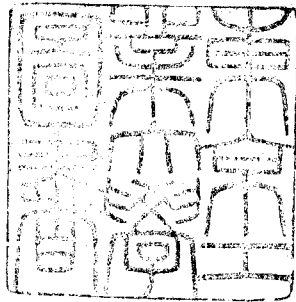


論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	帰還形 R C 能動伝送回路に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	藤井信生
Author(English)	NOBUO FUJII
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第459号, 授与年月日:1971年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第459号, Conferred date:1971/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

帰還形RC能動伝送回路に関する研究



昭和45年12月

指導教官 柳沢健 教授

提出者 大学院博士課程 電子工学専攻

藤井 信生

東京工業大学

297552

目 次

第一章	序 論	3
1.1	研究の背景と目的	3
1.2	RC能動回路の概念	6
第二章	係数可変形RC能動回路の構成	13
2.1	まえがき	13
2.2	帰還形RC能動回路	15
2.3	伝送関数の構成	17
2.3.1	電圧伝送関数の構成	17
2.3.2	伝達アドミタンスの構成	30
2.4	二端子イミタンスの構成	31
2.5	二端子対回路網の構成	35
2.6	能動素子の構成	37
2.7	構成例および実験結果	43
2.8	伝送関数の係数と特性の関係	53
2.9	おまけ	55
第三章	帰還形RC能動回路の素子感度	56
3.1	まえがき	56
3.2	受動素子の感度	58
3.2.1	受動RLC回路網の素子感度	58
3.2.2	帰還形RC能動回路の素子感度	63
3.3	能動素子の感度	68
3.4	おまけ	70
第四章	帰還形RC能動回路の電力	71
4.1	まえがき	71

		2
4.2	理想トランスを含む能動回路の電力	74
4.2.1	伝達アドミタンス構成の場合	74
4.2.2	電圧伝送関数構成の場合	83
4.2.3	二端子アドミタンス構成の場合	85
4.3	理想トランスを含まない能動回路の電力	89
4.4	簡単な例題	95
4.5	おまけ	103
第五章	結 論	105
	謝 辞	107
	参 考 文 献	108
	付 録	111

第一章 序論

§ 1-1 研究の背景と目的

Cambell や Wagner が 1915 年にフィルタを提案して以来, Zobel, Cauer 等によりフィルタ理論は急速に発達した. 通信網の発展につれ, 等化器等, 実用化も進み, 受動 LCR フィルタ理論は, ほぼ完成したと考えられる. 一般に伝送回路網に用いられる受動素子は, 抵抗, 容量, インダクタであるが, 近年回路網の集積化がその要求度と増えるにつれ, インダクタを集積化することが困難であることから, インダクタを用いた RC 能動回路の構成法が注目と浴びてきている. RC 能動回路は元来低周波において, Q の高い大きな値のインダクタを得難いこと等の理由により, 1950 年代に Linnell [8] 柳沢 [9] Sallen, Key [6] 等によりその構成法が発表され, 現在まで数多くの構成法が発表されている. これら構成法は, 使用される能動素子の種類により, つぎのように分類される.

- (1) 負性抵抗を用いる方法
- (2) 帰還増幅器を用いる方法 [6], [7]
- (3) 負性インピーダンス変換器を用いる方法 [8], [9]
- (4) ジャイレータを用いる方法 [10], [11]
- (5) 演算増幅器を用いる方法 [12]
- (6) 一般インピーダンス変換器を用いる方法 [13]

などである.

受動 LCR 回路と異なり, RC 能動回路では, 回路網中に多数の能動素子を含むため, これら能動素子の変動が回路関数に与える影響が問題となる. また, 能動素子の変動ばかりでなく, 受動素子の変動も受動回路の場合にはあまり問題とならないようにも, 能動回路では無視できない程度の大きさ

なることが考えられる。このような問題は Sensitivity の問題として論じられ、これを小さくするために多くの回路が発表されている。また、RC 能動回路の調整、たとえば、共振周波数、 Q 等の調整は従来一部の構成法で多少できる程度で、ほとんど不可能の状態である。設計理論通りに構成されれば特性の調整は不要であるが、実際には素子値の偏差、能動素子の不完全さ、などのために、特性の調整を必要とする場合が多い。また、最近では伝送線路での波形の歪み等化する波形等化器も、その時の状態に応じて特性を自動的に修正する自動可変等化器としての実用化が進められている。これに RC 能動フィルタを応用するには、特性の可変あるいは特性振の位置の可変が、可能な回路が望まれる。しかし現在まで発表されている回路は全くこの点で不都合であった。

従来の構成法では、一般的に、特性が異なる関数毎に始めからすべて設計を行う必要があり、その複雑度の高い CR 素子と必要としていたため、回路の量産化で乏しい。しかし、係数も可変化することにより、任意の伝達関数も同一回路で実現でき、利用フィルタとして、また個々の目的により自由にその特性を決定できる。たとえば特性一定の中心周波数を変える、あるいは中心周波数一定で Q だけを変える等の応用がある。

RC 能動回路の欠点として LC 回路に比べて決定的弱点は、RC 能動回路では、電力を消費するという事実である。回路網中の能動素子で電力を消費するのはかりでなく、抵抗素子による電力の消費も避けることができない問題の一つである。回路の小形軽量化、実用化の上でこの消費電力の問題は最も大きな一つの壁である。しかしながら、今まで発表されたこれらの構成法も、目的関数の実現のみに着目され、積極的に電力の問題を取り扱った論文は、能動 RC 回路の分野では見られないようである。このように RC 能動回路の本質に触れるような電力の極限といった事を考察することは、意義あることと考えられる。

また、従来 Sensitivity の問題としては、その大きさを方法的に小さくしよ

うとする試が主としていたが、Sensitivityの本質、Sensitivityの大小が回路のどのような要因により左右されているか等については、あまり議論されてはいない。直感的には回路網中の素子電力の大小に関係するのではな...かと思われが、この関係も明確にした表現法はまだ得られていないようである。本研究の目的は、従来の回路は困難であった特性の調整といった点に主眼を置き、帰還形RC能動回路で任意の関数(伝送関数, 2端子関数, 2端子対パラメータ)の分母・分子のSの係数を、全く任意に独立して可変とするこ...のできる新しい構成法を示し、また、帰還形RC能動回路の素子感度が、素子電力と何らかの関係があることを示し、合わせて回路網関数と、その関数実現に必要な能動素子の総電力、すなわち回路網中に蓄積ある...は消費される電力との関係と明らかにすることを示す。

第一章では従来のRC能動回路の構成法について、その特徴、欠点、限界等について述べた。第二章では、帰還形RC能動回路の入力側の増幅器の利得が、伝送関数の分子に、また帰還路の増幅器の利得が、伝送関数の分母のSの係数にそれぞれ独立して関係していることを利用して、各増幅器の利得が伝送関数の各係数と一対一に対応するようRC回路部の展開方法を示した。また二端子対回路網のすべてのパラメータの係数を独立可変とすることができるとも示した。第三章では、帰還形RC能動回路の受動素子の感度と電力の関係と導いた。第四章では、帰還形RC能動回路構成上の増幅器が供給する電力の総和、すなわちRC回路網中に消費ある...は蓄積される電力の最小値について考察し、また、常に最小電力の回路で任意の伝送関数も構成できることも示した。また実際の回路の電力と最小電力と実際の例題で比較した。

§ 2-1 RC 能動回路の概念

本論に入る前に RC 能動回路というものについて少し述べておきたい。本来 RC 能動回路は、受動 RC 回路に能動素子を導入することにより、受動 LCR 回路網の特性を得たり、あるいは受動 LCR 回路網では実現困難な回路あるいは現在のところ実現法の発見されていない特性を実現することにある。目的とする特性を実現する方法としてつぎの二通りの方法が考えられる。

(1) 目的特性を全く別に受動 RC 回路と能動素子で実現する。

(2) 受動 LCR 二一度回路を構成し、RC と能動素子で回路中の L と等価なインピーダンスを実現し、これを回路中のすべての L と置き換える。

(1) の方法は用いられる能動素子の種類によってつぎのように大別できる。

(a) RC - 負性インピーダンス変換器形回路

(b) RC - ジャイレータ形回路

(c) RC - controlled source 形回路

(d) RC - 演算増幅器形回路

受動 LCR と受動 RC 回路網の根本的に異なる点に、回路の特性根の位置にある。RC 回路のインピーダンスとエネルギー関数を用いて表わすと、よく知られてゐるように、

$$Z(s) = sT_0 + F_0$$

となる。ただし T_0 は蓄積エネルギー、 F_0 は消散エネルギーである。

これより $Z(s)$ の零点は

$$s = -\frac{F_0}{T_0}$$

となり、エネルギー関数は正の実数であるから、RC インピーダンス関数の零点は、複素平面の負の実軸上にはのみ存在し得る。また、アドミタンスについて同様の議論を行うことにより、RC インピーダンス関数の極も負の実軸上には存在し得ないことが証明される。

LCR回路網ではその特性根は複素周波数平面の左半面内の任意の点に存在し得るが、一対RC回路網では、その特性根は負の実軸上にのみしか存在できない。この違いは回路のQに関係し、RC回路では $Q < \frac{1}{2}$ であるため、特性の鋭い回路が得られない。一般に回路の特性方程式は二次の場合、一対のように表わされる。

$$D(s) = s^2 + as + b^2 \quad (1-1)$$

ただし s は複素周波数、 a, b は正の実数である。

RC回路網では

$$a \geq 2b \quad (1-2)$$

となる。式(1-1)のQを高める方法は基本的には、一対の二通りが考えられる。

(1) 引算法

これは、 s の1次の項から適当に引き算を行うのである、つまり

$$D(s) = s^2 + as + b^2 - ks \quad (1-3)$$

(k は定数)

この回路のQは

$$Q = \frac{b}{a-k} \quad (1-4)$$

で与えられる。したがって k を a に近づけるにつれて高いQの回路が得られるのである。しかし、この回路は sensitivity (オ第三章で詳しく述べる) が非常に悪く、

$$S_k^Q = \frac{k}{Q} \frac{\partial Q}{\partial k} = \frac{k}{a-k} \propto Q$$

で与えられ、高いQの回路ほど不安定となる欠点がある。その反面、回路構成が簡単な事に加えて、使用する増幅器の利得が小さくて済むという利点がある。この方法に属する回路は、前述の(a)および(c)のうち正帰還形のものである。これらの方法のうち代表的な負性インピーダンス変換器を用いた抑

伝回路()によって述べておこう。負性インピーダンス変換器とは、その F-マトリクスが次式で与えられる回路をいう。

$$(F) = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-5a)$$

あるいは、

$$(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \quad (1-5b)$$

(1-5a) を電圧反転形, (1-5b) を電流反転形 N/C と称する。

○ 図 1-1 に示す電流反転形 N/C を用いた回路の伝達関数 $T(s)$ は

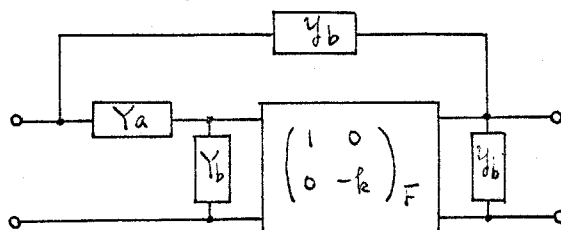


図 1-1 柳沢回路

$$T(s) = \frac{F_2}{F_1} = - \frac{Y_a - k Y_a}{Y_a - k Y_a + Y_b - k Y_b} \quad (1-6)$$

で表わされる。いま目的関数と

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (1-7)$$

とするとこれを变形して

$$T(s) = \frac{N(s)}{N(s) + D(s) - N(s)} \quad (1-8)$$

式 (1-8) の分母・子の最高次数に等しいか一次低い負の実根のみから成る多項式 $K(s)$ で分母・子を除くと、

$$T(s) = \frac{N(s)/K(s)}{\frac{N(s)}{K(s)} + \frac{D(s)-N(s)}{K(s)}} \quad (1-9)$$

が得られる。式(1-9)の分母・分子それぞれの項を部分分数展開して、

$$\left. \begin{aligned} \frac{N(s)}{K(s)} &= Y_a - y_a \\ \frac{D(s)-N(s)}{K(s)} &= Y_b - y_b \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

- またし、 Y_a, Y_b, y_a, y_b はすべて RC 2 端子アドミタンス関数である。
式(1-10)の各項を図 1-1 の二端子回路として実現すれば、目的の関数
が得られる。

(2) 加算法

この方法は s の二次項ある... 1 次項の項に適當な加算を行う方法である。すなわち

$$D(s) = s^2 + as + b^2 + k \quad (1-11)$$

ある... は

$$D(s) = s^2 + as + b^2 + ks^2 \quad (1-12)$$

二の場合回路の Q は

$$Q = \frac{\sqrt{b^2 + k}}{a} \quad (1-13)$$

○ 与えられる。この回路の Q は増幅器の利得の平方根に比例するため、 Q の
高い回路を実現するには、高利得増幅器を必要とする反面、安定度は非常
に良好なものが得られる。この場合の Q sensitivity は

$$S_k^Q = \frac{1}{2}$$

となる。この方式属する回路としては、(b) および (c) のうち負帰還形の
回路がある。(c) の回路は引算法、加算法いずれの回路にも構成し得るもの

で、本研究と関係が深いため、ここで簡単に説明しておく。

図 1-2 に示す回路の電圧伝送関数は、

$$T(s) = \frac{E_2}{E_1} = \frac{-K_1 Y_{31}}{Y_{33} - K_2 Y_{32}} \quad (1-14)$$

で与えられる。ここで K_1, K_2 は電圧増幅器の利得であり、 Y_{ij} は図 1-2 に示す RC 三端子対回路網の短絡アドミタンスパラメータである。式 (1-14) で、 Y_{33} の零点は負の実軸上にしか存在しないが、 Y_{31}, Y_{32} の零点は s 平面内の任意の位置に存在し得るから、式 (1-14) は任意の伝送関数を実現できる。 $K_2 > 0$ の回路は引算形となり、 $K_2 < 0$ の回路は加算形となる。

この代表的な回路として Sallen, Key の回路がある。図 1-3 に主な回路を示す。これらはいずれも 2 次伝送関数の実現回路であるため、これと多段を重ねて、 n 次を構成する。 n 次伝送関数を式 (1-14) で一度に構成するには、一般には容易でなく増幅器と複数個使用した回路となる。

その他、第 1 章目に属する方法は数多く発表されているが、根本的には、(a), (b), (c), (d) のいずれかに属するものである。

最近第 2 の方法が注目を浴びつつある。その理由として第 2 の方法は受動回路網の持つ特長とそのまま受け継いでいるという点にある。回路網中のインタクタンスを実現する方法としては、容量終端したジャイレータを用いる方法がその主流となつていゝが [11]、最近では抵抗終端の Rotator の使用が提案されている [13]。兩者共その根本としてゐる点に同じであるため、ここではジャイレータ + 容量の回路について述べよう。ジャイレータはその F-マトリックスが次式で表わされる回路をいう。

$$(F) = \begin{pmatrix} 0 & Y_G \\ G & 0 \end{pmatrix} \quad (1-15)$$

この回路の出力に容量 C と図 1-4 のように接続したとき、入力からみたインピーダンス Z_{in} は

$$Z_{in} = sC/G^2 \quad (1-16)$$

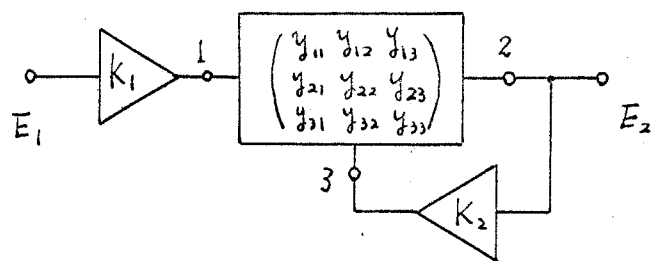
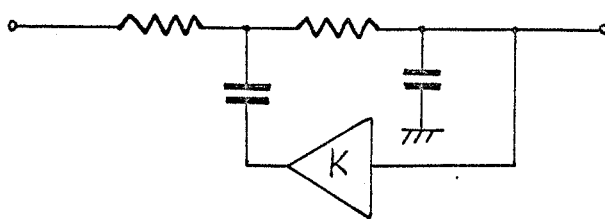
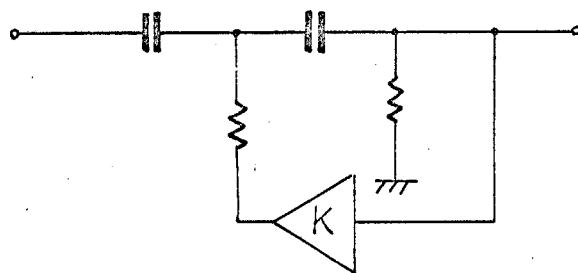


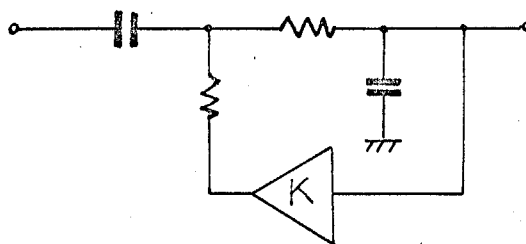
图 1-2 反馈形 RC 能态电路



(a)



(b)



(c)

图 1-3. Sallen & Key 二阶电路

で与えられる。すなわちインダクタが実現できた。図1-4の回路を受動LCR回路中のLに置換すれば、全く等価な回路が得られる。ただしこの問題となることは、共通帰線からその両端が浮いたインダクタンスの実現問題である。

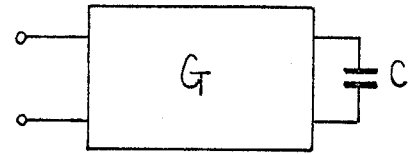


図1-4 ジャイレータによるインダクタンスの実現

ある。これはジャイレータが接地形である関係上、このようなインダクタンスの実現は非常に困難である。電流源を用いてジャイレータを浮かす方法とか、あるいは浮いてゐるインダクタンスも等価的に接地インダクタンスに置き換える方法等が考えられているが、まだ完全なものとはいえない。

以上従来の発表されてゐる構成法について簡単に説明したが、こゝでまとめの意味として、受動LCR回路網と能動RC回路の比較を表1に示す。

項目	受動LCR回路	RC能動回路
実現条件	正実関数	正実関数
インダクタの使用	不可欠	不必要
使用可能周波数	約1 kHz以上	約100 kHz以下
回路の小形化	インダクタを使用する限り期待できない	集積化が可能
安定度	絶対安定	不安定となる可能性あり
sensitivity	小	一部の回路は小だが、大部分の回路は大
電源	不要	能動素子を含むため必要
組み立て後の調整	可能	一部の回路は可能

表1. 受動LCR回路とRC能動回路の比較

第二章 係数可変形RC能動回路の構成

§2-1 まえがき

RC能動回路はインダクタンスの使用を避けて、回路を小形集積化するため現在まで数多くの方法が発表され、最近では実験室的段階より実用化への道を歩もうとしている。現在まで発表されているRC能動回路は大別すると、帰還形(制御電圧形)、負性インピーダンス変換器形、ジャイレーフ形、演算増幅器形があり、それぞれ sensitivity, 調整, 構成のし易さなどで一長一短があり、いま決定的な回路はないようである。

RC能動回路は構成後の特性の調整はほとんど不可能である。一方設計通りに構成されている回路でも、素子の誤差, 浮遊容量, 能動素子の不完全さなどの原因により、その特性の調整が必要になる場合が多い。また特性根の位置の可変, あるいは目的関数のすべての s の係数の可変は、回路設計が簡単になるばかりでなく、たゞ一種類の回路で任意の関数を実現できること、すなわち汎用フィルタとして大量生産のユースに乗り易く、実用化への道が開かれていると考えられる。くし形フィルタの様に、並列に特性の似たフィルタを必要とする場合、また特性の可変と利用した自動形等化器などにも、係数の可変とすることのできるフィルタは便利であろう。

目的関数, s の係数を可変とする方法には、受動素子を変化させる方法、能動素子の利得を変化させる方法が考えられるが、前者は一般に受動素子一つを変化させると、受動回路部のすべての特性根の位置が変わるため、可変とある対象(例えば一つの係数, ある根の位置)に一対一に対応させることが困難である。これを可能にするためには、CR一段毎に縁切り形の回路として下記の(1)に示す種分格と多く用いた回路がある。また、後者では能動素子の利得が目的関数の分母・子に同時に作用する回路、例えばNICを用

1. 正相帰還回路では、係数と独立可変とできない。また可変とするヶ所の減少により能動素子を多数個使用せざる回路が必要である。積分器等、特殊な能動素子と必要とせず、上記の条件と合う回路として最適と思われる回路は、図1-2に示す帰還形の回路であり、入力側の増幅器は分子多項式に、帰還側の増幅器は分母多項式にそれぞれ独立に作用している。必要に応じてRC回路の端子数を増やすことにより増幅器の数を増やすことができ、可変部分と多くすることが可能である。

本章では、帰還形の構成法で任意の次数の伝達関数、2端子イミタンス、および2端子対回路のすべてのパラメータの係数と、増幅器(制御要素)の利得により互いに独立して制御できる回路について述べる。従来の方法で伝達関数の係数を可変とすることのできる回路は、

(1) 積分器を用いた状態変数形RC能動回路[12]

(2) R. J. A. Paul の回路[15][16]

がある。(1)の方法は積分器として完全な回路が得難いという欠点がある。

(2)の方法は2次~4次関数について発表されている回路で、伝達関数の分子多項式と分母多項式を構成する回路が別であるため、素子数が非常に多くなる欠点がある。これから述べる構成法はRC受動回路網の展開方法と工夫することにより、分子分母多項式を同一回路で構成するため素子数は(2)の方法に比べて著しく少ない。

RC能動回路網の構成は従来多くの場合、伝達関数の実現のみについて着目され、2端子対パラメータの構成についてはあまり発表されてないようである。ことに係数可変の立場からその構成法を述べている論文は、まだないようである。本章では2端子対パラメータのすべての係数をも増幅器の利得により独立可変とすることができるとを示した。まず、2-2では帰還形RC能動回路の特質について述べ、2-3では、伝達関数の構成について、電圧伝送形および伝達アドミタンス形の両者について述べた。2-4は、2端子イミタンスの構成、2-5では、2端子対回路網の構成について述べた。

§ 2-2 帰還形 RC 能動回路 (Feedback-Feedforward 回路)

図 2-1 のような RC 多端子対回路網のアドミタンスパラメータ

$$(y_{ij}) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \quad (2-1)$$

とする。いま例之び入力 $E_1 - 1'$ とし、出力 $E_n - n'$ としたとき、 $1 \sim k$ 端子対には入力電圧に比例した電圧 E 、すなわち $k+1 \sim n-1$ 端子対には出力電圧に比例した電圧 E を加えたとき、その電圧利得 T は

$$T = \frac{E_n}{E_1} = \frac{-\sum_{i=1}^k K_i y_{ni}}{y_{nn} + \sum_{j=k+1}^{n-1} A_j y_{nj}} \quad (2-2)$$

で与えられる。ただし K_i, A_j は比例定数である。式 (2-2) でわかったように入力側の電圧源の比例定数 K_i は電圧伝達関数の分子に、すなわち帰還路の電圧源の比例定数 A_j は分母にそれぞれ独立に関係している。もし $k+1 \sim n-1$ 端子対には出力電流に比例した電圧 E を加えると、その伝達アドミタンス Y_T は

$$Y_T = \frac{I_n}{E_1} = \frac{-\sum_{i=1}^k K_i y_{ni}}{1 + \sum_{j=k+1}^{n-1} R_{mj} y_{nj}} \quad (2-3)$$

で与えられる。ただし R_{mj} は抵抗の次元を持つ比例定数である。この場合も前と同様帰還路の R_{mj} は分母多項式のみに関係している。

一般に、ある入力 I に対する応答 O を考えてみると、この回路網が受動素子と入力 I あるいは応答 O を reference とする制御電源のみで構成されている。

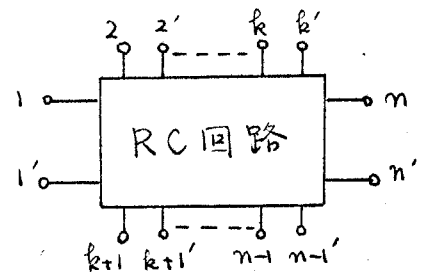


図 2-1 RC n 端子対回路網

ならば、重ねの理を用いて、その入力応答特性は、つぎのように求められる。^{*}

$$0 = T_1 I + \sum_i k_i T_i I + \sum_j A_j T_j O \quad (2-4)$$

ただし、 T_i は i 番目の電源だけが存在する場合のその電源から出力への伝達関数であり、 k_i は入力と reference とする制御電源の利得、 A_j は応答を reference とした制御電源の利得である。式 (2-4) よりつぎの結果を得る。

$$\frac{O}{I} = \frac{T_1 + \sum_i k_i T_i}{1 - \sum_j A_j T_j} \quad (2-5)$$

この結果より一般に、入力に比例した制御電源の利得は応答関数の分子に、また応答に比例した制御電源の利得はその分母に、それぞれ独立して影響する。前述の例では、入力と E_1 、応答と E_n ある…は I_n と考えればよい。次節以下で、この Feedback-Feedforward 回路を用いて任意の伝達関数、2 端子ポッドモダンス、2 端子対ポッドモダンスパラメータすべての係数を独立して制御できる回路の構成法について述べる。

* このような回路も Feedback-Feedforward 回路と呼ぶことはする。

§ 2-3 伝達関数の構成 [14]

2-3-1 電圧伝達関数の構成

(i) 回路の概要

一般にフィルタの伝達関数 $T(s)$ は、つぎの分式で表わされる。

$$T(s) = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \dots + a_m}{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_m} \quad (2-6)$$

ただし a_i, b_i は実定数であり、もちろん式 (2-6) の分母多項式は Hurwitz 多項式である。式 (2-6) の係数 $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_m$ は互いに独立して変化させる回路について考察する。この場合電圧伝達関数の原理を考えると、式 (2-2) を用いる。すなわち図 2-1 に示す RC n 端子対回路網の出力と n とし端子対 $1 \sim k$ には入力に比例した電圧を、端子対 $k+1 \sim m-1$ には出力に比例した電圧を加えるとする。図 2-2 にこの回路を示す。(簡単のため $n=2$ は共通帰線回路としてある。) この回路の電圧伝達関数 T は

$$T = \frac{E_n}{E_1} = \frac{-\sum_{i=1}^k K_i y_{ni}}{y_{nn} + \sum_{j=k+1}^{m-1} A_j y_{nj}} \quad (2-7)$$

ここで K_i, A_j は図 2-2 の各増幅器の利得であり、これら増幅器は無限大の入力インピーダンス、零出力インピーダンスを持つものとする。式 (2-7) で分母、分子多項式の係数を K_i, A_j により独立可変とするためには、つぎの条件を満足しなければならない。

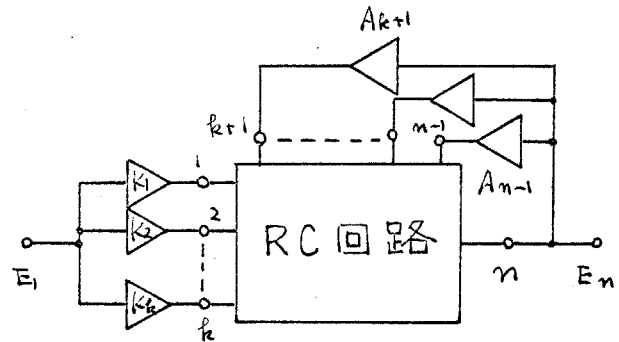


図 2-2 多入力-多帰還 RC 能動回路

(1) y_{nn} , y_{ni} の分母多項式はすべて等しい。

$$(2) \quad y_{ni} = \frac{C_i s^\alpha}{K(s)} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, m) \quad (2-8)$$

ただし C_i は定数, $K(s)$ は負の実根のみを有する多項式である。

式(2-8)を式(2-7)に代入して総和が式(2-6)の分母・分子多項式の項数だけであることに注意して整理すると, つぎの結果が得られる。

$$T(s) = \frac{-\sum_{i=0}^m K_i C_i s^i}{Q(s) + \sum_{j=0}^m A_j C_j s^j} \quad (2-9)$$

ここで $Q(s)$ は y_{nn} の分子多項式で負の実根のみよりなる多項式である。

式(2-9)より A_j , K_i により各係数と独立可変とすることができ。すなわち, 増幅器の利得により伝送関数の分母・分子の係数を独立に変化させることができる。

上記の条件(1), (2) を満足するような伝達アドミタンス y_{ni} を, それぞれ独立端子から終端子までの伝送として, 0次から n 次まで得る回路は図2-3の Flow-Graph により考察することができ。ここで各節点間の数字は, その節点間の伝達アドミタンスの分子の次数であり, 円内の数字はその端子より出力端子への伝達アドミタンスの分子の次数である。図2-3の各節点間を一つの基本回路として零次の場合は図2-4aと, また一次の場合は図2-4bと構成し, これを連続接続して図2-4cのように構成する。すなわち, 零次の次数だけの容量を直列枝に含むような回路を求めればよい。この場合, 各節点間と緩衝増幅器等を用いて縁切り形とすれば, 問題はたゞのであるが, 非常に数多くの増幅器を必要とする。これを解決するには, 節点a, b, c, d, eのように二つの回路が接続されている場合は, その点より左側をみた二つの回路のアドミタンスの分母多項式が互いに等しくなるようにしなければならない。これをつぎの定理で簡単に説明する。

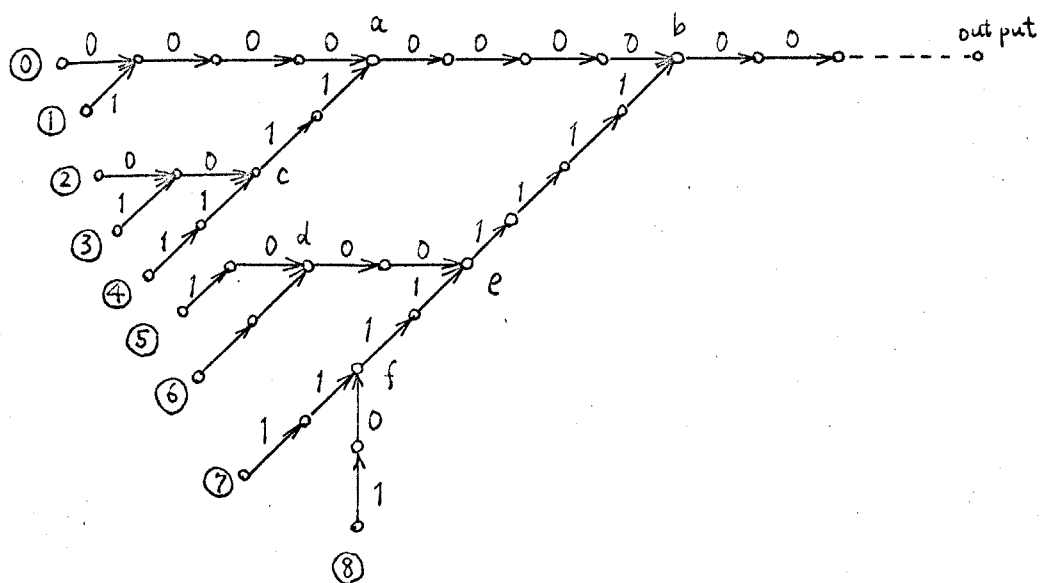
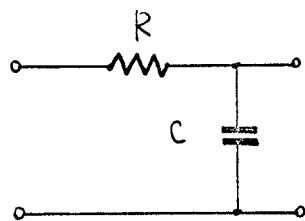
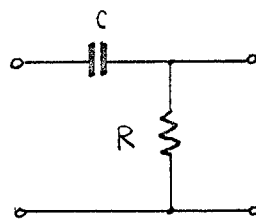


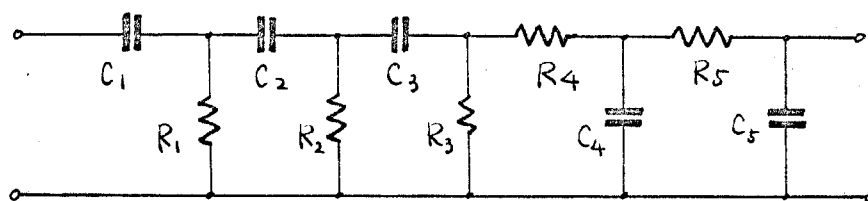
図 2-3 RC回路部の Flow-Graph



(a) 基本回路(L.P.)



(b) 基本回路(H.P.)



(c) 基本回路の連続接続

図 2-4 RC はしり形回路

(定理 2-1) 図 2-5 に示される 3 端子対回路網の端子対②より④への伝達アドミタンス y_{n2} は次式で示される。

$$y_{n2} = y_{n1} \frac{y_{k2}}{y_{k1}} \quad (2-10)$$

ただし y_{n1} は端子対①より④への伝達アドミタンス, y_{k1}, y_{k2} はそれぞれ端子対①より③へ, また端子対②より③への伝達アドミタンスである。

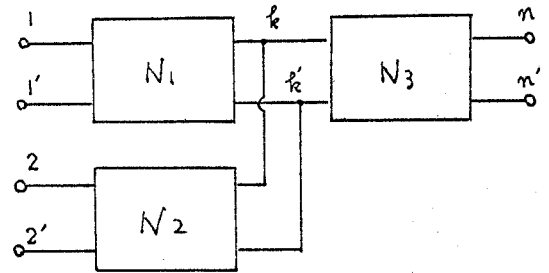


図 2-5 三端子対回路網

(証明) 図 2-5 の N_1, N_2, N_3 の F-パラメータをそれぞれ添字 1, 2, 3

で表わすものとすると, 端子対②より④への伝達アドミタンス y_{n2} は

$$\frac{1}{y_{n2}} = \left(A_2 + \frac{B_2}{B_1} A_1 \right) B_3 + B_2 D_3 \quad (2-11)$$

となり, また端子対①より④への伝達アドミタンス y_{n1} は,

$$\frac{1}{y_{n1}} = \left(A_1 + \frac{B_1}{B_2} A_2 \right) B_3 + B_1 D_3 \quad (2-12)$$

と与えられる。一方式 (2-11) より

$$\frac{1}{y_{n2}} = \frac{B_2}{B_1} \left[\left(A_1 + \frac{B_1}{B_2} A_2 \right) B_3 + B_1 D_3 \right] \quad (2-13)$$

が得られ, 式 (2-13) と (2-12) より

$$\frac{1}{y_{n2}} = \frac{B_2}{B_1} \frac{1}{y_{n1}} = \frac{y_{k1}}{y_{k2}} \frac{1}{y_{n1}} \quad (2-14)$$

が得られる。

(証明終)

この定理は, 図 2-3 の節点 a, b, c, d, e のように二つの回路が接続されているような場合の伝達を表わすものである。式 (2-10) より y_{k1} の分母の項式は y_{n2} の伝達零点となることがわかる。こゝでは回路は RC

のみから構成されているから、 y_{k1} の分母は負の実数のみを有する多項式である。いま y_{n1} の分子は単項で実現されているとしよう。一方式(2-8)の条件から y_{n2} の分子も単項でなければならず、多項式では不都合である。したがって y_{k2} の分母多項式と y_{k1} の分母多項式を等しくする必要があり、すなわち、 y_{k1} の零点は y_{n1} の零点に含まれているから結局 y_{n2} の零点は、 y_{n1} の零点から y_{k1} の零点が除かれ、 y_{k2} の零点が新たに加わる形となる。実際の RC 回路部の構成はこの点を考慮して構成する。

(ii) RC 回路部の構成

式(2-8)の伝達アドミタンスは、式(2-7)の y_{nn} と図 2-3 に基づいて、定理 2-1 を用いてつぎの方法により展開すればよい。

(Step 1) 目的関数の次数を m とすると、 y_{nn} として分母多項式が $m-1$ 次、分子多項式が m 次の RC = 端子アドミタンス関数と適当に定め、これをつぎのように二つの関数と分割する。

$$y_{nn} = \frac{Q(s)}{K(s)} = \frac{Q_1(s)}{K(s)} + \frac{sQ_2(s)}{K(s)} \equiv y_{nn1} + y_{nn2} \quad (2-15)$$

ただし、 $Q_1(s)/K(s)$ 、および $sQ_2(s)/K(s)$ は RC = 端子アドミタンス関数である。^{**}

(Step 2) $Q_1(s)/K(s)$ および $sQ_2(s)/K(s)$ をはしご形回路に展開するのであるが、 $Q_1(s)/K(s)$ は直列枝が抵抗、並列枝が容量で構成される低域通過形に、 $sQ_2(s)/K(s)$ は直列枝が容量、並列枝が抵抗で構成される高域通過形に、分子の次数が共に $m/2$ (m : 偶数)、あるいは $(m-1)/2$ (m : 奇数) になるまで展開する。

(Step 3) step 2 の展開に残った関数と再び式(2-15)分割を行い、step 2 の操作を繰り返す。以下残りの関数が 2 次あるいは 3 次となるまで step 1 ~ step 3 の操作を繰り返すことにより、展開は終了する。

* y_{nn} の選定により増幅器の必要増幅度、素子値の大きさ、素子精度などが決定されるが最適の選定については、与えられている。

** この分割は文献(3)に証明されている。

たとえば $m=8$ となれば Y_{nn} は 8 次 / 7 次の関数を展開すると図 2-6 に示す回路が得られる。端子 ① より ⑭ へは $S^0/K(s)$, ② から ⑭ へは $S^1/K(s)$ 以下図に示すように $S^8/K(s)$ までの伝達アドミタンスが独立して入力端子から出力端子 ⑭ へ特性として得られる。なお図 2-6 では同一次数の伝達アドミタンスを与える端子が複数個存在する。したがって、端子 ③, ④, ⑦, ⑧, ⑪, ⑫ は不要である。すなわち、点 a, b, c での関数の分割は必要でなく、そのまま展開すれば素子数は減少し回路を単純化するこ
とができる。

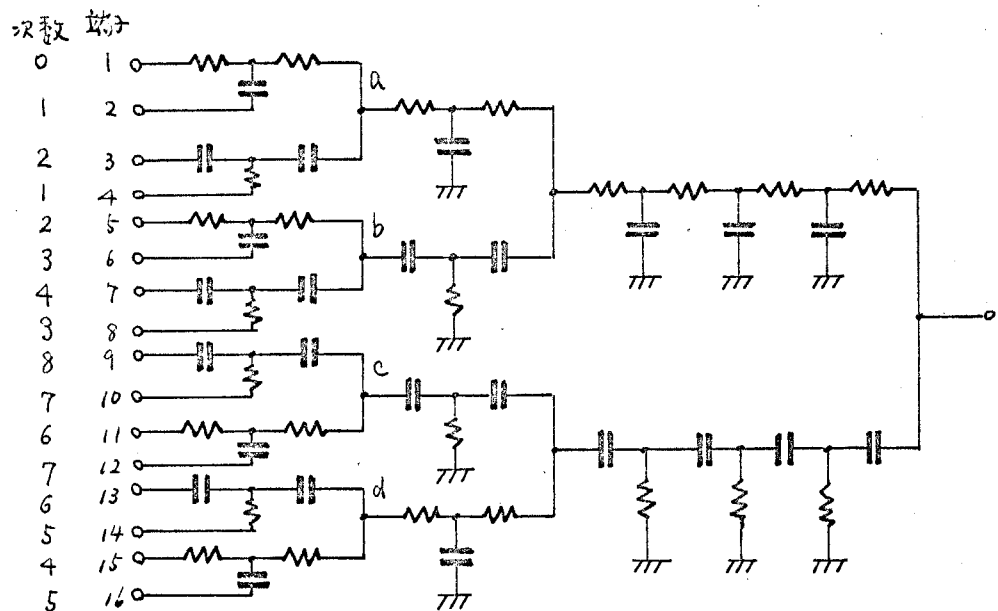


図 2-6 八次の Y_{nn} の展開

上記の展開は、高次の関数の場合は非常にめんどうな計算を必要とするが、以下の方法によれば、手数を半分以下にすることができるといえる。

(定理 2-2) RC 回路網のすべての抵抗 R_i に $1/R_i$ の値を持ち、容量 C_i と、またすべての容量 C_i に $1/C_i$ の値を持ち、抵抗と置き換えると、RC アドミタンス関数は、置き換之前と置き換之後とつぎのような関係が成立する。

$$Y'_{ij}(s) = s Y_{ij}(1/s)$$

(2-16)

ただし $Y_{ij}(s)$, $Y'_{ij}(s)$ はそれぞれ置き換之前, 置き換之後の回路のアドミタンス関数である.

(証明) 置き換之前の回路のアドミタンスマトリクスをつきのように表わす.

$$(Y) = \begin{pmatrix} C_{11}s + G_{11} & C_{12}s + G_{12} & \cdots & C_{1n}s + G_{1n} \\ C_{21}s + G_{21} & C_{22}s + G_{22} & \cdots & C_{2n}s + G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1}s + G_{n1} & C_{n2}s + G_{n2} & \cdots & C_{nn}s + G_{nn} \end{pmatrix} \quad (2-17)$$

これより置き換之後のアドミタンスマトリクスは $G_{ij} \rightarrow C_{ij}$, $C_{ij} \rightarrow G_{ij}$ と置き換えて

$$(Y') = \begin{pmatrix} G_{11}s + C_{11} & G_{12}s + C_{12} & \cdots & G_{1n}s + C_{1n} \\ G_{21}s + C_{21} & G_{22}s + C_{22} & \cdots & G_{2n}s + C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}s + C_{n1} & G_{n2}s + C_{n2} & \cdots & G_{nn}s + C_{nn} \end{pmatrix} \quad (2-18)$$

と得られる. 式(2-17)より回路のアドミタンスパラメータ $Y_{ij}(s)$ は

$$Y_{ij}(s) = \frac{\Delta(s)}{\Delta_{ij}(s)} \quad (2-19)$$

で与えられる. ただし $\Delta(s) = |Y|$ であり, $\Delta_{ij}(s)$ は式(2-17)の i 行 j 列目を取り除いた小行列式である. 式(2-19)より

$$Y_{ij}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{\Delta\left(\frac{1}{s}\right)}{\Delta_{ij}\left(\frac{1}{s}\right)} = \frac{s^{n-1} \Delta'(s)}{s^n \Delta'_{ij}(s)} = \frac{1}{s} \frac{\Delta'(s)}{\Delta'_{ij}(s)} \quad (2-20)$$

ただし $\Delta'(s)$, $\Delta'_{ij}(s)$ は式(2-18)の行列式および小行列式である.

$$Y'_{ij}(s) = \frac{\Delta'(s)}{\Delta'_{ij}(s)} \quad (2-21)$$

であるから, 式(2-20)(2-21)より

$$Y'_{ij}(s) = s Y_{ij}(s) \quad (2-22)$$

(証明終)

この変換を $CR-RC$ 変換と呼ぶことにする。定理 2-2 により, RC 回路の構成で step 2 の展開は低域通過形, ある...は高域通過形いずれか一方を展開し他方は $CR-RC$ 変換によって求めればよい。正にこの場合, $Y_{ij}(s)$ の分母多項式は, $CR-RC$ 変換によって $Y_{ij}(s)$ の分母多項式と等しくならなければならない。したがって $Y_{ij}(s)$ の分母多項式の係数は, s の降べきの順に並べたとき対称でなければならない。多項式の係数を対称に並べれば, つぎの定理によればよい。

(定理 2-3) 負の実根のみを有する多項式

$$p(s) = (s + \alpha_1)(s + \alpha_2)(s + \alpha_3) \cdots (s + \alpha_n) \quad (2-23)$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n > 0$$

を展開したとき, その係数が対称となるための必要十分条件は,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \alpha_2 &= \alpha_3 \alpha_4 = \alpha_5 \alpha_6 = \cdots = \alpha_{n-1} \alpha_n = 1 \quad (n: \text{偶数}) \\ \alpha_1 &= \alpha_2 \alpha_3 = \alpha_4 \alpha_5 = \cdots = \alpha_{n-1} \alpha_n = 1 \quad (n: \text{奇数}) \end{aligned} \right\} \quad (2-24)$$

が成立することである。

(証明) まず必要性の証明をしよう。係数が対称であるから次式が成立することは明らかである。

$$p(s) = s^n p\left(\frac{1}{s}\right) \quad (2-25)$$

式(2-23)より

$$s^n p\left(\frac{1}{s}\right) = (\alpha_1 s + 1)(\alpha_2 s + 1) \cdots (\alpha_n s + 1) \quad (2-26)$$

が得られる。したがって, 式(2-26)の根は

$$s = -\frac{1}{\alpha_1}, -\frac{1}{\alpha_2}, \dots, -\frac{1}{\alpha_n} \quad (2-27)$$

式(2-27)と(2-23)の根が等しいのであるから,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 1 \quad (2-28a)$$

ある...は

$$\alpha_i = 1/\alpha_j \quad (j \neq i)$$

すなわち, $\alpha_i \alpha_j = 1 \quad (j \neq i) \quad (2-20b)$

が成立する. しかし式(2-28a)のRC関数の分母多項式として, 不都合であるから, 結局

$$\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_3 \alpha_4 = \alpha_5 \alpha_6 = \dots = \alpha_{n-1} \alpha_n = 1$$

ある...は,

$$\alpha_1 = \alpha_2 \alpha_3 = \alpha_4 \alpha_5 = \dots = \alpha_{n-1} \alpha_n = 1$$

つぎに十分条件であることを示そう. 式(2-24)が成立し, 2...3場合式(2-23)はつぎのように書き改められる.

$$P(s) = (s^2 + b_1 s + 1)(s^2 + b_2 s + 1) \dots (s^2 + b_{n/2} s + 1)$$

(n: 偶数) (2-29)

$$P(s) = (s+1)(s^2 + b_1 s + 1)(s^2 + b_2 s + 1) \dots (s^2 + b_{n/2} s + 1)$$

(n: 奇数) (2-30)

そこで $s \rightarrow 1/s$ と変換すると,

$$P(1/s) = (\frac{1}{s^2} + b_1 \frac{1}{s} + 1)(\frac{1}{s^2} + b_2 \frac{1}{s} + 1) \dots (\frac{1}{s^2} + b_{n/2} \frac{1}{s} + 1) \quad (2-31)$$

$$\text{より} \quad s^n P(1/s) = (s^2 + b_1 s + 1)(s^2 + b_2 s + 1) \dots (s^2 + b_{n/2} s + 1) \quad (2-32)$$

式(2-25)は充分条件でもあるから, 式(2-32)より $P(s)$ は係数が対称とわかる. (証明終)

以上の操作によって得られたRC端子回路網を図2-2のRC回路に用いて式(2-9)と, 目的関数である式(2-6)との係数を等置して各増器の利得を決定すればよい. この場合は, 最初には定めるべき関数は, y_{nn} ではなく, y_{nn1} ある...は y_{nn2} がいずれか一方であり, 他方は定理2-2の変換によって得られる.

(iii) 二次伝送関数の構成

一般に伝送関数は n 次の分数式であるが、これを因数分解して2次式の積として構成する場合が多い。すなわち式(2-6)を因数分解して

$$T(s) = \frac{\pi(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)}{\pi(b_2 s^2 + b_1 s + b_0)} \quad (2-33)$$

となり、

$$T(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} \quad (2-34)$$

を実現すればよい。まず y_{nm} としてこの関数を選び、(この関数は、定理2-2, および定理2-3を満足している。)

$$y_{nm} = \frac{s^2 + 4s + 1}{s + 1} = \frac{2s + 1}{s + 1} + \frac{s(s + 2)}{s + 1} \quad (2-35)$$

式(2-35)の各項をそれぞれ低域通過形、高域通過形回路に展開すると、図2-7aに示すような素子値が簡単な整数比となる並列T形回路が得られる。同図に示すように電圧をそれぞれの端子に加えると、

$$T(s) = \frac{E_2}{E_1} = \frac{K_3 s^2 + 2(K_2 + K_4)s + K_1}{(1 - A_3)s^2 + 2(2 - A_2 - A_4)s + 1 - A_1} \quad (2-36)$$

でその電圧伝送関数を与えられる。 K_i, A_j に対する回路のQ-sensitivityを求めよう。^{**} 式(2-36)の等価Qは

$$Q = \frac{\sqrt{(1 - A_1)(1 - A_3)}}{2(2 - A_2 - A_4)} \quad (2-37)$$

で与えられる。したがって A_i に対する sensitivity は

$$S_{A_1}^Q = \frac{A_1}{Q} \frac{dQ}{dA_1} = - \frac{A_1}{(1 - A_1)(1 - A_3)} \quad (2-38a)$$

$$S_{A_2}^Q = \frac{A_2}{Q} \frac{dQ}{dA_2} = 2Q \frac{A_2}{\sqrt{(1 - A_1)(1 - A_3)}} \quad (2-38b)$$

* 伝送関数が奇数次の場合は、一次式が因数分解によって現われる。これは受動RC回路に構成できるが、係数可変の場合、二次関数と組み合わせ、三次関数として構成してもよい。(iv)参照

** sensitivityに関する詳しい議論は次章に述べる

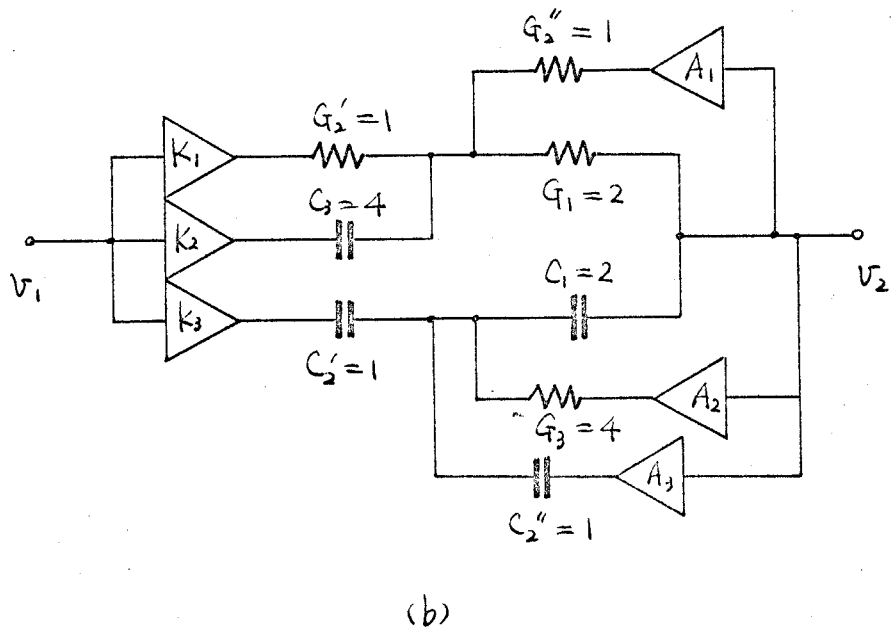
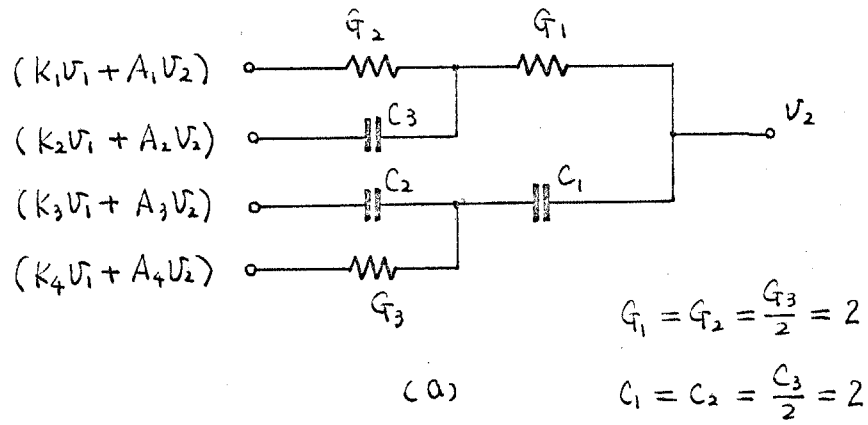


圖 2-7 二 次 低 通 函 數 的 實 現

$$S_{A_3}^Q = \frac{A_3}{Q} \frac{dQ}{dA_3} = - \frac{A_3}{(1-A_1)(1-A_3)} \quad (2-38c)$$

$$S_{A_4}^Q = \frac{A_4}{Q} \frac{dQ}{dA_4} = 2Q \frac{A_4}{\sqrt{(1-A_1)(1-A_3)}} \quad (2-38d)$$

となる。式(2-38)より $S_{A_2}^Q$ および $S_{A_4}^Q$ は回路の Q に比例するため、 Q の高い回路では A_2, A_4 は充分安定でなければならぬ。また $(1-A_1)(1-A_3)$ が大なる方が sensitivity が小さくなる。したがって $A_1 < 0, A_3 < 0$ 、すなわち A_1, A_3 の帰還路は負帰還とするのが良い結果を得られる。これは、もし電圧伝達関数式(2-34)の共振角周波数 ω_0 が図2-7aで決定される角周波数 $1/RC$ より大なるときは、正の A_3 あるいは負の A_1 により周波数を合やすことが出来るが、負の A_1 の方が sensitivity の面から良い結果を得られる。また、 ω_0 が $1/RC$ より小さいときは、負の A_3 あるいは正の A_1 となるが、負の A_3 の方が良く、また $\omega_0 \approx 1/RC$ では、 A_1, A_3 共に負として設計すればよい。

実際の回路構成は図2-7bに示される。ここで零次、および二次伝送を与える端子がそれぞれ2端子必要なため、 C_2, R_2 は2分割して構成する。この回路の伝達関数は、

$$T(s) = \frac{\frac{k_3}{2} s^2 + 2k_2 s + \frac{k_1}{2}}{(1 - \frac{A_3}{2}) s^2 + 2(2 - A_2) s + 1 - \frac{A_1}{2}} \quad (2-39)$$

となる。式(2-39)と目的関数式(2-34)と比較して、係数が等しくなるよう各増幅器の利得を決定すればよい。表2-1に2次伝達関数を与えるときの設計公式を示す。ただし CR は並列回路の容量・抵抗で定まる角周波数であり、便宜上ここでは $b_2 = 1$ あるいは帰還路 A_3 は存在しないものとする。したがって C_2 は分割されるように構成される。

この2次に分解して構成する方法では、これを連続接続したのと同じ場合、全体の伝達関数の係数は増幅器の利得により、独立には変化せず、表の

位置が独立して変化する回路と見る。実際には後者の方が実用的と考えられる。すなわち素子数の面からと2次は分解して構成する方法が高次になるに従って有利である。

関数 $T(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}$, $s = j\omega/\omega_c$	
増幅器	設計公式
K_1	$2(\omega_c CR)^2 a_0$
K_2	$a_1 \omega_c CR / 2$
K_3	a_2
A_1	$2[1 - b_1(\omega_c CR)^2]$
A_2	$2 - b_2 \omega_c CR / 2$

表 2-1 二次関数設計公式

(iv) 3次伝送関数の構成

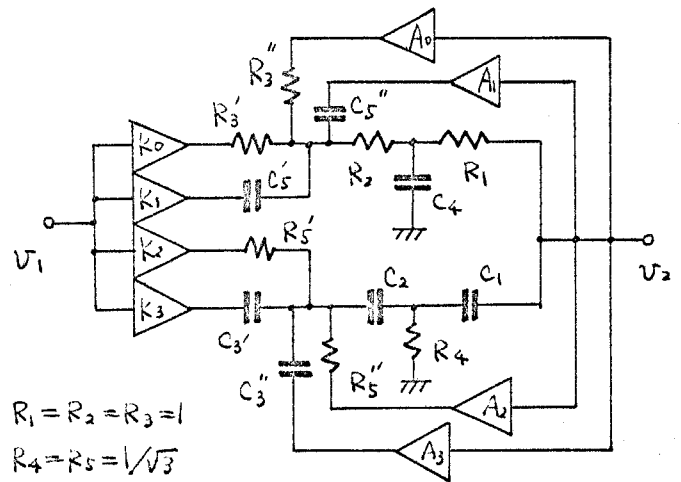
前節で伝送関数を因数分解して構成する方法を述べたが、伝送関数が奇数次の場合には一次関数が現われる。これは受動RC回路で構成できるが、係数可変という立場から、2次関数と組み合わせると3次関数として構成する。まず、 y_{nn} としてつぎの関数を選ぶ。

$$y_{nn} = \frac{s(s^2 + 3\sqrt{3}s + 3)}{3(s^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}s + 1)} + \frac{3s^2 + 3\sqrt{3}s + 1}{3(s^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}s + 1)} \quad (2-40)$$

式(2-40)は定理2-2、定理2-3 を満足し、素子値が簡単となるように選んだ。これを高域通過形、低域通過形のRCはしご形回路に展開し、図2-8のよりに増幅器と接続する。この場合、 s の零次、一次、二次、三次端子がそれぞれ二端子ずつ必要であるため、 R_3, R_5, C_3, C_5 をそれぞれ二分割して構成する。こうすると、図2-8の電圧伝送関数 $T(s)$ は、つぎのように与えられる。

$$T(s) = \frac{K_3 S^3 + \sqrt{3} K_2 S^2 + \sqrt{3} K_1 S + K_0}{(1-A_3)S^3 + (3\sqrt{3}+3-3\sqrt{3}A_2)S^2 + (3\sqrt{3}+3-3\sqrt{3}A_1)S + 1-A_0} \quad (2-41)$$

なおし A_i K_i は各増幅機の利得である。式(2-41)と目的関数の係数を等置して、各増幅機の利得も決定されけり。なお、目的関数の分子の項式に欠項のある場合は、その次数の端子を帰還側を使用すれば、素子数は減少し、また帰還側の増幅機の利得は上記の $1/2$ とする事ができる。もし伝送レベルを



$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = R_3 = 1 \\ R_4 &= R_5 = 1/\sqrt{3} \\ C_1 &= C_2 = C_3 = 1 \\ C_4 &= C_5 = \sqrt{3} \end{aligned}$$

図2-8 三伝送関数実現図

問題としなから、 $K_3=1$, $A_3=0$ とする事ができる。なお感度の面から考えると、 $A_3, A_0 < 0$ となれば自帰還として構成する方が好ましい。

2-3-2 伝達アドミタンスの構成

前節では電圧伝送関数の構成について述べたが、本節では伝達アドミタンスの構成について述べよう。この場合は式(2-4)で応答として、出力電流を考えればよい。すなわち図2-1で、端子対1～ k には入力に比例した電圧を加え、出力端子短絡電流に比例した電圧を $k+1 \sim n-1$ 端子対に加えるものとすると、その伝達アドミタンス Y_T は式(2-3)より

$$Y_T = \frac{I_n}{E_1} = \frac{\sum_{i=1}^k K_i Y_{ni}}{1 + \sum_{j=k+1}^n R_{mj} Y_{nj}} \quad (2-42)$$

となり、この場合も電圧伝送関数の場合と全く同様。条件式(2-8)を満足すれば、係数独立可変とする事ができる。構成法は電圧伝送関数の場合

と全く同様である。式(2-8)を代入すると、

$$Y_T(s) = \frac{\sum_{i=0}^m k_i C_i s^i}{K(s) + \sum_{j=0}^m R_{mj} C_j s^j} \quad (2-43)$$

が得られる。ただし $K(s)$ は受動回路部の RC アドミタンスパオラキータの分母多項式であり、 R_{mj} は電流電圧変換器の利得である。式(2-43)と目的伝達アドミタンスと係数を等置して、各増幅器の利得を決定すればよい。構成例については後述することにする。

§2-4 二端子インミタンスの構成

前節では電圧伝達関数、および伝達アドミタンスの構成について述べたが、本節では二端子インミタンスの構成について述べる。まず目的二端子アドミタンス $Y(s)$ をつぎのように表わす。

$$Y(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0} \quad (2-44)$$

ただし $a_m, a_{m-1}, \dots, a_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_0$ は実定数である。

二端子アドミタンスは、入力 E_1 に対する応答である入力電流の比であるから、§2-2 の式(2-4)において、応答として入力電流をとればよいことがわかる。また二端子インピーダンスは、入力電流 I_1 に対する応答となるわけ入力端電圧 E_1 との比であるから、式(2-4)で応答として E_1 を考えればよい。この両者はどちらを目的として構成しても、入力端を電圧源で駆動するか、あるいは電流源で駆動するかにより、二端子アドミタンス、二端子インピーダンスの実現になるかが決定される。

図2-9のように、端子対1を入力とし、端子2～ n には入力電圧に比例した電圧を、端子 $n+1 \sim m$ には入力電流に比例した電圧を加えると、その

入力アドミタンス Y_{in} は

$$Y_{in} = \frac{I_1}{E_1} = \frac{y_{11} + \sum_{i=2}^k K_i y_{1i}}{1 - \sum_{j=k+1}^n R_{mj} y_{ij}} \quad (2-45)$$

となる。ただし K_i, R_{mj} はそれぞれ電圧増幅率の利得、電流電圧変換器の変換定数である。式(2-45)で K_i, R_{mj} により Y_{in} の各係数と独立変化させるためには、式(2-8)の二条件を満たすればよい。これは、伝送関数の場合と全く同様である。いま

$$\left. \begin{aligned} y_{11} &= \frac{N(s)}{K(s)} \\ y_{1i} &= \frac{C_i s^\alpha}{K(s)} \end{aligned} \right\} \quad (2-46)$$

と置き、総和が式(2-44)の項数であることに注意して、式(2-43)に代入すると、

$$Y_{in} = \frac{N(s) + \sum_{i=0}^m K_i C_i s^i}{K(s) - \sum_{j=0}^m R_{mj} C_j s^j} \quad (2-47)$$

が得られ、 K_i, R_{mj} により各係数が独立に変化する。

RC回路部の構成法は伝送関数の場合は、 y_{mn} を展開したのと同じであるが、この場合は y_{11} を展開すればよい。(伝達アドミタンス Y_T の構成の際で、 $n=1$ と考えてもよい。) すなわち step 1 ~ step 3 を y_{11} に適用すれば、図2-6に示した枝分かれしたはしご形RC回路が得られる。

つぎに図2-8を電流源に駆動してみよう。入力電流を I_1 とすると、

$$E_1 = \frac{1}{y_{11}} I_1 + \sum_{i=2}^k K_i t_{1i} E_1 + \sum_{j=k+1}^n R_{mj} t_{1j} I_1 \quad (2-48)$$

となる。ただし、 t_{1i} は端子1を開放し他の端子を短絡したときの、端子1から端子1への電圧伝送関数である。 t_{1i} はパラメータを用いて、つぎ

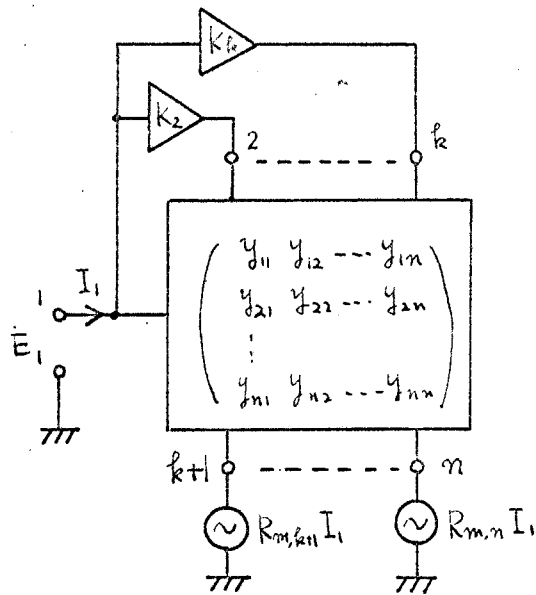


図 2-9 二端子アドミタンスの構成

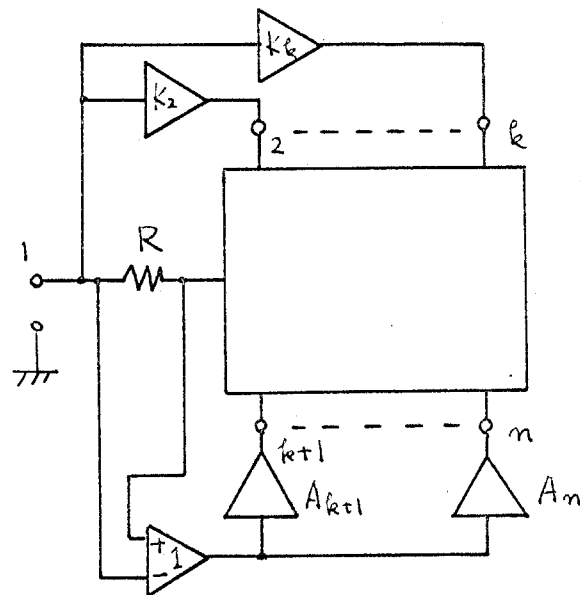


図 2-10 二端子アドミタンスの構成
(差動増幅器を用いた場合)

のように書き表わされる。

$$t_{ii} = -\frac{y_{ii}}{y_{ii}} \quad (2-49)$$

これを式(2-48)に代入して整理すると、

$$Z_{in} = \frac{E_i}{I_i} = \frac{1 - \sum R_{mj} y_{ij}}{y_{ii} + \sum k_i y_{ii}} \quad (2-50)$$

となり式(2-45)の逆数と一致する。

この二端子インミタンスの構成が問題となるのは、入力電流に比例した電圧を取り出す電流電圧変換器の入力端子対が無接地でなければならぬことである。このような回路を構成するのは困難があるため、つぎのような回路上の工夫をすることにする。図2-10に示すように入力端に抵抗を直列に挿入すると、その抵抗の両端には入力電流 I_i に比例した電位差が生じる。この電位差を差動増幅器を用いて取り出せばよく、この場合は接地形の差動増幅器で構成できる。図2-10の入力アドミタンス Y_{in} は、

$$Y_{in} = \frac{I_i}{E_i} = \frac{Y_{ii} + \sum k_i Y_{ii}}{1 - \sum G A_j Y_{ij}} \quad (2-51)$$

で与えられる。ただし $G = 1/R$ 、 Y_{ij} は抵抗 R を含めた点線内の受動回路部のアドミタンスパラメータである。また A_j は差動増幅器の利得も含めた増幅器の利得である。

ここに注意を必要とするのは、§2-3のstep 1で Y_{ii} として選ぶべきRC二端子アドミタンス関数は、分母・分子が同次でかつ

$$Y_{ii} = \frac{A_m s^m + A_{m-1} s^{m-1} + \dots + A_0}{B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \dots + B_0} \quad (2-52)$$

としたとき

$$A_m/B_m > A_0/B_0 \quad (2-53)$$

が成立しなければならぬ。これは抵抗 R を引き出すことができ、かつ残った関数がRC二端子アドミタンス関数となるための条件である。また式(

2-52) から適当な抵抗 R を引き出すと,

$$\frac{1}{Y_{11}} - \frac{B_m}{A_m} = \frac{C_{m-1}S^{m-1} + C_{m-2}S^{m-2} + \dots + C_0}{A_m S^m + A_{m-1}S^{m-1} + \dots + A_0} \quad (2-54)$$

ただし

$$C_i = B_i - \frac{B_m}{A_m} A_i \quad (2-55)$$

したがって, 図 2-10 の R として

$$R = \frac{B_m}{A_m} \quad (2-56)$$

よって

$$Y_{11}' = \frac{A_m S^m + A_{m-1} S^{m-1} + \dots + A_0}{C_{m-1} S^{m-1} + C_{m-2} S^{m-2} + \dots + C_0} \quad (2-57)$$

となる。この残った RC = 端子アドミタンス Y_{11}' と前述の step 1 ~ step 3 の操作を展開すればよい。

§ 2-5 二端子対回路網の構成 (15)

前節の二端子アドミタンスの構成, および伝達アドミタンスの構成と応用して本節では, 二端子対回路網のすべての構成法について述べる。もちろんこの場合も, すべての回路網の係数は増幅率の利得により独立して制御できる回路である。この場合入力 E_1 に対する応答が I_1 および出力電流 I_2 である。 RC の二端子対回路網の端子対①を入力とし, 端子対②は出力とする。端子対③ ~ ④には入力電圧に比例した電圧を, $3 \leq k+1 \leq l$ 端子対には出力電流に比例した電圧を, $l+1 \sim m$ 端子対には出力電圧に比例した電圧をそれぞれ加えるものとする。出力アドミタンス Y_{22} および短絡伝達アドミタンス Y_{21} は次式で与えられる。

$$Y_{22} = \frac{y_{22} + \sum_{i=l+1}^n K_i y_{2i}}{1 - \sum_{j=k+1}^l R_{mj} y_{2j}} \quad (2-58)$$

$$Y_{21} = \frac{y_{21} + \sum_{k=3}^l k_k y_{2k}}{1 - \sum_{j=k+1}^l R_{mj} y_{2j}} \quad (2-59)$$

ただし k_k, K_i, R_{mj} は電圧増幅器, 電流電圧変換器の変換定数(利得)である。式(2-58), (2-59)の y_{2i}, y_{2j}, y_{2k} の形が式(2-8)の条件を満足すれば, Y_{22}, Y_{21} のすべての S の係数を k_k, K_i, R_{mj} により独立可変とすることができ, すなわち y_{ij} の分子多項式がすべて等しく, 端子対②への伝達アドミタンスが次式のようになること。

$$y_{2i} = \frac{C_i S^\alpha}{K(S)} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, m: \text{関数の最高次数})$$

これを式(2-58)(2-59)に代入して整理すると,

$$Y_{22} = \frac{P_1(S) + \sum_{i=0}^m K_i C_i S^i}{K(S) - \sum_{j=0}^m R_{mj} C_j S^j} \quad (2-60)$$

$$Y_{21} = \frac{P_2(S) + \sum_{k=0}^m k_k C_k S^k}{K(S) - \sum_{j=0}^m R_{mj} C_j S^j} \quad (2-61)$$

ただし $P_1(S), P_2(S)$ はそれぞれ y_{22}, y_{21} の分子多項式である。RC回路部の構成は前節の場合と全く同様であるが, 出力電流は比例した電圧を得るために前節の二端子アドミタンスの場合と同じく, 直列に抵抗と出力端に入れると, 能動素子の構成が簡単になる。

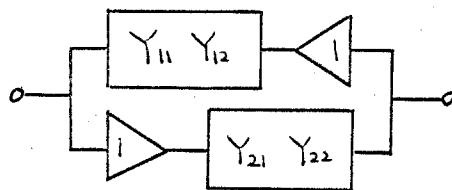


図 2-11 二端子対回路網の実現

式(2-58), (2-59)で Y_{22} , Y_{21} が構成されたのであるが, Y_{11} , Y_{12} は, これの端子①, ②を入れ換えたものと考えればよいから, 図2-11に示すように, Buffer 増幅器を用いて互いに逆向きに並列接続すると, そのアドミタンスパラメータは

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{22} & Y_{21} \end{bmatrix} \quad (2-62)$$

と得られ, 二端子対回路網のアドミタンスパラメータで係数可変回路が実現できた。

§2-6 能動素子の構成

前節までは主として構成論, 特に受動回路部の構成論について述べたが, 本節では能動素子すなわち電圧増幅器, 電流電圧変換器, および差動増幅器の構成について述べよう。

本章に述べられている構成法は理論的には, 目的関数の係数の数だけの能動素子を必要とするが, これでは不経済であるため実際には, 入力側は電圧

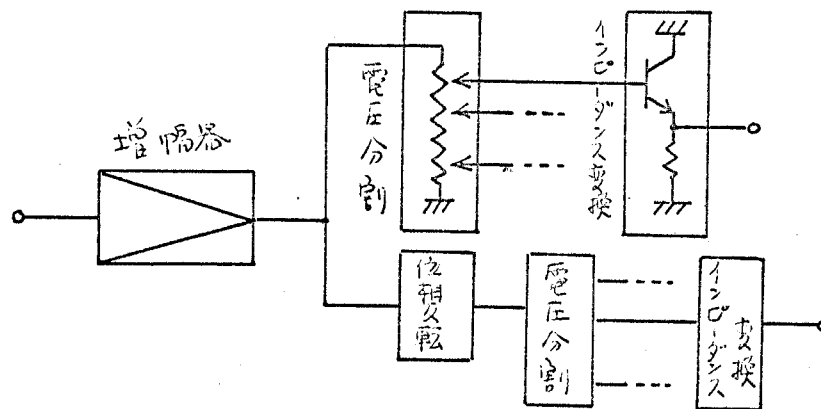


図2-12 増幅器の構成

分割器とエミッタフォロワ等、インピーダンス変換器で、また帰還側は必要とする増幅器中、最大利得と有する増幅器と電圧分割器(インピーダンス変換器を含む)で構成すればよい。すなわち図2-12に示すような回路とすればよい。

(1) 電圧増幅器(電圧-電圧変換器, V.V.T.)

V.V.T.は入力インピーダンス無限大出力インピーダンス零の電圧増幅器で、図2-13 aに示す記号で表わされる。

Nullator-nollator 表示をみると、例えば図2-13 bがある。トランジスタを用いて実際の回路を構成するには、トランジスタも理想的なものと考え、図2-14に示すような nullator-nollator 表示が得られる。これを図2-13 bの回路に使用すると、図2-15に示す負帰還増幅器が得られる。図2-13 aを実現するトランジスタ回路は、他に数多く有るが、ここでは省略して最近実用化されてきた演算増幅器を用いた回路について少し述べてみよう。演算増幅器は理想化すると図2-16に示す nullator-nollator 表示が得られる。すなわち差動入力は動作状態では零となり、また二つの入力端子には電流も流れない。図2-17に示すように、帰還をかけたとき、その電圧利得、入力インピーダンス、出力インピーダンスは、

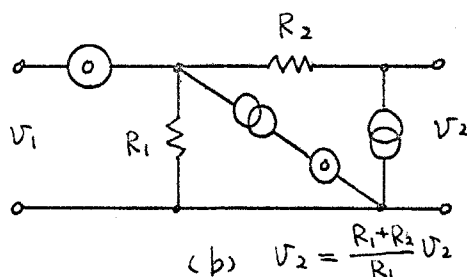
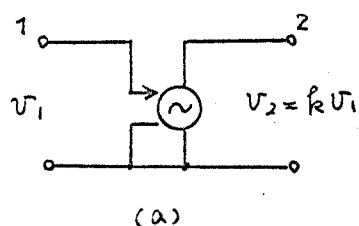


図2-13 電圧-電圧変換器

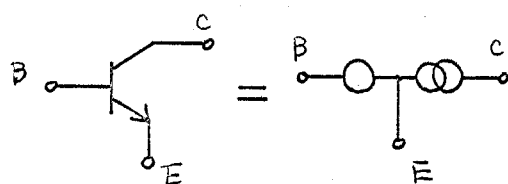


図2-14 トランジスタ等価回路

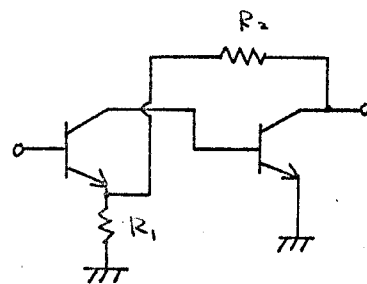


図2-15 V.V.T.の実現図

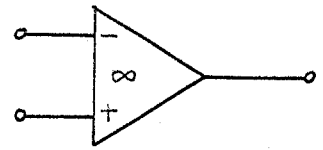
それぞれのように与えられる。ただし演算増幅器の利得は無限大とする。

② Σ 接地した場合、

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{F_2}{E_1} \doteq -\frac{R_1 + R_2}{R_1} \\ Z_{in} &\doteq R_1 + \frac{R_2}{K} \doteq R_1 \\ Z_{out} &\doteq Z_o \cdot \frac{1 + R_2/R_1}{K} \doteq 0 \end{aligned} \right\} (2-63)$$

① Σ 接地した場合

$$\left. \begin{aligned} G &\doteq \frac{R_1 + R_2}{R_1} \\ Z_{in} &\doteq R_1 + \frac{K Z_i}{1 + R_2/R_1} \doteq \infty \\ Z_{out} &\doteq Z_o \cdot \frac{1 + R_2/R_1}{K} \doteq 0 \end{aligned} \right\} (2-64)$$



III

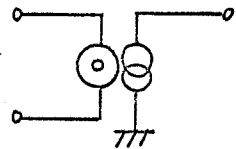


図2-16 演算増幅器

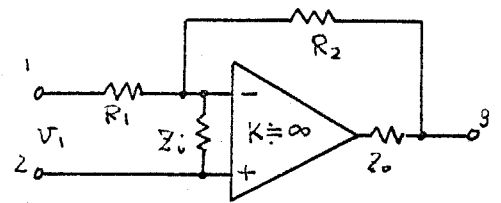


図2-17 演算増幅器はFET V.V.T

ただし Z_o , Z_i はそれぞれ演算増幅器の入出力インピーダンスである。

式(2-63)(2-64)より ① Σ 接地した場合は、ほぼ理想的な V. V. T. が実現できるが、② Σ 接地した場合は入力インピーダンスに問題があるため、回路の入力インピーダンスレベルによっては、FET 等による前置増幅器を必要とすることがある。

RC 能動回路では能動素子の変動に対する特性の変動が大きいため、一般に能動素子は安定でなければならぬ。図2-17の回路では、その利得がほぼ受動素子の値によって決定されるため、受動素子と対等に安定度は考えられる。

ii) 電流電圧変換器 (C. V. T.)

C. V. T. は入出力インピーダンス共に零である制御電源に図2-18aに示さ

れる。nullator-nollator 表示すると同図のようになる。トランジスタ回路では種々考えられるが、基本的な回路として、図2-18Cに示す回路がある。

すなわちベース接地の入力回路、コレクタ接地の出力回路で、入出力インピーダンスをそれぞれ下げている。実際の回路では、高安定度を得たり入出力インピーダンスの特性をより良くするため、帰還

をかけて用いるのが普通である。ここでは演算増幅器を使用した回路について考えてみる。図2-18bと図2-16と比較すると、それぞれ図2-19の回路が得られる。この回路の伝達インピーダンスは

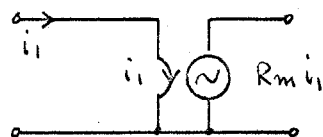
$$Z_T = \frac{E_2}{I_1} = -R \quad (2-65)$$

入力インピーダンスは、差動入力端子には電位差が生じないから、ほとんど零とみなすことができる。この場合問題となることは、図2-19の回路では逆相のC.V.T.しか実現できないため、正相の

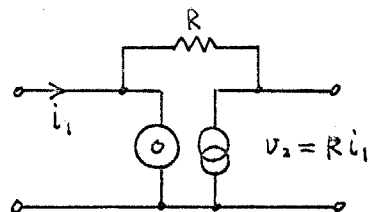
C.V.T.を得るためには、位相反転回路が必要となる。この場合もV.V.T.の場合と同様に、利得(変換定数)は負電圧の値によって定まるため、十分に安定な回路と考えることができる。

iii) 差動増幅器

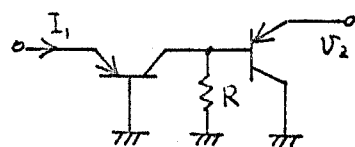
差動増幅器は一般にある電位差を検出するため設計されたもので、



(a)



(b)



$$V_2 \approx R I_1$$

(c)

図2-18 電流-電圧変換器(C.V.T)

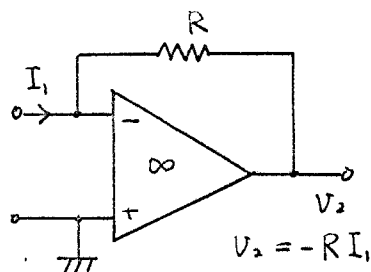


図2-19 演算増幅器によるC.V.T

図2-20aに示すような回路である。出力端子には E_1 と E_2 の差に比例した出力電圧が得られる。演算増幅器は一般にこのような入力構造をしており、本来差動増幅器として使用できる。図2-20bに示す回路は差動増幅回路となり、その利得は、

$$\frac{E_3}{E_1 - E_2} = - \frac{R_1 + R_2}{R_1} \quad (2-66)$$

となる。また①②間のインピーダンスはほぼ無限大と考えられる。しかしながら注意すべき点として、①と接地点間とのイ

ンピーダンスは略々 R_1 となるため、時にはこの大きさが問題となることがある。このような場合にはFET等のインピーダンスを上げるが、あるいは次節で説明するように簡単に特性を補償することが出来る。

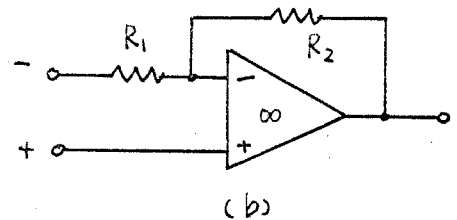
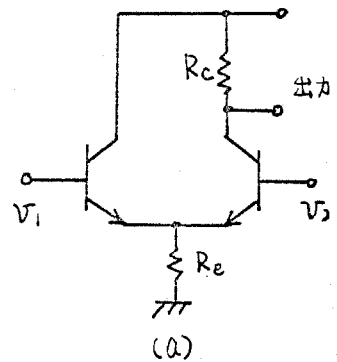


図2-20 差動増幅器

IV) 増幅器の入出力インピーダンスの特性への影響

いままでV.V.T.はすべて無限大入力インピーダンス、零出力インピーダンス、C.V.T.は零入出力インピーダンスとして理論設計を進めてきたが、実際の回路では理想的な増幅器は得難い。そこで増幅器の入出力インピーダンスの伝送特性への影響について調べてみる。出力インピーダンスの影響は一般式として求めることは困難であるが、その増幅器の出力に接続されている素子の偏差、あるいは寄生抵抗と考えればよい(第三章参照)。したがって、素子感度の大きさにより回路のインピーダンスと比較して、出力インピーダンスをどの程度に抑えるべきかを判断しなければならない。

一方、増幅器の入力インピーダンスの伝送特性への影響は、入力側の増幅器に関しては当然全く影響はなく、帰還側の増幅器に対してはつぎのように

して求めることができる。(ここでは電圧伝達関数実現回路について述べるが、他の回路に関しても全く同様に議論を行うことができる。) 増幅器の入カインピーダンス Z_{in} と図 2-2 の端子 n にインピーダンス Z_{in} を接続することによって表わすとき、電圧伝達関数式 (2-7) は、つぎのようになる。

$$T = \frac{E_n}{E_i} = \frac{-\sum K_i y_{ni}}{y_{nn} + 1/Z_{in} + \sum A_j y_{nj}} \quad (2-67)$$

いま、 Z_{in} を純抵抗 R_{in} とすると、式 (2-67) は $y_{nn} = Q(s)/K(s)$ とおいて、

$$T(s) = \frac{-\sum K_i C_i s^i}{Q(s) + K(s)/R_{in} + \sum A_j C_j s^j} \quad (2-68)$$

となる。式 (2-68) と理想的な場合の式 (2-9) と比較すると、伝達零点は全く影響を受けず、分母多項式の係数が大きくなるのである。しかし、この係数の増加分は増幅器の利得 A_j により容易に打ち消すことができるため、入カインピーダンスについては、それほど問題ではないと考えられる。

§ 2-7 構成例および実験結果

前節までで構成論を一応終了にとりして、本節では構成例および実験結果について述べる。

(構成例 I) 電圧伝達関数の構成 1

目的関数として、帯域内偏差 0.25 dB 、最小減衰量 52 dB 、切断周波数 10 kHz の 4 次有極エッジエフ形 L.P.F. とりあげる。その伝達関数は次式で表わされる。

$$T(s) = \frac{s^2 + 7.7000}{s^4 + 1.3999s^3 + 1.9974s^2 + 1.3195s + 0.5354} \quad (2-69)$$

y_{nn1} と定理 2-3 よりつぎのように選ぶ。

$$y_{nn1} = \frac{(s+0.1)(s+0.8)(s+4)}{(s+0.2)(s+1)(s+5)} = \frac{s^3 + 4.9s^2 + 3.68s + 0.32}{s^3 + 6.2s^2 + 6.2s + 1.0} \quad (2-70)$$

式 (2-70) を step 2, step 3 の手順で 1 形回路に展開する。

$$y_{nn1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{0.76923s + \frac{1}{0.43896 + \frac{1}{y_{rk}}}}} \quad (2-71)$$

ここで

$$y_{rk} = \frac{2.96154s^2 + 0.15692s + 0.32}{1.13424s + 0.539532} \quad (2-72)$$

y_{rk} と step 1 の操作でつぎの二つの関数に分ける。

$$\left. \begin{aligned} y_{rk1} &= \frac{1.08384s + 0.32000}{1.13424s + 0.539532} \\ y_{rk2} &= \frac{s(2.96154s + 0.07308)}{1.13424s + 0.539532} \end{aligned} \right\} \quad (2-73)$$

式(2-73)をそれぞれ低域通過形, 高域通過形のロウゴ回路に展開し, 定理2-2により残りの回路が得られる。展開結果は図2-21に示す通りである。各アドミタンスパラメータの定理(2-1)(2-2)を用いて, つぎのように計算される。

$$y_{nm} = \frac{0.32S^4 + 4.68S^3 + 9.80S^2 + 4.68S + 0.32}{S^3 + 6.2S^2 + 6.2S + 1}$$

$$y_{nm2} = \frac{0.32S^4 + 3.68S^3 + 4.90S^2 + S}{S^3 + 6.2S^2 + 6.2S + 1}$$

$$y_{n00} = -\frac{0.3200}{S^2 + 6.2S^2 + 6.2S + 1} = -\frac{0.3200}{K(S)}$$

$$y_{n11} = -\frac{1.08378S}{K(S)}$$

$$y_{n21} = -\frac{2.96149S^2}{K(S)}$$

$$y_{n12} = -\frac{2.07305S}{K(S)}$$

$$y_{n40} = -\frac{0.3200S^4}{K(S)}$$

$$y_{n31} = -\frac{1.08378S^3}{K(S)}$$

$$y_{n22} = -\frac{2.96149S^2}{K(S)}$$

$$y_{n32} = -\frac{2.07305S^3}{K(S)}$$

(2-74)

式(2-74)を式(2-7)に代入して目的関数式(2-69)と係数を等置すると, 右辺には各増幅器の利得はつぎのように得られる。右辺は零次の端子が必要であるため, R_4 を 50.0 と 52.375 k Ω に分割して図2-22のように実現する。

(1) 入力側の増幅器の利得

零次 $k_0 = 1.000$ (50.0 k Ω に接続)

二次 $k_2 = 0.00720$ (21 端子に接続)

端子番号

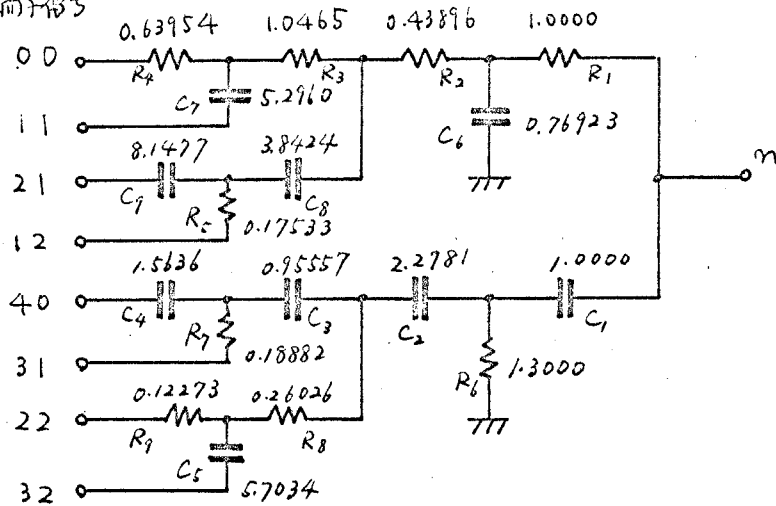
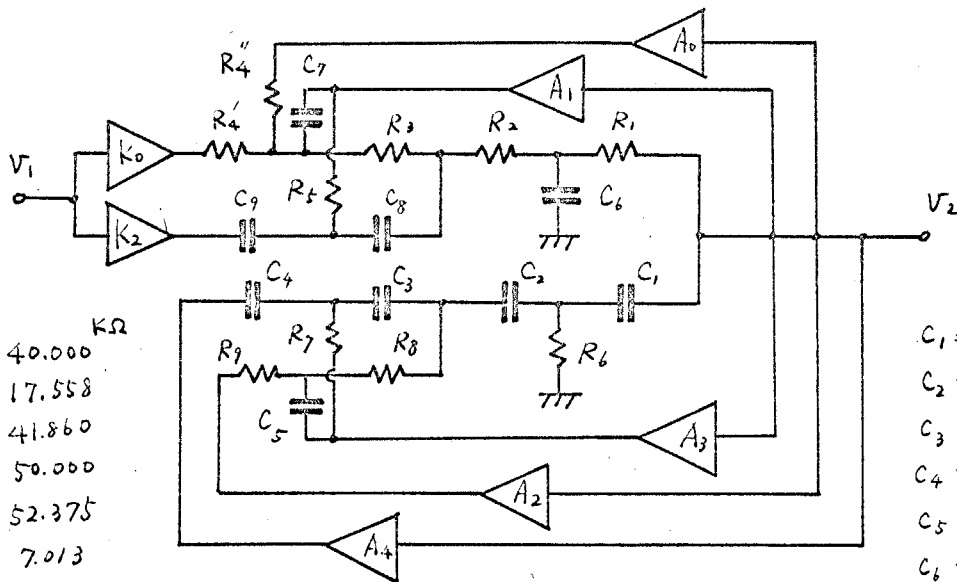


図 2-21
$$y_{nm} = \frac{0.32 S^4 + 4.68 S^3 + 9.8 S^2 + 4.68 S + 0.32}{S^3 + 6.2 S^2 + 6.2 S + 1}$$
 の展開



$R_1 = 40.000$
 $R_2 = 17.558$
 $R_3 = 41.860$
 $R_4' = 50.000$
 $R_4'' = 52.375$
 $R_5 = 7.013$
 $R_6 = 52.000$
 $R_7 = 7.553$
 $R_8 = 10.410$
 $R_9 = 4.909$

$C_1 = 397.9$
 $C_2 = 906.4$
 $C_3 = 367.1$
 $C_4 = 622.2$
 $C_5 = 2269.3$
 $C_6 = 306.1$
 $C_7 = 2136.5$
 $C_8 = 1528.8$
 $C_9 = 3241.9$

図 2-22 四段 L.P.F. の実験回路

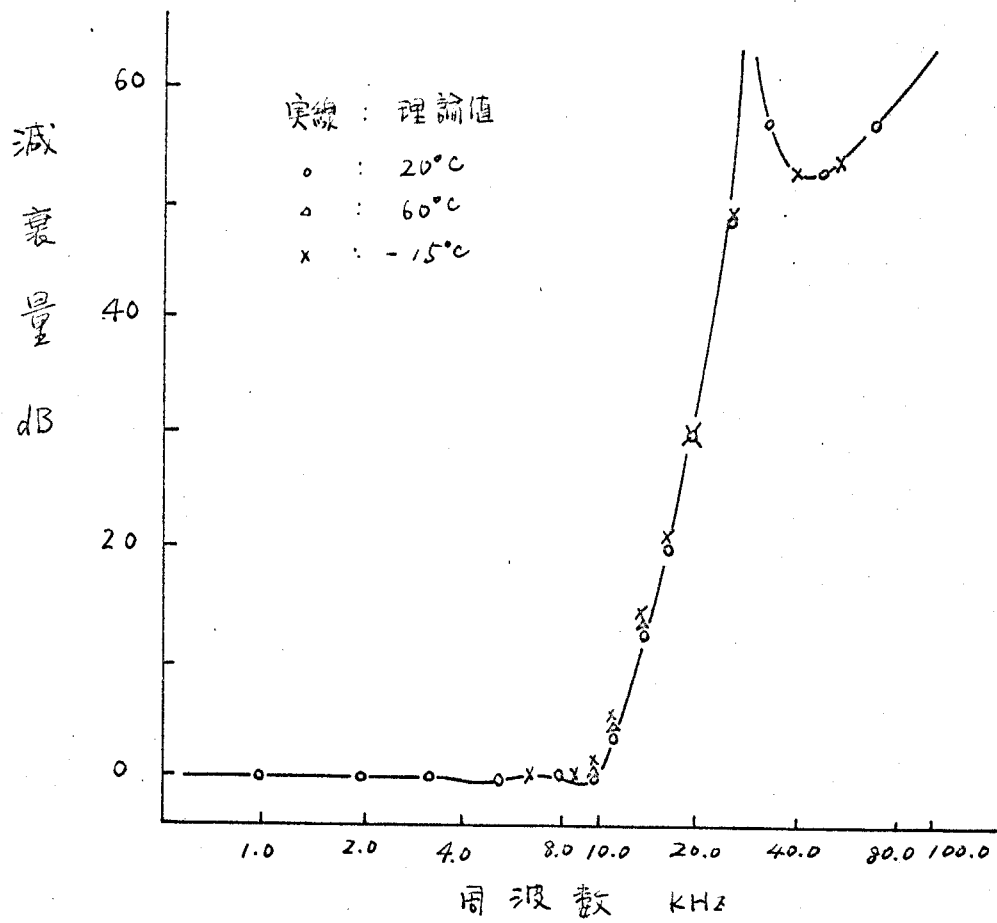


圖 2-23 實驗結果

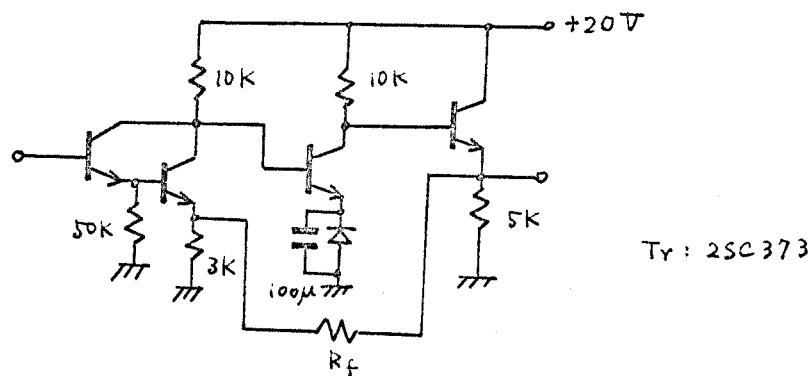


圖 2-24 正相增幅器實驗回路

(2) 帰還側の増幅器の利得.

零次	$A_0 = -1.37799$	(52.375 k Ω に帰還)
一次	$A_1 = 1.0652$	(11, 12 両端子へ帰還)
二次	$A_2 = 2.6347$	(22, 端子へ帰還)
三次	$A_3 = 1.0390$	(32, 31 両端子へ帰還)
四次	$A_4 = -2.12497$	(40 端子へ帰還)

図2-21 の正規化値を用いてあるが、実際の素子値のつぎのようにして求められる。

$$C' = C / \gamma \omega_0, \quad R' = \gamma R \quad (2-75)$$

ただし、 ω_0 は正規化角周波数、 γ は縮尺であり回路のインピーダンスレベルを考慮して決定する。 $\gamma = 4 \times 10^4$, $\omega_0 = 2\pi \times 10^4$ とした場合の素子値および全体の構成を図2-22に示す。図2-23に本回路の実験結果を示す。増幅器のターリントン接続の入力とエミッタフォロウを出力とする図2-24に示す回路を用いた。なお抵抗はRC回路部の金属皮膜、増幅器部は炭素皮膜と、オペアンプにはすべてポリスタロールコンデンサを使用した。このフィルタリッパ周波数付近の強度変化による変動は1.5 dB程度であった。

回路網中の任意の素子 x に対する伝達特性への影響を量度する感度 S_x は、次式で定義される。^{*}

$$S_x = \frac{x}{|T|} \frac{\partial |T|}{\partial x} \quad (2-76)$$

図2-22の回路について各素子の sensitivity を求めてみると表2-2が得られる。

* 感度 (sensitivity) についての理論的考察は次章に譲るとして、ここでは簡単に述べるにとどめる。

素子	S	素子	S	素子	S	素子	S
R ₁	-6.4351	R ₅	1.2661	C ₁	-6.3309	C ₆	2.8017
R ₂	0.1881	R ₆	-5.3242	C ₂	-4.2920	C ₇	1.5791
R ₃	2.5677	R ₇	2.0487	C ₃	0.1280	C ₈	2.0748
R ₄	1.2044	R ₈	4.8341	C ₄	-2.0912	C ₉	1.8857
R ₄ '	0.5219	R ₉	-1.8180	C ₅	3.6120		

表 2-2 素子感度表

(構成例Ⅱ) 電圧伝送関数の構成 2 — 二次式に分解して構成

構成例Ⅰで扱った関数もここでは二次式の縦列接続として構成して、前者と比較してみよう。まず式(2-69)とつきの二関数に因数分解する。

$$T_1(s) = \frac{H_1}{s^2 + 1.01928s + 0.46983} \quad (2-77)$$

$$T_2(s) = \frac{H_2(s^2 + 7.7000)}{s^2 + 0.38070s + 1.13949} \quad (2-78)$$

2-3-1 (iii) で述べたように Q 感度を小さくするため $1/CR = 0.5$ と選ぶと、各素子値および増幅器の利得は式(2-75) および表 2-1 を用いて、表 2-3 のように計算される。表 2-3 の回路とそのまま縦列に接続すれば、目的の関数を得られる。また素子感度も求めてみると表 2-4 の結果が得られ、表 2-2 と比較して非常に小さな値となっていることがわかる。

二次式の積として伝送関数を構成する場合と、全体を一つの回路で構成する場合と比較すると、二次式に分解して構成する方が、素子数、素子値、素子感度の面からすぐれていることが、構成例Ⅰ、Ⅱでわかる。また特性の補正なども二次関数では容易に行うことができる。本回路の周囲温度に対する影響は、中心周波数の偏差 $0.9 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 程度、また、Q の変化は $-10^\circ\text{C} \sim 60^\circ\text{C}$

の範囲ではほとんど認められなかった。

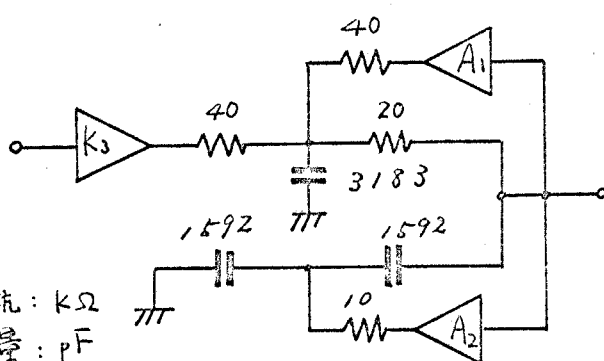
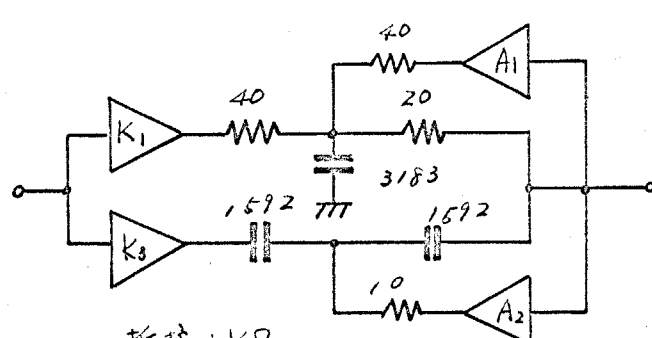
$T_1(s) = \frac{1}{s^2 + 1.0193s + 0.4698}$	増幅器利得
 抵抗: kΩ 容量: pF	$K_1 = 1.0000$ $A_1 = -1.7586$ $A_2 = 0.98071$
$T_2(s) = \frac{s^2 + 7.7000}{s^2 + 0.3807s + 1.1395}$	
 抵抗: kΩ 容量: pF	$K_3 = 0.0195$ $K_1 = 1.0000$ $A_1 = -7.1159$ $A_2 = 1.6193$

表 2-3 四次フィルタ定数表

素 子	S	
	$T_1(s)$	$T_2(s)$
R_1	0.9807	0.7661
R_2'	0.9527	0.9663
R_2''	0.4273	-0.3879
R_3	-0.3890	-0.3889
C_1	0.7769	-0.1990
C_2	0.0060	0.9610
C_3	0.8048	0.1933

表 2-4 素子感度表

(構成例Ⅲ) 二端子アドミタンスの実現

目的二端子アドミタンスとして、つぎの関数の実現を考える。

$$Y(s) = \frac{s^2 - s + 2}{s^2 + s + 2} \quad (2-79)$$

式(2-45)の Y_{11} として、つぎの関数を選ぶ、

$$Y_{11} = \frac{(s+0.5)(s+1.5)}{(s+1)(s+2)} \quad (2-80)$$

式(2-80)を展開して各増幅器と接続すると、図2-25の回路が得られる。

この回路で、入力電流に比例する電圧は、 R_1 の両端の電位差を差動増幅器により取り出す回路とした。図2-25の入力アドミタンス Y_{11} は

$$Y_{11} = \frac{s^2 + 2s + 0.75 - \frac{2}{3}A_0 - \frac{2}{3}A_1s}{s^2 + 3s + 2 - \frac{2}{3}R_{m0} - \frac{2}{3}R_{m1}s} \quad (2-81)$$

式(2-81)より、目的関数式(2-79)と比較して、各増幅器の利得は、つぎの式より計算される。

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -1.875 & A_1 &= 1.5 \\ R_{m0} &= 0.00 & R_{m1} &= 3.00 \end{aligned} \right\} \quad (2-82)$$

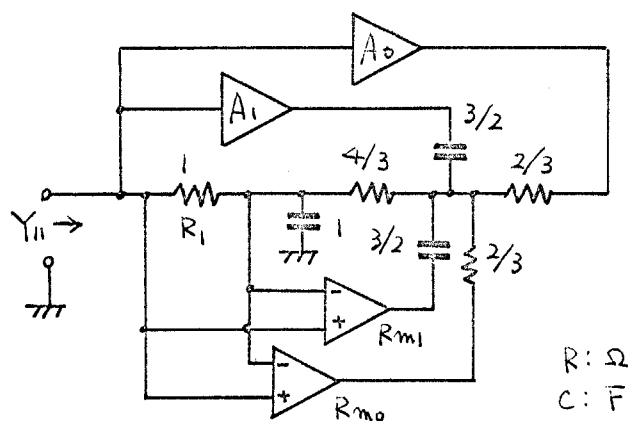


図2-25 二端子アドミタンス構成例

(構成例Ⅳ) ニ端子対アドミタンスパラメータの構成

目的アドミタンスパラメータとしてつぎの関数を考える。

$$[Y_{ij}] = \frac{1}{s^2 + s + 1} \begin{bmatrix} s^2 + s + 1 & 1 \\ s^2 + 4 & s^2 + s + 1 \end{bmatrix} \quad (2-83)$$

これは、入出力アドミタンスは定抵抗、順方向伝送特性は有極L.P.、逆方向は無極L.P.関数である。式(2-83)を式(2-62)のように分解する。

$$[Y_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s + 1} & \frac{1}{s^2 + s + 1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{s^2 + 4}{s^2 + s + 1} & \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s + 1} \end{bmatrix} \quad (2-84)$$

いま、式(2-58)における y_{22} と Y_{11} , Y_{12} の回路では

$$y_{22}^{(1)} = \frac{s^2 + \frac{5}{3}s + \frac{1}{3}}{s^2 + \frac{8}{3}s + 1} \quad (2-85)$$

と選び、また Y_{22} , Y_{21} の回路では、

$$y_{22}^{(2)} = \frac{s^2 + 4s + 1}{s^2 + 5s + 2} \quad (2-86)$$

と選び、これを展開して各増幅器を接続すると図2-26の回路が得られる。

出力電流に比例した電圧と電流電圧変換器を用いて取り出す方法によらず、 R_1 , R_2 の両端にはそれぞれ出力電流に比例した電位差が生じることを利用して、この電位差を差動増幅器により取り出す回路とした。この回路のアドミタンスパラメータは

$$[Y_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + (\frac{5}{3} - \frac{k_2}{3})s + (\frac{1}{3} - \frac{k_1}{9})}{s^2 + (\frac{8}{3} - \frac{2}{3}Rm_2)s + (1 - \frac{Rm_1}{9})} & \frac{\frac{k_0}{9}}{s^2 + (\frac{8}{3} - \frac{2}{3}Rm_2)s + (1 - \frac{Rm_1}{9})} \\ \frac{k_1 s^2 + k_2}{s^2 + (5 - 2Rm_4)s + (2 - \frac{Rm_3}{4})} & \frac{s^2 + (4 - 2K_4)s + (1 - \frac{k_3}{4})}{s^2 + (5 - 2Rm_4)s + (2 - \frac{Rm_3}{4})} \end{bmatrix} \quad (2-87)$$

式(2-87)と式(2-84)と係数と比較して各増幅器の利得を決定すると、
つぎの結果を得る。

$$\begin{aligned} k_0 &= 9.00 & k_1 &= 1.00 & k_2 &= 8.00 \\ R_{m1} &= 0.00 & R_{m2} &= 2.50 & R_{m3} &= 4.00 & R_{m4} &= 2.00 \\ K_1 &= -6.00 & K_2 &= 2.00 & K_3 &= 0.00 & K_4 &= -1.50 \end{aligned}$$

(2-88)

式(2-87)でアドミタンスパラメータの係数と、増幅器の利得が一一に対応するため、増幅器の利得はより各係数を独立可変とすることが
できる。

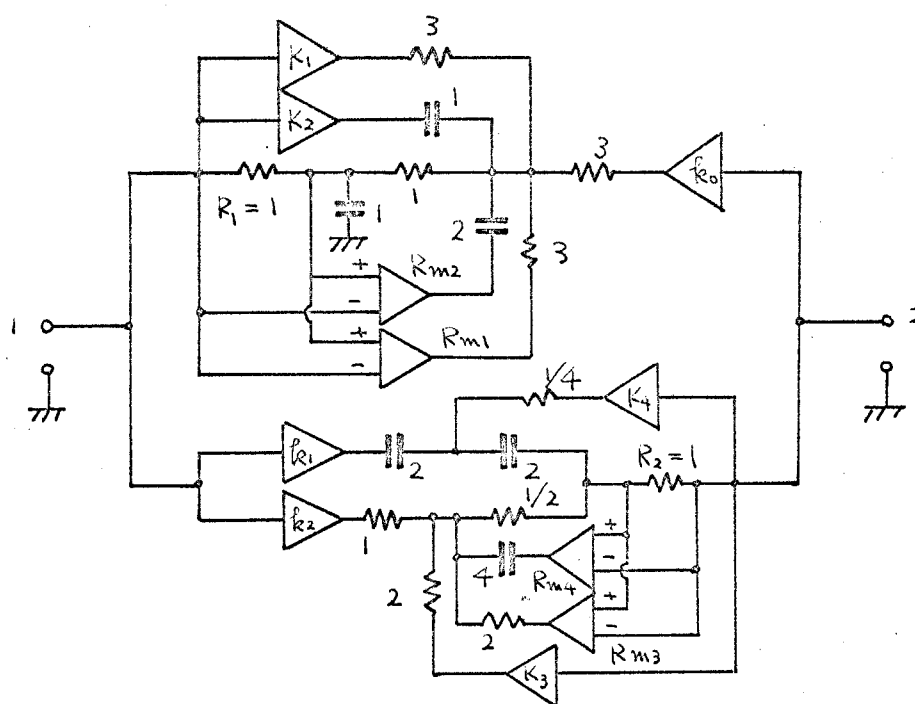


図 2-26 二端対回路網構成例

§ 2-8 伝送関数の係数と特性の関係

前節まで主として目的関数が与えられた場合の構成法について述べたが、本節では係数可変の立場から、伝送関数の係数と特性との関係について少し述べたい。一般に n 次の関数の根と係数の関係を求めることは困難であるが、二次関数については明確な表現ができる。二次関数もつぎのように表わす。

$$D(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \quad (2-89)$$

こゝで一般性を失うことなく、 $a_2 = 1$ とおくことができ、その根は

$$s = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \quad (2-90)$$

$4a_0 \geq a_1^2$ とすると

$$s = -\frac{a_1}{2} \pm j \frac{1}{2} \sqrt{4a_0 - a_1^2} \quad (2-91)$$

となる。また回路の Q および共振周波数は

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{\sqrt{a_0}}{a_1} \\ \omega_0 &= \sqrt{a_0} \end{aligned} \right\} \quad (2-92)$$

で与えられる。したがって中心周波数一定で回路の Q を変化させる場合には、 a_1 だけを制御すればよく、これは例えば共振回路を構成した場合、その選好度も高める場合に相当する。また回路の Q 一定で、中心周波数を変えるには

$$a_1 = \sqrt{a_0}$$

を保ち、 a_1 , a_0 を変化させればよい。これは、回路の特性一定で中心周波数だけを移動させることである。 a_0 だけを变化させると、その中心周波数ばかりではなく、式(2-88)より Q の値も $\sqrt{a_0}$ に比例して変化ある。

一般に n 次伝送関数の係数は、すべての根の位置に関係するため、根の位

置と独立制御するには、二次関数に分解して構成する方が容易である。しかし、くし形フィルタのように中心周波数だけ異なり、特性が全く同一のフィルタは、同一の回路で増幅器の利得を変えるだけによって得られるから、すべてのフィルタについてそれぞれ設計する必要は全くない。n次の関数とつぎのように表わす。

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (2-93)$$

この関数の中心周波数を α 倍変化させるには、 s の代りに αs を代入して、

$$D(\alpha s) = a_n \alpha^n s^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 \alpha s + a_0 \quad (2-94)$$

式(2-94)と(2-93)を比較して、 $a_i \rightarrow \alpha^i a_i$ というように各増幅器の利得を決定すればよい。前節までの構成論を示したように、各係数と増幅器の利得の間には、つぎの関係がある。

$$\text{分子多項式} \quad K_i = a_i \alpha^i \quad (2-95)$$

$$\text{分母多項式} \quad A_i = b_i - a_i \alpha^i$$

ここで b_i は RC 回路だけの場合の分母多項式の s^i の係数である。式(2-91)より、分子多項式では K_i を α^i に比例するように、また分母多項式では、 A_i は $(b_i - a_i \alpha^i)$ に比例するよう変化させれば、中心周波数の移動が得られる。

ここで受動素子がすべて一定比率で変化した場合を考えると、これは上述の周波数の移動に他ならない。したがって一定比で素子値が設計値よりずれてくる場合には増幅器の利得を簡単に補正できる。これは IC のように受動素子の絶対値は、それ程精度は得られないが、その相対値はある程度の精度で得られるという場合の構成法に適している事を示している。

§ 2-8 むすび

以上本章では、目的関数の S の係数を任意に独立して変化させることのできるRC能動回路の構成法について説明した。本構成法と従来の構成法と比較して、著しく異なる点は、RC回路部に解けることなく、増幅器の利得を加減することにより、任意の関数を実現でき、また係数と増幅器の利得が一對一に対応するため、設計・調整が非常に容易である。また実現できる関数は従来の多くの場合、伝送関数の実現のみに着目されていたが、本構成法では、伝送関数にしろん二端子イミタンス、二端子対アドミタンスパラメータも係数独立可変という特徴を持つ回路で実現できる。この反面、高次の関数の構成になると素子数が急激に増加する欠点がある。しかし、伝送関数の実現だけに着目すると、関数と双二次関数に因数分解し、これの絶続接続として構成することにより素子数を減少させることができ、また素子値、素子感度、偏からも好ましい結果が得られ、特性の補正等も二次関数では、容易に行うことができる。

さらに本構成法の大きな特徴として、RC回路部の素子値の絶対値は、その精度を視しなくてもよく、その相対値のうち素子値の比がある程度正確であれば、増幅器の利得を調整することにより簡単に目的関数を得ることができる。この特徴は現在のIC技術では、抵抗値、容量値の絶対値は正確に得られないが、その相対値はある程度の精度がとれるという性質によく適合しており、IC化に向いている回路と言えよう。また一種類の回路だけで、任意の伝送関数も構成できるため、回路設計の手数が省け、大量生産ベースに集めやすいという特徴がある。

本構成法の応用は、増幅器の利得を電子的に可変とし、電子制御フィルタとしての使用、例之が自動制御等化器[18]、音声合成用フィルタなどが考えられる。

第三章 帰還形RC能動回路の素子感度

§3-1 予えがき

RC能動伝達回路網は、受動回路網と異なり回路中に能動素子を含み、一般に帰還回路を構成したり、あるいは負性インピーダンスを構成したりするため、回路の構成のしかたによっては、特性根が複素平面上で右半面に陥ることを考えうる。古くからこの問題は帰還回路論、あるいは自動制御理論的立場から研究され、その安定性を調べる手段としてBode線図、Nyquist軌跡、根軌跡法などがある。RC能動回路の安定度は普通感度(sensitivity)によって評価される。sensitivityはH.W. Bodeによって次のように定義される[5]*。

$$S_x^T = \frac{\partial T/T}{\partial x/x} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln x} \quad (3-1)$$

ここでTは回路関数であり、xは回路網中の素子である。式(3-1)は、ある素子xの変動率が回路関数にどの程度の影響をおよぼすかを表わす量である。一般に式(3-1)は複素量であるが、

$$T = |T| e^{j\theta} \quad (3-2)$$

とおくと

$$S_x^T = \frac{x}{|T|} \frac{\partial |T|}{\partial x} + jx \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (3-3)$$

となる。したがって sensitivity S_x^T の実数部は、回路関数の絶対値の百分率変動を表わし、 S_x^T の虚数部はTの位相角の変動量を表わすことがわかる。式(3-3)から明らかなように、素子xの値がxからx+Δxに変化したとき、回路関数がTからT+ΔTに変化したとすると、Δxを微小として

* H.W. Bode の "Network Analysis and Feedback Amplifier Design" に述べている感度と式(3-1)は逆数の関係にあることに注意。

$$\operatorname{Re}(S_x^T) \cdot \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta|T|}{|T|}$$

$$\operatorname{Im}(S_x^T) \cdot \frac{\Delta x}{x} = \Delta\theta$$

(3-4)

とり、また素子 x が容量あるインダクタンスである場合、これらの素子に微小抵抗が付加されたとき、回路関数の変動は次式で与えられる。

$$\frac{\Delta|T|}{|T|} = \frac{1}{Q_x} \cdot \operatorname{Im}(S_x^T)$$

$$\Delta\theta = \frac{1}{Q_x} \cdot \operatorname{Re}(S_x^T)$$

(3-5)

右に、 Q_x は微小抵抗が付加された後のその素子の Q である。式(3-5)は増幅器の出力インピーダンスが回路関数に及ぼす影響のうち増幅器の出力容量が持続されているような場合を表わす。(§2-614参照)

sensitivity を小さくする目的で種々の回路や手段が発表されている。例え、Horowitzによる関数の分割法[19]、Calahanによる分割[21]等は、回路網中の能動素子の変動に対し、目的関数の係数の変動が小さくなるように、RC回路部の分母多項式の最適な並びを示すものである。その他剰余の素子を用いて *sensitivity* 等を小さくする方法等がある。

しかしながら、現在まで発表されている *sensitivity* に関する論文は、いずれも *sensitivity* を小さくする手段を示すもので、*sensitivity* の本質に触れる種の文献は見られないうちである。一般に受動リアクティブ回路網では、回路素子中に蓄えられているリアクティブエネルギーが、素子感度と大なる関係のあることが証明されているが[20]、RC能動回路では、その種の議論はできないようである。本章では帰還形RC能動回路の素子感度が、その素子電力に何らかの関係があることを示すものである。

§ 3-2 受動素子の感度

3-2-1 受動RLC回路網の素子感度

帰還形RLC能動回路の素子感度を求める前に、これらの基本となる、受動RLC回路網の素子偏差について少し考察しておこう。まず二端子アドミタンスの素子感度と素子電力の関係を求めてみると、つぎの定理が得られる。

(定理3-1) 受動RLC二端子アドミタンス Y_{in} の任意の素子 y に対する sensitivity $S_y^{Y_{in}}$ は

$$S_y^{Y_{in}} = \frac{y}{Y_{in}} \left(\frac{E_y}{E_{in}} \right)^2 \quad (3-6)$$

と与えられる。ここで E_y , E_{in} はそれぞれ素子電圧、入力電圧である。

(証明) 図3-1に示すように、いま考

えている素子 y を取り出し残りの二端子対回路の Y ほうキータを

$$[Y_{ij}] = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \quad (3-7)$$

とすると、入力アドミタンス Y_{in} は

$$Y_{in} = \frac{Y_{11}(y + Y_{22}) - Y_{21}Y_{12}}{y + Y_{22}} \quad (3-8)$$

となる。したがって sensitivity は

$$S_y^{Y_{in}} = \frac{y}{Y_{in}} \frac{\partial Y_{in}}{\partial y} = \frac{y}{Y_{in}} \frac{Y_{21}Y_{12}}{(y + Y_{22})^2} \quad (3-9)$$

一方、 y の両端の電圧 E_y は、

$$E_y = - \frac{Y_{21}}{y + Y_{22}} E_1 \quad (3-10)$$

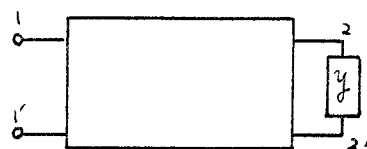


図3-1 二端子対回路

であるから式(3-9)に代入して、右辺は式(3-6)が得られる。

(証明終)

この定理は、二端子アドミタンスの素子感度はその素子の両端の電圧の二乗と、入力端に加えられる電圧の二乗の比に比例することを示している。

$y(E)^2$ は、電力次元を持ち、と考えられるから、この回路が純リアクティブ、あるいは純抵抗だけから構成されているなら、式(3-6)より、

$$S_{y_i}^{Y_{in}} = \frac{P_y}{P_{in}} \quad (3-11)$$

ただし、 P_y は素子 y の電力であり、また P_{in} は入力電力である。すなわち、 Y_{in} の y に対する sensitivity は、回路の全電力と素子電力の比で表わされる。したがって回路網中の蓄積あるいは消費される電力の大きい素子ほど sensitivity が大きいという結論が得られる。

一般に RC 回路網のように Y_{in} が複素数の場合は、議論は簡単にはならない。前節で述べたように、式(3-6)の実数部が Y_{in} の絶対値の偏差を表わし、虚数部は偏角の変化量を表わす。式(3-6)の絶対値をとると、

$$|S_{y_i}^{Y_{in}}| = \frac{P_y}{|P_{in}|} \quad (3-12)$$

が得られる。これは sensitivity の最悪の場合と評価していると考えられるから、最悪状態での sensitivity は素子電力に比例する。

つぎに、後述 RLC 二端子対回路網の sensitivity と求めよう。図 3-2 に示すように、考えている素子 y を引き出した残りの三端子対回路網の Y-パラメータを x のように定義する。

$$(Y_{ij}) = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{pmatrix}$$

(3-13)

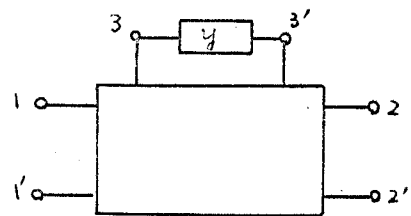


図 3-2 三端子対回路

また、端子対①から駆動した場合の素子の電流、電圧、電力等を→とつて表わし、端子対②から駆動した場合のそれを←と表わすと、これらの量を用いて、伝達アドミタンスの sensitivity はつぎのように表わされる*。

(定理3-2) 負荷RLC回路網中の任意の素子 y に対する伝達アドミタンス Y_{21} の sensitivity $S_y^{Y_{21}}$ は

$$S_y^{Y_{21}} = \frac{y}{Y_{21}} \frac{\vec{E}_y}{E_1} \frac{\overleftarrow{E}_y}{E_2} \quad (3-14)$$

と表わすことができる。

(証明) 図3-2の素子 y を含めた二端子対アドミタンスパラメータは、次式で与えられる。

$$(Y_{ij}) = \begin{pmatrix} Y_{11}' - \frac{Y_{13}' Y_{31}'}{y + Y_{33}'} & Y_{12}' - \frac{Y_{13}' Y_{32}'}{y + Y_{33}'} \\ Y_{21}' - \frac{Y_{23}' Y_{31}'}{y + Y_{33}'} & Y_{22}' - \frac{Y_{23}' Y_{32}'}{y + Y_{33}'} \end{pmatrix} \quad (3-15)$$

したがって、素子 y に対する Y_{21} の感度は

$$S_y^{Y_{21}} = \frac{y}{Y_{21}'} \frac{Y_{23}' Y_{31}'}{(y + Y_{33}')^2} \quad (3-16)$$

と得られる。一方

$$\left. \begin{aligned} \frac{\vec{E}_y}{E_1} &= \frac{Y_{31}'}{y + Y_{33}'} \\ \frac{\overleftarrow{E}_y}{E_2} &= \frac{Y_{23}'}{y + Y_{33}'} \end{aligned} \right\} \quad (3-17)$$

であるから、式(3-16)に代入して

$$S_y^{Y_{21}} = \frac{y}{Y_{21}'} \frac{\vec{E}_y}{E_1} \frac{\overleftarrow{E}_y}{E_2}$$

が得られる。

(証明終)

* 伝達インピーダンスについても全く同様の結果が得られるためここでは省略する。

(定理 3-3) 受動 LCR 二端子対回路網の伝達アドミタンス Y_{21} の sensitivity と二端子アドミタンス (Y_{11}, Y_{22}) の sensitivity の間には、つぎの関係がある。

$$S_y^{Y_{21}} = \sqrt{A \cdot D} / \sqrt{S_y^{Y_{11}} \cdot S_y^{Y_{22}}} \quad (3-18)$$

ここで A, D は F パラメータの A, D 要素である。

証明は式 (3-15) より各素子感度を求めることにより、簡単に得られるので省略する。定理 3-3 は受動 RLC 回路網の伝達アドミタンスの素子感度で、それぞれ入出力における二端子アドミタンスの、その素子に対する素子感度の積に関係していることを表わす。定理 3-3 と定理 3-1 と結びつけることからの結果を得る。

$$\left| S_y^{Y_{21}} \right| = \sqrt{|A| \cdot |D|} \sqrt{\left| S_y^{Y_{11}} \right| \cdot \left| S_y^{Y_{22}} \right|} = \sqrt{|A| \cdot |D|} \sqrt{\frac{P_y \bar{P}_y}{|P_{11}| |P_{22}|}} \quad (3-19)$$

ただし P_{11}, P_{22} はそれぞれ端子①から駆動した場合の全電力、および端子②から駆動した場合の全電力である。

式 (3-19) は 受動 LCR 回路網のある素子 y に対する sensitivity は、その素子電力および逆方向励振した場合の素子電力に関係している。もし回路網が純リアクタンス、あるいは純抵抗だけから構成されているならば、式 (3-19) の絶対値記号は省略でき、素子電力と入力電力の比が直接感度に対応するが、RC 回路網では一般に P_{11}, P_{22}, A, D は複素量となるため、議論は複雑である。

つぎに電圧伝達関数の場合について検討してみよう。一般に分數式

$$T(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \quad (3-20)$$

の x に対する sensitivity は、

$$S_x^T = \frac{x}{T} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{x}{N} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{x}{D} \frac{\partial D}{\partial x} \quad (3-20)$$

で与えられる。したがって電圧伝達関数 $T = -Y_{21}/Y_{22}$ の sensitivity は式(3-21)を用いて、

$$S_y^T = -\left(S_y^{Y_{21}} - S_y^{Y_{22}} \right) \quad (3-22)$$

となり、 Y_{21} , Y_{22} の y に対する sensitivity を議論を定めることができる。

定理3-1, 定理3-2より

$$S_y^T = -\left(\frac{1}{Y_{21}} \cdot Y_{y1} - \frac{1}{Y_{22}} Y_{y2} \right) \frac{\overleftarrow{E}_y}{\overleftarrow{E}_2} \quad (3-23)$$

となる。なお Y_{y1} , Y_{y2} はそれぞれ端子対①より素子 y へ、 y へ②より素子 y への伝達アドミタンスである。いま端子対②を開放した場合の端子対①より y への伝達アドミタンスを Y_{y10} とすると、

$$Y_{y10} = Y_{y1} - \frac{Y_{21}}{Y_{22}} Y_{y2} \quad (3-24)$$

との関係があるから、式(3-23)に代入して整理すると、つぎの結果を得る。

(系3-1) 受動R.L.C回路網の素子 y に対する電圧伝達関数の sensitivity

$$S_y^T = -\frac{y}{Y_{21}} \cdot \frac{\overleftarrow{E}_y}{\overleftarrow{E}_1} \frac{\overleftarrow{E}_y}{\overleftarrow{E}_2} \quad (3-25)$$

で与えられる。

結局定理3-2, 系3-1より任意の伝達関数のある素子 y に対する sensitivity は、その素子の電圧と、逆方向に励振した場合の素子 y の電圧の積に比例する。この結論より、帰還形RC能動回路網の素子感度を求める際、重要な事実である。

3-2-2 帰還形RC能動回路の素子感度

前節で受動RLC回路網の sensitivity について考察したが、本節ではこの結果を利用して、帰還形RC能動回路の sensitivity について考えてみよう。対象とする回路は、第二章に述べた Feedback-Feedforward 形回路である。また、簡単に二端子アドミタンスの場合について述べよう。

(定理3-4) Feedback-Feedforward にあるRC能動二端子アドミタンス Y_{in} の回路網中の素子 y に対する sensitivity は

$$S_{y}^{Y_{in}} = \frac{y \cdot K(s)}{N(s)} \cdot \left(\frac{E_y}{E_1} \frac{E_{y0}}{E_1} \right) \quad (3-21)$$

で与えられる。ただし $K(s)$: RC回路のアドミタンス Y の分子の多項式

$N(s)$: Y_{in} の分子多項式

E_y : 回路動作状態における素子 y の電圧

E_{y0} : すべての増幅器の利得を零としたときの y の電圧。

(証明) Feedback-Feedforward 回路の二端子アドミタンス Y_{in} は、式(2-45)より

$$Y_{in} = \frac{y_{11} + \sum_i k_i y_{1i}}{1 - \sum_j R_{mj} y_{ij}} \quad (3-27)$$

で与えられる。式(3-21)より Y_{in} の sensitivity は

$$S_{y}^{Y_{in}} = \frac{y}{y_{11} + \sum_i k_i y_{1i}} \left(\frac{\partial y_{11}}{\partial y} + \sum_i k_i \frac{\partial y_{1i}}{\partial y} \right) + \frac{y}{1 - \sum_j R_{mj} y_{ij}} \sum_j R_{mj} \frac{\partial y_{ij}}{\partial y} \quad (3-28)$$

となる。定理3-1, 定理3-2より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_{ii}}{\partial y} &= \left(\frac{E_{y_0}}{E_i} \right)^2 \\ \frac{\partial y_{ji}}{\partial y} &= \frac{E_{y_i}}{E_i} \cdot \frac{E_{y_0}}{E_i} \end{aligned} \right\} \quad (3-29)$$

ここで E_{y_0} は i 番目の端子より E_i なる電圧で励振したとき、素子 y の両端の電位差である。式 (3-29) と式 (3-28) を代入すると、

$$S_y^{Y_{in}} = \frac{y}{y_{ii} + \sum_i k_i y_{ji}} \left[\left(\frac{E_{y_0}}{E_i} + \sum_i \frac{k_i E_{y_i}}{E_i} + Y_{in} \sum_j R_{mj} \frac{E_{y_j}}{E_j} \right) \frac{E_{y_0}}{E_i} \right] \quad (3-30)$$

また、 $E_i = k_i E_i$, $E_j = R_{mj} I_{in} = R_{mj} Y_{in} E_i$ であることに注意して、式 (3-30) を書き直すと、

$$\begin{aligned} S_y^{Y_{in}} &= \frac{y}{y_{ii} + \sum_i k_i y_{ji}} \cdot \frac{E_{y_0} + \sum_i E_{y_i} + \sum_j E_{y_j}}{E_i} \cdot \frac{E_{y_0}}{E_i} \\ &= \frac{K(s)}{N(s)} \cdot y \cdot \frac{E_y}{E_i} \cdot \frac{E_{y_0}}{E_i} \end{aligned} \quad (3-31)$$

(証明終)

この定理は Feedback-Feedforward 形の RC 二端子アドミタンスの素子 y に対する感度は、回路が動作している状態に素子 y の両端に現われる電圧と、能動素子の利得とをべて、すなわち受動回路だけのとき、その素子の両端の電圧との積に依存していることがわかる。定理 3-4 よりつぎの系が得られる。

(系 3-3) Feedback-Feedforward 回路の二端子アドミタンスの sensitivity と素子電力の間には、つぎの関係がある。

$$\left| S_y^{Y_{in}} \right| = \left| \frac{K(s)}{N(s)} \right| \frac{\sqrt{P_y \cdot P_{y_0}}}{|E_i|^2} \quad (3-32)$$

ただし P_y : 素子 y の電力, P_{y_0} : すべての増幅器の利得を零としたときの素子 y の電力。
(証明略)

この系によると, sensitivity とその素子電力 P_y とは密接な関係のあることを示している。

つぎに伝達関数の素子 y に対する sensitivity を求めてみると, つぎの定理を得る。

(定理 3-5) Feedback-Feedforward 回路の電圧伝達関数 T の素子 y に対する sensitivity は

$$S_y^T = \frac{y}{N(s)} \cdot \frac{E_y}{E_1} \cdot \frac{\overleftarrow{E}_{y0}}{E_n} \quad (3-33)$$

で表わされる。なお $K(s)$, $N(s)$, E_y は定理 3-4 と同一定義であり, $\overleftarrow{E}_{y0}$ は, すべての駆動素子の利得を零としたとき, 出力端子 (n) に E_n なる電圧源を接続したとき, 素子 y に現われる電圧である。

(証明) Feedback-Feedforward 回路の電圧伝達関数は, 式 (2-2) のように表わされる。すなわち,

$$T = - \frac{\sum_i k_i y_{ni}}{y_{nn} + \sum_j A_j y_{nj}} \quad (3-34)$$

したがって sensitivity は,

$$S_y^T = - \left[\frac{y}{\sum_i k_i y_{ni}} \sum_i k_i \frac{\partial y_{ni}}{\partial y} + \frac{y}{y_{nn} + \sum_j A_j y_{nj}} \left(\frac{\partial y_{nn}}{\partial y} + \sum_j A_j \frac{\partial y_{nj}}{\partial y} \right) \right] \quad (3-35)$$

定理 3-1, 定理 3-2 を用いて書き直すと,

$$S_y^T = - \frac{y}{\sum_i k_i y_{ni}} \left[\sum_i \frac{k_i E_{yi}}{E_i} + T \left(\frac{E_{yn}}{E_n} + \sum_j \frac{A_j E_{yj}}{E_j} \right) \right] \frac{\overleftarrow{E}_{y0}}{E_n} \quad (3-36)$$

$E_j = A_j E_n = A_j T E_1$, $E_i = k_i E_1$ であるから式 (3-36) は

$$\begin{aligned} S_y^T &= - \frac{y K(s)}{N(s)} \left[\frac{\sum_i E_{yi} + E_{yn} + \sum_j E_{yj}}{E_1} \right] \frac{\overleftarrow{E}_{y0}}{E_n} \\ &= - \frac{y K(s)}{N(s)} \cdot \frac{E_y}{E_1} \cdot \frac{\overleftarrow{E}_{y0}}{E_n} \end{aligned} \quad (\text{証明終})$$

伝達アドミタンスの sensitivity は、これは定理 3-5 と全く同様で、つぎの系を示しておく。

(系 3-3) Feedback-Feedforward 回路による伝達アドミタンス Y_T の素子 y に対する sensitivity は次式で与えられる。

$$S_{yT} = \frac{y k(s)}{N(s)} \frac{E_y}{E_1} \frac{\bar{E}_{y0}}{\bar{E}_n} \quad (3-37)$$

(証明略)

定理 3-5, 系 3-3 より Feedback-Feedforward 回路網の伝達関数のある素子 y に対する sensitivity は、その素子の両端の電圧と、すべての増幅器の利得と等、すなわち受動回路網の出力端から駆動した場合の素子電圧との積に比例することがわかる。したがって、受動素子と導入することによって、素子電圧が増加するよう素子に対する sensitivity は、受動素子だけのときと比べて悪化し、また、電流が減少するよう素子に対しては、sensitivity は良くなるといえる。つぎにこれらのことをよく表わしたつぎの系を示しておく。

(系 3-4) Feedback-Feedforward 回路網の素子 y に対する回路網関数の sensitivity と、その回路から Feedback 回路を取り除いた回路の sensitivity との間には、つぎの関係が成立する。

$$S_{yT} / S_{yT_0} = E_y / E_{y_0} \quad (3-38)$$

ただし T_0, E_{y_0} は Feedback 回路を取り除いた後の回路関数と素子電圧である。

証明は定理 3-5 に $A_j = 0$ として計算を行えば、直ちに得られるため省略する。

系 3-4 は Feedback をかけることによりどの程度、素子感度が変化するかを示すものである。例えば図 3-3 に示される Band Pass Filter について考えてみると、この回路の共振周波数における各素子の sensitivity は

系 3-4 より

$$S_y^T / S_y^{T_0} = \left(1 + \frac{ak}{a-k} \right) \quad (3-39)$$

となり、 a への素子の sensitivity は、
 負帰回路のそれの $\left(1 + \frac{ak}{a-k} \right)$ 倍となる。
 Q が高いと仮定すると、 $k \approx a$ となり、
 非常に sensitivity が悪化するところが結論
 できる。すなわち図 3-4 に示す Low Pass
 Filter の場合は、各素子の sensitivity は
 前と同様に計算され、

$$S_y^T / S_y^{T_0} = \left(1 - \frac{k}{s^2 + as + 1 + k} \right) \quad (3-40)$$

と得られる。

式 (3-40) は周波数が充分低い通過域内では、

$$S_y^T / S_y^{T_0} = 1 - \frac{k}{1+k} \quad (3-41)$$

となり、 k が大きいと sensitivity はかなり小さな値となる。

素子電力と sensitivity の関係を求めるとつぎの式が得られる。

(系 3-5) Feedback-Feedforward 回路網の伝達関数の sensitivity と、素子電力 P_y との間には、つぎの関係が成立する。

$$\left| S_y^T \right| = \left| \frac{K(s)}{N(s)} \right| \frac{\sqrt{P_y \overline{P_{y_0}}}}{E_1 E_n} \quad (3-42)$$

ただし $\overline{P_{y_0}}$ は a への能動素子の利得を零としたとき、出力端子 (n) より E_n なる電圧源に駆動した場合の素子 y の電力である。

(証明略)

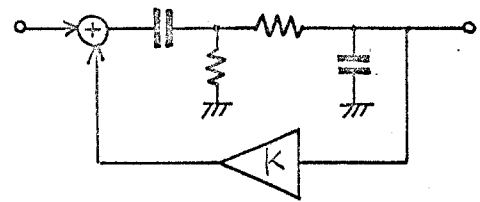


図 3-3 B. P. F.

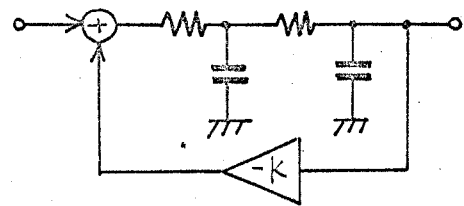


図 3-4 L. P. F.

系 3-5 は伝達関数の sensitivity の絶対値は素子電力に関係していることを示している。そこで sensitivity の絶対値和と電力の関係を求めてみると、つぎの関係が得られる。

(定理 3-6) Feedback-Feedforward 回路網の sensitivity のすべての素子に対する絶対値和は、つぎの不等式が成立する。

$$\sum_{\text{すべての素子}} |S_y^T| = \left| \frac{K(s)}{N(s)} \right| \sum_{E_1, E_n} \frac{\sqrt{P_y \bar{P}_{y_0}}}{E_1 E_n} \leq \left| \frac{K(s)}{N(s)} \right| \frac{\sqrt{\sum P_y \cdot \sum \bar{P}_{y_0}}}{E_1 \cdot E_n} \quad (3-43)$$

(証明略)

この定理は sensitivity の絶対値和、あるいは回路網の最悪の場合における素子感度の上限を示す不等式であり、素子電力の絶対値和の制約を与えている。したがって、同一関数を構成した場合でも、回路網の全電力が小さい回路の方が、一般に sensitivity はそれ程大きくなりえないと言える。次章はこの電力問題を取り扱うことにする。

§ 3-3 能動素子の感度

能動素子の感度に関しては、種々議論されており、Howitz [19] Calahan [21] 等による多項式の分解の方法が積極的に sensitivity を小さくする方法として求められている。しかしながら能動素子の sensitivity と能動素子の電力の関係(受動素子のそれについては § 3-2 で、ある程度の結果は得られているが)等, sensitivity の本質に関係すると考えられる事については議論

されていない。一般に受動素子の場合のような簡単な関係はないようである。ここでは一般的に sensitivity の話ととめることにする。

一般に RC 回路では、その特性は複素平面上で負の実軸上のみに限られるが、この根から受動素子を用いて複素根を実現するには、§1-2 で述べたように、引き算による方法と加算による方法がある。前者は NIC 形、正帰還形の RC 能動回路、後者はジャイレータ形、負帰還形の RC 能動回路などがある。両者の係数の感度を比較してみよう。引き算法では、

$$b_i = b_{RC} - a_i k \quad (3-43)$$

b_i は目的係数、 b_{RC} は RC 回路の係数、 k は増幅器の増幅度である。

sensitivity は

$$S_k^{b_i} = - \frac{a_i k}{b_{RC} - a_i k} \quad (3-42)$$

となる。一方加算形では、

$$c_i = c_{RC} + b_i k \quad (3-43)$$

となり sensitivity は

$$S_k^{c_i} = \frac{b_i k}{c_{RC} + b_i k} < 1 \quad (3-44)$$

式(3-42)と式(3-44)を比較してみると、式(3-44)では常に $|S_k^{c_i}| < 1$ であるのに対して、式(3-42)は、 b_i が小さな値では $|S_k^{b_i}|$ は大きな値となる。このことは換言すれば、 Q の高い回路では、式(3-42)は大きな値となることを意味する。一方加算法だけに限り回路を構成する限りには、受動素子に関する sensitivity は、受動素子のそれに近等な値に結合できる大きさである。

§ 3-4 おすび

本章では、帰還形RC能動回路の *sensitivity* 時に回路網中の受動素子の *sensitivity* について考察した。直感的に回路網中で電力を多く消費したり、蓄積したりする素子に対する回路関数 *sensitivity* は大きいように思われる。事実本章で得られた結果は、このことについて何らかの関係が存在することと暗示している。すなわち(定理3-4), (系3-3)は帰還RC能動回路の素子 y に対する *sensitivity* はその素子電圧に比例していることを示し、またそれら定理で与えられる式、例えば式(3-28)を取り上げても、その分子・子の次元は明らかに電力の次元を持っている。特に系3-3, 系3-5より、*sensitivity* の絶対値はその素子電力に直接関係のあることを明確に記述している。また *sensitivity* の絶対値和は、回路網中に蓄えられる電力、消費される電力の総和の大きさに関係があり、回路網の電力レベルの低い回路が、*sensitivity* が一般に低いことを裏付けている。

第四章 帰還形 RC 能動回路の電力 [22]

§ 4-1 まえがき

RC 能動回路を応用化する段階で問題となるのは、素子感度の他に消費電力の問題がある。消費電力は回路網中に発生する熱となるばかりでなく、外部直流電源の消費電力となり、回路が小形軽量化されるにつれ大きな問題となる。従来 RC 能動回路に関する研究は、その伝達関数の実現のみに多くの場合着目され、電力の問題等も考慮した構成論については、発表されていないようである。RC 能動回路は受動 LC 回路と異なり、回路網中に多くの抵抗素子を含み、また能動素子を含むため、電力を消費し熱を発生することは避けることができない。また前章で示したように電力の総和は、回路関数の sensitivity の絶対値和、すなわち最悪状態での回路網関数の変動を量化する量に直接関係している。

本章では、この電力の最小化に対する限界を示すものである。第二章に述べた帰還形 RC 能動回路^{*}の構成に必要で、増幅器の回路へ供給すべき電力の最小値について述べる。換言すれば、受動 RC 回路部で消費・蓄積される電力の最小値について考察する。

本論に入る前に予備知識として、言葉の定義、RC 回路網構成上の必要十分条件等について説明しておく。いま n 端子対回路網の y パラメータを、つぎのように定義する。

$$[y_{ij}] = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \quad (4-1)$$

* 帰還形 RC 能動回路は大部分この形の回路と考えられる。

一般に式(4-1)で表わされる n 端子対のネットワークが、理想トランスを含む RC n 端子対回路網として、構成されるための必要十分条件は、つぎの通りである[2]。

y_{ij} の Foster 展開。

$$\left. \begin{aligned} y_{11} &= a_{11}^{(0)} + a_{11}^{(\infty)} s + \sum_i \frac{a_{11}^{(i)} s}{s + \alpha_i} \\ y_{12} &= a_{12}^{(0)} + a_{12}^{(\infty)} s + \sum_i \frac{a_{12}^{(i)} s}{s + \alpha_i} \\ &\vdots \\ y_{nn} &= a_{nn}^{(0)} + a_{nn}^{(\infty)} s + \sum_i \frac{a_{nn}^{(i)} s}{s + \alpha_i} \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

が成立し、かつつぎの行列式

$$|A_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & \cdots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(k)} & a_{n2}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{vmatrix} \quad (4-3)$$

のすべての主座の小行列式が正半値であることが、すべての $k(0, \infty$ を含む) について成立することである。

特に二端子対回路網についてこの条件を示すと、よく知られたつぎの結果を得る。

$$a_{11}^{(k)} \geq 0, \quad a_{22}^{(k)} \geq 0 \quad (4-4)$$

$$a_{11}^{(k)} a_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)} a_{21}^{(k)} \geq 0 \quad (4-5)$$

式(4-5)ですべての $k(0, \infty$ を含む) について等号が成立する場合、

“ y_{11} , y_{12} , y_{22} は密である” あるいは “端子対①②に関して回路は密である” と呼ぶ。特に $a_{12}^{(k)} \neq 0$ で式(4-5)の等号が成立する場合を “回路は完全に密である” と呼ぶ[4]。

つぎに回路網が正弦波で定常的に励振されている場合、各増幅器の供給する

電力 P_i を、つぎのように定義する

$$P_i = \bar{E}_i \cdot I_i \quad (4-6)$$

ただし、 E_i, I_i は各増幅器の出力電圧、出力電流であり、 $\bar{E}_i$ は共役量を示す。したがってすべての増幅器の供給する電力、すなわち RC 回路網中で消費、蓄積される電力を P_{all} とすると、

$$P_{all} = \sum_i \bar{E}_i I_i \quad (i: \text{すべての増幅器}) \quad (4-7a)$$

$$= \sum_k Y_k |E_k|^2 \quad (k: \text{すべての受動素子}) \quad (4-7b)$$

となる。ただし Y_k は回路網中の受動素子のアドミタンス、 E_k はその素子の電圧である。この回路は RC 回路であるから、実周波数で

$$P_{all} = \sum_{\text{すべての } R} G |E_R|^2 + j\omega \sum_{\text{すべての } C} C |E_C|^2 \quad (4-8)$$

となる。ただし G はコンダクタンス、 C はキャパシタンスである。したがって、式(4-8)より

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}(P_{all}) &= \sum G |E_R|^2 \geq 0 \\ \operatorname{Im}(P_{all}) &= \omega \sum C |E_C|^2 \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

が成立する。 $\operatorname{Re}(P_{all})$ は回路網中で消費する電力、 $\operatorname{Im}(P_{all})$ は蓄積される電力を示す。本章ではこの両者共に最小にあることも考える。以下本文では、電力最小と簡単に書いたことは、その実数部および虚数部が共に最小であることを意味するものとする。

§4-2 理想トランスを含む能動回路の電力

4-2-1 伝達アドミタンス構成の場合

まず直接能動回路の電力を求める前に、準備としていくつかの補助的考察をすることにする。

いま図4-1に示すRC n端子対回路網と電圧増幅器で、ある伝達アドミタンス Y_T を実現する問題を考える。ただし、 Y_T の分母多項式は負の實根のみを持っているとする。一般に伝達アドミタンスを実現するには、出力アドミタンスをあらかじめ何らかの方法により決定し、これを展開して構成するのが普通である[3]。ここでは y_{nn} はあらかじめ与えられているものとする。すなわち図4-1で伝達アドミタンス Y_T と出力アドミタンス y_{nn} は定まっている。またRC n端子対回路網の y パラメータを

$$(y_{ij}) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

とすると、伝達アドミタンス Y_T は

$$Y_T = \frac{I_n}{E_1} = - \sum_{i=1}^{n-1} K_i y_{ni}$$

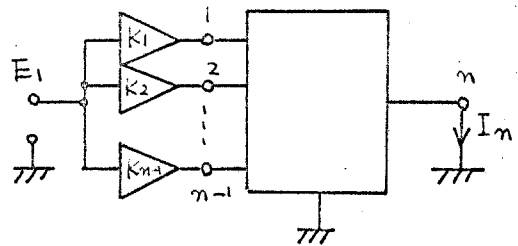


図4-1 多入力回路

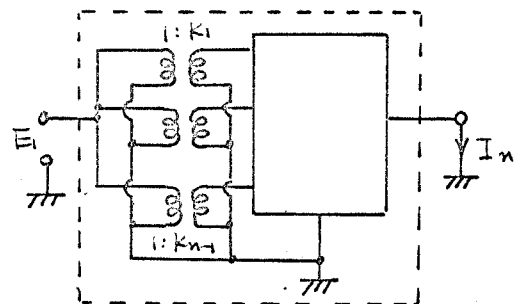


図4-2 図4-1の等価回路

(4-10)

(4-11)

となる。また各増幅器の供給する電力の総和は、式(4-7a)より計算され、

$$P_{all} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} k_i k_j y_{ij} |E|^2 \quad (4-12)$$

が得られる。一方図4-1の回路は理想トランスを用いた図4-2の回路と全く等価である。この回路の伝達アドミタンスは、式(4-11)となり、入力アドミタンス Y_{11} は

$$Y_{11} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} k_i k_j y_{ij} \quad (4-13)$$

となる。したがって式(4-12)および式(4-13)より P_{all} の最小値を求めることは、 Y_{11} の最小値を求めることに一致する。図4-2の点線内と一つのRC回路とみなした二端子対回路を考えると、式(4-5)が成立しなければならない。すなわち

$$A_{11}^{(i)} A_{nn}^{(i)} - A_{ni}^{(i)2} \geq 0 \quad (4-14)$$

ここで $A_{11}^{(i)}$, $A_{nn}^{(i)}$, $A_{ni}^{(i)}$ は分母多項式の (i) 番目の根における各留数である。 $A_{nn}^{(i)}$, $A_{ni}^{(i)}$ はあらかじめ定まっている値であるから、 $A_{11}^{(i)}$ の最小値、すなわち Y_{11} の最小値は式(4-14)の等号が成立するときである。換言すれば、図4-2の回路が端子対①と端子対②の間で回路が密のときである。このとき、電力は

$$P_{min} = Y_{11}^c |E|^2 \quad (4-15)$$

となる。ここで Y_{11}^c は Y_{nn} , Y_T より密条件が成立するように定めた Y_{11} の値である。すなわち式(4-15)で与えられる最小電力は、図4-1の増幅器の数、利得の大小等に依存せず一定であることがわかる。

つぎに帰還形RC能動回路の伝達アドミタンスを構成する場合について検討しよう。回路は図4-3で示され、この回路の伝達アドミタンスは、

$$Y_T = \frac{I_n}{E_1} = \frac{-\sum_{i=1}^n k_i y_{ni}}{1 + \sum_{j=kn}^{n-1} R_{in_j} y_{nj}} \quad (4-16)$$

ただし, k_i, R_{mj} はそれぞれ電圧増幅率, 電流電圧変換器の利得である。この回路の各要素より供給する電力の総和 P_{all} は,

$$P_{all}/|E_1|^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k k_i k_j y_{ij} + \sum_{i=k+1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n-1} R_{mi} R_{mj} y_{ij} |Y_T|^2 + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{n-1} k_i R_{mj} y_{ij} \operatorname{Re}(Y_T) \quad (4-17)$$

と表わされる。(式(4-17)の誘導は付録参照) 式(4-17)で与えられる電力 P_{all} の最小値を求めるのであるが, 第二章で述べたように, 図4-3の出力アドミタンス y_{nn} はあらかじめ与えられているものとする。

$y_{nn} = Q(s)/K(s)$ が決定されると, 式(4-16)の $\sum k_i y_{ni}$, および $\sum R_{mj} y_{nj}$ は定まってしまう。これらの量とつぎのようは置く,

$$\left. \begin{aligned} Y_{n1} &= \sum k_i y_{ni} \\ Y_{n2} &= \frac{1}{R_m} \sum R_{mj} y_{nj} \end{aligned} \right\} \quad (4-18)$$

ただし, R_m は抵抗の次元を持つ任意の定数である。当然のことであるが, 式(4-18)の分母多項式は負の実根のみから構成されている。図4-1と図4-2が全く等価であったことから, 図4-3は入力側回路, 出力側回路をそれぞれ理想トランスを用いて, 図4-4のように結合した回路の伝達特性と等価である。したがって式(4-17)はつぎのように書き改められる。

$$P_{all}/|E_1|^2 = Y_{11} + R_m^2 Y_{22} |Y_T|^2 + 2 R_m Y_{21} \operatorname{Re}(Y_T) \quad (4-19)$$

ただし, 図4-4の点線内の回路網を三端子対回路網とみなしたときの, アドミタンスパラメータを

$$\{Y_{ij}\} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{2n} \\ Y_{n1} & Y_{n2} & y_{nn} \end{pmatrix} \quad (4-20)$$

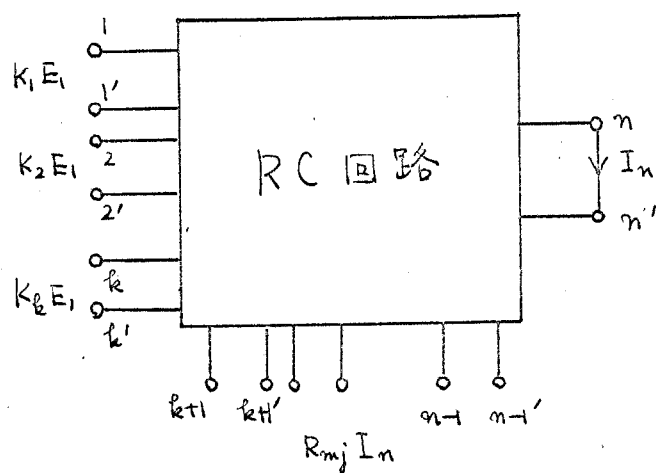


図4-3 伝達アドミタンスの構成

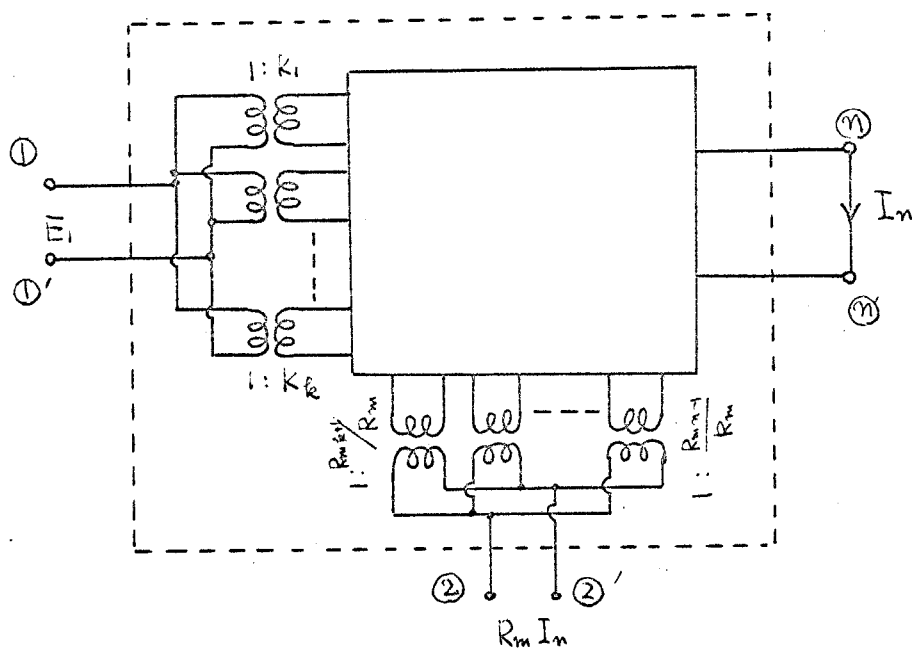


図4-4 図4-3の等価回路

とする。ところで式(4-20)の Y_{n1} , Y_{n2} は式(4-18)で表わされる。式(4-20)は受動RCアドミタンス関数であることはいうまでもない。

式(4-17)で表わされる複素電力 P_{all} の最小値, すなわち式(4-19)の最小値は, つぎの定理で記述される。

(定理4-1) 任意の伝達アドミタンス Y_T を図4-3に示す Feedback-Feedforward 回路によるRC能動回路で構成する場合, 出力アドミタンス $Y_{nn} = Q(s)/K(s)$ が定まると(与えられると), 回路網中のすべての能動素子がRC回路部に供給すべき電力の最小値 P_{min} は

$$P_{min}/|E|^2 = Y_{11}^c + R_m^2 Y_{22}^c |Y_T|^2 + 2 R_m Y_{21}^c \operatorname{Re}(Y_T) \quad (4-21)$$

で与えられる。また常に式(4-21)の最小電力の回路で任意の伝達アドミタンスを理想トランスを用いて実現できる。ただし Y_{11}^c , Y_{21}^c , Y_{22}^c は図4-4の点線で示される三端子対回路が, 端子対①, ②, ③すべてに関して密である場合のアドミタンスパラメータである。

(証明) まず Y_{11} , Y_{21} , Y_{22} , Y_{n1} , Y_{n2} , Y_{nn} をつぎのようには Foster展開する。

$$Y_{11} = A_{11}^{(0)} + A_{11}^{(\infty)} s + \sum \frac{A_{11}^{(i)} s}{s + \alpha_i}$$

$$Y_{21} = A_{21}^{(0)} + A_{21}^{(\infty)} s + \sum \frac{A_{21}^{(i)} s}{s + \alpha_i}$$

$$Y_{22} = A_{22}^{(0)} + A_{22}^{(\infty)} s + \sum \frac{A_{22}^{(i)} s}{s + \alpha_i}$$

$$Y_{n1} = A_{n1}^{(0)} + A_{n1}^{(\infty)} s + \sum \frac{A_{n1}^{(i)} s}{s + \alpha_i}$$

$$Y_{n2} = A_{n2}^{(0)} + A_{n2}^{(\infty)} s + \sum \frac{A_{n2}^{(i)} s}{s + \alpha_i}$$

$$Y_{nn} = A_{nn}^{(0)} + A_{nn}^{(\infty)} s + \sum \frac{A_{nn}^{(i)} s}{s + \alpha_i}$$

(4-22)

式(4-22)を式(4-19)に代入して、(i) 極目の項だけを書くと、

$$P_{all}^{(i)} / |E_1|^2 = \frac{S}{S + \sigma_i} \left[A_{11}^{(i)} + R_m^2 A_{22}^{(i)} |Y_T|^2 + 2 R_m A_{21}^{(i)} \operatorname{Re}(Y_T) \right] \quad (4-23)$$

となり、この最小値を求めることは帰着する。

一方RC三端子対回路網では、行列式(4-3)の主座の小行列式が正半値でなければならぬ。これを式(4-22)の各留数に適用すると、つぎの式が得られる。

$$D = \begin{vmatrix} A_{11}^{(i)} & A_{12}^{(i)} & A_{1n}^{(i)} \\ A_{21}^{(i)} & A_{22}^{(i)} & A_{2n}^{(i)} \\ A_{n1}^{(i)} & A_{n2}^{(i)} & A_{nn}^{(i)} \end{vmatrix} \geq 0 \quad (4-24)$$

式(4-24)を展開して整理すると

$$(A_{11}^{(i)} A_{nn}^{(i)} - A_{n1}^{(i)2}) (A_{22}^{(i)} A_{nn}^{(i)} - A_{n2}^{(i)2}) - (A_{21}^{(i)} A_{nn}^{(i)} - A_{n1}^{(i)} A_{n2}^{(i)})^2 \geq 0 \quad (4-25)$$

が得られる。式(4-25)の各項は、式(4-5)より正あるいは零である。

いま、式(4-25)のすべての項が零の場合、すなわち三端子対回路網がすべての端子対に関して密である場合を考えると、

$$\left. \begin{aligned} A_{11}^{(i)} &= \frac{A_{n1}^{(i)2}}{A_{nn}^{(i)}} & A_{22}^{(i)} &= \frac{A_{n2}^{(i)2}}{A_{nn}^{(i)}} \\ A_{21}^{(i)} &= \frac{A_{n1}^{(i)} A_{n2}^{(i)}}{A_{nn}^{(i)}} = \sqrt{A_{11}^{(i)} A_{22}^{(i)}} \end{aligned} \right\} \quad (4-26)$$

となる。これを式(4-23)に代入して、このときの $P_{all}^{(i)}$ を $P_{min}^{(i)}$ と書くと、

$$P_{min}^{(i)} / |E_1|^2 = \frac{S}{S + \sigma_i} \frac{1}{A_{nn}^{(i)}} \left[A_{n1}^{(i)2} + R_m^2 A_{n2}^{(i)2} |Y_T|^2 + 2 R_m A_{n1}^{(i)} A_{n2}^{(i)} \operatorname{Re}(Y_T) \right] \quad (4-27)$$

が得られる。 $A_{n1}^{(i)}$, $R_m A_{n2}^{(i)}$, $A_{nn}^{(i)}$ は Y_T と Y_{nm} が与えられると決定する量であるから、式(4-27)は、回路の形によらず一定となる*。

* 注意、"回路の形によらず"という意味は、回路構成は図4-3であるが、入力・帰還路の分割の仕方、数、増幅器の利得の大小等には依らないという意味である。

つぎに、式(4-25)の各項がつぎのような量であったとする、

$$\left. \begin{aligned} A_{11}^{(i)} a_{nn}^{(i)} - A_{n1}^{(i)2} &= \alpha \geq 0 \\ A_{22}^{(i)} a_{nn}^{(i)} - A_{n2}^{(i)2} &= \beta \geq 0 \\ A_{21}^{(i)} a_{nn}^{(i)} - A_{n1}^{(i)} A_{n2}^{(i)} &= \gamma \end{aligned} \right\} \quad (4-28)$$

式(4-25)はこれらの量を用いて、

$$\alpha\beta - \gamma^2 \geq 0 \quad (4-29)$$

と書くことができる。またこの場合の式(4-23)は

$$\begin{aligned} P_{all}^{(i)} / |E_1|^2 &= \frac{S}{s + \sigma_i} \frac{1}{a_{nn}^{(i)}} \left[\alpha + A_{n1}^{(i)2} + R_m^2 (\beta + A_{n2}^{(i)2}) |Y_T|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 R_m (\gamma + A_{n1}^{(i)} A_{n2}^{(i)}) \operatorname{Re}(Y_T) \right] \end{aligned} \quad (4-30)$$

と書かれる。ここで式(4-27)と式(4-30)の大小を比較してみると、

$$\Delta P^{(i)} = \frac{P_{all}^{(i)} - P_{min}^{(i)}}{|E_1|^2} = \frac{S}{s + \sigma_i} \frac{1}{a_{nn}^{(i)}} \left[\alpha + R_m^2 \beta |Y_T|^2 + 2 R_m \gamma \operatorname{Re}(Y_T) \right] \quad (4-31)$$

が得られる。式(4-31)の[]中の項が α , β , γ の如何にかかわらず、

E であることを示そう。まず

$$Y_T = a + jb \quad (4-32)$$

とおくと、式(4-31)の[]内を F とおいて、

$$F = \alpha + R_m^2 \beta (a^2 + b^2) + 2 R_m \gamma a \quad (4-33)$$

したがって、 F の極値は、

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2 R_m^2 \beta a - 2 R_m \gamma = 0$$

より、

$$a = \frac{\gamma}{R_m \beta} \quad (4-34)$$

のときであり、また

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 2 R_m^2 \beta \geq 0$$

より式(4-35)で与えられる α は F の最小値を与えるから,

$$F_{\min} = \alpha + R_m^2 \beta b - \frac{\gamma^2}{\beta} \quad (4-35)$$

一方式(4-29)の条件および $\beta \geq 0$ であるから

$$F_{\min} \geq 0 \quad (4-36)$$

が, $\alpha (\geq 0)$, $\beta (\geq 0)$, γ のいかなる値に対しても成立する. 等号は $\alpha = \beta = \gamma = 0$ のとき成立する. 以上の結果から式(4-31)において,

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}(\Delta p^{(i)}) &\geq 0 \\ \operatorname{Im}(\Delta p^{(i)}) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-37)$$

が得られる. すなわち式(4-27)で与えられる $P_{\min}$ は最小であることが示された. 同様にすべての留数について, $P_{\min}^{(i)}$ を求めこれらの総和をとると,

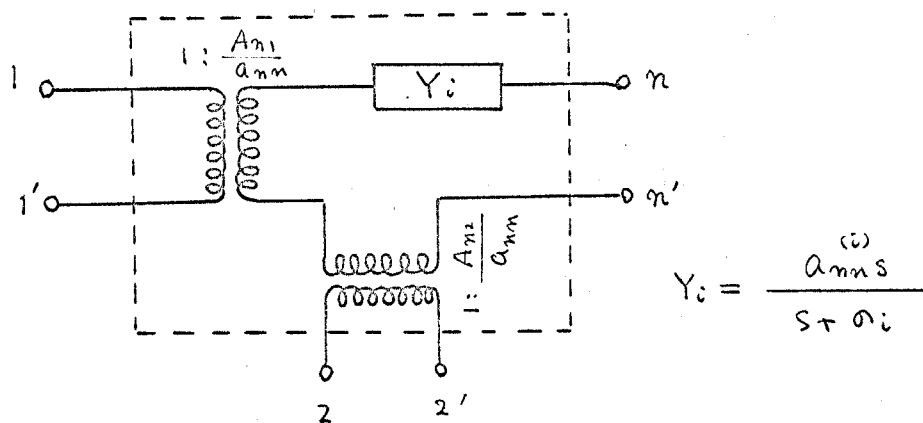
$$P_{\min} / |E_1|^2 = \sum_i P_{\min}^{(i)} / |E_1|^2 = Y_{11}^c + R_m^2 Y_{22}^c |Y_T|^2 + 2 R_m Y_{21}^c \operatorname{Re}(Y_T)$$

が得られる.

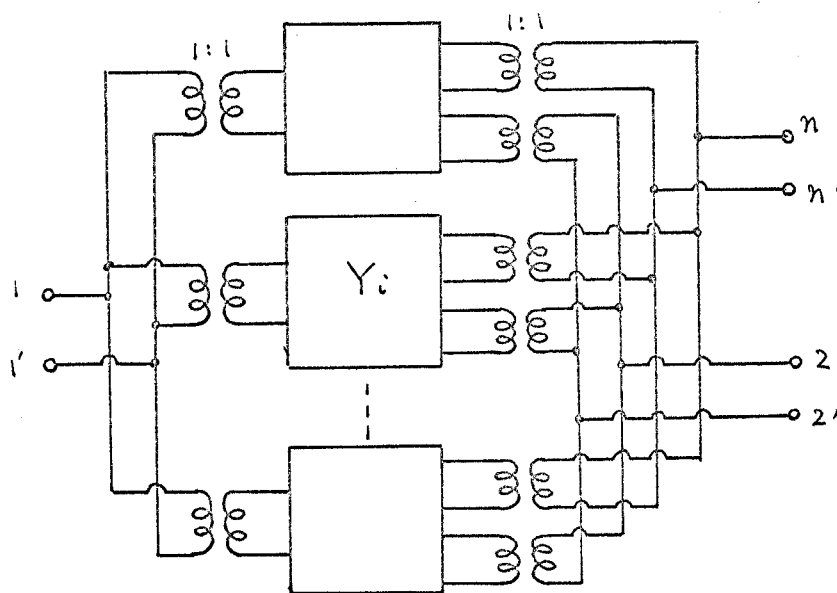
つぎに式(4-21)で与えられる最小電力の回路で常に任意の伝達アドミタンスを実現することができるとを示そう. これは式(4-26)の密条件を満足する回路が構成できることを述べればよい. 図4-5 a に示す三端子対回路網を考えると, この Y パラメータは,

$$[Y_{ij}] = \frac{S}{S + \alpha_i} \begin{bmatrix} \frac{A_{n1}^{(i)2}}{a_{nn}^{(i)}} & \frac{A_{n1}^{(i)} A_{n2}^{(i)}}{a_{nn}^{(i)}} & A_{n1}^{(i)} \\ \frac{A_{n1}^{(i)} A_{n2}^{(i)}}{a_{nn}^{(i)}} & \frac{A_{n2}^{(i)2}}{a_{nn}^{(i)}} & A_{n2}^{(i)} \\ A_{n1}^{(i)} & A_{n2}^{(i)} & a_{nn}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (4-38)$$

となる. この Y パラメータは, 式(4-26)の密条件をすべて満足する. したがってすべての (i) に対して, 図4-5 (a)の回路を求め, これらを理想トランスを使用して, それぞれの端子対を図4-5 (b)のように並列接続すれば,



(a)



(b)

図 4-5 すべての端子対に閉じ回路

求める回路が得られる。

(証明略)

定理4-1の $P_{\min}$ は、一見 R_m に依存しているかに思われるが、式(4-26)を満足するよう Y_{22}^c , Y_{21}^c を選ぶと、 $R_m^2 Y_{22}^c$, $R_m Y_{21}^c$ は、 R_m に全く依存しない量となる。また k_i , R_{mj} にも依存しないことは言うまでもない。

4-2-2 電圧伝送関数構成の場合

前節では、伝達アドミタンスの構成に必要な最小電力を求めたが、本節では電圧伝送関数の構成の場合について検討する。Feedback-Feedforward 回路による電圧伝送関数の実現は、図4-6で得られ、この電圧伝送関数 T は、つぎのように与えられる。

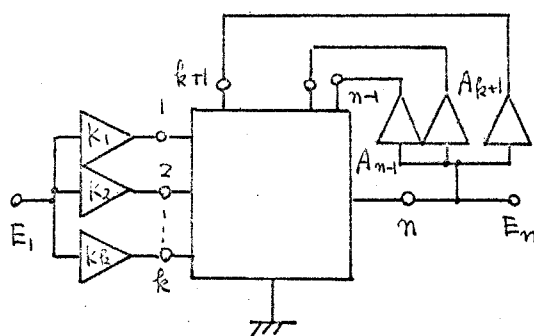


図4-6 電圧伝送関数の実現

$$T = \frac{E_n}{E_1} = \frac{-\sum_{i=1}^k k_i y_{ni}}{y_{nn} + \sum_{j=k+1}^{n-1} A_j y_{nj}} \quad (4-39)$$

この場合伝達アドミタンス形の場合と同様に T および y_{nn} が定まると、 $\sum k_i y_{ni}$, $\sum A_j y_{nj}$ は決定される。この回路の増幅器の供給する電力の総和 P_{all} は式(4-17)と同様に計算され、

$$\begin{aligned} P_{all}/|E_1|^2 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k k_i k_j y_{ij0} + \sum_{i=k+1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n-1} A_j A_i y_{ij0} |T|^2 \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{n-1} k_i A_j y_{ij0} \operatorname{Re}(T) \end{aligned} \quad (4-40)$$

となる。ここで y_{ij0} は、図4-6のRC回路部の出力端子 n を開放した場合の i 番目の端子より j 番目の端子への伝達アドミタンスであり、出力端子を短絡した場合の伝達アドミタンス y_{ij} と y_{ij0} との間には、

$$y_{ij0} = y_{ij} - \frac{y_{ni} y_{nj}}{y_{nn}} \quad (4-41)$$

なる関係がある。これを式(4-40)に代入すると、

$$\begin{aligned} P_{all}/|E_1|^2 = & \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k k_i k_j y_{ij} + \sum_{i=k+1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n-1} A_i A_j y_{ij} |T|^2 + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{n-1} k_i A_j y_{ij} \operatorname{Re}(T) \\ & - \frac{1}{y_{nn}} \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k k_i k_j y_{ni} y_{nj} + \sum_{i=k+1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n-1} A_i A_j y_{ni} y_{nj} |T|^2 \right. \\ & \left. + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{n-1} k_i A_j y_{ni} y_{nj} \operatorname{Re}(T) \right] \quad (4-42) \end{aligned}$$

が得られる。伝達アドミタンスの場合の図4-3と同様に入力回路、帰還回路それぞれを理想トランスを用いて結合し、三端子対回路網とすると、式(4-42)は、

$$\begin{aligned} P_{all}/|E_1|^2 = & Y_{n1} + Y_{n2} |T|^2 + 2 Y_{n1} \operatorname{Re}(T) \\ & - \frac{1}{y_{nn}} \left[Y_{n1}^2 + Y_{n2}^2 + 2 Y_{n1} Y_{n2} \operatorname{Re}(T) \right] \quad (4-43) \end{aligned}$$

と書くことができる。ただし

$$\begin{aligned} Y_{n1} &= \sum_{i=1}^k k_i y_{ni} \\ Y_{n2} &= \sum_{j=k+1}^{n-1} A_j y_{nj} \end{aligned}$$

である。式(4-43)の正項部は伝達アドミタンスの場合の式(4-19)で、

$R_m=1$, $Y_T=T$ としてと一致する。また負項部は T および y_{nn} が与えられればすべて定まる量であるから、結局 $P_{all}/|E_1|^2$ の最小値は、その正項部が最小のときである。

(定理 4-2) 電圧伝達関数 T を Feedback-Feedforward 回路による RC 能動回路で構成する場合の、各増幅倍の供給すべき電力の総和の最小値は、

$$P_{all}/|E|^2 = P_{min}/|E|^2 - \frac{1}{y_{nn}} [Y_{n1}^2 + Y_{n2}^2 |T|^2 + 2 Y_{n1} Y_{n2} \operatorname{Re}(T)] \quad (4-44)$$

で与えられる。ただし P_{min} は (定理 4-1) で $R_m = 1$, $R_{mj} = A_j$, $Y_T = T$ とし E ときの値である。また式 (4-44) の最小電力の回路で、任意の電圧伝達関数 T を理想トランスを用いて常に実現できる*。

定理の後半の証明は全く (定理 4-1) と同じであるため省略する。

4-2-3 二端子アドミタンス関数構成の場合

二端子アドミタンスを Feedback-Feedforward 形回路による構成法は、§2-4 で述べた通りであり、その回路は図 2-9 に示した。この回路の入カアドミタンス Y_{in} は

$$Y_{in} = \frac{y_{11} + \sum_{i=2}^k K_i y_{1i}}{1 - \sum_{j=k+1}^n R_{mj} y_{ij}} \quad (4-45)$$

で与えられた。この回路の総電力 P_{all} は、伝達アドミタンスの場合と全く同様に計算され、

$$\begin{aligned} P_{all}/|E|^2 &= y_{11} + 2 \sum_{i=2}^k K_i y_{1i} + \sum_{i=2}^k \sum_{j=2}^k K_i K_j y_{ij} \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=k+1}^n R_{mi} R_{mj} y_{ij} |Y_{in}|^2 + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^n K_i R_{mj} y_{ij} \operatorname{Re}(Y_{in}) \end{aligned} \quad (4-46)$$

となる。ただし $K_1 = 1$ である。また y_{11} と Y_{in} が与えられると式 (4-45)

* 式 (4-4) を用いて書き直すと、式 (4-44) は

$$P_{all}/|E|^2 = Y_{110}^c + Y_{220}^c |T|^2 + 2 Y_{210}^c \operatorname{Re}(T)$$

と表わすことができる。

より $\sum k_i y_{1i}$ および $\sum R_{mj} y_{1j}$ は定まる量であるから、式(4-46)は、

$$P_{all}/|E_1|^2 = y_{11} + 2 \sum_{i=2}^k k_i y_{1i} + 2 \sum R_{mj} y_{1j} \operatorname{Re}(Y_{in}) \\ + Y_{22} + R_m^2 Y_{33} |Y_{in}|^2 + 2 R_m Y_{23} \operatorname{Re}(Y_{in}) \quad (4-47)$$

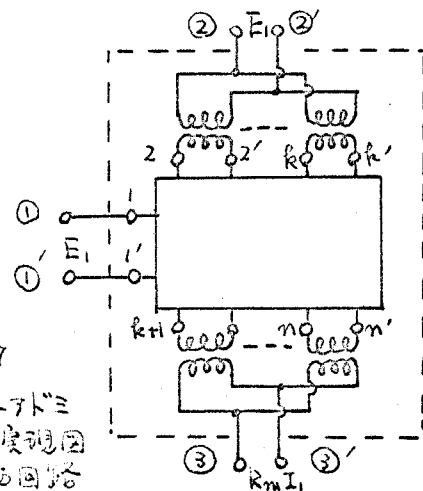
となる。ここで Y_{22} , Y_{33} , Y_{23} は図4-7のように入力電圧に比例した増幅率、入力電流に比例した電流電圧変換器を理想トランスを用いて置き換え、右と左の点線内を示す三端子対回路網のアドミタンスパラメータである。

式(4-47)の最小値は(定理4-1)

より求められ、つぎのようになる。

図4-7

=三端子アドミ
タンス実現図
の等価回路



(定理4-3) 任意の二端子アドミタ

ンス Y_{in} と Feedback-Feedforward 回路による 2C 能動回路を構成する場合、各能動素子の回路へ供給する電力の総和の最小値は

$$P_{min}/|E_1|^2 = y_{11} + 2 \sum_{i=2}^k k_i y_{1i} + 2 \sum R_{mj} y_{1j} \operatorname{Re}(Y_{in}) \\ + Y_{22}^c + R_m^2 Y_{33}^c |Y_{in}|^2 + 2 R_m Y_{23}^c \operatorname{Re}(Y_{in}) \quad (4-48)$$

で与えられる。ただし Y_{22}^c , Y_{33}^c , Y_{23}^c は図4-7の三端子対回路網がすべての端子対に関して密であるときのアドミタンスパラメータである。

(証明略)

ここで二端子アドミタンスの最小電力回路の例について述べよう。いま、目的二端子アドミタンスとして、

$$Y_{in} = \frac{S^2 + S + 3}{S^2 + S + 8}$$

(4-49)

また, y_{ii} とし

$$y_{11} = \frac{(S+1)(S+3)}{(S+2)(S+4)} = \frac{3}{8} + \frac{\frac{1}{4}S}{S+2} + \frac{\frac{3}{8}S}{S+4}$$

(4-50a)

からえらばると, 式(4-45)より

$$\sum k_i y_{ii} = \frac{-3S}{(S+2)(S+4)} = -\frac{\frac{3}{2}S}{S+2} + \frac{\frac{3}{2}S}{S+4}$$

(4-50b)

$$\sum R_{ij} y_{ij} = \frac{5S}{(S+2)(S+4)} = \frac{\frac{5}{2}S}{S+2} - \frac{\frac{5}{2}S}{S+4}$$

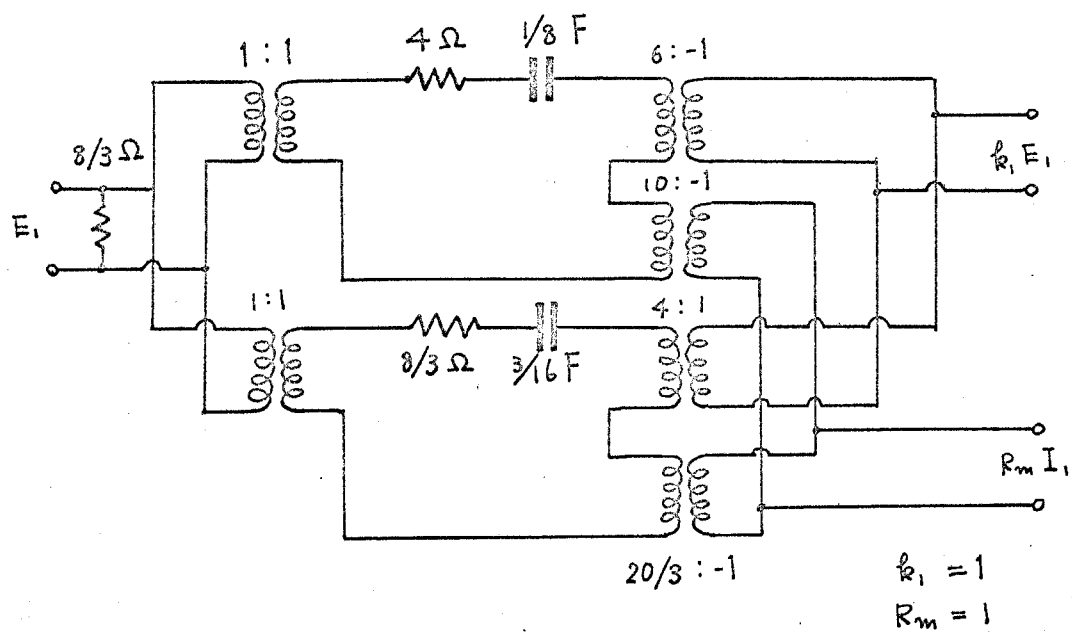
(4-50c)

となり, 同様より Y_{22}^c , Y_{33}^c , Y_{32}^c を求め最小電力を計算すると,

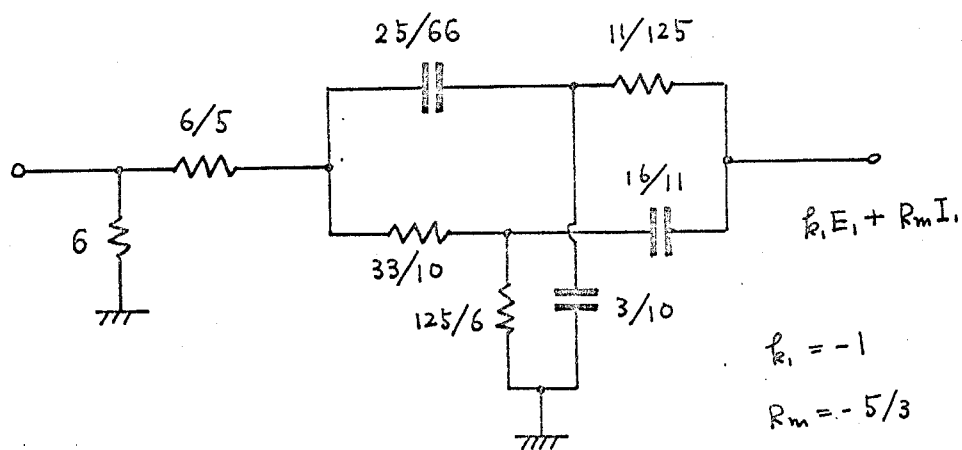
$$P_{min}/|E|^2 = \frac{1}{(S+2)(S+4)} \left[16S^2 + 42S + 3 - (50S^2 + 150S) \operatorname{Re}(Y_{in}) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{125}{3} S^2 + \frac{400}{3} \right) |Y_{in}|^2 \right] \quad (4-51)$$

が得られる。また最小電力の回路は図4-5より図4-8aのように得られる。理想トランスも使用しない一般的な回路については、後節で述べるが、この場合は Fialkow-Gerst の方法によって構成され、図4-8bのような回路で実現できる。



(a)



(b)

图 4-8 電力最小回路構成例

§ 4-3 理想トランスを含まない RC 能動回路の電力

§ 4-2 では理想トランスを回路網中に含むことを許す場合の電力について考察したが、一般にトランスは理想的なものが得られないばかりでなく、RC 能動回路本来の目的から、その使用は好ましくない。それゆえ、本節は理想トランスを含まない回路の電力について考察する。

(定理 4-1) の式 (4-21) および (定理 4-2) の式 (4-44) は回路が理想トランスを含まないで成立することは明らかであるから、ここではこれが十分条件であること、すなわち最小電力の回路で任意の伝達関数 (二端子アドミタンス関数) と理想トランスを用いるに、常に実現できることを示そう。

式 (4-26) の三条件を満足する回路網は、電力が最小となる。したがって、伝達関数と y_{nm} が与えられたとき、式 (4-26) の三条件を満足するような RC n 端子対回路網が理想トランスを用いずに構成できればよい。しかし、一般にこのような RC n 端子対回路網の構成法は得られていないため、ここでは、すべての端子対に関して密条件の成立する RC n 端子対回路網は式 (4-26) の条件を満たし、この RC 回路と Feedback-Feedforward 回路により、任意の伝達関数を実現できることを示す。まず、準備として、つぎの補助定理を示しておく。

(補助定理 4-1) すべての端子対に関して密条件が成立する n 端子対回路網は式 (4-26) の三条件を満足する。

(証明) RC n 端子対回路網の y パラ x - y は

$$(y_{ij}) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \quad (4-52)$$

と表わす。式(4-26)の三条件は全く同様に証明されるため、その中の一条件 $A_{ii}^{(k)} = A_{ni}^{(k)2} / a_{nn}^{(k)}$ を満足することと証明する。

また、 y_{ij} の Foster E

$$y_{ij} = a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(\infty)} s + \sum \frac{a_{ij}^{(k)} s}{s + \omega_k} \quad (4-53)$$

と表わす。 Y_{ii} および Y_{ni} の定義より、

$$Y_{ii} = \sum_{k=1}^k \sum_{j=1}^k k_i k_j y_{ij}$$

式(4-53)を代入して

$$Y_{ii} = \sum_i \sum_j k_i k_j a_{ij}^{(0)} + \sum_i \sum_j k_i k_j a_{ij}^{(\infty)} s + \sum_k \sum_i \sum_j \frac{k_i k_j a_{ij}^{(k)} s}{s + \omega_k} \quad (4-54a)$$

同様に

$$Y_{ni} = \sum_{i=1}^k k_i y_{ni} = \sum_i k_i a_{ni}^{(0)} + \sum_i k_i a_{ni}^{(\infty)} s + \sum_k \sum_i \frac{k_i a_{ni}^{(k)} s}{s + \omega_k} \quad (4-54b)$$

$$y_{nn} = a_{nn}^{(0)} + a_{nn}^{(\infty)} s + \sum_k \frac{a_{nn}^{(k)} s}{s + \omega_k} \quad (4-54c)$$

したがって 留数条件は

$$\begin{aligned} A_{ii}^{(k)} a_{nn}^{(k)} - A_{ni}^{(k)2} &= \sum_i \sum_j k_i k_j a_{ij}^{(k)} a_{nn}^{(k)} - \left(\sum_i k_i a_{ni}^{(k)} \right)^2 \\ &= \sum_i \sum_j k_i k_j (a_{ij}^{(k)} a_{nn}^{(k)} - a_{ni}^{(k)} a_{nj}^{(k)}) \end{aligned} \quad (4-55)$$

一対、端子対①②③よりなる三端子対回路網では、

$$D = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{in} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jn} \\ a_{ni} & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix} \geq 0 \quad (4-56)$$

が成立しなければならない。式(4-55)を展開すると

$$(a_{ii} a_{nn} - a_{ni}^2)(a_{jj} a_{nn} - a_{nj}^2) - (a_{ij} a_{nn} - a_{ni} a_{nj})^2 \geq 0$$

となる。ここで回路網のすべての端子対に関して密であるから、

$$a_{ii} a_{nn} - a_{ni}^2 = 0$$

$$a_{jj} a_{nn} - a_{nj}^2 = 0$$

より、

$$a_{ij} a_{nn} - a_{ni} a_{nj} = 0 \quad (4-57)$$

となり、結局式(4-55)の右辺は零となる。すなわち

$$A_{ii}^{(k)} A_{nn}^{(k)} - A_{ni}^{(k)2} = 0$$

(証明終)

(補助定理 4-2) 図 4-9 に示すような RC はしこ形伝域通過回路は、すべての端子対に関して密である。

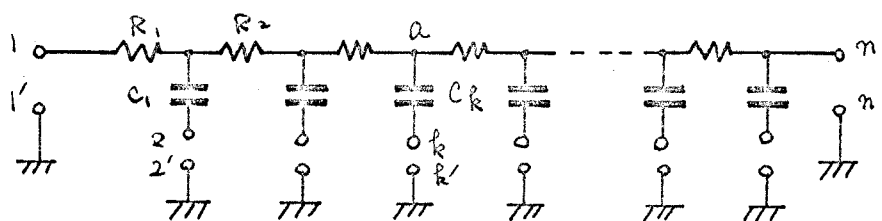


図 4-9 すべての端子対に関して密なる回路

(証明) 一般に図 4-9 のアドミタンスパラメータは、

$$\left. \begin{aligned} y_{11} &= \frac{Q_1(s)}{P(s)} \\ y_{n1} &= -\frac{1}{P(s)} \\ y_{nn} &= \frac{Q_n(s)}{P(s)} \end{aligned} \right\} \quad (4-58)$$

で表わされる。ただし $Q_1(s)$, $Q_n(s)$, $P(s)$ は負の実根のみを有する多項式である。また端子①④に関する F ポラメータは、

$$(F) = \begin{pmatrix} Q_n(s) & P(s) \\ R(s) & Q_1(s) \end{pmatrix} \quad (4-59)$$

となる。ただし $R(s)$ は負の実根のみを有する多項式である。

* 数学的帰納法で簡単に証明される。

式(4-58)の $P(s) = 0$ の根 $s = -\alpha_i$ における留数は、つぎのよう
に求めらる。

$$\left. \begin{aligned} a_{ii}^{(i)} &= \lim_{s \rightarrow -\alpha_i} \frac{s + \alpha_i}{s} \cdot y_{ii} = -\frac{1}{\alpha_i} \frac{Q_i(-\alpha_i)}{K} \\ a_{ni}^{(i)} &= \lim_{s \rightarrow -\alpha_i} \frac{s + \alpha_i}{s} \cdot y_{ni} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{1}{K} \\ a_{nn}^{(i)} &= \lim_{s \rightarrow -\alpha_i} \frac{s + \alpha_i}{s} \cdot y_{nn} = -\frac{1}{\alpha_i} \frac{Q_n(-\alpha_i)}{K} \end{aligned} \right\} \quad (4-60)$$

ただし $\frac{1}{K} = \lim_{s \rightarrow -\alpha_i} \frac{s + \alpha_i}{P(s)} \quad (4-61)$

である。留数条件は式(4-60)より

$$a_{ii}^{(i)} a_{nn}^{(i)} - a_{ni}^{(i)2} = \frac{1}{(\alpha_i K)^2} [Q_i(-\alpha_i) \cdot Q_n(-\alpha_i) - 1] \geq 0 \quad (4-62)$$

となる。また、受動回路網であるから、その下パラメータには、

$$AD - BC = 1 \quad (4-63)$$

なる関係がある。式(4-59)より

$$Q_i(s) Q_n(s) - P(s) R(s) = 1 \quad (4-64)$$

となり、 $P(-\alpha_i) = 0$ であるから式(4-64)で $s \rightarrow -\alpha_i$ とすると

$$Q_i(-\alpha_i) \cdot Q_n(-\alpha_i) = 1 \quad (4-65)$$

となる。したがって留数条件式(4-62)は等号が成立する。換言すれば、

図4-9の端子対①と④に閉回路は空であることが証明された。

つぎに、 k 番目の端子と出力端子 n との関係に着目すると、そのパラメータは、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} y_{kk} &= \frac{(A_1 B_2 + B_1 D_2) S C_k}{P(s)} \\ y_{nk} &= \frac{-B_1 S C_k}{P(s)} \end{aligned} \right\} \quad (4-66)$$

$$y_{nm} = \frac{A_2(A_1 + B_1 s C_k) + B_1 C_2}{P(s)}$$

ただし,

$$P(s) = A_1 B_2 + B_1 D_2 + B_1 B_2 s C_k \quad (4-67)$$

であり, 図4-9の端子1よりa点までの回路のFパウX-タを

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$

として, a点より出かけるまでのFパウX-タを

$$\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

とする. ここで C_k はこれからパウX-タに含まれないとする. また, これからFパウX-タの各要素は式(4-59)に示すように, 負の実根のみからなる多項式である.

いま, $P(s) = A_1 B_2 + B_1 D_2 + B_1 B_2 s C_k = 0$ の一組の根における各留数を求め, 留数条件を示すと,

$$a_{kk}^{(i)} a_{nn}^{(i)} - a_{nk}^{(i)2} = \frac{1}{(\sigma_i k)^2} \left[\{ (A_1 B_2 + B_1 D_2) s C_k \} \{ A_2 (A_1 + B_1 s C_k) + B_1 C_2 \} - (B_1 s C_k)^2 \right] \geq 0 \quad (4-68)$$

ただし $\frac{1}{K} = \lim_{s \rightarrow -\sigma_i} \frac{s + \sigma_i}{P(s)}$

である. $A_1 B_2 + B_1 D_2 + B_1 B_2 s C_k \Big|_{s \rightarrow -\sigma_i} = 0$ であることに注意して, 式(4-68)を整理すると,

$$\begin{aligned} a_{kk}^{(i)} a_{nn}^{(i)} - a_{nk}^{(i)2} &= - \frac{B_1 A_2 (s C_k)^2}{(\sigma_i k)^2} \cdot \left[B_2 (A_1 + B_1 s C_k) + \frac{B_1 B_2 C_2 + B_1}{A_2} \right] \Big|_{s \rightarrow -\sigma_i} \\ &= - B_1^2 (s C_k)^2 (1 + B_2 C_2 - A_2 D_2) \Big|_{s \rightarrow -\sigma_i} \quad (4-69) \end{aligned}$$

ここで再び $A_2 D_2 - B_2 C_2 = 1$ を用いると, 結局式(4-69)は

$$a_{kh}^{(i)} a_{nn}^{(i)} - a_{nh}^{(i)2} = 0$$

が得られる。すなわち図4-9の端子 h と端子 n について、回路は密であることが証明された。同様に任意の端子から任意の端子への伝送に関して、密条件が成立することが証明されるが、ここでは省略する。

(証明終)

(補助定理4-3) 図4-9に示す R はしご形伝域通過回路と図4-3あるいは、図4-6に示すFeedback-Feedforward回路を用いて、任意の伝送関数と構成することが出来る。

証明は、文献[23]に構成論が示されているため、ここでは省略する。

以上の結果より伝送関数 Y_T あるいは、 T が与えられ、 $y_{nm} = Q(s)/K(s)$ が定まると、この y_{nm} と図4-9に示すはしご形伝域通過回路に展開し、これとFeedback-Feedforward回路を用いて、目的関数を実現すれば、電力最小の回路が理想トランスを使用せずに構成出来る*。(補助定理4-1)、(4-2)、(4-3)よりつぎの定理が得られる。

(定理4-4) (定理4-1)、(定理4-2)に示される式(4-21)、(4-44)は、理想トランスを含むなす帰還形 R に能動回路の最小電力である。また常に任意の伝送関数と理想トランスを用いずに、電力最小の回路を実現出来る。

二端子アドミタンスについても全く同様に、(定理4-3)から、つぎの系を得る。

(系4-1) (定理4-3)に示される式(4-48)は、理想トランスを含むなす場合の最小電力であり、また常に任意の二端子アドミタンスと理想トランスを用いずに、電力最小の回路を実現出来る。

* 電力最小の回路はその他はSallen, keyの回路の一部がこの回路であり、一般に最小素子数で構成されている回路は電力が最小となるようである。

§ 4-4. 簡単な例題.

前節までで得られた結果を利用して, 最小電力と実際の回路の電力を, 簡単な例題によって比較してみよう. まず目的関数として, 第2章の問題として用いたつぎの有極形低域通過関数を取りあげる.

$$T(s) = \frac{H(s^2 + 7.7000)}{s^4 + 1.3999s^3 + 1.9974s^2 + 1.3755s + 0.5354} \quad (4-70)$$

式(4-70)を2次関数に分解すると,

$$T_1(s) = \frac{H_1}{s^2 + 1.0193s + 0.4698} \quad (4-71a)$$

$$T_2(s) = \frac{H_2(s^2 + 7.7000)}{s^2 + 0.3807s + 1.1395} \quad (4-71b)$$

あるいは,

$$T_1'(s) = \frac{H_1'(s^2 + 7.7000)}{s^2 + 1.0193s + 0.4698} \quad (4-72a)$$

$$T_2'(s) = \frac{H_2'}{s^2 + 0.3807s + 1.1395} \quad (4-72b)$$

が得られる. T_1, T_2 あるいは T_1', T_2' を連続接続して目的関数と求めるのであるが, 第2章で述べた構成法により, これら関数を構成しよう.

まず, 無極形の関数 T_1, T_2' に対しては,

$$y_{nn} = \frac{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{4}}{s+1} \quad (4-73)$$

を, 有極形の関数 T_2, T_1' に対しては,

$$y_{nn} = \frac{s^2 + 2s + \frac{1}{4}}{s + \frac{1}{2}} \quad (4-74)$$

を選び, これと第2章で示したように展開して回路と求めると, 図4-10の回路が得られる.

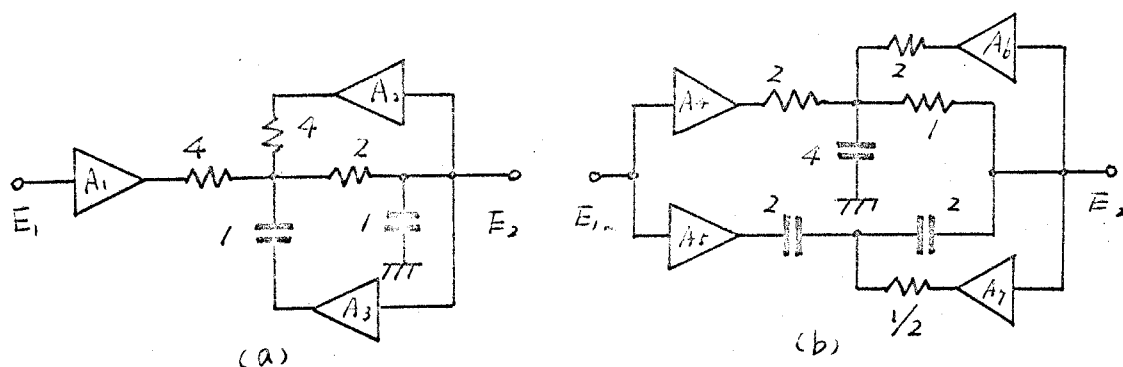


図 4-10 四次伝達関数構成例

図 4-10 a の回路の伝達関数は

$$T_a = \frac{0.125 A_1}{S^2 + (1.5 - 0.5 A_3)S + 0.25 - 0.125 A_2} \quad (4-75)$$

また、b の回路では

$$T_b = \frac{A_5 S^2 + 0.125 A_4}{S^2 + (2 - A_7)S + 0.25 - 0.125 A_6} \quad (4-76)$$

となる。式(4-75)、(4-76)と目的関数の係数と比較して、各増幅率の利得を決定すると、つぎの結果が得られる。

T_1 の回路

$$A_1 = 4.283$$

$$A_2 = -0.879$$

$$A_3 = 0.916$$

$$H_1 = 0.5354$$

T_2 の回路

$$A_4 = 8.000$$

$$A_5 = 0.1299$$

$$A_6 = -2.116$$

$$A_7 = 1.619$$

$$H_2 = 0.1299$$

T_2' の回路

$$8.000$$

$$-2.116$$

$$2.239$$

$$1.000$$

T_1' の回路

$$4.283$$

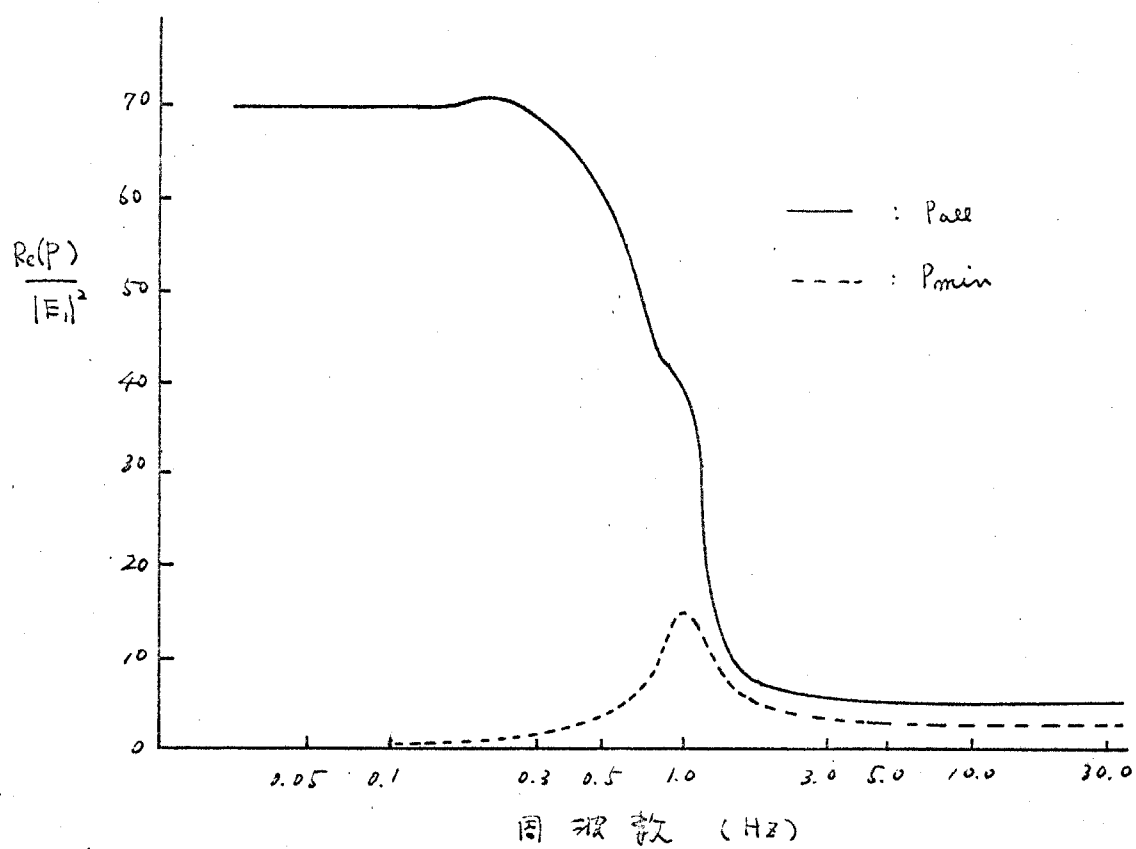
$$0.0695$$

$$-1.759$$

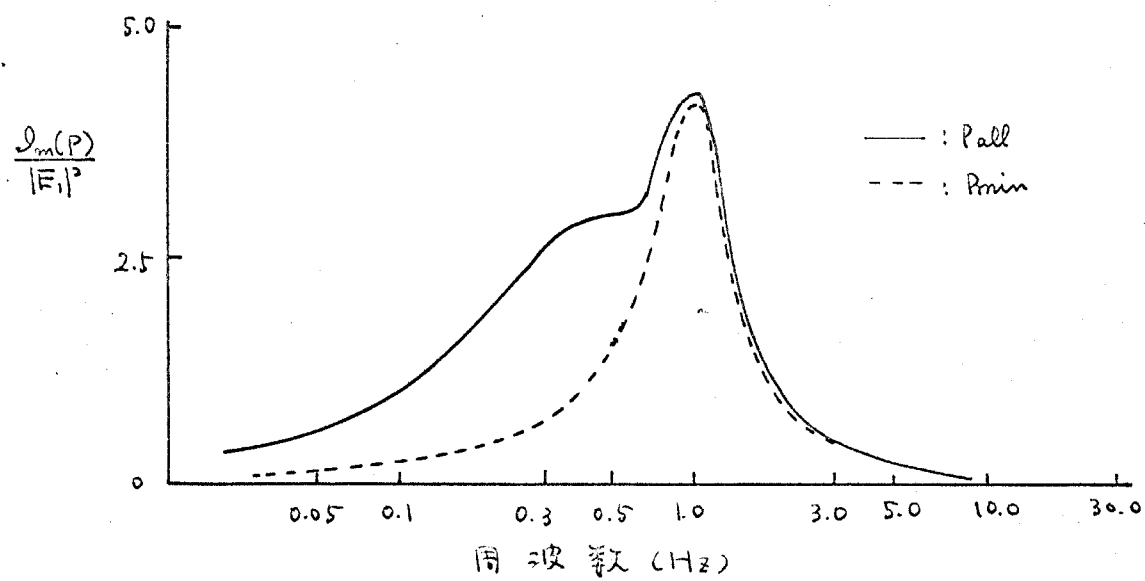
$$0.9807$$

$$0.5354$$

同じ利得水準は、直流での伝達が 1 になるよう決定した。



(a) 実数部



(b) 虚数部

図4-11 T_1-T_2 接続による電力

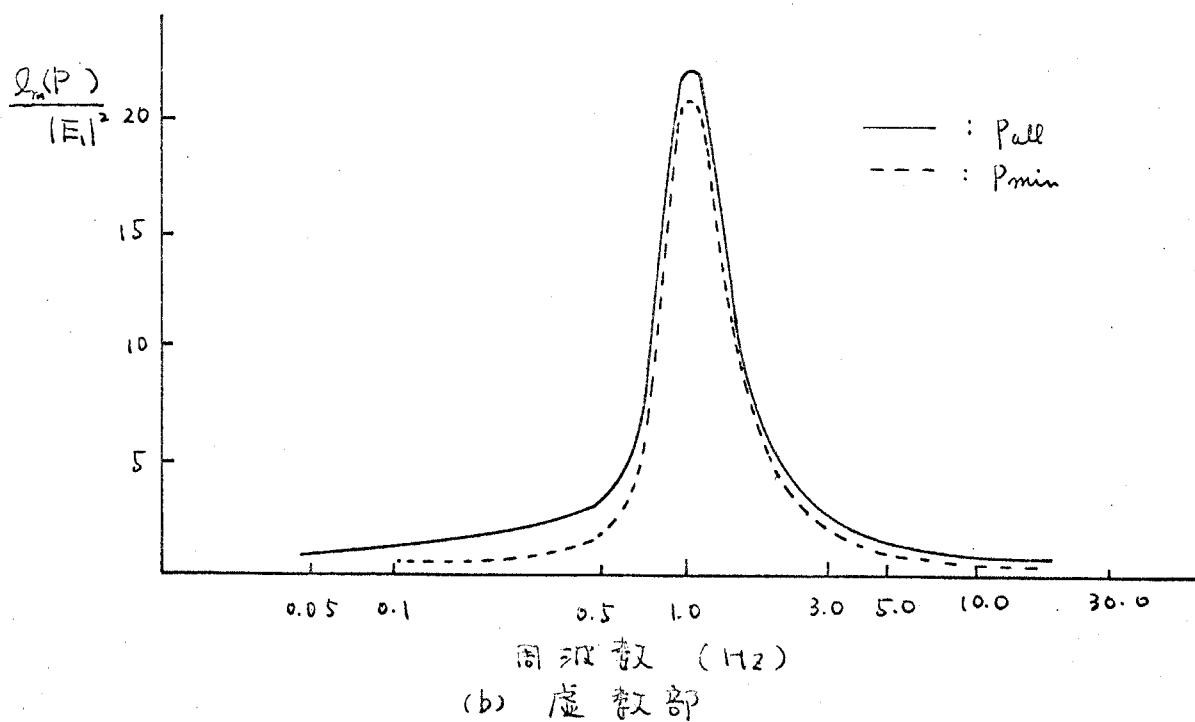
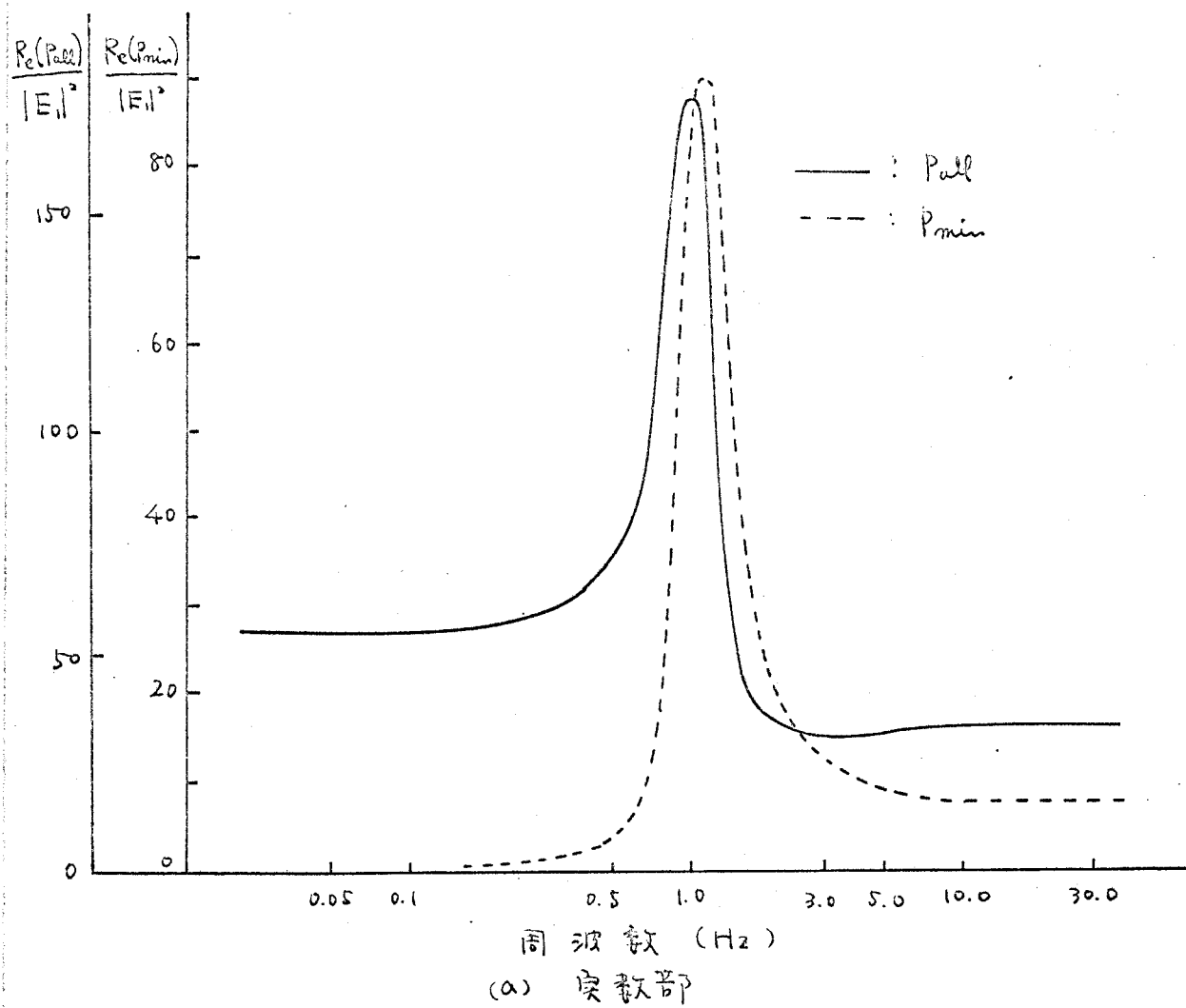
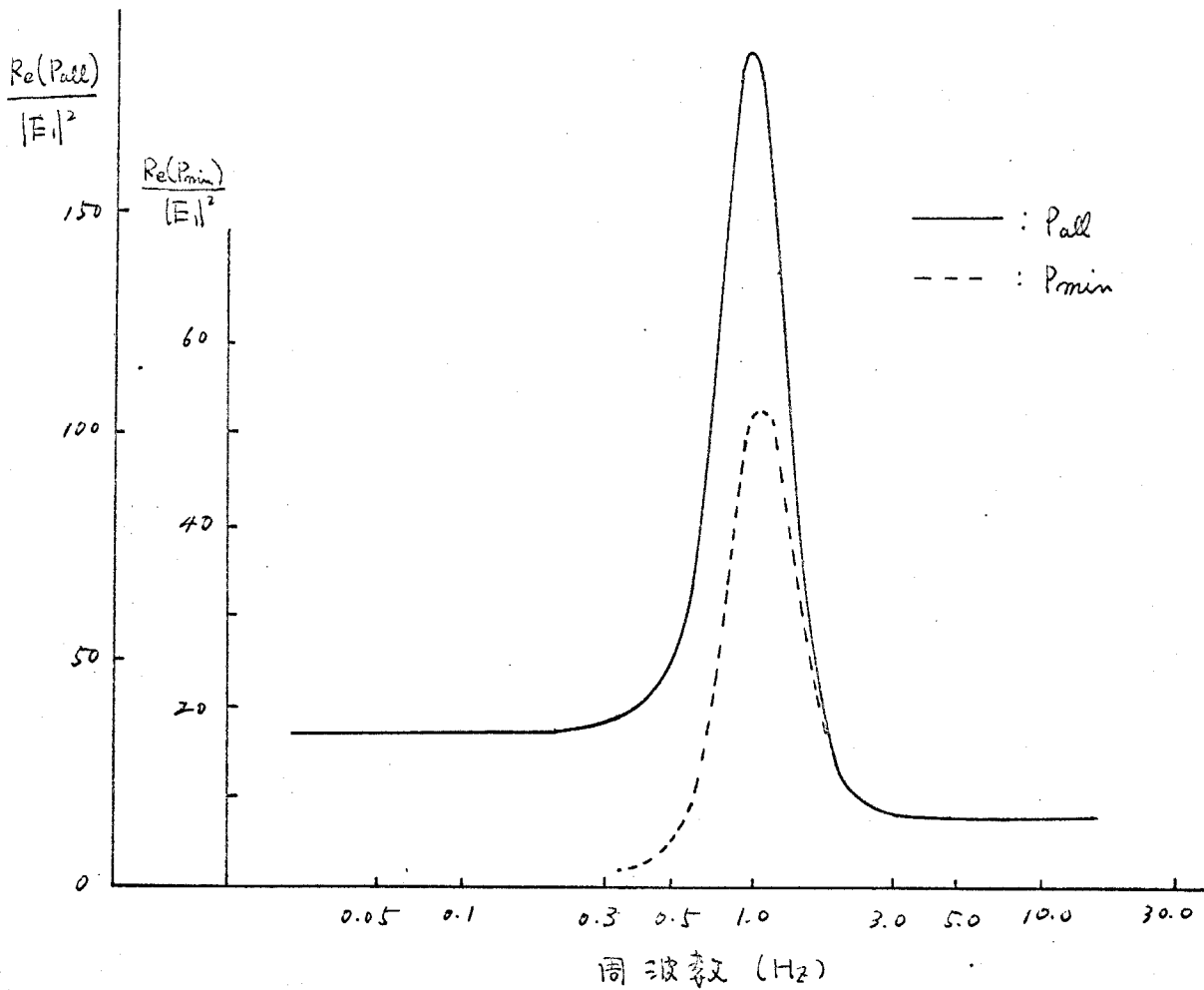
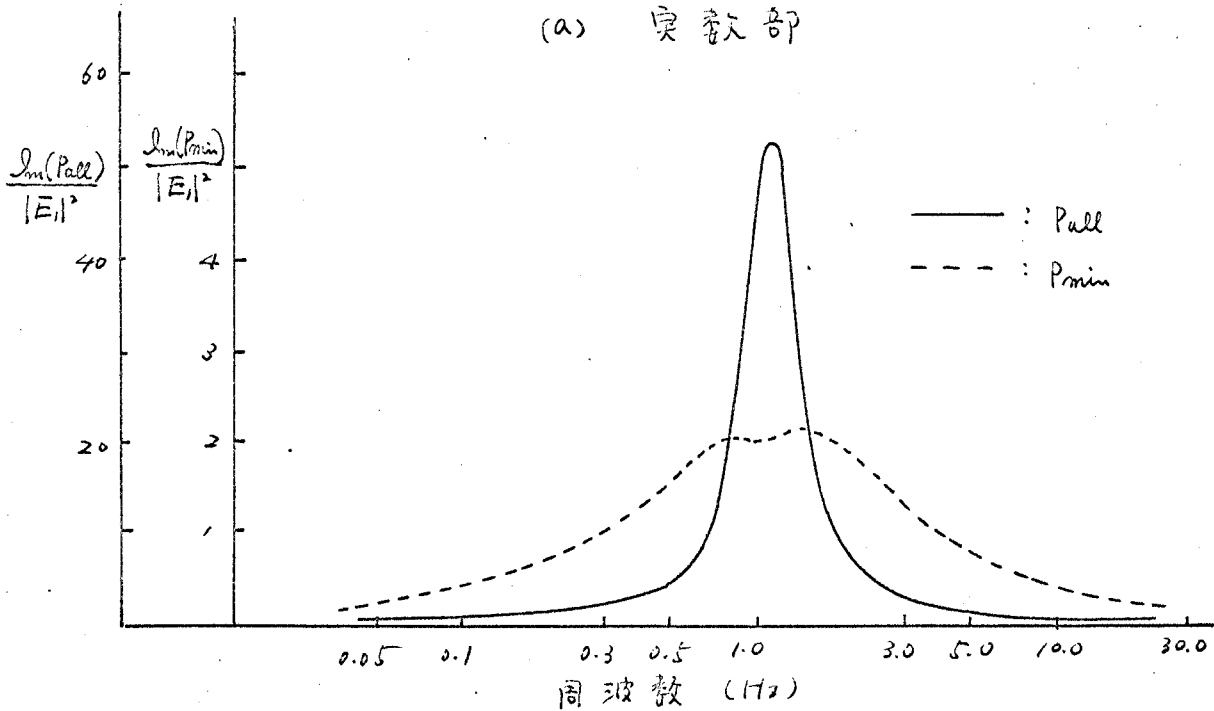


図4-12 $T_2 - T_1$ 接続1=83電力

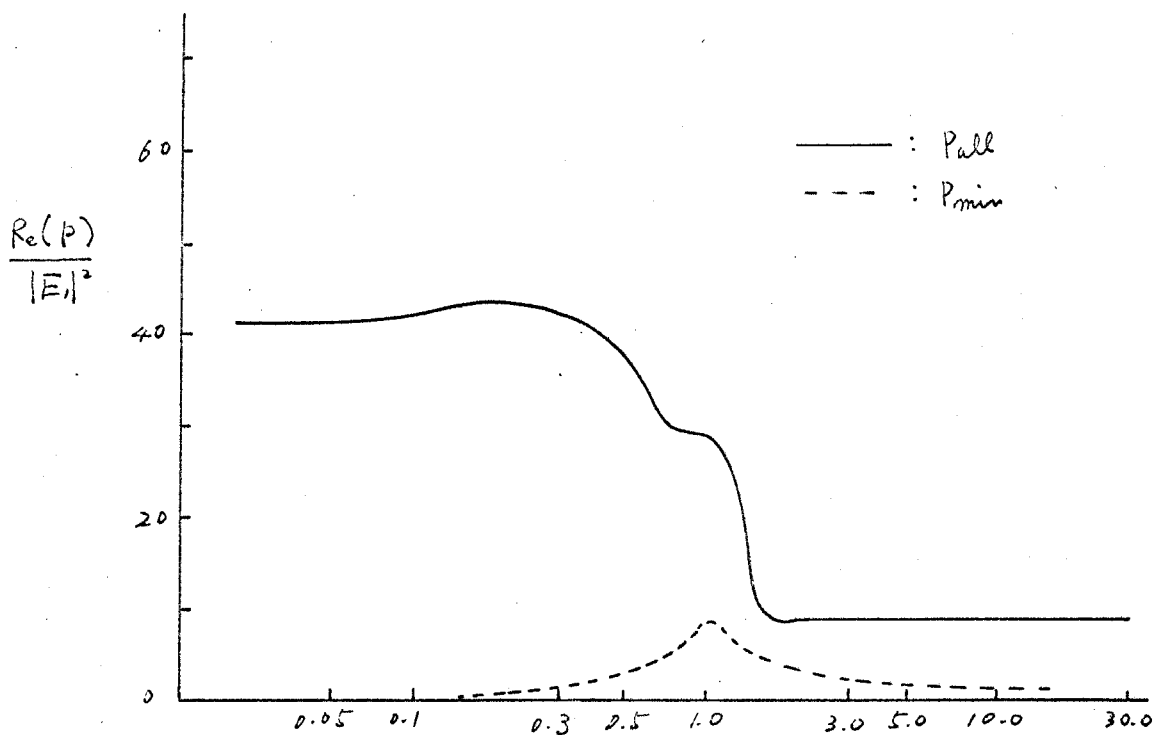


(a) 実数部

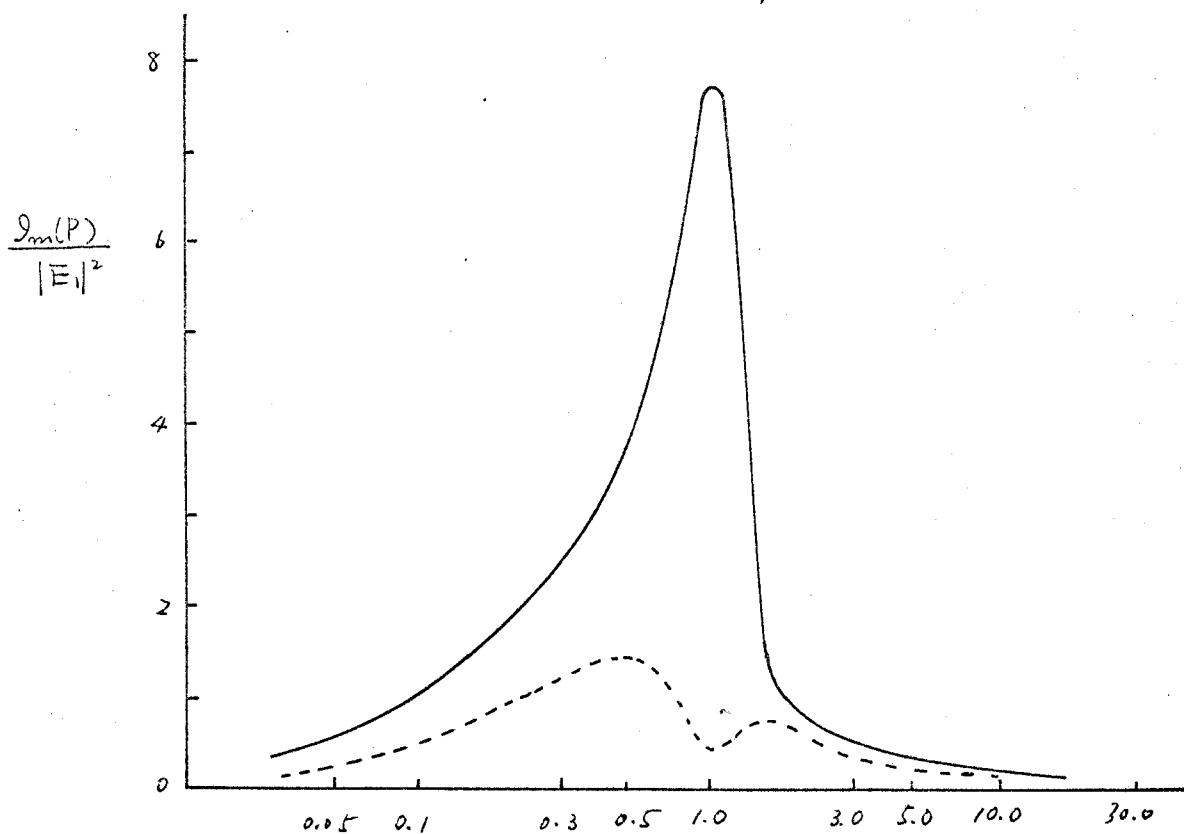


(b) 虚数部

図 4-13 $T_1' - T_2'$ 接続による電力



(a) 実数部



(b) 虚数部

図4-14 $T_2' - T_1'$ 接続による電力

図4-10(a)(b)を連続接続した場合の電力の総和を求めると、図4-11～図4-14の結果を得る。図4-11は T_1-T_2 、図4-12は T_2-T_1 、図4-13は $T_2'-T_1$ 、図4-14は $T_1'-T_2'$ の順序で組み合わせた場合の電力であり、図中(a)はその実部すなわち消費電力、また(b)は虚部すなわち無効電力もそれぞれ表わしたものである。

これらの図からわかるように、連続接続の順序により大きく電力が異なる。図4-11では、一段目の関数 T_1 が低域通過形関数のため、低い周波数では T_1, T_2 の両方の回路で電力を消費しているが、高い周波数では T_2 回路はほとんど電力を消費しないため、この値は小さくなる。また図4-12では、 T_2 の関数のQが高いため、共振周波数付近で出力が大きくなり、そのため後段の T_1 の回路での消費電力が急激に増加することが、はっきり示されている。これらの事実を、図4-13、図4-14の T_1', T_2' の回路についても見られる。このように、一般に出力レベルの大きい回路を前段に置くことは、電力面から非常に不利であると考えられる。また、高い周波数でも T_2 の回路の出力はあまり下らないため、消費電力も図4-11に比べて大きな値となる。こうした目的帯域以外で消費電力の大きい回路は、フィルタのPass Band以外に、大きな信号が存在する場合、この信号によりフィルタの消費電力が大きくなり不利益であるばかりでなく、時には増幅器の特性を損い、フィルタ自身の特性にも影響をおよぼす結果を招くことになる。

つぎに電力最小の回路を理想トランスを使用せずに構成しよう。

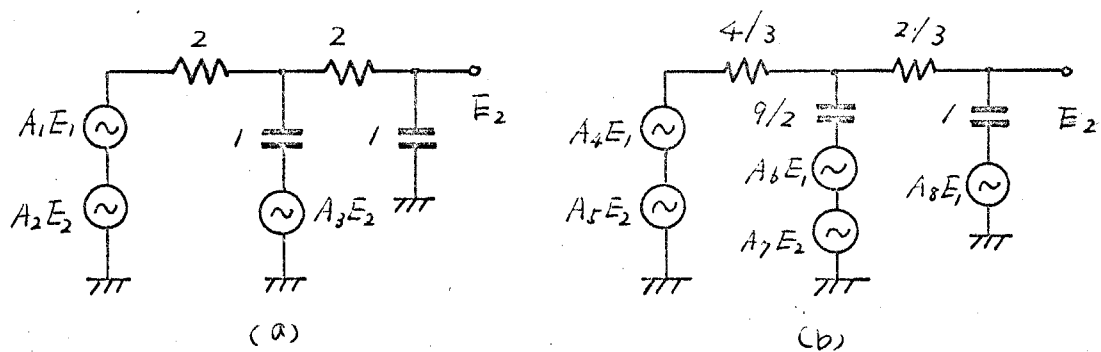


図4-15 電力最小回路

(補助定理4-2), (4-3) により, 式(4-73), 式(4-74)を低域通過形はしご回路に展開して, 各電力源と接続すると, 図4-15が得られる。伝達関数は, 図4-15aでは

$$T_a' = \frac{0.25 A_1}{s^2 + (1.5 - 0.5 A_3)s + 0.25(1 - A_2)} \quad (4-77)$$

図4-15bでは

$$T_b' = \frac{A_1 s^2 + (0.5 A_9 + 1.5 A_7)s + 0.25 A_5}{s^2 + (2 - 1.5 A_8)s + 0.25(1 - A_1)} \quad (4-78)$$

となる。これより伝達関数と各係数と比較すると, つぎの結果を得る。

T_1 の回路

$$A_1 = 2.1415$$

$$A_2 = -0.4397$$

$$A_3 = 0.9614$$

$$H_1 = 0.5354$$

T_2 の回路

$$A_5 = 4.000$$

$$A_6 = -3.558$$

$$A_7 = -0.0866$$

$$A_8 = 1.0795$$

$$A_9 = 0.1299$$

$$H_2 = 0.1299$$

T_1' の回路

$$4.000$$

$$-1.7790$$

$$0.2614$$

$$H_2' = 1.000$$

T_2' の回路

$$2.1414$$

$$-0.8793$$

$$-0.0232$$

$$0.6537$$

$$0.0695$$

$$0.0695$$

ただし, この回路では電力加算器を必要とする欠点がある。この回路の総電力は, 定理4-2より計算され図4-11~図4-14に点線を示す。この場合と先と同様に $T_2 - T_1$ の順序で接続すると, 共振周波数付近では電力が増大する。また, この回路は低周波では抵抗の電流が少なくなるため, 消費電力は小さな値となる。これらの図より, P_{min} は P_{all} に比べて, かなり小さな値にあることがわかる。すなわち実際の回路では電力を大きく損しているの

である。これらの電力は外部直流電源より供給される電力であるから、外部電源の容量も大きくなければならないことになる。さらに実際には、この電力は増幅器を通して回路に供給されるのであるから、各増幅器の効率も考慮すると、実際に外部直流電源の消費する電力はこの倍より大きくなる。

§4-5 おまび

以上本章では、帰還形のRC能動回路の構成上の電力に関する一つの限界を示した。得られた結果を要約すると、Feedback-Feedforward形のRC能動回路で、増幅器の供給する電力の総和は、用いられる受動RC回路網がすべての端子対に関して密であるならば、その値は最小となり端子対の数、増幅器の利得等によらず一定値である。また、常に最小電力の回路は任意の伝送関数(二端子アドミタンス関数)が構成できることを示した。複素電力の実部は、外部電源の電力を消費し、回路網中で発生する熱となる量と表わすから、回路を小形化、集積化する際には発生する熱量を少なくすることが望ましく、また外部直流電源の消費量もできる限り少なくしたい。しかし、これら電力の最小化には限界があることを示した。

また、第三章で述べたように sensitivity の絶対値和は、その回路網中の総電力に関係しているため、その電力の最小回路は、sensitivity の絶対値和の上限が最小の回路であることを示している。しかしこの表現は回路網を外部から見ているため、回路中のすべての素子の sensitivity が一様に小さくなっていくと断定はできない。

一般に能動フィルタは、伝送関数と反二次関数の連続接続として実現するが、その連続の順序、零点と極の組み合わせ方等により、最小電力の値に差異が生じる。これらの連続の順序や、零点と極の組み合わせ方の電力面からみ

最適解は得られてないが、一般的に言って、SN比をあまり問題としないなら、それぞれの双二次関数の出力レベルが大きくなること、また、出力レベルが大きくなる関数も後段に位置させること等が、消費電力を少なくする手法は有効であろう。

なお、問題点として y_{nn} の選び方、素子感度と電力の関係等がある。また一般に任意の位置に制御電源を含む回路の電力は、本解析と拡張すること考えられる。

第五章 結 論

以上各章にわたって、帰還形RC能動伝送回路に関する問題について述べた。本論文で得られた成果を要約すると、つぎの通りである。

第二章では、帰還形RC能動回路のFeedback-Feedforward形回路なるものを定義し(帰還形RC能動回路は、ほとんどこの形の回路で表わすことができる)、この回路で、ある入力に対する応答を見る場合、入力に比例する制御電源の利得は応答関数の分子に、また応答に比例する制御電源の利得は応答関数の分母に、それぞれ独立して影響することを利用して、目的関数の分子・分母の各係数と制御電源の利得により、独立して制御できる回路の構成法について示した。係数独立可変とするための受動RC回路部の展開方法を示した。また本法を双二次関数に適用することにより、双二次関数の連続接続として回路を構成する方が、素子数、素子値、素子感度の面から望ましい結果が得られる。こゝで示された構成法は、伝送関数の実現ばかりでなく、二端子イミタンス、二端子対回路網のYパラメータの構成等も可能であり、もちろん係数独立可変という特徴は保たれている。

第三章では、Feedback-Feedforward形RC能動回路の素子感度について述べた。RC能動回路網の素子感度がその素子で消費される電力、あるいは、蓄積される電力に、何らかの関係があるのではないかという素朴な直感もある程度裏証することができた。Feedback-Feedforward形RC能動回路の素子感度は、その素子の両端に現われる電圧と、すべての能動素子の利得とで表わしたとき、入力側から励振しそのときの素子の両端に現われる電圧の積に比例することが示された。これを用いて種々の定理を得た。また、素子感度の絶対値和の上限は、回路網中に消費されたり蓄積される電力の総和に関係あることを示した。

第四章では、Feedback-Feedforward形RC能動回路の構成上、能動素子

が、RC 能動回路部に供給すべき総電力と関数の関係について求めた。この電力は目的関数が与えられれば、最小値が求まり、この最小電力は用いられる受動RCの端子対回路網がすべての端子対に関して密の時の電力で与えられる。また、任意の関数（伝達アドミタンス、電圧伝送関数、二端子アドミタンス等）が、電力最小の回路で常に構成できる。従来RC能動回路は、目的関数の実現のみで、その電力が注がれ、素子感度についてはある程度考察されてゐるが、回路網の電力に関しては、何も論じられてはいない。しかし電力、特に消費電力は、回路が小形、集積化されるにつれその問題も重要になってくると考えられる。また、RC能動回路を大量に使用する場合、その消費電力は、外部直流電源の消費量に直接関係するため、問題となる。

最近RC能動回路も実験室的段階より実用化への道を歩もうとしているが、オ＝章で得られた係数可変形RC能動回路は、近年急速に発展しつつあるPCM通信における自動変形等化器等への応用が期待され、また、一種類の回路で任意の関数を構成することができることより、汎用フィルタとして、大量生産への道も開かれてゐる。さらに消費電力の問題もRC能動回路の実用上の大きな問題であるが、本論文で得られた結果が一つの指針となることを期待する。

謝 辞

本研究を行うにあたり、常に御指導いただいた柳沢健教授に深く感謝の意を表す。また、日頃御指導いただいている川上正光教授に感謝すると共に、種々有益な御助言、御討論いただいた持丸正義博士をはじめとする柳沢、川上両研究室諸先生に深く感謝する。

参考文献

単行書

- (1) S. K. Mitra : "Analysis and Synthesis of Linear Active Networks"
John Wiley & Sons Inc. New York (1969)
 - (2) L. Weinberg : "Network Analysis and Synthesis"
McGraw-Hill (1962)
 - (3) E. A. Guillemin ; 山田訳 : "回路網合成 上下"
近代科学社 (1962)
 - (4) 尾崎 弘 : "RC回路網" 英立出版 (1955)
 - (5) H. W. Bode : "Network Analysis and Feedback Amplifier Design"
Van Nostrand Co. (1945)
- また、喜安善市訳 "回路網と搬送の理論" 岩波書店

論文

- (6) R. P. Sallen and E. L. Key : "A practical method of designing RC active filters" IRE. Trans. CT-2 p74 (1954)
- (7) N. Fujii : "Active RC networks using a parallel T"
Electronics Letters Vol. 4, No. 12 (June 1968)
- (8) J. G. Linvill : "RC active filters" Proc. IRE. 42, 3. p554
(March 1954)
- (9) 柳沢 健 : "能動RC回路網" 信学誌 40, 1. p37
(4832-01)
- (10) 柳沢 健 : "損失を持つ接地形RCネットワークを用いた能動RCフィルタの構成法" 信学論(A) 51-A, 9, p356 (4843-9)
- (11) H. J. Orchard : "Inductorless filter" Electronics Letters
2 p. 224 (1966)

- (12) W. J. Kerwin, et al. : " State-variable synthesis for insensitive integrated circuit transfer functions "
 I EEE. Journal of S.C. Vol. SC-2, 3 (1977)
- (13) 早原 悦朗 : " Active impedance rotator の 構成 と 伝送回路 への 応用 "
 信学論 (A) 53-A, 4, (昭 45-04)
- (14) 藤井 信生 : " 係数可変形 RC 能動フィルタ の 構成法 "
 信学論 (A) 53-A, 6, (昭 45-06)
- (15) 藤井 信生 : " 能動二端子対回路網 の 構成 "
 信学論 (A) 53-A, 9, (昭 45-09)
- (16) R. J. A. Paul : " Simulation of rational transfer functions with adjustable coefficients " Proc. IEE. 110, 4, (April 1963)
- (17) R. J. A. Paul : " Realization of fourth-order rational transfer functions with adjustable coefficients " *ibid* 110, 4, (May 1964)
- (18) R. W. Lucky, et al. : " An automatic equalizer for general purpose communication channel "
 B. S. T. J. 46, p2179 (1967)
- (19) I. M. Horowitz : " Optimization of negative-impedance conversion method of active RC synthesis "
 IRE Trans. CT-6 p296 (September 1959)
- (20) 岸, 木田 : " 回路網の sensitivity と 蓄積 Energy と の 関係 "
 信学論 Vol. 50, 6 (昭 42-06)
- (21) D. A. Calahan : " Sensitivity minimization in active RC synthesis "
 IRE Trans. CT-9, 1, p38 (March 1962)
- (22) 藤井 信生 : " 帰還形 RC 能動回路 の 最小電力 について "
 信学論 投稿中
- (23) T. Fjällbrant : " Canonical realization of non minimum phase

transfer functions by means of active and non-reciprocal elements"
Ericsson Tech. vol. 27, 2, p214 (1967)

本研究に關する發表論文

- (1) "並列 T 回路を用いた能動 RC フィルタ"
信学会回路とシステム理論研究 CT-68-24 (1968-09)
- (2) "Active RC networks using a parallel-T"
Electronics Letters Vol. 4, No. 12 (June 1968)
- (3) "帰還形 RC 能動回路の素子偏流に関する一考察"
四学会連合大会論文集 2108 (昭 44 年)
- (4) "係数可変形 RC 能動フィルタの構成法"
信学論 (A) 53-A No. 6 (昭 45-06)
- (5) "能動 RC = 端子対回路網の構成" 研究通報
信学論 (A) 53-A, No. 9 (昭 45-09)
- (6) "Active RC synthesis of transfer function with adjustable coefficients"
Proc. IEE. Vol 117 No. 11 (Nov. 1970)
- (7) "帰還形 RC 能動回路の最小電力について"
信学論 (A) 投稿中 採録決定有

付 録 式(4-17)の誘導

図4-3における入力側の*i*番目の出力電流 I_i は

$$I_i = \sum_{j=1}^k k_i y_{ij} E_i + \sum_{l=k+1}^{n-1} R_{ml} y_{il} Y_T E_i \quad (A-1)$$

で与えられる。したがってこの増幅器の出力電力 P_i は、

$$\begin{aligned} P_i &= \overline{E_i} I_i = k_i \overline{E_i} I_i \\ &= k_i \left(\sum_{j=1}^k k_i y_{ij} + \sum_{l=k+1}^{n-1} R_{ml} y_{il} Y_T \right) |E_i|^2 \end{aligned} \quad (A-2)$$

となり、これより入力側の増幅器の電力の総和は、

$$P_{in} = \sum_{i=1}^k P_i = \sum_{i=1}^k k_i \left(\sum_{j=1}^k k_i y_{ij} + \sum_{l=k+1}^{n-1} R_{ml} y_{il} Y_T \right) |E_i|^2 \quad (A-3)$$

つぎに、帰還側の l 番目の増幅器の出力電流は式(A-1)と同様に、

$$I_l = \sum_{j=k+1}^{n-1} R_{mj} y_{lj} Y_T E_l + \sum_{i=1}^k k_i y_{li} E_i \quad (A-4)$$

となり、 l 番目の増幅器の出力電力 P_l は

$$\begin{aligned} P_l &= \overline{E_l} I_l = R_{ml} \overline{Y_T} E_l I_l \\ &= R_{ml} \overline{Y_T} \left(\sum_{j=k+1}^{n-1} R_{mj} y_{lj} Y_T + \sum_{i=1}^k k_i y_{li} \right) |E_l|^2 \end{aligned} \quad (A-5)$$

したがって、帰還側の増幅器の総電力 P_f は、つぎのようになる。

$$P_f = \sum_{l=k+1}^{n-1} P_l = \sum_{l=k+1}^{n-1} R_{ml} \left(\sum_{j=k+1}^{n-1} R_{mj} y_{lj} |Y_T|^2 + \sum_{i=1}^k k_i y_{li} \overline{Y_T} \right) |E_l|^2 \quad (A-6)$$

式(A-3)と式(A-6)より, 全電力 P_{all} は

$$\begin{aligned}
 P_{all} &= P_{in} + P_f \\
 &= \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k k_i k_j y_{ij} + \sum_{l=k+1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n-1} R_{ml} R_{mj} Y_{lj} |Y_T|^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{l=k+1}^{n-1} k_i R_{ml} y_{il} \operatorname{Re}(Y_T) \right] |E_1|^2
 \end{aligned} \tag{A-7}$$

となり, 式(4-17)が得られ E.