_0 l} \frac{1}{(1 + T_0) J_1(\beta_0 R) - \beta_0 R J_0(\beta_0 R)}$$

$$\varepsilon_m = \frac{z\beta_m R}{z\beta_m l + \sin z\beta_m l} \frac{1}{(1+T_m)I_1(\beta_m R) - \beta_m R I_0(\beta_m R)}$$

式(6.37)および(6.38)のラプラス逆変換は留数定理によって行うことができる。そこで、第5章における方法にならってラプラス逆変換を行って、本問題に対する変位成分(U, V, W)および速度ポテンシャルΦの解を導けば、以下のようなになる。

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \delta_0 f(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - z\delta_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{G_m^{(1)}(t)}{p_m^2 \sum_{k=1}^8 |A_{k}^*|} \sum_{j=1}^8 (A_{2j} + A_{3j}) \left\{ \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{pmatrix} e^{\alpha_j x} \right. \right. \\ \left. \left. + \begin{pmatrix} f_0 \\ g_0 \\ 1 \end{pmatrix} h_{0j} \cosh \beta_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \\ 1 \end{pmatrix} h_{nj} \cos \beta_n x \right\} \right]_{p=i\beta_m} \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} \Phi = r\delta_0 \frac{df(t)}{dt} - z\delta_0 \sum_{m=1}^{\infty} & \left[\frac{G_m^{(2)}(t)}{p_m^2 \sum_{k=1}^8 |A_{k}^*|} \sum_{j=1}^8 (A_{2j} + A_{3j}) \right. \\ & \left. \times \left\{ \varepsilon_0 b_{0j} J_1(\beta_0 r) \cosh \beta_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n b_{nj} I_1(\beta_n r) \cos \beta_n x \right\} \right]_{p=i\beta_m} \quad (6.40) \end{aligned}$$

ここで、右辺第1項は固定基礎が準静的に移動した場合の解であり、第2項は固有振動モードの重ね合せを意味し、 p_m は超越方程式 $|A|=0$ の根として与えられ貯槽と流体の連成振動における m 次の固有振動数に対応している。

$[A_k]$ は8次の行列であり、 i 行 j 列の成分は次のとおりである。成分を a_{ij}^* とすると

(334)

$$(i) j = k \text{ のとき } a_{ij}^* = a_{ij}$$

$$(ii) j = k \text{ のとき } a_{ij}^* = \frac{1}{p} \frac{d a_{ij}}{d p}$$

ただし, $d a_{ij} / p d p$ の具体形については次のようになる。

$$a_{1j}^* = r_j \mu_j + (r_0 h_{0j} + f_0 \chi_{0j}) \mu_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (r_m h_{mj} + f_m \chi_{mj}) \mu_m$$

$$a_{2j}^* = s_j \mu_j + (s_0 h_{0j} + g_0 \chi_{0j}) \mu_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (s_m h_{mj} + g_m \chi_{mj}) \mu_m$$

$$a_{3j}^* = \mu_0 \chi_{0j} + \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \chi_{mj}$$

$$a_{4j}^* = \mu_j + (h_{0j} + \beta_0 \chi_{0j}) \mu_0 - \sum_{m=1}^{\infty} (h_{mj} + \beta_m \chi_{mj}) \mu_m$$

$$a_{5j}^* = \{ (1 + \alpha_j l) R f_j + (z + \alpha_j l) \kappa^2 R^2 \alpha_j + \nu (l g_j + s_j - l) + R \alpha_j r_j \} \mu_j e^{\alpha_j l}$$

$$+ \{ (\nu l g_0 + \kappa^2 R^2 l \beta_0^2 - \nu l + R f_0 + R \beta_0 r_0) h_{0j} + R \beta_0 f_0 \chi_{0j} \} \mu_0 \sinh \beta_0 l$$

$$+ \{ (R l \beta_0 f_0 + \nu s_0 + z \kappa^2 R^2 \beta_0) h_{0j} + (\nu g_0 + \kappa^2 R^2 \beta_0^2 - \nu) \chi_{0j} \} \mu_0 \cosh \beta_0 l$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \{ (\nu l g_m - \kappa^2 R^2 l \beta_m^2 - \nu l + R f_m + R \beta_m r_m) h_{mj} + R \beta_m f_m \chi_{mj} \} \mu_m \sin \beta_m l$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \{ (R l \beta_m f_m - \nu s_m + z \kappa^2 R^2 \beta_m) h_{mj} - (\nu g_m - \kappa^2 R^2 \beta_m^2 - \nu) \chi_{mj} \} \mu_m \cos \beta_m l$$

$$a_{6j}^* = \{ (1 + \alpha_j l) R f_j + (z + \alpha_j l) R \alpha_j + \nu (l g_j + s_j - l) + R \alpha_j r_j \} \mu_j e^{\alpha_j l}$$

$$+ \{ (\nu l g_0 + R^2 l \beta_0^2 - \nu l + R f_0 + R \beta_0 r_0) h_{0j} + R \beta_0 f_0 \chi_{0j} \} \mu_0 \sinh \beta_0 l$$

$$+ \{ (R l \beta_0 f_0 + \nu s_0 + z R^2 \beta_0) h_{0j} + (\nu g_0 + R^2 \beta_0^2 - \nu) \chi_{0j} \} \mu_0 \cosh \beta_0 l$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \{ (\nu l g_m - R^2 l \beta_m^2 - \nu l + R f_m + R \beta_m r_m) h_{mj} + R \beta_m f_m \chi_{mj} \} \mu_m \sin \beta_m l$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \{ (R l \beta_m f_m - \nu s_m + z R^2 \beta_m) h_{mj} - (\nu g_m - R^2 \beta_m^2 - \nu) \chi_{mj} \} \mu_m \cos \beta_m l$$

$$a_{rj}^* = \{ l f_j - (1 + \alpha_j l) R g_j + 3k^2 R (1 + \alpha_j l) + r_j - R \alpha_j s_j \} \mu_j e^{\alpha_j l}$$

$$- \{ (\beta_0 s_0 + g_0 - 3k^2) h_{0j} + (g_0 - 3k^2) \beta_0 \chi_{0j} \} R \mu_0 \sinh \beta_0 l$$

$$+ (3k^2 - g_0) R l \beta_0 h_{0j} \mu_0 \cosh \beta_0 l$$

$$+ R \sum_{m=1}^{\infty} \{ (\beta_m s_m + g_m - 3k^2) h_{mj} + (g_m - 3k^2) \beta_m \chi_{mj} \} \mu_m \sin \beta_m l$$

$$+ R l \sum_{m=1}^{\infty} (g_m - 3k^2) \beta_m h_{mj} \mu_m \cos \beta_m l$$

$$a_{g_j}^* = \{ (R^2 l \alpha_j^2 + z R^2 \alpha_j + p_1 l) f_j + (1 + p_1)(1 + \alpha_j l) R g_j + (R^2 \alpha_j^2 + p_1) r_j$$

$$+ (1 + p_1) R \alpha_j s_j + R^3 \alpha_j^2 (3 + \alpha_j l) - (z - \nu)(1 + \alpha_j l) R \} \mu_j e^{\alpha_j l}$$

$$+ [\{ R(1 + p_1)(g_0 + \beta_0 s_0) + (R^2 \beta_0^2 + p_1) l f_0 + 3R^3 \beta_0^2 - (z - \nu) R \} h_{0j}$$

$$+ \{ (1 + p_1) g_0 + R^2 \beta_0^2 - z + \nu \} R \beta_0 \chi_{0j}] \mu_0 \sinh \beta_0 l$$

$$+ [\{ z R^2 \beta_0 f_0 + (R^2 \beta_0^2 + p_1) r_0 + (1 + p_1) R l \beta_0 g_0 + (R^2 \beta_0^2 - z + \nu) R l \beta_0 \} h_{0j}$$

$$+ (R^2 \beta_0^2 + p_1) f_0 \chi_{0j}] \mu_0 \cosh \beta_0 l$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [\{ -R(1 + p_1)(g_m + \beta_m s_m) + (R^2 \beta_m^2 - p_1) l f_m + 3R^3 \beta_m^2 + (z - \nu) R \} h_{mj}$$

$$+ \{ R^2 \beta_m^2 - (1 + p_1) g_m + z - \nu \} R \beta_m \chi_{mj}] \mu_m \sin \beta_m l$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [\{ -z R^2 \beta_m f_m - (R^2 \beta_m^2 - p_1) r_m - (1 + p_1) R l \beta_m g_m$$

$$+ (R^2 \beta_m^2 + z - \nu) R l \beta_m \} h_{mj} + (p_1 - R^2 \beta_m^2) f_m \chi_{mj}] \mu_m \cos \beta_m l$$

$$\zeta \zeta \zeta \quad \mu_0 = \frac{z g \beta_0}{(p^2 l + g) p^2 - g^2 \beta_0^2 l}$$

$$\mu_m = \frac{z g \beta_m}{(p^2 l + g) p^2 + g^2 \beta_m^2 l}$$

$$\begin{aligned} \mu_j = & \left[\left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) R^6 \alpha_j^6 - \left\{ \frac{1}{k^2} + z \frac{R^2}{c^2} \frac{p^2}{\beta_1} + 3 \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) \right\} R^4 \alpha_j^4 + \left\{ \frac{3+4\beta_2}{k^2} \right. \right. \\ & + 3 \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) + z \frac{R^2}{c^2} \frac{p^2}{\beta_1} \left(\frac{1+\beta_1}{k^2} + z \right) \left. \right\} R^2 \alpha_j^2 - \left\{ \frac{z}{k^2} + 1 + \frac{1}{\beta_1} \right. \\ & \left. \left. + z \frac{R^2}{c^2} \frac{p^2}{\beta_1} \left(\frac{z+\beta_1}{k^2} + 1 \right) + \frac{3R^4}{k^2 \beta_1 c^4} p^4 \right\} \right] / c^2 \alpha_j (4R^6 \alpha_j^6 \\ & + 3a_6 R^4 \alpha_j^4 + 2a_4 R^2 \alpha_j^2 + a_2) \end{aligned}$$

係数 $(f_j, f_0, f_m), (g_j, g_0, g_m), (r_j, r_0, r_m), (s_j, s_0, s_m)$ は次のように定義されるものである。

$$f_j = F(R\alpha_j), \quad f_0 = F(R\beta_0), \quad f_m = F(iR\beta_m)$$

$$g_j = G(R\alpha_j), \quad g_0 = G(R\beta_0), \quad g_m = G(iR\beta_m)$$

$$r_j = E(R\alpha_j, \mu_j), \quad r_0 = E(R\beta_0, \mu_0), \quad r_m = E(iR\beta_m, i\mu_m)$$

$$s_j = H(R\alpha_j, \mu_j), \quad s_0 = H(R\beta_0, \mu_0), \quad s_m = H(iR\beta_m, i\mu_m)$$

$$\begin{aligned} \text{そこで } F(x) = & \frac{x}{D(x)} \left\{ -k^2 x^4 + (v - 3k^4 \beta_1 + \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \frac{R^2}{c^2} k^2 p^2) x^2 \right. \\ & \left. + 1 + k^2 + \left(k^2 - \frac{v}{\beta_1}\right) \frac{R^2}{c^2} p^2 \right\} \end{aligned}$$

$$G(x) = \frac{1}{D(x)} \left\{ 2k^2 x^4 - (2+v+2k^2 + \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \frac{R^2}{c^2} k^2 p^2) x^2 + 1 + \frac{R^2}{c^2} \frac{p^2}{\beta_1} \right\}$$

$$\begin{aligned} E(x, y) = & 2R \frac{F(x)}{D(x)} \left\{ -2x^3 + \left(2 + \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \frac{R^2}{c^2} p^2\right) x + \frac{1}{y} \frac{R}{c^2} \left(\frac{1+\beta_1}{\beta_1} x^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \frac{R^2}{c^2} \frac{p^2}{\beta_1} - \frac{1+\beta_1}{\beta_1}\right) \right\} + \frac{R}{D(x)} \left\{ -5k^2 x^4 + 3(v - 3k^4 \beta_1 \right. \\ & \left. + \frac{k^2}{\beta_1} \frac{R^2}{c^2} p^2) x^2 + 1 + k^2 + \left(k^2 - \frac{v}{\beta_1}\right) \frac{R^2}{c^2} p^2 \right. \\ & \left. + \frac{x}{y} \frac{R}{c^2} \left(\frac{2k^2}{\beta_1} x^2 + 2k^2 - \frac{2v}{\beta_1} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(x, y) &= 2R \frac{G(x)}{D(x)} \left\{ -2x^3 + \left(2 + \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \frac{R^2}{c^2} p^2 \right) x \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{y} \frac{R}{c^2} \left(\frac{1+\beta_1}{\beta_1} x^2 - \frac{2}{\beta_1} \frac{R^2}{c^2} p^2 - \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \right) \right\} + 2R \frac{1}{D(x)} \left\{ 4k^2 x^3 \right. \\
&\quad \left. - (2+\nu) + 2k^2 + \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \frac{R^2}{c^2} k^2 p^2 \right\} x - \frac{1}{y} \frac{R}{c^2} \left(\frac{1+\beta_1}{\beta_1} k^2 x^2 - \frac{1}{\beta_1} \right) \Big\} \\
D(x) &= x^4 - \left(2 + \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \frac{R^2}{c^2} p^2 \right) x^2 + 1 + \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \frac{R^2}{c^2} p^2 - \frac{R^4}{c^4} \frac{p^4}{\beta_1}
\end{aligned}$$

なお、各記号と微分関係は次のとおりである。

$$\frac{df_j}{dp} = r_j \mu_j p, \quad \frac{df_0}{dp} = r_0 \mu_0 p, \quad \frac{df_m}{dp} = r_m \mu_m p$$

$$\frac{dh_{0j}}{dp} = \chi_{0j} \mu_0 p, \quad \frac{dh_{mj}}{dp} = \chi_{mj} \mu_m p$$

$$\frac{d\alpha_j}{dp} = p \mu_j, \quad \frac{d\beta_0}{dp} = p \mu_0, \quad \frac{d\beta_m}{dp} = p \mu_m$$

$$\frac{df_j}{d\alpha_j} = r_j, \quad \frac{df_0}{d\beta_0} = r_0, \quad \frac{df_m}{d\beta_m} = r_m$$

$$\frac{dh_{0j}}{d\beta_0} = \chi_{0j}, \quad \frac{dh_{mj}}{d\beta_m} = \chi_{mj}$$

$$\frac{dg_j}{dp} = s_j \mu_j p, \quad \frac{dg_0}{dp} = s_0 \mu_0 p, \quad \frac{dg_m}{dp} = s_m \mu_m p$$

$$\frac{dg_j}{d\alpha_j} = s_j, \quad \frac{dg_0}{d\beta_0} = s_0, \quad \frac{dg_m}{d\beta_m} = s_m$$

時間 t を含む関数 $G_m^{(1)}(\tau)$ および $G_m^{(2)}(\tau)$ は

$$G_m^{(1)}(\tau) = \int_0^t \frac{df(s)}{ds} \cos p_m(\tau-s) ds \quad (6.41)$$

$$G_m^{(2)}(\tau) = \int_0^t \frac{d^2f(s)}{ds^2} \cos p_m(\tau-s) ds$$

で定義されるものである。これに式(6.1)を代入すれば、直ちに $G_m^{(1)}(\tau)$ および $G_m^{(2)}(\tau)$ が定まる。

貯槽に生ずる合応力成分に対する解は式(6.39)を Flügge の構成方程式(2.19)に式(6.22)を介して代入することにより、流体に関する圧力などの物理量に対する解は式(6.40)を式(6.13)以下に同じく式(6.22)を介して代入することにより、それぞれ容易に求められる。

数値計算は、円筒殻単体の問題と比べると著しく複雑となるが、これまでと同じ手法により行うことが可能である。

6.4 液体を固定質量で近似した解析

ここでは、貯槽は μl の高さまで液体により部分的に満たされているものとする。液体を固定質量で近似する解析であるから、Flügge の円筒殻理論である式 (6.5) あるいは (6.9) を用いることになる。基礎方程式中に含まれる m_0 (円筒殻壁面の単位面積あたりに固着している質量) を固定質量の総質量 $2\pi R \mu l m_0$ と貯槽内部の液体 (質量密度 ρ_0) の総質量 $\pi R^2 \mu l \rho_0$ とが等しくなるように定めると

$$m_0 = \rho_0 R / 2 \quad (6.42)$$

となり、基礎方程式中に含まれる定数 η は式 (6.6) から

$$\eta = \sqrt{1 + R \rho_0 / 2 h \rho} \quad (6.43)$$

となる。解析方法としては、貯槽を固定質量のある部分とない部分とに分離して解をそれぞれ仮定し、境界上で変位および応力の連続条件を満足させる方法を採用する。

したがって、境界条件は以下のようなになる。

(i) $x = 0$ において

$$u^* = 0 \quad (6.44a) \quad v^* = \delta_0 f(t) \sin \theta \quad (6.44b)$$

$$w^* = \delta_0 f(t) \cos \theta \quad (6.44c) \quad \partial w^* / \partial x = 0 \quad (6.44d)$$

(ii) $x = \mu l$ において

$$u^* = u \quad (6.45a) \quad v^* = v \quad (6.45b)$$

$$w^* = w \quad (6.45c) \quad \partial w^* / \partial x = \partial w / \partial x \quad (6.45d)$$

$$N_x^* = N_x \quad (6.45e) \quad M_x^* = M_x \quad (6.45f)$$

(340)

$$S_x^* = S_x \quad (6.45g) \quad T_x^* = T_x \quad (6.45h)$$

(iii) $x = l$ において

$$N_x = M_x = S_x = T_x = 0 \quad (6.46)$$

ここで、*印を付したものは固定質量のある部分に対する諸量を、付してないものは固定質量のない部分に対する諸量をそれぞれ表している。

そこで、貯槽における固定質量のある部分とない部分における変位成分の解を、それぞれ次のように置くことにする。

$$u^* = U^* \cos \theta \quad (6.47a) \quad u = U \cos \theta \quad (6.47d)$$

$$v^* = V^* \sin \theta \quad (6.47b) \quad v = V \sin \theta \quad (6.47e)$$

$$w^* = W^* \cos \theta \quad (6.47c) \quad w = W \cos \theta \quad (6.47f)$$

固定質量の慣性効果を三次元とした場合の基礎方程式(6.5c)をラプラス変換し、式(6.47c)および(6.47f)のラプラス変換形を代入すれば、次の常微分方程式が得られる。

(I) 固定質量のある部分に対しては

$$\frac{d^8 \bar{w}^*}{d\xi^8} + a_6^* \frac{d^6 \bar{w}^*}{d\xi^6} + a_4^* \frac{d^4 \bar{w}^*}{d\xi^4} + a_2^* \frac{d^2 \bar{w}^*}{d\xi^2} + a_0^* \bar{w}^* = 0 \quad (6.48a)$$

(II) 固定質量のない部分に対しては

$$\frac{d^8 \bar{w}}{d\xi^8} + a_6 \frac{d^6 \bar{w}}{d\xi^6} + a_4 \frac{d^4 \bar{w}}{d\xi^4} + a_2 \frac{d^2 \bar{w}}{d\xi^2} + a_0 \bar{w} = 0 \quad (6.48b)$$

$$\text{ここで、} a_6^* = -z(z-\nu) - \left(1 + \frac{1}{P_1}\right) \eta^2 \lambda^2$$

$$a_4^* = \frac{1-\nu^2}{k^2} + \left\{ \frac{1}{k^2} + 3\left(1 + \frac{1}{P_1}\right) \right\} \eta^2 \lambda^2 + \frac{1}{P_1} \eta^4 \lambda^4$$

$$a_2^* = - \left\{ \frac{3+4P_2}{k^2} + 3\left(1 + \frac{1}{P_1}\right) \right\} \eta^2 \lambda^2 - \left\{ \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{1}{P_1}\right) + \frac{z}{P_1} \right\} \eta^4 \lambda^4$$

$$a_0^* = \left(\frac{z}{k^2} + 1 + \frac{1}{P_1} \right) \eta^2 \lambda^2 + \left\{ \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{z}{P_1}\right) + \frac{1}{P_1} \right\} \eta^4 \lambda^4 + \frac{1}{k^2 P_1} \eta^6 \lambda^6$$

$$(a_6, a_4, a_2, a_0) = (a_6^*, a_4^*, a_2^*, a_0^*) \eta = 1$$

なお、固定質量の慣性効果を一次元とした場合の基礎方程式(6.9c)を用いた場合には、係数が次のようになる。

$$a_6^* = -2(2-\nu) - (1 + \frac{1}{\rho_1}) \lambda^2$$

$$a_4^* = \frac{1-\nu^2}{\kappa^2} + \left\{ \frac{\eta^2}{\kappa^2} + 3(1 + \frac{1}{\rho_1}) \right\} \lambda^2 + \frac{1}{\rho_1} \lambda^4$$

$$a_2^* = - \left\{ \frac{1+4\rho_2+2\eta^2}{\kappa^2} + 3(1 + \frac{1}{\rho_1}) \right\} \lambda^2 - \left\{ \frac{\eta^2}{\kappa^2} (1 + \frac{1}{\rho_1}) + \frac{2}{\rho_1} \right\} \lambda^4$$

$$a_0^* = \left(\frac{1+\eta^2}{\kappa^2} + 1 + \frac{1}{\rho_1} \right) \lambda^2 + \left[\frac{1}{\kappa^2} \left\{ \frac{1}{\rho_1} + (1 + \frac{1}{\rho_1}) \eta^2 \right\} + \frac{1}{\rho_1} \right] \lambda^4 + \frac{1}{\kappa^2 \rho_1} \eta^2 \lambda^6$$

ただし、 $\lambda = R\rho/c$

したがって、ラプラス変換された変位成分の一般解を次のように置くことができる。

$$\bar{u}^* = \sum_{j=1}^8 f_j c_j e^{\alpha_j \xi} \quad (6.49a)$$

$$\bar{u} = \sum_{j=9}^{16} f_j c_j e^{\alpha_j \xi} \quad (6.49d)$$

$$\bar{v}^* = \sum_{j=1}^8 g_j c_j e^{\alpha_j \xi} \quad (6.49b)$$

$$\bar{v} = \sum_{j=9}^{16} g_j c_j e^{\alpha_j \xi} \quad (6.49e)$$

$$\bar{w}^* = \sum_{j=1}^8 c_j e^{\alpha_j \xi} \quad (6.49c)$$

$$\bar{w} = \sum_{j=9}^{16} c_j e^{\alpha_j \xi} \quad (6.49f)$$

ここで、 α_j は $j=1, \dots, 8$ に対しては式(6.48a)から導かれる補助方程式

$$\alpha^8 + a_6^* \alpha^6 + a_4^* \alpha^4 + a_2^* \alpha^2 + a_0^* = 0 \quad (6.50)$$

の相異なる8根であり、 $j=9, \dots, 16$ に対しては $\eta=1$ とした場合の式(6.48b)から導かれる式(6.50)と同形の補助方程式の相異なる8根である。

係数 (f_j, g_j) は式(6.5a)および(6.5b)から導かれる係数で

(342)

あり, $j=1, \dots, 8$ に対しては次のとおりである。

$$f_j = \frac{\alpha_j}{d_j} \left\{ -k^2 \alpha_j^4 + (\nu - 3k^4 P_1 + \frac{k^2}{P_1} \eta^2 \lambda^2) \alpha_j^2 + 1 + k^2 + (k^2 - \frac{\nu}{P_1}) \eta^2 \lambda^2 \right\}$$

$$g_j = \frac{1}{d_j} \left\{ 2k^2 \alpha_j^4 - (z + \nu + 2k^2 + \frac{1+P_1}{P_1} k^2 \eta^2 \lambda^2) \alpha_j^2 + 1 + \frac{\eta^2}{P_1} \lambda^2 \right\}$$

$$\text{ここで, } d_j = \alpha_j^4 - \left\{ z + (1 + \frac{1}{P_1}) \eta^2 \lambda^2 \right\} \alpha_j^2 + 1 + (1 + \frac{1}{P_1}) \eta^2 \lambda^2 + \frac{1}{P_1} \eta^4 \lambda^4$$

$j=9, \dots, 16$ に対しては $\eta=1$ とした式を用いる。

なお, 固定質量の慣性効果を一次元とした場合には, 式(6.9a)および(6.9b)を利用することになるので, $j=1, \dots, 8$ に対しても, $j=9, \dots, 16$ に対しても $\eta=1$ とした式を用いる。

Flügge の構成方程式(2.68)を用いて境界条件式を変位成分だけで表して式(6.47)を代入した後ラプラス変換を行い, 最後に変位成分のラプラス変換解である式(6.49)を代入すれば, 未定係数 c_j を決定する 16 元連立方程式が得られ

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,16} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{16,1} & \dots & a_{16,16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{16} \end{bmatrix} = \delta_0 \bar{f}(p) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

ここで, $j=1, \dots, 8$ に対しては

$$a_{1,j} = f_j, \quad a_{2,j} = g_j, \quad a_{3,j} = 1, \quad a_{4,j} = \alpha_j$$

$$a_{13,j} = a_{14,j} = a_{15,j} = a_{16,j} = 0$$

であり, $j=9, \dots, 16$ に対しては

$$a_{1,j} = a_{2,j} = a_{3,j} = a_{4,j} = 0, \quad a_{13,j} = \alpha_j^2 e^{\alpha_j L}$$

$$a_{14,j} = (\alpha_j f_j + \nu g_j - \nu) e^{\alpha_j L}, \quad a_{15,j} = (f_j - \alpha_j g_j + 3k^2 \alpha_j) e^{\alpha_j L}$$

$$a_{16,j} = \{ (\alpha_j^2 + P_1) f_j + (1 + P_1) \alpha_j g_j + \alpha_j^3 - (z - \nu) \alpha_j \} e^{\alpha_j L}$$

である。未定義の成分は次のとおりである。

$$a_{5,j} = \pm f_j e^{\mu\alpha_j L}, \quad a_{6,j} = \pm g_j e^{\mu\alpha_j L}, \quad a_{7,j} = \pm e^{\mu\alpha_j L}$$

$$a_{8,j} = \pm \alpha_j e^{\mu\alpha_j L}, \quad a_{9,j} = \pm \alpha_j^2 e^{\mu\alpha_j L}$$

$$a_{10,j} = \pm (\alpha_j f_j + \nu g_j - \nu) e^{\mu\alpha_j L}$$

$$a_{11,j} = \pm (f_j - \alpha_j g_j + 3k^2 \alpha_j) e^{\mu\alpha_j L}$$

$$a_{12,j} = \pm \{ (\alpha_j^2 + P_1) f_j + (1 + P_1) \alpha_j g_j + \alpha_j^3 - (z - \nu) \alpha_j \} e^{\mu\alpha_j L}$$

ただし、 $L = l/R$ であり、複号は $j = 1, \dots, 8$ のときは + を、 $j = 9, \dots, 16$ のときは - をそれぞれとる意味を表す。

これらの成分 a_{ij} からなる 16 次の行列を $[A]$ とすれば、式 (6.51) を解いた結果は次のようになる。

$$c_j = \delta_0 \bar{f}(\rho) (A_{2,j} + A_{3,j}) / |A| \quad (6.52)$$

ここで、 $A_{i,j}$ は $[A]$ の i 行 j 列成分 a_{ij} に関する余因子である。これを式 (6.49) に代入すればラプラス変換された変位成分の解が求まり、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \bar{U}^* \\ \bar{V}^* \\ \bar{W}^* \end{bmatrix} = \frac{\delta_0 \bar{f}(\rho)}{|A|} \sum_{j=1}^8 \begin{bmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{bmatrix} (A_{2,j} + A_{3,j}) e^{\alpha_j \xi} \quad (6.53a)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \end{bmatrix} = \frac{\delta_0 \bar{f}(\rho)}{|A|} \sum_{j=9}^{16} \begin{bmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{bmatrix} (A_{2,j} + A_{3,j}) e^{\alpha_j \xi} \quad (6.53b)$$

これらのラプラス逆変換は、留数定理によって行うことができる。そこで、第 5 章における方法にならってラプラス逆変換を行い、本問題に対する変位成分 (U, V, W) の解を導けば以下のようなになる。

$$\begin{pmatrix} U^* \\ U \\ V^* \\ V \\ W^* \\ W \end{pmatrix} = \delta_0 f(\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \delta_0 \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_m^* \\ U_m \\ V_m^* \\ V_m \\ W_m^* \\ W_m \end{pmatrix} \frac{G_m(\tau)}{\lambda_m^2} \quad (6.54)$$

$\lambda = i\lambda_m$

ここで

$$\begin{pmatrix} U_m^* \\ V_m^* \\ W_m^* \end{pmatrix} = \frac{2}{\sum_{k=1}^{16} |B_k|} \sum_{j=1}^8 \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{pmatrix} (A_{2,j} + A_{3,j}) e^{\alpha_j \xi}$$

$$\begin{pmatrix} U_m \\ V_m \\ W_m \end{pmatrix} = \frac{2}{\sum_{k=1}^{16} |B_k|} \sum_{j=9}^{16} \begin{pmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{pmatrix} (A_{2,j} + A_{3,j}) e^{\alpha_j \xi}$$

$$G_m(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{df(s)}{ds} \cos \lambda_m(\tau - s) ds$$

であり、右辺第1項は固定基礎が準静的に移動した場合の解であり、第2項は固有振動モードの重ね合せを意味している。

λ_m は超越方程式 $|A| = 0$ の根として与えられ、固定質量が固着した貯槽における m 次の無次元固有振動数 ($\lambda_m = R\omega_m/c$) に対応している。 $[B_k]$ は16次の行列であり、 i 行 j 列の成分 b_{ij} は次のとおりである。

(i) $k \neq j$ のとき

$$b_{ij} = a_{ij}$$

(ii) $k = j$ のとき

(I) $j = 1, \dots, 8$ に対しては

$$b_{1,j} = r_j \beta_j, \quad b_{2,j} = s_j \beta_j, \quad b_{3,j} = 0, \quad b_{4,j} = \beta_j$$

$$b_{13,j} = b_{14,j} = b_{15,j} = b_{16,j} = 0$$

(II) $j = 9, \dots, 16$ に対しては

$$b_{1,j} = b_{2,j} = b_{3,j} = b_{4,j} = 0, \quad b_{13,j} = (2\alpha_j + \alpha_j^2 L) \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{14,j} = \{(1 + \alpha_j L) f_j + \nu L g_j + \alpha_j r_j + \nu s_j - \nu L\} \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{15,j} = \{f_j L - (1 + \alpha_j L) g_j + r_j - \alpha_j s_j + 3\kappa^2 (1 + \alpha_j L)\} \beta_j e^{\alpha_j L}$$

$$b_{16,j} = \{(2\alpha_j + \alpha_j^2 L + L p_1) f_j + (1 + p_1)(1 + \alpha_j L) g_j + (\alpha_j^2 + p_1) r_j \\ + 3\alpha_j^2 + (1 + p_1) \alpha_j s_j + \nu - z + \alpha_j^2 L - (z - \nu) \alpha_j L\} \beta_j e^{\alpha_j L}$$

(III) 未定義の成分は次のとおりであり, $j = 1, \dots, 8$ に対して

は複号の+を, $j = 9, \dots, 16$ に対しては複号の-をそれぞれ

とるものとする。

$$b_{5,j} = \pm (r_j + \mu L f_j) \beta_j e^{\mu \alpha_j L}, \quad b_{6,j} = \pm (s_j + \mu L g_j) \beta_j e^{\mu \alpha_j L}$$

$$b_{7,j} = \pm \mu L \beta_j e^{\mu \alpha_j L}, \quad b_{8,j} = \pm (1 + \mu L \alpha_j) \beta_j e^{\mu \alpha_j L}$$

$$b_{9,j} = \pm (2\alpha_j + \alpha_j^2 \mu L) \beta_j e^{\mu \alpha_j L}$$

$$b_{10,j} = \pm \{(1 + \mu \alpha_j L) f_j + \nu \mu L g_j + \alpha_j r_j + \nu s_j - \nu \mu L\} \beta_j e^{\mu \alpha_j L}$$

$$b_{11,j} = \pm \{\mu L f_j - (1 + \mu \alpha_j L) g_j + r_j - \alpha_j s_j + 3\kappa^2 (1 + \mu \alpha_j L)\} \beta_j e^{\mu \alpha_j L}$$

$$b_{12,j} = \pm \{(\mu \alpha_j^2 L + 2\alpha_j + p_1 \mu L) f_j + (1 + p_1)(1 + \mu \alpha_j L) g_j + (\alpha_j^2 + p_1) r_j \\ + (1 + p_1) \alpha_j s_j + 3\alpha_j^2 + \nu - z + \mu \alpha_j^3 L - (z - \nu) \mu \alpha_j L\} \beta_j e^{\mu \alpha_j L}$$

ただし, (r_j, s_j, β_j) は $j = 1, \dots, 8$ に対しては次のとおりであり, $j = 9, \dots, 16$ に対しては $\eta = 1$ としたものである。

$$r_j = z \frac{f_j}{d_j} \left\{ -2\alpha_j^3 + \left(z + \frac{1+p_1}{p_1} \eta^2 \lambda^2 \right) \alpha_j + \frac{1}{\beta_j} \left(\frac{1+p_1}{p_1} \alpha_j^2 - \frac{z}{p_1} \eta^2 \lambda^2 - \frac{1+p_1}{p_1} \right) \right\}$$

$$+ \frac{1}{d_j} \left\{ -5\kappa^2 \alpha_j^4 + 3 \left(\nu + \frac{\kappa^2}{p_1} \eta^2 \lambda^2 - 3\kappa^4 p_1 \right) \alpha_j^2 + \frac{\alpha_j}{\beta_j} \left(\frac{z}{p_1} \kappa^2 \alpha_j^2 - \frac{2\nu}{p_1} \right) \right.$$

$$\left. + z\kappa^2 + 1 + \kappa^2 - \frac{\nu}{p_1} \eta^2 \lambda^2 + \kappa^2 \eta^2 \lambda^2 \right\}$$

$$s_j = z \frac{g_j}{d_j} \left\{ -2\alpha_j^3 + \left(z + \frac{1+p_1}{p_1} \eta^2 \lambda^2 \right) \alpha_j + \frac{1}{\beta_j} \left(\frac{1+p_1}{p_1} \alpha_j^2 - \frac{z}{p_1} \eta^2 \lambda^2 - \frac{1+p_1}{p_1} \right) \right\}$$

(346)

$$\begin{aligned} & + \frac{z}{\alpha_j} \left\{ 4k^2 \alpha_j^3 - (z+\nu) + z k^2 + \frac{1+\beta_1}{\beta_1} k^2 \eta^2 \lambda^2 \right\} \alpha_j - \frac{1}{\beta_j} \left(\frac{1+\beta_1}{\beta_1} k^2 \alpha_j^2 - \frac{1}{\beta_1} \right) \Big\} \\ \beta_j = & \eta^2 \left\{ \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \alpha_j^6 - \left(\frac{z}{\beta_1} \eta^2 \lambda^2 + \frac{1}{k^2} + 3 \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \right) \alpha_j^4 + \left(\frac{z}{k^2} \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \eta^2 \lambda^2 \right. \right. \\ & + \frac{4}{\beta_1} \eta^2 \lambda^2 + \frac{3+4\beta_2}{k^2} + 3 \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \Big) \alpha_j^2 - \frac{3}{k^2 \beta_1} \eta^4 \lambda^4 - \frac{z}{k^2} \frac{z+\beta_1}{\beta_1} \eta^2 \lambda^2 \\ & \left. \left. - \frac{z}{\beta_1} \eta^2 \lambda^2 - \frac{z}{k^2} - \frac{1+\beta_1}{\beta_1} \right\} / \alpha_j (4\alpha_j^6 + 3a_6^* \alpha_j^4 + 2a_4^* \alpha_j^2 + a_2^*) \end{aligned}$$

なお、固定質量の慣性効果を一次元とした場合には、係数 (r_j, s_j) については $j=1, \dots, 8$ のときも $j=9, \dots, 16$ のときも $\eta=1$ とした上記の式を用いる。係数 β_j については $j=1, \dots, 8$ のとき

$$\begin{aligned} \beta_j = & \left[\left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \alpha_j^6 - \left\{ \frac{\eta^2}{k^2} + \frac{z}{\beta_1} \lambda^2 + 3 \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \right\} \alpha_j^4 + \left\{ \frac{1+4\beta_2}{k^2} + \frac{2\eta^2}{k^2} \right. \right. \\ & + 3 \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) + 2\lambda^2 \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \left(\frac{\eta^2}{k^2} + \frac{z}{1+\beta_1} \right) \Big\} \alpha_j^2 - \frac{1+\eta^2}{k^2} - 1 - \frac{1}{\beta_1} \\ & \left. - 2\lambda^2 \left\{ \frac{1}{k^2 \beta_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{\eta^2}{k^2} \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \right\} - \frac{3}{k^2 \beta_1} \eta^2 \lambda^4 \right] / \alpha_j (4\alpha_j^6 \\ & + 3a_6^* \alpha_j^4 + 2a_4^* \alpha_j^2 + a_2^*) \end{aligned}$$

であり、 $j=9, \dots, 16$ のときは $\eta=1$ としたものである。

無次元時間 τ を含む関数 $G_m(\tau)$ は式(6.1)の荷重関数のもとでは、次のようになる。

(i) $0 \leq \tau < \tau_0$ において

$$G_m(\tau) = \frac{2\Omega^2}{4\Omega^2 - \lambda_m^2} (\cos \lambda_m \tau - \cos 2\Omega \tau) \quad (6.55a)$$

(ii) $\tau_0 \leq \tau < (4n-1)\tau_0$

$$G_m(\tau) = \frac{2\Omega^2}{4\Omega^2 - \lambda_m^2} \{ \cos \lambda_m \tau + \cos \lambda_m (\tau - \tau_0) \} \\ + \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \lambda_m^2} \{ \sin \Omega \tau - \cos \lambda_m (\tau - \tau_0) \} \quad (6.55b)$$

(iii) $(4n-1)\tau_0 \leq \tau < 4n\tau_0$

$$G_m(\tau) = \frac{2\Omega^2}{4\Omega^2 - \lambda_m^2} [\cos \lambda_m \tau + \cos 2\Omega \tau + \cos \lambda_m (\tau - \tau_0) \\ + \cos \lambda_m \{ (4n-1)\tau_0 - \tau \}] - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \lambda_m^2} [\cos \lambda_m \{ (4n-1)\tau_0 - \tau \} \\ + \cos \lambda_m (\tau - \tau_0)] \quad (6.55c)$$

(iv) $4n\tau_0 \leq \tau$

$$G_m(\tau) = \frac{2\Omega^2}{4\Omega^2 - \lambda_m^2} [\cos \lambda_m \tau + \cos \lambda_m (\tau - 4n\tau_0) + \cos \lambda_m (\tau - \tau_0) \\ + \cos \lambda_m \{ (4n-1)\tau_0 - \tau \}] - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \lambda_m^2} [\cos \lambda_m \{ (4n-1)\tau_0 - \tau \} \\ + \cos \lambda_m (\tau - \tau_0)] \quad (6.55d)$$

ここで, $\tau_0 = ct_0/R$, $\Omega = \pi/2\tau_0$.

式(6.54)および Flügge の構成方程式(2.19)を利用すれば, 変位ならびに合応力成分の時間変動を計算することができる。

数値計算に要する手間は円筒殻単体の問題と全く同じであるから, 6.3節における連成問題としての解析結果に比べると極めて簡単である。

本節で示した解析は, 液体により部分的に満たされている貯槽すなわち $0 < \mu < 1$ に対するものであり, 貯槽が空または満配すなわち $\mu = 0$ および 1 の場合には $x = \mu l$ における境界が存在しないので, 別に解析を行う必要があるが, 本解析

より簡単になる。

貯槽が空すなわち $\mu = 0$ の場合は、 $\gamma = 1$ とした場合の基礎方程式だけを用い、境界条件は式(6.45)を除き、固定質量のない部分に対する解だけを用いて解析を行えばよい。その内容は前章の5.3節における解析と同じであり、重複を避けるために記述は省略する。逆に貯槽が満配すなわち $\mu = 1$ の場合は、空の場合の結果において式(6.7)のような変数変換を行うだけでその結果が得られる。

ただし、固定質量の慣性効果を一次元とした場合には空と満配との間に対応関係がないので、満配の場合に対する解析も別に行う必要がある。

最後に、第5章にならって変位成分の時間変動を長時間にわたって計算した場合に現われ得る最大値の上限すなわち理論最大値を求めるための計算式を式(6.54)から導いた。

固定基礎が静止したのちの時間領域 $4n\tau_0 < \tau$ においては、 $q_m(\tau)$ の表示式(6.55d)が示すように無次元時間で $2(n\pi + n\tau_0)$ 、ただし $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 、のときに極値をとる。したがって、その時刻における振幅の絶対値を合計すれば定常振動状態 ($4n\tau_0 < \tau$) における理論最大値が求められ

$$\begin{pmatrix} U^* \\ U \\ V^* \\ V \\ W^* \\ W \end{pmatrix}_{\max} = 2\delta_0 \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} |U_m^*| \\ |U_m| \\ |V_m^*| \\ |V_m| \\ |W_m^*| \\ |W_m| \end{pmatrix} |H_m(\tau_0)| \quad (6.56)$$

$\lambda = i\lambda_m$

となる。ここで、

$$H_m(\tau_0) = \frac{2\Omega^2}{4\Omega^2 - \lambda_m^2} \left\{ \cos 2n\lambda_m\tau_0 + \cos(2n-1)\lambda_m\tau_0 \right\} \\ - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \lambda_m^2} \cos(2n-1)\lambda_m\tau_0$$

つまり、理論最大値は座標系および固定基礎の移動周期 τ_0 と波数 n の関数として与えられる。

合応力成分に対する理論最大値は、式(6.56)をFlüggeの構成方程式に代入することにより求められる。

6.5 数値結果

ここでは、液体を固定質量で近似した解析結果に対する数値計算結果だけを示す。

数値計算にあたっては貯槽のポアソン比 ν は0.3とした。

対象とした貯槽は主として肉厚比 $h/R=0.02$ 、長さ比 $l/R=2$ のもので、液体と貯槽との質量密度比 $\Gamma=P/\rho_0$ は鋼と石油を想定して $\Gamma=9$ とした。

まず、空の状態における貯槽の最低次固有振動数をはり理論による結果と比較した。表6.1に示したようにはり理論としては古典理論であるBernoulli-Eulerの式と修正理論であるところの回転慣性とせん断変形を考慮したTimoshenkoの式(せん断係数は0.5として計算)の二種類を用いた。

貯槽には長さ比 $L(=l/R)$ の小さいものが多くみられるのでBernoulli-Eulerの式では正しい結果を得るのはほとんど無理のようである。長さ比 L が2以下になるとTimoshenkoの式でも誤差が大きくなり、円筒殻理論によらなければ正しい結果を得ることはできないことを示している。

なお、固有振動数の次数が高くなるとはり理論による誤差はますます大きくなる。

次に固有振動数の空の状態 $\mu=0$ に対する比 $\lambda_m/(\lambda_m)_{\mu=0}$ と液体の深さとの関係を求めた。満配の状態 $\mu=1$ における比は式(6.43)の定数 η によって決まる。したがって、図6.3に示したように肉厚比 $H(=h/R)$ が0.02、質量密度比 Γ が9であれば、どの次数 m についても約0.514($=1/\eta$)となる。

表6.1 空の貯槽における最低次固有振動数 $\lambda_1 (=R\lambda_1/c)$

h/R	l/R	Shell Theory (Flügge)	Beam Theory	
			Bernoulli -Euler	Timoshenko
0.02	0.5	0.829 56	4.742	1.138
	1	0.555 75	2.371	0.630 8
	2	0.275 94	0.592 8	0.325 0
	4	0.108 00	0.148 2	0.108 6
	8	0.033 528	0.037 05	0.033 52
	12	0.015 713	0.016 46	0.015 70
0.1	2	0.280 00	0.592 8	0.325 0
	8	0.033 490	0.037 05	0.033 52

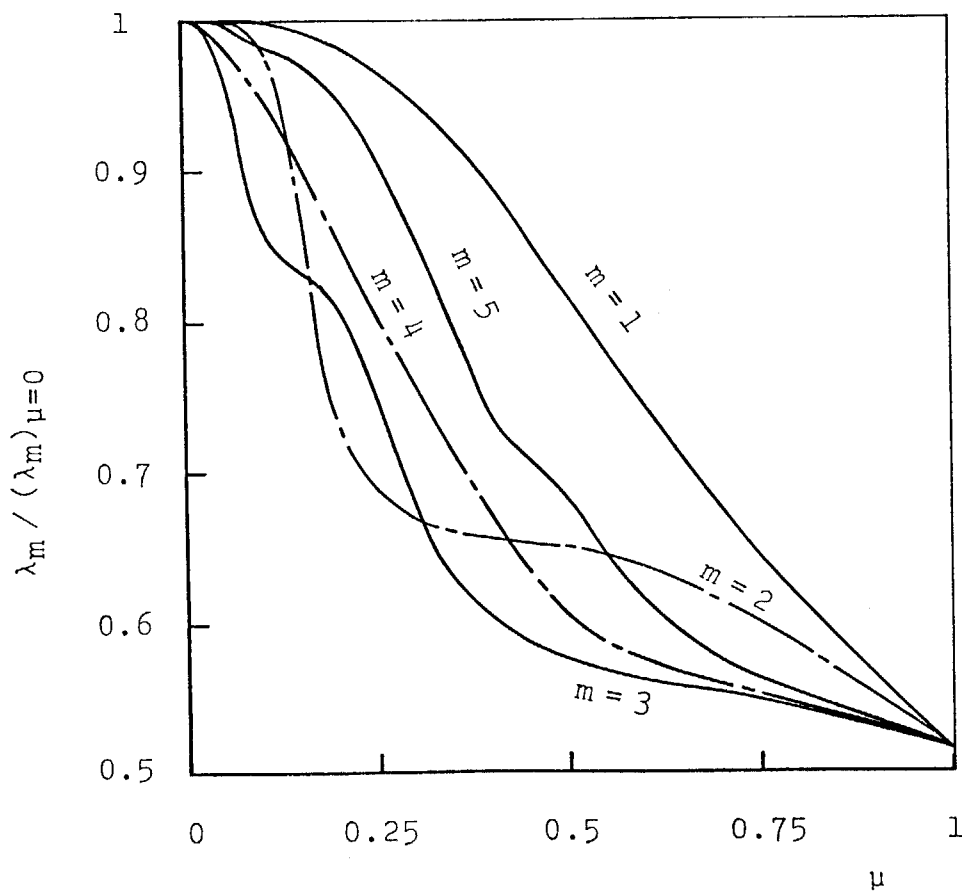


図6.3 固有振動数と液体の深さとの関係
 ($h/R=0.02$, $l/R=2$, $P/P_0=9$, 慣性効果:三次元)

しかし、 $0 < \mu < 1$ の範囲における変化の様相は次数 m によって大きく異なる。したがって、空の場合における次数の順序が、 μ の増加とともに入れ違ってくることもある。

これらの固有振動数を用いて $\theta = 0$ あるいは $\theta = \pi/2$ の母線上における変位および応力の過渡応答を式 (6.54) およびこれに相当する式により計算したものが図 6.4 ~ 6.7 であり、理論最大値を式 (6.56) およびこれに相当する式により計算したものが図 6.8 ~ 6.12 である。

図 6.4 は自由端における変位 w の時間変動について基礎の移動周期の影響を示したものである。無次元周期 $\tau_0 (= ct_0/R)$ の値が小さいほど最大値が大きくなっているが、 τ_0 の値によって固定基礎の移動中 ($0 < \tau < 4n\tau_0$) に最大値の現われる場合と停止後 ($4n\tau_0 < \tau$) に最大値の現われる場合とがあることがわかる。

図 6.5 は同じく変位の時間変動について液体の深さ μ と質量密度比 γ の影響を示したものである。内部の液体の総質量が大きいか、すなわち γ の値が小さいほどあるいは μ の値が大きいか、立ち上がり時間が遅く、しかも周期が長くなっている。しかし、最大値は必ずしも液体の総質量の増加に伴って大きくなるとは限らない。

図 6.6 は固定基礎における曲げモーメント M_x の時間変動について貯槽の肉厚の影響を示したものである。空の状態では肉厚比 $H (= h/R)$ が 0.01 と 0.02 との場合で大きな差はないが、満配の状態では大きな差のあることがわかる。

図 6.7 は固定基礎における垂直力 N_x の時間変動について基礎の移動を表す荷重関数の波数 n の影響を示したものであ

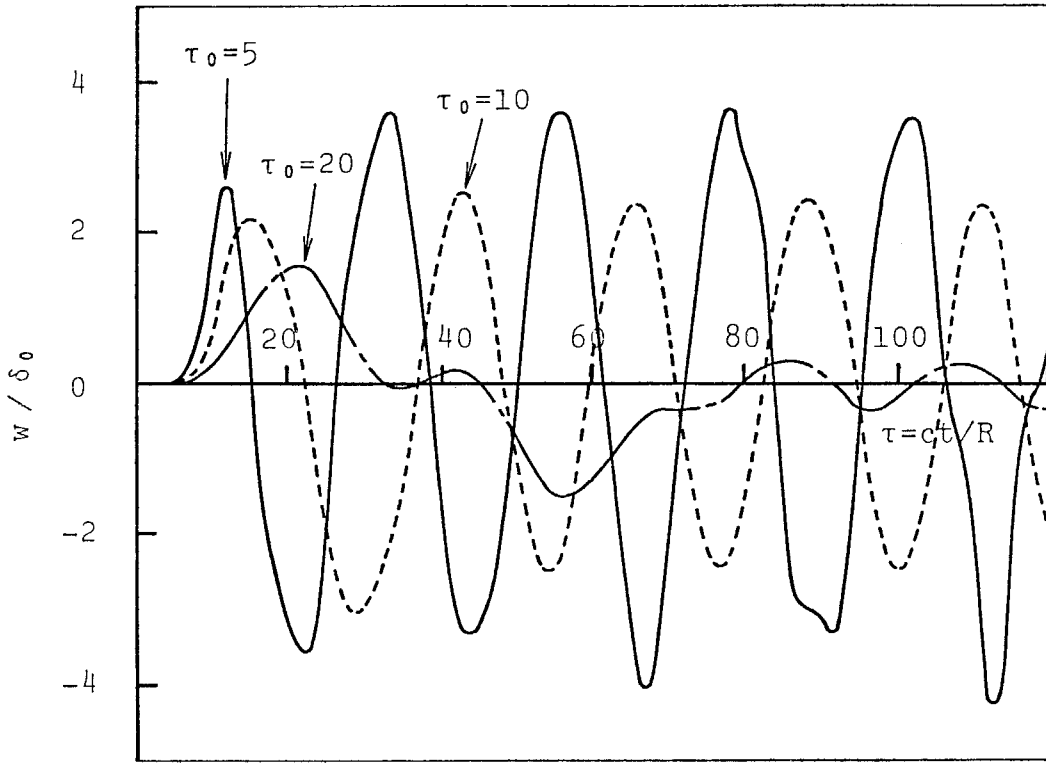


図6.4 先端における変位の時間変動(1)移動周期の影響
 ($h/R=0.02$, $l/R=2$, $x=l$, $\mu=0$, $n=1$, 慣性効果:三次元)

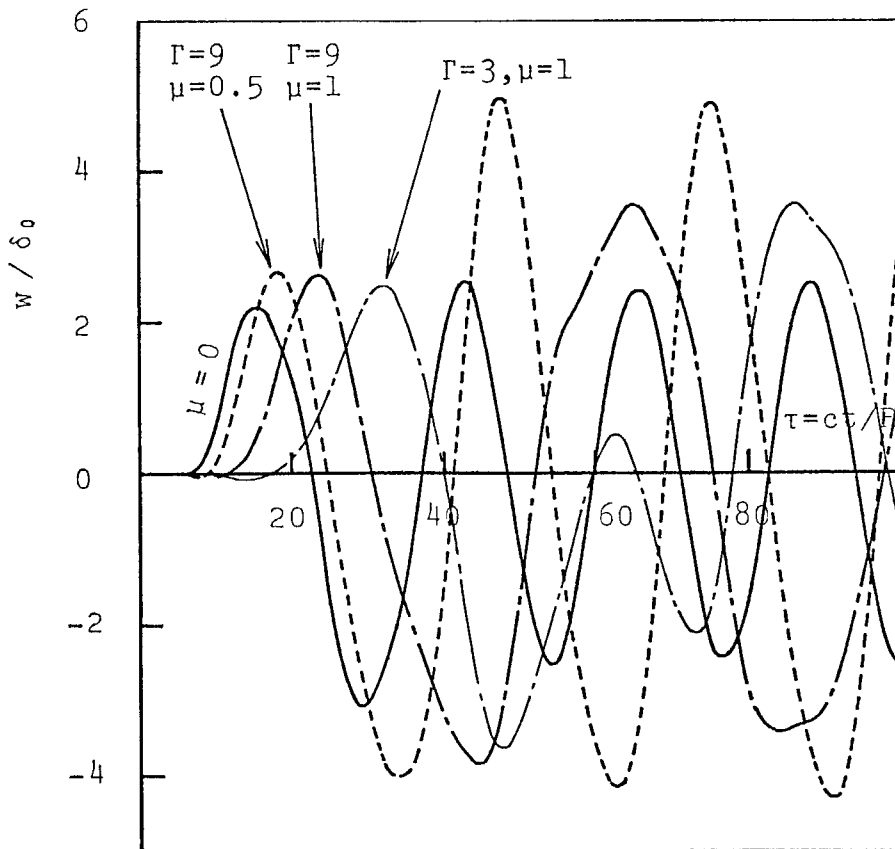


図6.5 先端における変位の時間変動(2)液体の質量の影響
 ($h/R=0.02$, $l/R=2$, $x=l$, $ct_0/R=10$, $n=1$, $\Gamma = P/P_0$)

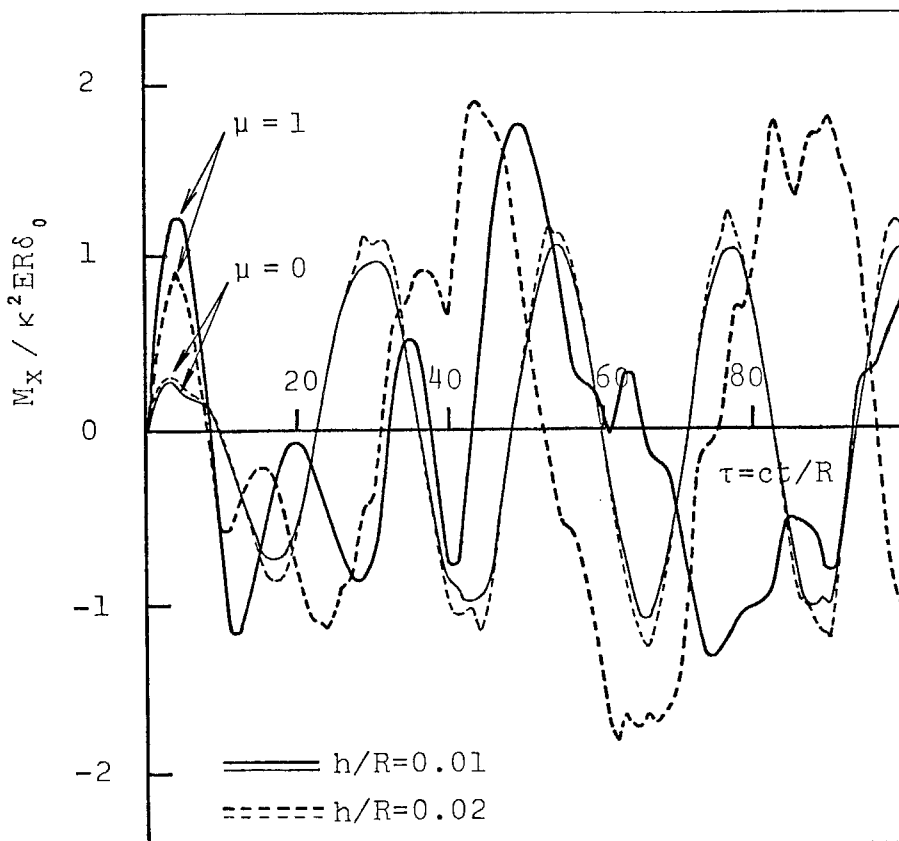


図6.6 基礎における曲げモーメントの時間変動
(貯槽の肉厚の影響, 慣性効果: 三次元, $P/P_0 = 9$)
($l/R = 2$, $\alpha = 0$, $n = 1$, $ct_0/R = 10$)

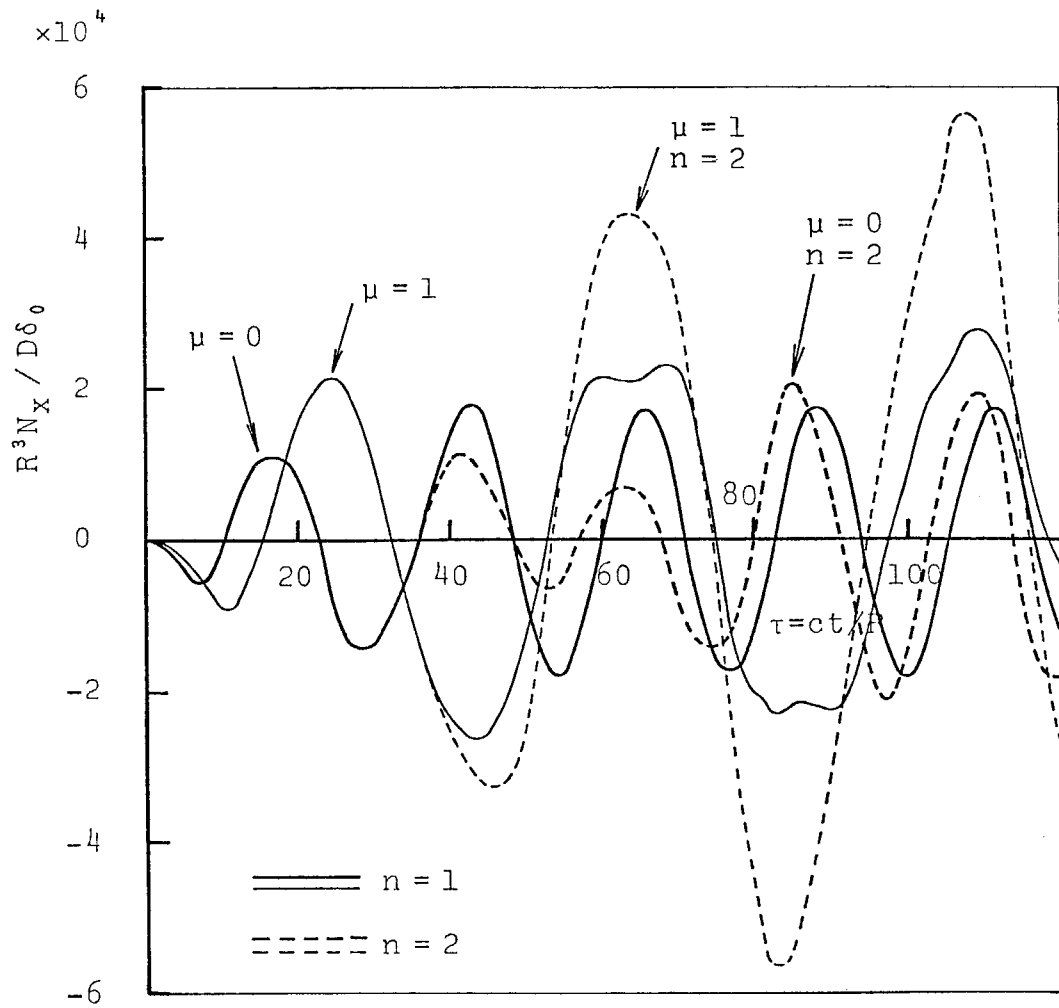


図 6.7 基礎における垂直力の時間変動 (波数の影響)

$$\left(\begin{array}{l} h/R = 0.02, \quad l/R = 2, \quad \alpha = 0, \quad ct_0/R = 10 \\ P/P_0 = 9, \quad \text{固定質量慣性効果: 三次元} \end{array} \right)$$

る。空($\mu=0$)の状態では、 $n=1$ と $n=2$ とでわずかに位相差が見られる程度であって大きな差は生じていない。しかし、満配($\mu=1$)の状態では大きな差があり、 $n=2$ の場合の最大値の方が著しく大きくなっている。このように、基礎の動きが1波より2波の方が最大値が大きいと、一概に言うことはできず、移動周期 t_0 によって異なるものと思われる。

図6.8は、基礎の停止後の時間領域 $4nt_0 < t$ における定常振動中に現われる貯槽先端の半径方向変位の動的最大値である $(W)_{\max}$ と基礎の移動の四半周期 t_0 との関係を示したものである。横軸には無次元四半周期 t_0 とは別に、一周期 $4t_0$ を空の状態における貯槽の最低次固有周期 $t_1 = 2\pi/\omega_1$ で除した値も示した。液体すなわち固定質量の慣性効果を三次元とした結果であるから、空の状態における曲線を式(6.43)の定数 γ の値($\frac{H}{T} = 0.02$ の場合では $\gamma = 1.95$)だけ横軸方向に拡大すれば、満配の状態における曲線となる。空の状態では肉厚比が0.01と0.02との場合でほとんど差はないが、満配の状態では肉厚の薄い方が固定質量の影響を強く受ける。肉厚を薄くした場合は質量密度比 T を小さくした場合と同じ効果をもつが、以上のことは式(6.43)からもわかるとおりである。空の状態では基礎の移動の一周期 $4t_0$ が貯槽の最低次固有周期 t_1 の2倍より短くなると、最大変位の値は基礎の移動量に比べて著しく大きくなる。液体すなわち固定質量を内蔵しているとこの境界が周期の長い方に γt_0 だけ移動し、大きな変形を生ずる範囲の広がることかわかる。

なお、 t_0 の値によっては $0 \leq t \leq 4nt_0$ の時間内すなわち基礎がまだ動いている最中に最大値の生ずる場合があるが、こ

の場合の最大値はほとんど図6.8の曲線の包絡線より下に位置すると思つてよい。

図6.9は同じく先端の変位の理論最大値について、液体の深さの影響を示したものである。 $0 < \mu < 1$ の範囲における理論最大値の曲線の右側への移動率は μ 以下で、総質量の大小にほぼ比例して空と満配の状態の間に位置しているといつて差し支えない。

図6.10は基礎における垂直力の最大値 $(N_x)_{\max}$ について荷重関数の波数 n の影響を示したものである。縦軸には先端を静的に δ_0 だけ変形させた場合の固定基礎に生ずる垂直力すなわち $(N_x)_s = 0.118 ER\delta_0/R^{[13]}$ で $(N_x)_{\max}$ を除した値も右側に並記した。一浪 $n=1$ と二浪 $n=2$ の曲線のそれぞれの包絡線は概略一致しており、大きな応力が生ずる領域は基礎の移動周期が貯槽の最低次固有周期の2倍以下になった場合である。このことは変形における傾向と一致し、波数の影響をあまりうけていない。

図6.11は基礎における曲げモーメントの理論最大値 $(M_x)_{\max}$ について、貯槽の肉厚の影響を示したものである。縦軸には図6.10の場合と同様な静的曲げモーメント $(M_x)_s = 0.185 k^2 ER\delta_0$ ($H=0.02$ の場合) で $(M_x)_{\max}$ を除した値を右側に並記した。空の状態では肉厚の影響はごく小さいが、満配の状態では肉厚の薄い方が内蔵した液体の質量の影響を強くうける。

図6.12は固定部におけるせん断力の理論最大値 $(S_x)_{\max}$ および $(T_x)_{\max}$ について、液体すなわち固定質量の慣性効果の影響を示したものである。縦軸には図6.10の場合と同様な静的せん断力 $(S_x)_s = 1.49 \times 10^3 D\delta_0/R^3$ および $(T_x)_s = 1.28 \times 10^2$

$D\delta_0/R^3$ でそれぞれ $(S_x)_{\max}$ および $(T_z)_{\max}$ を除した値も並記した。合応力成分についても空の状態では $4t_0$ が t_0 の2倍より短くなると理論最大値は著しく大きくなることを示している。この点は静的な値との比をみるとよく理解できると思う。

満配の場合の理論最大値の曲線は、慣性効果を三次元とすると式(6.43)の η によって定まる比率だけ t_0 の大きい方に移動するが、慣性効果を一次元とするとこの移動率は小さくなりほぼ 0.6η となる。以上のように満配になるといずれの場合も大きな応力の生ずる範囲が著しく広くなる。

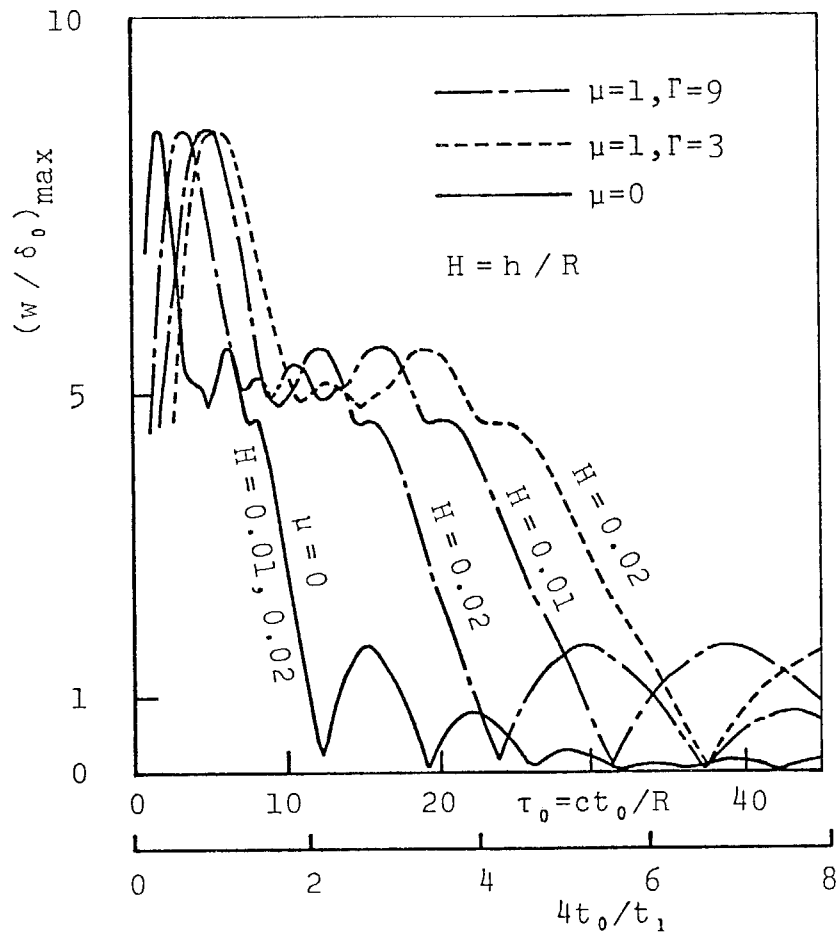


図6.8 先端における半径方向変位の理論最大値と移動周期の関係(1)貯槽の肉厚の影響

$$\left(\begin{array}{l} l/R = 2, \quad x = l, \quad n = 1, \quad T = P/P_0, \quad t_1 = 2\pi/\rho_1 \\ ct_1/R = 22.8, \quad \text{固定質量慣性効果: 三次元} \end{array} \right)$$

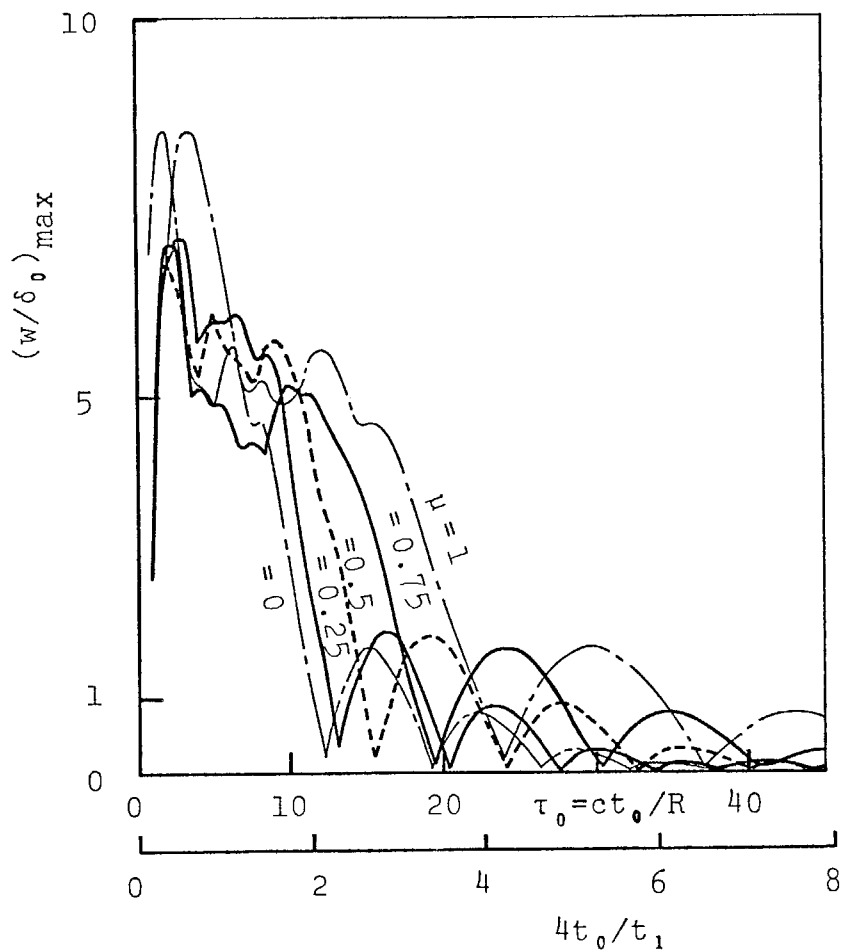


図6.9 先端における半径方向変位の理論最大値と移動
周期の関係 (2) 液体の深さの影響

$$\left(\begin{array}{l} h/R = 0.02, \quad l/R = 2, \quad x = l, \quad n = 1, \quad \rho/\rho_0 = 9 \\ ct_1/R = 22.8, \quad \text{固定質量慣性効果: 三次元} \end{array} \right)$$

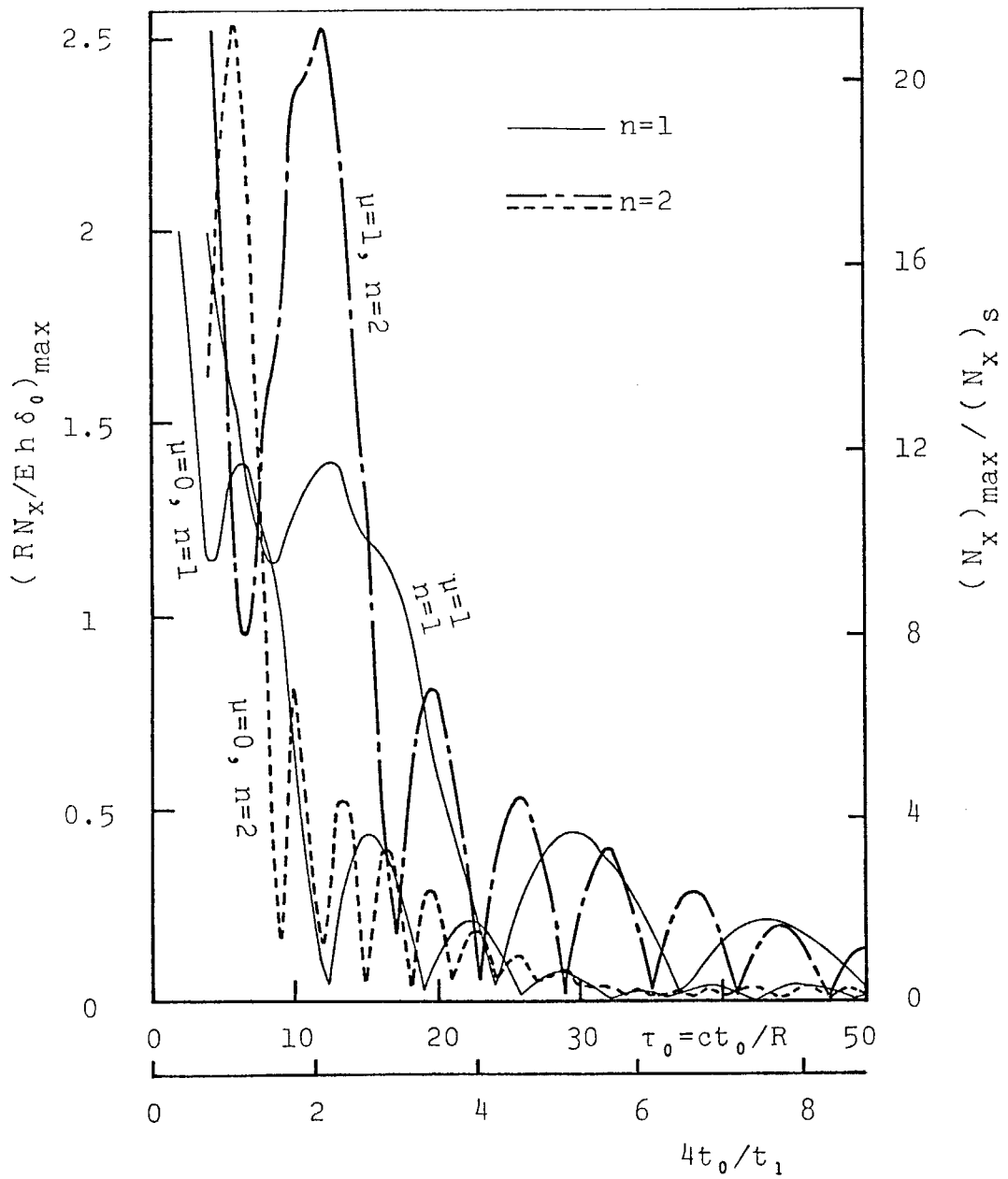


図6.10 基礎における垂直力の理論最大値と移動周期の関係
 ($h/R=0.02$, $l/R=2$, $x=0$, $P/P_0=9$, $t_1=2\pi/\omega_1$)
 ($ct_1/R=22.8$, 固定質量慣性効果: 三次元)

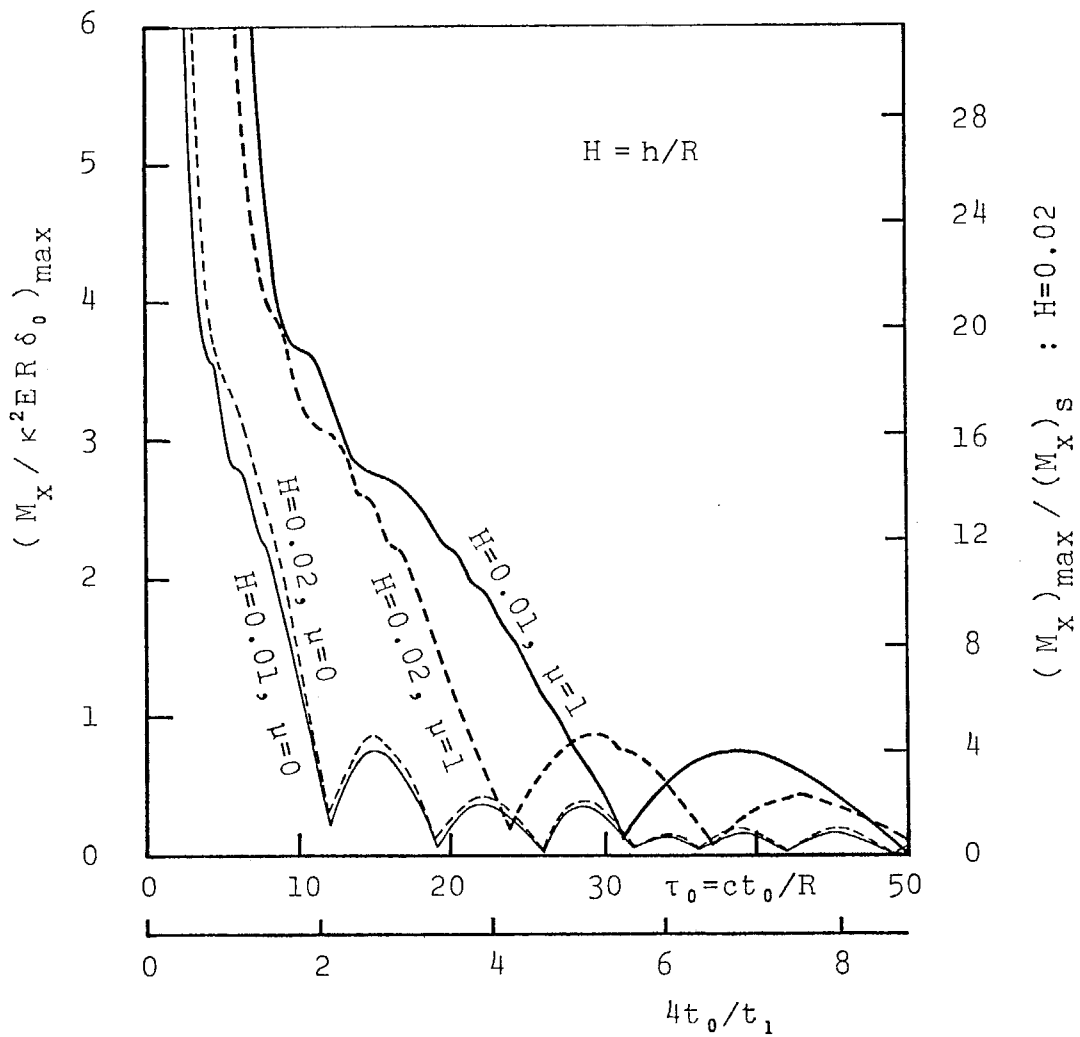


図6.11 基礎における曲げモーメントの理論最大値
と移動周期の関係(肉厚の影響)

$$\left(\begin{array}{l} l/R=2, \quad \alpha=0, \quad n=1, \quad P/P_0=9, \quad t_1=2\pi/\rho_1 \\ ct_1/R=22.8, \quad \text{固定質量慣性効果: 三次元} \end{array} \right)$$

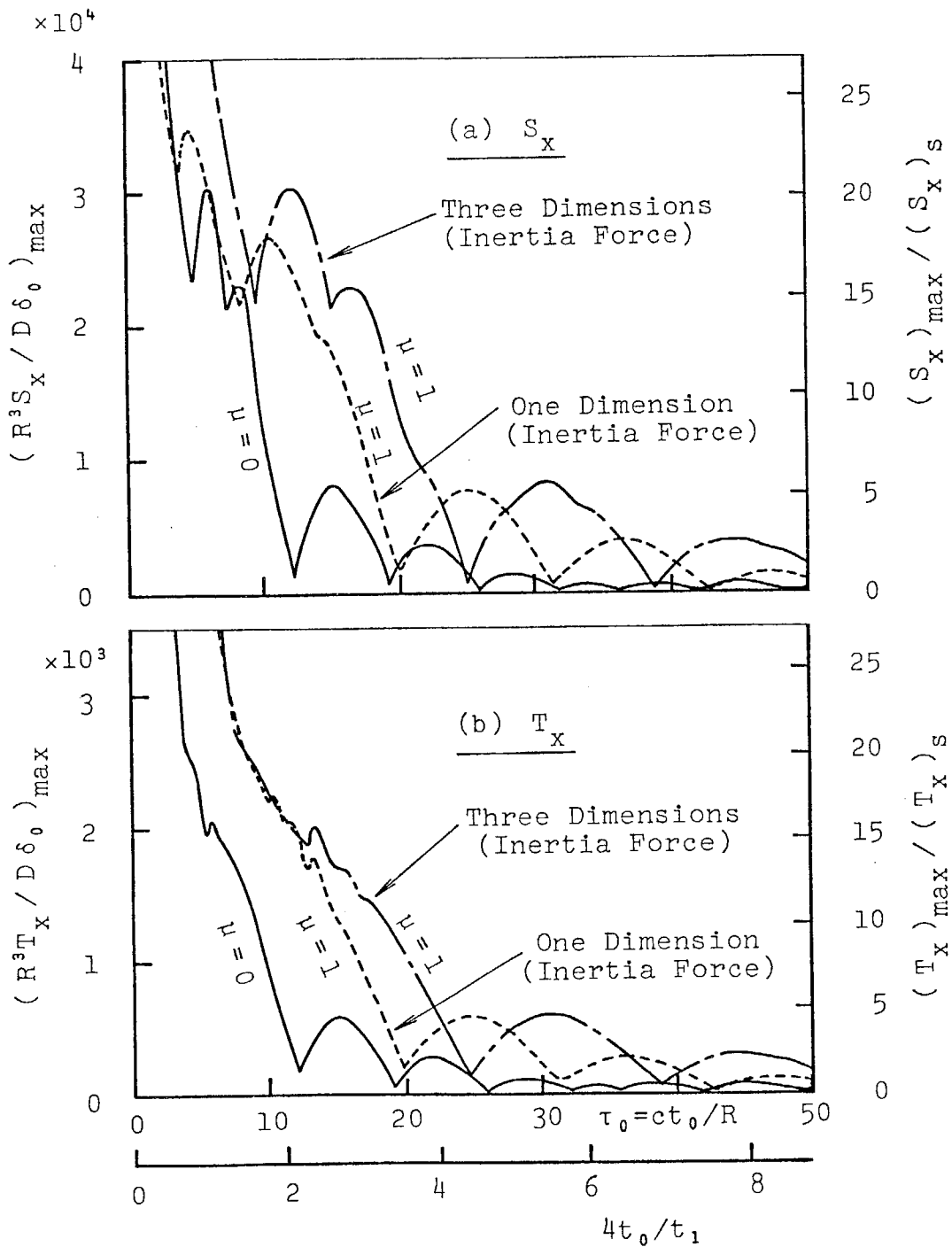


図6.12 基礎におけるせん断力の理論最大値と移動周期の関係(固定質量の慣性効果の影響)

$$\left(\begin{array}{l} h/R=0.02, l/R=2, \alpha=0, n=1 \\ P/P_0=8, t_1=2\pi/\rho_1, ct_1/R=22.8 \end{array} \right)$$

6.6 結 言

本章では、応用問題として円筒形液体貯槽の地震応答解析を取り扱った。貯槽に円筒殻理論を液体に非圧縮の完全流体理論をそれぞれ適用して解析する方法を示した。

この問題は、円筒殻と流体の連成運動の問題であり、円筒殻の基礎方程式からみても特解を含む例であり、いずれから見てもこれまでに取り扱わなかった問題である。その意味から液体貯槽の地震応答解析は、応用問題として適切な例であったと思う。

非圧縮性完全流体の理論では、流体中を伝ばする圧力波は無次元の速度で伝ばすることになる。衝撃の立場からみると、ある位置での現象が瞬間的に他の離れた位置に影響を及ぼすわけであるから、理論として必ずしも適切であるとは言えないかもしれない。少くとも貯槽に用いたFlüggeの動的円筒殻理論よりも実際の現象を表現し難い理論であるということができるかと思われる。その他にも、自由液面での波の振幅の大きさに対する近似や液体の接する境界が一定との仮定など疑問の残る点が多くある。このようにこの弾性体と流体との連成振動解析には多くの問題点が含まれており、今後なお検討すべき事項が残っている。このような観点から、本章での連成問題としての解析結果に対しては数値計算を行わず、今後の課題としたつもりである。

一方、液体を固定質量で近似する考え方を採れば、解析はきわめて簡単であり、本質的には円筒殻単体の問題に帰着さ

れてしまう。したがって、固定質量近似の考え方は液体貯槽に対する第一近似として存在意義があるように思われる。そこで、この場合に対してだけ数値計算を行いその結果を示した。多くの問題点を含んだまま、複雑で大変な労力を必要とする数値計算を行う必要があるか疑問に思う向きもあるかと思われるし、それならば大胆な近似を導入して簡単な結果を導いた方が実用的であるかもしれない。その意味において固定質量近似にはそれなりに意味があるように思われる。

要するに、本章での大きな目的は前章までに展開してきた動的円筒殻理論とその解析方法の応用性を示すことであり、この立場に立てば本章の目的はほぼ達成されたものと思う。

最後に、本章で得られた成果を要約しておく。

- (1) 地震荷重をうける円筒形液体貯槽に生ずる衝撃応力を円筒殻理論と非圧縮の完全流体理論とを用いて、弾性体と流体の連成振動問題として正確に解析できることを示した。
- (2) 本章で示した解析方法を加えれば、本論文で一貫して示してきた方法と合わせて円筒殻に関わるより多くの衝撃問題が、解析可能であることが明らかになった。
- (3) 貯槽に内蔵された液体を固定質量で近似することにより大きな変形や応力の生ずる地震動の周期が、貯槽の肉厚比 h/R および貯槽と液体の質量密度比 ρ/ρ_0 によって決まる定数 $\eta = \sqrt{1 + R\rho_0/2h\rho}$ によって与えられることが明らかになった。
- (4) 液体の固定質量近似によると、貯槽に生ずる変形や応力は、地震動の周期が貯槽の最低次固有周期の2倍以下になると著しく大きくなることが明らかになった。

(366)

(5) 高さが直径よりも低いような貯槽に対しては、従来よく解析に利用されているはり理論では到底正しい解を得ることは望めないので、円筒殻理論を用いる必要がある。

参 考 文 献

- [1] Jacobsen, L. S., Impulsive Hydrodynamics of Fluid Inside a Cylindrical Tank and of Fluid Surrounding a Cylindrical Pier, Bulletin Seism. Soc. Amer., Vol. 39, No. 3 (1949), pp. 189-204.
- [2] Housner, G. W., The Dynamic Behavior of Water Tanks, Bull. Seism. Soc. Amer., Vol. 53, No. 2 (1963), pp. 381-387.
- [3] Epstein, H. I., Seismic Design of Liquid-Storage Tanks, Proc. Amer. Soc. Civ. Engr., Vol. 102, No. ST9 (1976), pp. 1659-1673.
- [4] Miles, J. W., On the Sloshing of Liquid in a Flexible Tank, J. Appl. Mech., Vol. 25, No. 2 (1958), pp. 277-283.
- [5] Arya, A. S., Thakkar, S. K. & Goyal, A. C., Vibration Analysis of Thin Cylindrical Containers, Proc. Amer. Soc. Civ. Engr., Vol. 97, No. EM2 (1971), pp. 317-331.
- [6] Veletsos, A. S. & Yang, J. Y., Dynamics of Fixed-Base Liquid-Storage Tanks, Proc. U.S. - Japan Seminar on Earthq. Engng. Research with Emphasis on Lifeline System (1976), pp. 317-341.
- [7] Chu, W.-H., Breathing Vibrations of a Partially Filled Cylindrical Tank - Linear Theory, Trans. ASME, Ser. E, Vol. 30, No. 4 (1963), pp. 532-536.
- [8] Bauer, H. F., Hsu, T.-M. & Wang, J. T.-S., Interaction of a Sloshing Liquid With Elastic Containers, Trans. ASME, Ser. D, Vol. 90, No. 3 (1968), pp. 373-377.

(368)

- [9] Bauer, H.F. & Siekmann, J., Dynamic Interaction of a Liquid with the Elastic Structure of a Circular Cylindrical Container, Ing.-Arch., Vol. 40, No. 4 (1971), pp. 266-280.
- [10] Stillman, W. E., Free Vibration of Cylinders Containing Liquid, J. Sound & Vibr., Vol. 30, No. 4 (1973), pp. 509-524.
- [11] Fischer, D. & Steiner, H., Zur Ermittlung der mitwirkenden Flüssigkeitsmasse bei der Eigenschwingungsberechnung flüssigkeitsgefüllter Kreiszyklinderschalen, Ing.-Arch., Vol. 44, No. 6 (1975), pp. 409-420.
- [12] 近藤尚夫, 円筒タンクの軸対称自由振動解析, 機論, 46巻, 405号(昭55), 509-518.

第 7 章

円筒殻の衝撃応答に関する実験

7.1	緒 言	370
7.2	衝撃応力の測定方法	372
7.3	測定システムと機器	377
7.4	集中力による両縁自由円筒殻の衝撃実験	388
7.5	はり状曲げ力による片持ち円筒殻の衝撃実験	408
7.6	水を内蔵した片持ち円筒殻の衝撃実験	431
7.7	結 言	439
	参考文献	442

7.1 緒 言

第2章から第6章までの合計5章では、円筒殻の衝撃応答に関する諸問題を取り上げ、衝撃応力の動的円筒殻理論に基づき解析法と数値計算結果を示してきた。最後の本章では、前章までの理論解析において取り扱ってきた問題と対応させて行った円筒殻の衝撃応答実験について記述する。

棒・はり・板・殻など構造部材の衝撃応力の測定に関する実験は、近頃の計測機器の著しい進歩に伴って比較的手軽に行えるようになってきた。しかし、衝撃力によって部材に生ずる応力波の伝ば現象や境界における反射や透過現象といった時間的に高速な現象を観測する実験であるから、測定に際しては十分な知識と経験が要求されることには相違がない。ところが、電気抵抗線ひずみゲージとこれに係わる高性能な計測機器が出現してから、不慣れた技術者でも何かしら計測し得る状況になってきた。そのために、計測方法に誤りがないかどうかあるいは計測結果が計測しようとした現象を正確に捕えているかどうかの吟味を十分に行う技量が不足していると思われる場合が多くある。静的問題に比べると衝撃現象は極めて複雑であるから、衝撃応力の測定結果には信頼性に疑問のあるものが多く存在するのが現状である。

問題を円筒殻の衝撃応答に限定してみると、基本的な問題についても衝撃応力の測定例は非常に少ないということができる。さらに、円筒殻の衝撃実験結果と理論解析結果とを比較し動的円筒殻理論などの適用性を調べた例になると、信頼

すべき結果はほとんどないと言ってよい。

この原因として、衝撃応力の測定方法そのものに問題があって測定結果に信頼性がないこと、衝撃実験を行っても理論解析ができないこと、静的な実験から推測して理論と実験が到底一致するとは思われないとして放棄されていることなどが挙げられる。

このような現状に鑑みて本章では、著者自身の経験を踏まえて、まず衝撃応力の測定方法そのものについてその原理と計測機器の具備すべき特性とその使い方ならびに注意すべき事項、計測結果の処理系まで含めた衝撃応答の測定システムとしての構成方法などについて詳細に記述した。この点を明らかにした文献はこれまでほとんど見られないので、あえて本章の目的の一つとして実験技術者への指針としたつもりである。

次に、衝撃応答測定システムを用いて行った二、三の円筒殻の衝撃実験を紹介し、前章までの理論解析結果を利用してこの実験結果を検証するとともに、本論文で展開してきた動的円筒殻理論とその解析方法と実験による現象との対応性について明らかにした。

7.2 衝撃応力の測定方法

衝撃応力の測定といえは検出部に電気抵抗線ひずみゲージを利用した方法が普通であって、これ以外に簡便な方法は見あたらない。したがって本章では、いわゆるひずみゲージを用いた測定方法に限定して記述を進めることにする。なお、実際に計測できる物理量は変形やひずみであって、応力はこれに材料固有の剛性を乗ずることによって換算した量であるから概念上の物理量でしかない。しかし、便宜上本章では、応力測定という言葉を使うことにする。

衝撃応力測定に用いる電気抵抗線ひずみゲージは、特別の仕様のものであるわけではなく、静応力の測定に使用されるものと同じのものである。問題は測定対象物に接着されたひずみゲージが、どの程度の速さの動きに追従できるかという点にある。実験的にはDC~50kHz程度の周波数特性があれば十分であるように思われるが、これを保証したデータがたまに見られるので、^[1]現在市販のひずみゲージで十分に衝撃応力の測定に利用できるものと考えられる。

ひずみゲージは抵抗線の抵抗変化とひずみの線形関係を利用するもので、これを電圧変化に変換するために図7.1のようなブリッジ回路が必ず用いられる。このブリッジ回路に加える電圧は、ひずみゲージに流し得る電流から必然的に決まってしまう。ひずみゲージのメーカーで推奨している電流は10mA程度である。通常のひずみゲージを用いるものとするとき抵抗値 R_A は120Ωであるから、ブリッジ回路の出力感度

$\Delta E_0 / E_0$ が最も大きくなる状態で加えるべき電圧 E_0 を決定すると 2.4V となる。ひずみゲージに流す電流をこれ以上に上げることができないならば、出力電圧 ΔE_0 の値をこの場合以上に大きくすることはできない。ひずみを ε とするとオーターとしては $\Delta E_0 \approx E_0 \times \varepsilon$ であるから、 ΔE_0 は非常に小さくこれを増幅することが計測機器を動かすための必要不可欠な条件となるのである。

一般に交流を増幅するのが電気回路として簡単であるから、ブリッジ回路に加える電源にはある特定の周波数の交流が用いられる。これは搬送波とよばれ、静ひずみ計には 165 Hz 程度の低周波が用いられている。この方式を動的なひずみの測定に応用したのが、交流ブリッジ方式の動ひずみ計である。しかし、低周波では周波数の高い動ひずみを測定できないので、搬送波は 5~10 kHz の高周波が用いられている。ただし、この高周波を用いても測定可能な現象の周波数帯域はもとより搬送波より低く、せいぜい 2 kHz 以下でしかない。ところが、衝撃ひずみには 50 kHz 程度までの高周波成分が含まれているといわれるので、この方式の動ひずみ計では到底正しいひずみ波形を測定することはできない。従来、この点に關す

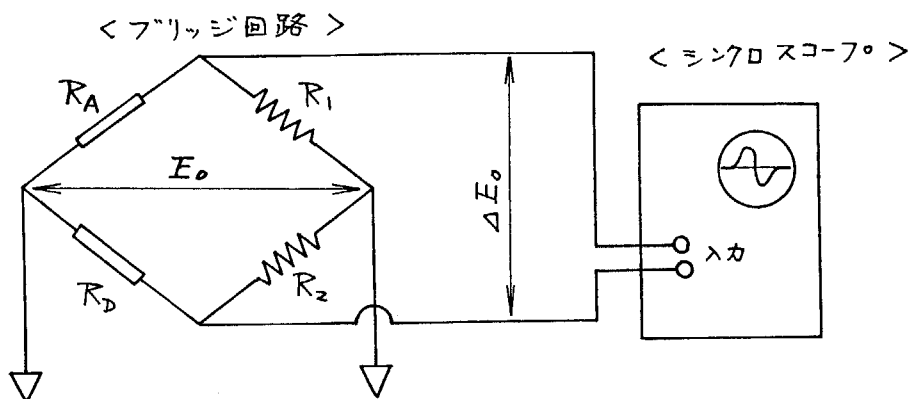


図7.1 最も簡単な衝撃応力測定用回路

る認識が不十分であったように思われる。この広い周波数帯域 DC ~ 50 kHz を測定可能とするためには、直流電源を用い増幅回路には直流増幅器を用いる方がむしろ簡単であるといえる。そこで本実験では、直流ブリッジ方式を採用することにした。これが正しい測定を行うための最も重要な点である。

この方式による最も簡単な測定方法は、図 7.1 に示してあるようなブリッジ回路の出力電圧 ΔE_0 の時間変動をシンクロスコープで観測する方法である。この方法では輝点がブラウン管面上に留まっている時間が極めて短いので高感度フィルムを用いて写真撮影しなければならない。

図 7.2 はこの方式による測定例である。厚さ 10 mm 直径 1,000 mm の軟鋼製円板中央に直径 10 mm 長さ 1,000 mm の軟鋼丸棒を衝突させる実験を行ったときの丸棒の端面より 50 mm の位置における応力波形である。この波形にどの程度の高周波成分が含まれているかを調べる簡単な方法がある。

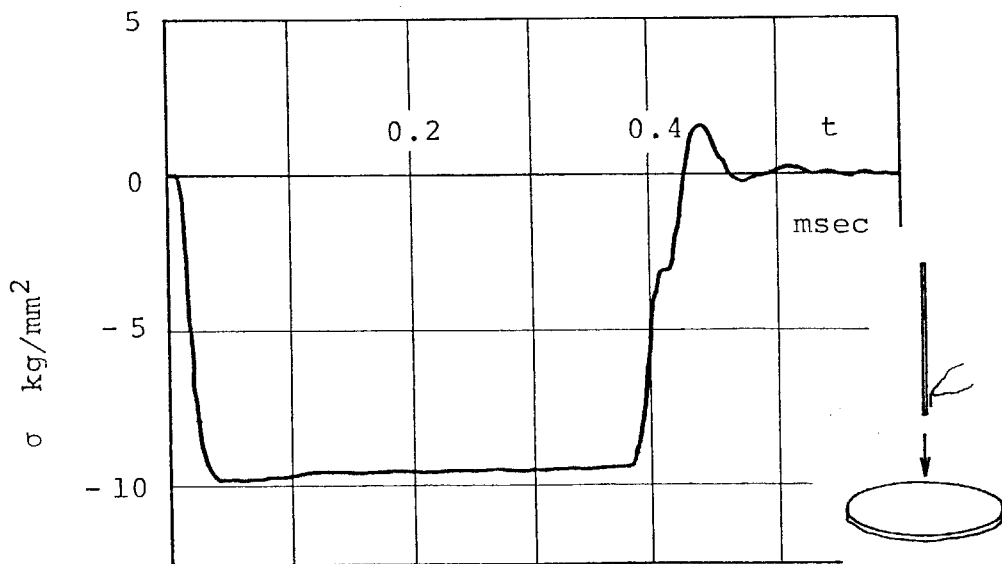


図 7.2 周辺支持円板の中央に丸棒を衝突させた場合の棒に生ずる応力波形 (落下高さ 500 mm, $\sigma = E \cdot \epsilon$)

波形の立ち上がり部分を $A(-1 + \cos \omega t)$ と近似すれば、立ち上がりに要する時間 t_0 が半周期にあたるので、この部分に含まれる周波数は $f = 1/2t_0$ [c/s] となる。図 7.2 の場合ほぼ $t_0 = 30 \mu\text{sec}$ であるから、 $f \approx 17 \text{kHz}$ となる。したがって、少くとも 20kHz に近い高周波成分が含まれていることがわかる。これをたとえば、 2kHz 以下の周波数帯域の計測器により測定すると、立ち上がりに要する時間が $250 \mu\text{sec}$ となり図 7.2 とは全く異なる波形が観測されることになる。このことから、直流ブリッジと直流増幅器による方式によらなければ、衝撃応力の正しい波形を計測することができないことがよく理解できるものと思う。

図 7.1 の回路では、シンクロスコープに内蔵されている増幅回路の周波数特性が $\text{DC} \sim 1 \text{MHz}$ のものを用いたので問題はないが、ひずみゲージとその接着材およびリード線からシンクロスコープの入力端子までのブリッジ回路とケーブルに高周波成分減衰の可能性が十分にある。しかし、これについては定量的に把握することができなかった。したがって、検出部のひずみゲージさらには試験片では、 20kHz よりはるかに高い周波数の信号が発生しているものと思われるので、ひずみゲージの接着ならびにブリッジ回路との結線に十分な配慮を行わなければならないと同時に、計測器はこの周波数帯域を十分にカバーする性能のものを用いなければならない。

図 7.3 は実際に用いた結線方法の概念図である。周辺のノイズから信号を守るためにすべてのリード線をシールド線で被い、高周波信号の減衰をできる限りおさえるためにリード線の長さをできる限り短かくして測定器間を結ぶようにした。

ブリッジ回路も必ず箱に収納して回路全体をシールドし、試験片が金属であれば「アクティブ・ダミー」とともにひずみゲージが接着されている材料にアース線を継ぐ。なお、アースをとる場合は土中に埋めた500mm平方の銅板からリード線を引き出し、一個所で代表して接続し、アース線が閉曲線を描かないように注意した。著者の経験では、実測された最も高い周波数は20kHz付近であり、これ以上の高周波を計測することはできなかった。これだけの配慮を行ってもDC~20kHzの信号しか計測できなかったのは、ひずみゲージの接着部分から結線までの系にこれ以上の周波数を減衰させてしまう働きがあるものと考えられる。しかし、これ以上に測定可能周波数帯域を広げることができなかったが、従来の交流ブリッジ方式に比べれば、格段の進歩であると思う。

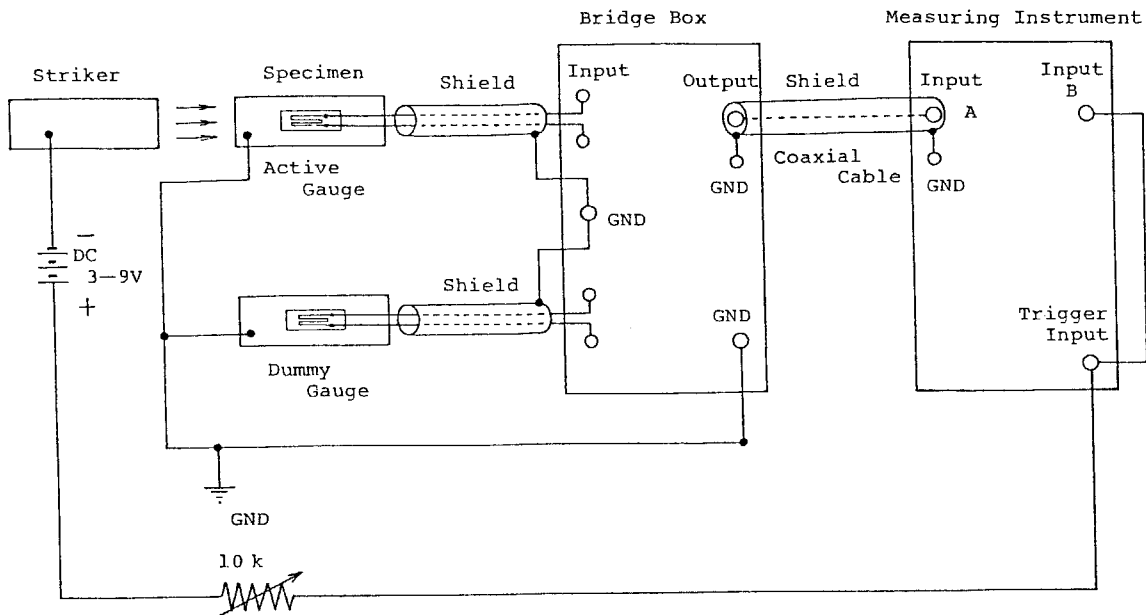


図7.3 結線方法の概念図

7.3 測定システムと機器

衝撃荷重によって試験片に生ずるひずみの時間変化を電気抵抗線ひずみゲージにより検出し、図7.4のブロック線図に示したような測定機器群により直接または必要な処理を行ったのち記録するシステムを編成して、実験を行った。図中の①→②→⑦の編成が、図7.1に示した最も簡単な測定回路となる。ところが、近年測定結果に電子計算の利用によるデ

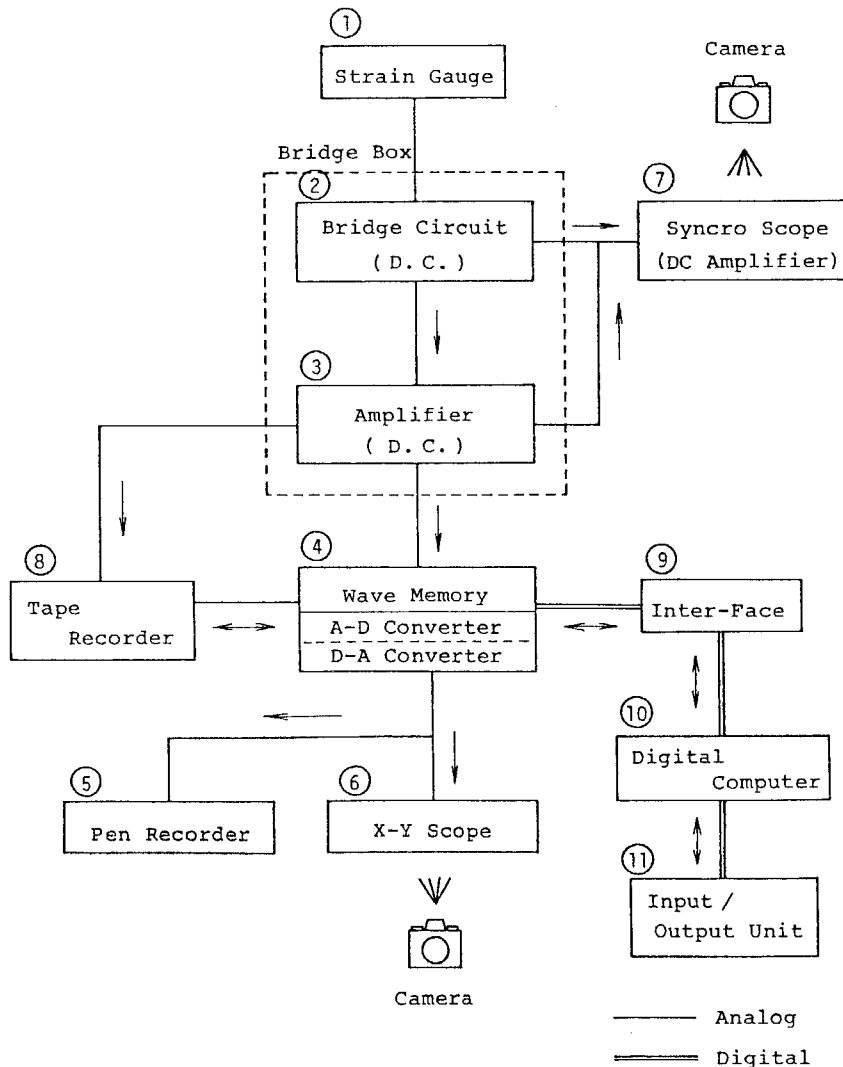


図7.4 測定システムの構成図

一夕処理が行われるようになった。そのためにブリッジ回路からの出力電圧の時間変化すなわちアナログ信号を波形記憶装置とよばれる高速AD変換器によりデジタル信号化して電子計算機に転送するといった方法が実用化されてきた。この波形記憶装置を作動させるにはブリッジ回路の出力電圧 ΔE_0 を増幅する必要がある。したがって、単独に直流増幅器をブリッジ回路と波形記憶装置との間に置かなければならない。

この直流ブリッジ回路と直流増幅器は、実験装置に近接して置かなければならない。なぜならば、この部分は雑音の影響を最も受けやすくしかも高周波成分が減衰しやすい所であるから、接続ケーブルの長さもできる限り短くしなければならない。さらに、一個所の測定点に対して最低一組(ニ軸ゲージならばニ組必要である)の回路を必要とするので、同一の実験に対して多くの回路数(チャンネル数と呼ぶ)を必要とする。そこで本実験では、ブリッジ回路と増幅回路については数チャンネルまとめて同一箱内に収めたブリッジボックス(図7.4の破線内)を作成し、余分な接続ケーブルをなるべく省略する方法を採用した。そして、ボックス全体として雑音対策を十分に施し、良好な結果が得られた。

図7.5が、このブリッジボックス(図7.4の②→③)の回路図である。電源のトランスには、特に雑音対策を十分に施したものをを用い、安定化電源用集積回路(Fairchild社製 $\mu A 723$)によりブリッジ回路ならびに増幅用集積回路に直流($\pm 15V$)を供給した。ブリッジ回路の部分は、出力の感度 $\Delta E_0/E_0$ が最も大きくなるように $R_A + R_B = R_1 + R_2 = 240\Omega$ とした。このとき、ひずみゲージに流れる電流は約 $30mA$ となっ

てメーカーの推奨値 10 mA より大きくなるが、ブリッジ回路の平衡がとれる限りにおいては電流をこの程度流しても全く差し支えない。もし不都合があれば、 R_x (120Ω) に抵抗値の大きいものを用い、電流を低くおさえればよい。いうまでもないが、電流を多く流すほど最終的な S/N 比 (信号と雑音との比) が向上する。直流増幅器には Burr-Brown 社製の集積回路 Instrumentation Amplifier 3660J を用いた。このブリッジボックスの動作確認をシンクロスコーフにより行い (③→⑦), 主に 100 倍に増幅された出力を波形記憶装置に入力する (③→④)。

次に、波形記憶装置の動作原理について簡単に説明しておく。ブリッジボックスから出力される電圧の時間変化 (アナログ信号) を設定された時間間隔 Δt (WCR) ごとにサンプリ

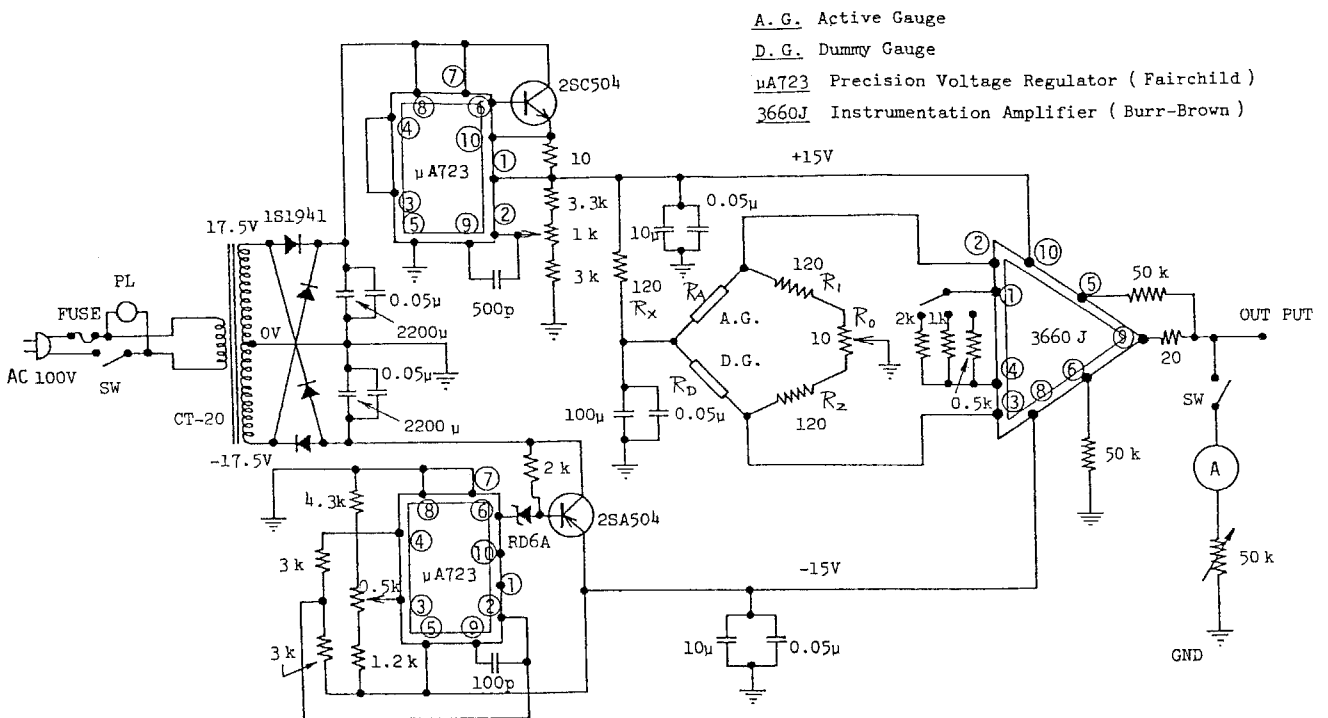


図 7.5 ブリッジ・ボックス回路図

ングレ, そのときの電圧をデジタル化 (AD変換) して記憶回路に格納する。サンプリングの一点に対して8ビットで構成された記憶場所 (単位呼称: ワード) に2進数として格納される。ワード数が2048個あるので, $2047 \times \Delta t$ の時間範囲のアナログ電圧がデジタル化された時系列データとして保存される。電子計算機へはこのデジタル化されたデータがそのまま転送される (④→⑦→⑩)。ペンレコーダおよびXYスコープ (④→⑥) へは再度DA変換し, サンプリング点の集合

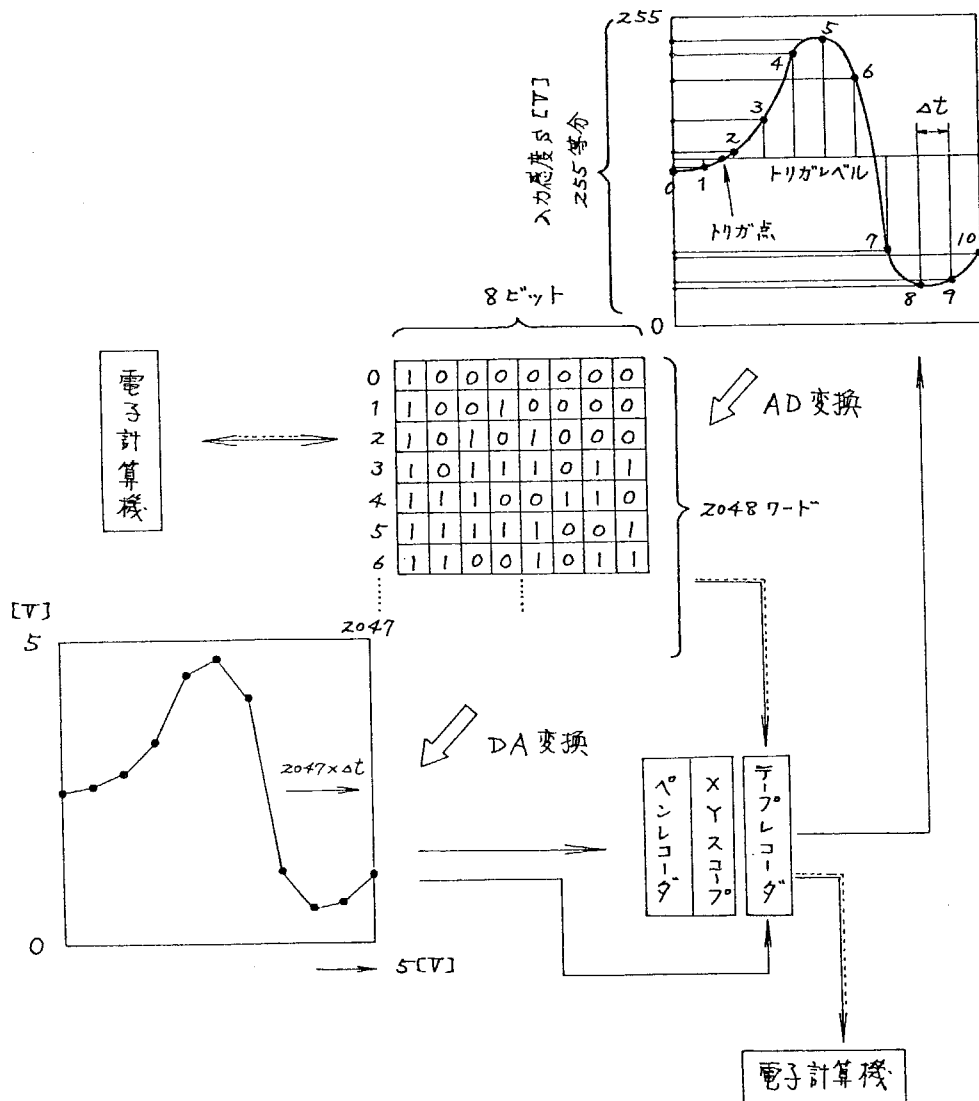


図7.6 波形記憶装置の動作原理の概念図

として出力される。出力の際には、ペン・レコーダへは追従できるゆっくりした速度で一回だけ出力するようになっており、X・Yスコープへは高速で繰返し出力するようになっておりブラウン管面では波形を静止像として観測できるようになっている。波形記憶装置では電圧軸・時間軸ともに入力感度に関係なくフルスケール5Vで出力されるので、入力電圧はフルスケールに対する比率に入力感度(5V)を乗じた値となる。波形記憶装置のAD変換は入力感度Sを 2^8 すなわち256個の整数値に分割する方式なので、分解能はフルスケールに対して約0.4%である。したがって、入力信号はSに対してなるべく大きい方が分解能がよくなる。波形記憶装置は半導体メモリーを使っているため揮発性であり、電源を切断すると消失する。そこで、記録の保存方法が問題となる。記録データをアナログ量として保存する手段として、テープ・レコーダに出力する方法がある(④→⑧)。時間的にゆっくりした現象であれば、フリッジボックスの出力を直接テープ・レコーダに出力させて保存することもできる(③→⑧)。これらの場合、保存したデータは必要なときに随時波形記憶装置へ再度出力することになる。記録データをデジタル量として保存して置きたい場合には電子計算機の入出力装置を用いればよい。なお、波形記憶装置はシフト・レジスタを用いているので、トリガ点以前の現象を任意の時間範囲について測定することができ、単発の現象における初期の状況を観測するのに大変便利である。

電子計算機へのデータ転送はAssembler言語により命令され、計算機内でのデータ処理はFortran言語により書かれたプログラム

ラムにより命令される。処理結果は同じ手続きにより逆に波形記憶装置へ転送され、パン・レコーダなどにより記録させることもできる(⑩→⑨→④→⑤)。

計測される量はすべて電圧であるから、ひずみに換算する計算式が必要となる。まず、ひずみゲージがうけるひずみと抵抗の変化率 $\Delta R/R$ との関係は、抵抗線の変形に対する性質から、近似的に次のような式となる。

$$\Delta R/R = \epsilon \cdot \epsilon \quad (7.1)$$

ここで、 ϵ はゲージ率とよばれる比例定数であり、主に抵抗線のポアソン比 ν に依存し、 $\epsilon = 1 + 2\nu$ である。

次に、この抵抗の変化率 $\Delta R/R$ とブリッジ回路の出力電圧 $\Delta E_0/E_0$ との関係は、図7.1の回路に対する計算により

$$\frac{\Delta E_0}{E_0} = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} \frac{\Delta R_0}{R_0} \quad (\text{ただし, } \Delta E_0/E_0 \ll 1) \quad (7.2)$$

となる。ここで、 $\lambda = (R_A + R_D)/(R_1 + R_2)$ である。

波形記憶装置の出力電圧 E_m (V) とブリッジ回路の出力電圧 ΔE_0 との間には、次の関係がある。

$$5G \cdot \Delta E_0 = S E_m \quad (7.3)$$

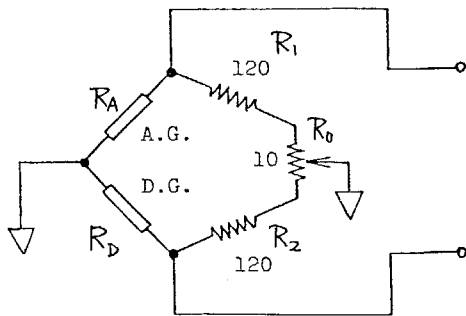
ここで、 G は直流増幅器(3660J)の増幅率であり、 S は波形記憶装置の入力感度(V)である。時間については、シンクロスコープの較正器(1kHz)あるいは波形記憶装置内蔵のクロック(水晶発振)を基準とする。

最後に図7.4のシステムに用いた各機器の諸元を記しておく。

① Strain Gauge

(株)東京測器研究所 製のポリエステルおよび箔ゲージ

② Bridge Circuit



R_A (アクティブゲージ)
 $\div R_D$ (ダミーゲージ)
 $R_0 = 10 \Omega, R_1 = R_2 = 120 \Omega$

$$\lambda = \frac{R_A + R_D}{R_0 + R_1 + R_2}$$

③ Amplifier

Burr-Brown 社製 Instrumentation Amplifier 3660 J
 (直流増幅回路用集積回路)

増幅度 (G) : 1 ~ 100 倍 (確度 0.1%)
 出力 : $\pm 10V, \pm 10mA$ (インピーダンス 0.15Ω)
 入力 : $\pm 10V$
 インピーダンス $2 \times 10^{10} / G \Omega, 3 pF$
 周波数特性 : DC ~ 95 kHz (G = 10)
 ($\pm 3dB$) DC ~ 72 kHz (G = 100)
 オフセット : $\pm (6 + \frac{600}{G}) mV$ (調整可)
 ドリフト : $\pm (10 + \frac{1000}{G}) \mu V / ^\circ C$

④ Wave Memory

岩通電子(株)製 デジタルメモリー - DM 701

時間軸 (X 軸) 関係
 内部クロック 書込み速度 100msec ~ 50msec / word

読出し速度 $1\mu\text{sec} \sim 100\text{msec}/\text{word}$
外部クロック：書込み速度 $100\text{msec}/\text{word}$ 以上連続
読出し速度 $1\mu\text{sec}/\text{word}$ 以上連続

電圧軸 (Y軸) 関係

入力感度： $10\text{mV} \sim 5\text{V}$ (フルスケール, 確度 $2 \sim 6\%$)
周波数帯域：入力感度 10mV , $\text{DC} \sim 10\text{kHz}$ (確度 6%)
 20mV , $\text{DC} \sim 20\text{kHz}$ (確度 4%)
 50mV , $\text{DC} \sim 100\text{kHz}$ (確度 2%)

入力結合：AC ($> 2\text{Hz}$), GND, DC

入力 RC： $1\text{M}\Omega$, 85pF 並列

A/D 変換器 ダイナミック形 MOS シフトレジスタ

分解能 8 bit (0.4%), 容量 2048 word

書込み モード：WRITE & READ, WRITE, READ

遅延：DELAY START, DELAY STOP

遅延範囲： $0 \sim \pm 1998$ ワード

読出し モード：REPEAT, SINGLE

アナログ出力：出力電圧 5V (X, Y 軸フルスケール)

出力抵抗 $1.5\text{k}\Omega$

デジタル出力：Y 軸 (TTL レベル)

⑤ Pen Recorder

理研電子 (株) 製 X-Y レコーダ D51P

測定電圧 $2\text{mV} \sim 100\text{V}$, 確度 0.2% 以内

入力抵抗 $50\text{k}\Omega \sim 10\text{M}\Omega$

動的追従速度 0.3Hz 以下

⑥, ⑦ X·Y Scope, Syncro Scope

岩通電子(株)製 シンクロスコープ SS 5215

感度: $1\text{mV} \sim 20\text{V}/\text{Div.}$ (確度 $\pm 5\%$)周波数帯域: $\text{DC} \sim 15\text{MHz}$ (-3dB)立ち上り時間: 24msec 入力RC: $1\text{M}\Omega, 30\text{pF}$ 入力結合: $\text{AC} (>4\text{Hz}), \text{GND}, \text{DC}$ 掃引時間: $50\text{msec} \sim 0.5\text{sec}/\text{Div.}$ 垂直偏向モード: $\text{CH1}, \text{CH2}, \text{ALT}, \text{CHOP}, \text{ADD}$ 水平偏向モード: $\text{AUTO}, \text{NORM}, \text{SINGLE}$ X·Y動作, 校正器(1kHz), 単掃引機能付

岩通電子(株)製 シンクロスコープ DS 5016

感度: $50\mu\text{V} \sim 10\text{V}/\text{Div.}$ (確度 $\pm 3\%$)周波数帯域: $\text{DC} \sim 1\text{MHz}$ (-3dB)立ち上り時間: 350msec 入力RC: $1\text{M}\Omega, 55\text{pF}$ 入力結果: $\text{AC} (>4\text{Hz}), \text{GND}, \text{DC}$ 掃引時間: $50\text{msec} \sim 5\text{sec}/\text{Div.}$ 水平偏向モード: $\text{AUTO}, \text{NORM}, \text{SINGLE}$ X·Y動作, 校正器(1kHz), 単掃引機能付

デュアル・ヒーム フラウン管使用

⑧ Tape Recorder

ティアック(株)製 データ・レコーダ R410

記録再生方式: 直接記録再生(DR), 周波数変復調(FM)

テープ : 巾 6.3 mm (1/4 inch), 厚 31.5 μ

リール径 : 計測用精密リール 26.7 cm (10.5 inch)

プラスチックリール 17 cm (7 inch)

トラック数 4, チャンネル数 4

ヘッド : 記録 1, 再生 1, デュアルキャップスタン

コントロール : REWIND, FAST, FOREWARD, STOP, PLAY, RECORD

テープ速度 : 152.4 cm (60 inch) \sim 7.62 cm (3 inch) / sec.

入力インピーダンス : 100 k Ω

入力電圧 : $2V_{pp} \sim 40V_{pp}$ (DR), $\pm 1V \sim \pm 20V$ (FM)

出力電圧 : $2V_{pp}$ (DR), $\pm 1V$ (FM)

周波数帯域 : 100 Hz \sim 200 kHz (DR), DC \sim 20 kHz (FM)

SN比 : 28 dB (DR), 43 dB (FM)

ひずみ率 : 3% 以下 (DR), 1% 以下 (FM)

校正器, エンドレス記録, リモートコントロール機能付

⑨ Inter-Face

岩通電子(株)製デジタルメモリ DM701 と (株)日立製作所製小型電子計算機 HITAC 10 システム (⑩, ⑪) との間のデジタルデータの相互転送をコントロールする電子回路であり, 仕様の概略は次のとおりである。

- 1) HITAC 10 のアセンブラ言語によるプログラムによってデータ転送を制御する。
- 2) DM701 から HITAC 10 へは, フラグセンス方式で転送する。
- 3) HITAC 10 から DM701 へは, フラグセンスなしの一定時間サイクルで転送する。
- 4) DM701 の各チャンネルを独立に制御する。

⑩, ⑪ Digital Computer, Input/Output Unit

(株)日立製作所製 小型電子計算機 HITAC 10 システム

中央処理装置 : 16 bit, 8 kword

データタイプライタ : 紙テープによる入出力, キーボードよりの入力,
ロール紙への出力

紙テープ読取機 : 紙テープによる入力

電源用集積回路 $\mu A723$ の特性

入力電圧 (V_{in}) : 9.5 ~ 40 V

出力電圧 (V_{out}) : 2 ~ 37 V

入出力電位差 ($V_{in} - V_{out}$) : 3 ~ 38 V

最大出力電流 : 150 mA (外付ケトランジスタ無しの場合)

安定度 : 0.15 % 以内

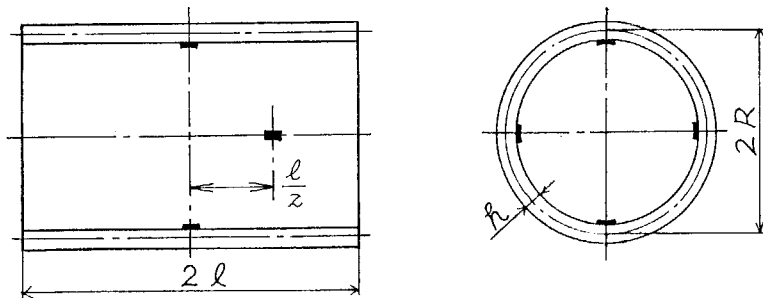
7.4 集中力による両縁自由円筒殻の衝撃実験

7.4.1 実験方法

円筒殻の曲げに関する問題は、負荷形式によって局部的変形が支配的な場合と円筒殻の中心軸線がはり状にたわむ変形が支配的な場合とに大別される。前者の例として本節では、両縁自由円筒殻の中央に集中衝撃力を作用させる実験を行った結果ならびに理論解析結果との比較について記述した。

図7.7に示したような鋼製円筒を用い、両縁は自由とした。

負荷方法は図7.8のように軟鋼丸棒を三本の鋼製丸棒によるガイドの間を自由落下させ、外表面の中央に衝突させる方法を採用した。円筒に生ずるひずみに支持の影響を与えないように木材で作した支持台の上に円筒(約80kg)を乗せた。



円筒殻 (圧力配管用炭素鋼管 STPG 38)

平均半径 R	肉厚 t	長さ l	t/R	l/R
247.7 mm	12.7 mm	260.0 mm	0.051	1.05

衝撃棒 (軟鋼)

直径 d	長さ l
20 mm	600 mm

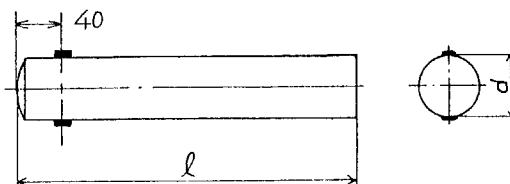


図7.7 円筒および棒の形状 (—印ひずみゲージ接着位置)

衝撃用の丸棒端面には、図7.7に示したように丸みをつけることにより円筒との片当りを防ぎ、実験の再現性が確保されるように工夫した。ひずみゲージは、図7.7のように円筒の中央および4分の1の円周上のそれぞれ中心軸に関して対称な位置に2組づつ接着した。周方向に対しては円筒を回転させることにより任意の角度でもって測定が可能である。

ひずみゲージには軸方向および周方向ひずみを測定するために2軸直交型のものを用いた。測定の際には、この中心軸に関して対称な位置のひずみゲージを直列に接続して重ね合わせを行うことにした。このようにすることにより、荷重状態が図7.9のように中心に向って一對の対向集中衝撃荷重である場合のひずみが測定できることになる。この処置により、円筒殻の中心軸が変形せず局部変形だけの荷重状態すなわち第3章において取り扱った荷重状態と一致することになる。

丸棒には衝突による反力すなわち衝撃力を測定するために、衝撃端より40mmの位置に単軸のひずみゲージを中心軸に関して対象に2枚接着し、これらも直列に接続した。これは衝突時に生ずる恐れのある曲げひずみを消去するための処置である。棒の両端近傍にはPMMA樹脂のリンク"を取り付けて、鋼製丸棒のガイドとの摩擦による衝撃速度の低下が少くなるようにした。棒中の応力波の伝は状態を一次元と仮定して、ひずみの時間変動に縦弾性係数と棒の横断面積を乗じて衝撃力の時間変動とした。これをもとに理論解析結果にDuhamelの積分を適用し、実験状態に対応したひずみあるいは応力の時間変動を求め、実験結果との比較に供した。

表7.1 ひずみゲージの諸元

諸元	円筒	丸棒
タイプ	FCA 2 箔ゲージ・ニ軸	PL5 ポリエステル・単軸
ゲージ長さ	2mm	5mm
抵抗値	120Ω	120Ω
ゲージ率 ϵ	2.06	2.04

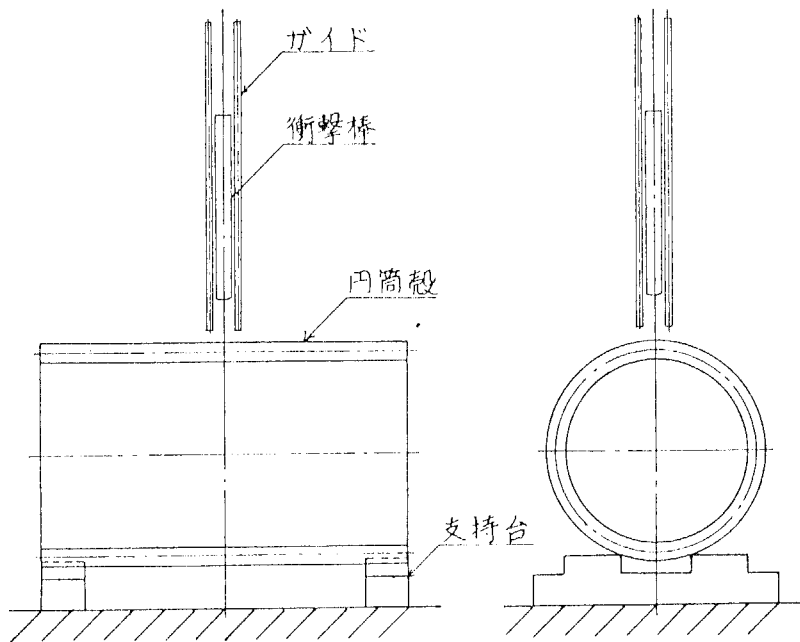
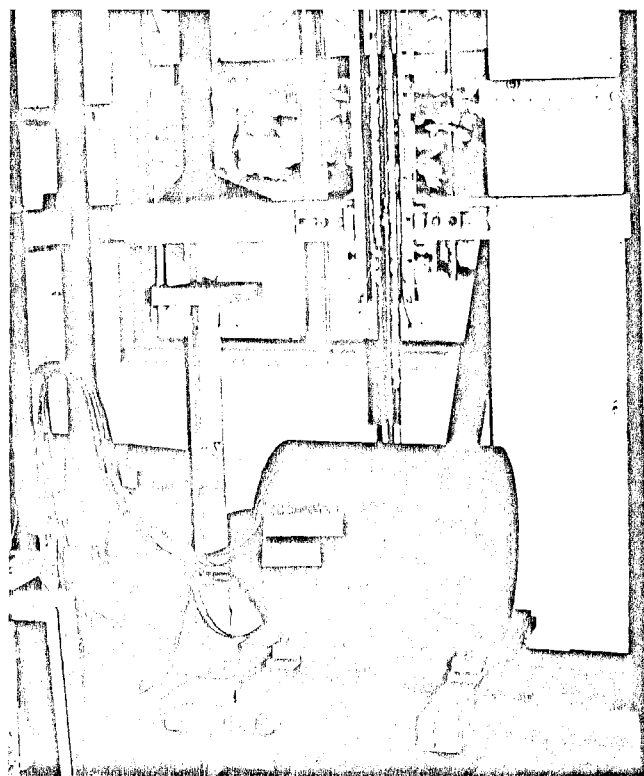


図7.8

実験装置概略図



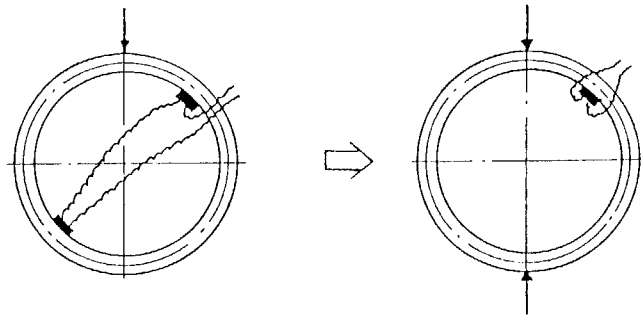


図7.9 重ね合せ法による測定原理

7.4.2 実験結果

測定システム(図7.4)のうちの主として①→②→③→④→⑤の部分を用いて実験を行った。

図7.10は丸棒に生じたひずみの時間変動と衝撃速度との関係をペン・レコーダにより記録したものである。波形は衝撃後ゆるやかな曲線を描き衝突後 $220\mu\text{sec}$ 付近で最大となりその後下降に転じている。応力波の伝ば速度は一次元伝ば理論によれば $5,100\text{m/sec}$ ($=\sqrt{E/P}$, $E=2.1\times 10^4\text{kgf/mm}^2$, $P=7.86\times 10^{-6}\text{kg/mm}^3$)であるから、最大ひずみを生ずる時間は棒の衝突端から伝ばした圧縮応力波が上端で反射して引張応力波となって最初に測定点に到達した時刻と一致する。この最大ひずみと衝撃速度との関係を示したのが図7.11であり、直線関係にあることがわかる。

図7.12および図7.13は衝撃点下面に生じた軸方向および周方向ひずみの時間変動を二種類のサンプリング速度で波形記憶装置に入力し、ペン・レコーダにより記録したものである。特に軸方向ひずみ ϵ_x の波形は棒に生じたひずみ波形と

(392)

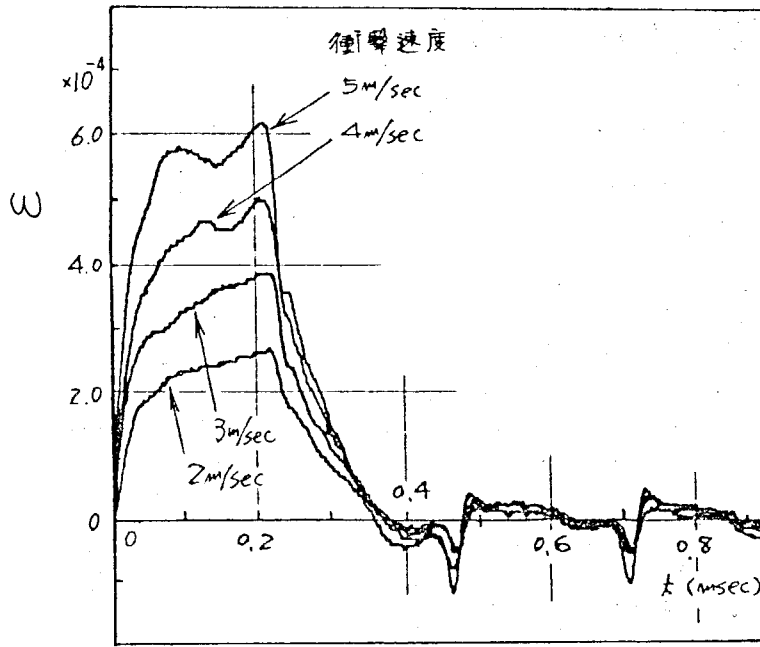


図7.10 丸棒のひずみと衝撃速度の関係

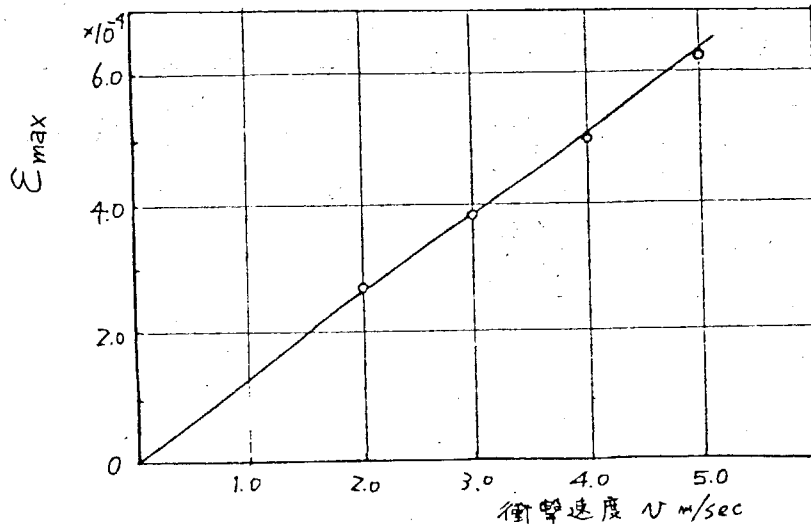


図7.11 丸棒の最大ひずみと衝撃速度の関係

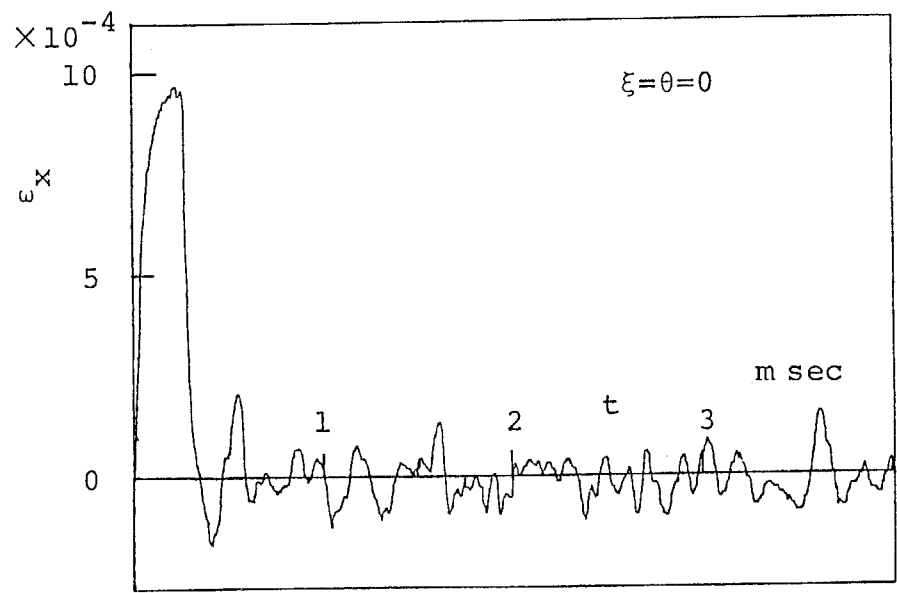
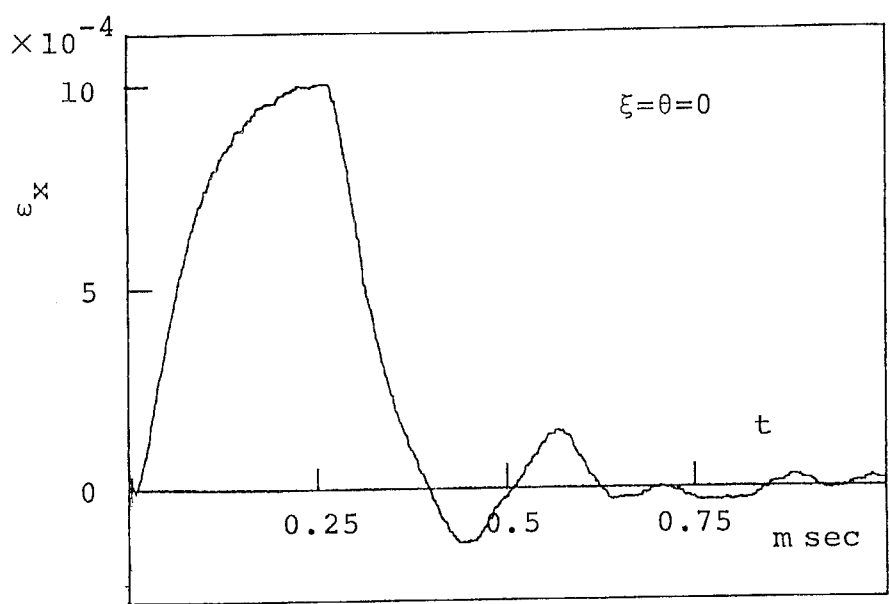


図7.12 衝撃点下面に生ずる軸方向ひずみの時間変動
(衝撃速度 $v = 5 \text{ m/sec}$)

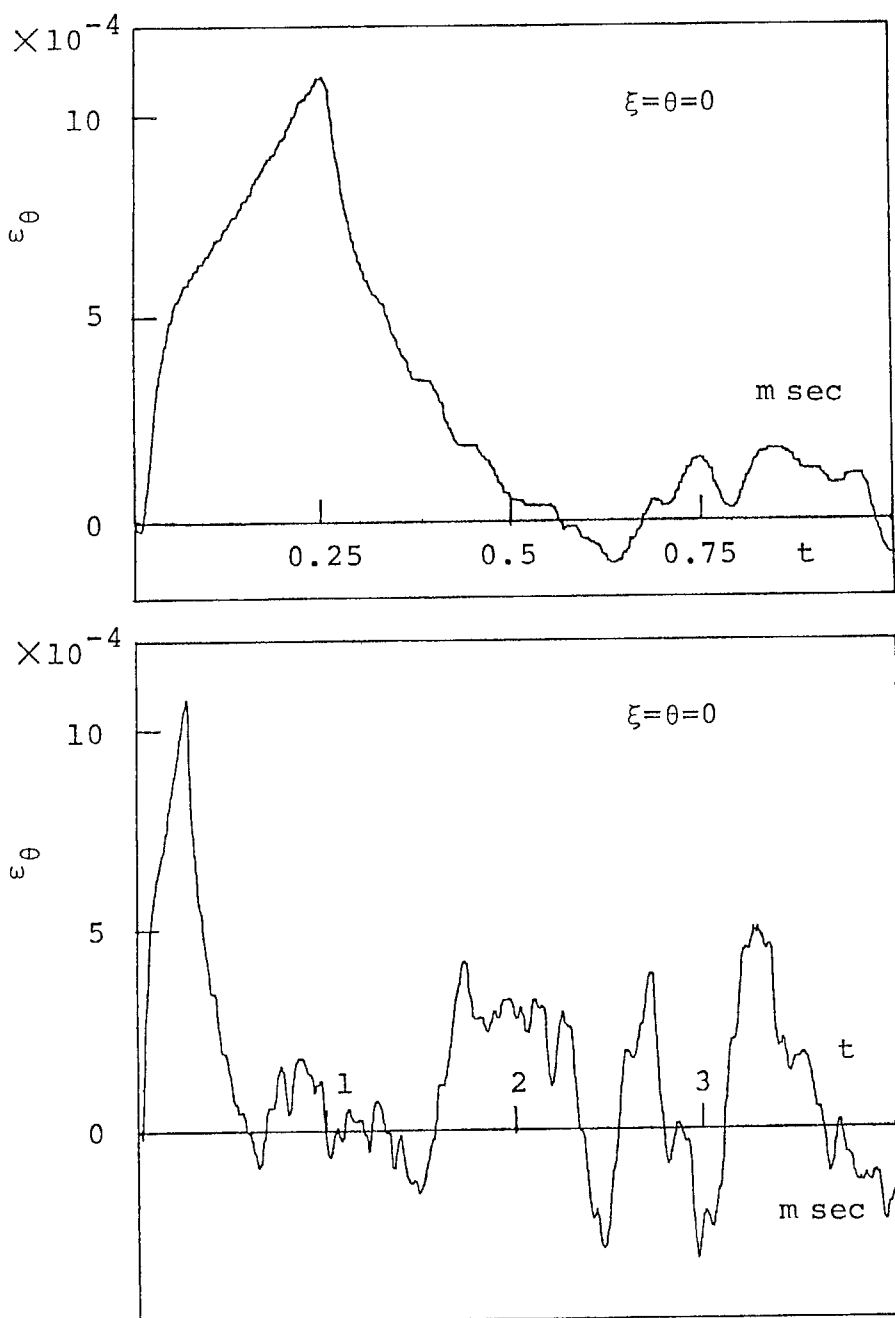


図7.13 衝撃点下面に生ずる周方向ひずみの時間変動
(衝撃速度 $v = 5\ m/sec$)

よく似ている。棒のひずみが大きく生じている時間領域では、円筒の衝撃点におけるひずみも大きく棒の波形とほぼ相似な波形を描く。その後、棒におけるひずみが小さくなるにつれて同じように小さくなってほとんど消失してしまう。この傾向は軸方向ひずみの方が顕著である。なお、最大ひずみを生ずる時刻は、棒における時刻よりやや遅れているのが注目される。図7.14および図7.15は衝撃点より周方向に90度だけ回転した位置の内面に生じた軸方向および周方向ひずみの時間変動を二種類のサンプリング速度で記録したものである。

ひずみは衝撃後しばらく時間が経過してから最大値をとっている。軸方向ひずみは周方向ひずみに比べて小さく、振動周期は非常に短い。周方向ひずみにおける周期の長い振動

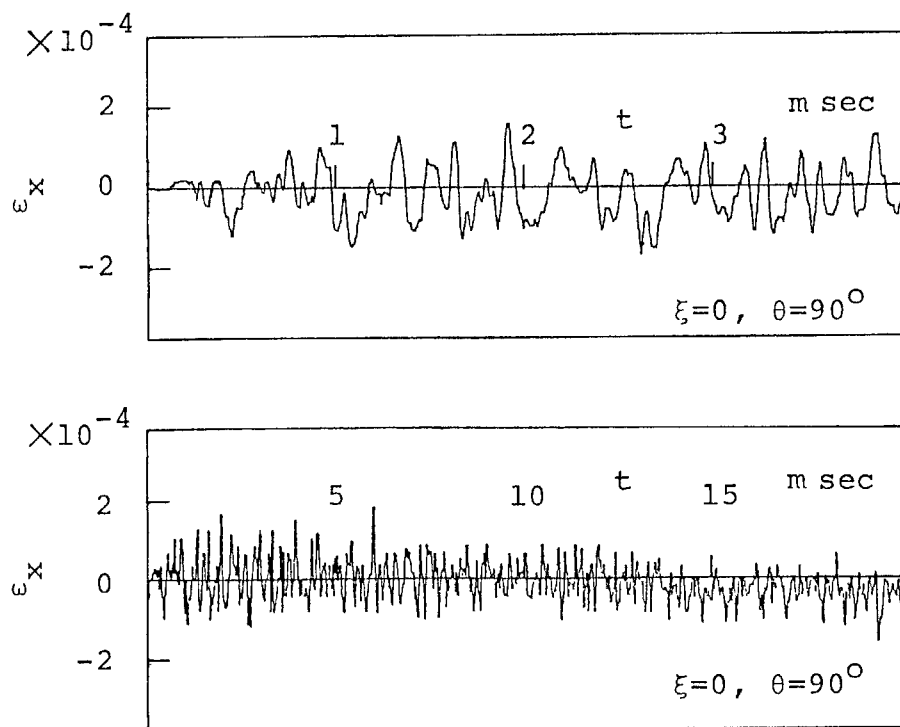


図7.14 円筒に生ずる軸方向ひずみの時間変動
($x=0$, $\theta=\pi/2$; 衝撃速度 $v=5\text{ m/sec}$)

は $n = 2$ すなわち $\cos 2\theta$ 状のモードの最低次固有周期に対応している。図7.16 および 図7.17 は衝撃点より軸方向に $l/2$ だけ離れた位置の円筒内面に生じた軸方向および周方向ひずみの時間変動を二種類のサンプリング速度で記録したもので

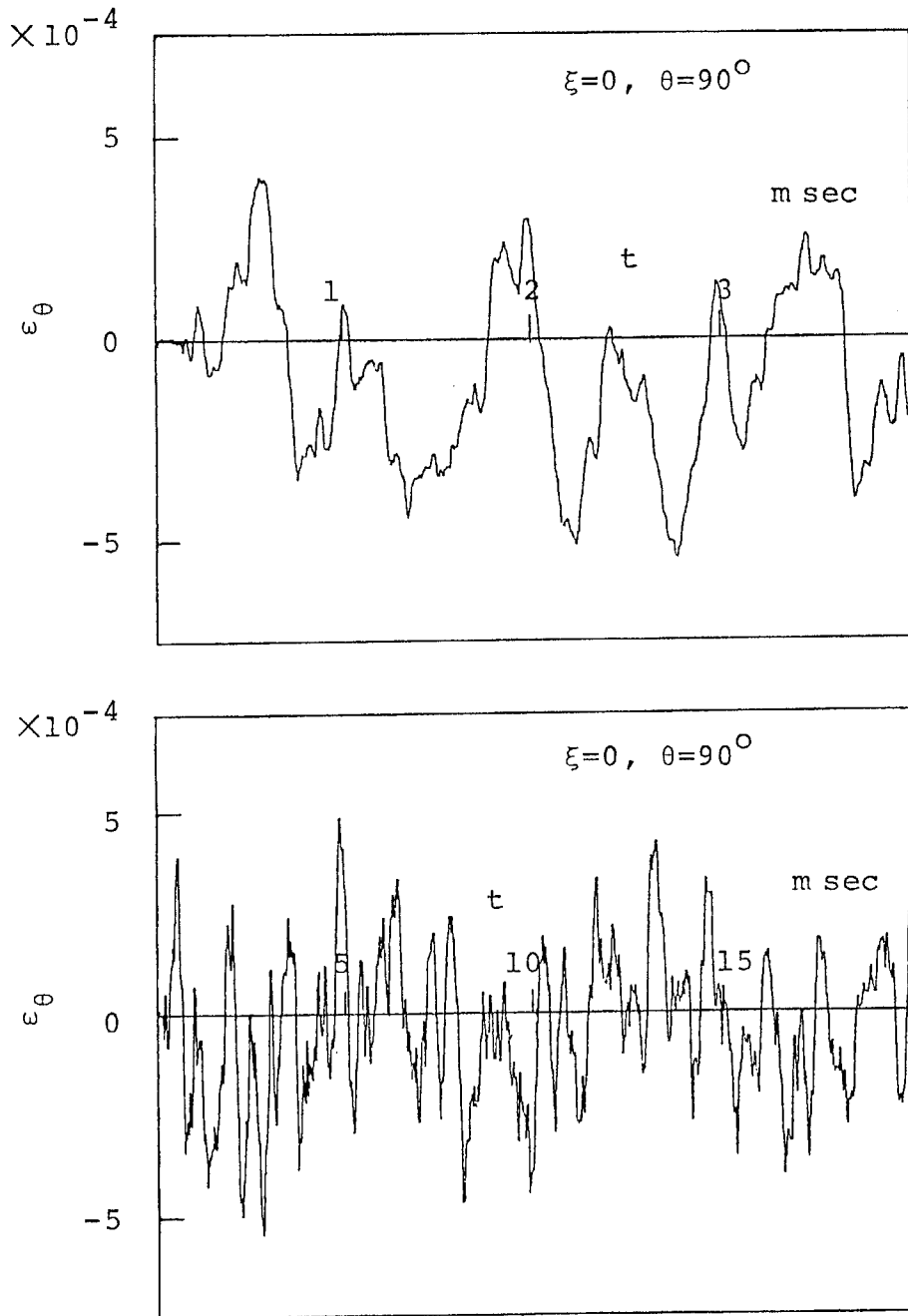


図7.15 円筒に生ずる周方向ひずみの時間変動
($\alpha=0, \theta=\pi/2$; 衝撃速度 $v=5\ m/sec$)

ある。図7.18および図7.19は衝撃点より軸方向に $l/2$ かつ周方向に 90 度回転した位置の円筒内面に生じた軸方向および周方向ひずみの時間変動を二種類のサンプリング速度で記録したものである。

以上により、衝撃力をうけた円筒は軸方向には変化せず周方向にだけ $\cos 2\theta$ 状に変化するモード（リング状のモード）でもって振動しているものと思われる。したがって、衝撃初期の衝撃点においてだけ大きな応力を生ずるが、荷重が除荷された後の応力の大きさは軸方向に対してほとんど変化しない。軸方向ひずみは小さく周方向ひずみの 3 割程度（ポアソン比を乗じた程度）であり、このことも円筒が全体としてリング状の振動モードでもって振動していることの裏付けになっているものと考えられる。

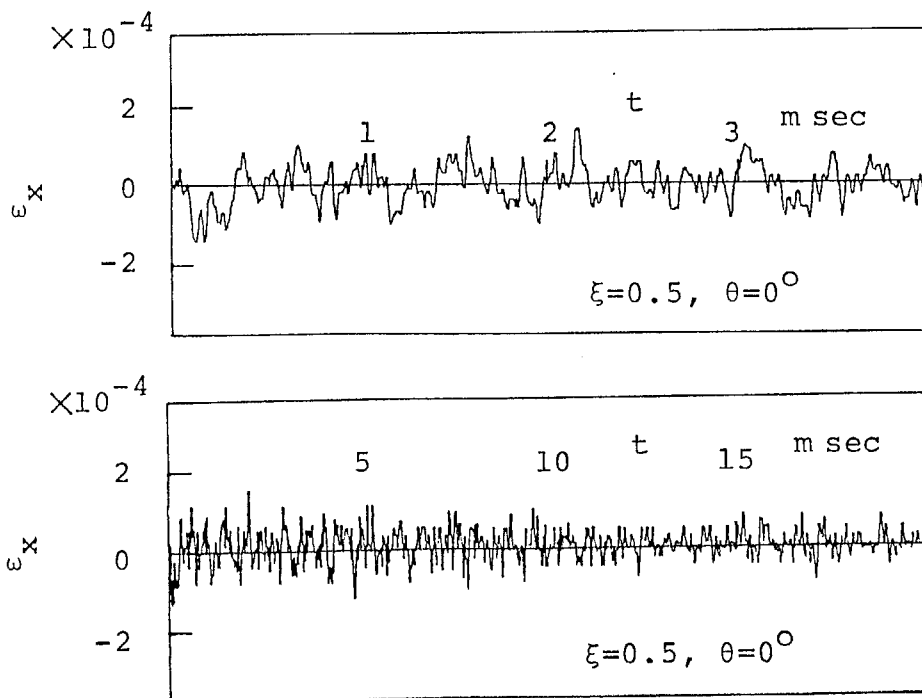


図7.16 円筒に生ずる軸方向ひずみの時間変動

($x=l/2, \theta=0$; 衝撃速度 $v=5\text{ m/sec}$)

図7.20は各測定点における最大ひずみの絶対値と衝撃速度との関係をまとめたものである。衝撃点におけるひずみが群を抜いて大きく、これ以外の点ではひずみの大きさはほとんど差がない。周方向ひずみの値は軸方向ひずみの3倍程度の値を示している。

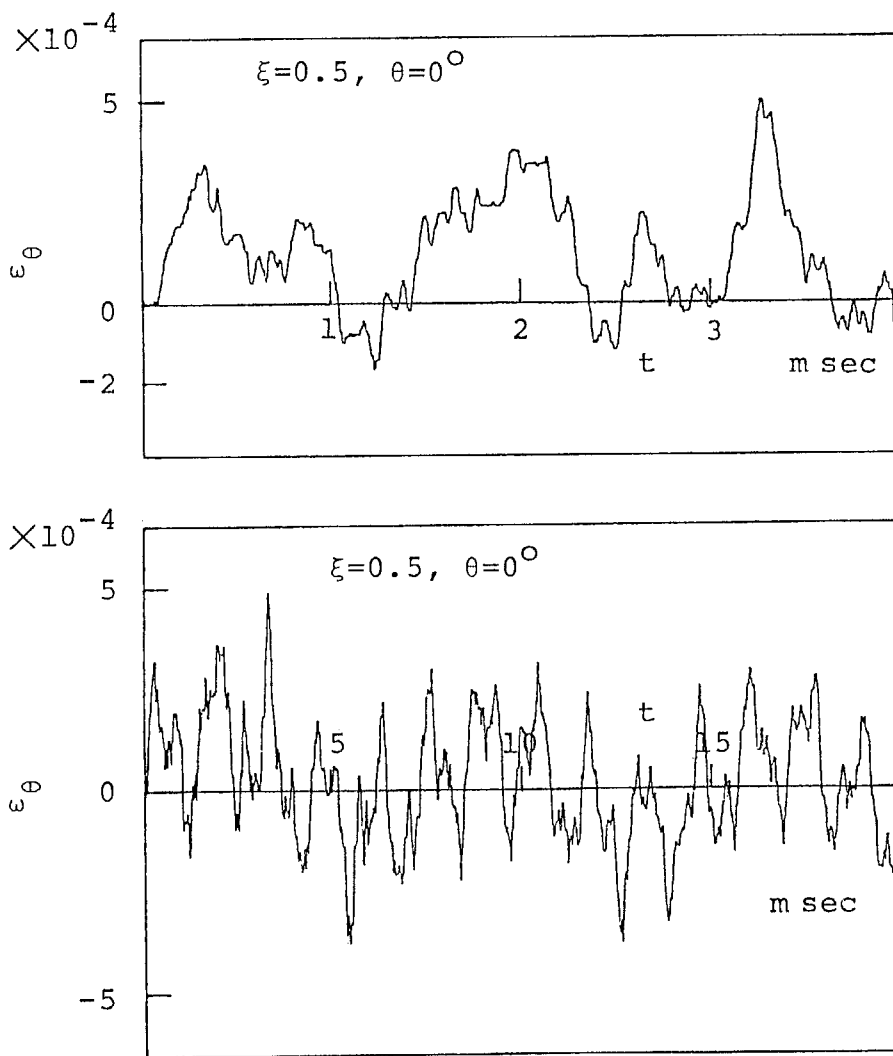


図7.17 円筒に生ずる周方向ひずみの時間変動
($x=l/2, \theta=0$; 衝撃速度 $v=5m/sec$)

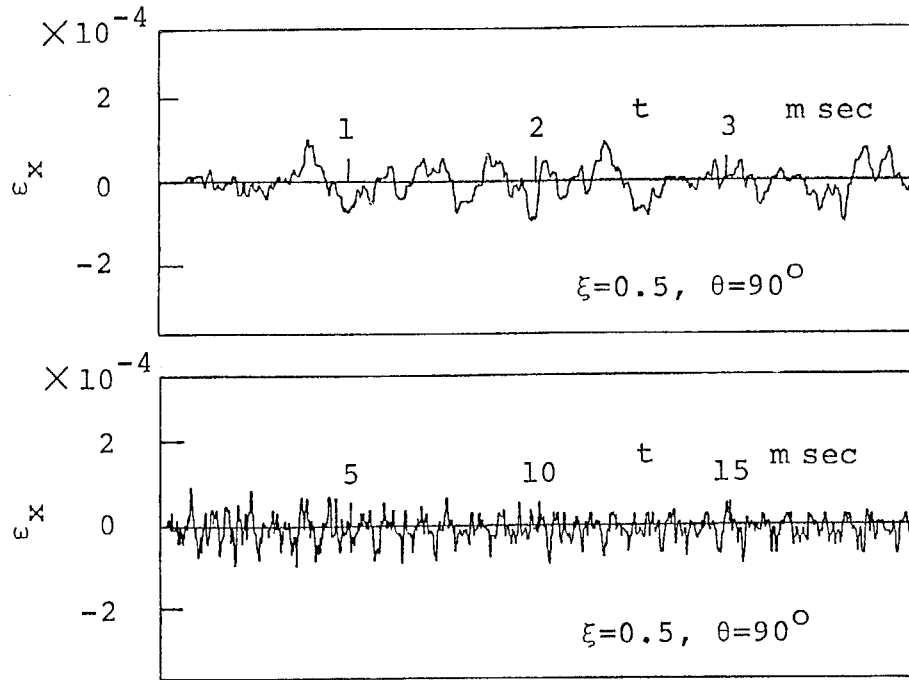


図7.18 円筒に生ずる軸方向ひずみの時間変動

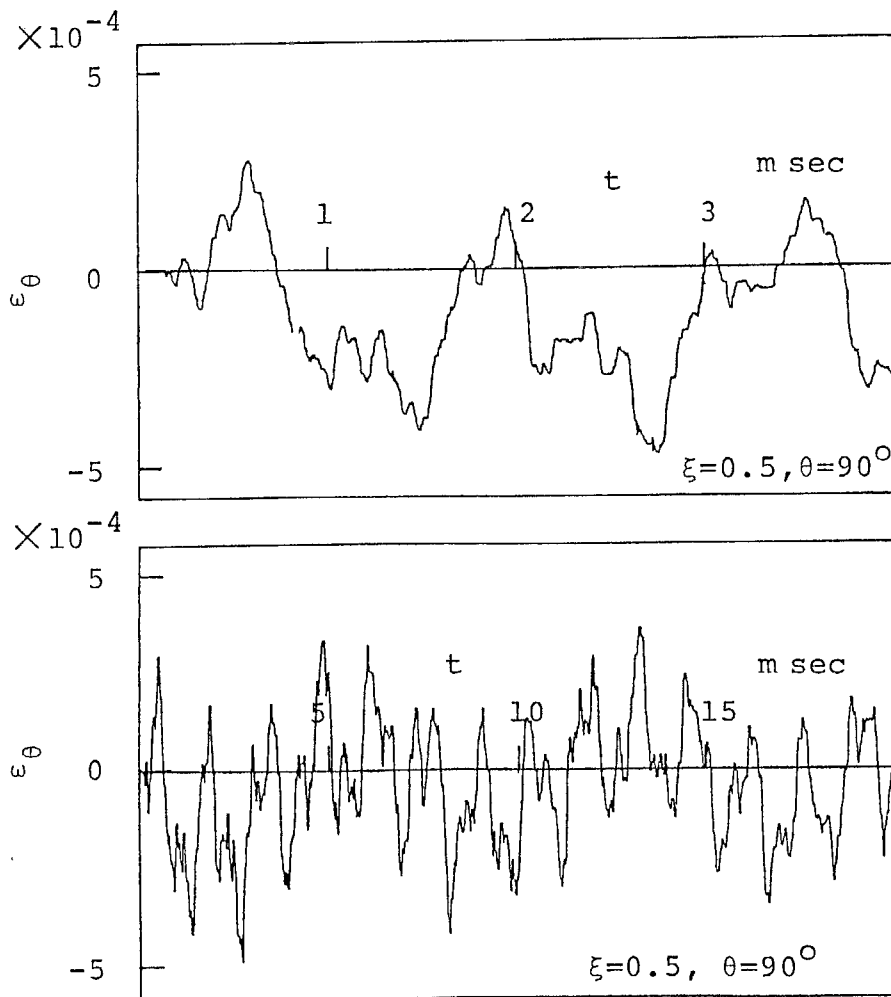


図7.19 円筒に生ずる周方向ひずみの時間変動

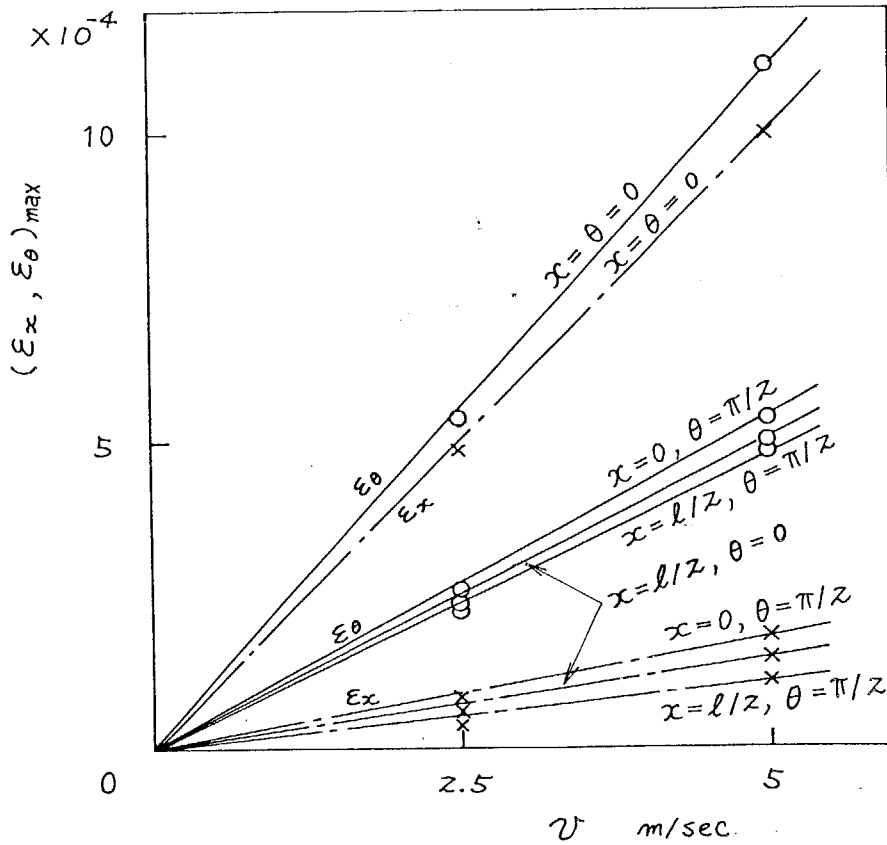


図7.20 各位置における最大ひずみと衝撃速度の関係

7.4.3 理論結果との比較

丸棒における応力波の伝は⁰を一次元と仮定すれば、棒に生じたひずみに棒の縦弾性係数 ($E=2.1 \times 10^4 \text{ kgf/mm}^2$) と断面積 ($A=\pi d^2/4$) を乗じてこれを円筒に作用した衝撃荷重とすることができる。この仮定により3.4節における両縁自由円筒殻に対する解析結果を

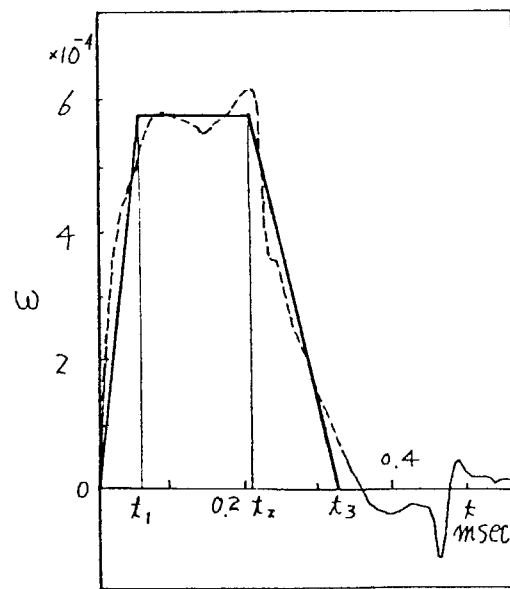


図7.21 衝撃荷重の近似波形

用いて理論と実験の結果の比較が可能となる。

衝撃速度 5m/sec の場合の棒に生じたひずみ波形を図 7.21 のように台形で近似して衝撃荷重の時間変動とした。このとき衝撃力の最大値は 3820 kgf となる。Donnell の理論では、曲げによる円筒内面のひずみは次式で与えられる。

$$\varepsilon_x = -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (7.4a)$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{h}{2R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (7.4b)$$

したがって、図 7.21 のような台形パルス状の衝撃荷重に対する理論解析結果は、3.4 節における結果と Duhamel の積分によれば、以下のようになる。

$$\varepsilon_x = -\frac{k^2 h F_0}{2D} \left\{ \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} G_{0,m}^{(x)}(\xi) T_{0,m}(\tau) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \cos m\theta \sum_{m=1}^{\infty} G_{m,m}^{(x)}(\xi) T_{m,m}(\tau) \right\} \quad (7.5a)$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{k^2 h F_0}{2D} \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \cos m\theta \sum_{m=1}^{\infty} G_{m,m}^{(\theta)}(\xi) T_{m,m}(\tau) \right\} \quad (7.5b)$$

ここで

$$G_{0,m}^{(x)}(\xi) = \alpha_m^2 \frac{F_1 \cosh \alpha_m \xi - F_2 \cos \alpha_m \xi}{2L \lambda_m^2 \cosh \alpha_m L \cos \alpha_m L}$$

$$G_{m,m}^{(x)}(\xi) = 2 \sum_{j=1}^8 \alpha_j^2 B_{4j} e^{\alpha_j \xi} / \lambda_m^2 \sum_{k=1}^8 |B_{4k}^*|$$

$$G_{m,m}^{(\theta)}(\xi) = -2m^2 \sum_{j=1}^8 B_{4j} e^{\alpha_j \xi} / \lambda_m^2 \sum_{k=1}^8 |B_{4k}^*|$$

$$F_0 = 3820 \text{ kg}$$

(402)

ただし、 $G_{0,m}^{(x)}(\xi)$ は軸対称分布の場合の結果であり、 $G_{n,m}^{(x)}(\xi)$ および $G_{n,m}^{(\theta)}(\xi)$ は余弦状分布の場合の結果である。他の記号は3.4節において定義したものと同一である。 $T_{n,m}(\tau)$ は図7.21の近似波形により決定され、以下のようになる。

(i) $0 \leq \tau < \tau_1$ のとき

$$T_{n,m}(\tau) = \frac{\tau}{\tau_1} - \frac{\sin \lambda_m \tau}{\lambda_m \tau_1} \quad (7.6a)$$

(ii) $\tau_1 \leq \tau < \tau_2$ のとき

$$T_{n,m}(\tau) = 1 + \frac{\sin \lambda_m (\tau - \tau_1)}{\lambda_m \tau_1} - \frac{\sin \lambda_m \tau}{\lambda_m \tau_1} \quad (7.6b)$$

(iii) $\tau_2 \leq \tau < \tau_3$ のとき

$$T_{n,m}(\tau) = \frac{\tau_3 - \tau}{\tau_3 - \tau_2} + \frac{\sin \lambda_m (\tau - \tau_1)}{\lambda_m \tau_1} - \frac{\sin \lambda_m \tau}{\lambda_m \tau_1} + \frac{\sin \lambda_m (\tau - \tau_2)}{\lambda_m (\tau_3 - \tau_2)} \quad (7.6c)$$

(iv) $\tau_3 \leq \tau$ のとき

$$T_{n,m}(\tau) = \frac{\sin \lambda_m (\tau - \tau_1)}{\lambda_m \tau_1} - \frac{\sin \lambda_m \tau}{\lambda_m \tau_1} - \frac{\sin \lambda_m (\tau - \tau_3)}{\lambda_m (\tau_3 - \tau_2)} + \frac{\sin \lambda_m (\tau - \tau_2)}{\lambda_m (\tau_3 - \tau_2)} \quad (7.6d)$$

ここで、 $n=0, 2, 4, 6, \dots$

$$\tau_i = c t_i / R, \quad \xi = x / R$$

円筒殻理論では集中荷重のもとでの荷重点における応力は発散するため、荷重点では実験結果との比較を行うことができない。そこで、荷重点を除いた2点すなわち位置($x=0, \theta=\frac{\pi}{2}$)および($x=\frac{l}{2}, \theta=0$)において数値計算を行い、先の実験結果との比較を行った。なお、数値計算に際しては形状比を近似的に $l/R=0.05$, $l/R=1$ であるとし、固有値 λ_m は3.4節で求めた結果を用いた。

図7.22, 7.23, 7.24 および 7.25 は式(7.5)に基づき計算した理論結果と実験結果を比較したものである。なお、縦弾性係数 E は $2.1 \times 10^4 \text{ kgf/mm}^2$, ポアソン比 ν は0.3とした。

波形を比較してみると細部ではかなり違いが見られるが、全体として時間変動の様相はよく類似していると見る事ができると思う。特に衝撃初期においては良好な一致を示している。衝撃後時間の経過とともに波形の相違が目立ってくるのは、理論と実験の周期の相違によるものである。周期に相違があると時間の経過とともに誤差が蓄積されてくるので、実際以上に相違が誇張に見えるものである。

ところで、実験結果と理論結果の相違のもととなる原因を列挙すると次のようになる。

- (i) 理論に Donnell 型の簡単な式を用いていることと面外方向の並進慣性だけしか考慮していないこと。
- (ii) 集中荷重として数値計算を行っていることと衝撃荷重の大きさや時間変動を秤に生じたひずみ波形から近似的に決めていること。
- (iii) 実験では木材により円筒を支持したが、この影響を無視できないこと。
- (iv) 実験では種々の原因により波形が時間の経過とともに減衰すること。

これらの因子はいずれも無視し得ないものであり、実験と理論を比較する上で大きな影響をもつものと考えられる。これらの影響の存在を念頭に入れて見ると、逆に理論結果は実験結果をよく近似しているといえることができる。

長さの短い円筒に対しては Donnell 型の理論は十分な精度を
もっていることと面内慣性の影響も小さいことを考慮して簡
単な解析結果を用いた。項目 (ii) 以下の避けられない因子が
存在するならば、特に正確な理論による解析を行わなくても
よいのではないかと思ったからでもある。

列挙した因子のほとんどは衝撃後時間の経過とともに現わ
れてくる性質のものであるから、衝撃初期の実験と理論の良
好な一致は動的円筒殻理論の妥当性を示しているものと考え
ることができる。

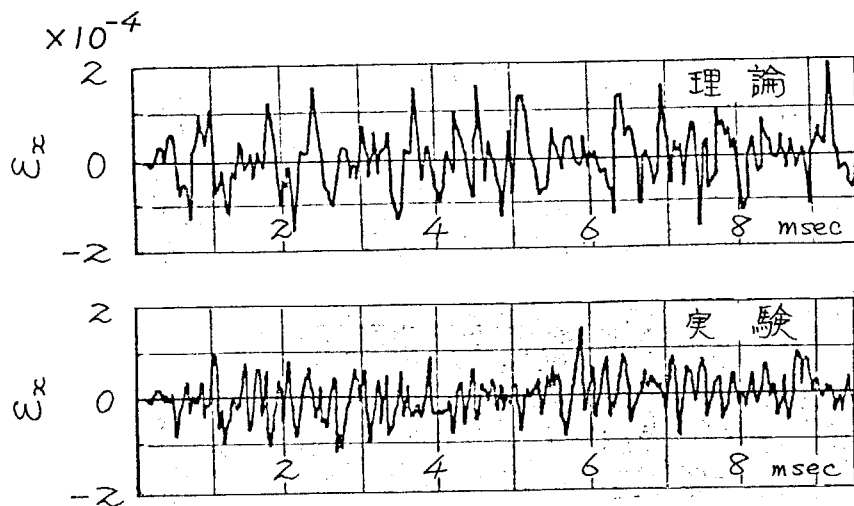


図7.22 軸方向ひずみの理論結果と実験結果の比較

($\alpha = 0$, $\theta = \pi/2$; 衝撃速度 $v = 5\text{m/sec}$)

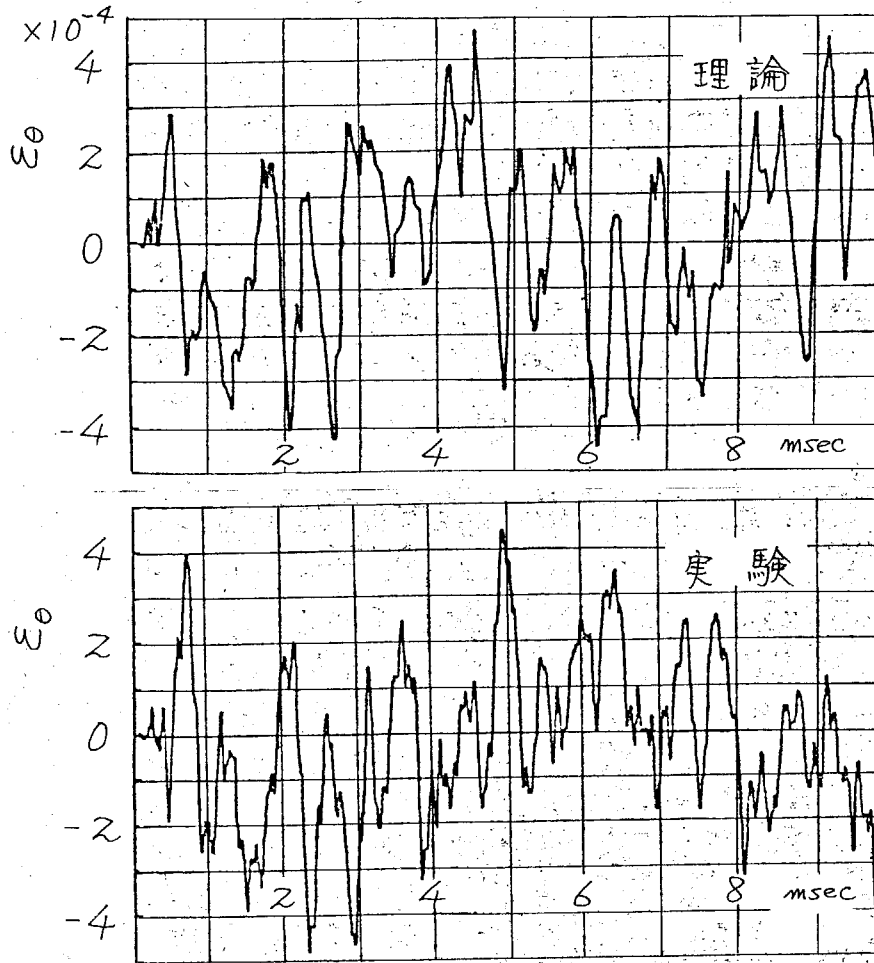


図7.23 周方向ひずみの理論結果と実験結果の比較
($x=0, \theta=\pi/2$; 衝撃速度 $v=5\text{m/sec}$)

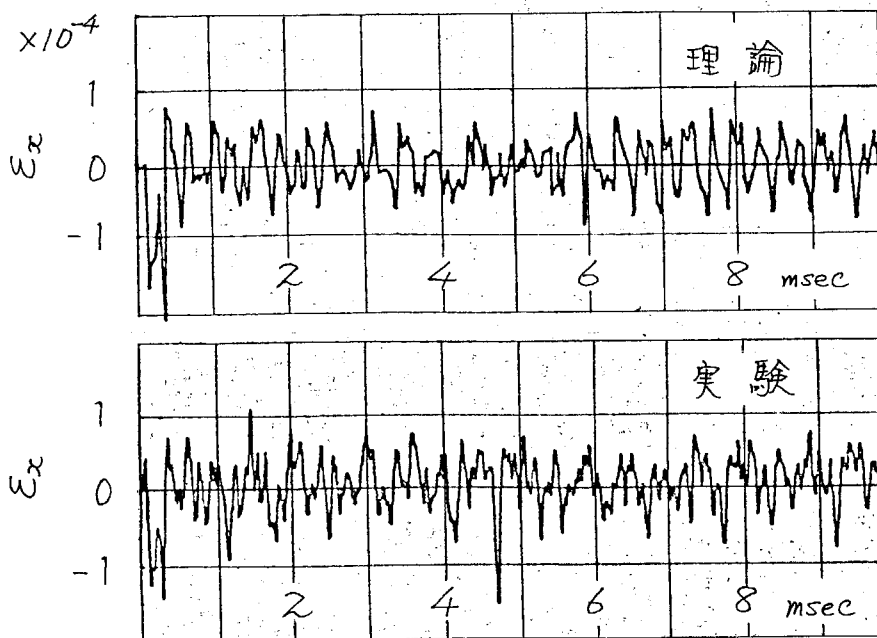


図7.24 軸方向ひずみの理論結果と実験結果の比較
($x=l/2, \theta=0$; 衝撃速度 $v=5\text{m/sec}$)

(406)

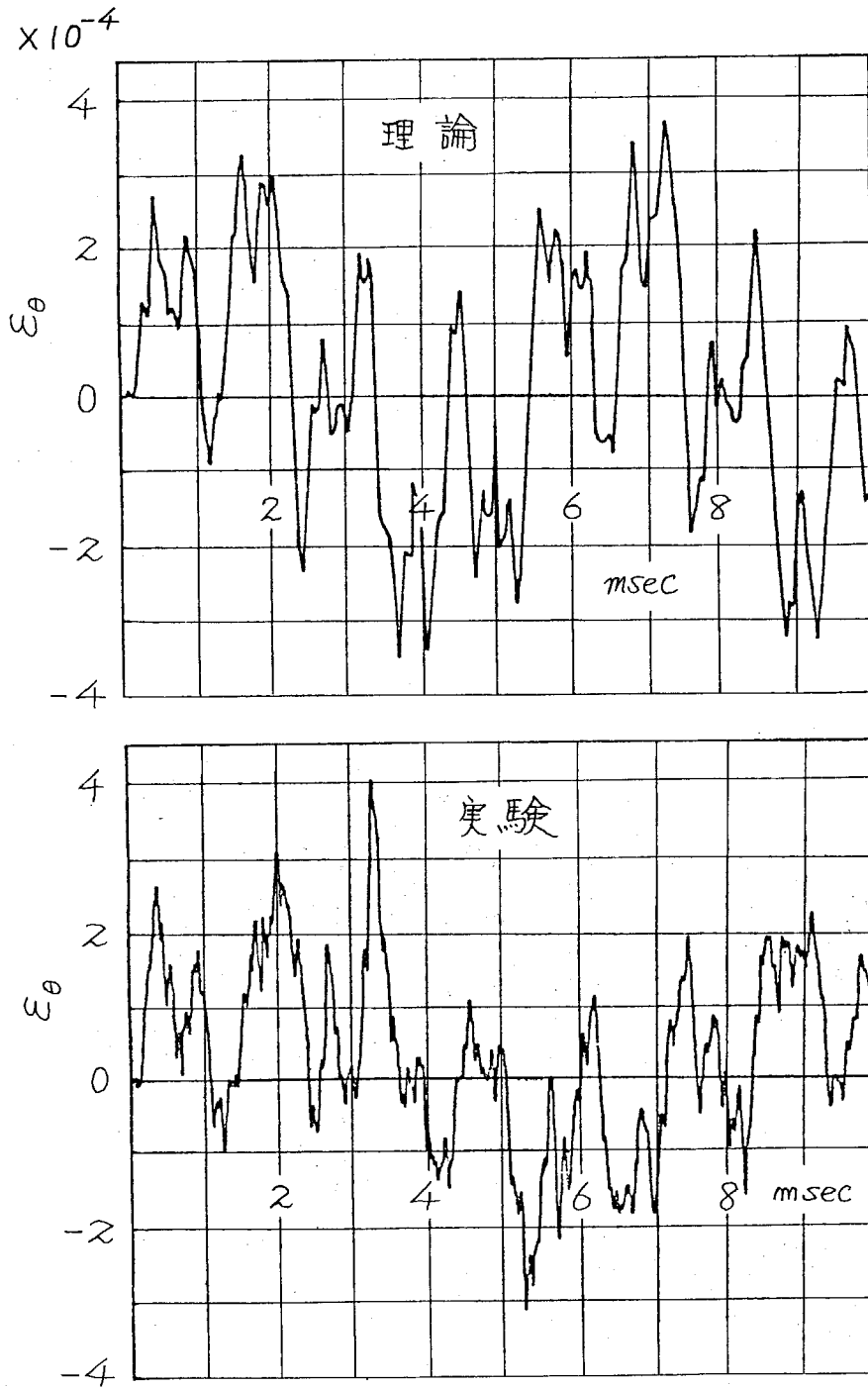


図7.25 周方向ひずみの理論結果と実験結果の比較
($x = l/2, \theta = 0$; 衝撃速度 $v = 5 \text{ m/sec}$)

7.4.4 静たわみによる理論と実験の比較

荷重点ではひずみの理論解が発散するために、実験結果との比較を行うことができなかった。そこで荷重点においては、静たわみについて理論結果と実験結果の比較を行った。

衝撃実験に用いた円筒を万能試験機にセットし、治具を介して図7.9のような対向集中荷重に近い荷重を加えた。理論における集中荷重に近づけるために、治具には先端を丸めた棒を装着し円筒との接触面積をなるべく小さくするように工夫した。荷重の大きさは試験機の荷重計により、たわみはダイヤルゲージにより測定した。図7.26がその結果であるが、Donnellの式による理論結果の方が実験結果より大きくなっている。しかし、その差はわずかであり、これも円筒殻理論の妥当性を示すものと考えることができる。

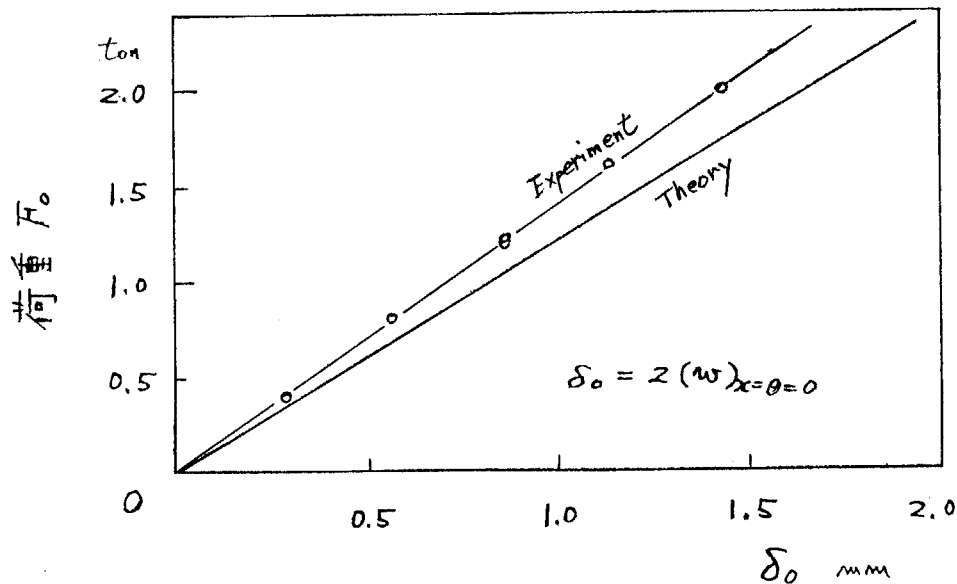


図7.26 荷重点における静たわみについての理論結果と実験結果の比較

7.5 はり状曲げ力による片持ち円筒殻の衝撃実験

7.5.1 実験方法

円筒殻の曲げに関する問題は、負荷形式によって局部的変形が支配的な場合と円筒殻の中心軸線がはり状にたわむ変形が支配的な場合とに大別される。後者の例として本節では、片持ち円筒殻の先端の自由縁に衝撃力を加える実験を行った。

図7.27に示したような鋼製円筒を用い、これを厚さ25mmの鋼板に垂直に溶接し、この鋼板を図7.28のように6本のホルトで定盤(重量約1 ton)に固定した。衝撃方法は、先端の自由縁の一点をやぐらからひもで吊るした軟鋼製丸棒により振り式に水平に打撃する方法を採用した。

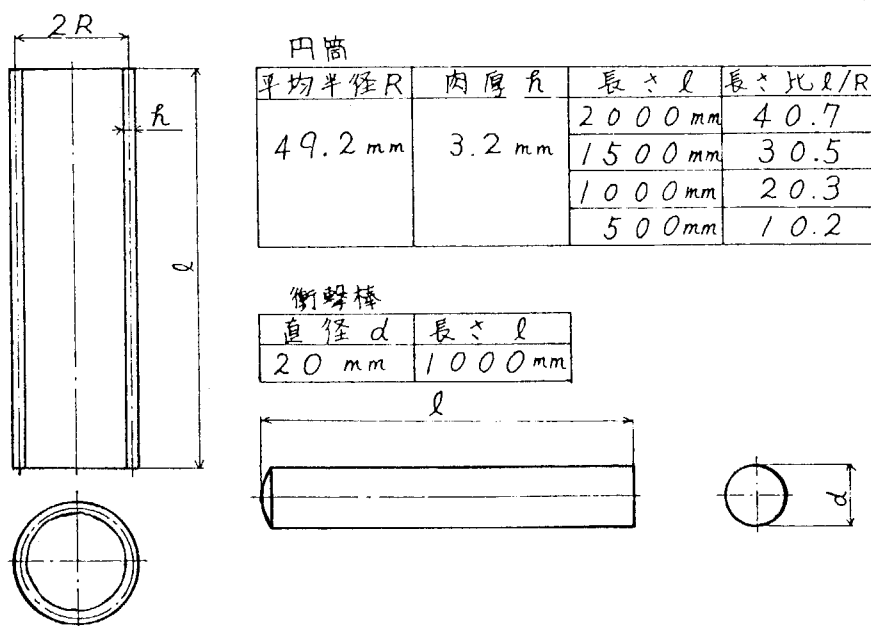


図7.27 円筒および棒の形状

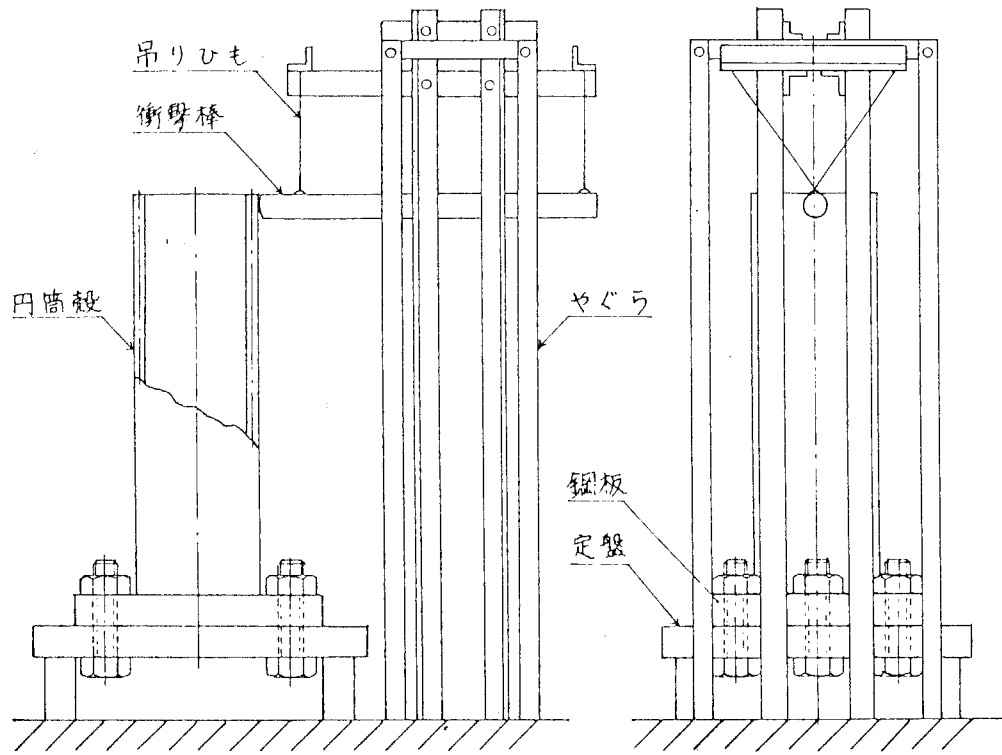
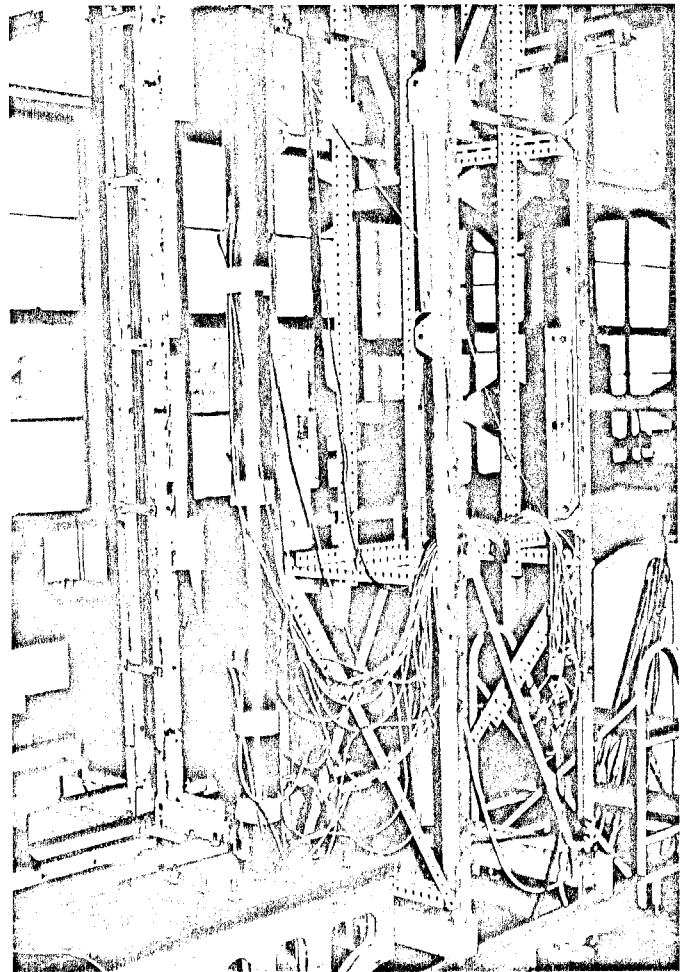


図7.28

実験装置概略図



固定部は溶接でありしかも円筒と固定板は同じ材質であるから理論における固定とは状態が随分と違うので、理論と実験結果の比較の際に問題となるが、やむを得ない処置である。

衝撃用の丸棒端面には図7.27に示したような丸みをつけて円筒との片当りを防いだ。しかし、この実験では衝撃点から離れた位置における応答を対象としているので、衝撃点の位置のずれ等に対して前節の実験ほどの注意を払う必要はなく、

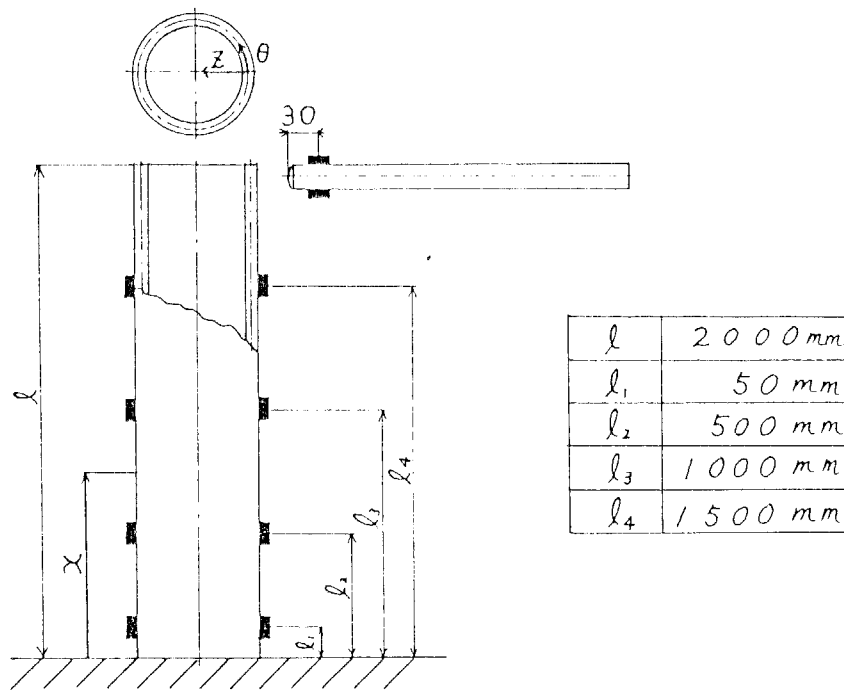


図7.29 ひずみゲージ接着位置と座標の定義

表7.2 ひずみゲージの諸元

諸元	円筒	丸棒
タイプ	FCA 2 箔ゲージ・二軸	FLA 2 箔ゲージ・単軸
ゲージ長さ	2 mm	2 mm
抵抗値	120 Ω	120 Ω
ゲージ率	2.07	2.09

再現性も良好であった。

円筒には図7.29のように衝撃点を通る母線上およびこれと円筒中心に関して対称な母線上に沿った固定部からの距離が異なる4点における左右対称となる合計8ヶ所に2軸直交型の電気抵抗線ひずみゲージを接着し、円筒外面における軸方向と周方向ひずみが測定できるようにした。これら左右対称な位置におけるひずみゲージの出力波形に正負逆の対称性があれば、円筒のその位置における変形がはり状の曲げ状態であると推定することができ、第4章における理論解析結果との比較が可能となる。衝撃方法が円筒先端の一点を打撃する方法であるから、先端から離れて固定部に近くなるほどこの対称性が良好に現われるものと思われる。この対称性があればひずみの周方向に沿っての分布形は $\cos \theta$ 状になっているものと考えられるので、 $\theta = 0$ および π 以外の母線上においては測定を行わなかった。

丸棒には衝突による反力すなわち衝撃力を測定するために衝突端より30mmの位置に単軸のひずみゲージを中心軸に関して対象となるように2枚接着し、曲げひずみ除去の目的によりこれらを直列に接続して実験に供した。丸棒中の応力波の伝ば状態を一次元と仮定してひずみ波形から衝撃力の時間変動を求め、これから実験状態に対応したひずみ波形の理論解を求め実験結果との比較を行うこととした。

実験は先ず円筒の長さを $2m$ として行い、次に先端から順次 $0.5m$ ずつ切断することにより円筒の長さを短くしてその都度同じ実験を行った。この処置により4種類の長さに対する実験ができ、最も短い状態では円筒の長さが $0.5m$ となっ

た。本実験で使用したひずみゲージの諸元は表7.2のとおりである。

7.5.2 実験結果

測定システム(図7.4)のうち主として①→②→③→④→⑤の部分を用いて実験を行った。衝撃丸棒ならびに円筒に生ずるひずみ波形は衝撃速度に比例することが確認されたので、落下高さが20cmの場合の測定結果についてだけ示した。測定位置は図7.29に示すとおり l_1, l_2, l_3, l_4 および θ をもって表すことにする。

図7.30は丸棒に生じたひずみの時間変動を波形記憶装置に入力し、ペンレコーダにより記録し、円筒の長さの影響を調べたものである。円筒の長さが1m~2mの場合は、波形にほとんど差がなく、ひずみの生じている時間が約1.6msecと前節の実験に比べて著しく長い。円筒が最も短い0.5mの場合には2個の山が重なり合ったひずみ波形となり、ひずみの持続時間はさらに2倍近く長くなっている。これは、円筒の衝撃点における断面変形を伴う振動と円筒全体のはり状変形による振動とにより、円筒と棒が複雑に衝突を繰り返していることによるものと考えられる。断面変形による振動周期は円筒の長さにほとんど関係なく一定であるが、はり状変形による振動は円筒が短くなるほど短くなる。したがって、円筒が長い場合のひずみの持続は断面変形による影響であり、円筒が短い場合は断面変形とはり状変形の双方による影響であると考えられる。

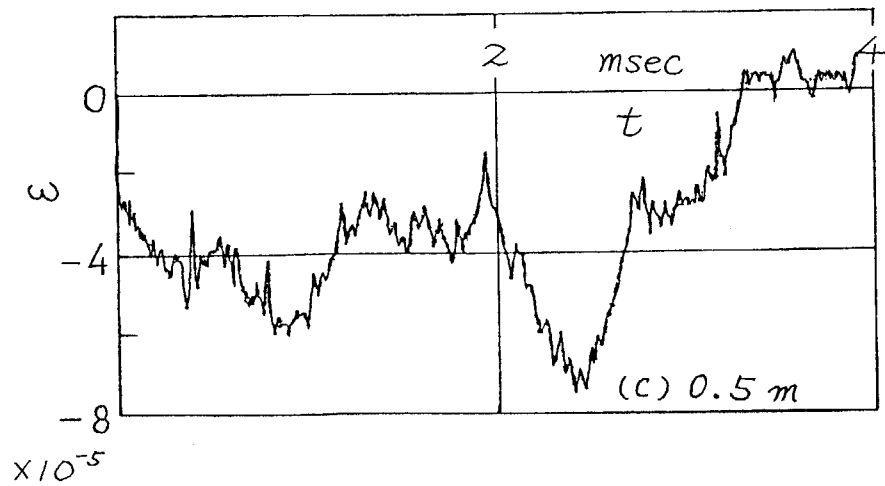
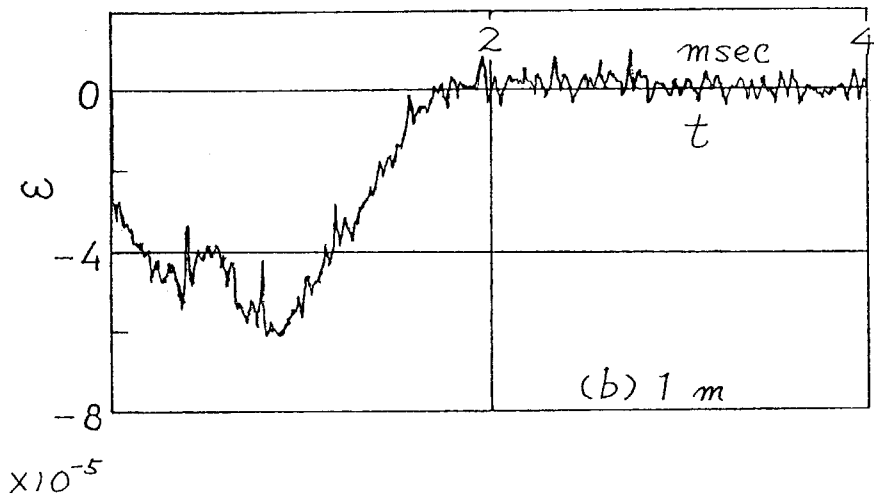
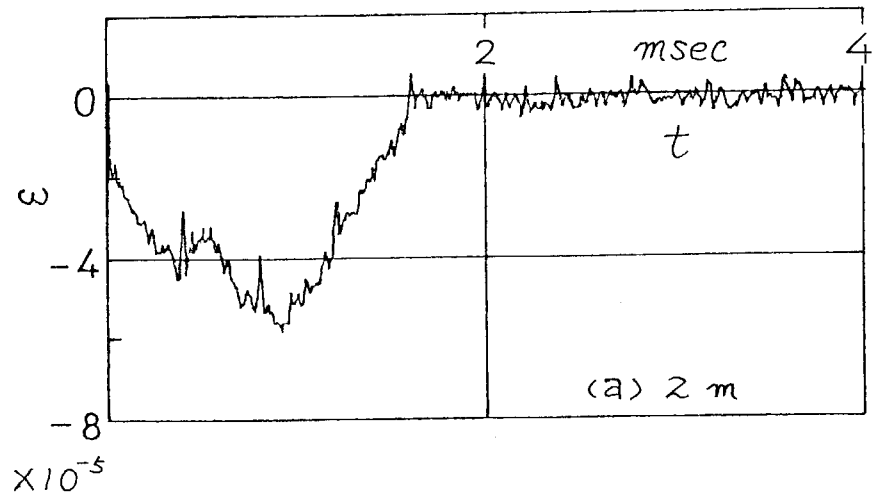


図7.30 棒に生じたひずみ波形と円筒の長さの関係

(414)

なぜならば、はり状変形モードの固有周期ははり理論によれば円筒の長さが 0.5m のときは約 2.5msec 、 1m のときは約 10msec 、 2m のときは約 40msec であって、 0.5m の場合だけしかはり状変形振動の影響は図7.30の時間領域に現われないと考えられるからである。

図7.31 および図7.32の(a)と(d)は、長さ 2m の円筒の固定部から 1.5m ($x=l_4$) および 0.05m ($x=l_1$) の位置における軸方向ひずみの時間変動である。図7.31は $\theta = \pi$ の側であり、

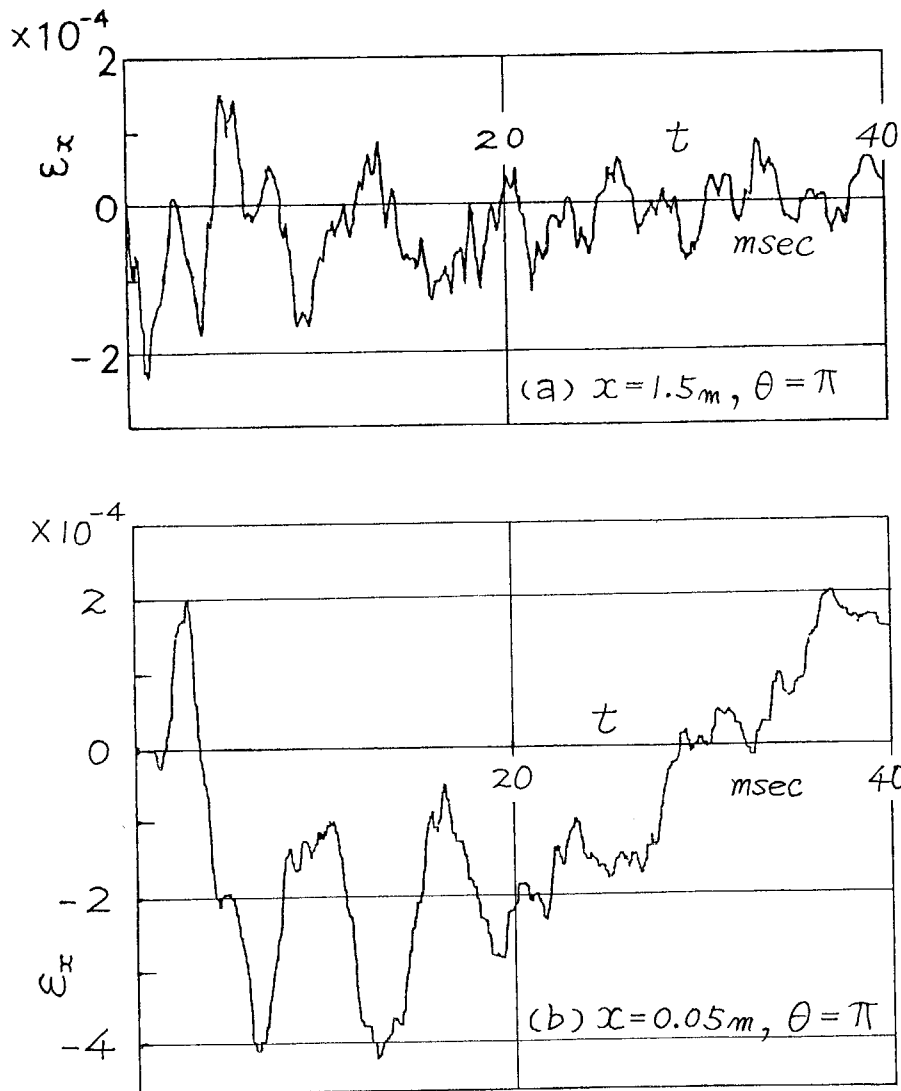


図7.31 円筒に生ずる軸方向ひずみの時間変動と位置の関係
($l=2\text{m}$, $\theta=\pi$ の母線上)

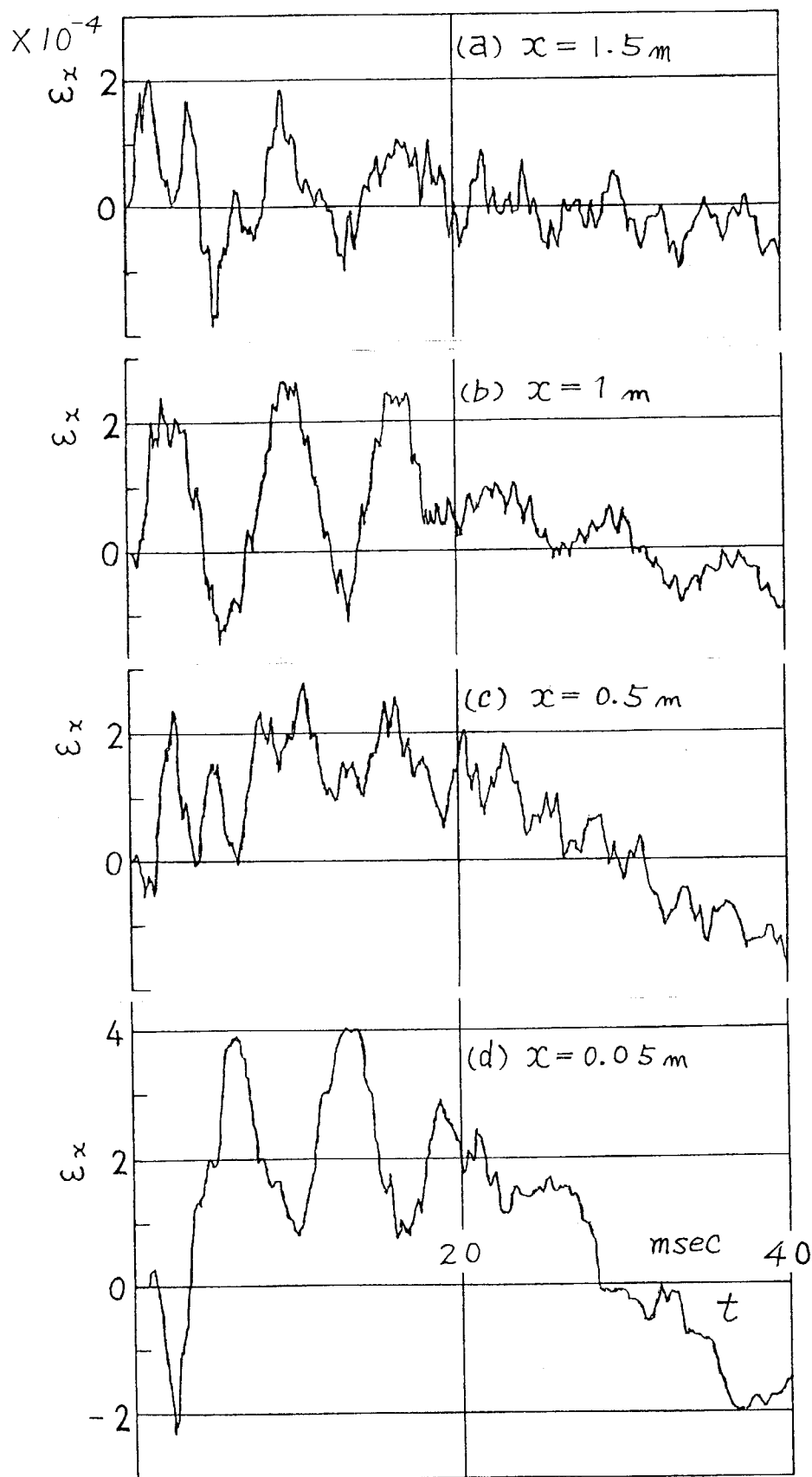


図7.32 円筒に生ずる軸方向ひずみの時間変動と位置の関係
($l = 2\text{ m}$, $\theta = 0$ の母線上の分布)

(416)

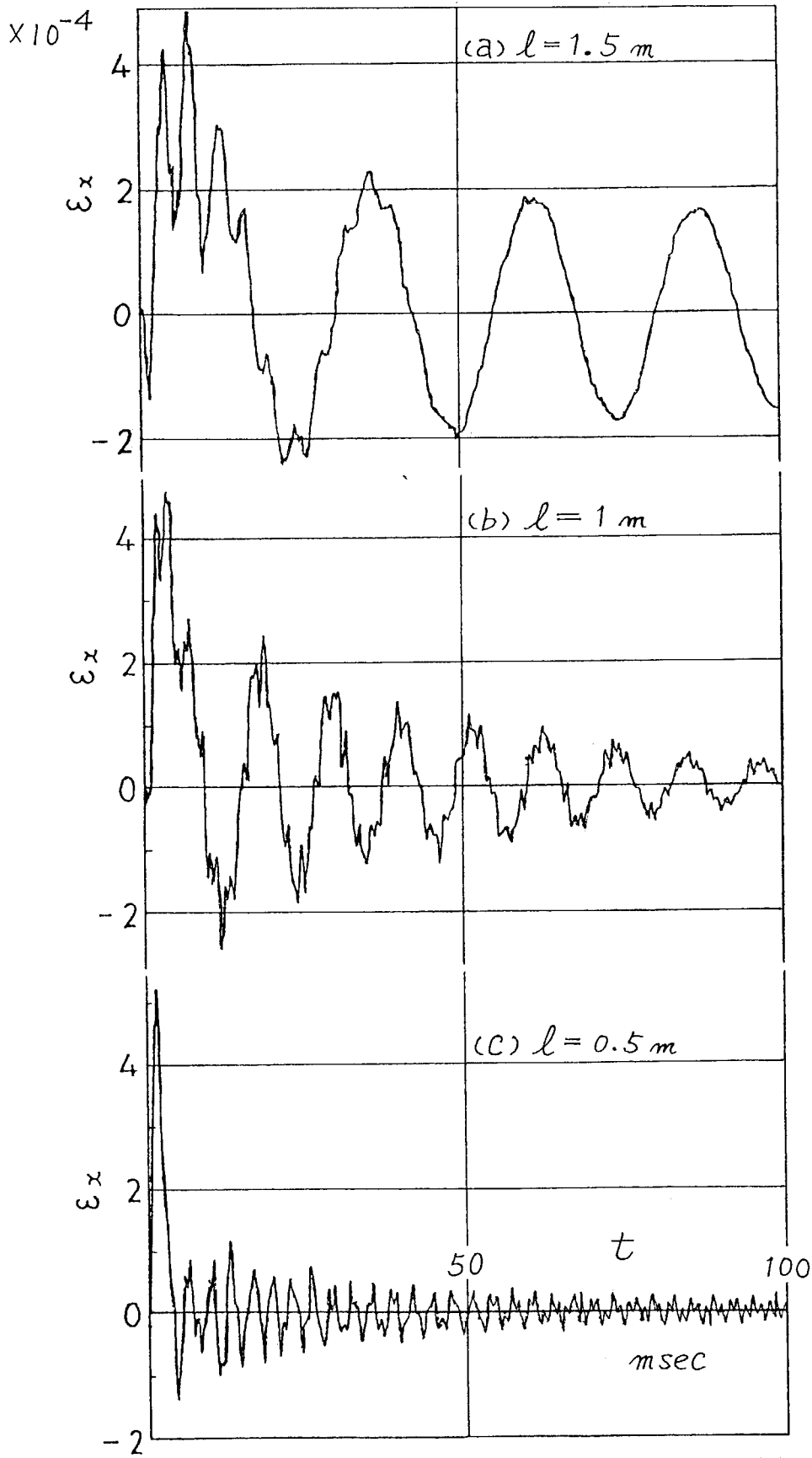


図7.33 円筒の固定部に生ずる軸方向ひずみの時間変動と円筒の長さとの関係 ($x = 0.05$ m, $\theta = 0$)

図7.32は $\theta = 0$ の側であるから、対称性の有無を調べることができる。負荷方法から考えて衝撃点近傍では、はり状変形の状態になっていないはずであり、したがって衝撃点に最も近い $x = l_4$ の位置における結果が最も対称性のない波形になると考えられる。ところが、図7.31および7.32からもわかるようにこの位置においてもほぼ正負逆の対称性が得られているので、測定点ではすべてはり状曲げ状態になっているものと思われる。そこで、以下の実験結果は $\theta = 0$ の側における結果だけを示すことにした。

図7.32は $2m$ の円筒に生ずる軸方向ひずみの時間変動と測定位置の関係を示したものである。この片持ち円筒の最低次固有周期は 42msec であるから、ほぼ最初の一周期の波形である。2周期目に入ると減衰のため振幅が小さくなるので、最大ひずみの生ずる時間はこの最初の一周期の間に限られる。

固定部に最も近い $x = l_1$ の位置における引張りひずみが最も大きい。静的問題とは異なり固定部から離れてもひずみの大きさはあまり減少しない。

次に固定部の $x = l_1$ における軸方向ひずみ波形と円筒の長さとの関係を調べたのが、図7.33である。時間範囲は図7.32の場合の2.5倍の 100msec とした。円筒が短くなるほど固有周期が短くなるので、同一の時間範囲に多くの周期が含まれている。この例では静的問題とは逆に、円筒が短いほど最大引張りひずみの値が大きくなっているのが注目される。

図7.34は図7.32に対応した周方向ひずみの時間変動である。

全体として高次の振動モードが強く現われており、軸方向ひずみに対して引張りと圧縮が逆転している。振幅の大きさ

は軸方向ひずみの30%程度と小さく、ポアソン比 ν を0.3とするとこれに乗じた値にきわめて近い。これらのことから円筒が全体としてはり状曲げ変形状態のもとにあると断言して差し支えないと思われる。

図7.35は各測定点における軸方向ひずみの最大値(絶対値)と円筒の長さとの関係をもとめたものである。各点における最大ひずみの値は、円筒が短くなっても決して小さくならないことをよく示している。この傾向は衝撃体(この場合では長さ1mの棒)の形状によって多少影響をうけるであろうが、大きな違いはないと思う。

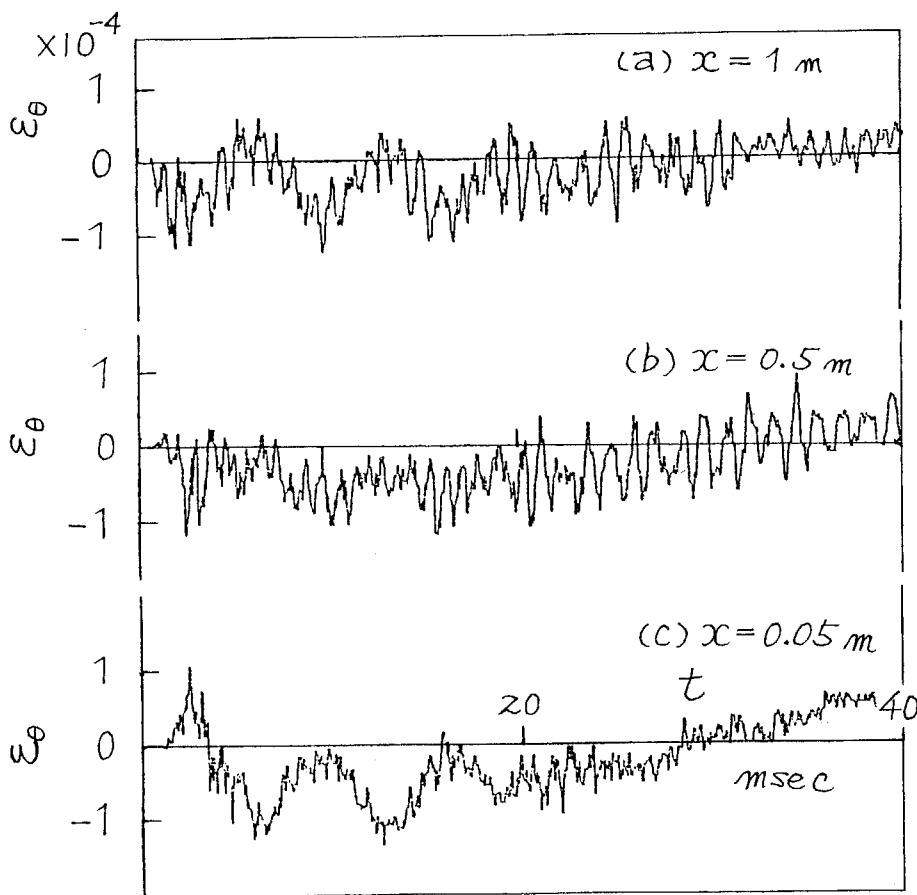


図7.34 円筒に生ずる周方向ひずみの時間変動と位置の関係
($l=2m$, $\theta=0$ の母線上)

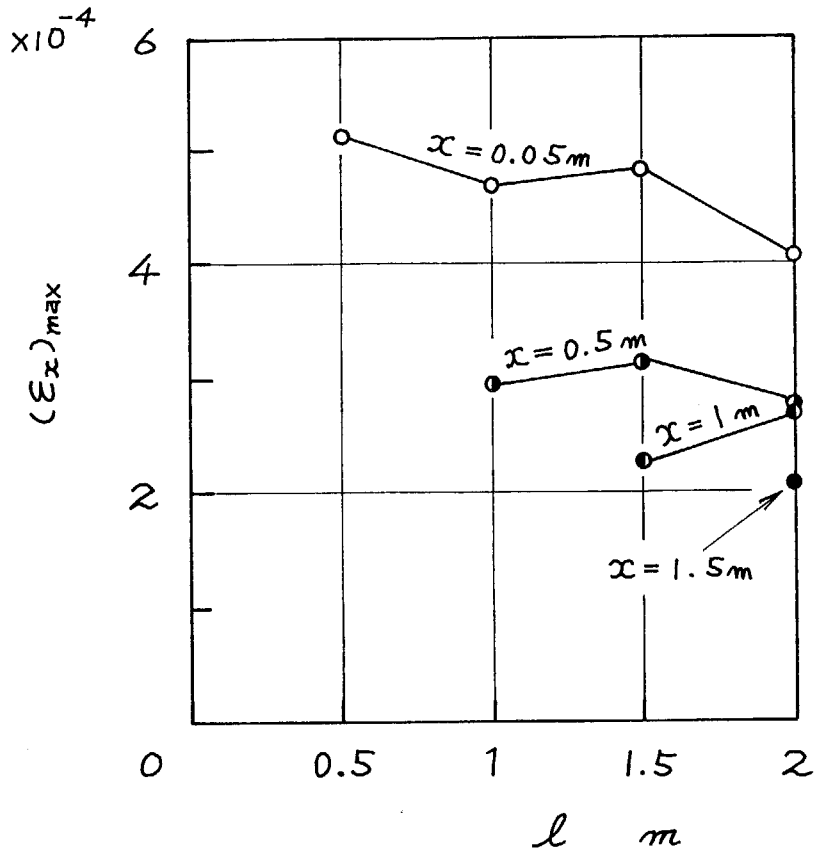


図7.35 軸方向ひずみの最大値と円筒の長さとの関係

7.5.3 理論結果との比較

棒に生じたひずみ波形から、縦弾性係数と横断面積を用いて円筒に作用した衝撃荷重を仮定し理論解析結果との比較を行った。たとえば円筒の長さが $l = 1.5$ m の場合には、棒のひずみ波形を図7.36のように半正弦波パルスで近似し、Duhamelの積分が容易に行えるようにした。その際、まずパルスの幅(た)を定め、次に面積するわち力積が同じになるように高さを決定した。この結果、円筒の長さによっては実験の波形と近似波形との間にかなり相違の見られる場合があるが、衝撃点から離れた位置での応答について比較するので、あまり問

題にはならないと考えられる。

理論には、並進慣性と回転慣性をともに考慮した Flugge の円筒殻理論ならびに回転慣性とせん断変形を考慮した Timoshenko のはり理論の二種類を用いて、円筒殻理論の適用性だけでなく円筒のはり状曲げ衝撃問題へはり理論が適用できるかどうかについても調べた。

(A) Flugge の円筒殻理論による解析

実験における荷重状態は、円筒の先端において図 7.37 (a) のような集中力である。しかし、(a) の荷重状態で円筒殻理論により計算を行うと非常に多くの計算量を必要とするばかりでなく、荷重点とその近傍を除けば局部変形の影響は非常に

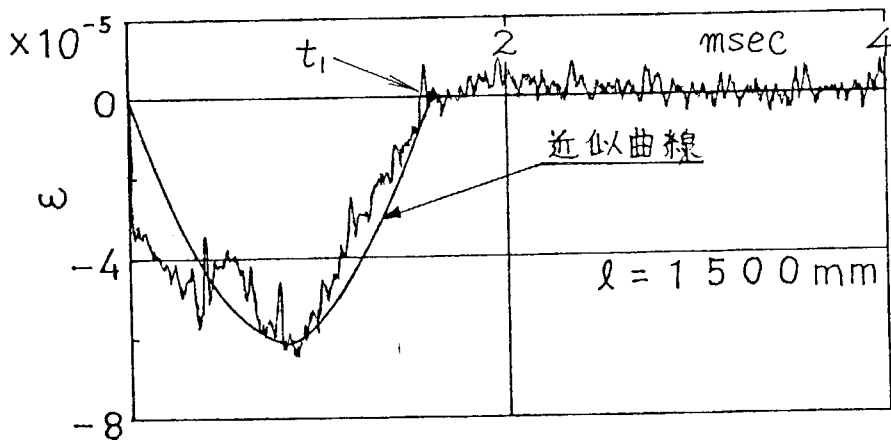


図 7.36 棒に生じたひずみ波形の半正弦波近似

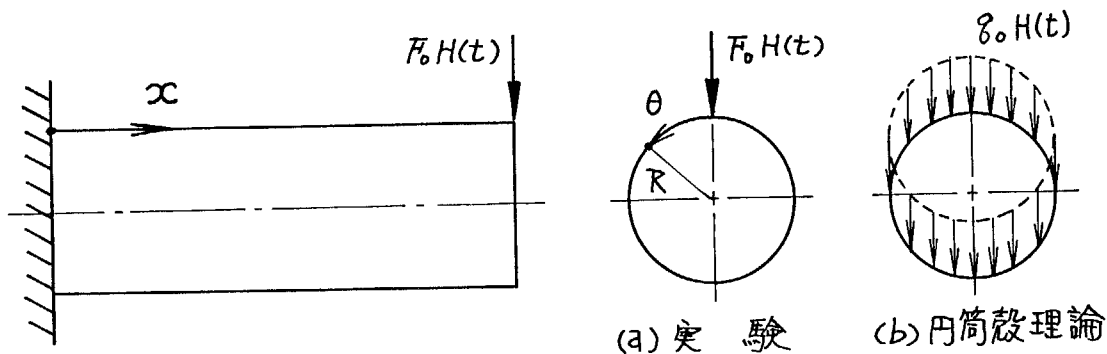


図 7.37 円筒の先端に作用する荷重の置き換え

小さくなると考えられるので, (b) の荷重状態で置き換えることにした。この置き換えにより円筒殻は全長にわたって純粋なはり状曲げ変形状態になり, 計算量は (a) の状態の数 10 分の 1 ですむことになる。 (b) の荷重状態に対する解析は 4.3 節に示したとおりである。並進慣性と回転慣性をともに考慮した Flügge の理論による解として式 (4.31) を用い, Duhamel の積分を行った結果, 次の式が得られた。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \frac{R^2 F_0}{2\pi D} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sum_{\lambda=1}^g |B_{\lambda}^*|} \sum_{j=1}^g \begin{bmatrix} f_j \\ g_j \\ 1 \end{bmatrix} (B_{\gamma_j} + \frac{\kappa^2}{P_1} B_{\delta_j}) e^{\alpha_j \xi} \right\} \frac{F_m(\tau)}{\lambda_m^2} \quad \lambda=i, m$$

$$\text{ただし, } \delta_1 = \delta_2 = \delta_0, \quad 2\pi R \delta_0 = F_0 \quad (7.7)$$

なお, 円筒殻に生ずるひずみ成分 ($\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$) は次式により求められる。

$$\varepsilon_x = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(u - \frac{x}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \quad (7.8a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ v - \frac{x}{R} \left(v + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right\} \quad (7.8b)$$

時間の関数 $F_m(\tau)$ は 図 7.36 の半正弦波状パルスに対して次のようになる。

(i) $0 \leq \tau < \tau_1$ のとき

$$F_m(\tau) = \frac{1}{\Omega^2 - \lambda_m^2} (\Omega \lambda_m \sin \lambda_m \tau - \Omega^2 \sin \Omega \tau) + \sin \Omega \tau \quad (7.9a)$$

(ii) $\tau_1 \leq \tau$ のとき

$$F_m(\tau) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \lambda_m^2} \{ \sin(\tau - \tau_1) \lambda_m + \sin \lambda_m \tau \} \quad (7.9b)$$

ここで, $\Omega = \pi R / c \tau_1$, $\tau_1 = c \tau_1 / R$

(422)

(B) Timoshenko のはり理論による解析

回転慣性とせん断変形を考慮したはりの横振動方程式は

$$\ell GA_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \rho A_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P = 0 \quad (7.10a)$$

$$\ell GA_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) + EI_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \rho I_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (7.10b)$$

である。ここで、 A_0 は横断面積、 I_0 は断面二次モーメント、 ℓ はせん断係数であり、薄肉円筒では $A_0 = 2\pi R\ell$ 、 $I_0 = \pi R^3\ell$ 、 $\ell = 0.5$ である。そのほか、 w はたわみ、 ψ は断面の回転角、 P は外力であり、曲げモーメント M とせん断力 Q は

$$M = -EI_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7.11a)$$

$$Q = \ell GA_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \quad (7.11b)$$

により求められる。

先端に荷重 F_0 がステップ関数状に作用するものとするとき境界条件は次のようになる。

(i) $x = 0$ において

$$w = \psi = 0 \quad (7.12a)$$

(ii) $x = l$ において

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad Q_x = F_0 H(t) \quad (7.12b)$$

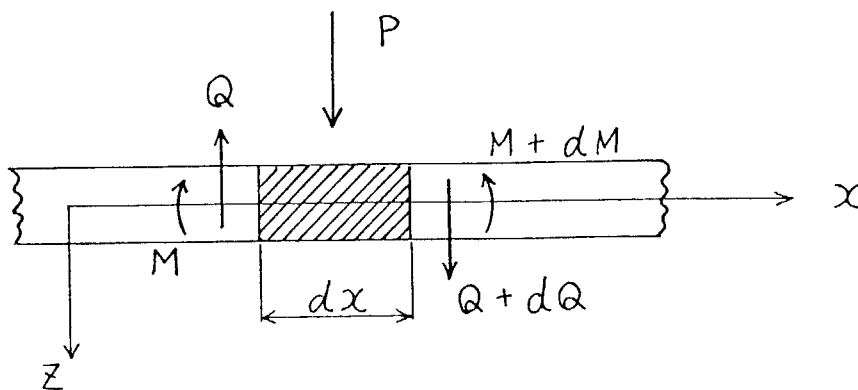


図7.38 はりの微小要素

ラプラス変換法を用いて、 $P=0$ とした式(7.10)を解けば Duhamel の積分により、円筒殻理論における式(7.7)に相当する解が得られる。なお、ひずみは次式によって求められる。

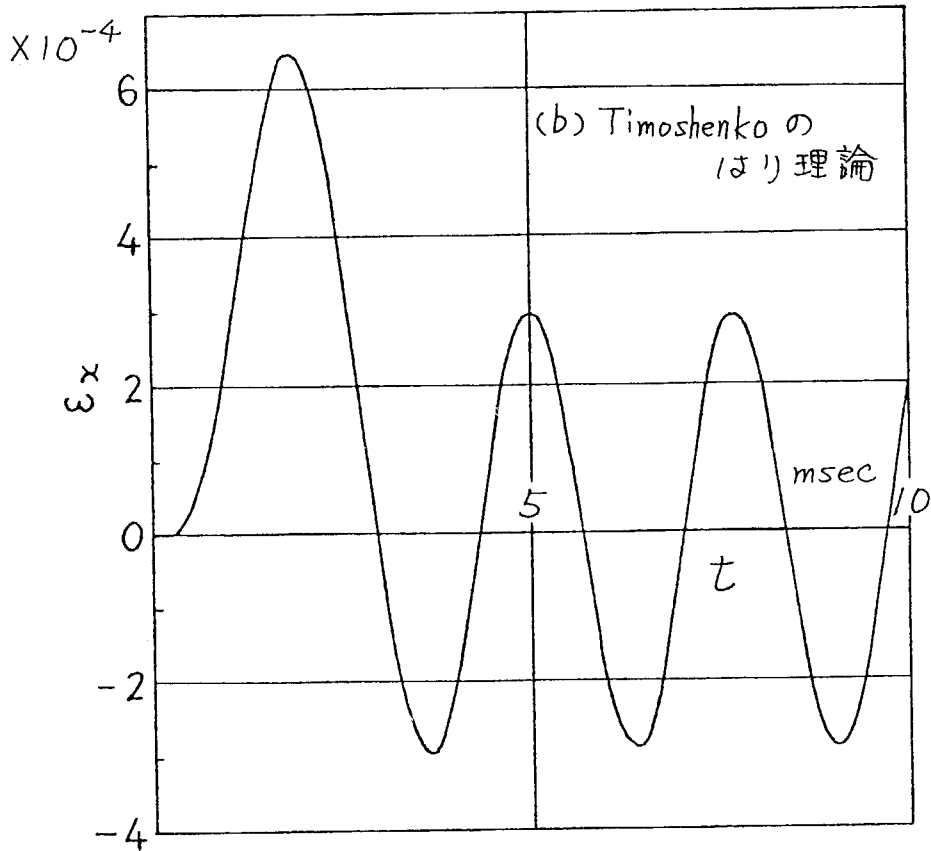
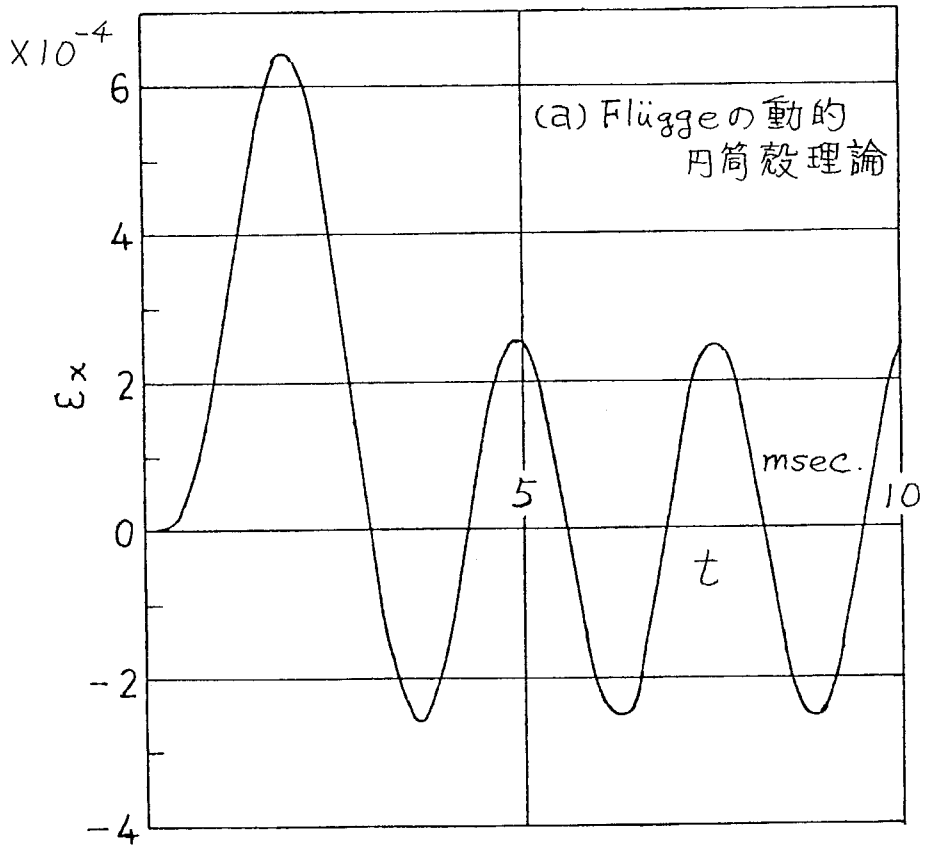
$$\varepsilon = \frac{R-z}{E} \frac{M}{I_0} \quad (7.13)$$

数値計算では、ポアソン比 $\nu=0.3$, $E=2.1 \times 10^4 \text{ kgf/mm}^2$, $G=E/2(1+\nu)$ を用いた。

まず第一次の固有振動周期について各理論による結果と実験結果を比較した。その結果が表7.3である。この程度の形状の円筒では、低次の固有振動周期にはほとんど理論間の差は認められないことを示している。一方、実験における固有周期は理論結果よりも長く、円筒が短くなるほどその差が大きくなっている。これは、長さが短くなるにつれて片持ち円筒としては剛性が高くなり、鋼板や定盤との連成振動が起りやすくなってくるのが原因と考えられる。つまり、円筒が短くなると理論における固定とは状況が著しく異なり、固定部が変形しやすくなることにより固有振動周期が長くなっていくものと考えられる。したがって、円筒に生ずるひずみ波形状

表7.3 固有振動数の比較 (第1次モードの周期, msec)

円筒の長さ l	2 m	1.5 m	1 m	0.5 m
はり理論 (Bernoulli-Euler)	40.3	22.7	10.1	2.51
はり理論 (Timoshenko)	40.5	22.8	10.3	2.69
殻理論 (Flügge)	41.1	22.7	10.0	2.60
実験値	42	25	11.3	3.17



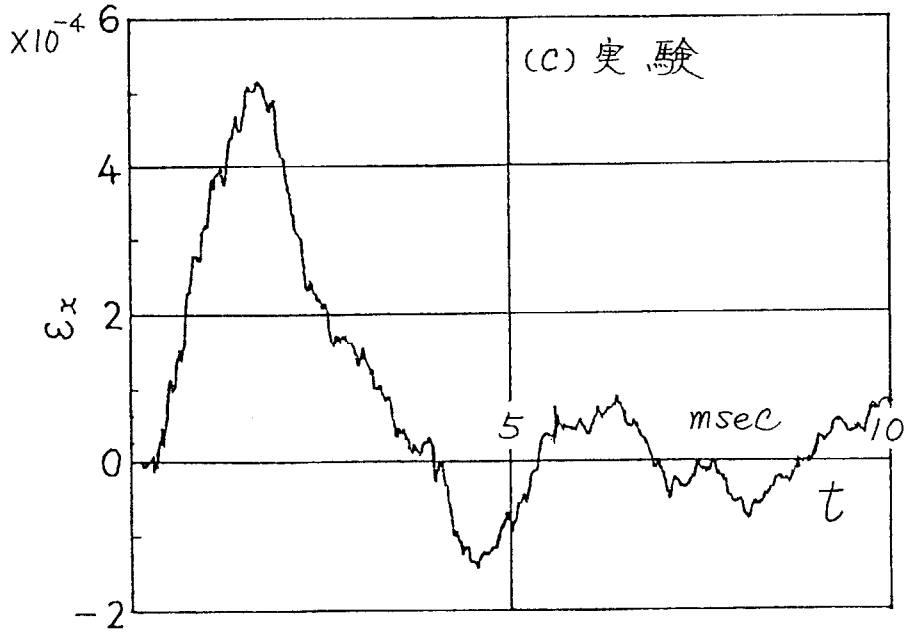


図7.39 円筒に生ずる軸方向ひずみ波形の理論と実験結果の比較 ($l=0.5m, x=0.05m, \theta=0$)

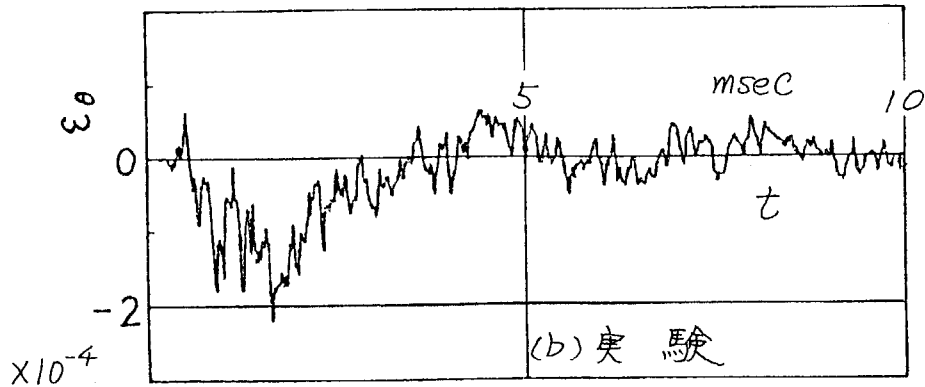
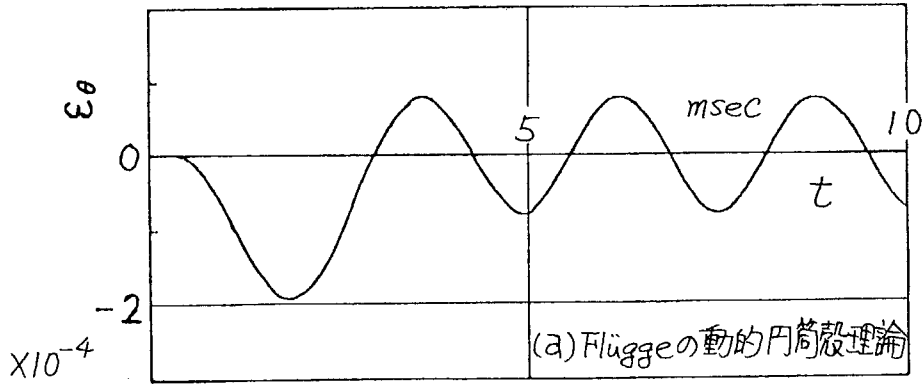


図7.40 円筒に生ずる周方向ひずみ波形の理論と実験結果の比較 ($l=0.5m, x=0.05m, \theta=0$)

にも理論と実験の差が大きく現われるものと予測される。

図7.39は長さか $0.5m$ の円筒固定部の測定点 $x=l_1$ における軸方向ひずみ波形について、円筒殻理論、はり理論、実験の三者による結果を比較したものである。図7.40は同じ測定点における周方向ひずみ波形について、円筒殻理論と実験の両者による結果を比較したものである。理論間には差はほとんどないが、実験との間には差が認められる。軸方向ひずみでは、衝撃初期の第1周期における振幅は理論の方が約20%程度大きく、周期は実験の方が同じく約20%程度長くなっている。一方、周方向ひずみでは、衝撃初期の振幅の大きさが理論と実験の両者でほぼ一致している。はり理論では周方向ひずみを解析することはできないが、軸方向ひずみについては、本実験の範囲では円筒殻理論による結果をよく近似することが明らかになった。

図7.41および7.42は、固定部の測定点 $x=l_1$ における軸方向ひずみ波形について、円筒の長さとの関係を実験とはり理論の両結果の相関において示したものである。同じ固定部の波形でも円筒が長くなると、実験と理論がきわめてよく一致するようになることがよくわかる。

図7.43は、 $1.5m$ の円筒の固定部から離れた位置における軸方向ひずみについて、実験と理論の両結果を比較したものである。やはり、固定部と同様に両結果がよく一致することを示している。

以上のような理論と実験の両結果の比較により、得られた所感を最後に述べておくことにする。

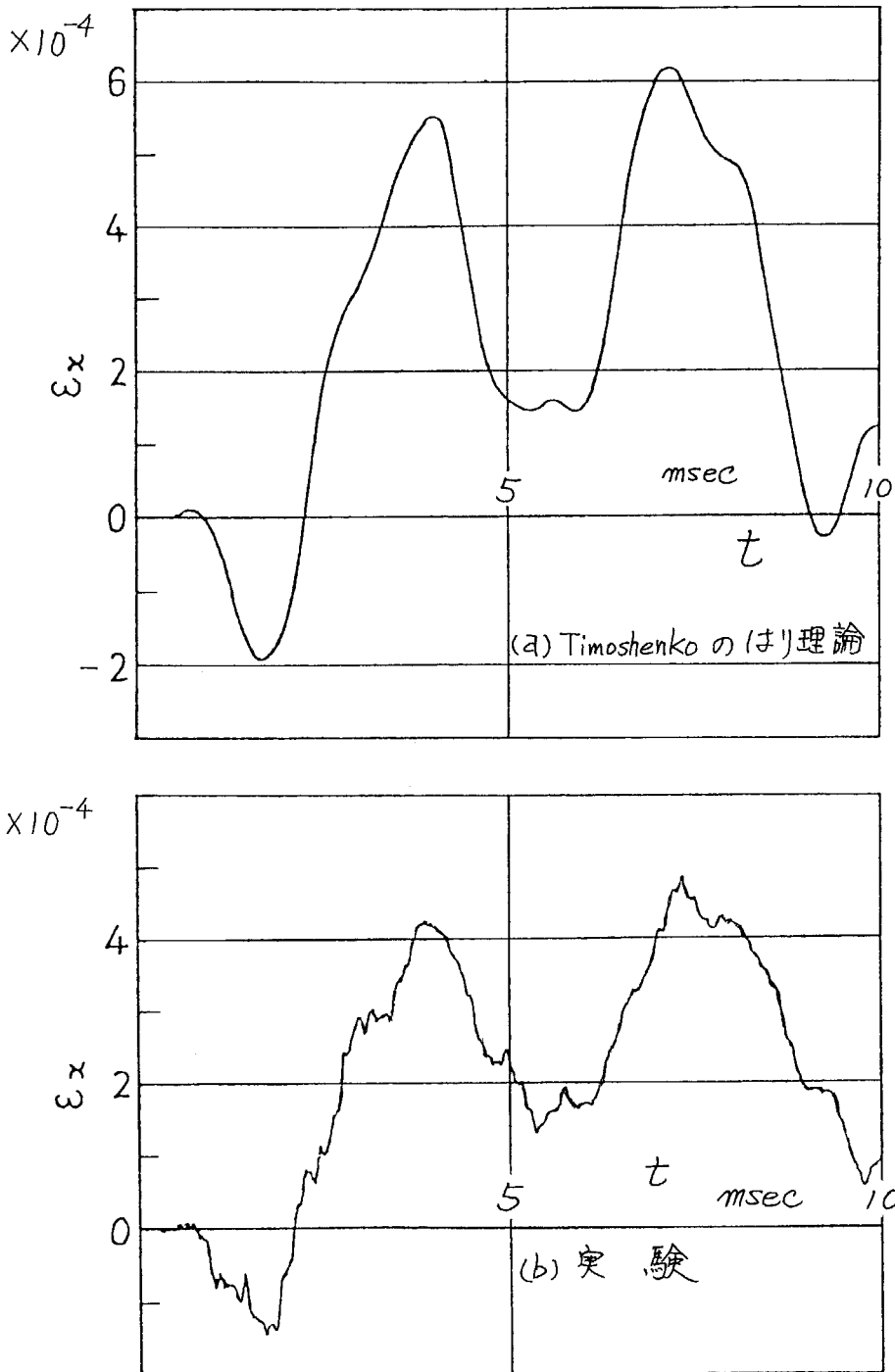


図7.41 円筒に生ずる軸方向ひずみ波形の理論と実験結果の比較 ($l = 1.5\text{ m}$, $x = 0.05\text{ m}$, $\theta = 0$)

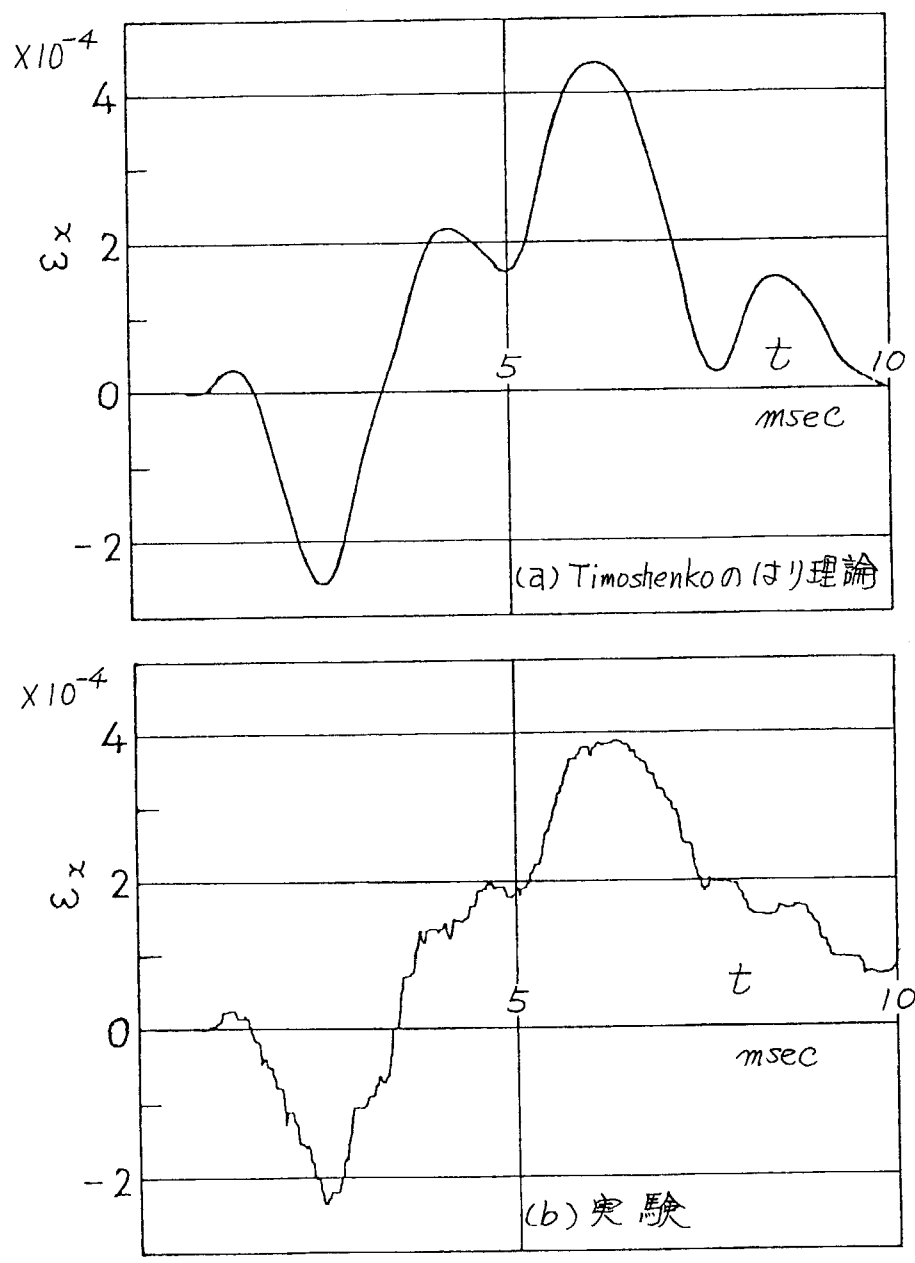


図7.42 円筒に生ずる軸方向ひずみ波形の理論と実験結果の比較 ($l=2m, x=0.05m, \theta=0$)

円筒のはり状曲げ衝撃問題に対して動的円筒殻理論が十分に適用できることが明らかになった。反面、比較的長い円筒に対して実験を行ったためと局部応力の生ずる固定部そのものではひずみの測定を行うことができないこともあって、実験を行った範囲でははり理論によっても殻理論による結果を十分に近似することができた。その意味では、殻理論固有の特性にまで立ち入って調べることができなかった。しかし現状では、これはやむを得ないので本節は目的を十分に果していると思う。

実験結果には、理論結果に見られない高次の振動モードが

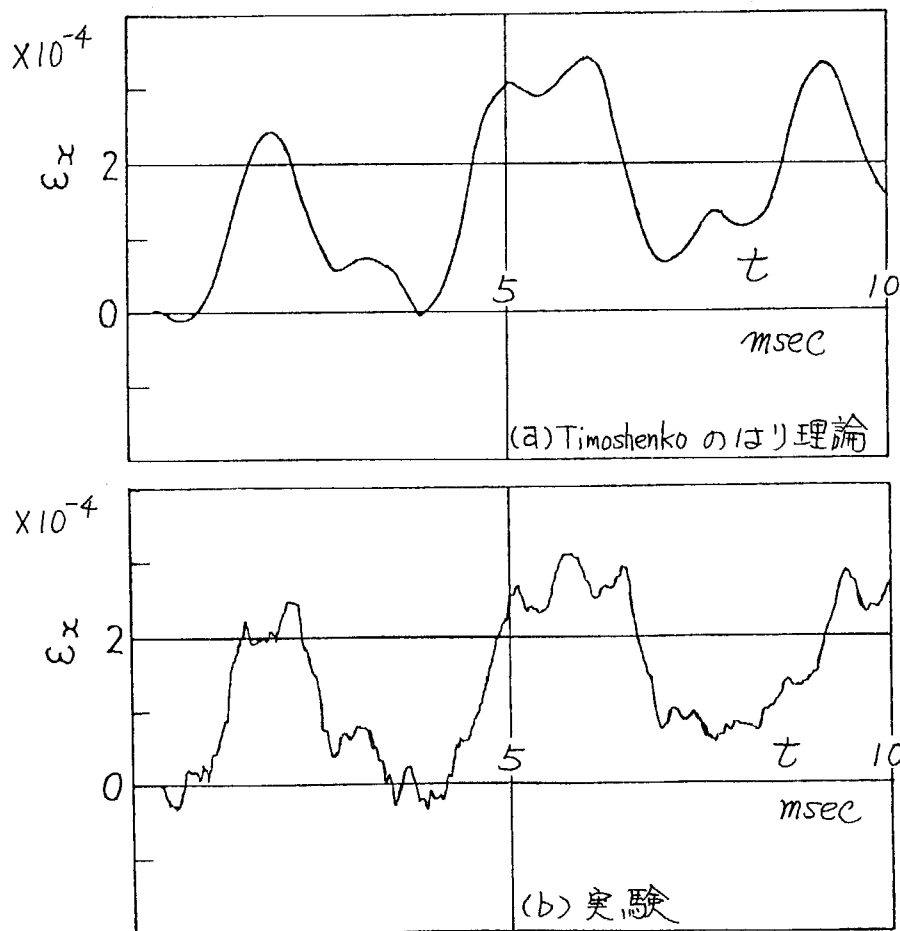


図7.43 円筒に生ずる軸方向ひずみ波形の理論と実験結果の比較 ($l=1.5m$, $x=0.5m$, $\theta=0$)

認められるが、これは図7.37のような荷重の置き換えをしたのが原因であると考えられる。断面変形の振動まで考慮してやれば、すなわち図7.37(a)の状態のままに忠実に計算を行ってやれば、殻理論による結果には高次振動モードの影響が現われてくるはずである。なお、この影響は円筒が短くなるほどあるいは軸方向よりも周方向ひずみ波形により強く現われるので、これを考慮してやればより実験と理論がよく一致するものと思われる。

時間の経過とともに理論と実験の両結果の波形に相違が目立ってくるのは実験結果における減衰の影響も大きいから、衝撃丸棒と円筒との再衝突による影響も無視できない。ここでは図の提示を省略したが、この再衝突を考慮して応答を計算すると、波形がより実験結果に近くなることを確認できた。

本実験で行ったように円筒が比較的剛性の高い部材に溶接されている場合には、この部材と円筒が同一の材質であっても溶接部分が固定であるとして解析を行っても大きな誤りはなく、応力の大きさは殻理論による計算結果の方が実際よりもやや大きくなることが明らかにされた。

本節では、円筒のはり状曲げ衝撃問題に対して動的円筒殻理論が十分な精度をもちていることおよびはり理論が実用性をもちていることが、実験的に確認された。

7.6 水を内蔵した片持ち円筒殻の衝撃実験

7.6.1 実験方法

円筒殻はその使用目的から液体を内蔵している場合が多く見られる。そこで、前節の片持ち円筒殻の実験装置をそのまま利用して、内部に水を入れた状態で全く同じ衝撃実験を行い、水が入っていない場合との相違について調べてみた。

理論解析には、前節との関連から Timoshenko のはり理論を用いるものとし、液体については第6章の 6.4 節で提案した固定質量近似を用いることにした。円筒の内部が空の場合については、前節において Timoshenko のはり理論が実験結果をよく近似していることが明らかになったので、実験と理論の両結果を比較することにより水を固定質量で置き換える近似方法の妥当性の有無が明確になることが期待される。

前節では、円筒が短い場合において理論と実験による固有周期にやや大きな相違が見られた。この原因は、円筒と固定部の連成振動にあると推定した。この点をもう少し調べるために、円筒と固定部の材質を変えてみた。円筒の剛性を低くした方が理論における固定に近づくものと考え、円筒だけをポリメチルメタクリレート (PMMA) 樹脂に変えてみた。固定部の鋼板に同心円状の溝を掘り、この溝に PMMA 製の円筒の一端をはめ込み片持ち円筒とした。この場合も空の状態だけでなく内部に水を入れた場合の実験も行い、固有振動数について、動的円筒殻理論による結果と比較することにより第6

章における図6.3と対比しつつ液体の固定質量近似の是非について調べてみた。

7.6.2 実験結果と理論結果の比較

(A) 鋼製円筒の場合

前節との関係から Timoshenko のはり理論による解析結果と比較した。内蔵した水の流体としての性質を考慮すると、解析は非常に複雑になる。そこで、水の総質量に等しい質量が均等に固定されているはりの衝撃として問題をとらえることになる。この固定質量は、はりの変形を妨げず慣性質量として振る舞うだけとすると、基礎方程式(7.10)における荷重 P を固定質量の慣性力と等置して

$$P = -\rho_f A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (7.14)$$

と置くだけで、あとは空の場合と全く同様にして解析を行うだけでよいことになる。ここで、 ρ_f は流体の質量密度、 A は円筒の横断面積であり πR^2 である。

まず空の場合と同様に、第一次の固有振動周期について各理論による結果と実験結果を比較した。その結果が表7.4である。Bernoulli-Euler とあるのは、いわゆるせん断変形と回転慣性を無視したはりの古典理論を意味している。空の場合と同じく実験による周期の方が長くなっているが、理論結果との差は大きくなっている。しかし、固定質量近似の大胆さから考えれば、実験結果をよく近似しているとみるべきであると思う。実験結果の方が固有振動数が高いということは、水

表7.4 固有振動数の比較(水内蔵, 第1次モードの周期 msec)

円筒の長さ l	2 m	1.5 m	1 m	0.5 m
はり理論 (Bernoulli-Euler)	55.7	31.4	14.0	3.48
はり理論 (Timoshenko)	56.0	31.6	14.2	3.71
実験値	60	35	16.5	4.60

の慣性効果をもっと大きく見積らなければならないということになる。水の総質量をすべて固定質量に振り替えたので、慣性効果の評価が過大になるものと予想していただけに、これはやゝ疑問の残る点である。

次に円筒に生ずるひずみの波形について比較を行った。比較方法については、前節における空の場合と全く同様であるので、記述を省略する。図7.44および7.45は長さ l が 2 m および 1 m の円筒の固定部 $x=l_1$ における軸方向ひずみについて比較を行ったものである。水を内蔵していると固有周期は著しく長くなるが、最大ひずみの値はほとんど空の場合と変わらないのが注目される。ひずみ波形については理論結果は実験結果をよく近似しており、円筒が空の場合の差と同程度の差を示している。したがって本実験の範囲では、流体を固定質量で近似する方法は極めて簡単でありながら、衝撃応力の評価にはすぐれた方法であると結論することができる。

内部に水が入っていても最大応力の値そのものは、空の場合とほぼ同程度であるという実験事実は、固定質量近似の考え方と全く一致する。この点は第6章における数値結果の節で触れた内容とも一致している。

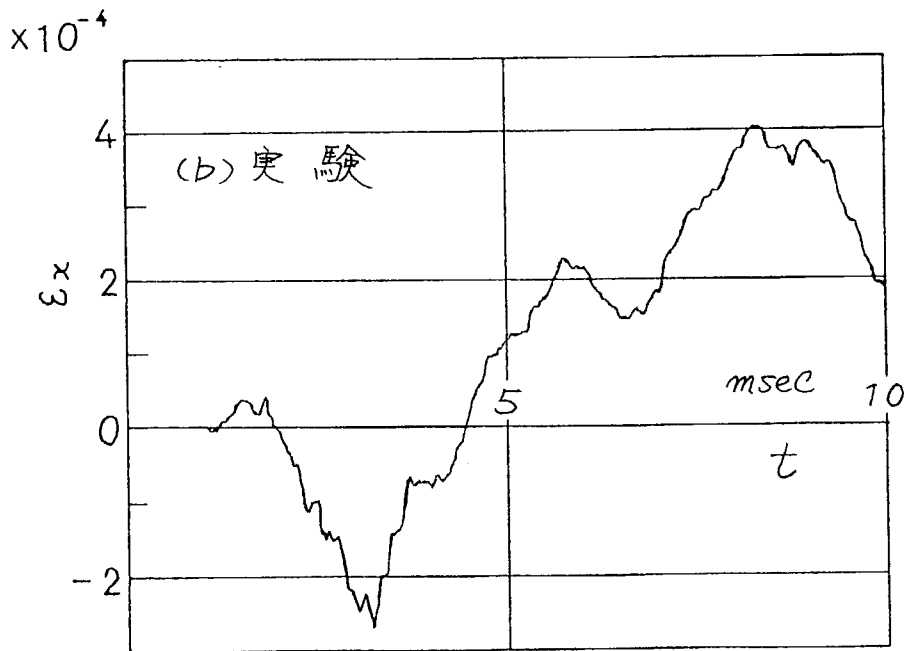
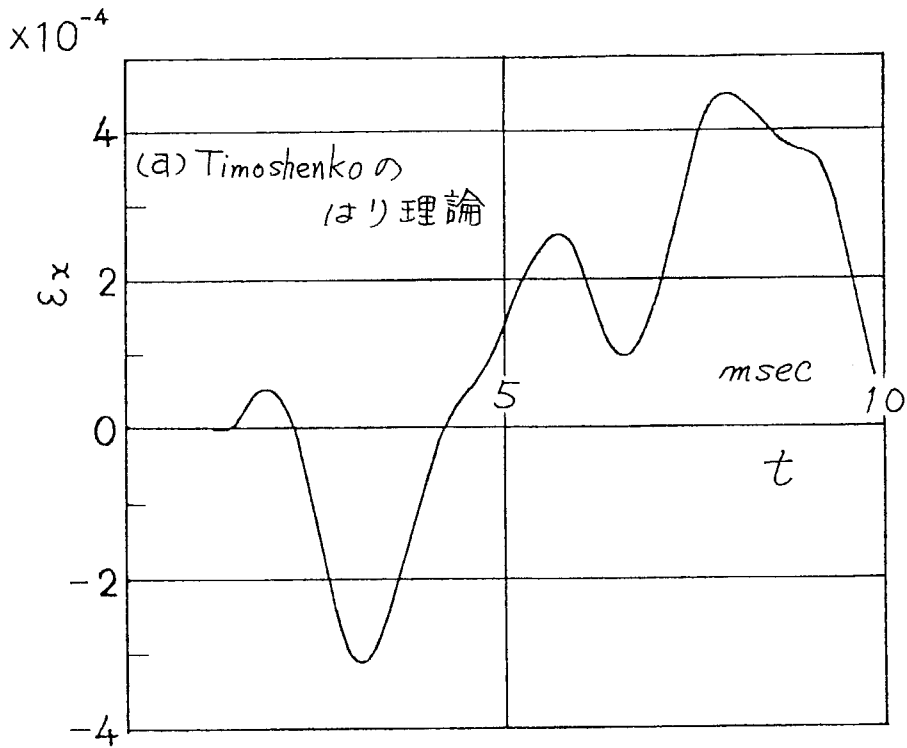


図7.44 円筒に生ずる軸方向ひずみ波形の理論と実験
結果の比較
(水を内蔵, $l=2m$, $x=0.05m$, $\theta=0$)

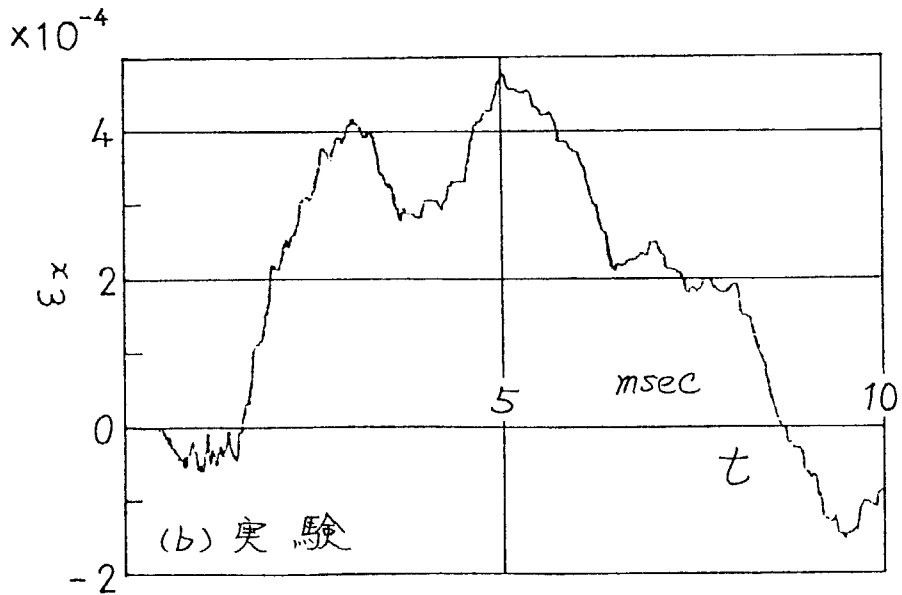
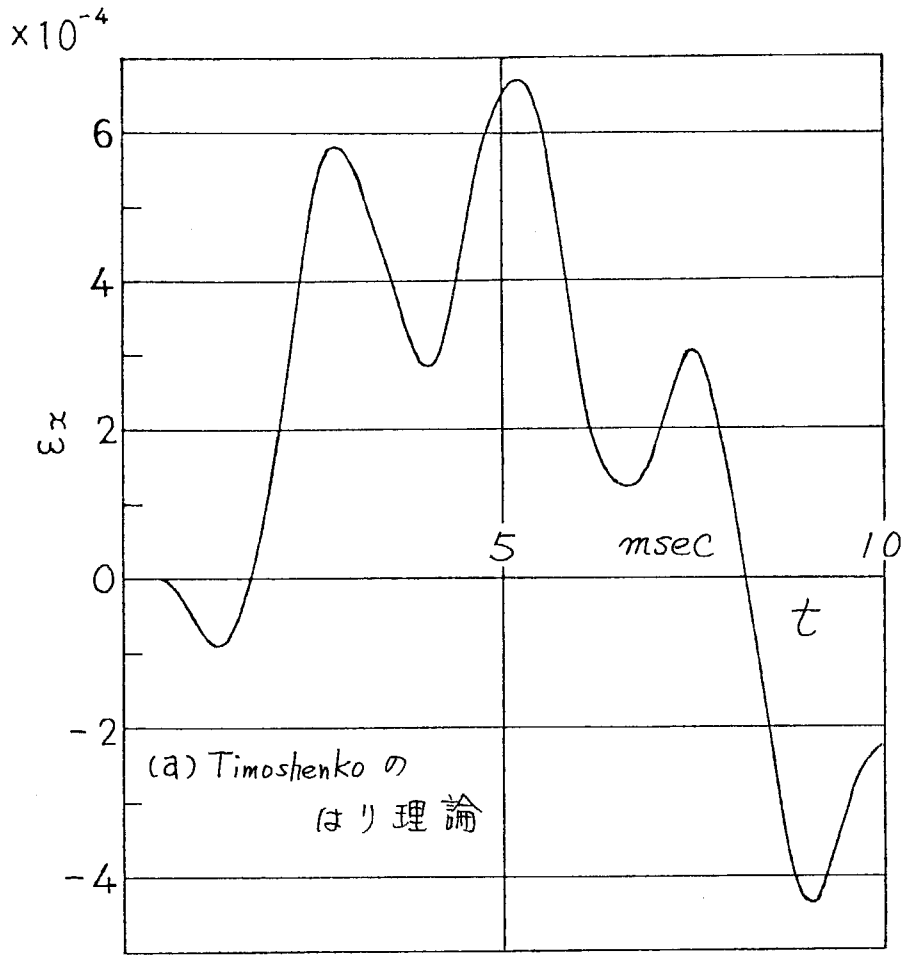


図7.45 円筒に生ずる軸方向ひずみ波形の理論と実験
結果の比較
(水を内蔵, $l=1m$, $x=0.05m$, $\theta=0$)

(B) PMMA 製円筒の場合

円筒の内部に水を入れた場合について、固有振動数を測定して水深との関係を求めた。この結果を並進慣性だけを考慮した Flüge の動的円筒殻理論と水を固定質量で近似した方法により計算した結果(第6章)と比較することにより、円筒殻理論の適用性だけでなく、第6章に関連して流体の固定質量近似についてその可否を検討した。

実験に供した円筒は PMMA 製で、長さ $l = 1.022 \text{ m}$ 、平均半径 $R = 0.122 \text{ m}$ 、肉厚 $t = 5.8 \text{ mm}$ のものを用い、この一端を厚さ 35 mm の鋼板に掘った深さ 10 mm の円形溝に押し込み接着することにより片持ち円筒とした。この鋼板を 7.5 節における実験で用いた定盤上にボルトで固定し、円筒の外表面には全長を四等分する合計 4 個所の位置に表 7.2 に示した二軸直交のひずみゲージを接着し、実験に供した。この先端に図 7.28 と同じ方法により衝撃荷重を加えて振動を励起させ、このときの各位置におけるひずみ変動を波形記憶装置に記録した。波形記憶装置内に記録されたデジタルデータを図 7.4 に示した測定システムの ④ → ⑨ → ⑩ → ⑪ の部分を用いて処理した。

固有振動数の解析には高速フーリエ変換法 (FFT) を利用し、プログラムには FORTRAN 言語を用いた。

まず円筒が空の状態でも固有振動数を測定して、6.4 節における理論解析結果との比較さらには各測定点におけるひずみ波形に対する観察の両面からモードの判定を行い、本節で対象としている円筒のはり状変形モードを有する固有振動数を選別した。その結果を 6.4 節の理論解析結果(並進慣性だけを考慮した Flüge の動的円筒殻理論)と比較したのが表 7.5 であ

る。実験では3次以上の固有振動数を精度よく解析することができなかつた。

次に円筒の内部に水を入れ、その深さを徐々に増してゆきながら選別した固有振動数の変化を追跡してゆき、水の深さとの関係を求めた。その結果をまとめたものが図7.46である。

縦軸は空の状態における無次元固有振動数 $(\lambda_m)_{\mu=0}$ との比、横軸は水の深さ μl と円筒の長さ l との比であり、理論は第6章の6.4節における液体の慣性効果を三次元とした場合の結果である。満水($\mu=1$)における理論結果は式(6.43)の η で与えられ、本実験の場合この値は $1/\eta=0.315$ である。

実験結果は次数の高い方が、この値に近くなっている。全体的にも実験結果は理論結果よりすべての μ の値に対して高くなっているが、定性的にはよく一致している。このことは第6章における固定質量への置換方法が、水の慣性質量を実際よりやや過大に見積っていることを物語っているとみることが出来る。しかし、液体との連成運動を考慮した解析に比べると固定質量で近似する方法は飛躍的に簡単である。したがって、液面の動揺が問題とならない限り、固定質量近似の方法はやや液体の慣性質量を過大に評価する傾向があるものの第一近似としては十分に利用価値があるものと考えられる。

表7.3および7.5は、円筒の材質をPMMAにした方が実験結果と理論結果がよく一致することを示しているので、鋼製円筒の場合は長さが短くなると固定部材との連成振動を無視することができないことを裏付けしていると考えられる。

なお、PMMAの質量密度は $\rho=1.16 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ 、縦弾性係数は $E=540 \text{ kgf/mm}^2$ 、ポアソン比は $\nu=0.36$ であった。

表7.5 PMMA円筒の固有振動数

m	Theory	Experiment
1	89 Hz	83 Hz
2	399	391

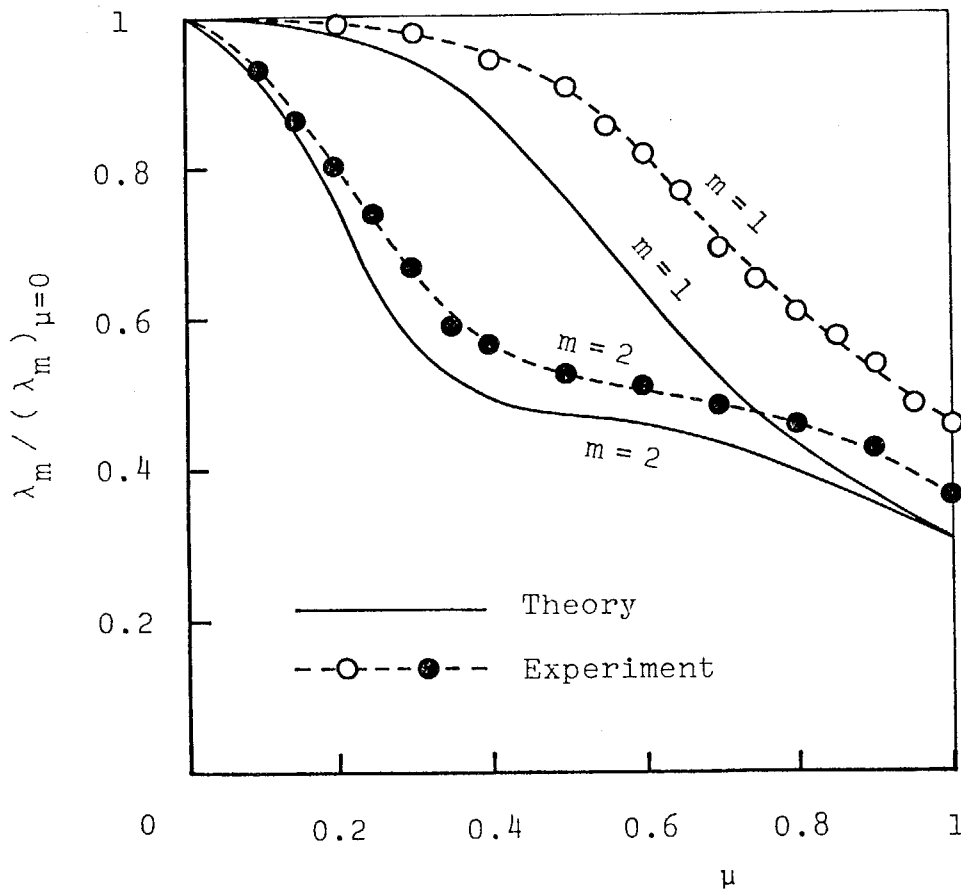


図7.46 固有振動数と水の深さとの関係における理論結果と実験結果の比較 (m :次数, $\mu=0$:空, $\mu=1$:満水, PMMA製円筒)

7.7 結 言

本章では最初に、電気抵抗線ひずみゲージを用いた衝撃応力の測定方法について、まず初歩的な回路の構成方法を示し、続いて波形記憶装置によるアナログ量のデジタル化と小型電子計算機によるデータのデジタル処理システムを紹介した。この部分は、衝撃応力の測定を行う技術者への解説書になり得るものと思っている。

次に、第3章、第4章および第5章に関連した円筒の三種類の衝撃実験を、前述の衝撃応力測定システムの利用により行ったその結果と各実験に対応した理論解析結果との比較結果を示した。そして、これまでにその特性をあらゆる角度から調べてきた動的円筒殻理論が、実際の円筒の衝撃現象にどの程度に応用し得るかについて調査した。その結果を、各実験ごとにまとめると以下のようなになる。

- (1) 中心軸の変形を伴わない集中衝撃力をうける円筒の問題では、衝撃点における応力の応答が最も重要である。しかし、本論文で取り扱っている Kirchhoff-Love の仮定に準拠した円筒殻理論では、衝撃点における応力を計算することができない。集中荷重を部分分布荷重に置き換えれば、計算が可能となるが、現実の衝突現象では荷重の作用面積を測定することは極めて困難である。したがって、集中荷重として計算する以外に適切な方法はないように思われる。すると、集中荷重のもとでも応力が発散せずに計算が可能となるような理論を利用する以外に方法はないと考えられ

る。しかし、衝撃点を除いた部分では、理論解析結果はほぼ実験結果を近似していたので、本論文で対象としている動的円筒殻理論はこの種の問題に対して十分な精度をもっていると結論できる。これ以上の適用性を通常の円筒殻理論に求めるのは無理があろう。

衝撃点の内側での応力を計算可能とするためには従来の Kirchhoff-Love の基本仮定を取り除いて横断面のゆがみと肉厚方向のひずみを近似的に取り入れたいわゆる高次近似理論を利用するののも一つの方法であらう。

(2) 先端にはり状曲げ衝撃荷重をうける片持ち円筒の問題では、衝撃点から離れた固定部付近の応答に注目して実験を行った。しかし、固定部そのものにおいてはひずみゲージによる応力測定はできないので、主として固定部より 50 mm だけ離れた位置における測定結果について理論解析結果との比較を行った。そのためか軸方向の垂直ひずみについては円筒殻理論による結果は、はり理論による結果とほぼ完全に一致し、実験結果ともよく一致した。このことははり状の曲げ衝撃をうける円筒の問題に対しても、本論文で取り扱っている動的円筒殻理論が十分な精度をもっていることを示すものである。反面、円筒殻としての固有の応答についてまでは十分に調べられなかったことを示している。測定した個所が一様なはり状曲げ変形状態のもとにあったために殻理論とはり理論の両数値解がほぼ完全に一致した。局部変形の影響が強く現われる固定部そのものでは殻理論の特徴が強く現われるので、はり理論との差が明瞭になるが、残念ながらここではひずみゲージによる応力

測定ができない。しかし、円筒殻理論による結果は周方向ひずみについても実験結果をよく近似しているので、理論の精度に対する保証は十分に得られたものと考えらる。

(3) 水を内蔵した片持ち円筒の衝撃実験では、水を固定質量で置き換える近似方法の信頼性について検討を行った。

円筒内部の水の総質量をすべて固定質量に振り替える方法は、近似の大胆さに比べて、想像以上に精度のよいことが明らかになった。衝撃力によって円筒に生ずる応力変動だけを対象とした場合、実際よりも大きい応力値を与える点を我慢すれば、固定質量近似による解析で十分なように思われる。本実験だけでは例証が少なく、完全な結論とは言えないが、可能性は十分にあるものと思う。

参考文献

- [1] 日本非破壊検査協会, 電気抵抗ひずみ計によるひずみ測定 A, (1977).
- [2] 松本浩之・ほか3名; 衝撃応答の測定システム; 非破壊検査, 25巻8号(昭51-8), 494-498.
- [3] Potma, T. (関谷・ほか3名訳), ひずみゲージ理論と応用, (昭53), 共立出版.
- [4] 松本浩之・ほか3名; 衝撃応答のスペクトル解析(梁のステップ応答実験); 非破壊検査, 27巻12号(昭53-12), 817-823.

第 8 章

結 論

8.1	本論文で得られた成果	444
8.2	今後の課題	448

8.1 本論文で得られた成果

本論文は、「円筒殻の衝撃応答に関する研究」と題して、次の四点を明らかにすることを目的として掲げた。

- (1) 数ある動的円筒殻理論を体系化し整理して、各理論の導出過程と特徴を明らかにするとともに、使い易い形に理論をまとめ使用方法を示す。
- (2) これらの動的円筒殻理論を対象として、多くの動的問題に対する数値結果を比較し、各理論の特徴と精度を明らかにする。
- (3) 円筒殻に関する基本的な衝撃問題を解析して各理論における固有の解析方法や円筒殻における固有の応答を明らかにする。あわせて、その解析方法がより複雑な衝撃問題へ適用できる可能性についても触れる。
- (4) 理論解析で対象とした問題と対応した円筒の衝撃実験を行い、解析結果がどの程度適用性があるかを調べることでより動的円筒殻理論の精度を検証する。

目的(1)に対応する部分は第2章であり、ここでは動的円筒殻理論に関する古典理論から修正理論までをその導出過程から利用方法までについて統一して示し、各理論間の対応関係を明らかにしつつ各理論の特徴を明確にした。特に古典理論については、精度を損うことなく変位の方程式を一元化し単純化する試みを行い、その結果各理論を使い易い形に整理することができた。修正理論については、変位の方程式の単純化が困難であるため、事実上5元連立微分方程式としてその

まま解析に供する以外に方法がなかった。したがって、微分方程式の近似・単純化を多少行ったところで、解析に要する手間はほとんど変わらぬので、二次近似として導かれた理論の Mirsky-Herrmann 理論以外に修正理論としては利用価値のある理論は考えられなかった。この Mirsky-Herrmann 理論は面外せん断変形無視の近似を導入すると古典理論に属する Flüge の理論と完全に一致することが明らかになった。Flüge の理論をはじめ Love の理論などの二次近似と称される古典理論間では精度上にはほとんど差はないので、本論文では、修正理論としては Mirsky-Herrmann 理論が、古典理論としては Flüge 理論が、それぞれ代表する最も精度の高い理論であると位置づけこれらの利用を推奨した。一方、最も多くの(大きな)近似を導入した理論として Donnell の理論を取り上げ、精度上に問題があるけれどもその特性をよく心得ていれば、式が非常に簡単であるので利用する価値があるとした。言い換えれば Donnell が行った程度の大胆な近似を行わなければ、利用価値が高まるほど式が簡単にならないということでもある。

ともかくも、利用すべき価値のある理論として Donnell, Flüge, Mirsky-Herrmann の各理論を挙げ、利用者のためにいろいろな角度から各理論のもつ特徴・精度を調べておく必要があるとした。理論間の相違は主に構成方程式にあるので、理論間の比較だけではこの点しか明らかにならない。動的理論では、各種の慣性の影響が大きな問題となるのである特定の理論についてこの影響も調べる必要があるとした。

目的(2)と(3)に対応する部分は第3章・第4章・第5章である。円筒殻の基本的問題を、衝撃的荷重が与えられる場合と

衝撃的変位が与えられる場合に分類し、荷重が与えられる問題をさらに局部変形が支配的な場合と梁状変形が支配的な場合とに分類し、前述の各章に振り分けた。各問題には解析上それぞれ特徴があり、しかも各理論の特徴も顕著に現われるので、適切な分類方法であったと思う。この三章によって動的円筒殻理論に基づいた解析方法の基礎が確立され、他の問題へ応用・発展させる体制が整ったと考えている。

修正理論である Mirsky-Herrmann の理論は、衝撃点から離れた位置における応答が重要な問題や変位速度が不連続的に変化するように荷重が与えられる問題に対してその利用価値が高く、古典理論では誤った結果を与える場合があるので注意すべきことを指摘した。古典理論である Flügge の理論は、衝撃点とその近傍における応答を調べる問題では、修正理論よりかえって都合の良いことが明らかになった。また Donnell の理論は、円筒殻が短い場合や衝撃初期の応答に関しては Flügge の理論と全く同等であることが明らかになった。

慣性については、面外並進慣性以外の慣性をすべて無視すると式も解析も非常に簡単になるが、精度が劣るので注意すべきである。特に衝撃点から離れた位置における応答は正確ではない。並進慣性をすべて考慮するならば、回転慣性を付加しても式や解析の手間はほとんど変わらないので、結果の正当性を考えて回転慣性を考慮した理論を推奨しておきたい。

応用問題として円筒形液体貯槽の地震応答解析を第6章で取り上げ、本論文で展開してきた動的円筒殻理論とその解析方法が応用できる範囲の一端を示したつもりである。

最後の目的(4)に対応する部分は第7章である。二次近似と

して導かれた動的円筒殻理論を三次元弾性理論に対する近似理論として捕えると、その由来する所は導出過程から考えて変位場の仮定(式(2.11)に相当する)に集約される。したがって、変位場の仮定すなわち Kirchhoff-Love の平面保持の仮定が成立するような状況であれば、動的円筒殻理論による結果は厳密な理論による結果と遜色がないはずである。

Kirchhoff-Love の仮定は衝撃点とその近傍においては成立し難いと思われるので、第7章では衝撃点から離れた位置において実験結果と理論結果とを比較した。両者がよく一致することから円筒殻理論の有効性が確認され、本論の内容は頭書に掲げた目的をほぼ達成できたものと考えている。

8.2 今後の課題

動的円筒殻理論として最も精度が高く使い易い理論はどれかという命題があったとする。ただ一つの回答しか許されないとすれば、本論では並進と回転の慣性をすべて考慮したところの Flügge の理論が最もその要求に近いと結論しておく。

その理由はこれまでに詳しく何度も触れたので省略するが、要するにこれより精度を高めようとすれば Mirsky-Herrmann に代表される修正理論を用いなければならぬので解析に要する手間は著しく増大するし、逆にもっと解析を大幅に単純化しようとするすると精度に問題の生ずる Donnell の理論以下の根拠に疑問のある理論を用いなければならぬからである。

前述の命題に対して二つの回答が許されるならば、Flügge の理論に加えて Mirsky-Herrmann あるいは Donnell のどちらかを推奨しておきたい。どちらを選ぶかは使用者が目的によって選択すればよいことである。

集中力のもとでの荷重点における応答など対象とする問題によっては、修正理論でも都合の悪い場合がある。この場合は厳密な三次元弾性理論を用いるのが解決策であるけれどもこの理論による解析は一般には容易な事ではない。そこで、ここでは Kirchhoff-Love の仮定を部分修正して断面のゆがみや肉厚方向ひずみを近似的に取り入れたいわゆる高次理論の使用を提案しておきたい。この理論に基づいた解析法や数値計算法については今後解決されなければならない課題として残されているが、近似を全く導入しない三次元弾性理論を

用いるよりは実用的であるように思われる。

本論文では多くの衝撃問題を取り上げて数種類の理論により解析した。しかし実際には、円筒殻は形態上から容器として使用されている場合が多く、特に流体に接した状態で使用される例が多くみられる。したがって、連成問題として重要な問題が多く、しかも解析上も興味深いものがある。

本研究ではいろいろな問題を扱ったが、解析しなければならぬ問題がなお多くあるとの認識を得たのが、成果でもあるような気がする。特に他の構造や流体との連成問題においてその感が強い。連成問題は有限要素法の得意とする分野ではあるが、理論による解析が可能で重要な問題も多く残されている。数値解析による結果も問題が複雑になると、その精度の保証となる解析解などのより所が少くなって困る場合が多くあると言われている。

この際、理論に基づいた解析解の誘導もあきらめずに可能なものを着実に解いてゆくことが、この時期において特に必要であると考えられる。

(450)

謝 辞

昭和43年4月卒論学生として研究室に配属されて以来、14年間にも達する長い間、中原一郎教授・松本浩之教授には終始変わらぬ熱意で未熟な私を叱咤・ご指導してくださいました。しかも、ここに学位論文としてまとめることのできた研究を行う場所を与えてくださいました。このご恩は私にとって終生忘れることのできないものであります。ここに記してお礼の気持の一端を表わしたいと思ひます。

昭和57年春 記

業績目録

- (1) 松本浩之・宇治橋貞幸; 衝撃圧力をうける異方性中空球の変形と応力; 日本機械学会論文集, 38巻307号, (昭47-3), 466-473.
- (1') Hiroyuki Matsumoto and Sadayuki Ujihashi; Deformations and Stresses in a Hollow Sphere with Spherical Transversal Isotropy under Impulsive Pressure; Bulletin of the JSME, Vol.15, No.89 (1972-11), 1324-1332.
- (2) 宇治橋貞幸・松本浩之; 非軸対称衝撃荷重をうける円環の変形と応力(第1報, 二次元動弾性理論による解析); 日本機械学会論文集, 40巻331号, (昭49-3), 701-709.
- (2') Sadayuki Ujihashi and Hiroyuki Matsumoto; Dynamic Stresses and Deformations in a Thick Cylinder under Nonaxially Symmetrical Impulsive Loads (1st Report, Analysis Based on the Two Dimensional Dynamic Theory of Elasticity); Bulletin of the JSME, Vol.17, No.113 (1974-11), 1418-1425.
- (3) 宇治橋貞幸・内山常雄・松本浩之・中原一郎; 集中荷重をうける無限長円筒かくの衝撃応力; 日本機械学会論文集, 42巻355号, (昭51-3), 684-692.
- (3') Sadayuki Ujihashi, Tsuneo Uchiyama, Hiroyuki Matsumoto and Ichiro Nakahara; Dynamic Stresses of an Infinite Circular Cylindrical Shell Subjected to Concentrated Impulsive Loads; Bulletin of the JSME, Vol.19, No.137 (1976-11),

1245-1252.

- (4) 松本浩之・菊地哲郎・宇治橋貞幸・中原一郎；衝撃応答の測定システム；非破壊検査，25巻8号，（昭51-8），494-498.
- (5) 宇治橋貞幸・小平雅紀・松本浩之・中原一郎；集中衝撃荷重をうける有限長円筒かく；日本機械学会論文集，43巻366号，（昭52-2），479-486.
- (5') Sadayuki Ujihashi, Masanori Kodaira, Hiroyuki Mastumoto and Ichiro Nakahara ; Dynamic Responses of Circular Cylindrical Shells Having Finite Lengths Subjected to Concentrated Impulsive Loads ; Bulletin of the JSME, Vol.20, No.148 (1977-10), 1228-1235.
- (6) 宇治橋貞幸・若井秀之・松本浩之・中原一郎；先端に衝撃荷重をうける片持ち円筒かくの変形と応力；日本機械学会論文集，43巻376号（昭52-12），4389-4396.
- (6') Sadayuki Ujihashi, Hideyuki Wakai, Hiroyuki Mastumoto and Ichiro Nakahara ; Dynamic Deformations and Stresses in a Cantilever Cylindrical Shell under Impulsive Loads ; Bulletin of the JSME, Vol.21, No.158 (1978-8), 1208-1215.
- (7) 松本浩之・宇治橋貞幸・中原一郎・井上芳樹；衝撃応答のスペクトル解析（梁のストラッ70応答実験）；非破壊検査，27巻12号（昭53-12），817-823.
- (8) 宇治橋貞幸・小泉正・松本浩之・中原一郎；集中衝撃荷重をうける両縁固定円筒かくの変形と応力；日本機械学

会論文集, 45巻398号(昭54-10), 1227-1238.

(8') Sadayuki Ujihashi, Tadashi Koizumi, Hiroyuki Matsumoto and Ichiro Nakahara; Dynamic Displacements and Stresses in a Circular Cylindrical Shell of Finite Length with Both Ends Clamped Which is Subjected to Concentrated Impulsive Loads; Bulletin of the JSME, Vol.23, No.180 (1980-6), 837-848.

(9) 宇治橋貞幸・伊藤彰英・松本浩之・中原一郎; 固定壁の衝撃的な移動をうける両縁固定円筒かく; 日本機械学会論文集, 45巻399号(昭54-11), 1364-1372.

(9') Sadayuki Ujihashi, Akihide Itoh, Hiroyuki Matsumoto and Ichiro Nakahara; Dynamic Deformations and Stresses in a Circular Cylindrical Shell with Both Ends Clamped Subjected to Translational Excitation at the Base; Bulletin of the JSME, Vol.23, No.181 (1980-7), 1055-1063.

(10) 宇治橋貞幸・岡崎孝男・松本浩之・中原一郎; 先端に衝撃荷重をうける片持ち円筒かくの変形と応力(第2報, Mirsky-Herrmann 形の理論による解析); 日本機械学会論文集, 46巻406号(昭55-6), 647-656.

(10') Sadayuki Ujihashi, Takao Okazaki, Hiroyuki Matsumoto and Ichiro Nakahara; Transient Responses of a Cantilever Cylindrical Shell Subjected to Impulsive Loads on Its Free Edge: The Influence of Rotatory Inertia and Transverse Shear Deformation; Bulletin of the JSME, Vol.24, No.188

(1981-2), 295-304.

- (11) 宇治橋貞幸・松本浩之・中原一郎；基礎の周期的な移動をうける円筒形貯槽の動的応答；日本機械学会論文集，48巻431号 A編(昭57-7)

< 口頭発表 >

- (1) 宇治橋貞幸・井上洋一・松本浩之；面外集中荷重をうける円輪の衝撃応力；日本機械学会講演論文集，No. 720-10 (1972-8)，109-112.
- (2) 宇治橋貞幸・松本浩之・中原一郎；非軸対称衝撃荷重をうける円環の変形と応力（第2報，曲り梁理論による解析）；日本機械学会講演論文集，No. 730-13 (1973-10)，139-142.
- (3) 松本浩之・宇治橋貞幸・中原一郎；面外集中衝撃荷重を受ける円弧梁の変形と応力；日本機械学会論文集，No. 772-1 (1977-8)，21-23.
- (4) 宇治橋貞幸・松本浩之・中原一郎；基礎の周期的な移動をうける円筒形貯そうの動的応答；第5回日本地震工学シンポジウム論文集 (1978-11)，1209-1216.
- (5) 宇治橋貞幸・松浦達郎；高次近似理論によるはりの衝撃応答の解析；日本機械学会講演論文集，No. 800-9 (1980-7)，195-200.
- (6) 宇治橋貞幸・山田正直；高次近似理論による円板の軸対称衝撃応答の解析；日本機械学会論文集，No. 810-10 (1981-10)，200-202.

<その他>

- (1) 日本機械学会；技術資料「金属材料の弾性係数」；
(1980), 分担.
- (2) 日本機械学会；衝撃と破壊調査研究分科会成果報告書；
(1981), 分担.

略歴および研究論文の概要

略 歴

本籍地 東京都杉並区西荻南3丁目175番地

氏 名 宇治橋 貞幸

生年月日 昭和21年8月29日

昭和44年3月 東京工業大学工学部機械工学科卒業
 昭和46年3月 東京工業大学大学院理工学研究科
 機械工学専攻修士課程修了
 昭和48年5月 東京工業大学大学院理工学研究科
 機械工学専攻博士課程中退
 昭和48年6月 東京工業大学工学部機械工学科助手
 現在に至る。

研究論文の概要

論文題目 円筒殻の衝撃応答に関する研究

石油の貯槽や原子炉およびその配管などエネルギー源を収納する大形構造物では事故が起きれば超大型の災害を伴うことが予測されることから、その安全性が厳しく問われている。

最近では特に飛翔物体による衝突や地震動による変位衝撃に対する耐衝撃設計法の確立が強く望まれている。構造物の基本部材としての梁・板・殻の解析には、三次元理論を一次元あるいは二次元化して導かれた近似理論が用いられる。

最も基本的な殻構造と考えられる円筒殻については近似の程度に応じた数多くの理論が提案されているが、理論相互間の関係や衝撃応答の具体的な理論解析法は十分には明らかにされていない。個々の事例についてかろうじて差分法・有限要素法などによって数値結果が得られているのが現状であり、基本的問題に対する理論解析結果が見当たらない。そのために数値解析における基礎式の選択や有限要素の設定の基準が不明確であったり、得られた結果の妥当性の評価などに支障をきたす場合も多い。

本論文は、円筒殻の衝撃応答を解析するために提案されている理論を統一的に整理して理論相互間の関係を調べ、次にその内から代表的な三つの理論を選び Laplace 変換を利用した具体的な衝撃応答の理論解析法を提案するとともに、数値結果を基にして基礎式の特徴・精度を調べ、さらに実験によって理論解の適用性を明らかにしようとするものであり、以下の8章からなっている。

第1章「緒論」では、円筒殻理論とそれに関する研究の歴史を概観し、本研究の目的と意義を述べている。

第2章「各種動的円筒殻理論とその特性」では、Kirchhoff-Love の仮定に準拠した各種の動的円筒殻理論を殻要素の面外せん断変形と回転慣性を考慮した修正理論と両者を無視した古典理論とに大別し、各理論相互間の対応関係を明確にした。

次に、具体的な解析に必要な境界条件式について述べ、両縁自由支持の有限長円筒殻の固有振動数および無限長円筒殻

における位相速度の両計算結果から各理論の精度を検討した。

その結果、精度と解析の容易さの両面からみて、Minsky-Herrmannの修正理論およびFlüggeとDonnellの両古典理論が近似の程度に特徴のある代表的なものであって、これらを目的に応じて使い分けることによって円筒殻の衝撃応答が合理的に解析しうることを示唆した。

第3章「集中衝撃力をうける円筒殻」では、変形が局部的で軸線がたわまない問題として、集中衝撃荷重が作用する円筒殻を種々の端末条件のもとで理論解析する方法を提案した。

解析には、第2章で挙げた三つの基礎理論を用い、古典理論に基づく衝撃点の変位成分は有界となるのに対して修正理論に基づく結果は発散すること、円筒殻が短かければ古典理論のFlüggeとDonnellの両理論による結果の差は小さくなること、さらには集中衝撃荷重による局部変形のおよぶ範囲は狭く衝撃点が端からある程度離れていれば応答波形におよぼす境界条件の影響は小さいことを明らかにした。

第4章「はり状曲げ衝撃をうける円筒殻」では、局部変形に加えて軸線がはり状にたわむ問題として、先端に衝撃荷重をうける片持ち円筒殻の衝撃応力を解析する方法を提案して以下に続く5・6章の解析の基礎としている。円筒殻に生ずる変位と面内合応力成分の応答については修正理論と古典理論はほぼ同等であるのに対して、面外合応力成分の応答については古典理論では正しい結果が得られない場合のあることを明らかにした。また、円筒殻が短い場合にはDonnellの理論

は Flügge の理論と同等であること、円筒殻が長い場合にはたわみを対象としたとき回転慣性とせん断変形を考慮した梁理論が実用上十分な精度を有していることを指摘した。

第5章「衝撃的変位が与えられた円筒殻」では、地震動による衝撃応答を解析する例として、片持ち円筒殻の固定基礎が衝撃的な移動をうける問題を修正理論および古典理論により解析する方法を提案した。その結果、移動速度がゆるやかに変化する場合の応答には修正理論と古典理論の結果の間に大きな差は見られないが、移動速度が急激に変化する場合にはその時刻において古典理論による面外合応力成分の応答波形に不自然さが認められることを示した。また、円筒殻の最低次固有周期よりも短い立ち上がり時間で基礎が移動する場合には、立ち上がり時間が長い場合に比べて生ずる変位および応力の値は円筒殻の形状にかかわらず急激に大きくなることを明らかにした。

第6章「衝撃的変位が与えられた円筒形液体貯槽」では、前章で展開された解法がより実際的な問題へ応用できる可能性を示す例として、円筒形液体貯槽の地震応答解析の問題を取り上げている。液体を殻壁に付着した固定質量で近似すれば、固体壁と液体との連成問題が、前章で扱った空の円筒殻の解析に帰着されることを示した。すなわち、円筒殻の平均半径と肉厚をそれぞれ R および t 、液体と殻材料の密度をそれぞれ ρ_0 および ρ とすれば、液体の効果は単一のパラメータ $\xi = \sqrt{1 + R\rho_0 / 2R\rho}$ によって整理され、連成問題の近似解は

空の円筒殻に対する解析結果において時間 t を t/τ と置いて得られる。さらに貯槽に円筒殻理論を、液体に完全流体の理論をそれぞれ適用して、より精密に解析する方法を明らかにした。

第7章「円筒殻の衝撃応答に関する実験」では、3・4・6章に関連した円筒殻の衝撃実験を行い、測定結果と解析結果とを比較検討している。円筒の中央に棒を衝突させる実験では、局部的衝撃荷重による衝撃応力を測定した結果と理論解析結果とを比較し、円筒殻理論による結果は実用上十分な精度をもっていることを示した。片持ち円筒の先端に棒を衝突させる実験では、固定部近傍の衝撃応力を測定して、はり状曲げ衝撃の問題に対しても円筒殻理論による結果は十分な精度をもっていることを確認した。さらに、水を貯えた片持ち円筒の衝撃実験を行い、水を固定質量で近似する解析結果で実験結果をよく説明しうることを、円筒殻が長ければせん断変形と回転慣性を考慮した梁理論によって解析した軸方向ひずみ波形は実験結果とよく一致することを示した。

第8章「結論」では、本研究で得られた成果を総括している。