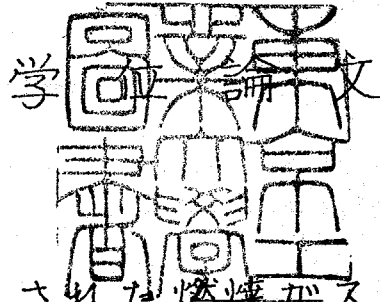


論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	シードされた燃焼ガスの冷電極まわりの境界層の研究
Title(English)	
著者(和文)	岡崎健
Author(English)	KEN OKAZAKI
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第984号, 授与年月日:1978年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第984号, Conferred date:1978/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis



シードされた燃焼ガスの

冷電極まわりの境界層の研究

指導教官

大竹 一友 助教授

森 康夫 教授

東京工業大学大学院博士課程機械物理工学専攻

5065

岡崎 健

東京工業大学 409909

目 次

第1章	緒 論	1
第2章	通電特性および伝熱特性に関する実験	15
2-1	カリウムシード燃焼ガス発生装置	17
2-1-1	燃焼器	17
2-1-2	作動流体	22
2-2	測定部	25
2-2-1	測定電極部	25
2-2-2	電気回路	36
2-3	温度の測定	39
2-3-1	燃焼ガス主流温度	40
2-3-2	境界層内ガス温度分布	43
2-4	通電特性	47
2-5	伝熱特性	53
第3章	境界層の三流体モデルによる解析	57
3-1	従来の解析および本解析の特徴	58
3-2	カリウムシード燃焼ガスの平衡組成の計算	64

3-2-1	平衡組成の計算	65
3-2-2	電子およびイオンの移動度	73
3-3	基礎方程式	79
3-3-1	解析モデルおよび仮定	79
3-3-2	基礎方程式	82
3-3-3	境界条件	89
3-3-4	電離・再結合反応速度	92
3-3-5	無次元化	97
3-4	層流境界層の計算結果と検討	104
3-4-1	高温電極壁、高シード率に対する解	104
3-4-2	冷電極壁、低シード率に対する解	110
3-5	実験との比較検討	125
3-5-1	通電特性	125
3-5-2	伝熱特性	129
3-6	乱流境界層の計算結果と検討	134
3-6-1	仮定および計算方法	135
3-6-2	計算結果と検討	139
3-7	結論	143

第4章	放電の不安定に関する理論解析	147
4-1	従来解析および本解析の特徴	149
4-2	解析場	154
4-3	基礎方程式	155
4-3-1	基礎方程式	155
4-3-2	境界条件	169
4-3-3	計算法	172
4-4	簡単化モデル	176
4-4-1	平衡モデル	176
4-4-2	薄層モデル	178
4-5	計算結果と検討	182
4-5-1	電子の温度および密度の非平衡がある場合	182
4-5-2	電子の温度および密度が平衡の場合	189
4-5-3	薄層モデルによる境界条件の検討	195
4-6	結論	200
第5章	<u>磁場</u> の影響 <small>増大内物質</small>	203
5-1	基礎方程式	203
5-1-1	基礎方程式	203

5-1-2	電気場の設定	208
5-1-3	基礎式の整理と無次元化	216
5-2	計算結果と検討	223
5-3	結論	231
第6章	結論	233
	謝辞	239
	参考文献	240
	付録	244

記 号

(単位はすべて SI 単位を用いている。また式の代用として用いた文字は除く。)

A_E	: 設定電界係数 (5.1.56)	
B	: 磁束密度 [$B = (0, 0, B)$]	[T]
C_p	: 定圧比熱	[J/kg·K]
\bar{c}_e	: 電子の平均熱速度	[m/s]
D	: 拡散係数	[m ² /s]
E	: 電界 [$E = (E_x, E_y, E_z)$], $E' = E + u \times B$	[V/m]
e	: 電子の電荷	[C]
f'	: 無次元流速 [$f' = u/u_\infty$]	
h^2	: 安定性のパラメータ (4.3.48)	
h_p	: フランク定数	[J·s]
J	: 電流密度 [$J = (J_x, J_y, J_z)$]	[A/m ²]
K	: 平衡定数	
k	: ボルツマン定数	[J/K]
l	: 混合距離	[m]
l_e	: 電子平均自由行程	[m]
M	: 分子量	[kg/mol]

m	:	粒子質量	$[\text{kg}]$
n	:	粒子密度	$[1/\text{m}^3]$
P	:	圧力	$[\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2]$
$Q_{\text{ex}}^{(1)}$:	電子とX粒子の運動量交換衝突断面積	$[\text{m}^2]$
δ	:	変動の増幅率	$[1/\text{s}]$
q_w	:	壁への熱流束	$[\text{W}/\text{m}^2]$
R_a	:	ぶく射損失エネルギー	$[\text{J}/\text{m}^3 \cdot \text{s}]$
R	:	一般気体定数	$[\text{J}/\text{mol} \cdot \text{K}]$
r	:	粒子間距離	$[\text{m}]$
T	:	ガス温度, T_e : 電子温度	$[\text{K}]$
t	:	時間	$[\text{s}]$
U	:	ドリフト速度と拡散速度ベクトル	$[\text{m}/\text{s}]$
u	:	流速ベクトル $[u = (u, v, w)]$	$[\text{m}/\text{s}]$
X	:	モル分率	
x, y, z	:	直線直交座標	
Y	:	質量分率	
α	:	変動の波数	$[1/\text{m}]$
α_e, α_x	:	再結合係数 (e : 電子が第三体, x : X粒子が第三体)	$[\text{m}^6/\text{s}]$

β_e, β_i : 電子, イオンのホール係数

Γ_{iw} : 壁表面におけるイオンの粒子流束 [1/m²s]

γ^2 : 無次元波数 (4.3.49)

δ : 境界層厚さ, 低導電度層厚さ [m]

δ_x : 電子エネルギー損失係数 (X粒子に対する)

ϵ : 真空中の誘電率 [F/m]

ϵ_i : 電離エネルギー [J]

ϵ_r : うず動粘性係数 [m²/s]

$\mathcal{E}_e, \mathcal{E}_i$: 一般化された電界 (5.1.15), (5.1.16) [V/m]

ζ : $Y_e/Y_{e\infty}$ (あるいは $n_e/n_{e\infty}$)

θ : T/T_∞ , θ_e : T_e/T_∞

λ : 熱伝導率 [W/m·K]

λ_D : デバイ長さ [m]

μ : 粘性係数 [kg/m·s]

μ_e, μ_i : ガス中における電子, イオンの移動度 [m²/V·s]

ν : 動粘性係数 [m²/s]

$\bar{\nu}_{ex}$: 平均衝突周波数 (電子とX粒子) [1/s]

ξ, η : 変換座標 (3.3.36~37) あるいは (4.3.11)

無次元数

P_r : フロントル数

Re_x : レイノルズ数 (代表長さ - 前縁からの距離)

Sc_i : ガス中におけるイオンのシュミット数

添字

cr : 安定性の限界値

e : 電子

i : イオン

K : カリウム原子

max : 最大値

S : サハ平衡

W : 壁表面

X : X粒子

O : 非擾乱定常値

∞ : 主流

\wedge : 変動量の無次元振幅

第1章 緒 論

近年、省エネルギーのための技術開発に対する努力は、エネルギー消費量の著しい増大による将来の現エネルギー資源の枯渇化ともからんで非常に目ざましいものがある。新エネルギー源の開発として核融合炉などの大型技術についての基礎的な研究が進められている一方で、まだ先のことと考えられるそれらの新エネルギー源の実用化までの相当期間および将来の新エネルギー源開発後におけるエネルギー有効利用という立場から、高効率のエネルギー変換のための新しい技術開発に関する研究もさかんに行なわれている。そのひとつとしてMHD発電がある。MHD発電は、導電性流体が磁界を横切るとき、流れと磁界の両方に直角な方向に生ずる起電力を利用した、熱エネルギーを直接電気エネルギーへ変換する直接発電法であり、途中に機械的エネルギー部分を經由しないことと、作

動流体温度を $2500 \sim 3000 \text{ K}$ と高くとれることにより、MHD 発電を蒸気タービンのトッパーとして用いれば 50% 以上の総合変換効率が可能となるといわれている。^[1-1] さらに、アルカリ金属シード燃焼ガスを作動流体とする開放型 MHD 発電機の場合、あまり質の良くない石炭を有効に利用できる省エネルギー技術として、石油ショック以来のここ数年、実用化に向けての研究が再び活発化している。特に、米国では、石炭燃焼ガスを作動流体とする開放型 MHD 発電に伴う種々の工学的問題の研究に大きな力を注いでいるし、ソ連では、すでに、空気予熱器から蒸気発生器までを組み込んだ U-25 (計画出力 25 MW) MHD 発電装置を建設し、出力 6 MW、継続時間 12 時間の実験に成功しており^[1-2]、さらに 500 MW 級の発電装置を計画するに至っている。^[1-3] しかしながら、この MHD 発電が真に実用化される上での最大の問題点のひとつとして、長時間運転における電極の寿命の問題がある。電極表面温度が燃焼ガス温度に近い

高温電極を用いると、壁近傍の境界層内における電氣的損失は小さく押さえられ外部出力は向上するがサーマルショックや電極の侵食などによる電極の寿命という点で、期待される性能をもつ材料は未だ開発に成功していない。逆に、電極表面温度を電極の冷却によって低くおさえた冷電極を用いると、電極の寿命は増大するか。電極近傍の低導電度の境界層内におけるジュール発熱による電氣的損失が大きく、また、電流密度が大きくなった時の電流の局所集中（アークスポットの発生により電極表面の局所侵食のもとになる。）が、高温電極の場合よりもずっと小さな電流密度で生じてしまうという欠点もある。しかし、最大の問題である寿命の点で有利な冷電極を用いることの方に、最近はより関心が集まっており、実用化に最も近い開放型MHD発電機の作動流体と考えられている、カリウムがシードされた燃焼カスの、大きな通電を伴う冷電極まわりの境界層内における電氣的物理現象の詳細を明らかにしておくことは、

上述のようなMHD発電においてはもちろん、将来の種々のプラズマ技術における冷壁近傍の現象の理解の一助となりうるという意味においてもきわめて重要なことである。

作動流体が燃焼ガスの場合、並進の自由度しかもたないアルゴンなどの希ガスが作動流体の場合とは違って、ガス中には、燃焼生成物である CO_2 や H_2O など並進の他に振動などの多くの内部自由度をもった多原子分子が多数存在し、電子と中性粒子の間のエネルギー交換がはげしいので、電子は中性粒子と熱平衡状態になりやすく、従来の解析ではすべて、燃焼ガスを作動流体とする開放型MHD発電機ダクト内においては、全領域で電子温度はガス温度に等しく、しかも電子密度、イオン密度ともその場のガス温度に対するサハ平衡値で与えられるとして解析が行なわれていた。このような状況は、高温電極の場合にはほぼ正しいと考えられるが、通電を伴う冷電極の場合、高温電極の場合とは違って、次のような特

殊な物理的状況が実現することが予想される。①冷電極のごく近傍の導電度の低い領域におけるきわめて大きな電界の場では、電子が電界から得るエネルギーが大きくなり、内部自由度をもつ多原子分子を多数含む燃焼ガス中においても中性粒子とのエネルギー交換が不十分となり、電子とガスとの熱平衡が成立しなくなる。すなわち、電子温度がガス温度より高くなる。②冷電極近傍では、電子密度が主流部に比べて非常に小さくなるため、電子とイオンに関する反応（電離・再結合反応）が十分ではなく、電子密度は電子温度に対するサハ平衡値にはならない。③電子密度が小さいので、三体再結合反応において、電子を第三体とした反応に比して、内部自由度をもつた CO_2 などの重い粒子を第三体とした反応の寄与が無視できなくなる。④冷電極近傍の電離・再結合反応を伴うきわめて強い電界の場においては、電子が電界から得るエネルギーが大きいため、電子とイオンの電荷分離が、一様場での空間電荷分離領域の広さの

目やすとされるデバイ長さより広い範囲に生じ得る。本研究は、従来見過ごされていたかあるいは大胆な仮定のもとでしか扱われていなかったこのような複雑な物理現象が関与しあった、カリウムシード燃焼ガスの通電を伴う冷電極まわりの境界層内において特徴的な物理現象の詳細を明らかにすることを目的としており、電流が電極に均一に流れる均一放電場に対する、境界層内の電子密度やイオン密度などの物理量の厳密な分布を明らかにし、さらに、通電量の増加に伴い生ずる、冷電極面上での局所電流集中によるアークスポットの発生に対する理論的検討を行なっている。

従来の境界層解析に関しては、3-1節において詳しく述べるが、今までの、導電性気体の固体壁まわりの境界層解析における最大の問題点は、電氣的物理量に対する壁表面の境界条件の不確かさである。問題の取扱いを単純化するために、従来一般にとられてきた手法は、境界層内を2つの領域、すなわち壁

(付2)

のごく近傍の電荷分離の生じている、デバイ長さ程度の薄さ (10μ のオーダー) と仮定されたシース領域、およびその外側の電子とイオンが電氣的に干渉しなから等速度で拡散すると考えられ、電氣的中性の成立した両極性拡散領域にわけて、シースの外端で両領域の粒子束あるいはエネルギー束が接続するように、両極性拡散領域における壁側の境界条件を与えろという方法である。この手法はもともと、探針理論から拡張されてきたものであり、一般のMHD境界層解析に対する適用には、場合場合に応じて、慎重な検討や修正が必要で、今までは、モデルによって結果が大きく異なるという例や、適合係数のようなパラメータの導入により実験値との対応をとった例も少くない。特に、MHD発電機の電極近傍のように大きな通電を伴う場合には、シース厚さの不確定さやシース端での粒子束やエネルギー束の不明確さなどのため、上述のようなシースモデルの成立は困難となる。また、衝突が活発な場合のシース内の解析モデル

ルにおいて、壁表面で電子密度やイオン密度が零であるとするような従来の仮定も、通電量が大きい場合には不合理なものとなる。本研究における境界層解析では、先に述べたような、冷電極まわりの境界層に特徴的な物理現象がすべて考慮され、従来の電極面上の不完全なシース仮定がとり除かれた三流体モデル（電子、イオン、中性粒子）による解析法を提示し、厳密な電氣的物理量の境界層内分布を明らかにする。さらに、この結果より、通電特性および伝熱特性を計算し、別に行なわれた実験結果と比較検討を行なう。

次に、電極面上のアークスポットの発生に関する従来の研究は、詳しくは4-1節に述べるが、実際の現象がきわめて複雑なため、いずれも理論モデルに大胆な仮定を導入しており、十分満足のいく解析はない。その研究方法は大きくわけて2つあり、1つは、電極表面上のきわめて薄い層内における、電極材料と気相との間の直接的な相互作用に注目して研

究しようとする方向であり、もう一つは、アークスポットの発生を、電極近傍の気相中における不安定現象として解析しようとする方向である。本研究で取り扱う放電の不安定解析は、後者の立場の方に属するものではあるが、従来の不完全な取り扱いとは全く異なるものである。冷電極表面近傍の、主流にくらべてきわめて導電度の低い層内での放電の不安定現象においては、境界（例えば冷電極表面）の条件が不安定の発生あるいは抑制に特に支配的な影響を及ぼすと考えられるにもかかわらず、従来の解析では、最も進んだと考えられる Oliver^[1-4] の解析でも、そのような影響が全く考慮に入らないような変動量の形、すなわち境界層をよぎる方向に変動量が分布をもたず一定であるような微小変動量に対する解析が行われていくにすぎない。本来、変動量についても、その場を支配する基礎方程式と境界条件の解となっていなくてはならず、変動のベースになる0次の解についても、微小変動の1次の解についても、

もとの基礎方程式を満たすものでなくてはならない。
それにもかかわらず、従来の解析は、その両方につ
いて満足のいくようなモデルとはなっておらず、物
理的な発想は別として、安定性限界に対する議論に
ついては全く不完全なものである。

本研究における放電の不安定性に対する解析は、
第3章において、特に、シードされた燃焼ガスの冷電
極まわりの境界層の解析のために構成された、三流
体モデルによる基礎方程式に対する解を、ベースと
なる0次の解とし、それに対する境界層内分布をも
つ1次の擾乱を考慮して線型化を行ない、変動に対す
る基礎方程式系を、放電の安定性の基準になるパラ
メータと変動の波数に関する固有値問題として構成
し、これにより求められる中立安定曲線から、放電
の安定性の限界条件およびそれを支配する因子につ
いて議論を行なったものである。このように、本解析
では、変動量の境界層内分布についても、考えている
場の境界条件を満足する解が固有関数として定まる

ような、厳密な線型安定論が展開されており、この結果から、安定性限界に対する電子密度の非平衡性や壁境界条件などの影響が考察される。

通電のある陰極面上では、電子放出を伴い現象がきわめて複雑なため、三流体モデルによる境界層解析に対する壁境界条件に困難な点が多く、本研究においては、陽極まわりの境界層のみが取り扱われており、また、上述の如き現象を明らかにするという意味においては、磁場の直接的な寄与は小さいと考えられ、主として、磁場はなく外部印加電圧による通電がある場についての解析を行ない、磁場の境界層内物理量の分布に対する影響については最後にふれることにする。以下、各章における概要を簡単に述べる。

第2章「通電特性および伝熱特性に関する実験」においては、主として第3章における解析結果との比較を目的とした実験について述べる。解析結果との比較を考慮して、局所測定が可能な流れ方向に分

割された測定電極をもつ対向平板冷電極を用い、そのまわりに形成された低導電度の境界層内に外部印加電圧による通電を行ない、通電特性すなわち印加電圧と電流密度の関係、および伝熱特性すなわち電流密度と通電による電極壁への伝熱量の増加の関係を測定する。

第3章「境界層の三流体モデルによる解析」においては、三流体モデルによる境界層解析法を提示し、冷電極まわりの境界層の解析を行なう。すなわち、先にも述べたように、電子とイオンの電荷分離はもちろん、電子の熱的ならびに化学的非平衡性、および、三体再結合反応における重い中性粒子の寄与を考慮に入れて、通電を伴うシードされた燃焼ガスの冷電極まわりの境界層を解析し、均一放電場における冷電極近傍の種々の物理量の厳密な分布を明らかにし、そこでの物理現象に対する考察を行なう。

第4章「放電の不安定に関する理論解析」においては、冷電極近傍の低導電度の境界層内における、

電流密度の増加に伴う電極面上のアーチスポットの発生を、均一放電場における温度場と電気場の相互干渉による放電の不安定問題としてモデル化し、線型安定論を用いて理論的に論ずる。第3章で明らかにされた分布を、ガスとなる0次の解とし、1次の擾乱場に対する基礎方程式を、安定性の基準となるパラメータと変動の波数に関する固有値問題として取扱い、中立安定曲線を求め、均一放電の安定性の限界条件およびそれを支配する因子についての議論を行なう。また、不安定性解析に対する単純化モデルもあわせて示す。

第5章「磁場の影響」においては、第3章で外部磁場のない場合について明らかにしたような、冷電極まわりにおける種々の非平衡性あるいは電荷分離が、外部磁場の存在によってどのように変化するかを検討する。連続ファラデー電極および理想分割ファラデー電極のそれぞれの場合に対する磁場の影響について考察を行なう。

第6章「結論」においては、第2章から第5章までの結果を総合的にまとめている。

第2章 通電特性及び伝熱特性に関する実験

アルカリ金属をシードしたガス流の平板電極まわりの境界層内における電子密度や電子温度などの正しい分布を知ることは、MHD発電の発電特性を予測する上でもきわめて重要であり、それらの分布を直接測定する試みか、最近になって精力的に押し進められている。^{[2-1][2-2][2-3][2-4]} Brown et al.^[2-1] および

Brown^[2-2] は、NaKをシードしたアルゴン流の中に電氣的に浮いた冷却平板をおき、そのまわりの層流境界層内において、電子温度を分光的に、電子密度を4本フローブを用いて測定し局所相似解との比較を行なっている。Daily et al.^[2-3] は、燃焼ガスを用いたMHD発電機内の電極まわりの乱流境界層内において、亜音速流および超音速流の両方の場合について、ガス温度をNa-D線反転法で、電子密度を分光的方法で、ガス流速をレーザドップラ流速計で測定してい

る。特に燃焼ガス MHD 流れ中の測定技法については、上述の方法も含めて Self et al.^[2-4] が、流速、温度、導電度、電子密度、微粒子濃度など、実際の MHD 発電において重要な種々の物理量の測定法について、これまで行なわれた実例や新しい方法の今後への適用性に関する展望などもも含めて詳細にまとめている。しかしながら、境界層内の局所直接測定は、特に電気的な物理量については、今のところ未だ満足のいく状況には至っておらず、しかも、いずれの測定法においても、電子密度や電子温度が低いと誤差の著しい増加を招き適用できないことがわかってきている。さらに、燃焼ガスの場合希ガスとは違って電子のエネルギー損失係数がきわめて大きいので、大きな通電があっても、電子温度の非平衡性があらわれるのは冷電極壁のごく近傍のせまい領域に限られるということもあって、本研究で取り扱う、シールドされた燃焼ガス流中の冷電極まわりの境界層においては、電気的物理量すなわち電子密度や電子温度

に大きく依存する総体量の関係、すなわち通電特性（印加電圧と電流密度の関係）および伝熱特性（電流密度と通電による増加伝熱量の関係）の測定を行ない、後章で述べる理論との比較検討を行なうことにする。本章においては、この実験について詳述し、実験結果を示す。

2-1 カリウムシード燃焼ガス発生装置

○ 2-1-1 燃焼器

本実験において、カリウムシード燃焼ガスを発生させるのに使用した燃焼器は、燃料、空気、酸素および冷却水などの供給システムと共に図.2-1 に示されている。この燃焼器は、燃焼器出口から数cm後流におかれた測定部（図.2-2）に、十分反応が進み化学的にも熱的にも平衡状態に達した均一な燃焼ガスが流入するように、特に配慮された構造となっている。燃料の微粒化特性、保炎特性、酸化剤との混合特性などを考慮して、燃料噴射ノズルにおいて、空気噴

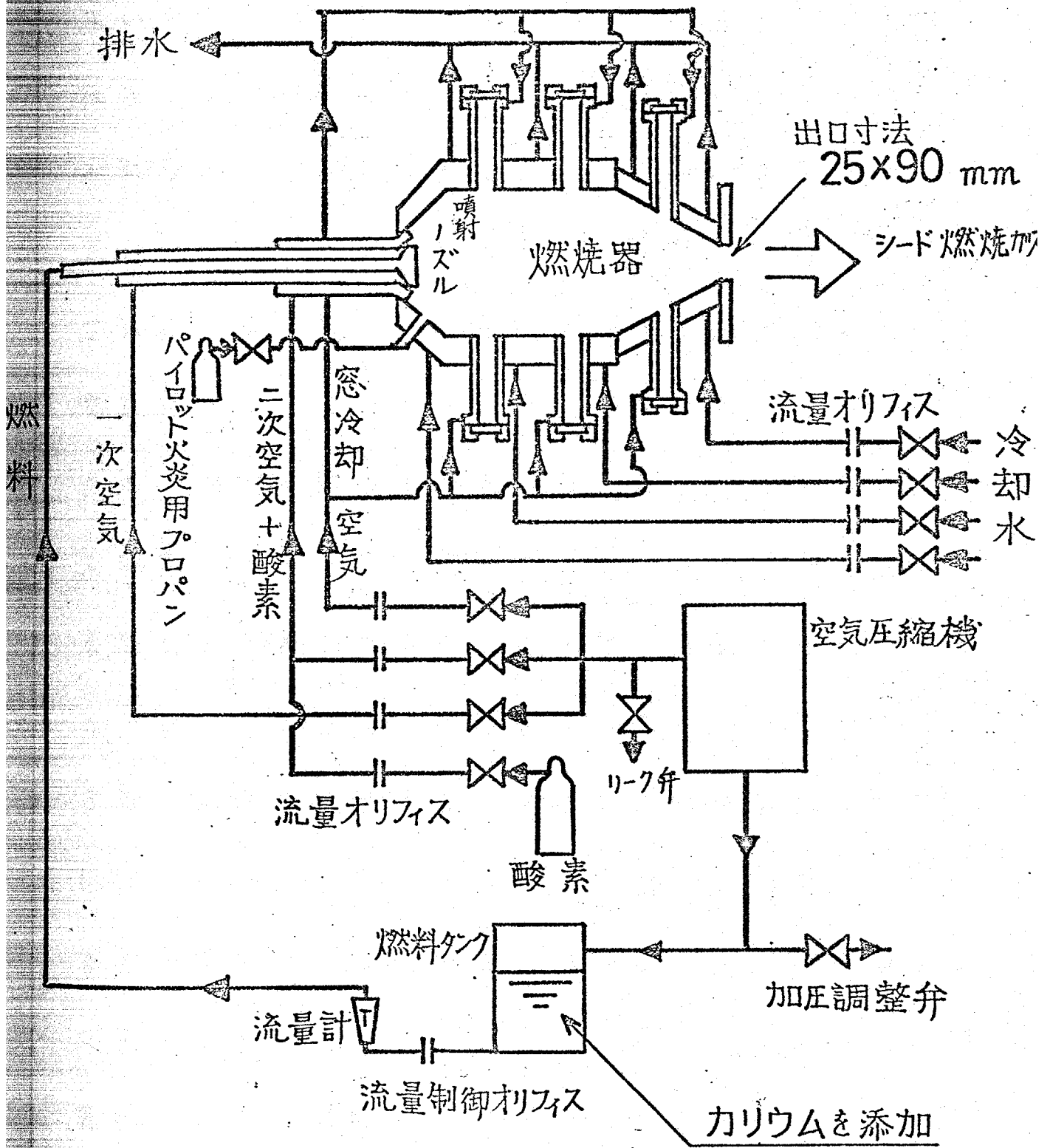


図. 2-1 燃焼器 システム

流（一次空気）で燃料を微粒化する方法が採用されている。使用した噴射ノズルは、強い再循環流を定在させる特性をもち、このため保炎特性にすぐれ安定した燃焼状態を得ることが出来る。一次空気により微粒化された燃料は、酸素添加により富化された二次空気により更に燃焼する。燃焼ガスの平衡導電度はガス温度に非常に強く依存する（図3-2）ため、通電可能な十分高い導電度を得るためにはガス温度を高くする必要があり、これには酸化剤である空気を予熱する方法と酸素富化空気を用いる方法とがある。本実験では後者の方法が用いられている。また、燃焼を促進するために、二次空気はスワラーにより旋回が与えられるようになっている。点火はまず一次空気、二次空気を調節してからパイロット火炎用プロパンに電気プラグで点火し、徐々に燃料を供給し、さらに種々のバルブを調節することにより、定めた実験条件にあった燃焼ガス流を発生させた。

本実験においては、カリウムシード燃焼ガス中に電流を通ずることによって、通電特性および伝熱特性を正しく測定することが重要である。第4章で示すように、冷電極近傍においては、電極面に均一に電流が流入する均一放電が、高温電極の場合よりもずっと小さな電流密度に対して不安定となり、放電形態がアーク放電に移行してしまうので、第3章の均一放電場での理論と比較検討するための実験としては、特に均一放電が維持されるような小さな電流密度において、安定性のある精度の高い実験が要求される。たとえば均一放電の範囲では、通電による増加伝熱量は通電のない場合の伝熱量の数%程度にすぎない。このため、燃焼状態の安定化に対しては次のような工夫がなされている。空気は専用の大型空気圧縮機により圧縮されて送られてくるが、圧縮機の圧力自動調節弁の働きで、最大圧(約7気圧)に達すると空転するようになっており圧力が間欠的に変動する。これを防ぐために図.2-1中に示したよう

なりーク弁を設け空転状態に至らないようにし、常に一様な空気圧が得られるようになっていた。また燃焼ガスの温度については導電度に大きな影響を与える燃料流量の変動を防ぐために、上述のように定圧化された圧縮空気によって燃料タンクを加圧するようになっており、さらに、流量の微調整のために加圧の圧力をかえるための加圧調整弁が設けられている。図2-1中に示されてある流量制御オリフイスは、バルブによる燃料供給量の安定した調節の困難さから、あらかじめ設定された流量となるように制作されたオリフイスを流路中にそう入して燃料流量の安定化をはかったものである。

燃料流量は、浮子面積式流量計で測定し、実験後そのつど流量の検定をおこなった。空気及び酸素の流量は、途中に設けられたオリフイス流量計で圧力差とオリフイス前の圧力を測定し、別にあらかじめ作成してある校正曲線により求めた。

燃焼器は、内径 $110 \text{ mm } \phi$ 、長さ 400 mm のステン

レス製で、水冷二重円筒の3つの部分から成っている。それぞれに燃焼室内の温度が測定できるように測定窓が設けてあり、各測定窓には、内側から冷却空気を吹きつけてガラスの汚れや破損を防ぐようになっているが、本実験では燃焼室内の温度測定は行なわれない。燃焼器ノズルは、90 mm x 25 mm の矩形断面となっており、測定に用いるカリウムシード燃焼ガスは、このノズルから大気中に流出させたものである。この燃焼ガスは、測定部を通過した後、排気ダクトにより外部に排出される。

○ 2-1-2 作動流体

本実験で使用した作動流体は、時間的ならびに空間的な導電度、温度などの均一性が保証され、電気的および熱的な諸性質が明らかにされている^[2-5]、灯油をベースとした燃料を上述の燃焼器で燃焼させたカリウムシード燃焼ガスである。シード物質としては、分子量中に占めるカリウム分率が大きいもので、しかも容易にシードできるものとして KOH が使わ

れており、KOHのブチルセルソルウ ($C_4H_9OCH_2CH_2OH$) 溶液をあらかじめ燃料中に混合する方法がとられている。ガス温度の測定には Na-D線反転法(2-3節)が用いられているが、KOHの中に不純物として NaOHが含まれているので、別に NaOHを加えることはしていない。実用の MHD 発電機では、熱効率のことも考えあわせて、排気ガスによる空気予熱を行なうのが普通であるが、先述のように本実験では、二次空気に酸素を添加する方法がとられている。ガス温度の制御は、この酸素の添加割合、及び燃料流量を変化させておこなうことができるが、本研究の主目的は、冷電極まわりの冷たい境界層内での物理的状況を明らかにすることなので、実験、理論とも、種々の条件での実験の後に選ばれた表2-1 に示す一定条件のもとで主として行なわれた。このときの原子数の比は $C:H:O:N:K = 1.0:1.790:2.791:3.088:0.0013$, また当量比は $\phi = 1.03$, ガス温度は $T_\infty = 2300\text{ K}$, 流速は $U_\infty = 40\text{ m/s}$ である。シードとして燃料中に含まれる

			流量 [g/s]	
酸化剤	空気	一次空気	4.90	8.83
		二次空気	3.33	
		窓 空気	0.60	
	酸素		4.85	
燃料	灯油	96.17 % wt	2.20	
	アチルセルルウ	3.33 % wt		
	KOH	0.50 % wt		

表 2-1

KOH の重量割合が 0.5 % wt と小さい値となっているのは、シード率が高いと、冷電極表面に厚いシードの凝縮層が形成されてははかされていくという非定常的な現象が生じ、通電特性、伝熱特性ともに安定したデータが得られなかったためである。酸化剤中の純酸素の割合は 48 % と富化されている。主流速度は、全重量流量とガス温度およびそのガス温度における平衡組成(3-2節)より求まる燃焼ガス平均分子量とから算出された。流速が比較的小さいのは、安定した層流場での実験を可能とするためである。この条件における燃焼および流れの状態は、きわめて良好で安定したものである。

2-2 測定部

。 2-2-1 測定電極部

通電特性および伝熱特性を測定するために用いられた測定電極部を図2-2に示す。燃焼室から噴出したカリウムシード燃焼ガス流には、すでに燃焼室内およびノズル壁面上で形成された境界層が存在しているが、平板電極上の境界層内の現象を調べるためには、流速及び温度の一樣な主流部分を電極間に導入させ、平板前縁から新たな境界層を形成させる必要がある。この点も特に配慮して、平板前縁の前に吸込みダクトが設けてある。この吸込みダクトの働きは良好で、輝度一樣な主流が電極間に導入され、平板前縁から新しい境界層が電極表面に沿って形成されてゆくことが、観察および写真撮影により確認された。また、前縁部近傍は境界層がきわめて薄くここに電流が集中するのを防ぐために、電氣的に浮いた状態となっている。測定電極部は、陽極(上)、陰極(下)とも、電極表面温度が流れ方向に一定となるよ

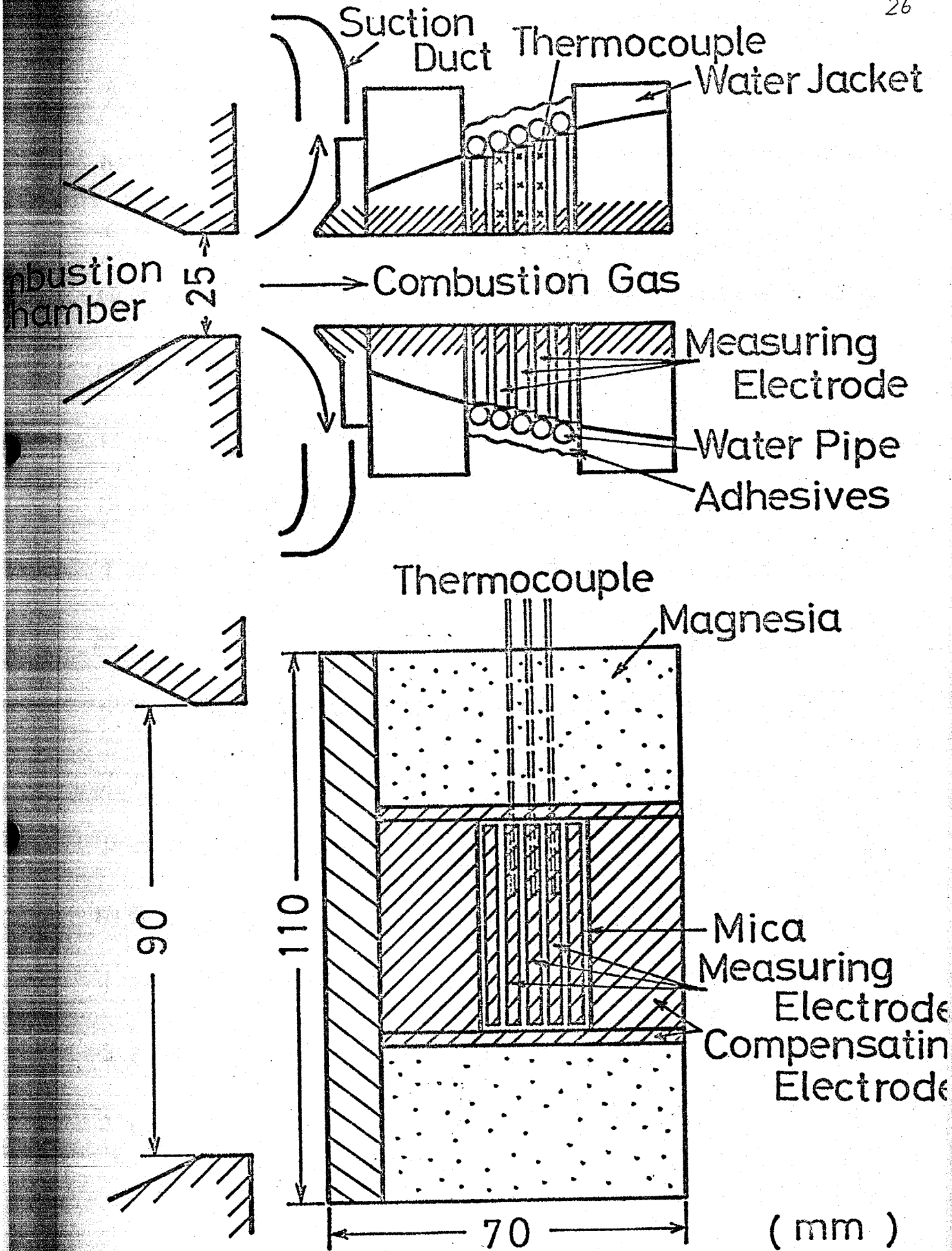


圖. 2-2 測定電極部

うに設計され、前縁に近いほど電極高さが小さいそれぞれ厚さ3mmの5分割電極ブロックより構成されている。各電極の間には、厚さ1mmの雲母製耐熱絶縁スペーサがはさまれており、測定電極部のまわりは通電の一次元性を保つための補償電極で囲まれている。電極表面温度及び伝熱量測定のための熱電対は、陽極の中央の3つの電極にそれぞれ3本ずつ計9本そう入されており、補償電極との十分な絶縁を経て外部にとり出されている。上下の電極間隔およびその高さは、燃焼器支持台からさし出されたアングル上に設けられた4本の電極支柱(M12ネジ)のナットにより変えることができるようになっている。電極部の裏側は、実験中に水蒸気が凝縮して水冷銅パイプに水滴がつき、これが各電極間の絶縁を悪化させるのを防ぐために接着剤により広く被覆絶縁されている。

上述の測定部を設計するにあたっては、後の理論との比較の事も考慮して、次の事項に特に留意して

設計がおこなわれた。

(1) 平板電極上の流れ方向についての局所的な測定ができるように電極を流れ方向に分割された分割電極とし、かつ、それぞれの電極が、電気的および熱的に独立な状態になるように、電極間の電気的および熱的絶縁をよくする。

(2) 理論で取り扱うのは、電極面上での放電形態がアーク放電には至らない電流値の小さな均一放電の場合であり、これと比較できるような実験を行なうためには、この小さな電流値に対しても、通電による増加伝熱量を正しく検出できるような、精度の高い熱流束計を兼ねた電極部とする。

(3) 測定電極部において、電流の流れおよび熱の流れが十分一次元的となるようにする。

(4) 定常状態において測定をおこなうため条件変化にすみやかに対応するように、測定部全体としての熱的時定数が大きすぎてはならない。

(5) 理論計算における境界条件を簡単にするため、電

極表面温度が流れ方向に一定となるようにする。

(1)の流れ方向局所測定については、電極部と絶縁部を3mmと1mmに互い違いにおき、また、電気的および熱的絶縁は、分割された各電極の間に0.5mm厚の雲母板を2枚ずつはさみこみ、まわりの補償電極によって圧着することにより確保した。さらに電気的絶縁のために、各電極の水冷却は、それぞれが完全に閉じた独立したループにした。(2)の測定電極部を高精度の熱流束計とすることについては、電極の内側を水で冷却し、図2-2のように電極内に縦に3本のクロメル・アルメル熱電対をそう入し、各点における熱電対の指示温度の差と距離より熱流束を求めるようにした。電極ブロックは、熱伝導率の悪いステンレス製なので、たとえ1%の伝熱量増加に対しても数度の温度差としてあらわれ、冷却水の温度上昇分から伝熱量を測定する場合には、増加伝熱量に相当する冷却水温度上昇が0.1℃のオーダーであるのにくらべかなりの測定精度の向上がえられた。また精度

をあげるために、ステンレスフロク電極の高さを高くすることは表面温度が高くなり、均一放電の範囲を広げるにも適している。さらに、この方式によれば熱電対の指示値の外そうにより、電極表面温度も正確に知ることが出来る。(3)の電気的および熱的次元性については、測定電極部のまわりを、電気的および熱的に各所で同等となるよう補償電極でかこむことにより確保した。(4)の熱的時定数については(2)の要請と逆の立場のもので、ステンレスフロクが高くなればなるほど熱流束の測定精度もあがり電極表面温度もあがるか、熱的時定数は大きくなりひとつの測定点を得るための待ち時間が長くなってしまふ。従って(2)と(4)の要請の妥協点としてステンレス電極の高さが決められる。実際には、定常までの待ち時間を2分程度におさえ、電極高さを約20mm基準とした。この設定の妥当性は、図2-3の予備実験結果により確かめられた。(5)の表面温度を流れ方向に一定とすることについては、2つの問題点

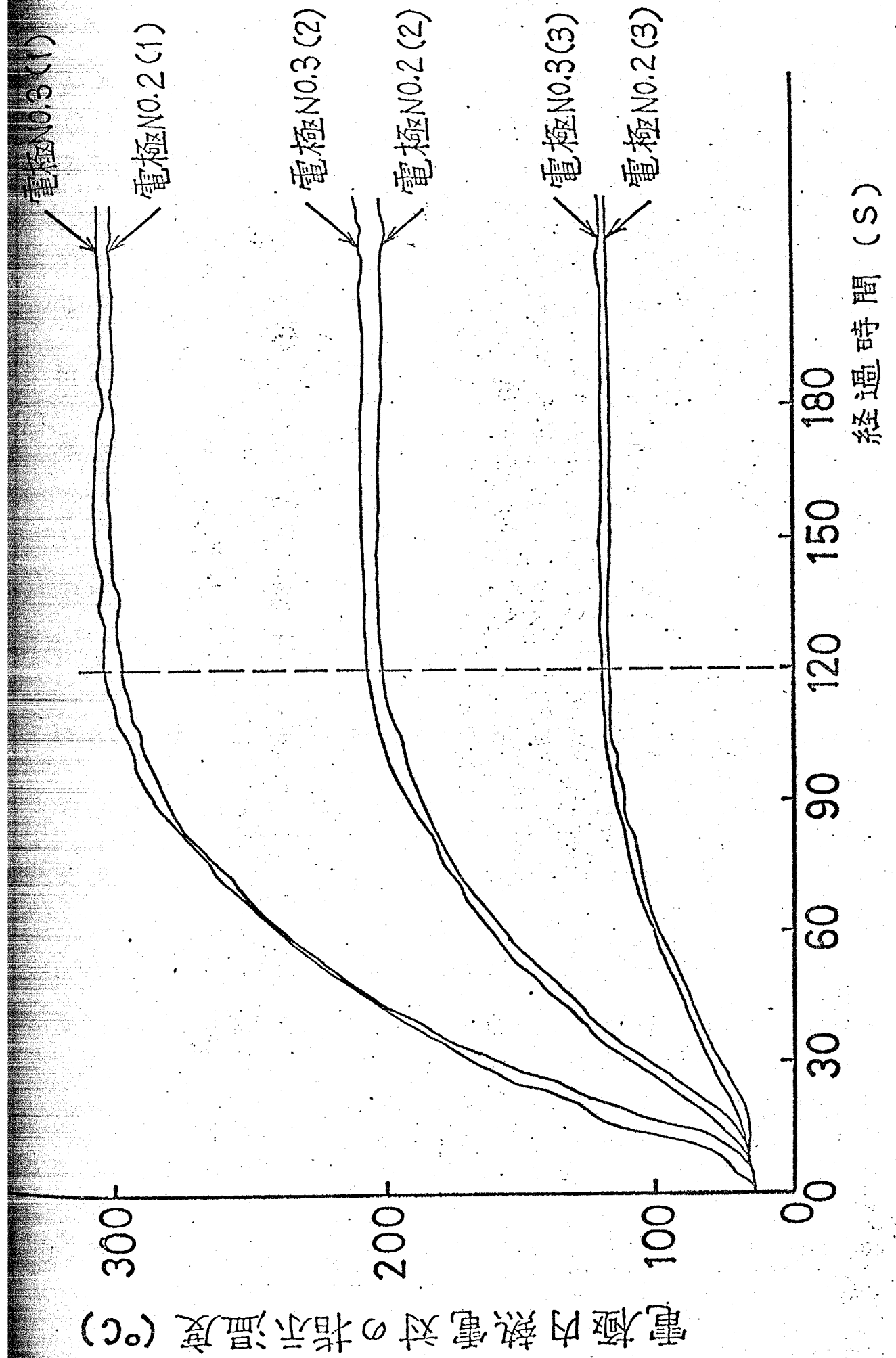
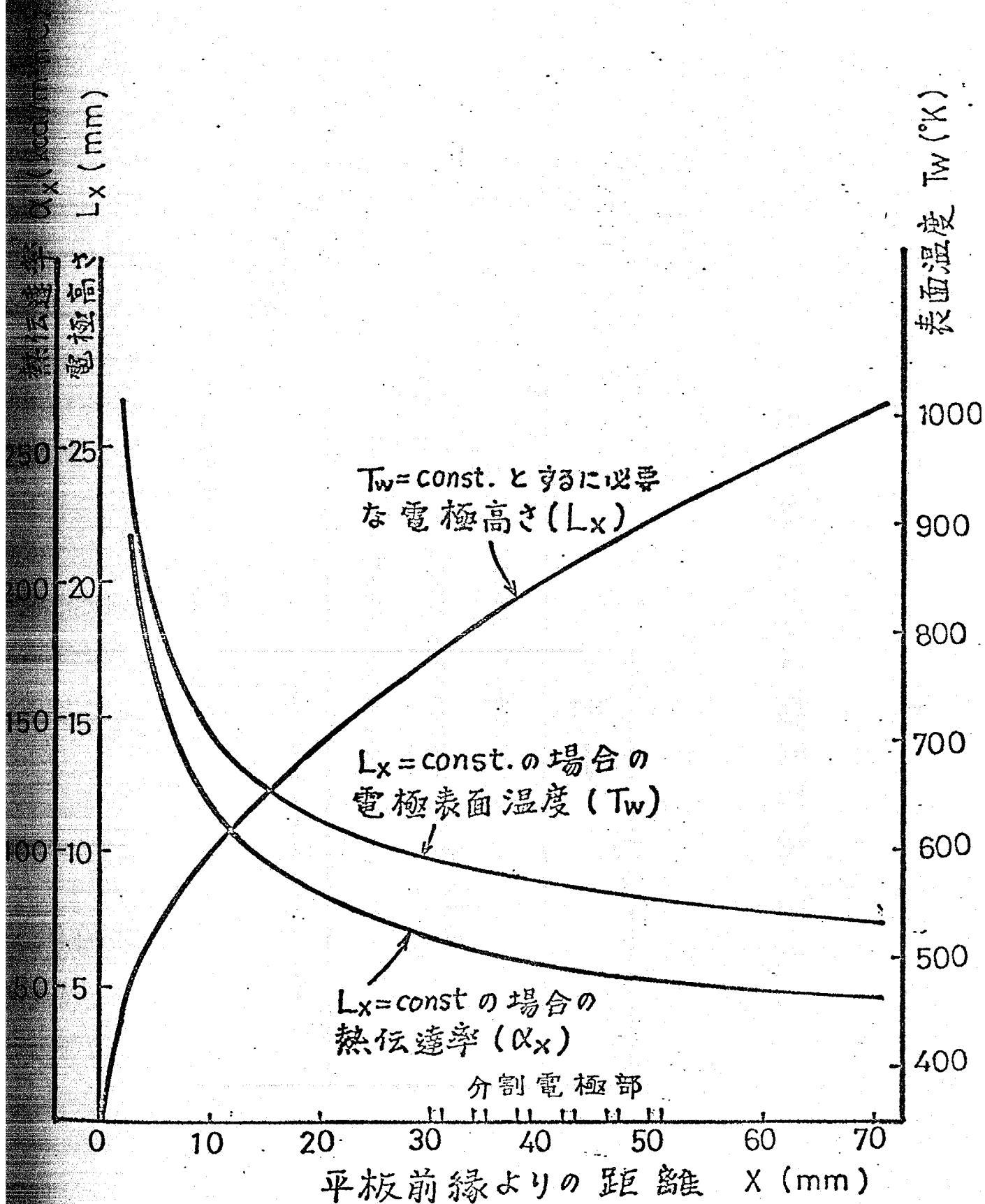


図 2-3 時定数検定データ

がある。第1は(1)の要請により設けられた電極の間の絶縁部の表面において、その低い熱伝導率のためにまわりの電極表面より高い温度になってしまうことである。しかしながらこの事については、簡単な計算により、絶縁部の幅が1mm程度の薄さであれば電極表面と絶縁部表面との温度差は 10°C 程度のオーダーとなり、プラズマ主流部と電極壁との温度差(約 1600°C)に比べて十分無視できる程度であることがわかる。第2は、平板強制対流熱伝達において、その熱伝達率は前縁からの距離が小さいほど大きいためステンレスブロックの高さを等しくすると、前縁に近いほど表面温度が高くなってしまうことである。この問題を解決するためには、電極部の高さを先端からの距離に応じて変化させてやればよいわけであるが、この高さを計算するにあたっては、実験に用いる流れ場が層流であるか乱流であるかによって大きく異なる。先端からの距離を代表長さにとったレイノルズ数は5000程度で、ふつうは層流域であるが、

実験で使用するような燃焼カスの流れでは、燃焼室内で十分反応が進むように、スワラーによるかくはんが行なわれており、燃焼器出口において、流れはすでにながりの乱れを含んでいる可能性がある。しかし、層流場であると仮定して計算して電極ブロック高さを求め、あとで流れ場の境界層内の温度分布を熱電対(白金-白金ロジウム)で測定することにより、そのプロフィールからこの設定で妥当である事を確認した。図2-4に高さ一定とした場合の表面温度の流れ方向変化の状況、および、表面温度を一定とするに必要な設定すべき電極ブロックの高さを図示する。こうして決められた値を用いて電極部を作成した。

1つの電極ブロックについて、熱電対のそう入状態などその詳細については図2-5に示されている。そう入する熱電対は、電極部に外部より印加する電気の影響をさけるため、すべて外径1mmの絶縁シース熱電対(クロメル-アルメル)が使用されている。電極ブロック中に穴をあけて熱電対をそう入する事による



図、2-4 電極高さ設計グラフ

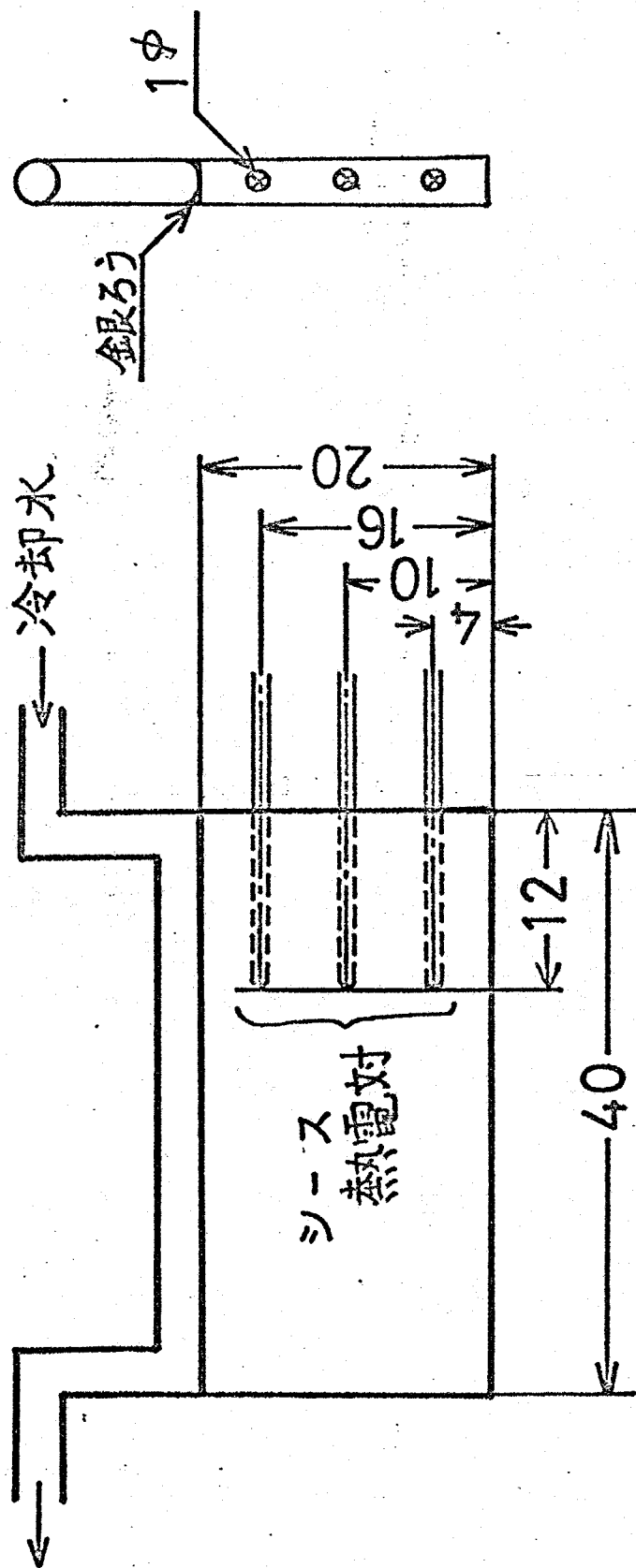


図. 2-5 測定電極ブロック詳細図

ブロック内での温度場の乱れの影響は十分小さい事をカーボンペーパーによるシュミレーションにより確認した。熱電対のそう入位置は、加工中にずれている可能性があるので、製作完了後、読み取り顕微鏡により正確に測定し、熱電対の位置を定めた。また熱電対のそう入深さは十分一次元性の保てる深さとして 12 mm とした。

○ 2-2-2 電気回路

上下の平板電極間に直流電圧を印加するために用いた電源を図2-6に示す。AC 200Vの入力をスライダック(許容50A)で電圧を調整した後、10kVA 1:2のトランスにより外部電力系統と遮断し、許容電流100A 逆耐圧300Vのシリコン整流器4個で両波整流して、5Ωの抵抗線2本と全容量1000μF(450V)のコンデンサ2組で構成したπ形平滑回路により直流化する。この電源は良好で、35Aという大きな電流値に対しても片振幅5%程度のリップルであり^[2-5]、実際に本実験で使用するような小さな電流値の場合は、ほぼ

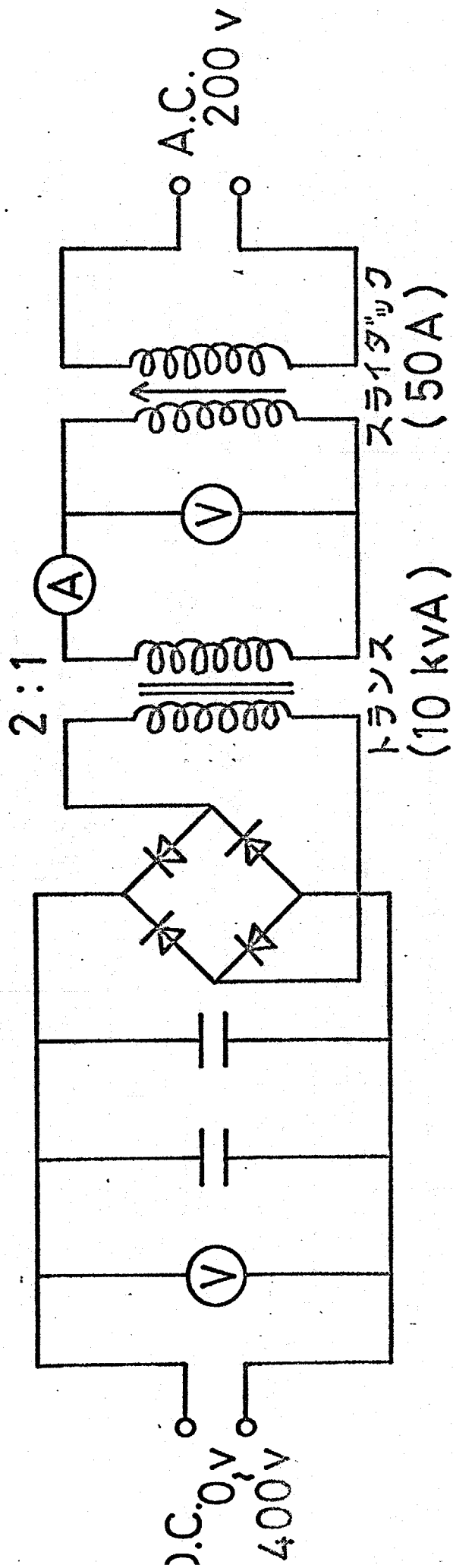


図. 2-6 電源回路

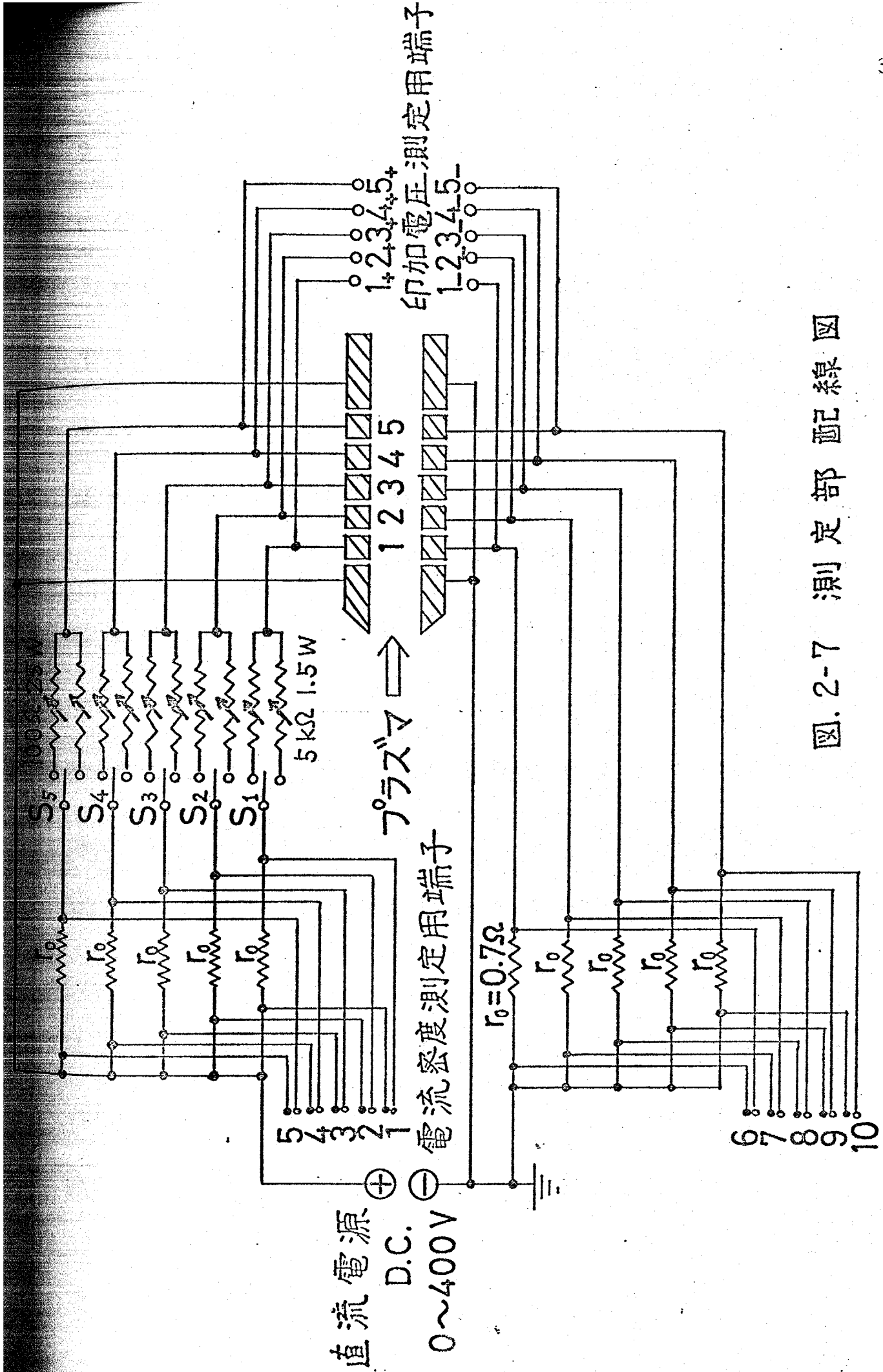


図. 2-7 測定部配線図

完全な直流である。電気入力はスライダックの調節により変化させた。

分割した各電極における局所的な電気入力を測定するには、それぞれの電極に流入する電流値および電圧を知る必要がある。それらを測定するための回路を組み込んだ配線図を図2-7に示す。各分割電極に流入する電流値の測定には、回路中に小抵抗 (1Ω (r.)) 程度) をそう入しその両端の電位差から求める方法がとられている。この小抵抗の両端の電位差は、印加電圧に対して最大 0.1% 程度であり十分無視しうる。また各分割電極に流れ方向の電位差を与えた実験もできるように、各回路の途中に可変抵抗器がそう入されているが、本研究においては、電極面電位が等しい場合のみあつかわれた。記録はすべて自動平衡形ペンレコーダによって行ない、各測定値との間に時間的対応がとれるようにした。

2-3 温度の測定

○ 2-3-1 燃焼ガス主流温度

カリウムシード燃焼ガス主流部の温度測定には、
 図 2-8 に示すような Na-D 線反転法を用いた。標準光源にはタンクステン電球を用い、集光レンズにより測定電極間の中央に光源の像を結ばせた後再びレンズで集光し、プリズム式分光器で Na-D 線 (5890 Å, 5896 Å) に合わせて、光電子増倍管により検出した。ガス温度は次式により算出して求めた。

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} + \frac{k\lambda_D}{hc} \ln\left(1 - \frac{I_m - I_0}{I_f}\right) \quad (2.3.1)$$

- T : ガス温度
 T_0 : 光源の輝度温度
 k : ボルツマン定数
 h : プランク定数
 λ_D : Na-D 線の波長
 c : 光速
 I_0 : 光源の輝度
 I_m : 火炎を通して見た光源の輝度
 I_f : 火炎の輝度

式 (2.3.1) の導出について述べておく。 ε_λ を波長 λ に対する単色ふく射率, e_λ° を単色ふく射能とすれば、火炎を通した標準光源からの光の強さは、

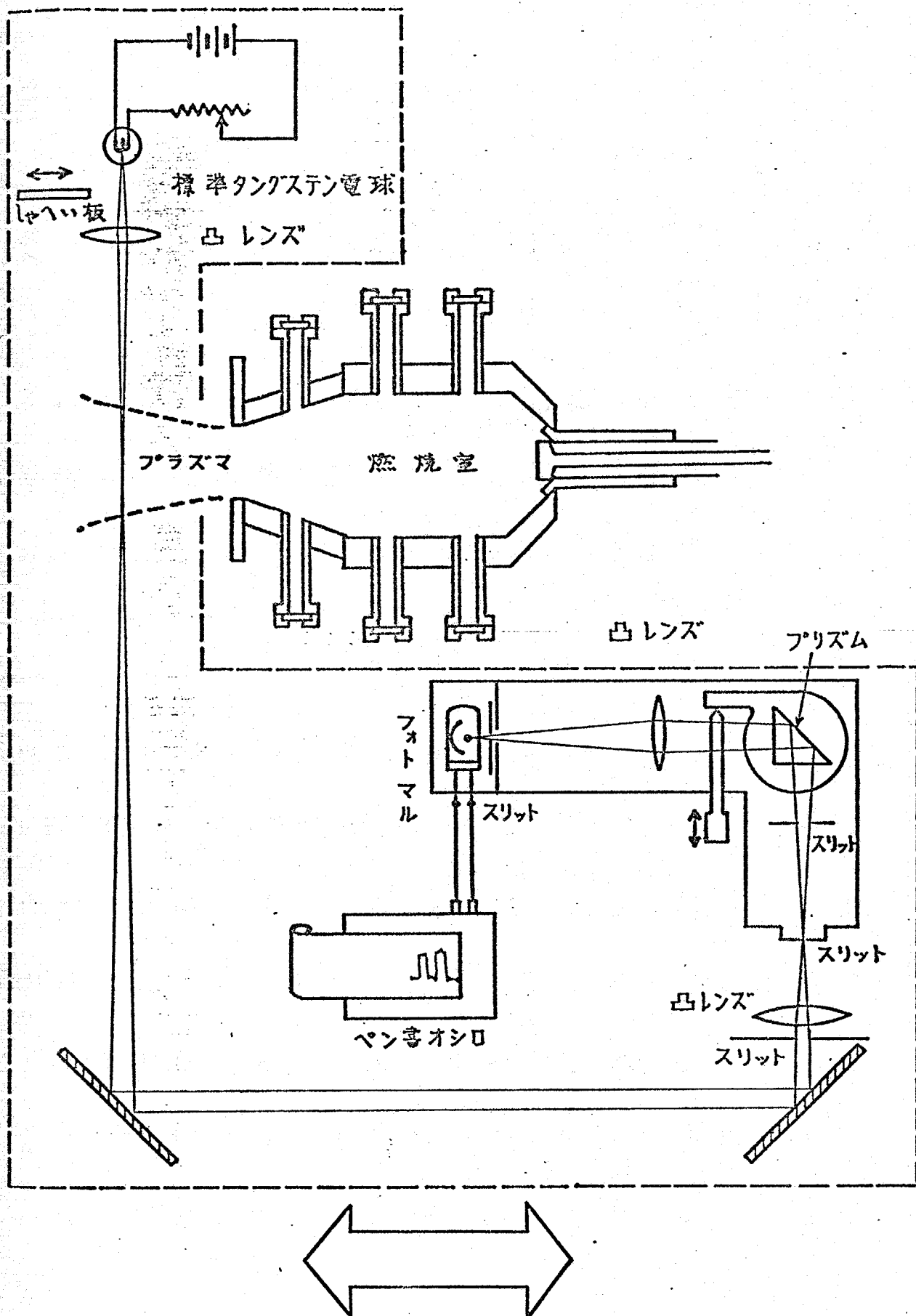


図.2-8 ガス温度測定装置 (Na-D線反転法)

$$I_m = \alpha_\lambda \{ \varepsilon_\lambda e_\lambda^\circ(T) + (1 - \varepsilon_\lambda) e_\lambda^\circ(T_0) \} \quad (2.3.2)$$

火災のない時の光の強さは、

$$I_0 = \alpha_\lambda e_\lambda^\circ(T_0) \quad (2.3.3)$$

火災のみからの光の強さは

$$I_f = \alpha_\lambda \varepsilon_\lambda e_\lambda^\circ(T) \quad (2.3.4)$$

と表わせる。ここで α_λ は、分光器に入る光束の張る立体角，検出器の感度などを含めた係数である。

このとき、式 (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4) より

$$\frac{I_m - I_0}{I_f} = 1 - \frac{e_\lambda^\circ(T_0)}{e_\lambda^\circ(T)} \quad (2.3.5)$$

これに、Plank の法則の Wien の近似

$$e_\lambda^\circ(T) = 2\pi h c^2 \lambda^{-5} e^{-hc/\lambda kT} \quad (2.3.6)$$

を用いて整理すれば、式 (2.3.5) を得る。従って、光高温計によって、光源の輝度温度 T_0 を測定しておけば、ガス温度 T を求めることができる。

光源の直後には、3秒間で1回転する半円形しゃへい板を設置して、測定中における I_m , I_f を、ペンレコーダにより他の測定値と同時に記録し、各測定

時における温度が測定できるようになっている。式(2.3.1)は、 $T \approx T_0$ の場合にのみ高い精度が得られるので、本実験においては、ほぼそのような条件になるようにスライダックにより標準電球に流れる電流を制御してから、ガス温度の測定を行なった。

○ 2-3-2 境界層内のガス温度分布

ここでは、層流か乱流かの流れ場を明らかにするための予備実験として行なった境界層内の温度分布の測定について述べる。実際の実験を行なおうとする場の状況をあらかじめ明らかにしておくことは、例えば先に述べたように電極表面温度一定の条件をみたす実験装置を設計したり、あるいは後での理論解析におけるモデルの基礎を与えたりする上でもきわめて重要な事である。本実験では主流部の温度が2300 Kにも達し、熱電対そう入による温度測定は、熱電対および支持棒等の材料的問題で不可能である。しかしながらここでは、温度そのものの値ではなく流れ場を知るひとつの手段としての温度測定である

から、主流部の温度を下げて熱電対のそう入を可能とし、レイノルズ数(約5000)が実際の実験時と同程度となるよう調節して、境界層内の温度分布のプロファイルを求め、流れ場の状況を調べた。

熱電対には、白金-白金ロジウム13%を用い、支持棒としては、がいし管を用いた。その測定装置の概略図を図2-9に示す。熱電対線からがいし管への熱伝導ロスを防ぐため熱電対先端は、がいし管から十分な長さがあり、また熱電対先端から約5mmの部分は、先端部と等温度場におかれるように、図のように、電極壁と平行になっている。ただし、境界層内の温度プロフィールを知る事が目的であるから熱電対からまわりの壁へのふく射ロスによる温度指示の低下に対する補正はおこなわない。熱電対の境界層内トラバースには図2-9のようにカセットメータを使用し、その変位は差動トランスにより電氣的に検出し、X-Yレコーダにより、境界層内温度分布のプロファイルを直接描いた。この差動トランスは、コイル

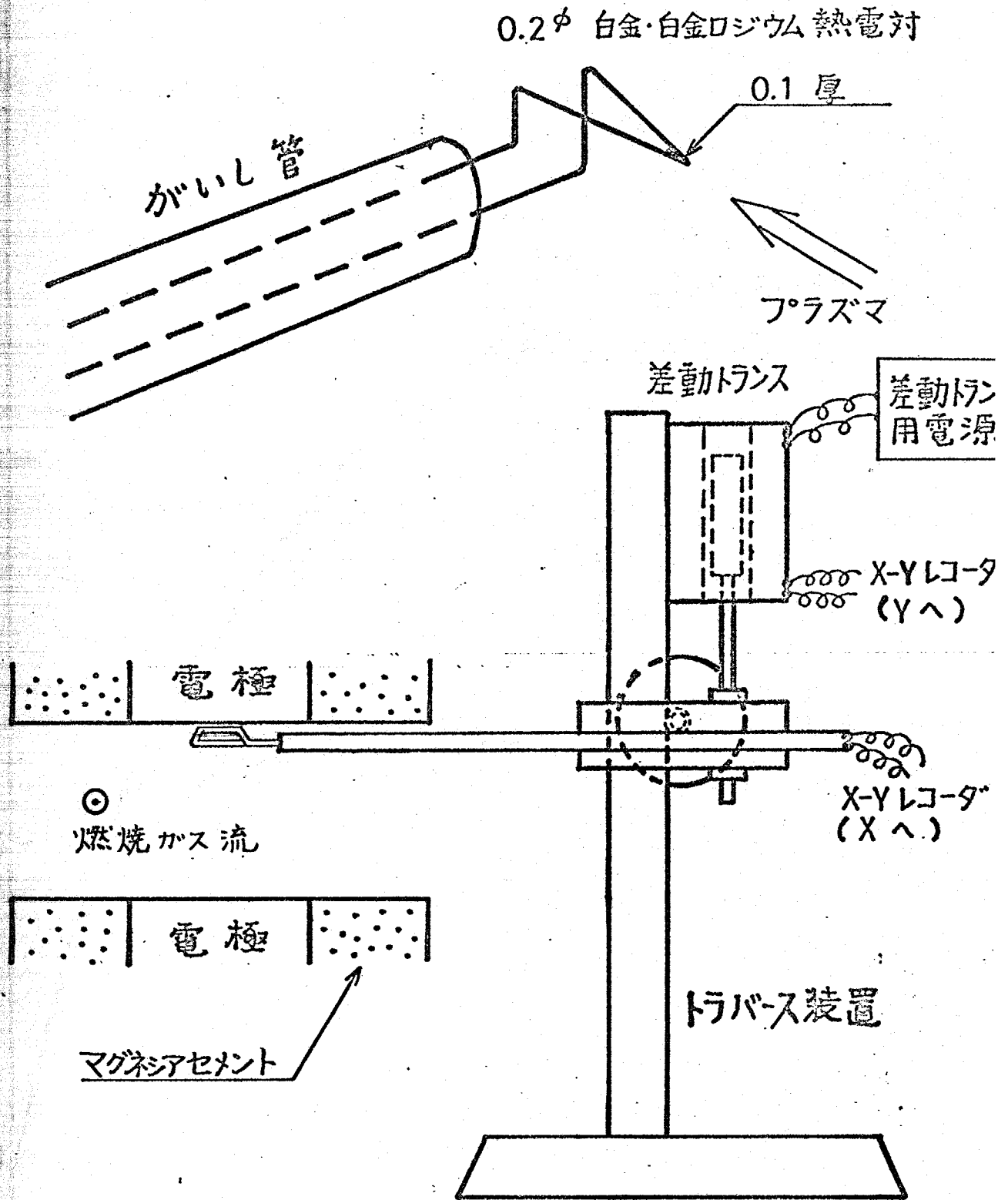


図.2-9 境界層内ガス温度分布測定装置

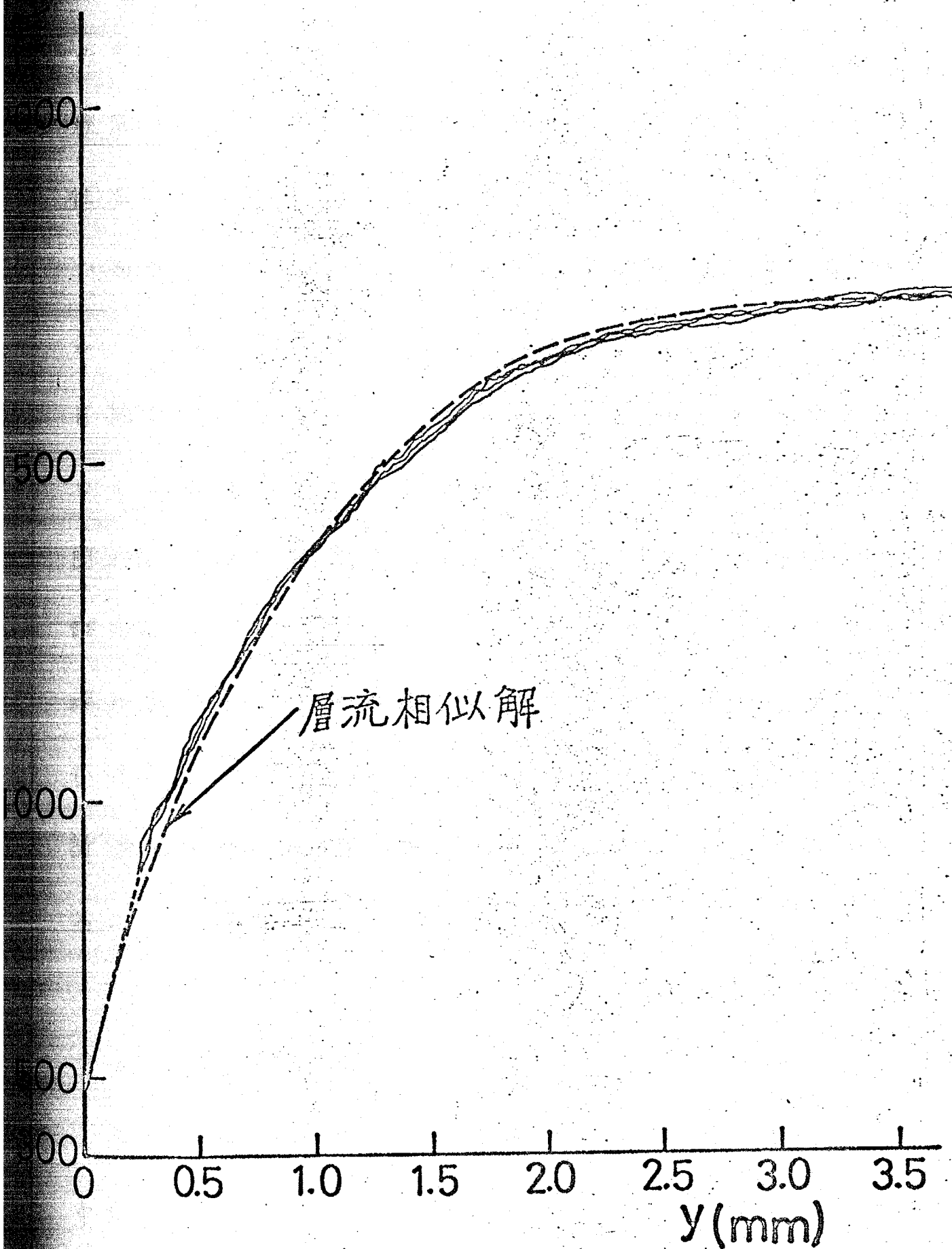


図. 2-10 境界層内ガス温度分布測定例 ($x=50$ mm)

の中の鉄片の変位を電圧として出力させるもので、検定の結果 $\pm 4\text{mm}$ 程度の範囲で、まわめて良い直線性を示し、境界層(厚さ約 3mm)内の測定には十分である。測定は、種々の平板前縁からの距離(x)に対しておこなわれ、その結果の一例($x=50\text{mm}$ の場合)を図2-10に示す。壁表面温度は、電極ステンレスブロック内の温度の外そうにより求めたものである。図2-10には、測定場と同条件に対する層流局所相似解が破線で示してあり、これらの結果により、流れ場において、測定電極部の後方まで層流が保たれていることが明らかとなり、先述の等温壁測定部の設計および後の理論における層流仮定が十分保証されることが確認された。

2-4 通電特性

各分割電極(図2-2の陽極側の5分割測定電極部の中央の3電極—前方より No.2, No.3, No.4電極とする。)に対して測定された電流密度と全印加電圧の関係を

図 2-11 に示す。表 1 に示した燃焼条件に対して、後の 3-2 節において計算されたカリウム原子モル分率は、広い温度範囲にわたって $X_K = 0.03\%$ とほぼ一定である。また、主流温度は $T_\infty = 2300\text{K}$ 、壁温度は $T_w = 700\text{K}$ (ただし、3-2 節で議論されるように、表面がカリウム酸化物の薄い凝縮層でおおわれている場合は表面温度は 1200K)、および、主流部のガス流速は $u_\infty = 40\text{m/s}$ であった。また、No.3 電極の中央部は、平板前縁より 0.04m の位置に対応し、第 3 章の境界層局所相似解析の結果と比較されるのは、通電特性についても伝熱特性についても、この No.3 電極に関するデータである。ただし、図 2-11 によれば、通電特性に及ぼす電極の位置的な差異は、印加電圧 200V 程度のところで、前縁に近い方の電極のほうが、同じ印加電圧に対して電流密度がわずかに多くなる傾向が見られるものの、ほとんど存在しない。

実際の実験では、外部印加電圧を上げていくに従って、電極面近傍の放電形態が変化していく。電圧

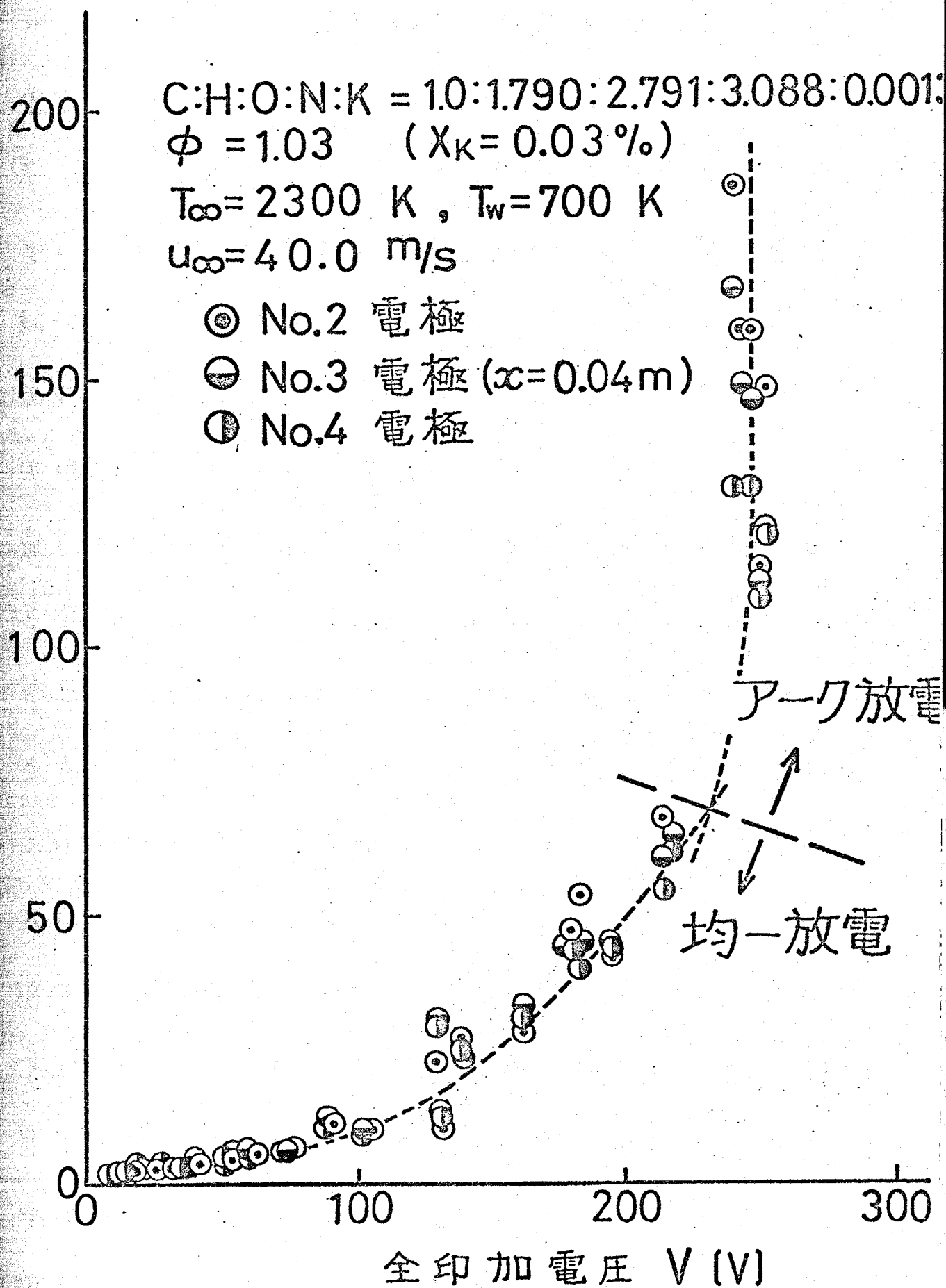


図. 2-11 通電特性

が小さいうちは、電極面上に何の異状も認められず電流は電極面に均一に流入している（均一放電）と考えられるが、電圧を上げていき電流密度も増加していくと、電極表面（陽極、陰極とも）に数多くの微細なアークスポットが発生し、流れにより後流に流されていくようすが観察されるようになる。このとき境界層内を流れる電流は、このアークスポットを通過して集中的に流れており、この電流集中部における導電度が高められることにより、印加電圧はほとんど変化しないまま非常に大きな電流密度が得られるようになっていく。（微細アーク放電）さらに電圧を上げていくと、主流部をも破壊するような数少ない巨大なアークが大きな音とともに間欠的に発生しては消えていくようすが観察されるようになる。（巨大アーク放電）。従って、第3章の均一放電場に対する境界層解析の結果と比較されるのは、原則的には図2-11中の均一放電に対するデータであり、また、ここで観察されたような、電流密度の増大に伴うアークス

ポットの発生は、電極の侵食の原因となり重要な問題であるので、第4章で理論解析を行なっている。

図2-11の均一放電に対する通電特性が電流密度の増加に対して直線的ではないのは、冷電極近傍の低導電度領域の導電度が、通電量の増加と共に大きくなっていくことを示している。このように通電特性は、総体量の周の関係ではあるけれども、境界層内の電氣的物理量の分布を知る大きな手がかりとなるものであり、後の3-5節で第3章の解析結果と比較検討される。しかしながら、電極近傍の現象は、陽極と陰極とでは、陰極は電子放出側であり電子放出に大きなエネルギーを要するのに対し、陽極側は電子受け取り側であるため、大きく異なり、全印加電圧に対する陽極降下と陰極降下とは等しくないと考えられるので、第3章の陽極まわりの解析との比較のことを考えて、印加電圧に対する陽極降下と陰極降下の関係を測定した。測定は、主流部中央にフローティングプローブを挿入して行なわれた。その結果を、

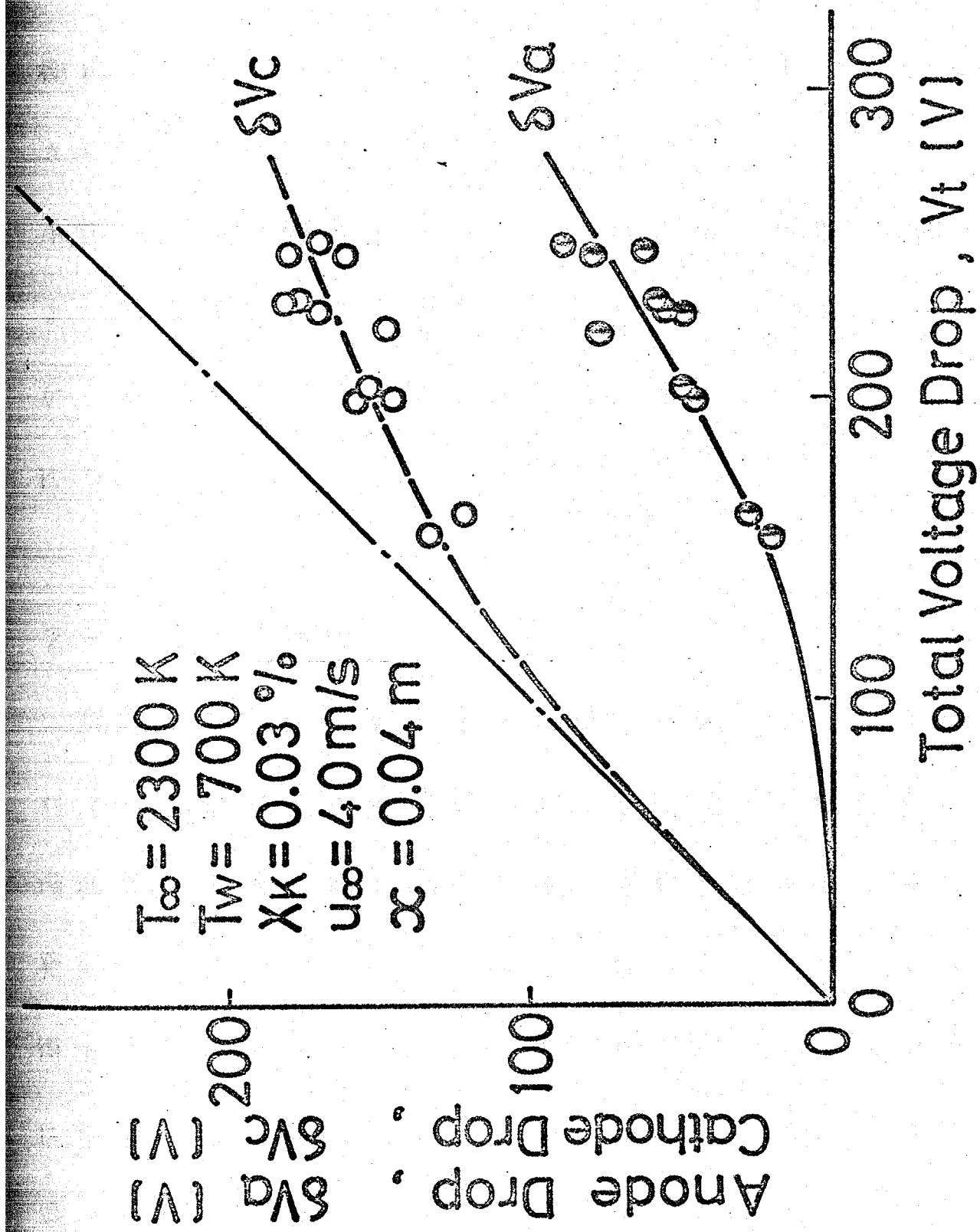


圖 9.19 短柱壁下之電極降下

図 2-12 に示す。これによれば、電子放出側である陰極近傍での電位降下の方が陽極降下よりもかなり大きく、この傾向は、電流密度が小さい（印加電圧が小さい）ほど顕著であることがわかる。図 2-11 と図 2-12 より陽極降下と電流密度の関係に換算されたデータが、通電特性として第 3 章の解析結果と比較検討される。

2-5. 伝熱特性

陽極側の各分割測定電極（No. 2, No. 3, No. 4 電極）に対する、電流密度と通電による電極壁への伝熱量の増加量の関係を図 2-13 に示す。通電によるジュール発熱によるガス温度の上昇は、電界からエネルギーを得た電子が中性ガス粒子との衝突（燃焼カスの場合には主に非弾性衝突）により、ガスにエネルギーを伝達することによって生じ、従って、通電のある場でのジュール発熱による温度上昇の程度は、そこでの導電度すなわち電子密度に大きく依存する。通電に

$\times 10$

通電による伝熱量増加 Δq_w [W/m^2]

C:H:O:N:K = 1.0:1.790:2.791:3.088:0.0013

$\phi = 1.03$ ($X_K = 0.03\%$)

$T_\infty = 2300$ K, $T_w = 700$ K

$u_\infty = 40.0$ m/s

⊙ No.2 電極

⊖ No.3 電極 ($\alpha = 0.04$ m)

⊕ No.4 電極

陽極に対する電気入力 ($\delta V_a \times J$)

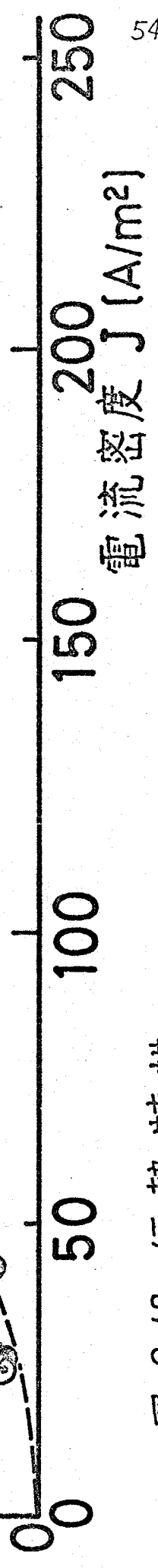


图. 2-13 伝熱特性

よる電極壁への伝熱量増加機構は、境界層内でのジュール発熱によるガス温度上昇によるものばかりではなく、電界によって加速されて壁に入る電子の運動エネルギー、電子が電極に入るとき放出する仕事関数分のエネルギー、あるいは電離再結合反応に伴うエネルギーなどの寄与も考えられるが、この程度の比較的小さな電流密度では、冷電極近傍の低導電度層内におけるジュール発熱によるガス温度上昇の寄与が卓越している。よって、総体量の間の関係ではあるけれども、伝熱特性によっても境界層内の物理量の分布に対する検討を行うことができる。図2-13においては、本章において詳しく述べられたように、実験の安定化あるいは精度向上に対していろいろ注意が払われているが、巨大アーク放電に至らない程度の小さな電流密度に対する通電による増加伝熱量は、通電がないときの伝熱量 ($\sim 10^6 \text{ W/m}^2$) の数%程度であるので、実験精度的な制約からデータにはかなりのばらつきがある。しかし、電流密度上昇に対する

増加伝熱量の上昇傾向はつかめている。図中には、
図2-11, 図2-12より算出された陽極まわりの境界層に対
する外部からの電気入力すなわち、陽極降下 (δVa)
と電流密度 (J) の積が破線で示されている。これに
よれば、電気入力と通電による壁への増加伝熱量の
傾向はほぼ一致しているが、増加伝熱量が電気入力
より大きく出ている理由は、実験精度の問題以外に
は、今のところつかめていない。この伝熱特性は第
3章で解析結果より算出される伝熱特性と比較検討
される。

第3章 境界層の三流体モデルによる解析

通電を伴うカリウムシード燃焼ガスの冷電極まわりの境界層内における物理現象の詳細を明らかにするためには、緒論でも述べたような特徴、すなわち、電子とガスとの熱的非平衡、電子密度の電離非平衡、三体再結合反応における第三体としての重い中性粒子の寄与、および、壁近傍における強い電界による広範囲にわたる電荷分離、などを考慮に入れた解析を行なう必要がある。本章においては、これらの特徴がすべて考慮され、しかも、従来の境界層解析のように壁面上に薄いシースを仮定することなしに、壁自身の上で境界条件を与えて境界層内を解析できる三流体モデル（電子、イオン、中性粒子）を考え、磁場がなく外部印加電圧による均一な通電がある平板陽極まわりの境界層を解析することにより、電子密度をはじめとする電氣的物理量の境界層内分布を

明らかにする。流速，主流温度，壁温度，シード原子モル分率などの計算条件としては，主として第2章の実験場に対応するものを用い，まず，層流に対する解析を行ない，通電特性と伝熱特性については先の実験の結果との比較検討を行ない，続いて，実際の開放型MHD発電機の電極面上の状況に近い条件を用いて乱流場に対する計算も行ない検討を加える。

3-1. 従来の解析および本解析の特徴

従来は，シード燃焼ガスが作動流体の場合，境界層内を含めた全領域にわたって電子密度はガス温度に対するサハ平衡値_{(3.2.20)式}で与えられると考えていたので，MHD境界層に関する研究は，これまでは主としてアルゴンなどの希ガスを作動流体とする場合について行なわれてきた。MHD境界層の解析は，摩擦抵抗，壁への熱伝達，電極降下などをみつめる上できわめて重要であるが，本格的に研究が始まったのは

比較的新しい。Hale and Kerrebrock^[3-1] は、MHD 加速器内の絶縁壁に対して平衡流を考えて始めてこの MHD 境界層の問題を取り扱った。Sherman et al.^[3-2] は、セシウムシードアルゴン流の二次元層流境界層解析において、電子のエネルギー式を導入することにより電子温度のカス温度に対する非平衡性に対する検討を行ない、壁近傍に大きな電子温度の非平衡が存在することを示している。しかし、電子密度は局所の電子温度に対するサハ平衡値を用いている。続いて Sherman et al.^[3-3] は、この研究の発展として電離・再結合に対する有限反応速度を導入し、電子密度のサハ平衡値に対する非平衡性の検討を行っている。従って、電子保存式が新たに導入されているが、境界層内で重要となる濃度勾配による拡散項が省略されており、このため、電子密度に対する壁側境界条件を考慮しなくとも解析場となっている。電子温度の壁側境界条件としては、壁表面に無衝突シースを仮定し、そのシース端において電子の

エネルギー流束が接続する条件を用いている。ほぼ同時に、Brown^[3-4]は、磁場のない場での電氣的に浮いており電子の放出もない冷電極まわりのシールドされたアルゴン流の境界層に対して、さらに電子の濃度拡散（両極性拡散）をも考慮に入れた解析を、局所相似を導入して行なっている。この場合には、電子密度の壁側境界条件を必要とするか、やはり壁面上に無衝突シースを仮定し、シース端で、その外側の連続体としての濃度勾配による拡散粒子束とシース内での熱運動によるランダムな粒子束との接続をはかっている。また、Cott^[3-5]は、カリウムシールドされた窒素を用いたMHD加速器の絶縁壁上の境界層に対して、壁側境界条件の改良として、無衝突シースではあるか、シース解析に遷移領域を導入して解析を行ない、窒素分子に対する電子のエネルギー損失係数の大きさをパラメータとした検討を加えている。以上はすべて、層流境界層に対する解析であるか、High et al.^[3-6]は、Cottの研究を発展させて乱流境界

層に対する解析を行なっており、やはり無衝突シー
スを仮定している。実際のMHD発電機に即したも
のとしては、Demetriades et al.^[3-7]の解析があるが、
これは、希ガスばかりでなく燃焼ガスをも含めたM
HDの関与する種々の場合に使用できる汎用コード
作成を意図したものであり、壁のごく近傍の物理的
取り扱いについては厳密とはいえない。Argyropoulos
et al.^[3-8]は、これを利用して、シードされた燃焼ガ
スを用いた開放型MHD発電機ダクト内においても
電極近傍で、電子密度がガス温度に対する平衡値に
はならない領域が存在し、それが発電機の作動特性
に及ぼす影響について考察している。

このような従来の研究をながめてみてわかること
は、導電性気体の固体壁まわりの境界層内の現象を
解析する上で最も難しい点は、電氣的物理量に対す
る壁側の境界条件である。今まで一般にとられてき
た手法は、上述のように、境界層内を2つの領域、
すなわち壁のごく近傍の電荷分離の生じているデバ

イ長さ程度の薄さと仮定されたシース領域、およびその外側の電子とイオンが電氣的に干渉しなから等速度で拡散すると考えられ電氣的中性の成立した両極性拡散領域にわけて、シースの外端で両領域の粒子束あるいはエネルギー束が接続するように両極性拡散領域における壁側の境界条件を与えるという方法である。この手法はもともと、Lam^[3-9]やChung^[3-10]らによって、高圧・弱電離プラズマに対する探針理論としてほぼ確立されているものであり、MHD境界層に対する適用には場合場合に応じて慎重な検討修正が必要で、上述の各解析におけるシースモデルでも、モデルによって結果が大きく異なるという例や、適合係数のようなパラメータの導入により実験値との対応をとった例も少くなかった。特に探針理論などにおける小さな電流値に対する場合ではなく、MHD飛電機の電極近傍のように大きな通電を伴う場合には、シース厚の不確定さやシース端での粒子束やエネルギー束の不明確さなどのため、上述のよう

なシースモデルの成立は困難となる。

本章における境界層解析は、このような従来のシース仮定に伴う種々のあいまいさを取り除くことを主眼に、大きな通電を伴うカリウムシード燃焼ガスの冷電極（平板陽極）まわりの境界層を、緒論にも述べたようなこの場に特徴的な物理現象、すなわち、電子温度のガス温度に対する非平衡性、電子密度のカハ平衡値に対する非平衡性、重い粒子の三体再結合反応に対する寄与、そして電子・イオンの電荷分離を考慮に入れて、本解析場に対応して式の変形に新しい手法が導入された“三流体モデル”を用いて解析したものである。すなわち、電子エネルギー式はもちろん、電子とイオンに関する別々の粒子保存式を導入し、前もっての電気的中性の条件や壁面上のシース仮定を全く排除し、壁そのものの上で壁側境界条件を定めて境界層内全領域を解くことが、本解析の主な特徴である。

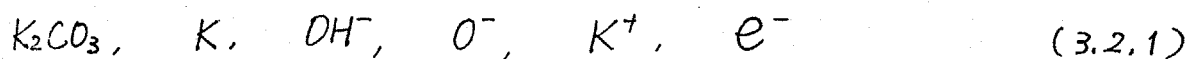
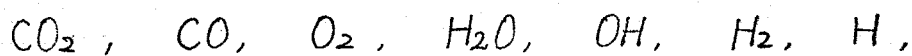
3-2. カリウムシード燃焼ガスの平衡組成の計算

燃焼ガスをMHD発電の作動流体として使う場合、ガスの導電度を十分高めるために、電離電圧の低いセシウムやカリウムなどのアルカリ金属を含んだ化合物（シード物質）を燃料あるいはガス中に入れるのが普通である。このシード物質が高温の燃焼ガス中で熱解離反応をおこし、それにより生じたアルカリ金属原子がさらに熱電離して多数の電子およびイオンがでる。十分な導電度が得られるようにするわけである。従って、燃焼ガス中の電子およびイオンの供給源であるシードされたアルカリ金属原子のガス中でのモル分率をガス温度に対してあらかじめ知っておくことは、ガス中の電氣的性質を支配する電子密度を計算する時に必要な、サハ平衡電子密度を与える上できわめて重要である。また、電界からエネルギーを得た電子が重い粒子と衝突して失うエネルギーを算出したり、電子やイオンの移動度を計算したりする時に必要な、燃焼ガス中の種々の重い粒子成

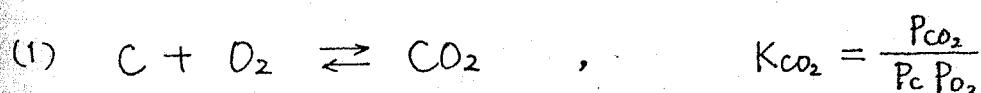
分に対するモル分率もあらかじめ知っておく必要がある。本節においては、実際に解析を始める前に、本解析で主として考える第2章の実験条件(表2-1参照)に対応したカリウムシード燃焼ガスに対する種々の温度における平衡組成の計算について述べる。さらに、得られた平衡組成をもとに、本解析の対象とする燃焼ガス中における電子およびイオンの移動度の表示式を示す。

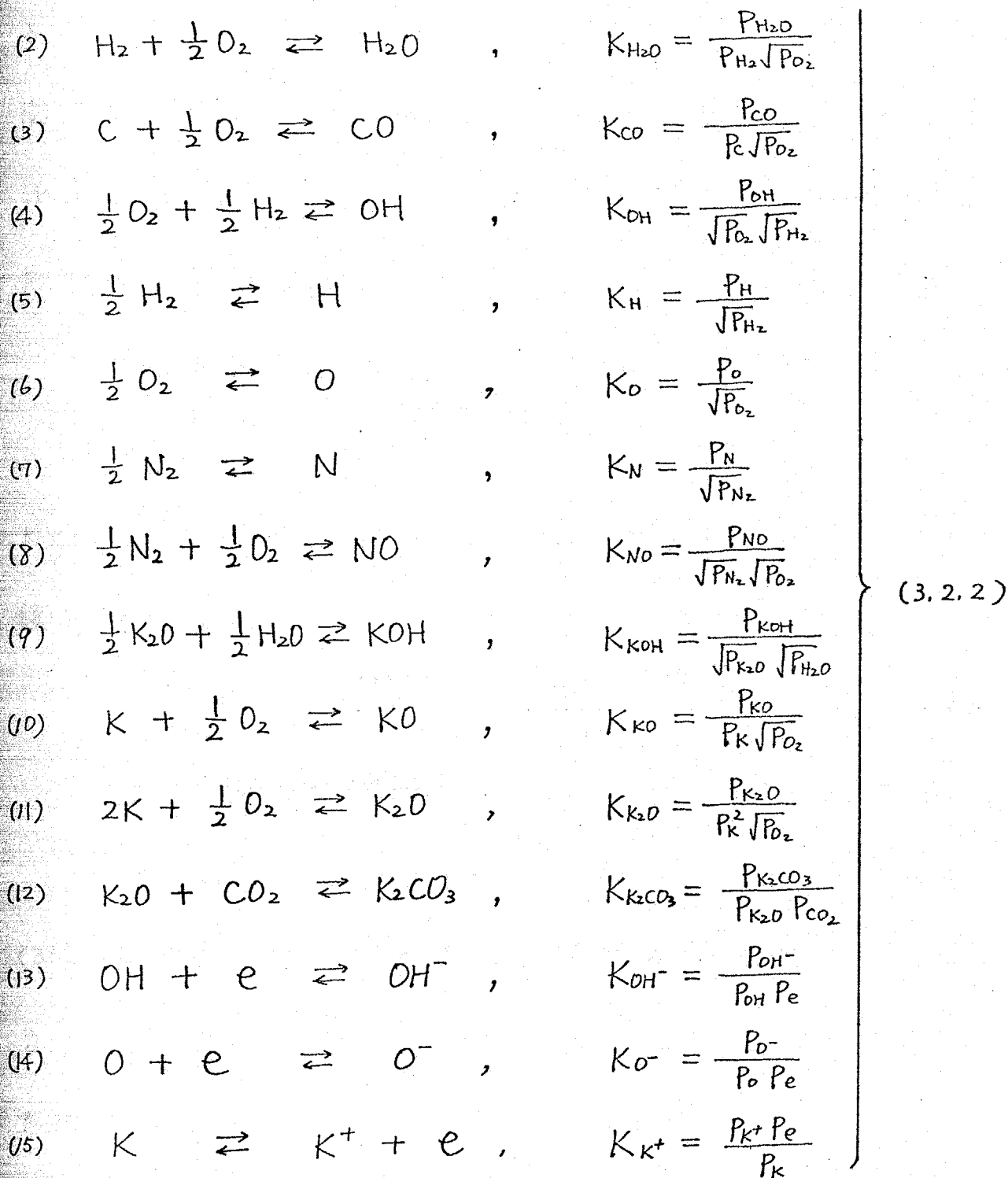
○ 3-2-1. 平衡組成の計算

化学種として次の20種を考える。これらに含まれない成分は、計算の温度範囲内ではきわめて小さいモル分率しかもたない。



反応式として次の15の反応式を採用し、それぞれに対応する平衡定数は以下の通りである。





(Pの単位は atm)

平衡定数については、 $K_{\text{K}_2\text{CO}_3}$, K_{KOH} , $K_{\text{K}_2\text{O}}$ 以外はすべて JANAF Thermodynamical Tables ^[3-11] によった。ただし、 K_{KO} については、JANAF のデータは (11) の反応式における

左辺の K として固相カリウムを考えているが、本平衡計算においては気相カリウム原子を考えるので、次のように、カリウムが気化するときの平衡定数分だけ補正を行なった。

$$\log_{10} K_{K(g)} = \log_{10} K_{K(s)} - \log_{10} K_K \quad (3.2.3)$$

(K: gas) (K: solid)

$K_{K_2CO_3}$, K_{KOH} , K_{K_2O} については、それぞれ次のような値を用いる。

$$\log_{10} K_{K_2CO_3} = \frac{13800}{T} - 9.80 \quad [3-12] \quad (3.2.4)$$

$$\log_{10} K_{KOH} = \frac{1900}{T} - 2.27 \quad [3-13] \quad (3.2.5)$$

$$\log_{10} K_{K_2O} = \frac{16910}{T} - 6.334 \quad (3.2.6)$$

(3.2.2) より、(3.2.1) の各 20 成分の分圧を、主要成分である次の 5 成分の分圧で表わすことにより変数を減らすことができる。

$$\begin{aligned} x_1 &= P_{CO_2}, & x_2 &= P_{H_2O}, & x_3 &= P_{H_2}, \\ x_4 &= P_{N_2}, & x_5 &= P_K \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

このとき各成分の分圧は、 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 を用いて次のように表わせる。

$$P_{CO_2} = x_1$$

$$P_{CO} = K_1 \frac{x_1 x_3}{x_2}$$

$$K_1 = \frac{K_{H_2O} K_{CO}}{K_{CO_2}}$$

$$P_{O_2} = K_2 \frac{x_2^2}{x_3^2}$$

$$K_2 = \frac{1}{K_{H_2O}^2}$$

$$P_{H_2O} = x_2$$

$$P_{OH} = K_3 \frac{x_2}{\sqrt{x_3}}$$

$$K_3 = \frac{K_{OH}}{K_{H_2O}}$$

$$P_{H_2} = x_3$$

$$P_H = K_4 \sqrt{x_3}$$

$$K_4 = K_H$$

$$P_O = K_5 \frac{x_2}{x_3}$$

$$K_5 = \frac{K_O}{K_{H_2O}}$$

$$P_{N_2} = x_4$$

$$P_N = K_6 \sqrt{x_4}$$

$$K_6 = K_N$$

$$P_{NO} = K_7 \sqrt{x_4} \frac{x_2}{x_3}$$

$$K_7 = \frac{K_{NO}}{K_{H_2O}}$$

$$P_{KOH} = K_8 x_5 \frac{x_2}{\sqrt{x_3}}$$

$$K_8 = \frac{K_{KOH} \sqrt{K_{K_2O}}}{\sqrt{K_{H_2O}}}$$

$$P_{KO} = K_9 x_5 \frac{x_2}{x_3}$$

$$K_9 = \frac{K_{KO}}{K_{H_2O}}$$

$$P_{K_2O} = K_{10} x_5^2 \frac{x_2}{x_3}$$

$$K_{10} = \frac{K_{K_2O}}{K_{H_2O}}$$

$$P_{K_2CO_3} = K_{11} x_5^2 \frac{x_1 x_2}{x_3}$$

$$K_{11} = \frac{K_{K_2CO_3} K_{K_2O}}{K_{H_2O}}$$

$$P_K = x_5$$

$$P_e = \sqrt{\frac{K_{14} x_3}{1 + K_{12} \frac{x_2}{\sqrt{x_3}} + K_{13} \frac{x_2}{x_3}}}$$

(3.2.8)

$$P_{OH^-} = K_{12} \frac{x_2}{\sqrt{x_3}} P_e, \quad K_{12} = \frac{K_{OH^-} \cdot K_{OH}}{K_{H_2O}}$$

$$P_{O^-} = K_{13} \frac{x_2}{x_3} P_e, \quad K_{13} = \frac{K_{O^-} \cdot K_O}{K_{H_2O}}$$

$$P_{K^+} = K_{14} x_5 \cdot \frac{1}{P_e}, \quad K_{14} = K_{K^+}$$

ただし P_e を求めるにあたっては、次の電気的中性の条件を用いた。

$$P_{K^+} = P_{OH^-} + P_{O^-} + P_e \quad (3.2.9)$$

計算にあたり設定する条件は、原子の個数比すなわち $C:H:O:N:K = 1.0 : S_H : S_O : S_N : S_K$ および全圧 P であるから、次にこれらの原子の保存式と圧カバランスの式を考える。

$$f_H = 2P_{H_2O} + P_{OH} + 2P_{H_2} + P_H + P_{KOH} + P_{OH^-} - S_H (P_{CO_2} + P_{CO} + P_{K_2CO_3}) = 0$$

$$f_O = 2P_{CO_3} + P_{CO} + 2P_{O_2} + P_{H_2O} + P_{OH} + P_O + P_{NO} + P_{KOH} + P_{KO} + P_{K_2O} + 3P_{K_2CO_3} + P_{OH^-} + P_{O^-} - S_O (P_{CO_2} + P_{CO} + P_{K_2CO_3}) = 0$$

$$f_N = 2P_{N_2} + P_N + P_{NO} - S_N (P_{CO_2} + P_{CO} + P_{K_2CO_3}) = 0$$

(3.2.10)

$$\begin{aligned}
 f_K &= P_{KOH} + P_{KO} + 2P_{K_2O} + 2P_{K_2CO_3} + P_K + P_{K^+} \\
 &\quad - S_K \cdot (P_{CO_2} + P_{CO} + P_{K_2CO_3}) = 0
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} f_K \\ f_P \end{aligned}} \right\} \sigma_{Me,e}$$

$$f_P = \sum_{i=1}^{20} P_i - P = 0$$

(3.2.8) で x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 によって表わされた各成分の分圧を (3.2.10) に代入することにより、次の5元連立方程式を得る。

$$\begin{cases}
 f_H(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0 \\
 f_O(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0 \\
 f_N(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0 \\
 f_K(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0 \\
 f_P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0
 \end{cases} \quad (3.2.11)$$

これを多元 Newton-Raphson 法で解けば、 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 が求まり直ちに (3.2.8) により全20成分の平衡分圧が定まり、モル分率を用いた平衡組成が決まる。 $C:H:O:N:K = 1.0 : 1.790 : 2.791 : 3.088 : 0.0013$, $P = 1 \text{ atm}$ (実験に対応) なる条件に対して計算した結果を図.3-1 に示す。これによれば、本解析で考え

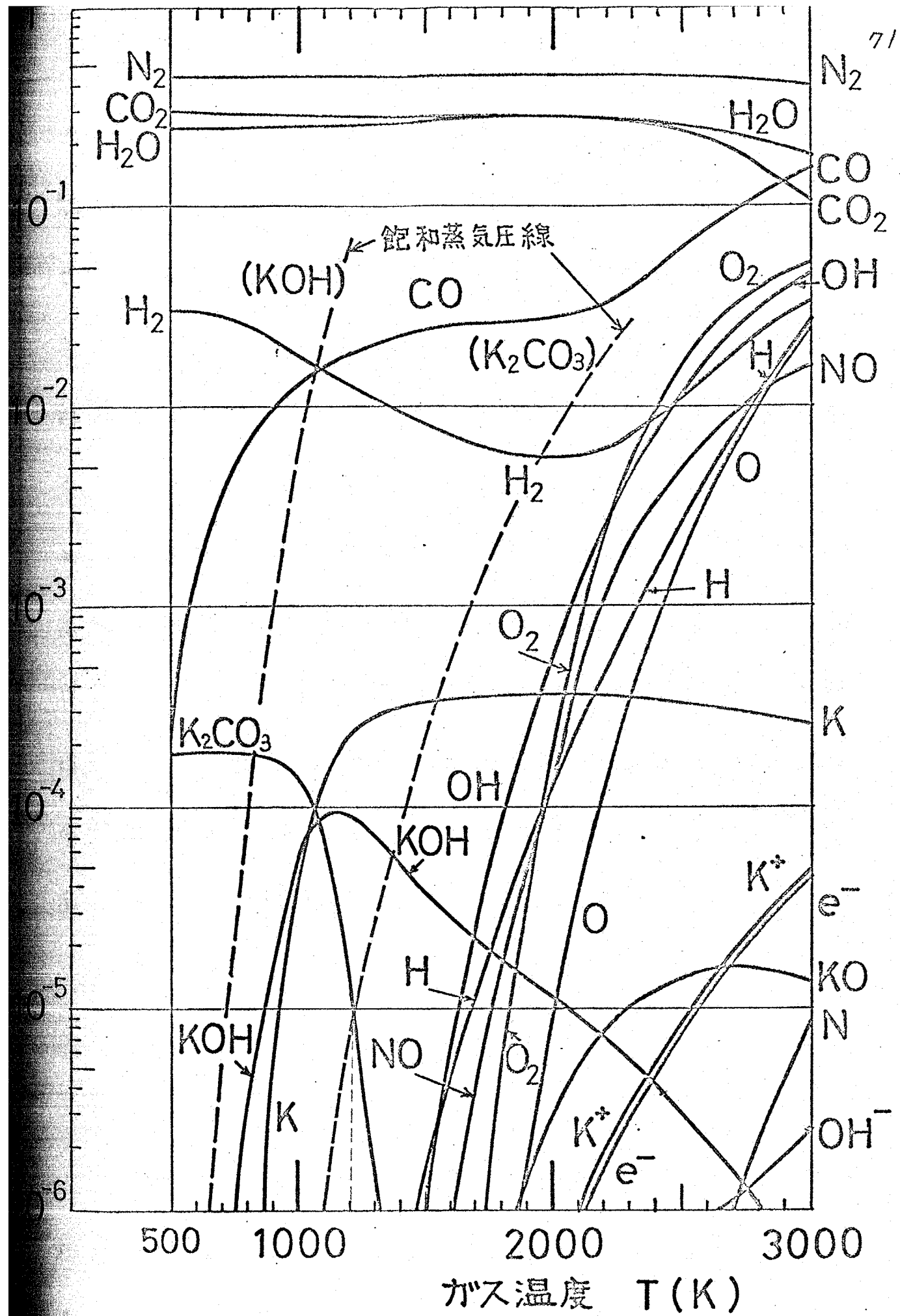


図.3-1 カリウムシード燃焼ガスの平衡組成

る。ガス温度が 2500 K 以下の範囲においては、燃焼ガスのほとんど (99%) が CO_2 , H_2O , N_2 , CO で構成されており、後で述べる電子エネルギー式における電子の重い分子との非弾性衝突によるエネルギー損失を計算するとき、この4成分のみを考えれば十分であることがわかる。また、電子およびイオンの供給源として重要なカリウム原子のモル分率は、考える温度範囲内で $X_K = 3 \times 10^{-4}$ でほぼ一定であり、本解析においてはこの値を用いることにする。図中の破線は、2つの重要なカリウム化合物である K_2CO_3 と KOH の飽和蒸気圧線であり、次式で与えられる値^[3-14]を示したものである。

K_2CO_3 に対しては (Kröger et al.)

$$\log_{10} P_{\text{S}_{\text{K}_2\text{CO}_3}} = -8.92 \times 10^3 \left(\frac{1}{T} \right) + 2.33 \quad (3.2.12)$$

KOH に対しては (Wartenberg et al.)

$$\log_{10} P_{\text{S}_{\text{KOH}}} = -7.103 \times 10^3 \left(\frac{1}{T} \right) + 4.849 \quad (3.2.13)$$

圧力の単位は atm である。すべての成分が気相であると仮定して計算された分圧に対して、

$$(分圧) - (飽和蒸気圧) > 0 \quad (3.2.14)$$

となる場合は、その差分は液相あるいは固相としてガス系から分離されると考えると、 K_2CO_3 については $T=1200\text{K}$ 以下ではそのような状況となることかわかり、実験における表面温度 700K なる冷電極に対しては、表面に沿って K_2CO_3 の凝縮相が形成され、その表面温度が約 1200K であるような単純化されたモデルを採用する。すなわち本章の解析においては表面温度 $T_w=700\text{K}$ と $T_w=1200\text{K}$ の2通りの場合に対する計算を行なうことにする。この凝縮層の厚さは壁への熱流束と液相 K_2CO_3 に対する熱伝導率から考えて高々 0.5mm 以下であり、また、導電度は約 $200\text{ }\Omega/\text{m}$ とガス中の導電度とくらべて十分高く、解析場に対するこの薄層の存在の影響は無視しうるものである。

○ 3-2-2 電子およびイオンの移動度

電場中の電子やイオンは、ランダムな熱運動をしながらかつ衝突と衝突の間の自由行程中に電界 E に

よる加速を受け、多くの衝突をくり返しなからある平均的な速度で、イオンは電界の方向へ、電子は電界と逆の方向へ移動していく。これをドリフトと言いだりフト速度は次式で与えられる。

$$W_{e \text{ drift}} = -\mu_e E, \quad W_{i \text{ drift}} = \mu_i E \quad (3.2.15)$$

比例定数 μ_e, μ_i を、電子およびイオンの移動度と言いだり。電場中での導電性流体において重要な物理量である。本節では、特にシードされた燃焼ガス中でのこれらの移動度についての表示式を示す。

電子の移動度

電子の移動度は次式で与えられる。

$$\mu_e = \frac{e l_e}{m_e \bar{c}_e} \quad (3.2.16)$$

電子の熱速度は $\bar{c}_e = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}}$ 、平均自由行程は $l_e = \frac{1}{\sum_x n_x \bar{Q}_{ex}}$

であり、 \bar{Q}_{ex} は、電子と粒子 X の平均運動量交換衝突断面積である。入射電子エネルギーの関数としての運動量交換衝突断面積を $Q_{ex}^{(1)}(T_e)$ とすれば $\bar{Q}_{ex} \approx \frac{4}{3} Q_{ex}^{(1)}(T_e)$

が成立する。^[3-15] $n_x = \frac{P}{kT} X_x$ を考えて整理すると (3.2.16)

は次式のようになる。

$$\mu_e = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi k e^2}{8 m_e}} \cdot \frac{1}{P} \frac{T}{\sqrt{T_e}} \cdot \frac{1}{Q} \quad (3.2.17)$$

ここで $Q = \sum_x X_x Q_{ex}^{(1)}$ であり、上述の平衡組成の結果から X_x を、また Spencer et al.^[3-16] が特に MHD 発電にかかわる成分について整理した最新の $Q_{ex}^{(1)}$ のデータを利用すれば、電子の移動度を定めることができる。カリウムシード燃焼ガス中の主要成分に対して、用いた $Q_{ex}^{(1)}(Te)$ を入射電子エネルギーの関数として表3-1に示す。

 $Q_{ex}^{(1)}(Te)$ [単位 $\times 10^{-20} \text{ m}^2$]

入射電子 エネルギー (eV)	CO ₂	CO	H ₂	H ₂ O	N ₂	O ₂	K	KOH
0.07	64	6.1	9.85	456	5.1	2.1	720	2570
0.10	52	7.3	10.5	318	5.95	4.2	550	1800
0.12	46	7.9	10.85	265	6.45	4.38	500	1500
0.15	40	8.8	11.4	210	7.1	4.65	435	1200
0.17	36	9.4	11.6	187	7.4	4.8	405	1060
0.20	31.5	10.0	12.0	153	7.9	5.1	360	900
0.25	25	11.2	12.5	124	8.5	5.3	313	720
0.30	20	12.0	13.0	102	9.0	5.46	270	600
0.35	16.5	12.7	13.45	89	9.4	5.65	243	514
0.40	14	13.5	13.9	78	9.7	5.8	215	450

表3-1. 運動量交換衝突断面積

イオンの移動度

カリウムシード燃焼ガス中のカリウムイオンの移動度については、多くの種類のガス中におけるイオンの移動度について種々のデータを整理した McDaniel *et al.* [3-17] の成書から引用した値を用いる。イオンは電子にくらべて質量が大きく、イオンの移動度は電子の移動度よりはるかに小さい。

$$\mu_i / \mu_e \sim 0 \left(\sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \right) \ll 1 \quad (3.2.18)$$

平衡導電度

上述の結果をもとに、本解析に用いるカリウムシード燃焼ガスのガス温度に対する平衡導電度を求めることができる。(3.2.2)の反応式(15)の平衡定数 K_{K^+} は次式で与えられる。

$$K_{K^+} = \frac{P_o P_{K^+}}{P_K} = \frac{n_e n_{K^+}}{n_K} = \frac{Z_e Z_{K^+}}{Z_K} e^{-\frac{\epsilon_i}{kT_e}} = 2 \left(\frac{2\pi m_e k T_e}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{Z_{K^+}}{Z_K} e^{-\frac{\epsilon_i}{kT_e}} \quad (3.2.19)$$

(以下、 n_{K^+} を n_i とかく)

カリウム原子の電離は主として電子との衝突に支配されているので、温度としては電子温度 T_e を用いる。

ϵ_i はカリウム原子の電離エネルギー、 Z_e , Z_{K^+} , Z_K は、

電子，カリウムイオン，カリウム原子の分配関数であり、 $\Sigma_e = 2(2\pi m_e k T_e / h_p^2)^{3/2}$ である。また、カリウム原子などのアルカリ原子については 3000 K 以下なら $\frac{\Sigma_{K^+}}{\Sigma_K} = \frac{1}{2}$ とおける。^[3-18] 従って、サハ平衡電子密度は (3.2.19) で $n_e = n_i$ とおいて

$$n_{es}(T_e) = \left[\left(\frac{2\pi m_e k T_e}{h_p^2} \right)^{3/2} n_K e^{-\frac{\epsilon_i}{k T_e}} \right]^{1/2} \quad (3.2.20)$$

となり、この式は後節でたびたび用いる。電子とガスの熱平衡が成立している場合には、(3.2.20) で $T_e = T$ とおいて得られる $n_{es}(T)$ を用いて、平衡導電度

$$\sigma = e n_e \mu_e + e n_i \mu_i = e n_{es}(T) (\mu_e + \mu_i) \quad (3.2.21)$$

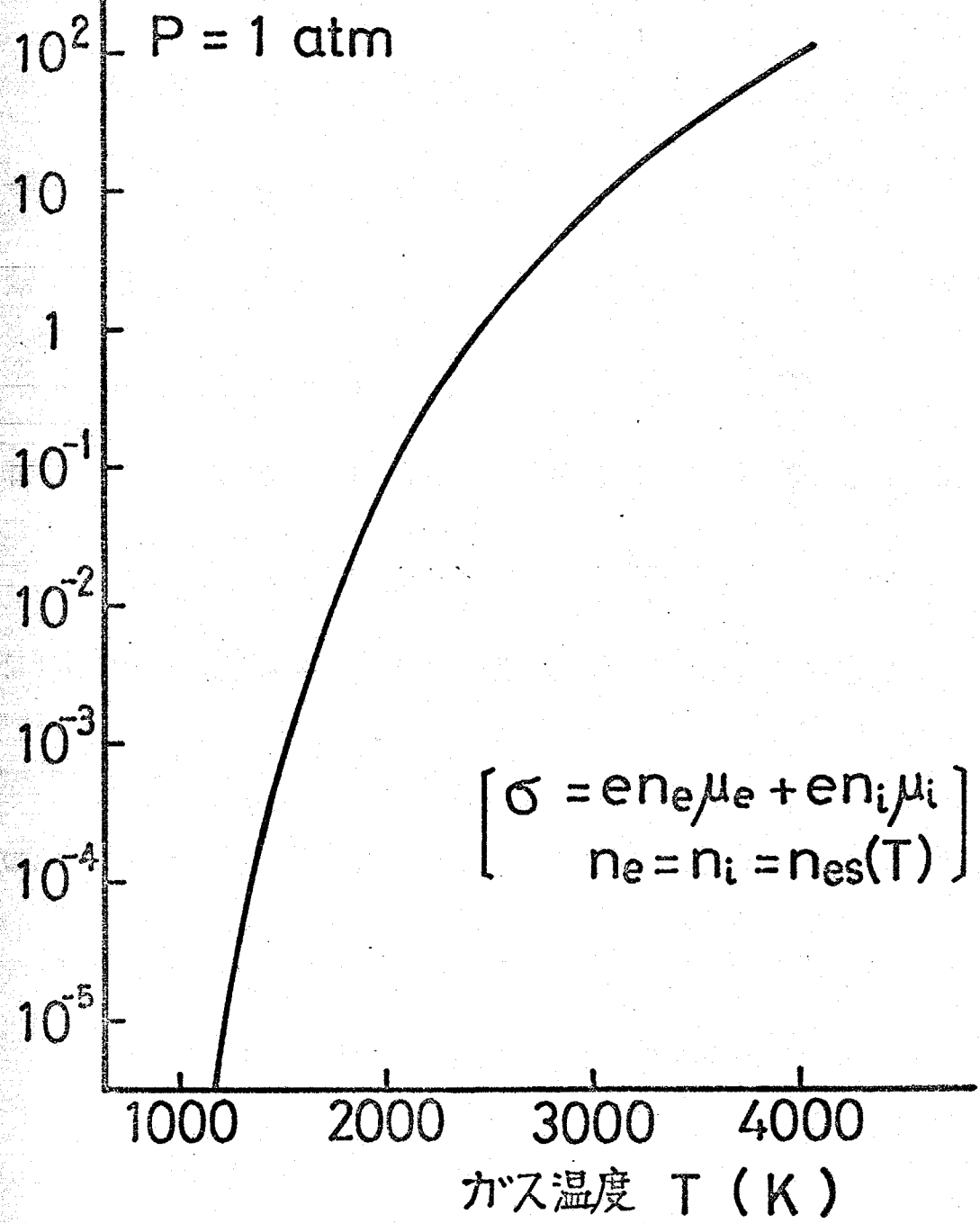
が求まる。(3.2.21)において、実際には(3.2.18)により第1項が第2項にくらべて卓越している。解析に用いたカリウムシード燃焼ガスのガス温度に対する平衡導電度を図3-2に示す。これからわかるように平衡導電度のガス温度に対する依存性はきわめて大きい。

$$\sigma = N \cdot n_e \cdot e$$

C:H:O:N:K
= 1.0:1.790:2.791:3.088:0.0013

P = 1 atm

導電度 σ (ohm⁻¹cm)



$$\left[\begin{aligned} \sigma &= en_e \mu_e + en_i \mu_i \\ n_e &= n_i = n_{es}(T) \end{aligned} \right]$$

図3-2 平衡導電度

3-3. 基礎方程式

○ 3-3-1. 解析モデルおよび仮定

本解析に用いた解析場は図3-3に示す通りで、磁場がなく外部印加電圧による均一な通電がある。平板冷電極（陽極）まわりの定常二次元層流境界層を考える。平板前縁から流れ方向に x 軸を、平板と直角方向に y 軸をとる。基礎方程式を構成するにあたって用いた仮定は次の通りである。

- (1) 主流速度 u_∞ ，主流温度 T_∞ ，および圧力 P は、流れ方向に一定である。
- (2) ガスは、電子，イオン，中性粒子の三流体より構成されており、電子およびイオン以外のかす組成については、熱的および化学的平衡が成立している。また、イオン温度はかす温度に等しい。
- (3) ガスは理想気体としてふるまう。
- (4) 流れ場についてはもちろん、電気場についても境界層近似が成立する。

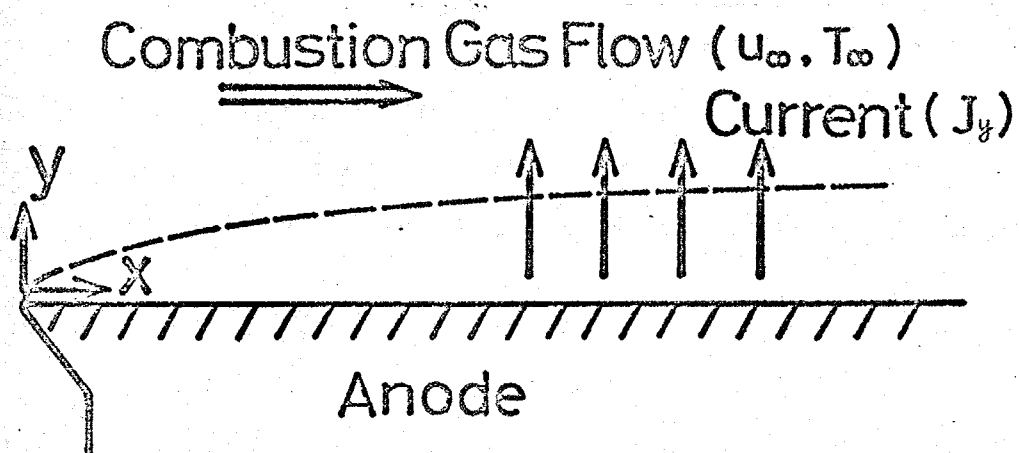


圖. 3-3 解析場

(5) 全体のエネルギー式において、流速が小さいので、
 ガスの粘性散逸の寄与は無視する。また、反応熱
 の寄与も、他のエネルギープロセスにくらべて十分
 小さいので無視する。

(6) 電子のエネルギー式は一般に次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 & \frac{5}{2} n_e k T_e \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{3}{2} n_e k T_e \right) \quad \textcircled{A} \\
 & = \nabla \cdot \left\{ \frac{5}{2} k T_e \frac{\mathbf{J}_e}{e} + \frac{5}{2} \frac{k}{m_e} T_e \frac{\mu}{S_{c_i}} \left(1 + \frac{T_e}{T} \right) \nabla T_e \right\} \quad \textcircled{B} \\
 & \quad + \underbrace{\nabla (\lambda_e \nabla T_e)}_{\textcircled{C}} + \underbrace{\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{E}}_{\textcircled{D}} \\
 & \quad - \underbrace{\sum_x \frac{2m_e}{m_x} \delta_x \bar{v}_{ex} n_e \frac{3}{2} k (T_e - T)}_{\textcircled{E}} \\
 & \quad - \underbrace{\dot{n}_e E_i}_{\textcircled{F}} - \underbrace{R_a}_{\textcircled{G}} \quad (3.3.1)
 \end{aligned}$$

しかしながら、燃焼ガス中においては希ガス中と
 は違って非弾性衝突による電子のエネルギー損失係
 数^(付1)(δ_x)がきわめて大きいので、通電による電子温度と
 ガス温度の非平衡性が問題となる冷電極のごく近
 傍の大きな電界から電子が得るエネルギーの大部分
 は、電子と中性粒子との非弾性衝突により矢われ
 ると考えられる。従って、電子のエネルギー式とし
 ては(3.3.1)のかわりに、電子が電界から得るエネ

ルがすなわちジュール加熱項④と中性粒子との非弾性衝突損失項⑤との局所的なつり合いのみを考慮することにする。この仮定の妥当性は、次のように確かめられた。電子の熱伝導率は近似的に電子密度と電子の熱速度の積に比例し^[3-15]、本解析で問題とする電子密度 $10^{16} \sim 10^{20} \text{ m}^{-3}$ 、電子温度 $1000 \sim 3000 \text{ K}$ 程度では、電子の熱伝導⑥による寄与は、冷電極近傍の大きなジュール加熱項とくらべて1%程度で十分小さい。ふく射損失⑦のオーダは Rosa^[3-18]により見積もることかできて、電流密度が 10 A/m^2 以上あればジュール加熱項より十分小さい。また、対流項⑧、ドリフトと拡散項⑨および反応エネルギー項⑩の寄与はさらに小さい。

(7) 磁気レイノルズ数は十分小さく ($\sim 10^{-3}$)、通電によって誘導される磁場の効果は無視する。

上述の仮定において、シーヌ仮定や電気的中性の仮定が用いられていないことが重要である。

3-3-2 基礎方程式

連続の式

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3.3.2)$$

運動量保存式

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.3.3)$$

エネルギー保存式

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (3.3.4)$$

状態方程式

$$p = \rho \frac{R}{M} T \quad (3.3.5)$$

電子保存式

$$\nabla \cdot (n_e u_e) = \dot{n}_e \quad (3.3.6)$$

イオン保存式

$$\nabla \cdot (n_i u_i) = \dot{n}_i \quad (3.3.7)$$

ポアソンの式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{e}{\epsilon} (n_i - n_e) \quad (3.3.8)$$

電子のエネルギー式

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sum_x \delta_x \overline{v_{ex}} n_e \frac{3}{2} k (T_e - T) \quad (3.3.9)$$

(付1) $(\delta_x: \text{電子の } X \text{ 粒子に対するエネルギー損失係数})$

\dot{n}_e, \dot{n}_i は、それぞれ電子およびイオンの単位時間、単位体積当りの生成量であり、その表示式は 3-3-4 において詳しく述べる。また $\bar{\nu}_{ex} (= n_x \bar{Q}_{ex} \bar{C}_e)$ は、電子と X 粒子との平均衝突周波数である。(3.3.6) と (3.3.7) の左辺は、対流、ドリフトおよび拡散による粒子束の和で表わされ、 D_e, D_i を電子およびイオンの拡散係数とすれば、次のように書ける。

$$n_e u_e = n_e (u + W_e) = n_e u - n_e \mu_e E - p D_e \nabla \left(\frac{n_e}{p} \right) \quad (3.3.10)$$

$$n_i u_i = n_i (u + W_i) = n_i u + n_i \mu_i E - p D_i \nabla \left(\frac{n_i}{p} \right) \quad (3.3.11)$$

基礎方程式系 (3.3.2) ~ (3.3.9) は、もし J の値が与えられれば、8つの未知数 $p, u, v, T, n_e, n_i, E, T_e$ に関する閉じた方程式系を構成する。実際の計算においては、まず流れ場について (3.3.2) ~ (3.3.5) より p, u, v, T を求め、それをもとに (3.3.6) ~ (3.3.9) より n_e, n_i, E, T_e を求めて、(3.3.4) の $J \cdot E$ を修正項としてくり返し計算を行えばよい。しかしながら、電気場の式 (3.3.6) ~ (3.3.9) は、そのままの形で解くのは

きわめて困難なので、本解析場に対応する物理的状況をふまえながら、直接解けるような形に変形していく。その概要を以下に述べる。

まず、(3.3.10) を μ_e で割った式と (3.3.11) を μ_i で割った式を加え合わせると次のようになる。

$$\frac{1}{\mu_e} n_e \mu_e + \frac{1}{\mu_i} n_i \mu_i = \frac{1}{\mu_e} n_e \mu + \frac{1}{\mu_i} n_i \mu + (n_i - n_e) E - \left[\frac{\rho D_i}{\mu_i} \nabla \left(\frac{n_i}{\rho} \right) + \frac{\rho D_e}{\mu_e} \nabla \left(\frac{n_e}{\rho} \right) \right] \quad (3.3.12)$$

全電流は、

$$J = e n_i \mu_i - e n_e \mu_e \quad (3.3.13)$$

で表わされるから

$$n_i \mu_i = \frac{J}{e} + n_e \mu_e \quad (3.3.14)$$

また、

$$n_i = (n_i - n_e) + n_e \quad (3.3.15)$$

(3.3.12) に (3.3.14) および (3.3.15) を代入すると

$$\frac{1}{\mu_e} n_e \mu_e + \frac{1}{\mu_i} \left(\frac{J}{e} + n_e \mu_e \right) = \frac{1}{\mu_e} n_e \mu + \frac{1}{\mu_i} (n_i - n_e) \mu + \frac{1}{\mu_i} n_e \mu + (n_i - n_e) E - \left[\frac{\rho D_i}{\mu_i} \nabla \left(\frac{n_e}{\rho} \right) + \frac{\rho D_e}{\mu_e} \nabla \left(\frac{n_e}{\rho} \right) + \frac{\rho D_i}{\mu_i} \nabla \left(\frac{n_i - n_e}{\rho} \right) \right] \quad (3.3.16)$$

このとき、(3.2.18) すなわち $\mu_i \ll \mu_e$, およびアイン

シュタインの関係

$$\frac{D_i}{\mu_i} = \frac{kT}{e}, \quad \frac{D_e}{\mu_e} = \frac{kT_e}{e} \quad (3.3.18)$$

を用いて整理すると次のようになる。

$$n_e \mu_e + \frac{J}{e} = n_e \mu + (n_i - n_e) \mu + \mu_i (n_i - n_e) E - \left[\frac{\rho \mu_i k T}{e} \left(1 + \frac{T_e}{T}\right) \nabla \left(\frac{n_e}{\rho}\right) + \frac{\rho \mu_i k T}{e} \nabla \left(\frac{n_i - n_e}{\rho}\right) \right] \quad (3.3.19)$$

電気的中性の条件は仮定されていないので、 $(n_i - n_e)$ の項は残され、ポアソンの式(3.3.8)によって与えられる。(3.3.19)を電子保存式(3.3.6)に代入し、後で示す電流保存式(3.3.22)および連続の式(3.3.2)を用いて整理すれば次のようになる。

$$\rho \mu \cdot \nabla Y_e + \frac{m_e \epsilon}{e} \nabla \cdot \{(\nabla \cdot E) \mu\} + \nabla \cdot \left[\frac{\epsilon \mu_i m_e}{e} (\nabla \cdot E) E - \frac{\mu}{S_{c_i}} \left(1 + \frac{T_e}{T}\right) \nabla Y_e - \frac{\mu}{S_{c_i}} \frac{\epsilon m_e}{e} \nabla \left(\frac{\nabla \cdot E}{\rho}\right) \right] = m_e \dot{n}_e \quad (3.3.20)$$

ここで $Y_e (= \frac{m_e n_e}{\rho})$ は、電子の質量分率、 $S_{c_i} (= \frac{\mu}{\rho D_i})$ はガス中におけるイオンのシュミット数である。(3.3.20)の左辺の第2項は、電荷分離によって $\nabla \cdot E$ の項がきいてくるであろう壁近くで $\nabla \cdot \mu \ll \nabla \cdot (\mu_i E)$ が成立するため、結局、境界層内全領域で第3項に対して無視できる。従来の解析では、電子保存式を考慮に入れたものでも、電気的中性の条件により(3.3.20)中の $\nabla \cdot E$

の関与した項はすべて省略されていたが、本解析では、(3.3.20)の左辺の第2項のみを省略した式を解いて電子密度を求めるわけである。実際の計算の結果から、特に、(3.3.20)の大カッコの中の第1項すなわち $\frac{\epsilon}{e} \mu_i m_e (\nabla \cdot E) E$ の項の寄与が冷電極近傍できわめて重要な役割を果たすことがわかる。(後の図3-11参照)

次に、(3.3.7)から(3.3.6)を引き、

$$\dot{n}_e = \dot{n}_i \quad (3.3.21)$$

なる関係を用いると電流保存式を得る。

$$\nabla \cdot J = 0 \quad (3.3.22)$$

この全電流 J は (3.3.13) に (3.3.10) (3.3.11) を代入することにより次のように表わせる。

$$J = e(n_i - n_e)u + en_i \mu_i E + en_e \mu_e E - e \rho D_i \nabla \left(\frac{n_i}{\rho} \right) + e \rho D_e \nabla \left(\frac{n_e}{\rho} \right) \quad (3.3.23)$$

(3.3.23)において、イオンのドリフトおよび拡散の流束は、電子のドリフト流束にくらべて十分小さく無視できる。また、電流密度がきわめて小さくはなれば ($J \approx 10 \text{ A/m}^2$)、電子についても濃度勾配による拡散

流束は電界によるドリフト流束にくらべて十分小さくなり無視できる。さらに、(3.3.23)の右辺第1項は、 y/δ (δ : 境界層厚さ) $\rightarrow 1$ では $\frac{n_i - n_e}{n_e} \ll 1$, $y/\delta \rightarrow 0$ では $u \ll \mu_e E$ が成り立つので、右辺の3項に対して全領域で無視できる。結局、本解析場に対しては、近似的に次式が成立する。

$$J = e n_e \mu_e E \quad (3.3.24)$$

この式は、電子密度 n_e を求める場合には、(3.3.20)の $\nabla \cdot E$, E の項を与えるためのみに用いられる。

結局、(3.3.20)と(3.3.24)は、未知量 n_e と E に対する基礎式となり、これらを、電子エネルギー式(3.3.9)とカフリングさせて解けば n_e , E および T_e が求まり、ポアソンの式(3.3.8)により n_i が求まる。

本解析で用いたカリウムシード燃焼ガスに対するフロントル数 R_f およびイオンシュミット数は一定であり、それぞれ $R_f = 0.73$, $Sc_i = 1.5$ である。また、電子のエネルギー損失係数 δ_x としては、Maxwell et al.^[3-20] の測定値を用いた。燃焼ガス中においては、特に、

低い振動励起準位をもつ CO_2 に対する δ_{CO_2} が大きく純アルゴンに対する δ_{Ar} のおおよそ 10^4 倍にもなり、このことが、燃焼ガス中では電子温度とガス温度の非平衡が一般にきわめて生じにくい理由である。

計算を実行する前に、本解析において特に検討しておくべき事が2つあって、1つは境界条件（特に電極上）であり、もう1つは電離再結合反応速度である。以下で、これらの事項について述べる。

3-3-3 境界条件

主流部においては、電子密度が十分大きいので、電子は、熱的にも化学的にも平衡状態が達成されている。すなわち、電子密度は、主流ガス温度に対するサハ平衡値 $n_{es}(T_\infty)$ で与えられる。従って、境界層外縁における境界条件は次のようになる。

$$y \rightarrow \infty \quad u = u_\infty, \quad T = T_\infty, \quad n_e = n_{es}(T_\infty)$$

$$\nabla \left(\frac{n_i - n_e}{\rho} \right) = 0 \quad (3.3.25)$$

最後の条件は、(3.3.20) の大括弧内の最後の項が3階微分項であるために必要となった条件である。 u_∞

および T_{∞} は流れ方向に一定である。一方、電極壁上の境界条件は、従来のようなシース仮定がとり除かれているので、シース外端においてではなく壁そのものの上で定めればよい。このとき、特に、電子保存式 (3.3.20) に対する壁境界条件を注意深く定める必要がある。陰極においては、複雑な電子放出機構が知られてきて、現在のところ信頼できる取り扱いが困難な状況であるが、本解析で取り扱う陽極においては、次のように考えることができる。陽極は、外側のかすに対して正の電位にあるから、電界によるドリフトあるいは濃度勾配による拡散で電極面に到達した電子は、電子に対するポテンシャルエネルギーが仕事関数分だけ低い金属中へそのまま入り込むことができる。すなわち、陽極表面をよぎる電子流束 Γ_{ew} に対する制約条件は別に存在しない。これとは逆にイオンに対しては、陽極近傍は強いイオン反撓場であり、しかも、電極の中あるいはその表面についたカリウム酸化物の凝縮層の中からイオンがかす中に出

てくることは、きわめて大きなエネルギーを要する^[3-21]ためほとんどおこりえないから、陽極表面上でのイオンの生成や消滅かない限り、陽極表面をよぎるイオン流束 Γ_{iw} は零であると考えることが出来る。今、冷却された陽極表面における正味のイオンの生成は十分小さいと考えられるから、結局、陽極表面における電子保存式の境界条件として $\Gamma_{iw} = 0$ を用いることが、本解析においては最も理にかなっていると考えられる。電流値のきわめて小さなフローブ理論や絶縁壁上の解析等においては、固体壁上でイオン密度あるいは電子密度が零と仮定されることが多いが^[3-9]、本解析のように大きな通電のある場において、電極面上でイオン密度や電子密度が必ずしも零であることを要求する物理的理由はない。以上より、陽極表面の境界条件は、流れ場に対する条件も合わせて次のようになる。

$$\psi = 0 \quad \text{で} \quad u = v = 0, \quad T = T_w,$$

$$\Gamma_{iw} = 0 \quad (3.3.26)$$

境界条件 $\mathbb{I}w=0$ は、対流項を除いた (3.3.10) (3.3.11) を考えることにより、(3.3.20) を導出する時と全く同様な方法を用いて、 $n_i - n_e \neq 0$ を考慮しながら整理すると、次式のような実際の計算に用いられる形となる。

$$\frac{\varepsilon \mu_i m_e}{e} (\nabla \cdot \mathbb{E}) \mathbb{E} - \frac{\mu}{S c_i} \left(1 + \frac{T_e}{T}\right) \nabla Y_e - \frac{\mu}{S c_i} \frac{\varepsilon m_e}{e} \nabla \left(\frac{\nabla \cdot \mathbb{E}}{\rho}\right) = - \frac{m_e \mu_i}{e \mu_e} \mathbb{J} \quad (3.3.27)$$

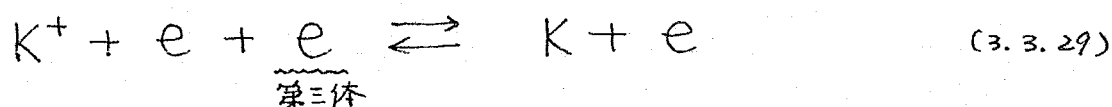
冷電極に対応する表面温度 T_w の値としては、次の二つの場合を考える。一つは電極表面がガスと直接接している場合で、このとき、電極表面温度は実験と対応させて、冷却により $T_w = 700\text{K}$ に保たれているとする。もう一つは、電極表面が K_2CO_3 のようなシード物質の酸化物の薄い凝縮層でおおわれている場合で、このときの表面温度は、3-2 節の図 3-1 に対する考察からわかるように、本解析場に対しては、 $T_w = 1200\text{K}$ となる。3-5 節において、この二つの T_w の値に対する計算結果と実験結果との比較を行ない考察を加える。

○ 3-3-4. 電離、再結合反応速度

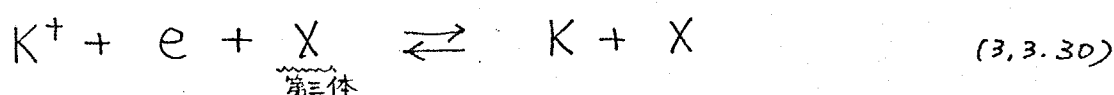
ここでは、電離・再結合反応による電子生成量 \dot{n}_e の再結合係数を用いた表示式について述べる。一般に再結合係数 (recombination coefficient) α は次のように定義される。

$$\left(\frac{dn_e}{dt}\right)_{\text{recomb}} = -\alpha n_e n_i \quad (3.3.28)$$

MHD 発電に関連する条件 (電子温度, 電子密度) においては、電子・イオンの再結合は、電子を第三体とした三体再結合反応



のみが卓越していると考えるのが今までは一般的であり、この第三体は、再結合時に放出される電離エネルギーを受け取る役目をもつ。この反応における再結合係数を α_e とおく。しかしながら、本解析場のような冷壁近傍では、緒論でも述べたように電子密度が小さく、多数存在する重い粒子、特に電離エネルギーを受け取りやすい多原子分子 (X) の第三体としての寄与が無視できなくなり、



の反応を考慮に入れる必要が生ずる。この反応における再結合係数を α_x とおく。(3.3.29)(3.3.30)の両方の反応を考慮に入れた時、単位体積当り単位時間当りの正味の電子生成量は次のように表わすことができる。

$$\dot{n}_e = (\alpha_e + \alpha_x)(n_{es}^2 - n_e n_i) \quad (3.3.31)$$

ここで、 n_{es} は (3.2.20) で示されたサハ平衡電子密度である。反応式から明らかのように、 α_e は n_e に、 α_x は n_x にそれぞれ比例する。 α_e については、かなり信頼できる表示式が Hinnov et al.^[3-22] によって与えられており、MKS単位系で次のようになる。

$$\alpha_e = 1.09 \times 10^{-20} n_e T_e^{-\frac{9}{2}} \quad [m^3/s] \quad (3.3.32)$$

α_x については、今までこのような重い粒子を第三体とする三体再結合反応が卓越するような物理対象が少なかつたせいもあって、信頼に足るデータは皆無に近い。ここでは、いちおう Thomson の理論^[3-15] に沿って Massay et al.^[3-23] の手法を改良した簡単なモデルを用いて、本解析場に対する α_x を見積もって用いる

ことにする。以下にその概要を述べる。

イオンから r の距離にある電子とイオンの全相対エネルギー E_0 は、 $E_0 = E_k - \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r}$ であり、衝突がない限り保存される。 E_k は電子とイオンの相対運動エネルギーであり、 $r \rightarrow \infty$ (電子の平均自由行程 l_e 程度離れれば十分であると考え) では、 $E_k = E_0 = \frac{3}{2} kT_e$ となる。今、イオンに近づいて運動エネルギーの大きくなった電子が $\frac{3}{2} kT$ の運動エネルギーを持った第三者(X)とイオンからある半径 r_0 内で衝突をして、

$\Delta E_{ex} = \delta_x (E_k - \frac{3}{2} kT)$ のエネルギーを失ったとき、電子とイオンの全相対エネルギーが負、すなわち

$$E_0 - \Delta E_{ex} < 0 \quad (3.3.33)$$

となれば、軌道が拘束されて再結合がおこりうると考える。このような再結合が可能な限界半径 r_0 は、

(3.3.33) より、次のようになる。

$$r_0 = \frac{\delta_x \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon}}{\frac{3}{2} kT_e - \delta_x \cdot \frac{3}{2} k(T_e - T)} \quad (3.3.34)$$

電子エネルギー損失係数の最も大きい CO_2 に対しても

$\delta_x \approx 0.1$ であるから、(3.3.34)の分母において、第2項は第1項にくらべて小さいので簡単のため省略する。電子がイオンから r_0 の半径内にあるとき、実際には第三体 X とエネルギーを失う衝突をおこす確率を考慮して得られた式^[3-15]

$$\alpha_x = \bar{c}_e \frac{4\pi r_0^3}{3} \cdot \frac{1}{l_e} \quad \left(l_e = \frac{1}{\sum_x n_x \bar{Q}_{ex}} \right) \quad (3.3.35)$$

に、 $\bar{c}_e = \sqrt{\frac{8kTe}{\pi m_e}}$ 、 $\bar{Q}_{ex} \approx \frac{4}{3} Q_{ex}^{(1)}$ 、 $n_x = \frac{PN_0}{RT} X_x$ および (3.3.34) を代入すれば、 α_x は結局次のようになる。

$$\alpha_x = \frac{16}{9} \sqrt{\frac{8\pi}{m_e k}} \left[\frac{2}{3k} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \right]^3 \left[\sum_x \delta_x^3 X_x Q_{ex}^{(1)} \right] P T^{-1} T_e^{-\frac{5}{2}} \quad (3.3.36)$$

X_x 、 $Q_{ex}^{(1)}$ の値として 3-2 節で与えたものを用いれば、本解析場における α_x の値を定めることができる。上式の中に δ_x^3 が含まれているので、燃焼ガス中においては、三体再結合の第三体となりうる重い粒子としては、 CO_2 の寄与が卓越している。このような、重い粒子を第三体とする三体再結合が重要になってくるのは、電子密度のきわめて小さい冷電極近傍に限られ、電子密度の大きい主流近くでは、やはり電

子を第三体とする反応が卓越している。

3-3-5. 無次元化

上で述べた境界層の基礎方程式を実際に解くにあたり、圧縮性を考慮に入れた次のような Howarth 変換を行なうのが便利である。

$$\xi = \int_0^x (\rho\mu)_{\infty} u_{\infty} dx \quad (3.3.36)$$

$$\eta = \frac{u_{\infty}}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy \quad (3.3.37)$$

各変数に対しても次のような無次元変数を導入する。

$$f' = \frac{u}{u_{\infty}}, \quad f = \int_0^{\eta} f' d\eta, \quad \Theta = \frac{T - T_w}{T_{\infty} - T_w}$$

$$\theta = \frac{T}{T_{\infty}}, \quad \theta_e = \frac{T_e}{T_{\infty}}, \quad \zeta = \frac{Y_e}{Y_{e\infty}} \quad (3.3.38)$$

このとき、基礎方程式 (3.3.2) (3.3.3) (3.3.4) (3.3.20) および (3.3.9) は、次のような無次元の方程式に変換される。

$$2\xi \frac{\partial f'}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + f' = 0 \quad (3.3.39)$$

$$2\xi f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} + v \frac{\partial f'}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(c_1 \frac{\partial f'}{\partial \eta} \right) \quad (3.3.40)$$

$$2\xi f' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + V \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(C_2 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + H \quad (3.3.41)$$

$$2\xi f' \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + V \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[A_1 \frac{1}{\xi^3} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + A_2 \left(1 + \frac{\theta_e}{\theta} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + A_3 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) \right] + F \quad (3.3.42)$$

$$G \cdot \frac{1}{\xi^2} = \frac{\sqrt{\theta_e}}{\theta^3} (\theta_e - \theta) \quad (3.3.43)$$

こゝにおいて、各係数は次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{2\xi}{(\rho\mu)_\infty u_\infty} \left(f' \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\rho V}{\sqrt{2\xi}} \right) \\ C_1 &= \frac{\rho\mu}{(\rho\mu)_\infty}, \quad C_2 = \frac{\rho\mu}{(\rho\mu)_\infty} \cdot \frac{1}{Pr} \\ H &= \frac{2\xi J \cdot E}{\rho u_\infty^2 (\rho\mu)_\infty c_p (T_\infty - T_w)} \\ A_1 &= \frac{1}{(\rho\mu)_\infty} \frac{\varepsilon \mu_i J^2}{e^3 \mu_e^2} \frac{\rho_\infty^3}{\rho n_{e\infty}^3} \\ A_2 &= \frac{\rho\mu}{(\rho\mu)_\infty} \cdot \frac{1}{Sc_i} \\ A_3 &= - \frac{\rho\mu}{(\rho\mu)_\infty} \frac{1}{Sc_i} \frac{\varepsilon J}{e^2 \mu_e} \frac{u_\infty}{\sqrt{2\xi}} \frac{\rho_\infty^2}{\rho n_{e\infty}^2} \\ F &= \frac{2\xi m_e \dot{n}_e}{\rho u_\infty^2 (\rho\mu)_\infty Y_{e\infty}} \\ G &= \frac{J^2}{2e n_{e\infty}^2 \mu_e P \left(\frac{8kT_\infty}{\pi m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_x \delta_x X_x Q_{ex}^{(1)}} \end{aligned} \right\} (3.3.44)$$

J は、電流密度ベクトル J の y 成分であり、また、
 \prime は η についての微分をあらわしている。電子の生成速度も、
 $n_e n_i = n_e^2 + \frac{\varepsilon}{e} n_e \nabla \cdot E$ を考慮して、無次元変数により次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \dot{n}_e = & (\alpha_{ew} \zeta \theta_e^{-\frac{7}{2}} + \alpha_{xw} \theta_e^{-\frac{5}{2}}) n_{ew}^2 \theta^{-3} (\zeta_s^2 - \zeta^2) \\ & + (\alpha_{ew} \zeta \theta_e^{-\frac{7}{2}} + \alpha_{xw} \theta_e^{-\frac{5}{2}}) \frac{\varepsilon J}{e^2} \frac{\rho_{\infty}}{\mu_e} \frac{u_{\infty}}{\sqrt{2\xi}} \theta^{-2} \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

境界条件 (3.3.25) (3.3.26) は、次のように変換される。

$$\begin{aligned} \eta \rightarrow \infty \text{ で } \quad f' = 1, \quad \theta = 1, \quad \zeta = 1 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

$$\begin{aligned} \eta = 0 \text{ で } \quad f = f' = 0, \quad \theta = 0 \\ A_1 \frac{1}{\zeta^3} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + A_2 \left(1 + \frac{\theta_e}{\theta} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + A_3 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) = \Sigma \end{aligned} \quad (3.3.47)$$

$$\text{ここで } \Sigma = \frac{1}{(\rho\mu)_{\infty}} \frac{\sqrt{2\xi} \mu_i J}{e \mu_e u_{\infty}} \frac{\rho_{\infty}}{n_{ew}}$$

本解析では、外部磁場のない場を扱っているので、
 実際に計算を行うにあたっては、流れ場のみでなく
 電気場に対しても、 ξ, η 座標系において局所相似

(local similarity) すなわち、微分項のみ $\frac{\partial}{\partial \xi} = 0$ とし、

定数項の θ は η の場に対応する θ の値を用いる近似
がよい近似で成立していると考えよう。この近似

の妥当性は、より簡単なモデルにおける局所相似解

と二次元計算結果の比較^[3-24]によりほぼ確かめられて

いる。また簡単のため Howarth 気体近似すなわち、

$\rho\mu = \text{一定}$ を用いることにする。このとき、無次元方

程式 (3.3.39) ~ (3.3.43) は、 $\frac{\partial}{\partial \xi} = 0$ とおくことにより以

下のようなになる。(3.3.39) より、

$$V = - \int_0^{\eta} f' d\eta = -f \quad (3.3.48)$$

これを用いて (3.3.40) ~ (3.3.43) は、

$$\left[\begin{array}{l} f''' + f f'' = 0 \quad (3.3.49) \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{Pr} \Theta'' + f \Theta' = -H \quad (3.3.50) \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} [A_1 \frac{\zeta'}{\xi^3} + A_2 (1 + \frac{\theta_e}{\theta}) \zeta' + A_3 (\frac{\zeta'}{\xi})'] + f \zeta' = -F \quad (3.3.51) \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} G \frac{1}{\xi^2} = \frac{\sqrt{\theta_e}}{\theta^3} (\theta_e - \theta) \quad (3.3.52) \end{array} \right.$$

となり、これらが実際に解くべき方程式となる。境

界層外端に相当する η の値としては、 $f' = \frac{U}{U_{\infty}} \doteq 0.995$

に対応する $\eta_0 = 4.5$ を採用した。ここで $T = T_0$ とする。

実際の計算手順の概略を流れ図にして図3-4に示す。(3.3.51)の左辺の大括弧内の第3項 $S = A_3 \left(\frac{\xi'}{\xi} \right)'$ は(3.3.20)の大括弧内の第3項すなわち空間電荷の勾配に相当する項であり、本計算における寄与は小さいことが予想されるので、この項は補正項としてとり扱われ、図中(II)のループでくり返し計算を行なうようになっている。しかしながら、結果的には、この項の計算結果に及ぼす影響は、本解析で扱うすべての場合について十分小さく、実質的に(II)のくり返し計算を行なう必要はない。また、全体のエネルギー式(3.3.50)中におけるジュール発熱項Hの本計算に対する寄与は、電流密度Jが比較的小さい ($J \leq 500 \text{ A/m}^2$) あいだは十分小さいので、(I)のループによるくり返し計算は、電流密度が大きい場合にのみ必要となる。

(3.3.44) および (3.3.50) の計算は Runge-Kutta-Gill 数値積分法を用い、まず f_w'' および θ_w' を適当に仮定して数値積分を行ない、 $\eta \rightarrow 0$ の境界条件が満足されるまで f_w'' および θ_w' を変えながらくり返し計算を行な

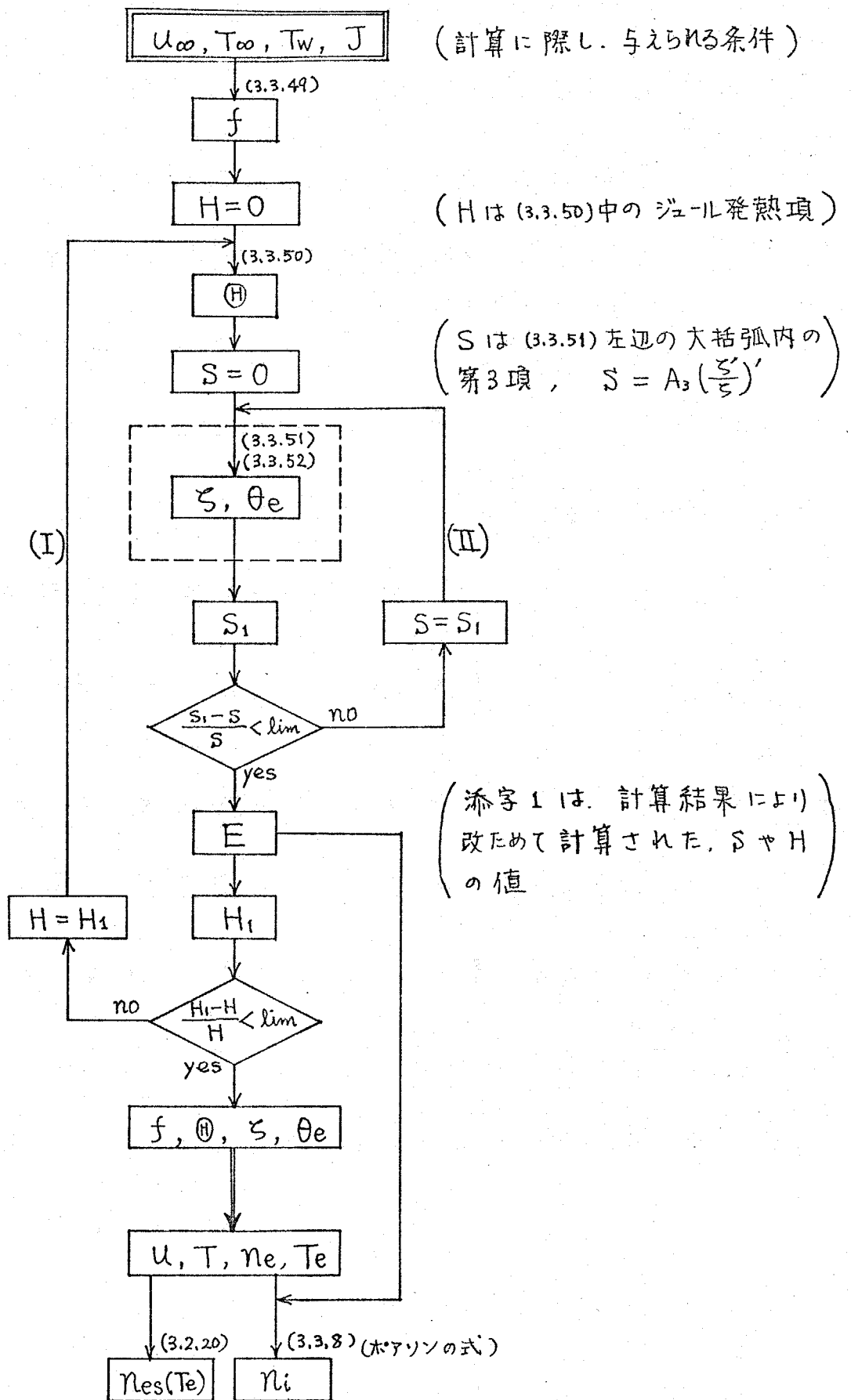


図.3-4. 数値計算流れ図

た。図 3-4 で破線で囲まれた部分は (3.3.51), (3.3.52) をカフリングさせて解き、電子密度および電子温度を求める計算であり、(3.3.51) 右辺の反応項 F の中には (3.3.45) のように θ_e が複雑に入りこんでいるので計算には多少の工夫を要する。その解法の概要を次に述べる。(3.3.51) と (3.3.52) をカフリングさせて解くにあたり、両式より θ_e を消去した式を解く立場よりも (3.3.52) の両辺を η で微分した

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(G \frac{1}{s^2} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\sqrt{\theta_e}}{\theta^3} (\theta_e - \theta) \right] \quad (3.3.53)$$

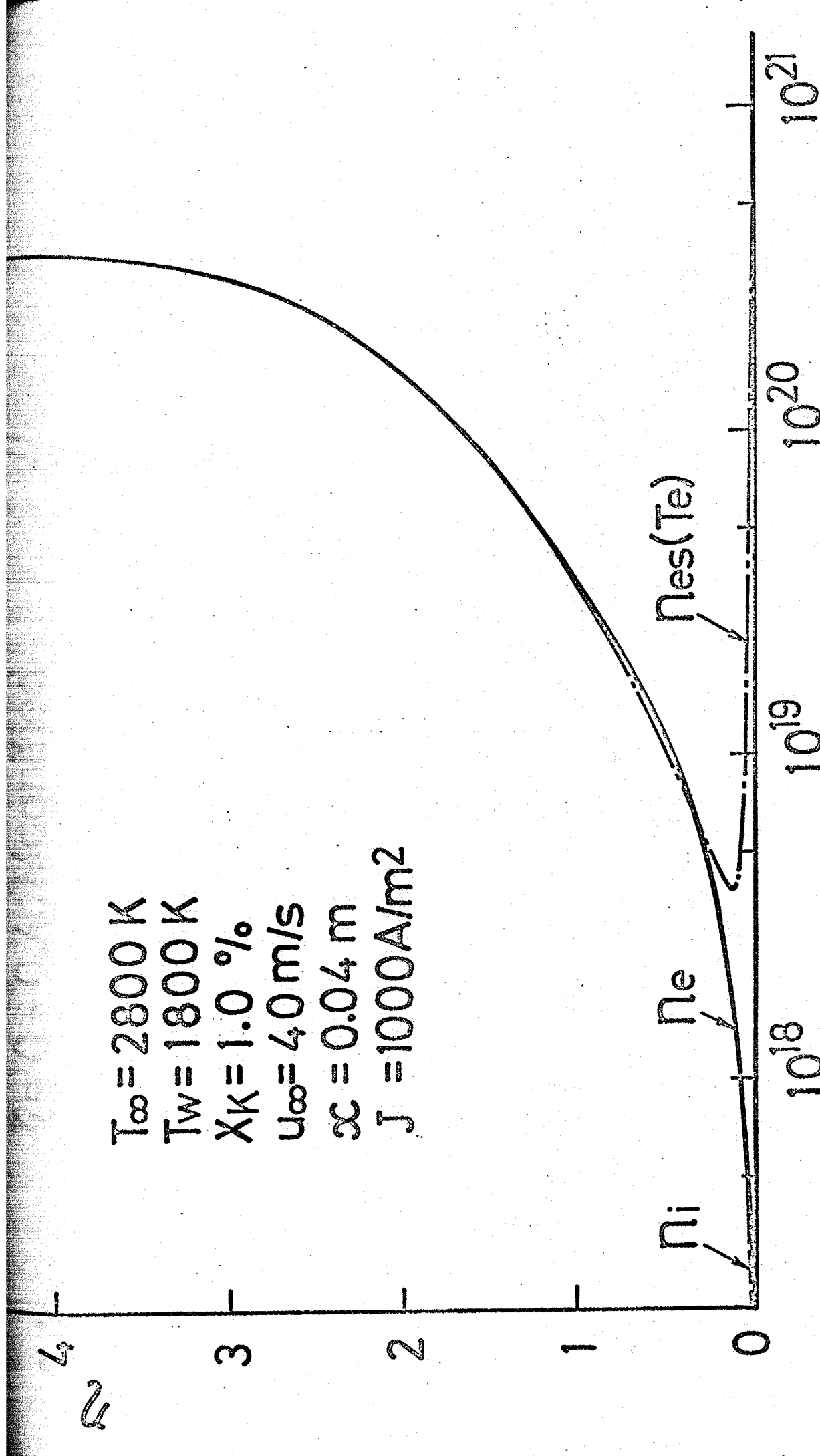
と、(3.3.51) を連立微分方程式として、一挙に境界層外端から壁へ数値積分を行なうのが好ましい。このとき外端における θ_e に対する境界条件が新たに必要となる。境界層外端 $\eta = \eta_s (= 4.5)$ で $s = s_s (T_s)$ (電子密度はガス温度に対するサハ平衡値に等しい) および $\theta_e = \theta_s (= \frac{T_s}{T_\infty})$ (電子温度はガス温度に等しい) なる条件のもとで、 $\left(\frac{\partial s}{\partial \eta} \right)_{\eta_s}$ をパラメータとして壁まで (3.3.51) (3.3.53) をカフリングさせながら Runge-Kutta-Gill 法で積分してゆ

き、壁の境界条件 (3.3.47) を満足するような解をさがす。このとき $(\frac{\partial \xi}{\partial \eta})_{\eta_s}$ の値としては、0 に近いある値をとるか値そのものに対する制約は存在しない。具体的な計算方法およびそのプログラムは、参考のため付録 3 に示す。実際に倍精度で数値計算を行なってみると、境界層外端から壁への境界層方程式の積分では、途中で正あるいは負の大きな値に変数かはねてしまいやすく、 $(\frac{\partial \xi}{\partial \eta})_{\eta_s}$ の値としては 10 桁程度の精度が要求された。この事情は、温度やシード率が高く電子密度が大きく反応が活発な場合特に顕著で倍精度計算でも解が定まらない例も生じる。このような場合は、境界層内のある点まで、電子密度を加え温度に対するサハ平衡値でもってきておいて、その点から数値積分を開始させることにより問題を解決することができる。

3-4. 層流境界層の計算結果と検討

○ 3-4-1. 高温電極壁、高シード率に対する解

本解析は、比較的シード率の低い燃焼カスの冷電極まわりの境界層解析において、特にこのような場に特徴的な物理的状況を把握できるように構成されたものであるが、理論構成が正当ならば、考える領域においてシード率も十分高くカス温度も高い、すなわち十分大きな電子密度が存在するとき、“燃焼カス中では電子密度、イオン密度は、カス温度に対するサハ平衡値で与えられる”という従来の概念をも包含するものでなければならぬ。このような観点から、第2章の実験に対応した低シード率燃焼カスの冷電極まわりの計算を行なう前に、主流温度、壁表面温度とも十分高く、カリウムモル分率も十分大きい場に、大きな通電があるときの計算を行なった。代表例として、 $T_{\infty} = 2800 \text{ K}$, $T_w = 1800 \text{ K}$, $X_k = 1.0\%$, $J = 1000 \text{ A/m}^2$ の場合の計算結果を 図3-5 および 図3-6 に示す。主流速度および前縁からの距離は、実験場の値、 $u_{\infty} = 40 \text{ m/s}$, $x = 0.04 \text{ m}$ が用いてある。図3-6 は、図3-5 の壁近傍を 10 倍に拡大した図であり、



$T_{\infty} = 2800 \text{ K}$
 $T_w = 1800 \text{ K}$
 $X_K = 1.0 \%$
 $u_{\infty} = 4.0 \text{ m/s}$
 $\alpha = 0.04 \text{ m}$
 $J = 1000 \text{ A/m}^2$

Number Density, $n \text{ (m}^{-3}\text{)}$

図3-5 高温電極層・高電子率に対する解

$\eta = 0 \sim 0.4$: Magnified

$T_{\infty} = 2800 \text{ K}$

$T_w = 1800 \text{ K}$

$X_K = 1.0 \%$

$u_{\infty} = 4.0 \text{ m/s}$

$\alpha = 0.04 \text{ m}$

$J = 1000 \text{ A/m}^2$

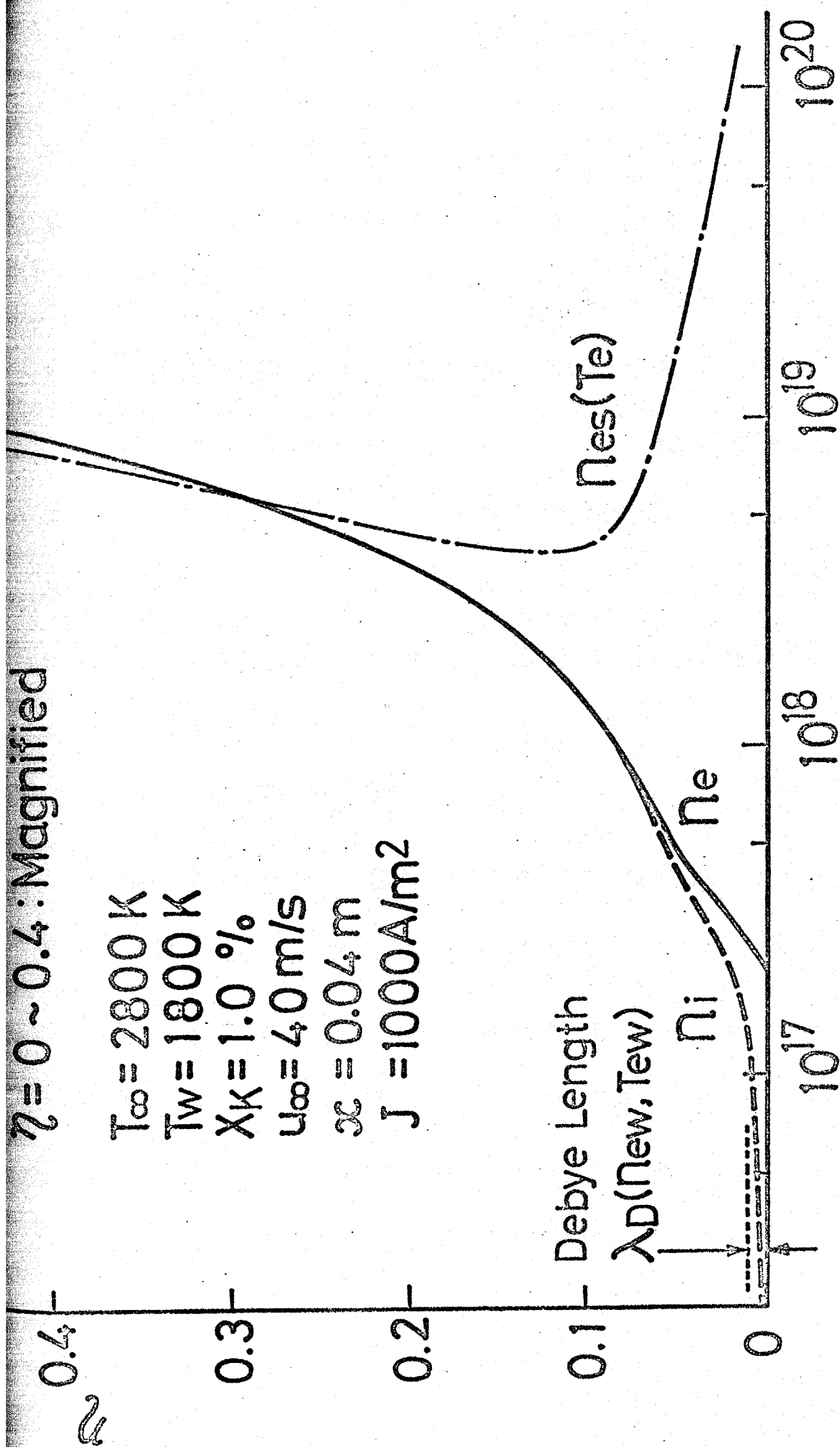
Debye Length

$\lambda_D(\text{New, Tew})$

n_i

n_e

$n_{es}(\text{Te})$



Number Density, n [m^{-3}]

図3-6 高温壁・高シールド率に対する解(図3-5の壁近傍拡大図)

壁表面における電子密度および電子温度により計算されたデバイ長さ（付録2参照） λ_D (N_{ew}, T_{ew}) が図示されている。デバイ長さとは、電子密度およびイオン密度が空間的に一様な場において、電荷分離によって生じた、中性を保持しようとする強い逆電界によるポテンシャルエネルギーが荷電粒子平均熱運動エネルギーをこえることができないという要請から導出された、空間電荷の存在範囲の限度の目安となる長さであり、次式で与えられる。

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon k T_e}{n_e e^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.4.1)$$

この λ_D の値は、MHD発電に関連する場では 10^{-6} m程度と一般に小さいが、電荷分離によって生ずる大きなポテンシャルエネルギーを補償するような特別な機構が存在する場合には、電荷分離領域の広さはこの限りではない。例えば、本解析の主たる対象である冷電極まわりのきわめて導電度の低い領域に大きな通電があり、しかも電離・再結合反応を伴うような場では、外部印加による壁近傍のきわめて大きな電界の変

化のために、ポアソンの式(3.3.8)を満たすだけの電荷分離を生じ、この領域の広がり範囲は(3.4.1)の入 λ_D をはるかに越えることも十分生じ得ることであろう。しかしながら、図3-5, 図3-6における計算条件のように全領域で電子密度が十分高いような場合には、たとえ通電量がある程度大きくても、(3.4.1)導出の際の議論がほぼあてはまるような状況に近くなる筈である。図3-6によれば、電子とイオンの電荷分離領域は、デバイ長さの数倍程度に押さえられ、デバイ長さに関する本来の概念とよく合致している。また、この時、壁表面におけるイオン密度は電子密度にくらべて数桁小さく、従来のシース解析等で壁におけるイオン密度を零とした境界条件を用いている状況に近い場に、結果的にはなっているが、壁表面でのイオン密度は決して零ではない。電子密度についても、電子密度が大きいと反応が活発なため、図3-5より、壁表面のごく近傍を除いた全領域にわたってサハ平衡が成立していることがわかる。以上より、前節(3-3節)

で構成された解析法の正当性が示され、さらに、これは従来の概念をも包含した適用範囲の広い解析法であることが確認された。

○ 3-4-2. 冷電極壁・低シード率に対する解

上で本解析法の妥当性が示されたので、次に本解析の主たる対象である比較的シード率の低い燃焼ガスの冷電極壁（陽極）まわりの層流境界層の解析を行ない、このような条件のもとで上述の状況がどのようにかわるかを詳細に調べることにする。計算条件としては、作動流体組成も含めて第2章の実験に対応する条件を用い、各計算結果のグラフ中には計算条件がいちいち示してある。壁表面温度の値としては、3-2-1節の後半で述べたように $T_w = 700\text{ K}$ と $T_w = 1200\text{ K}$ の2つの場合を考えたが、境界層内における物理量の分布としては、主として $T_w = 1200\text{ K}$ の場合について示す。 $T_w = 700\text{ K}$ の場合の結果は、 $T_w = 1200\text{ K}$ の場合とくらべて、壁表面近傍の電子密度の低い領域の厚さがかかなり増大するか定性的な状況は一致している。

図3-7, 図3-8, 図3-9はそれぞれ、電流密度が $J=20\text{ A/m}^2$, $J=100\text{ A/m}^2$, $J=1000\text{ A/m}^2$ の場合の境界層内における電子密度 n_e (実線), イオン密度 n_i (破線) および電子温度に対するサハ平衡電子密度 $n_{es}(T_e)$ (一点鎖線)を示したものである。この3つの場合の結果は、それぞれ冷電極近傍の3種類の特徴的な状況を示している。電流値が比較的小さい(小さいまては(3.3.23)に課した近似が成立しなくなるので $J \geq 10\text{ A/m}^2$) 場合の結果(図3-7)においては、壁近傍に電荷分離があらわれておらず全領域で電気的中性のプラズマ状態が実現している。しかしながら、このような電子密度の低い場においては、電子・イオンの再結合反応量は電子密度のほぼ3乗に比例する(3.3.31)ため反応は全く不十分で、大きな化学的非平衡が生じている。この場合、通電量が小さいことと壁のごく近傍の電子密度があまり下がっていないことのため、電子温度のガス温度に対する非平衡は現われていない。次に、電流密度が増加していくと、図3-8に示すように冷電極表面近傍に電子

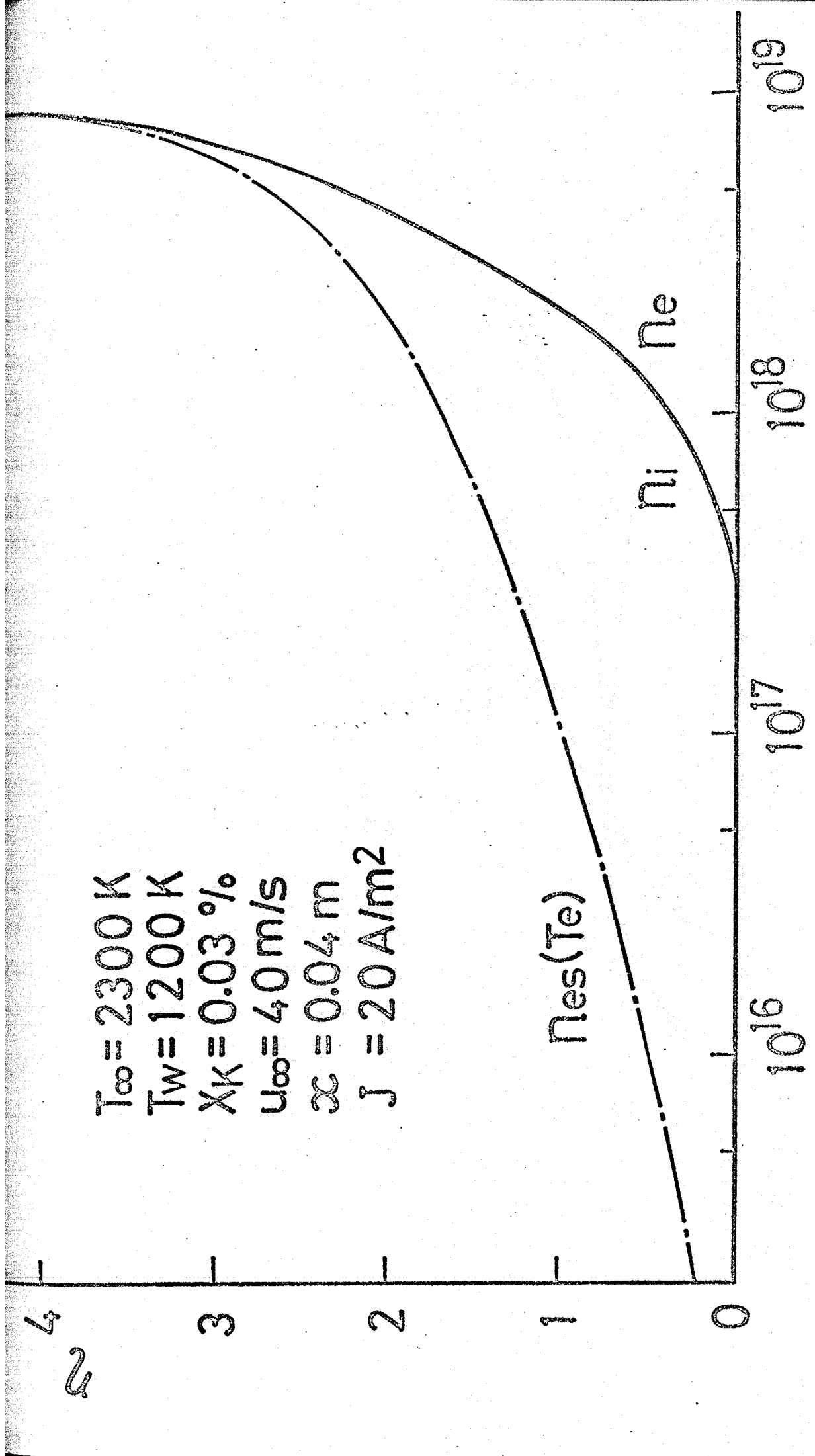


図 3-7 電子密度・イオン密度の分布 ($T = 20 \text{ A/m}^2$)

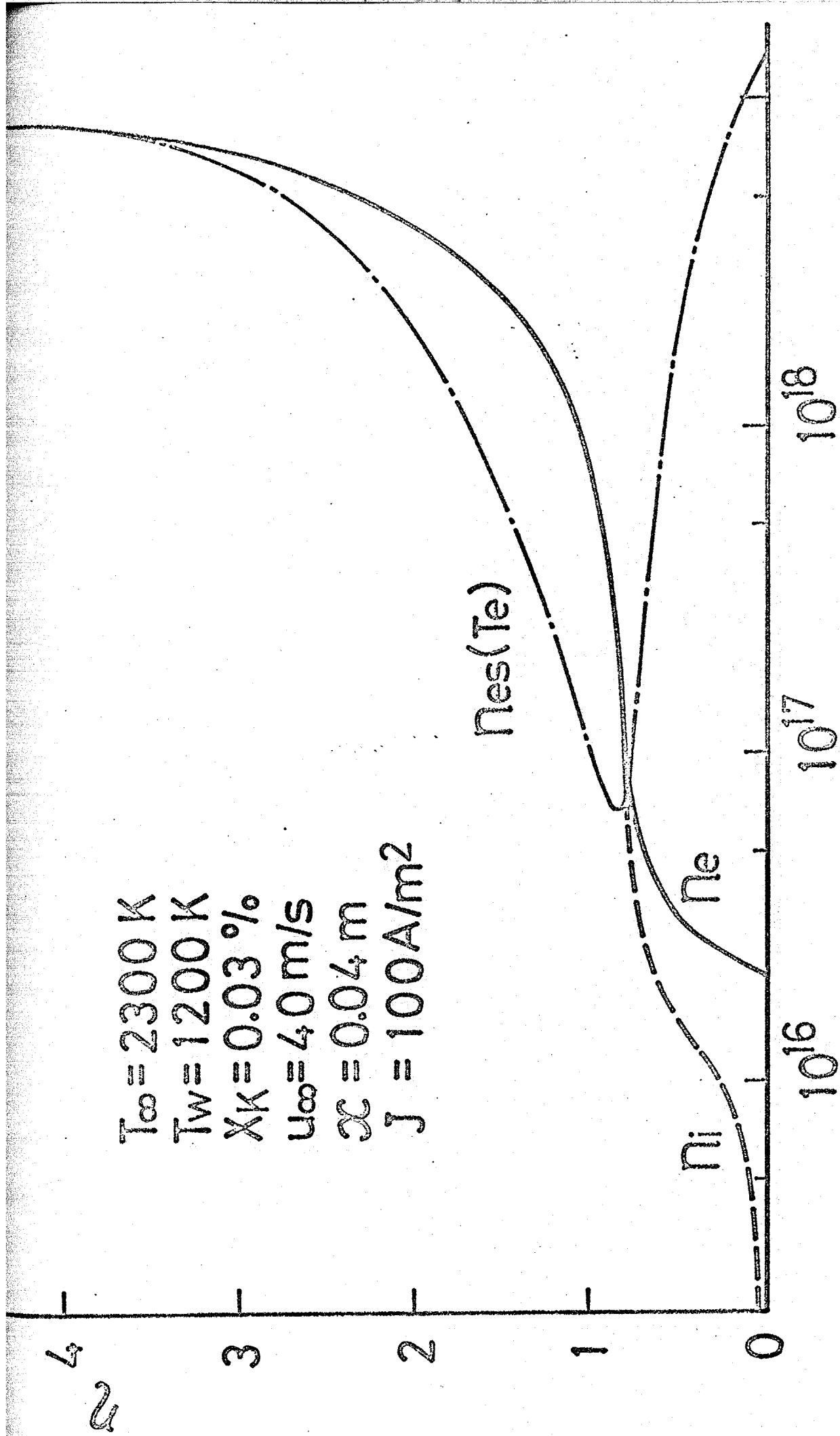
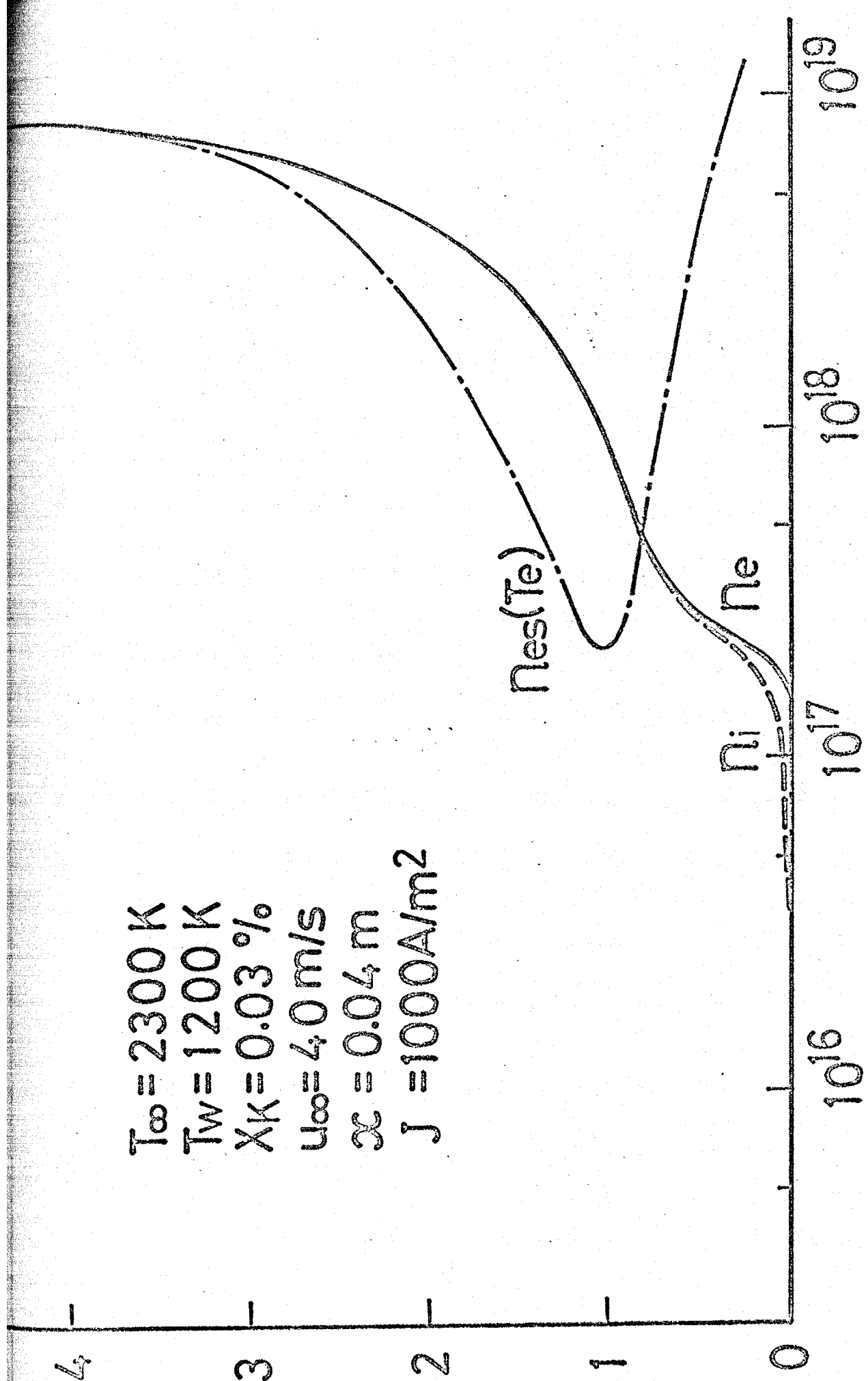


図 3-8 電子密度、イオン密度の分布 ($J=100 \text{ A/m}^2$)

$T_{\infty} = 2300 \text{ K}$
 $T_w = 1200 \text{ K}$
 $X_K = 0.03 \%$
 $u_{\infty} = 4.0 \text{ m/s}$
 $\alpha = 0.04 \text{ m}$
 $J = 1000 \text{ A/m}^2$



Number Density, n (m^{-3})

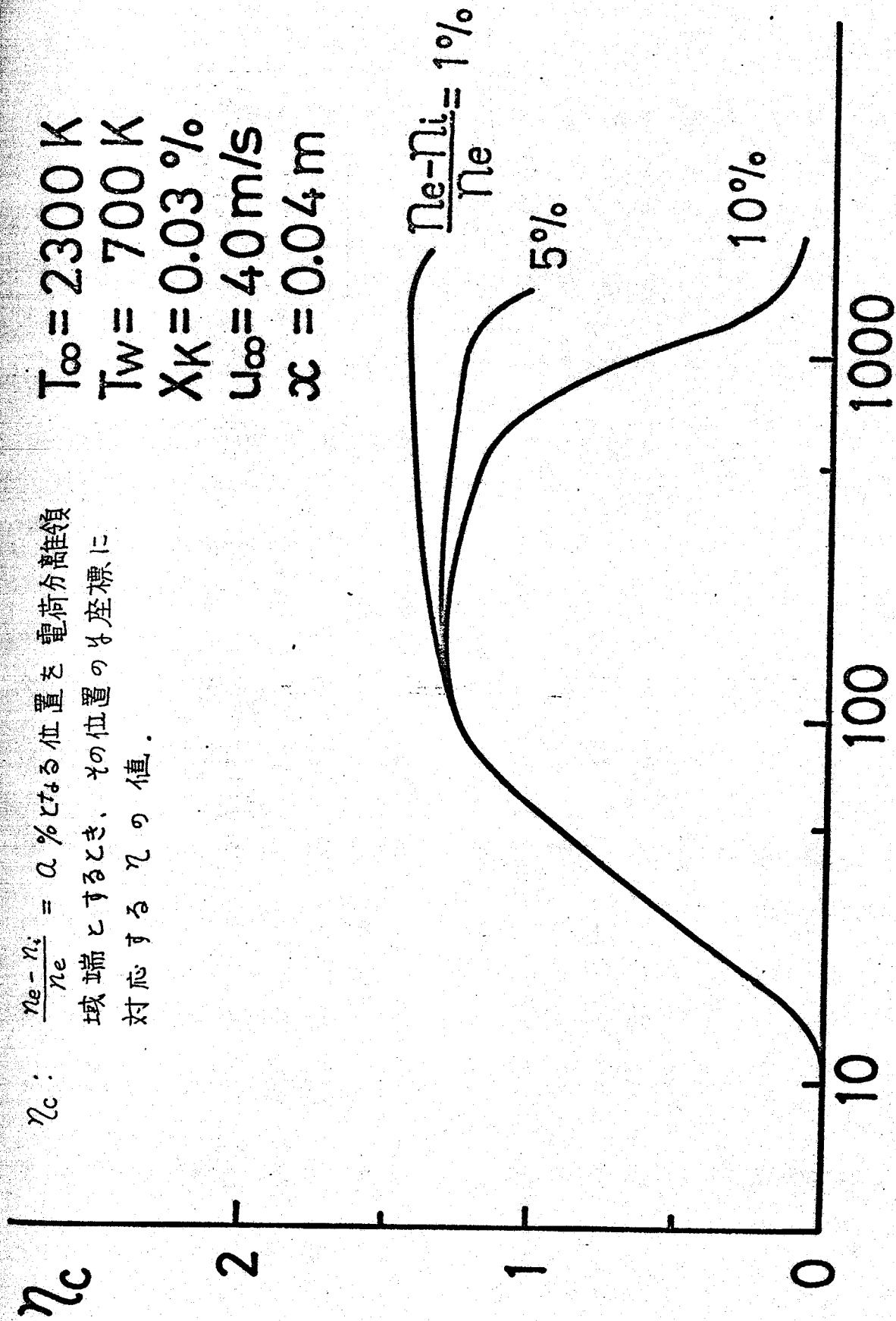
図 3-9 電子密度、イオン密度の分布 ($T=1000 \text{ A/m}^2$)

とイオンの大きな電荷分離領域が現われ、その広がりには、壁表面における電子密度と電子温度により、(3.4.1)で与えられるデバイ長さの範囲よりもはるかに大きいものとなる。このとき、壁近傍の電子密度の小さな領域内の電界はきわめて大きくなり(図3-13参照)電子が電界から得たエネルギーを、非弾性衝突によっても中性粒子に十分伝達しきれなくなり電子温度はガス温度よりも大きくなり(図3-12参照)。そのため、電子温度に対して計算されたサハ平衡電子密度 $n_{es}(T_e)$ はきわめて大きな値を示している。さらに電流密度が大きくなると図3-9に示すように、壁近傍の電子密度の絶対量の増加のため、量としては大きな電子とイオンの電荷分離がみかけ上、ちいさくなっていくことがわかる。電子温度に対するサハ平衡電子密度は、図3-8と同様、壁近傍で大きな値となっている。

電荷分離領域の広がりに関する上述の事情を、電荷分離の目安としての電荷分離割合 $\frac{n_e - n_i}{n_e}$ をパラメータとして整理してみると図3-10のようになる。

n_c : $\frac{n_e - n_i}{n_e} = a\%$ となる位置を電荷分離領域
 域端とするとき、その位置の n_c 座標に
 対応する n_c の値.

$T_\infty = 2300\text{ K}$
 $T_w = 700\text{ K}$
 $X_K = 0.03\%$
 $u_\infty = 40\text{ m/s}$
 $x = 0.04\text{ m}$



Current Density J [A/m^2]

図 3-10 電荷分離領域の広がり

すなわち、電流密度の小さい間は、電荷分離領域は巨視的には現われてこないが電流密度の増大に従ってバイ長さをはるかに越える広がりをもつようになる。しかし、さらに大きな電流密度に対しては、 $n_e - n_i$ の量としては大きな電荷分離が電子密度 n_e の増加のため、みかけ上は非常に小さくなっていくことかわかる。

図3-11は、電子保存式(3.3.20)に対して、本解析に特徴的な項の大きさの比較を図3-8の場合について示したものである。電荷分離を考慮に入れることによつて出てきた項($\nabla \cdot E$ を含む項)のうち②項と⑤項は實質的には他の項と比較して小さいが、③項は、従来の解析では境界層内で唯一卓越していると考えられていた「極性拡散項④」とくらべて、冷電極近傍の電界の強い場では大きくなり③項は電子保存式の中できわめて重要な役割を果たしていることかわかる。図中の③項と④項の交点は電流密度が小さくなると $\eta=0$ に近づき③項の寄与は消えていくが、電流

電子保存式 (3.3.20)

$$\underbrace{\rho u \cdot \nabla \gamma_e}_{①} + \underbrace{\frac{m_e E}{e} \nabla \cdot \{(\nabla \cdot E) u\}}_{②} + \underbrace{\nabla \cdot \left[\frac{\epsilon \mu_i m_e}{e} (\nabla \cdot E) E \right]}_{③} - \underbrace{\frac{\mu}{Sc_i} \left(1 + \frac{T_e}{T} \right) \nabla \gamma_e}_{④} - \underbrace{\frac{\mu}{Sc_i} \frac{\epsilon m_e}{e} \nabla \left(\frac{\nabla \cdot E}{\rho} \right)}_{⑤} =$$

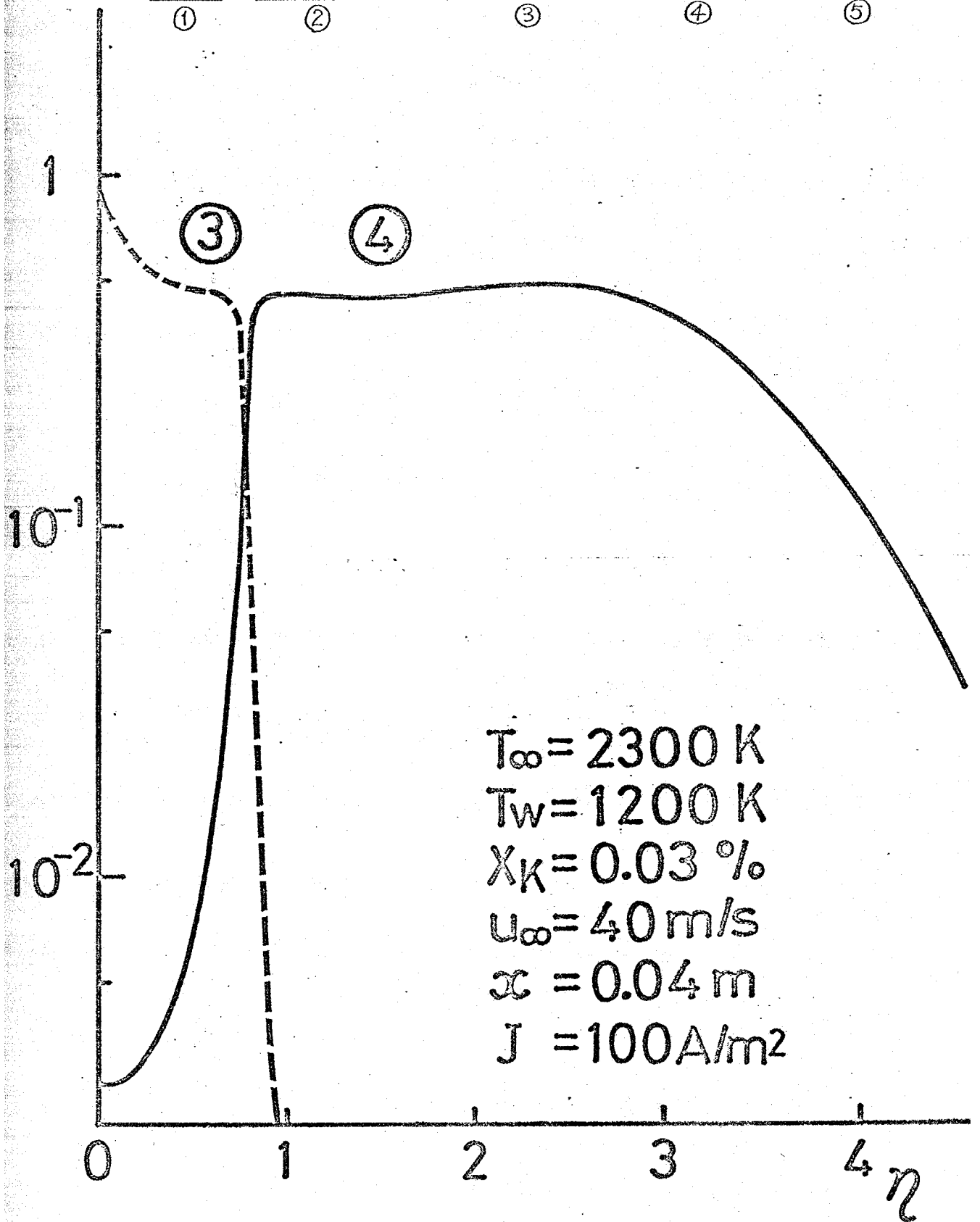


図3-11 項の比較

密度が大きい場合には、図3-9のようにみかけ上は電荷分離が消えていくにもかわらず、③項が卓越する領域は依然大きく残るのである。このように、シード率の比較的低い燃焼ガスの冷電極まわりの境界層解析に対しては、電荷分離を考慮に入れた三流体モデルを導入することの重要性が示された。

境界層内の電子温度の分布が図3-12に示されている。図3-8、図3-9等と比較してみるとわかるとおり、電極近傍の電子密度が低くなった領域では導電度が小さく電界がきわめて大きいので、燃焼ガス中においても、電子温度はガス温度よりかなり高められているようすがわかる。次に境界層内の電位分布を図3-13に示す。電極近傍での電位降下のほとんどは、境界層の中でも特に導電度の低い電極のごく近傍の領域で生じていることがわかる。この状況は、電流密度が大きくなるにつれて壁近傍の導電度が上昇していくために、電位降下の範囲がしだいに境界層内に広がるようになっていく。次に、電界の境界層内

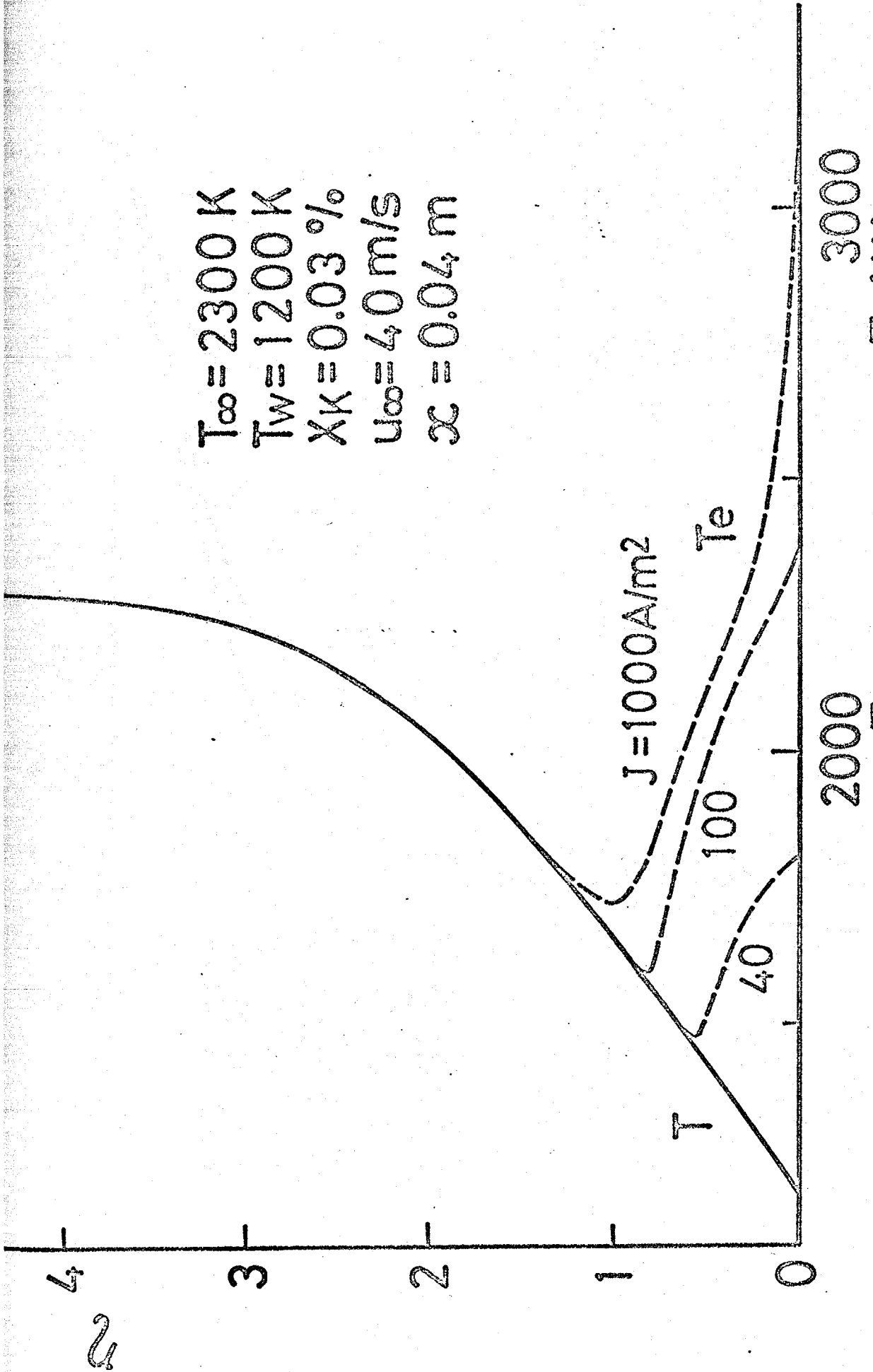


図3-12 電子温度の分布

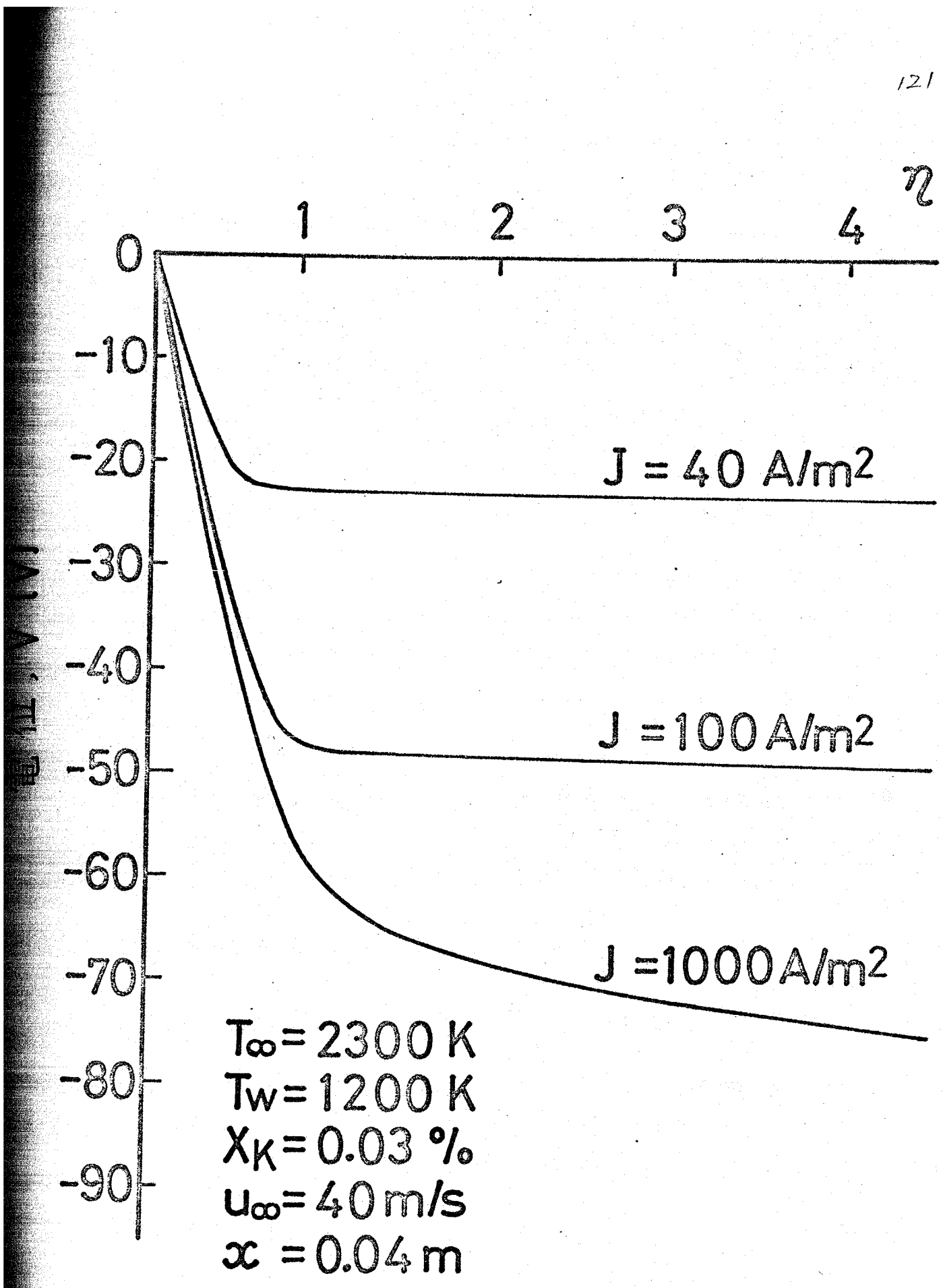


図3-13 電位の分布

分布を図3-14に示す。電界は、電子密度が低く導電度の低い壁近傍領域において非常に大きな値となっている。また、電流密度の増加につれて、境界層内の全域にわたって電界は増加していくが壁表面における電界はほぼ 10^5 V/m の程度の大きさで押さえられているようすがわかる。これは電流密度が増大すると壁近傍に生ずる大きな電界のために図3-12に示すように電子温度が高くなり、それに伴いサハ平衡電子密度が高くなり、その結果、壁近傍の電子密度すなわち $(n_e > 0)$ 導電度が高くなり、これが通電量の増加による電界の上昇を押さえようとするからである。

この事情をもっと明白にするために、電極表面における電子密度 n_{ew} と電界 E_w との関係を電流密度をパラメータにして図3-15に示す。電流密度が小さいうちは図3-7のように電気的中性が保たれているので、電流密度の増加に伴い電界が増大し、そのとき壁表面でイオン流束が零となるような条件を満たすような濃度勾配をもとうとしてイオン密度すなわち電子

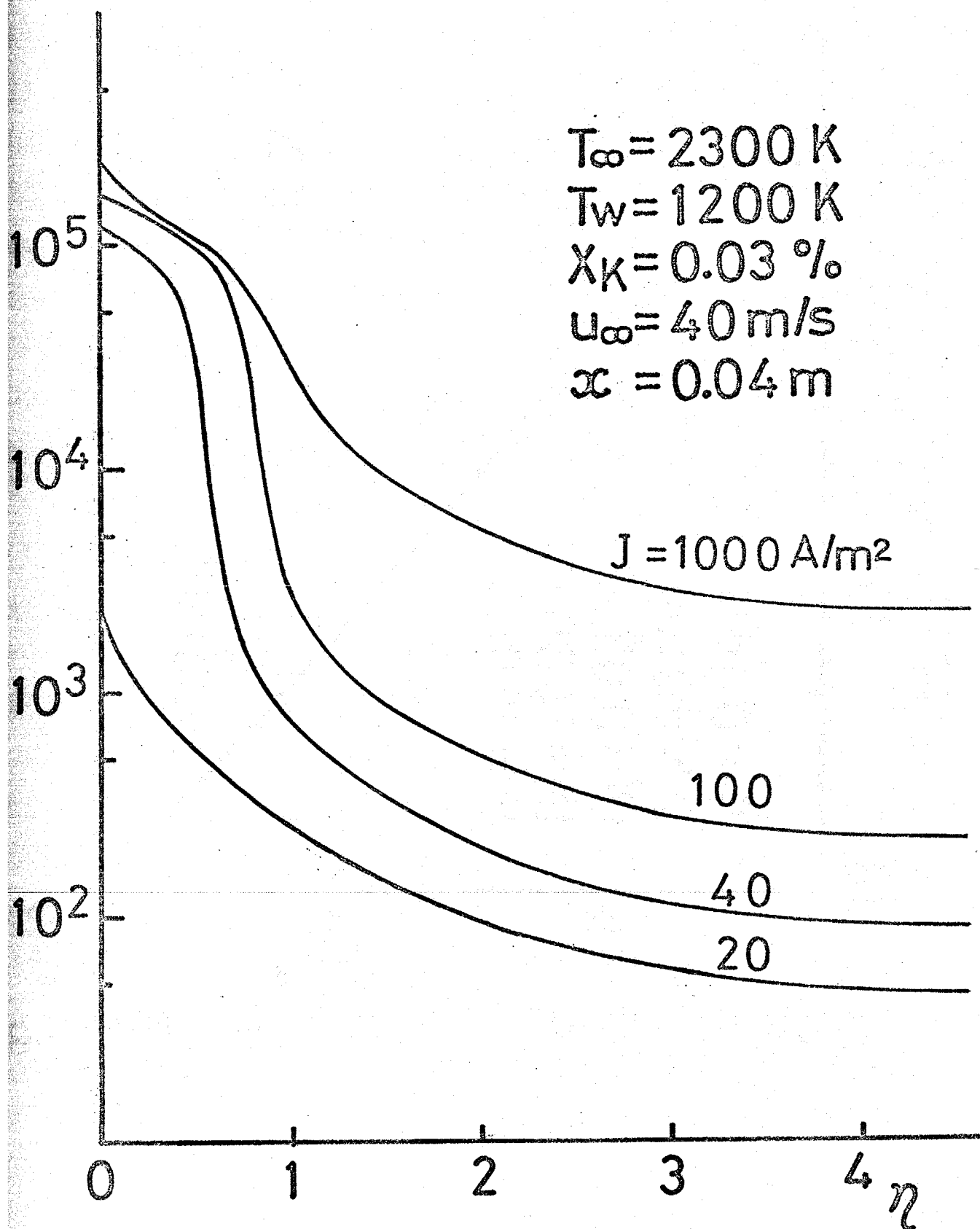


図3-14 電界の分布

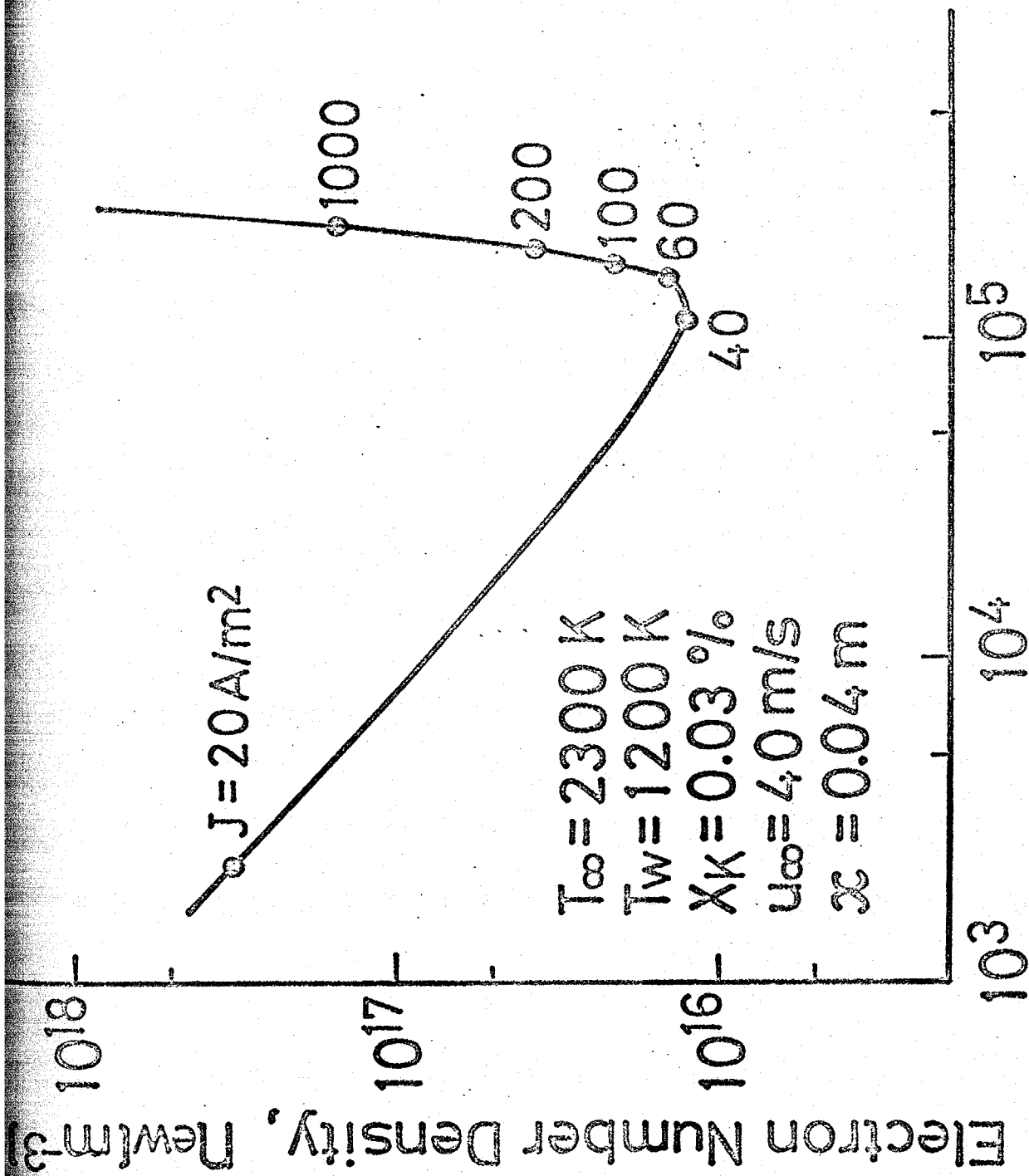


図 2-15 電極表面における電子密度と電界の関係

密度も下がる。電流密度がさらに大きくなって、電荷分離によってイオン密度より電子密度だけ高くなることができるようになる(図3-8, 図3-9)。これにより電界の増加は押さえられ、電流の増加は電子密度の増加によって実現されるようになる。この場合の壁表面での電界はおおよそ 10^5 V/m のオーダーであり、この値については計算条件の違いにあまりよらないものと考えられる。

3-5. 実験との比較検討

本節では、上述の解析によって求められた計算結果より定まる通電特性及び伝熱特性について、第2章で示された実験結果との比較検討を行ない、解析モデルの妥当性や境界層内の物理現象などについての考察を行なう。

○ 3-5-1. 通電特性

陽極における通電特性すなわち陽極降下量と電流密度の関係は、電子密度の境界層内分布の計算結果

から次のように算出される。電界 E は電位 V を用いて

$$E = -\nabla V \quad (3.5.1)$$

とかけるから、 y 成分について (3.3.24) を考えることにより、陽極降下量 δV_a は

$$\delta V_a = \left| \int_0^{\delta} \left(-\frac{J}{en_e \mu_e} \right) dy \right| = \left| \int_0^{z_s} \left(-\frac{J}{en_e \mu_e} \right) \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\rho u_{\infty}} dz \right| \quad (3.5.2)$$

となる。これより、電流密度が与えられたとき、電極降下量は電子密度の境界層内分布に依存することわかり、電極降下量と電流密度の関係は総体的ではあるが、実験結果との比較による検討の手がかりになるものである。

陽極降下と電流密度の関係についての実験結果と計算結果の比較を図3-16に示す。図中の実験値は、局所相似解析における $x=0.04\text{ m}$ と対応する測定部中央の分割電極に対する印加電圧と電流密度に関するデータを図2-12を用いて、陽極降下と電流密度の関係に換算しなおしたものである。図中に Arc Discharge と記入されている領域では、電極面にきわめて小さい微細アークが発生しており、原則的には、理論と実

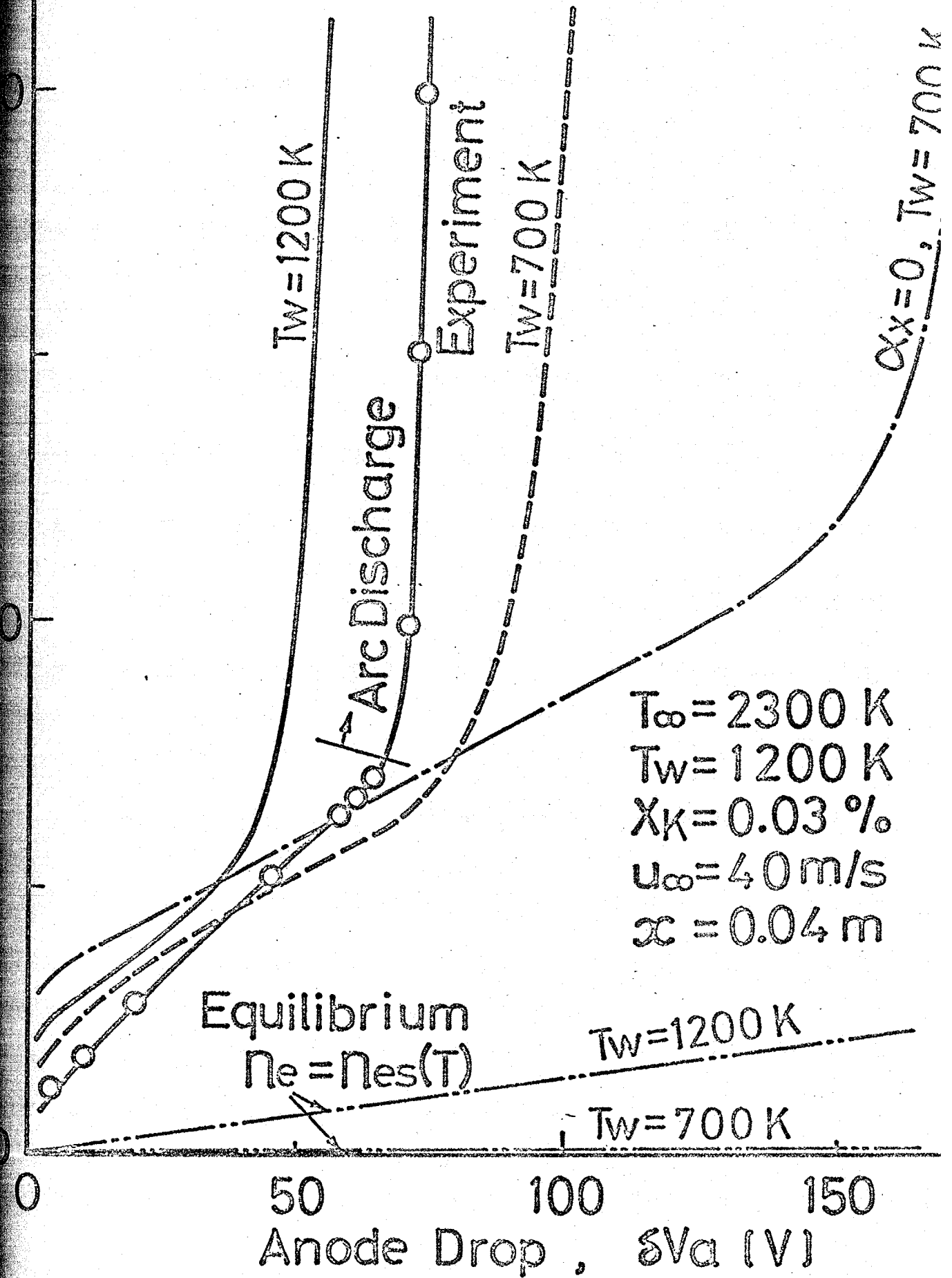


図3-16. 通電特性 (実験と理論の比較)

験の比較は電流密度の小さな均一放電領域で行なうべきものであるが、この程度の小さな電流密度における微細アーチは、境界層をうち抜くほどのものではなく、壁のごく近傍にまわめて小さな輝点が生ずる程度のものであるから、一応比較の参考にすることはできるであろう。図中の実線と破線が本章の解析法を用いた計算結果であり、実験の結果と比較的良好く一致しており本解析モデルが妥当なものであることがわかる。また二点鎖線は、電子温度がガス温度に対するサハ平衡値で与えられると仮定して計算された結果であり、実験値からはほど遠く、燃焼ガスに対するこのような従来の概念は冷電極まわりにおいては全く成り立たないものであることが明らかとなった。また $T_w = 1200\text{K}$ (実線) と $T_w = 700\text{K}$ (破線) の場合の計算結果と実験値との比較から、電極面上に凝縮したシード酸化物層が存在したとしても部分的なものであろうことが推察される。さらに、重い粒子 X を第三体とした反応を考慮に入れない ((3.3.3)) で $\alpha_x = 0$)

ときの計算結果も図中に示してあり、(3.3.36)で導かれた α_x の値そのものに対する不確かさは依然存在はするけれども、そのような反応を考慮に入れることによつて解析結果が大いに改善されている。従つて α_x の値を明らかにすることも、今後の冷電極まわりの解析において一つの重要な点であることが示唆された。

○ 3-5-2 伝熱特性

伝熱特性すなわち電流密度と通電による増加伝熱量の関係は、次のように算出される。シードされた燃焼ガスの冷電極(陽極)まわりの境界層内に通電がある場合、通電がなく非活性な高温ガスからの伝熱量に加えて考慮すべき主な伝熱量増加機構としては、次のようなものがあげられる。

- (1) 通電による境界層内、特に導電度の低い壁近傍におけるジュール加熱によりガス温度分布がかわり、表面におけるガス温度勾配がかわり伝熱量が増加する。

- (2) 陽極表面近傍の大きな電界によって加速された電子が表面に衝突して吸収されるとき放出される運動エネルギーによる伝熱量の増加
- (3) 陽極表面に到達した電子が電極内に入るとき仕事関数分のエネルギーを放出することによる伝熱量の増加
- (4) 電子・イオンの電離・再結合反応に伴うエネルギー吸収あるいは放出による伝熱量の変化

以上のような伝熱量増加機構が考えられるか。今実験との比較を行なう程度の小さな電流密度 ($J < 300 \text{ A/cm}^2$) に対しては、簡単な計算により (2), (3), (4) の効果は (1) の効果に対して十分小さく無視することかできるとが確かめられる。(1) の効果による増加伝熱量は次のように求められる。このような小さな電流密度の場合、通電のジュール加熱によるガス温度の上昇分は通電のない場合のガス温度にくらべて数%程度とまわめて小さい。従って、計算の精度を上げるためガス温度を $T = T_0 (J=0) + \Delta T$ とおいて、

(3.3.50) より分離された $\Delta\theta = \frac{\Delta T}{T_w - T_w}$ に関する方程式

$$\frac{1}{Pr} \Delta\theta'' + f \Delta\theta' = -H \quad (\eta=0, \infty \text{ で } \Delta\theta=0) \quad (3.5.3)$$

(Hは(3.44)参照)

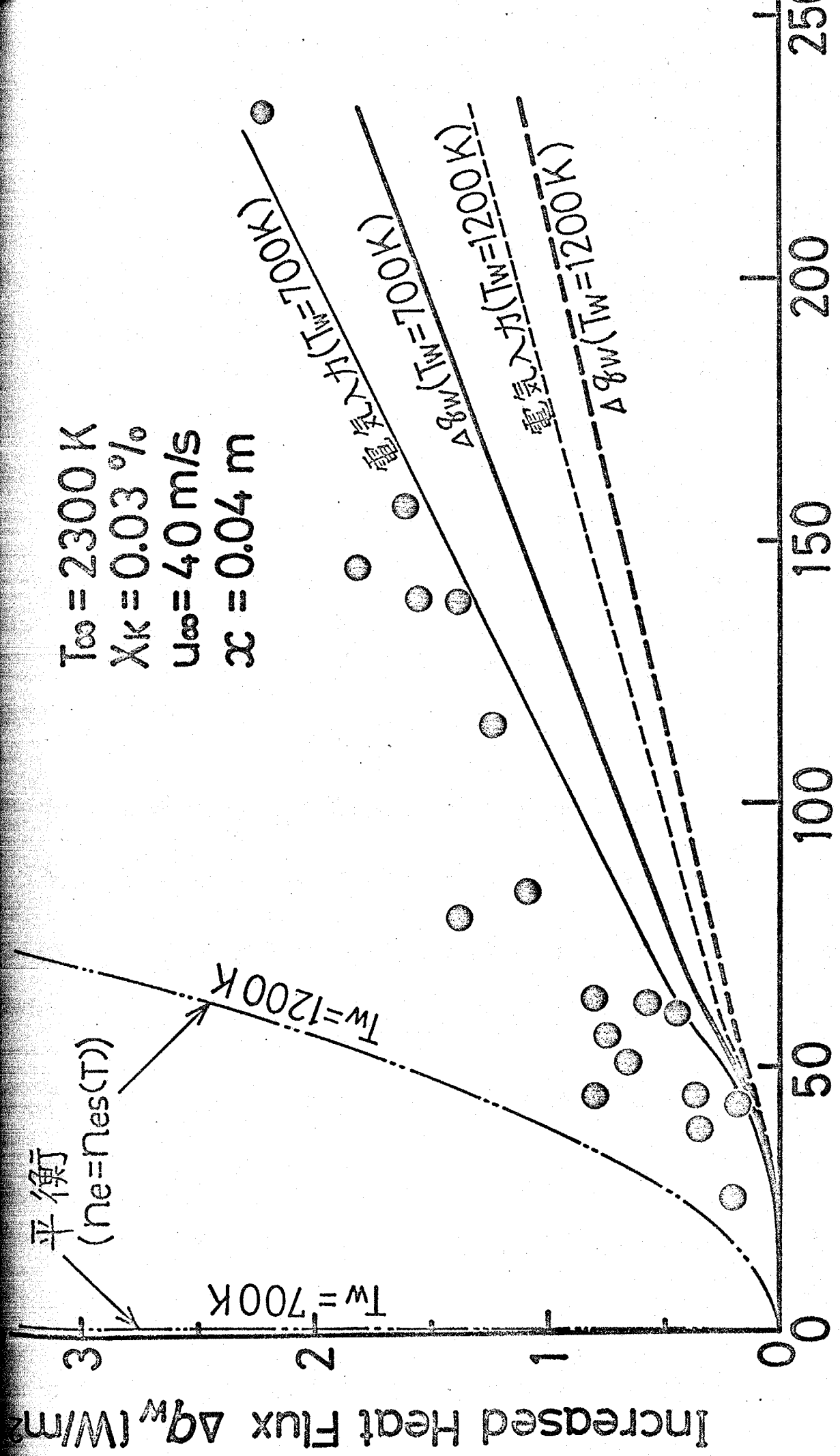
を解いた結果を用いて (1) の機構による増加伝熱量 Δq_w を次式により求めた。

$$\Delta q_w = \left[\lambda \frac{\partial(\Delta T)}{\partial y} \right]_w = \left[\frac{(\rho\mu)_{\infty} C_p (T_{\infty} - T_w)}{Pr} \frac{U_{\infty}}{\sqrt{2\xi}} \left(\frac{\partial \Delta\theta}{\partial \eta} \right) \right]_w \quad (3.5.4)$$

燃焼ガスの定圧比熱 C_p は、伝熱工学資料^[3-25]によった。

ガス温度の上昇をおこすジュール加熱量は $J_E = \frac{J^2}{e N_e \mu_e}$ であり電流密度分布に大きく依存するので、電流密度と増加伝熱量の関係により、総体的ではあるが、境界層内電子密度分布の状況を検討することかできる。

図3-17に電流密度と増加伝熱量の関係についての実験結果と計算結果の比較を示す。図中の実験値(黒丸)は、局所相似解析における $x=0.04 \text{ m}$ と対応する測定部中央の電極に対する結果(図2-13のNo.2電極)である。本章の解析法による計算結果から求めた増加伝熱量 Δq_w は太い実線 ($T_w=700 \text{ K}$) および太い破線 ($T_w=1200 \text{ K}$) で示してあり、さらに、電子密度をガス温



$T_{\infty} = 2300\text{K}$
 $X_K = 0.03\%$
 $U_{\infty} = 4.0\text{m/s}$
 $x = 0.04\text{m}$

図3-17 伝熱特性(実験と理論の比較)

度に対するサハ平衡値で与えられる ($n_e = n_{es}(T)$) と仮定して算出された増加伝熱量が二点鎖線で示してある。平衡の場合の結果が、小さな電流密度でもきわめて大きな増加伝熱量となるのは、冷壁近傍のガス温度が低い領域での平衡電子密度がきわめて低くなるためである。実験値は、このように化学的にも熱的にも平衡が仮定された場合の結果とはほぼ遠く、そのような燃焼ガスに対する従来の概念は成立していない事が、通電特性の場合と同様に明らかにされた。実験値は、本解析結果から算出された増加伝熱量とくらべると傾向は非常に良く一致してはいるが、値としては相当大きい値を示している。このことについては、上述のように他の伝熱量増加機構で説明できないので、高温ガスから平板冷壁への伝熱量の精度のよい測定自体が一般に難しい状況で、その数%の増加量を測定する実験としては、今のところ測定精度上の制約によるものと考えている。図中にはまた、通電特性(図3-16)の解析結果より算出された、

ジュール加熱によりガス温度を上昇させるのに加えられた電気入力があわせて示されている。電気入力の約8割が壁への伝熱量の増加につながっているが、これは、ジュール加熱によるガス温度上昇が、境界層の中でも特に導電度の低い冷壁近傍において生ずるからである。

3-6. 乱流境界層の計算結果と検討

以上の解析においては、シードされた燃焼ガスの冷電極まわりの境界層内に特徴的な現象を理論的及び実験的に、基礎的に解明するために平板層流境界層を考えてきたが、実際のMHD発電機ダクト内の電極まわりの流れは、起電力を大きくするために流速が大きく、電極の寸法も大きいので、レイノルズ数が先述の解析場とくらべてずっと大きく、すべて乱流であると考えられる。従って、本節では、平板層流境界層の解析によってこれまで明らかにされてきた冷電極まわりに特徴的な物理的状況が、磁場が存在

しないこと以外のあらゆる計算条件を現実の MHD 発電機内の条件に近くした場合に、どのように変わってくるかを、層流場における新しい三流体モデルによる解析法を拡張して、乱流場に対する解析を行ない検討を加える。本節の乱流境界層計算例において採用された特徴的な計算条件の主なものは、ガス流速が大きい、前縁からの距離が大きい、シード率が大きい、および電流密度が大きいということがあげられる。

3-6-1 仮定および計算方法

乱流境界層の計算にあたり、計算の目的をそのかわないように、次のような仮定および簡単化を行なう。

- (1) 密度 ρ ，ガス粘性係数 μ ，電子およびイオンの移動度 μ_e, μ_i は一定とする。
- (2) ガス流速および通電によるジュール加熱のない時のガス温度分布は $\frac{1}{7}$ 乗則、すなわち、

$$\frac{u}{u_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}, \quad \frac{T_0 - T_w}{T_\infty - T_w} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \quad (3.6.1)$$

で与えられる。通電のある時のガス温度分布は、
 $T = T_0 (J=0) + \Delta T$ の温度上昇 ΔT に関する方程式をくり返し解くことにより定め、また、電流密度が大きい場合を考えるので、主流におけるガス温度上昇 ΔT_0 も考慮に入れる。ここで、 δ は乱流境界層厚さで、平板前縁からの距離を x として

$$\delta = 0.371 x \text{Re}_x^{-1/5} \quad \left(\text{Re}_x = \frac{u_0 x}{\nu} \right) \quad (3.6.2)$$

で与えられる。

(3) 乱流プラントル数 Pr_t , 乱流イオンシユエミット数 Sc_it を 1 とする。

(4) 空間電荷の拡散項 すなわち (3.3.20) の大括弧内の第 3 項に相当する項の寄与、および、電子生成量を与える式 (3.3.31) における電子とイオンの電荷分離の寄与、は、層流計算の結果において十分小さいことが確認されているので省略する。

(5) うず動粘性係数 ϵ_t は次のように与える。レイノルズ応力に対する交換係数モデルと混合距離モデルを考えるとにより、次の関係が成立する。

$$\varepsilon_T = l^2 \frac{dU}{dy} \quad (l: \text{混合距離}) \quad (3.6.3)$$

簡単のため Klebanoff^[3-26] の測定結果にほぼ合うように、混合距離を次のように近似する。

$$\frac{l}{\delta} = K \left(\frac{y}{\delta} \right) \quad \left(\frac{y}{\delta} \leq 0.2 \right) \\ (K=0.40) \quad (3.6.4)$$

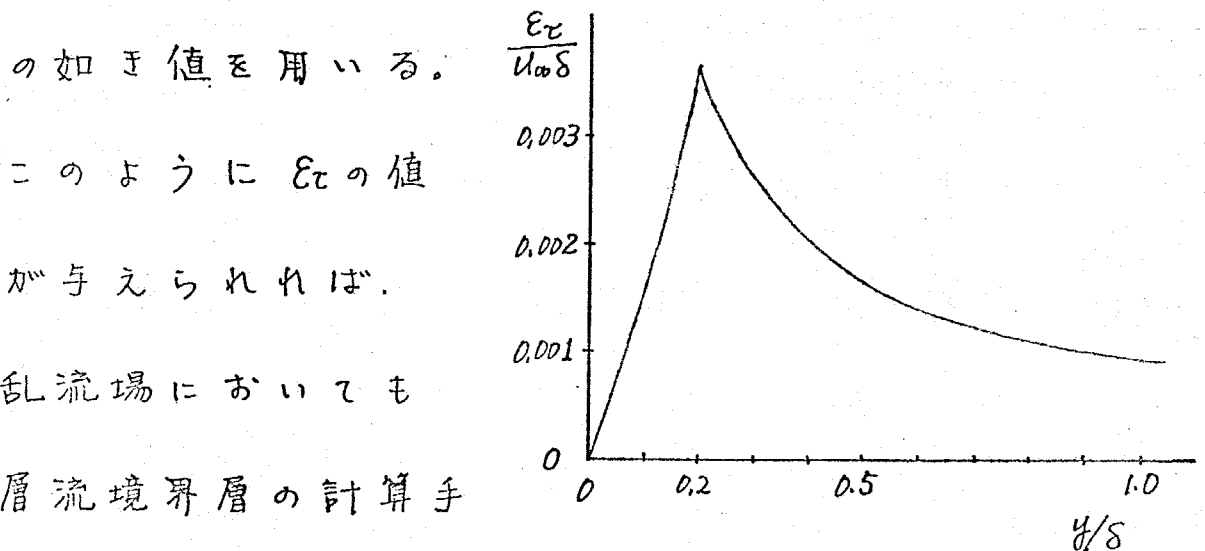
$$\frac{l}{\delta} = \text{const} (=0.08) \quad \left(\frac{y}{\delta} > 0.2 \right)$$

このとき (3.6.1) の速度分布を考えることにより、

ε_T は (3.6.3) から次のように表わされる。

$$\frac{\varepsilon_T}{U_{\infty} \delta} = 0.0229 \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{8}{7}} \quad \left(\frac{y}{\delta} \leq 0.2 \right) \\ \frac{\varepsilon_T}{U_{\infty} \delta} = 0.000914 \left(\frac{y}{\delta} \right)^{-\frac{6}{7}} \quad \left(\frac{y}{\delta} > 0.2 \right) \quad (3.6.5)$$

すなわち ε_T の境界層内分布としては、次の図 3-18



このように ε_T の値

が与えられれば、

乱流場においても

層流境界層の計算手

法と同じ方法で計算

を行なうことができる。

図3-18. 渦動粘性係数

(6) 単に計算上の便宜のため、(3.6.2) より乱流境界層厚

さるが $x^{\frac{4}{5}}$ に比例して大きくなっていくことを考慮して、次のような ξ_t, η_t なる座標系

$$\xi_t = x, \quad \eta_t = y/\delta = Cx^{-\frac{4}{5}}y \quad (3.6.7)$$

を考え、 $\frac{\partial}{\partial \xi_t} = 0$ とおいた計算を行なう。

以上の仮定のもとで層流場の (3.3.51) (3.3.52) に対応する電子保存式および電子エネルギー式は、多くの計算を経て結局次のようになる。

$$A_0 \left[A_1 \frac{\zeta'}{\zeta^3} + A_2 \left(1 + \frac{\theta_e}{\theta} \right) \zeta' + A_{2t} \zeta' \right] + f \zeta' = -F_t \quad (3.6.8)$$

$$G \frac{1}{\zeta^2} = \frac{\sqrt{\theta_e}}{\theta} (\theta_e - \theta) \quad (3.6.9)$$

($P = \text{const.}$ を仮定しているので $\zeta = \frac{n_e}{n_{e0}}$ であり、 θ のべきに違いがある。) ここで、 $f = \frac{u}{u_\infty}$ であり、また、 $'$ は $\eta_t = y/\delta$ に関する微分を表わしている。 A_1, A_2 および G は、(3.3.4) で ρ, μ を一定とした場合に対応し、

$$A_1 = \frac{\epsilon \mu_i J^2}{e^3 \mu_e^2 n_{e0}^3} \cdot \frac{1}{\nu}, \quad A_2 = \frac{1}{Sc_i} \quad (3.6.10)$$

であり、また他の係数は、

$$A_{2t} = \frac{1}{Sc_{it}} \left(\frac{\epsilon_\tau}{\nu} \right) = \frac{\epsilon_\tau}{\nu}, \quad A_0 = 9.082 Re_x^{-\frac{3}{5}} \quad (3.6.11)$$

$$F_t = \frac{5}{4} \xi \dot{n}_e \quad (3.6.11)$$

である。境界条件は (3.3.46) (3.3.47) に対応して次のようになる。

$$\eta \rightarrow \infty \text{ で } \zeta = 1 \quad (3.6.12)$$

$$\eta = 0 \text{ で } A_1 \frac{\zeta'}{\zeta^3} + A_2 \left(1 + \frac{\theta_e}{\theta}\right) \zeta' = \Sigma_t \quad (3.6.13)$$

$$\text{ここで } \Sigma_t = 3.369 \operatorname{Re}_x^{\frac{1}{5}} \frac{\mu_i J}{e \mu_e N_{\infty} U_{\infty}}$$

(3.6.8) と (3.6.9) を連立させて解くには、層流境界層の場合と全く同じ手法によればよい。

実際の計算は仮定(2)でも述べたように、ジュール加熱によるガス温度上昇分を、ガスのエネルギー式

$$u \frac{\partial(\Delta T)}{\partial x} + v \frac{\partial(\Delta T)}{\partial y} = \frac{1}{\rho_r} (\nu + \epsilon_r) \frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial y^2} + \frac{J \cdot E}{\rho G} \quad (3.6.14)$$

($\eta = 0$ で $\Delta T = 0$, $\eta \rightarrow \infty$ で $\Delta T = \Delta T_{\infty}$)

を用いてくり返し補正を行ない、ガス温度場と電気場とのカップリングをほかった。

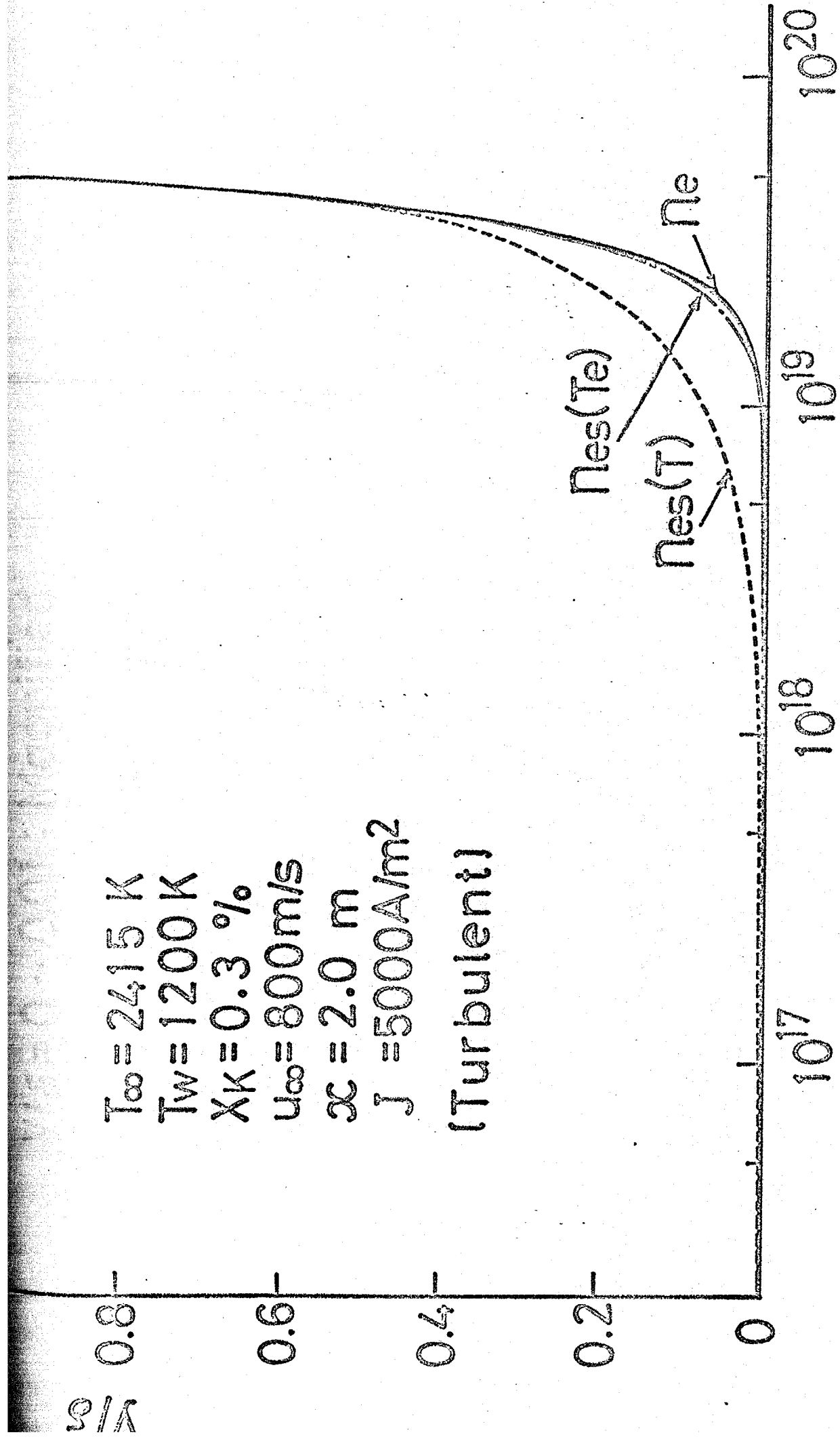
3-6-2 計算結果と検討

実際の開放型 MHD 発電機の条件に近い計算条件を用いた。乱流境界層に対する代表的な計算結果として

$$T_{\infty} = 2415 \text{ K}, T_w = 1200 \text{ K}, X_k = 0.3\%, U_{\infty} = 800 \text{ m/s}$$

$x = 2.0 \text{ m}$, $J = 5000 \text{ A/m}^2$ の場合の結果を 図 3-19、図 3-20 に示す。図 3-20 は 図 3-19 の壁近傍を 100 倍に拡大し

た図である。主流温度 $T_{\infty} = 2415 \text{ K}$ の値は、平板前縁におけるガス温度 $T_{\infty} (x=0 \text{ m}) = 2300 \text{ K}$ が、 $J = 5000 \text{ A/m}^2$ の大きな通電によるジュール加熱のために、 $x = 2 \text{ m}$ のところまでに上昇してきた結果である。図3-19、図3-20によれば、この場合実際の境界層厚さも厚くなっており、しかも壁表面温度も低いのににもかかわらず、このような相当大的な電流密度に対しても、壁表面の電荷分離領域の厚さは、表面からデバイ長さの数倍程度に押さえられており、また、壁表面の薄い領域を除いては、電子密度もほとんど電子温度に対するサハ平衡値に一致している。(4/8 ~ 0.1 では、図3-18より拡散が大きく、わずかに平衡値より高くなっている。) このような結果が得られたのは、実際のMHD発電機ダクト内の条件に近づけるため、シード率を先の層流に対する解析とくらべて高くとってあることとも関連するが、電子密度の分布に大きな影響を及ぼすガス温度の分布が、乱流の場合、たとえ壁表面温度が低くとも、ガス温度が低くなるのは壁のこ



$T_{\infty} = 2415 \text{ K}$
 $T_w = 1200 \text{ K}$
 $XK = 0.3 \%$
 $u_{\infty} = 800 \text{ m/s}$
 $x = 2.0 \text{ m}$
 $J = 5000 \text{ A/m}^2$

(Turbulent)

Number Density, $n \text{ (m}^{-3}\text{)}$

$y/\delta = 0 \sim 0.01$: Magnified

$T_{\infty} = 2415 \text{ K}$

$T_w = 1200 \text{ K}$

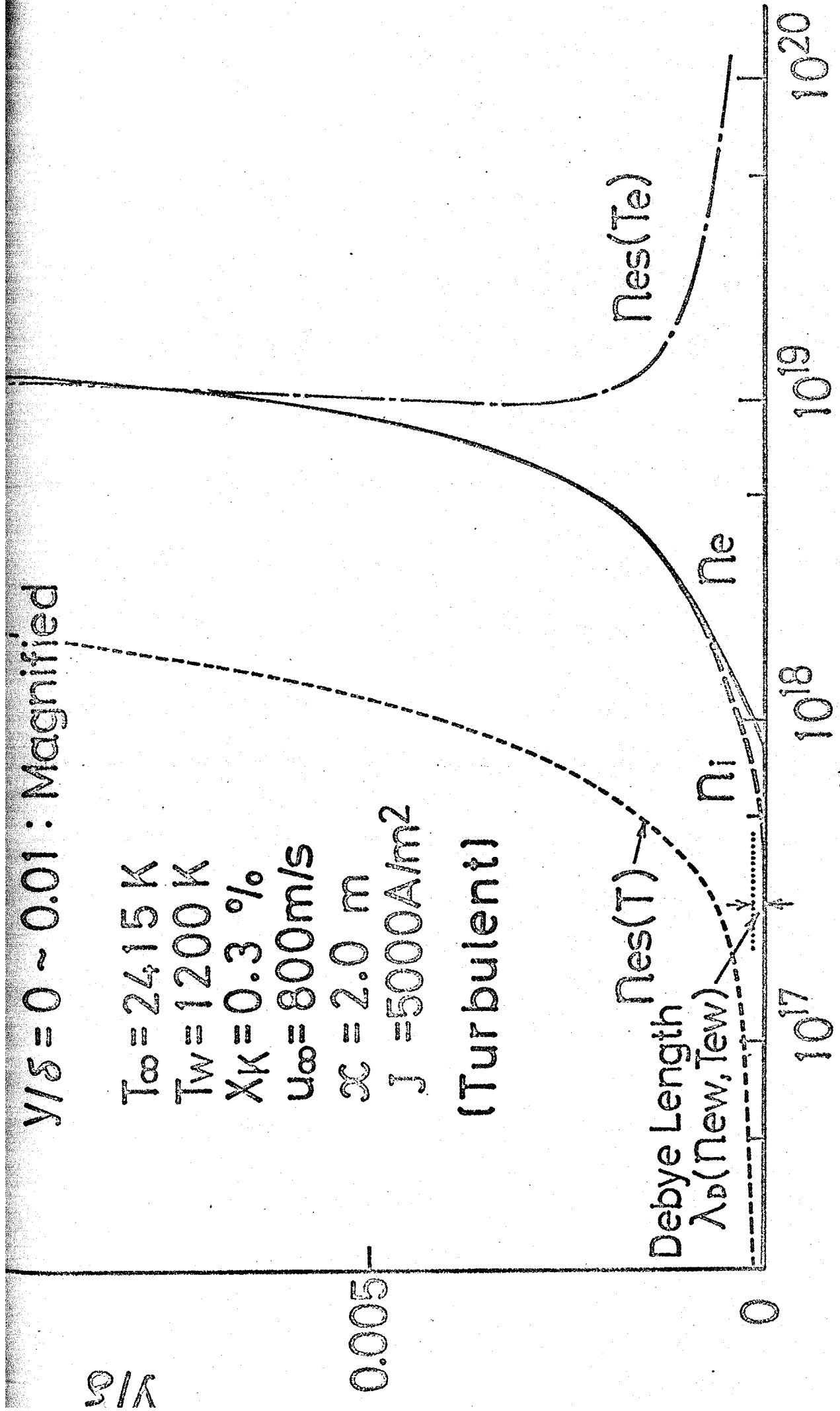
$X_K = 0.3 \%$

$u_{\infty} = 800 \text{ m/s}$

$x = 2.0 \text{ m}$

$J = 5000 \text{ A/m}^2$

(Turbulent)



Number Density, $n \text{ (m}^{-3}\text{)}$

く近傍に限られ、境界層内のほとんどの範囲にわたって主流部に近い高いガス温度（すなわち高い電子密度）となっていることが最大の理由であろう。これにより、境界層内の物理現象に対する電極温度が低いということの効果は、乱流の場合は、層流の場合ほどは大きくはないことがわかる。

以上のように、冷電極まわりの境界層内の物理量の分布に関しては、流れが層流であるか乱流であるかとか、あるいは、シード率や電流密度などの条件により、電荷分荷、あるいは電子の熱的ならびに化学的非平衡性の状況が大きく異なるので、実際にはそれぞれの具体的な解析場に合わせて、計算を実行する必要がある。

3-7. 結 論

シードされた燃焼ガスの冷電極（平板陽極）まわりの境界層を、電子とイオンの電荷分離、電子の熱的および化学的非平衡を考慮に入れた、壁面上のシ

— ス仮定のなりの三流体モデルにより解析し、また、通電特性と伝熱特性について実験結果と比較検討することにより、以下の結論を得た。

まず、層流境界層については、

(1) 電極表面温度が高くシード率も十分大きい場合には、境界層内全域にわたって電子密度が大きいので、壁の近傍のきわめて薄い（デバイ長さのオーダー）領域を除いては、電気的中性はもちろん、電子温度のガス温度に対する熱的平衡および電子密度のカハ平衡が達成されており、燃焼ガスに対する従来の概念は正しく成立している。

(2) 電極表面温度が低い冷電極の場合は、冷電極近傍の電子密度がきわめて小さくなり、そこに大きな通電があるとき、きわめて大きな電界が生じ、電子とイオンの電荷分離がデバイ長さよりもずっと大きな範囲に生ずる。このとき、燃焼ガス中においても電子温度はガス温度よりも高くなり、また反応が不十分となるため、電子密度は電子温度に

対するサハ平衡値からも大きくずれる。この解析結果より算出された通電特性と伝熱特性は、実験の結果とよく一致した。この場合、燃焼ガスに対しては一般に電気的中性および電子密度のガス温度に対するサハ平衡が成立するという従来の概念は全く実現されていないことが、実験との比較で確認された。

(3) 壁表面上における電子密度と電界の関係は、電流密度が小さいうちは、電流密度の増加とともに電界が上昇し電子密度は下がるが、電流密度が大きくなると、電流密度の増加とともに、壁近傍での電離により電子密度が増加し、そのため壁での電界はほぼ 10^5 V/m のオーダーにおさえられるようになる。

乱流境界層については、

(4) 実際の MHD 発電機ダクト内の状況に近い条件に対して行なわれた冷電極まわりの乱流境界層解析により、相当大きな電流密度に対しても、電荷分離

や電子の化学的（電離）非平衡性については、乱流の場合は層流の場合ほど顕著にはあらわれないが、通電量が大きいときは、ジュール発熱によるガス温度の上昇および、電子温度のガス温度^{から}の_{上昇}は、燃焼ガス中でもやはり大きく存在する。

第4章 放電の不安定に関する理論解析

シードされた燃焼ガスの導電度の温度に対する依存性はきわめて大きく、通電を伴うときの冷電極近傍では、第3章に述べたようにもこのガス温度に対するサハ平衡電子密度より定まる平衡導電度よりはかなり高められてはいるものの、冷電極表面近傍には、主流部とくらべてきわめて導電度の低い層が存在する。このような低導電度層を通過して流れる電流を増加させていくにつれて、電極近傍の放電形態が変化していく。^[4-1] 電流密度が小さいときは、電極表面に均一に電流が流れる均一放電であるが、電流密度が大きくなると、電極面上に局所的な電流集中箇所が生じ、数多くの小さな輝点(微細アークスポット)を伴う微細アーク放電となり、さらに電流密度が大きくなると、主流部をも破壊するような数少ない巨大なアークが、間欠的に大きな音とともに発生す

る巨大アーク放電となる。これらのアークスポットの発生が、電極の侵食をおこし、電極の寿命を縮める大きな原因の一つとなっており、このアークスポットの発生の物理的プロセスとそれを支配するパラメータを把握しておくことは、きわめて重要である。特に、均一放電からアーク放電への放電形態の移行は、電極温度が低い方がより小さな電流密度で生じてしまうことが、実験的にもある程度わかっているので、緒論にも述べたように、電極の寿命の点で高温電極よりも材料的に合理的な冷電極を用いる場合には、このような

アークの発生について詳細に検討しておく必要がある。電流増加に伴う電流集中の発生に対する電流線の模式

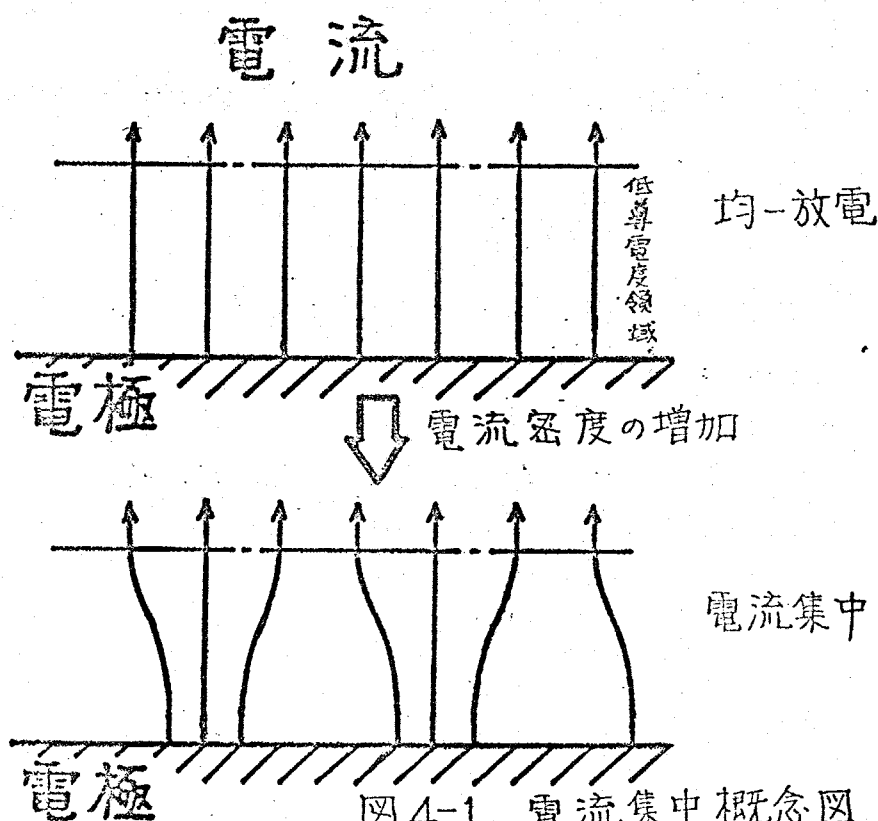


図4-1. 電流集中概念図

図を 図4-1 に示す。本章では、このような電流集中の発生を、冷電極まわりに形成されたまわめて低導電度の層内の、均一放電場における温度場と電気場の相互干渉による不安定現象としてモデル化を行ない、微小変動に関する線型安定論を適用して理論的に論じている。

4-1. 従来の解析および本解析の特徴

MHD 発電の作動流体の対象となるような、シールドされた弱電離導電性流体中の不安定現象に関しては、従来は、主に、非平衡 MHD 発電における、ホール係数の増加に伴う実効導電度あるいは実効ホール係数の低下の原因となる、電離不安定の解析を目的としておこなわれてきた。このような電離不安定は、はじめに Velikov あるいは Kerrebrock^[4-2] によって解析されたものであるが、この電離不安定 (ionization instability) のもとになる電子温度の変動 (electrothermal wave) も含めて、Hougen & McCune^[4-3] が、弱電離気体中に生じ

うる種々の波に対して、それらの分類と安定性について統一的な整理を試みている。これによれば、磁気レイノルズ数の小さいときの二流体モデル（電子とその他）の線型理論から得られた方程式系から、5次の分散関係式が得られ、その5つの根が、4種類の波、すなわち *magnetoacoustic wave (a paired wave)*（ガスの圧力波）、*thermal wave*（ガス温度の変動の波）、*electrothermal wave*（電子温度の変動の波）および *ionization-rate wave*（反応の変動の波）に対応するとしている。しかしながら、これらの波はすべて、解の形として、波数ベクトルと垂直方向の変動量の空間的分布を全く考慮していない平面波に対するものであって、この分散関係式の根として得られた増幅率の正負で判定された安定性の議論は、例えば、冷電極表面近傍の境界層内の、薄い低導電度層内での不安定現象のように、境界（例えば冷電極面）の条件が不安定の発生あるいは抑制に支配的な役割を果すような場においては、上述で仮定されたような変動解は存在しえず、全く適用

できないのである。すなわち、変動解自体も境界条件を満たさなければならず、そのような解は、ある増幅率に対して、安定性の基準となるパラメータと変動の波数に関する固有値問題の固有関数としてはじめて存在しうるのである。

電極におけるアークスポットの発生の解明を特に目的とした研究も、その工学的重要性から最近になって種々行なわれてきているが、実際の現象がきわめて複雑なため理論はいずれも大胆なモデル化を行っており、未だ満足いく結果には至っていない。

Vacumov *et al.*^[4-4] や Dicks *et al.*^[4-5] は、アークスポットの発生を、電極面からデバイ長さ程度のきわめて薄い層内の、電極材料とガスとの相互作用に注目して取り扱っている。これらに対し、Hsu^[4-6] や Oliver^[4-7] は、電極近傍の純気相中での電流集中の発生を、変動量に関するエネルギー式を用いることにより論じようとしている。しかし、Oliver あるいは Hsu の解析は、波数ベクトルと垂直方向の変動量の分布を考慮に入れ

ておらず、単に温度変動量の時間微分の正・負を安定性の基準としており、上述の *Hougen & McCune* の分類した *thermal wave* をそれ以前に単独に取り扱った *Wright* [4-8] の解析の域を基本的には出していない。(事実、*Wright* の結果は、本章における最も単純化されたモデルの結果を示した図4-10においては、 $h_*^2 > \gamma_*^2$ を示しているにすぎない。) これらの安定性解析では、電流集中部に対する周囲方向からの電流の流れこみか、その解析のモデル上、考慮されていないため、電気場と温度場のカップリングがなされておらず、単にジュール加熱によるガス温度の上昇があれば不安定が生ずるという解析となっている。また、*Oliver* はさらに電流集中発生後の集中面積比を、変分原理を用いて解析している。しかしながら、いずれも、電極近傍の不安定現象の発生を、厳密に理論的に論じたものではない。

本章における解析は、上述の状況をふまえ、第3章において冷電極(陽極)まわりの境界層の三流体

モデルによる解析で明らかにされた解を0次の定常解とし、これをベースに、電極面に垂直方向の分布をも考慮に入れた微小変動量を仮定し、線型安定論を用いて解析したものである。すなわち、電極面および主流端でのすべての境界条件を満足するような変動量の解が存在するときの、安定性の基準となるパラメータと、変動の波数に関する固有値問題を構成し、増幅率が零となるときの中立安定曲線から、放電の安定性の限界条件およびそれを支配する因子について議論を行なったものである。従って、本解析では、電流集中部に対する周囲からの電流の出入りが考慮され、電気場と温度場のカップリングがなされた解析となっており、また、安定性限界に対する電子密度の非平衡性や壁境界条件の影響、および変動量の境界層内分布についても考察がなされている。

Oliver^[4-9]は、外部磁場がある時のホール効果が不安定の発生に大きな役割を果たす事を述べてはいるが、一般的に言って、冷電極まわりの放電の不安定性は、

主として低導電度層の存在によって特徴づけられると考えられるので、本研究では、外部磁場がなく、外部印加電圧による通電がある場のみ取り扱われている。

4-2 解析場

解析場としては、図4-2に示すような、平板冷電極まわりの層流境界層内に外部印加電圧による均一な通電がある場を考える。座標系は、図に示されてあるような直交座標系を考え、平板前縁から流れ方向に x 軸を、平板電極面から垂直上方に y 軸を、 x 軸および y 軸と垂直方向に z 軸をとる。主流部にお

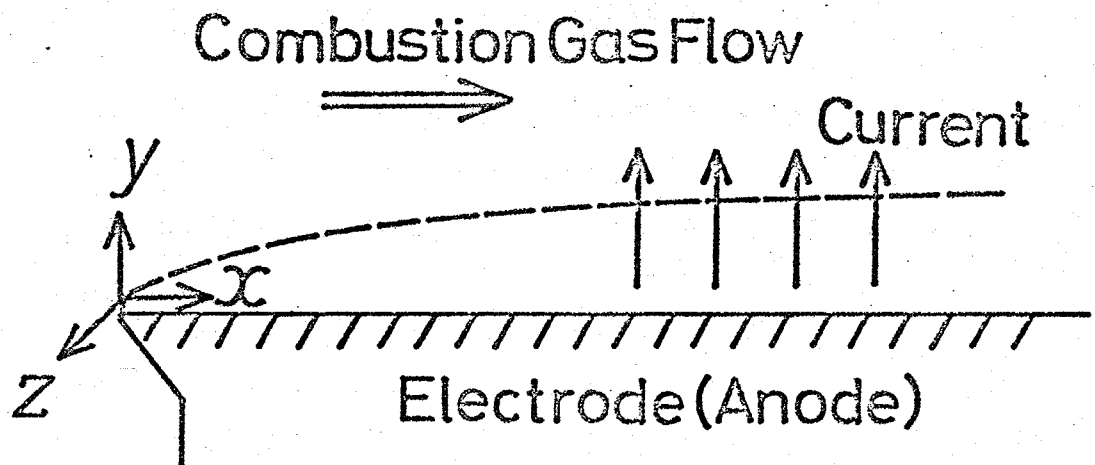


図4-2. 解析場

いては、流速 u_{∞} 、ガス温度 T_{∞} 、および圧力 P は流れ方向に一定であるとし、また、磁気レイノルズ数は十分小さい ($< 10^{-3}$) 場である。ガスの密度 ρ 、粘性係数 μ 、および電子、イオンの移動度 μ_e, μ_i は、第3章では温度に対する依存性を考慮したが、本章においては、簡単のため全域で一定であるとして取扱う。

4-3. 基礎方程式

○ 4-3-1. 基礎方程式

第3章で明らかにしたように、シールドされた燃焼ガスの冷電極まわりの境界層内では、大きな通電があるとき、電子とイオンの電荷分離、電子の熱的および化学的非平衡が大きく存在するので、不安定問題に対する解析も、第3章で提示された三流体モデルによる基礎式より出発しなくてはならない。基礎方程式の構成に際して用いられた仮定は 3-3-1 に述べた事項と同様であるが、本章では不安定問題を解析するのであるから、当然、非定常・三次元の基礎

方程式系となり、これをまとめて示すと次のようになる。(U = (u, v, w))

連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (4.3.1)$$

運動量保存式

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \nu \nabla^2 \mathbf{U} \quad (4.3.2)$$

エネルギー保存式

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) T = \frac{\lambda}{\rho C_p} \nabla^2 T + \frac{1}{\rho C_p} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (4.3.3)$$

電子保存式

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\varepsilon}{e} \nabla \cdot \mathbf{E} \right] + (\mathbf{U} \cdot \nabla) n_e + \nabla \cdot \left[\frac{\varepsilon \mu_i}{e} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} \right. \\ \left. - \frac{\nu}{S c_i} \left(1 + \frac{T_e}{T} \right) \nabla n_e \right] = \dot{n}_e \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

電子エネルギー式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[n_e \left(\frac{3}{2} k T_e + \varepsilon_i \right) \right] + \sum_x \delta_x \bar{v}_{ex} \frac{3}{2} k n_e (T_e - T) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (4.3.5)$$

電流保存式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E}) \quad (4.3.6)$$

Maxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (4.3.7)$$

Ohmの法則

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = e n_e \mu_e \mathbf{E} \quad (4.3.8)$$

以上の基礎方程式のうち (4.3.4) と (4.3.6) は、

電子保存式

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = \dot{n}_e \quad (4.3.9)$$

イオン保存式

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = \dot{n}_i \quad (4.3.10)$$

より、3-3節で述べたのと同様な手法により、電荷分離を考慮に入れ、これをポアソンの式 (3.3.8) で $\nabla \cdot \mathbf{E}$ におきかえて変形して得られたものである。 $n_e \mathbf{u}_e$ および $n_i \mathbf{u}_i$ は、それぞれ (3.3.10) (3.3.11) で与えられている。また、オームの法則 (4.3.8) では、電子のドリフトのみが残されているが、これは、電流密度がある程度大きい ($J \approx 10 \text{ A/m}^2$) ときにはより近似で成立すると考えられる。ただし、この単純化されたオームの法則は、電荷分離より出てきた $\nabla \cdot \mathbf{E}$ の項を見積もるときにのみ用いられるだけである。

擾乱のない定常状態における、ガス流速、ガス温

度、電子密度、電子温度は、平板まわりの二次元層流境界層方程式を第3章と同様の手法で解くことにより定まるわけであるが、基礎式を簡単化するための変換としては、第3章の(3.3.26)(3.3.27)と同様ではあるが、ここでは非圧縮性が仮定されているので、次の様な変換を用いるのが便利である。

$$\xi = x, \quad \eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}} \quad (4.3.11)$$

擾乱のない定常状態に対する0次の解については、 ξ, η 座標系において局所相似($\frac{\partial}{\partial \xi} = 0$)が、良い近似で成立すると考えられる。次に初期擾乱の形としては、一般的にはあらゆる可能な擾乱について考えるべきであるから、物理的に許されるすべての形を考慮しなければならないのだが、一般的な周期変動はフーリエ級数に展開でき、1次の微小擾乱を考える場合、擾乱に対する方程式は線型となるから、各フーリエ成分は互いに独立に振舞うので、結局、1つの成分だけについてその振舞いを調べれば十分である。ここ

では、擾乱の形として、 η 方向の分布も考慮され、
 周期変動の波数ベクトル (α) は Z 方向を向いた定在
 波 (standing wave) を考えることにする。このとき、
 (4.3.1) ~ (4.3.8) の基礎方程式に対する各未知数の解の
 形は次のように表わされる。

$$u = u_{\infty} [f'(\eta) + \hat{u}(\eta) f_u(\alpha Z) g_u(\xi) \exp(\eta t)] \quad (4.3.12)$$

$$v = -\frac{u_{\infty}}{\sqrt{2\xi}} [\{f(\eta) - \eta f'(\eta)\} + \hat{v}(\eta) f_v(\alpha Z) g_v(\xi) \exp(\eta t)] \quad (4.3.13)$$

$$w = u_{\infty} [0 + \hat{w}(\eta) f_w(\alpha Z) g_w(\xi) \exp(\eta t)] \quad (4.3.14)$$

$$p = \rho u_{\infty}^2 [p_0(\eta) + \hat{p}(\eta) f_p(\alpha Z) g_p(\xi) \exp(\eta t)] \quad (4.3.15)$$

$$T = T_{\infty} [\theta(\eta) + \hat{t}(\eta) f_t(\alpha Z) g_t(\xi) \exp(\eta t)] \quad (4.3.16)$$

$$T_e = T_{\infty} [\theta_e(\eta) + \hat{t}_e(\eta) f_e(\alpha Z) g_e(\xi) \exp(\eta t)] \quad (4.3.17)$$

$$J_y = J_0 [1 + \hat{j}_y(\eta) f_{jy}(\alpha Z) g_{jy}(\xi) \exp(\eta t)] \quad (4.3.18)$$

$$J_z = J_0 [0 + \hat{j}_z(\eta) f_{jz}(\alpha Z) g_{jz}(\xi) \exp(\eta t)] \quad (4.3.19)$$

$$n_e = n_{e\infty} [\zeta(\eta) + \hat{n}_e(\eta) f_n(\alpha Z) g_n(\xi) \exp(\eta t)] \quad (4.3.20)$$

ここで " ' " は η に関する微分を表わし。また、時

間に対する依存性は指数関数的とし、変動波の位相速度のない場合について考えるので、 θ は実数であると仮定する。(4.3.12) ~ (4.3.20) の各表示において、大括弧内の第1項が非擾乱の0次の定常分布を表わし、第2項が擾乱を表わしている。この擾乱項は、0次の定常項にくらべて十分小さいとし、(4.3.12) ~ (4.3.20) を先の基礎方程式に代入して2次以上の微小項を省略して線型化すれば、非擾乱場および擾乱場に対して以下のような無次元化された基礎方程式が得られる。

まず、0次の定常場を定める非擾乱場に対する基礎方程式は、次のとおりである。

$$f''' + f f'' = 0 \quad (4.3.21)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f \theta' = -H \quad (4.3.22)$$

$$G \frac{1}{\zeta^2} = \frac{\sqrt{\theta_e}}{\theta} (\theta_e - \theta) \quad (4.3.23)$$

$$f \zeta' + \left[A_1 \frac{1}{\zeta^3} \zeta' + A_2 \left(1 + \frac{\theta_e}{\theta} \right) \zeta' \right]' = -R \quad (4.3.24)$$

ここで

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{2\xi}{\rho u_{\infty} C_p T_{\infty}} \frac{J_0^2}{e \mu_e n_{e\infty} \zeta} \\
 G &= \frac{J_0^2}{2e n_{e\infty}^2 \mu_e \rho u_{\infty}^2 p_0 \sqrt{\frac{8kT_{\infty}}{\pi m_e}} \sum_x \delta_x Q_{ex} X_x} \\
 A_1 &= \frac{\epsilon \mu_i J_0^2}{e^3 \mu_e^2 n_{e\infty}^3 V}, \quad A_2 = \frac{1}{Sc_i} \\
 R &= \frac{2\xi [n_e]_0}{n_{e\infty} u_{\infty}}
 \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

(4.3.23)における θ のべきが、(3.3.52)と違うのは、 ρ
 μ_e, μ_i に対する温度依存性が入っていないからであ
 り。また、(3.3.51)の左辺の大括弧内の第3項は、第
 1項、第2項とくらべて十分小さいことが第3章の
 計算でわかっているので、(4.3.24)においては省略
 されている。さらに、第3章で、(3.3.45)の右辺の第
 2項の奇数が第1項にくらべて十分小さいこともわ
 かっているので、(4.3.25)における定常時における電
 子生成量 $[n_e]_0$ は次式で与える。

$$[n_e]_0 = (\alpha_{e\infty} \zeta \theta_e^{-\frac{9}{2}} + \alpha_{x\infty} \theta^{-1} \theta_e^{-\frac{5}{2}}) n_{e\infty}^2 (\zeta_s^2 - \zeta^2) \quad (4.3.26)$$

ここで $\zeta_s = \frac{n_{es}(T_e)}{n_{e\infty}}$ であり、電子温度に対するサハ平

平衡電子密度 $n_{es}(Te)$ は、(3.2.20) で与えられている。

次に、1 次の擾乱場に対する基礎方程式を定めるわけであるが、(4.3.12) ~ (4.3.20) で与えた三次元的な擾乱に対し一般的に取扱うのは非常に難しいので、ここでは、擾乱の z 方向の依存性のないような（ただし、境界層が厚くなっていく程度の x 方向依存性は入っている。）擾乱、すなわち、

$$g_u, g_v, g_w, g_p, g_t, g_e, g_{iy}, g_{iz}, g_n = 1 \quad (4.3.27)$$

の成立するような、準二次元的な擾乱を考えることにする。この仮定は、層流流れの安定性に対する、Squire の定理^[4-10] を参考にすれば、本章の目的に対しては妥当なものである。また、 z 方向の周期性については、(4.3.1), (4.3.6) を考えて、次のようにおくと都合がよい。

$$f_u, f_v, f_p, f_t, f_e, f_{iy}, f_n = \sin \alpha z \quad (4.3.28)$$

$$f_w, f_{iz} = \cos \alpha z \quad (4.3.29)$$

このような形の擾乱を考えるということは、電流の集中に対して下流側 (x 軸) からながめると、図 4-3 の

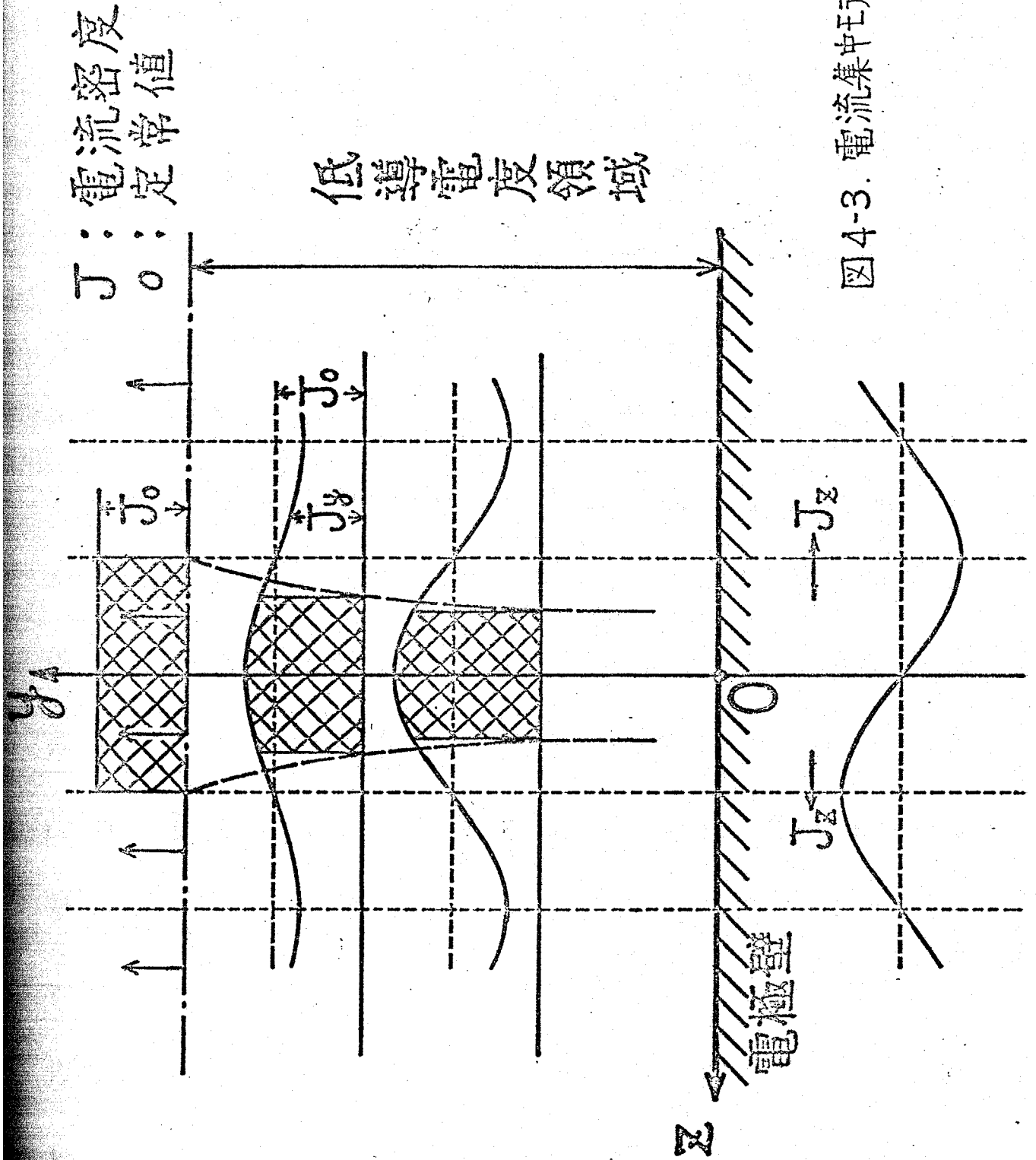


図4-3. 電流集中モデル

ようになるモデルを考えていることに相当する。図中には、わかり易くするため低導電度域の厚さが示されているが、本来、擾乱は導電度の高い主流内に向かって漸近的に消えていくものであり、実際にはそのように取扱われる。擾乱に対する方程式において、与えられた境界条件を満足する有意な解とこののは、結局、放電の安定性を特徴づけるあるパラメータと変動の波数と増幅率 γ との間の固有値関係が成立するときにはじめて存在し、 $\gamma > 0$ のとき擾乱は増幅し0次の分布は不安定、 $\gamma < 0$ のときは擾乱が減衰するので0次の分布は安定となる。 $\gamma = 0$ のときは中立安定となり、本章において、以後、 $\gamma = 0$ において安定と不安定の境界となる中立安定曲線を求めることにする。波数に対して、 $\beta = 2\zeta\alpha$, $\gamma^2 = \frac{2V\zeta}{U_0} \alpha^2$ なる無次元表示を用いて、擾乱場に対する線型化された基礎方程式は以下のように整理される。なお、主流におけるレイノルズ数 $Re_x = \frac{U_0 x}{\nu}$ が十分大きいということが用いられており、また、“’” は ∂ に代

する微分を表わしてやる。

$$\eta \hat{u}' + \hat{v}' + \beta \hat{w} = 0 \quad (4.3.30)$$

$$\hat{u}'' + f \hat{u} + (\eta f'' - \gamma^2) \hat{u} + f'' \hat{v} + \eta \hat{p}' = 0 \quad (4.3.31)$$

$$\hat{p}' = 0 \quad (4.3.32)$$

$$\hat{w}'' + f \hat{w}' - \gamma^2 \hat{w} - \beta \hat{p} = 0 \quad (4.3.33)$$

$$\begin{aligned} \hat{t}'' + Pr f \hat{t}' - \gamma^2 \hat{t} + Pr \eta \theta' \hat{u} + Pr \theta' \hat{v} \\ + 2 Pr H \hat{j}_y - \frac{Pr H}{\xi} \hat{n}_e = 0 \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

$$\begin{aligned} \hat{n}_e'' - c_1 \hat{u} - c_2 \hat{v} + D_1 \hat{n}_e' + D_2 \hat{n}_e + D_3 \hat{j}_y' + D_4 \hat{j}_y \\ + D_5 \hat{t}' + D_6 \hat{t} + D_7 \hat{t}_e' + D_8 \hat{t}_e = 0 \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

$$\hat{t}_e = F_1 \hat{n}_e + F_2 \hat{j}_y + F_3 \hat{t} \quad (4.3.36)$$

$$\hat{j}_y' - \gamma \hat{j}_z = 0 \quad (4.3.37)$$

$$\hat{j}_y'' - \frac{\xi'}{\xi} \hat{j}_y' - \gamma^2 \hat{j}_y = -\frac{1}{\xi} \gamma^2 \hat{n}_e \quad (4.3.38)$$

(4.3.36) は、微分形でかくと次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{t}_e' = F_1 \hat{n}_e' + (F_4 - F_1 F_7) \hat{n}_e \\ + F_2 \hat{j}_y' + (F_5 - F_2 F_7) \hat{j}_y \\ + F_3 \hat{t}' + (F_6 - F_3 F_7) \hat{t} \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

(4.3.35), (4.3.36), (4.3.39) における各係数は次の通り

である。

$$\begin{aligned}
 D_0 &= -\frac{1}{\zeta^3} A_1 - \left(1 + \frac{\theta_e}{\theta}\right) A_2 \\
 D_1 &= \left[\frac{6\zeta'}{\zeta^4} A_1 - \left(\frac{\theta_e'}{\theta} - \frac{\theta_e \theta'}{\theta^2}\right) A_2 - f \right] / D_0 \\
 D_2 &= \left[\left(\frac{3\zeta''}{\zeta^4} - \frac{12(\zeta')^2}{\zeta^5}\right) A_1 + \left(1 + \frac{\theta_e}{\theta}\right) A_2 \gamma^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2\zeta(\zeta \theta_e^{-\frac{9}{2}} + s \theta^{-1} \theta_e^{-\frac{5}{2}}) B - (\zeta_s^2 - \zeta^2) \theta_e^{-\frac{9}{2}} B \right] / D_0 \\
 D_3 &= -\frac{\zeta'}{\zeta^3} A_1 / D_0 \\
 D_4 &= \left[\frac{6(\zeta')^2}{\zeta^4} - \frac{2\zeta''}{\zeta^3} \right] A_1 / D_0 \\
 D_5 &= \frac{\zeta' \theta_e}{\theta^2} A_2 / D_0 \\
 D_6 &= \left[\left(\frac{\zeta'' \theta_e}{\theta^2} + \frac{\zeta' \theta_e'}{\theta^2} - \frac{2\zeta' \theta_e \theta'}{\theta^3}\right) A_2 + (\zeta_s^2 - \zeta^2) s \theta^{-2} \theta_e^{-\frac{5}{2}} B \right] / D_0 \\
 D_7 &= -\frac{\zeta'}{\theta} A_2 / D_0 \\
 D_8 &= \left[\left(\frac{\zeta' \theta'}{\theta^2} - \frac{\zeta''}{\theta}\right) A_2 - (\zeta \theta_e^{-\frac{9}{2}} + s \theta^{-1} \theta_e^{-\frac{5}{2}}) \left(\frac{\partial \ln \eta_{es}}{\partial \ln T_e}\right)_0 \frac{2\zeta_s^2}{\theta_e} B \right. \\
 &\quad \left. + (\zeta_s^2 - \zeta^2) \left(\frac{9}{2} \zeta \theta_e^{-\frac{11}{2}} + \frac{5}{2} s \theta^{-1} \theta_e^{-\frac{7}{2}}\right) B \right] / D_0
 \end{aligned} \tag{4.3.40}$$

$$C_1 = \eta \zeta' / D_0, \quad C_2 = \zeta' / D_0 \tag{4.3.41}$$

$$\begin{aligned}
 F_0 &= \frac{\zeta^2}{2\sqrt{\theta_e}} (3\theta_e - \theta) \\
 F_1 &= -2\zeta \sqrt{\theta_e} (\theta_e - \theta) / F_0 \\
 F_2 &= 2G\theta / F_0 \\
 F_3 &= [G + \zeta^2 \sqrt{\theta_e}] / F_0
 \end{aligned} \tag{4.3.42}$$

$$F_4 = - [2\zeta\sqrt{\theta_e}(\theta_e - \theta) + \frac{\zeta\theta_e'}{\sqrt{\theta_e}}(\theta_e - \theta) + 2\zeta\sqrt{\theta_e}(\theta_e' - \theta')] / F_0$$

$$F_5 = 2G\theta' / F_0$$

$$F_6 = [2\zeta\zeta'\sqrt{\theta_e} + \frac{\zeta^2\theta_e'}{2\sqrt{\theta_e}}] / F_0$$

$$F_7 = \left[\frac{\zeta\zeta'}{\sqrt{\theta_e}}(3\theta_e - \theta) - \frac{\zeta^2\theta_e'}{4\theta_e^{3/2}}(3\theta_e - \theta) + \frac{\zeta^2}{2\sqrt{\theta_e}}(3\theta_e' - \theta') \right] / F_0$$

また、(4.3.40)の中の B および S は次式で与えられる。

$$B = \frac{2\zeta n_{e\infty}}{u_{\infty}} \alpha_{e\infty}, \quad S = \frac{\alpha_{x\infty}}{\alpha_{e\infty}} \quad (4.3.43)$$

ここで、 $\alpha_{e\infty}$ 、 $\alpha_{x\infty}$ は、(3.3.32)、(3.3.36) で与えられる α_e および α_x の、主流部における値である。

以上より、擾乱に関する基礎方程式 (4.3.30) ~ (4.3.38) は、9つの未知数 \hat{u} , \hat{v} , \hat{w} , \hat{p} , \hat{t} , \hat{t}_e , \hat{f}_y , \hat{f}_z , \hat{n}_e に関する閉じた方程式系を構成している。しかしながら、本解析においては外部磁場がない場を考えているのでローレンツ力がなく、流れ場の擾乱に関する (4.3.30) ~ (4.3.33) は、温度場および電気場の擾乱に関する (4.3.34) ~ (4.3.38) とカプリングしていないで閉じており、しかも係数を見ればわかる通りこれ自体では固有値問題とはなっていない。従って、(4.3.30) ~ (4.3.38) を放電の不安定を特徴づけるパラメータと変動の波

数に関する固有値問題としてとらえるとき、(4.3.30)

~(4.3.33) は、無意味 (trivial) な解、すなわち $\hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = 0$

しかとり得ないのである。よって (4.3.34)、(4.3.35) の

中で $\hat{u} = \hat{v} = 0$ において (4.3.34) ~ (4.3.38) を固有値

問題として取り扱えばよいことになる。($\hat{u} = \hat{v} = 0$

においても $f (= \int_0^{\eta} f' d\eta)$ を介して、定常状態の対

流の効果は入っている。) このとき (4.3.34) ~ (4.3.38) は、

整理されて、結局次のような $\hat{n}_e, \hat{j}_y, \hat{t}$ に関する6次

の方程式系となる。

$$\left[\begin{array}{l} \hat{n}_e'' + W_1 \hat{n}_e' + W_2 \hat{n}_e + W_3 \hat{j}_y' + W_4 \hat{j}_y + W_5 \hat{t}' + W_6 \hat{t} = 0 \\ \hspace{20em} (4.3.44) \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \hat{j}_y'' - \frac{\gamma'}{\gamma} \hat{j}_y' - \gamma^2 \hat{j}_y + \frac{1}{\gamma} \gamma^2 \hat{n}_e = 0 \\ \hspace{20em} (4.3.45) \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \hat{t}'' + R_f \hat{t}' - \gamma^2 \hat{t} - \frac{1}{\gamma^2} h^2 \hat{n}_e + \frac{2}{\gamma} h^2 \hat{j}_y = 0 \\ \hspace{20em} (4.3.46) \end{array} \right.$$

ここで

$$W_1 = D_1 + D_7 F_1$$

$$W_2 = D_2 + D_7 F_4 + D_8 F_1 - D_7 F_1 F_7$$

$$W_3 = D_3 + D_7 F_2$$

$$\left. \vphantom{\begin{array}{l} W_1 = D_1 + D_7 F_1 \\ W_2 = D_2 + D_7 F_4 + D_8 F_1 - D_7 F_1 F_7 \\ W_3 = D_3 + D_7 F_2 \end{array}} \right\} (4.3.47)$$

$$W_4 = D_4 + D_7 F_5 + D_8 F_2 - D_7 F_2 F_7$$

$$W_5 = D_5 + D_7 F_3$$

$$W_6 = D_6 + D_7 F_6 + D_8 F_3 - D_7 F_3 F_7$$

そして、2つの重要なパラメータ h^2 と γ^2 は、

$$\left[\begin{array}{l} h^2 = \frac{2V\xi}{u_\infty} \cdot \frac{J_0^2}{\lambda \sigma_\infty T_\infty} \end{array} \right. \quad (4.3.48)$$

$$\left[\begin{array}{l} \gamma^2 = \frac{2V\xi}{u_\infty} \cdot \alpha^2 \end{array} \right. \quad (4.3.49)$$

h^2 は、ガスに対する、ジュール発熱と熱伝導の比を表わす無次元パラメータで、放電の不安定問題を特徴づける代表パラメータである。 γ^2 は、無次元化された変動の波数である。

○4-3-2. 境界条件

電子保存式 (4.3.4) に対する壁表面における境界条件は、陽極表面に対して第3章の3-3-3でなされた物理的考察により、(シース外端ではなく) 壁表面をよぎるイオン流束が零であるという条件を用いると次のように表わせる。

$$\frac{\varepsilon \mu_i}{e} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \frac{V}{\sigma_{ci}} \left(1 + \frac{T_e}{T} \right) \nabla n_e = - \frac{\mu_i J}{e \mu_e} \quad (4.3.50)$$

この (4.3.50) に、(4.3.16) ~ (4.3.20) を代入して整理することにより、非擾乱場および擾乱場における壁境界条件が得られる。

非擾乱場に対する 0 次の基礎方程式 (4.3.21) ~ (4.3.24) に対する境界条件は、次の通りである。

$$\eta \rightarrow \infty \text{ で } f' = 1, \quad \theta = 1, \quad \zeta = 1 \quad (4.3.51)$$

$$\eta = 0 \text{ で } f = f' = 0, \quad \theta = \theta_w \left(= \frac{T_w}{T_\infty} \right)$$

$$A_1 \left(\frac{\zeta}{\zeta^3} \right) + A_2 \left(1 + \frac{\theta_e}{\theta} \right) \zeta' = \Sigma \quad (4.3.52)$$

ここで

$$\Sigma = \frac{\mu_i J_0}{e \mu_e n_{e\infty}} \sqrt{\frac{2 \Sigma}{U_{\infty V}}} \quad (4.3.53)$$

擾乱場に対する基礎方程式 (4.3.44) ~ (4.3.46) に対する境界条件については、次の通りである。主流部については、今考えているような冷電極近傍の放電の不安定問題に関しては、表面近傍の低導電度層の存在が支配的であると考えられるので、十分導電度が高い主流部では、温度場、電気場とも変動が存在しないとおくことができる。一方、電極表面での境界条件については、特に、温度変動 (θ)、電流密度

変動 (\hat{j}_y) に対して、電極材料の物理的状況が互いに異なる3種類の組を考える。以上をまとめて次のようになる。

$$\eta \rightarrow \infty \text{ で } \hat{t} = \hat{j}_y = \hat{n}_e = 0 \quad (4.3.54)$$

$$\eta = 0 \text{ で } \sum_1 \hat{j}_y + \sum_2 \hat{n}'_e + \sum_3 \hat{n}_e + \sum_4 \hat{t} = 0 \quad (4.3.55)$$

(i) 電極壁が 熱的に良導体	電氣的に不良導体	$\hat{t} = 0$	}	(4.3.55)
		$\hat{j}_y = 0$		
(ii) 電極壁が 熱的に良導体	電氣的に良導体	$\hat{t} = 0$		
		$\hat{j}'_y = 0$		
(iii) 電極壁が 熱的に不良導体	電氣的に良導体	$\hat{t}' = 0$		
		$\hat{j}'_y = 0$		

ここで

$$\begin{aligned} \sum_1 &= \sum - \frac{2\zeta'}{\zeta^3} A_1 - \frac{\zeta'}{\theta} F_2 A_2 \\ \sum_2 &= -\frac{1}{\zeta^3} A_1 - (1 + \frac{\theta_e}{\theta}) A_2 \\ \sum_3 &= \frac{3\zeta'}{\zeta^4} A_1 - \frac{\zeta'}{\theta} F_1 A_2 \\ \sum_4 &= \frac{\zeta' \theta_e}{\theta^2} A_2 - \frac{\zeta'}{\theta} F_3 A_2 \end{aligned} \quad (4.3.56)$$

壁の境界条件 (4.3.55) において、(i) および (iii) の条件は非現実的な条件で、電極材料の熱伝導率や電気導電度が放電の安定性の限界に及ぼす影響をみるために用いられる便宜的なものである。(ii) の条件が、普

通の金属電極に対してあてはまる条件であり、主として (iii) の境界条件に対して解析を行ない、(i) (ii) の境界条件は、後の 4-4-2 で述べる最も単純化されたモデルにおいてのみ考慮に入れて、境界条件の安定性の限界条件に及ぼす影響について検討することにする。非擾乱場に対する基礎方程式 (4.3.21) ~ (4.3.24) より得られた解によれば、境界層外端としては $\eta = 4.5$ で十分であるが、変動量に関しては主流部中に大きくくい込むことが考えられるので、いろいろ検討した結果、(4.3.51) (4.3.54) の $\eta \rightarrow \infty$ として $\eta = 8$ をとれば十分であることを確かめてこれを採用した。

○ 4-3-3 計算法

ここでは、擾乱場に対する基礎方程式 (4.3.44) ~ (4.3.46) を、(4.3.54) (4.3.55) の境界条件のもとで (4.3.48), (4.3.49) で示した α^2 と δ^2 との間の固有値問題として解くときの具体的な解法について簡単に述べる。基礎方程式は常微分方程式であるから、ルンゲ-クッタ-ジル数値積分法を用いた。まず、 η についての未知関数 $Q_i(\eta)$

($i=1\sim 6$) を次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} Q_1(\eta) &= \hat{n}_e, & Q_2(\eta) &= \hat{j}_y, & Q_3(\eta) &= \hat{t} \\ Q_4(\eta) &= \hat{n}_e', & Q_5(\eta) &= \hat{j}_y', & Q_6(\eta) &= \hat{t}' \end{aligned} \right\} (4.3.57)$$

このとき、基礎方程式に従い、

$$\left[\begin{aligned} Q_1' &= Q_4 \\ Q_2' &= Q_5 \\ Q_3' &= Q_6 \\ Q_4' &= -W_1 Q_4 - W_2 Q_1 - W_3 Q_5 - W_4 Q_2 - W_5 Q_6 - W_6 Q_3 \\ Q_5' &= \frac{\Sigma'}{\Sigma} Q_5 + \gamma^2 Q_2 - \frac{1}{\Sigma} \gamma^2 Q_1 \\ Q_6' &= -P_1 f Q_6 + \gamma^2 Q_3 + \frac{\hbar^2}{\Sigma^2} Q_1 - \frac{2\hbar^2}{\Sigma} Q_2 \end{aligned} \right. \quad (4.3.58)$$

境界条件は次のように表わされる。

$\eta = \eta_\infty$ ($\eta_\infty = 8$) では、(4.3.54)より、

$$Q_1(\eta_\infty) = 0, \quad Q_2(\eta_\infty) = 0, \quad Q_3(\eta_\infty) = 0 \quad (4.3.59)$$

$\eta = 0$ では、(4.3.55)より、(電極壁については(ii)の条件の場合について示す。)

$$\begin{aligned} Z_1 Q_2(0) + Z_2 Q_4(0) + Z_3 Q_1(0) + Z_4 Q_3(0) &= 0 \\ Q_3(0) = 0, \quad Q_5(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.60)$$

実際に $\eta = 0$ から $\eta = \eta_\infty$ へ数値積分していくときには、

$Q_i(0)$ ($i=1\sim 6$) の 6 個の初期値が必要だが、(4.3.60) ではそのうちの 3 個しか与えない。従って他の 3 個については、次のような 3 種類の初期値の組 (S_1, S_2, S_3) を考える。

$$\left. \begin{array}{l} S_1 : \quad Q_1(0)=1, \quad Q_4(0)=0, \quad Q_6(0)=0 \\ S_2 : \quad Q_1(0)=0, \quad Q_4(0)=1, \quad Q_6(0)=0 \\ S_3 : \quad Q_1(0)=0, \quad Q_4(0)=0, \quad Q_6(0)=1 \end{array} \right\} \quad (4.3.61)$$

S_j ($j=1\sim 3$) について $\eta=0$ から $\eta=\eta_\infty$ まで数値積分された関数を $Q_i^j(\eta)$ とすれば、 $Q_i^j(\eta)$ が異なる j について互いに直交関数的であれば、 $Q_i(\eta)$ は一般にそれらの線型和として次のように表わされる。

$$Q_i(\eta) = \sum_j a_j Q_i^j(\eta) \quad (i=1\sim 6) \quad (4.3.62)$$

$Q_i^j(\eta)$ が異なる j について互いに直交関数的でないときは、数値積分を進めるからステップごとに関数間の直交化を行なわなければならないが、本解析においてはその必要はなかった。(4.3.62) で表わされた関数が $\eta=\eta_\infty$ で (4.3.59) を満たすとき、次式が成立する。

$$Q_i(\eta_\infty) = \sum_j a_j Q_i^j(\eta_\infty) = 0, \quad (i=1\sim 3) \quad (4.3.63)$$

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} a_1 Q_1^1(\eta_\infty) + a_2 Q_1^2(\eta_\infty) + a_3 Q_1^3(\eta_\infty) &= 0 \\ a_1 Q_2^1(\eta_\infty) + a_2 Q_2^2(\eta_\infty) + a_3 Q_2^3(\eta_\infty) &= 0 \\ a_1 Q_3^1(\eta_\infty) + a_2 Q_3^2(\eta_\infty) + a_3 Q_3^3(\eta_\infty) &= 0 \end{aligned} \right\} (4.3.64)$$

(4.3.64) が (a_1, a_2, a_3) に関して有意な解をもつ条件は次の通りである。

$$\begin{vmatrix} Q_1^1(\eta_\infty) & Q_1^2(\eta_\infty) & Q_1^3(\eta_\infty) \\ Q_2^1(\eta_\infty) & Q_2^2(\eta_\infty) & Q_2^3(\eta_\infty) \\ Q_3^1(\eta_\infty) & Q_3^2(\eta_\infty) & Q_3^3(\eta_\infty) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.3.65)$$

以上より、(4.3.65)を満足するような η^2 と γ^2 の組を種々の η^2 に対して寸かして求めれば、 $\eta^2 - \gamma^2$ 平面において、放電の安定性に関する中立安定曲線が定まるわけである。またそのときの各固有関数の分布も、(4.3.62)より決まる。しかしながら実際の計算においては、 η^2 がかわるごとに非擾乱場の0次の分布も変化するのので、1つの中立安定曲線を求めるのにも、非常に多くの計算を要した。

4-4. 簡単化モデル

前述の 4-3 節においては、第 3 章の、電子の種々の非平衡性をも考慮に入れた三流体モデルによる境界層解析をベースにした一般的な取り扱いを行なったが、本節では、特殊な場合に対しては、不安定問題の解析法がかなり簡単化されることを 2 つの場合について示し、そういう場合における擾乱場に対する基礎方程式を示す。

○ 4-4-1. 平衡モデル

比較的シード率も低い場合、シードされた燃焼がスの冷電極まわりの境界層内では、通電があるとき電子の熱的および化学的非平衡あるいは電子・イオンの電荷分離が大きく存在することを第 3 章で示したが、電極壁温が十分高く、シード率も大きいときには、図 3-5 に示したように、ほとんど全域にわたって電子密度のがス温度に対するサハ平衡は成立している。そのような場合は、結局、電子のエネルギー損失係数 δ_x および、電子の反応速度係数 α_e が、両方とも無限

大であるような極限的な場合に対応すると考えられる。すなわち

$$\delta_x \rightarrow \infty, \quad \alpha_e \rightarrow \infty \quad (4.4.1)$$

この条件を (4.3.44) に入れることにより、電子密度の変動量はガス温度の変動量によって簡単に次のように表わされる。

$$\hat{n}_e = \frac{\zeta}{\theta} \left(\frac{\partial \ln N_{es}(T)}{\partial \ln T} \right)_0 \hat{t} \quad (4.4.2)$$

従って、この場合の擾乱場に対する基礎方程式は、(4.4.2) を (4.3.45) (4.3.46) に代入して、温度変動と電流密度変動に関する次のような4次の方程式となる。

$$\hat{t}'' + R_t \hat{t}' - \left[\gamma^2 + \frac{\hbar^2}{\zeta \theta} \left(\frac{\partial \ln N_{es}}{\partial \ln T} \right)_0 \right] \hat{t} = - \frac{2\hbar^2}{\zeta} \hat{j}_y \quad (4.4.3)$$

$$\hat{j}_y'' - \frac{\zeta'}{\zeta} \hat{j}_y' - \gamma^2 \hat{j}_y = - \frac{1}{\theta} \left(\frac{\partial \ln N_{es}}{\partial \ln T} \right)_0 \gamma^2 \hat{t} \quad (4.4.4)$$

また、このとき、(4.4.2) の係数 $\left(\frac{\partial \ln N_{es}(T)}{\partial \ln T} \right)_0$ は、サハ平衡式 (3.2.20) で $T_e = T$ とおいた式を微分することにより次のように与えられる。

$$\left(\frac{\partial \ln N_{es}(T)}{\partial \ln T} \right)_0 = \frac{3}{4} + \frac{\epsilon_i}{2kT} \quad (4.4.5)$$

今考えているような場においては、 $\frac{E_i}{2kT} \sim 10$ であるから、温度が高いほど、またシールドされたアルカリ金属のイオン化エネルギー E_i が小さいほど (4.4.5) の値は小さくなることがわかる。この平衡モデルの場合についても種々の $\theta_w = \frac{T_w}{T_\infty}$ の値に対して λ^2 と γ^2 に関する中立安定曲線および限界点における変動量の固有関数を求め 4-3 節の一般化モデルの結果との比較検討を行なう。

○ 4-4-2 薄層モデル

これまで述べた一般化モデルあるいは平衡モデルにおいては、いずれも、0 次の分布としては境界層方程式の解を用いており、また不安定発生領域の厚さに対しても一般性をもたせていた。しかしながら実際、冷電極まわりの放電の不安定というのは、冷電極近傍の低導電度層の存在によって特徴づけられると考えられるため、ここでは、その放電の不安定を特徴づける低導電度層の代表厚さ δ (値そのものは初めからは明らかでない。) を導入し、上述の平衡

モデルに加え、さらに単純化されたモデルを考える。
 この代表厚さ δ の中では、温度などの 0 次分布は一
 定であると仮定し、対流の効果も省略する。ただし
 変動量に関する δ 内の分布を考慮に入れ、壁面上 ($y=0$)
 あるいは外端 ($y=\delta$) における境界条件を満足するよ
 うな固有値問題として考える。このとき、平衡モデル
 において得られた基礎方程式 (4.4.3), (4.4.4) は次のよ
 うに単純化される。

$$\hat{t}'' - (\gamma_*^2 + h_*^2) \hat{t} = -g_* \hat{j}_y \quad (4.4.6)$$

$$\hat{j}_y'' - \gamma_*^2 \hat{j}_y = -\frac{2h_*^2}{g_*} \gamma_*^2 \hat{t} \quad (4.4.7)$$

ここで "''" は $\eta_x (= y/\delta)$ についての微分を表わ
 しており、また各無次元パラメータは次の通りであ
 る。

$$h_*^2 = \frac{\delta^2 J_0^2}{\lambda \sigma T} \left(\frac{\partial \ln Nes(T)}{\partial \ln T} \right)_0 \quad (4.4.8)$$

$$\gamma_*^2 = \delta^2 \alpha^2, \quad g_* = \frac{2\delta^2 J_0^2}{\lambda \sigma T} \quad (4.4.9)$$

ここで構成された最も単純化されたモデルにおける

基礎式 (4.4.6), (4.4.7) は \hat{n}_e に關する条件を除かれた境界条件 (4.3.54), (4.3.55) のもとでの固有値問題として、全く解析的に解くことができる。

その解法について簡単に述べておく。(4.4.6), (4.4.7) の解は、この場合、各係数が定数であるから

$$\hat{\zeta} = A e^{d\eta_*}, \quad \hat{\eta}_y = B e^{d\eta_*} \quad (4.4.10)$$

という形におくことができる。これを (4.4.6), (4.4.7) に代入すると

$$\begin{bmatrix} d^2 - (\gamma_*^2 + h_*^2) & g_* \\ \frac{2h_*^2}{g_*} \gamma_*^2 & d^2 - \gamma_*^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0 \quad (4.4.11)$$

A, B について有意な解をもつ条件より、d は次の4根をもつ。

$$d = \pm \frac{(2\gamma_*^2 + h_*^2) \pm \sqrt{8\gamma_*^2 h_*^2 + h_*^4}}{2} \quad (4.4.12)$$

この4根を符号も考慮して、 $d_1(+,+)$, $d_2(+,-)$, $d_3(-,+)$, $d_4(-,-)$ とおく。このとき B は A に対して独立ではなく、(4.4.6) より次のようになる。

$$B_i = -\frac{d_i^2 - (\gamma_*^2 + h_*^2)}{g_*} A_i = f_i A_i \quad (4.4.13)$$

このとき各変動量 $\hat{\zeta}$, $\hat{\eta}_y$ は次のように表わされる。

$$\hat{t} = \sum_i A_i e^{d_i \eta_*}, \quad \hat{j}_y = \sum_i f_i A_i e^{d_i \eta_*} \quad (4.4.14)$$

ここで、(4.4.12), (4.4.13) より、

$$f_1 < 0, \quad f_2 > 0 \quad (4.4.15)$$

さらに明らかに無意味な解 ($\hat{t} = \hat{j}_y = 0$) を与える場合は、あらかじめ除いておく。すなわち、

$$f_1 \neq f_2, \quad d_1 \neq 0, \quad d_2 \neq 0 \quad (4.4.16)$$

また、 d_1 は常に実数であるが、 d_2 は $k_*^2 < \gamma_*^2$ のとき正の実数、 $k_*^2 > \gamma_*^2$ のとき純虚数となり、これを id_0 とおく。($d_1 > d_0 > 0$)

$$d_0 = \sqrt{\frac{8\gamma_*^2 k_*^2 + k_*^4 - (2\gamma_*^2 + k_*^2)}{2}} \quad (4.4.17)$$

(4.4.15) ~ (4.4.17) の条件のもとで、(4.4.14) が、与えられた境界条件を満たす有意な解となるための条件 (d_1, d_2, f_1, f_2 のみで表わされる。) から、 k_*^2 と γ_*^2 の間の固有値関係が、またそのときの固有関数が定まるわけである。

ここで述べた、最も単純化された薄層モデルは、

(4.3.55) の (i) (ii) (iii) を用いて、放電の安定性の限界条件に及ぼす電極壁境界条件の影響を議論する場合に用

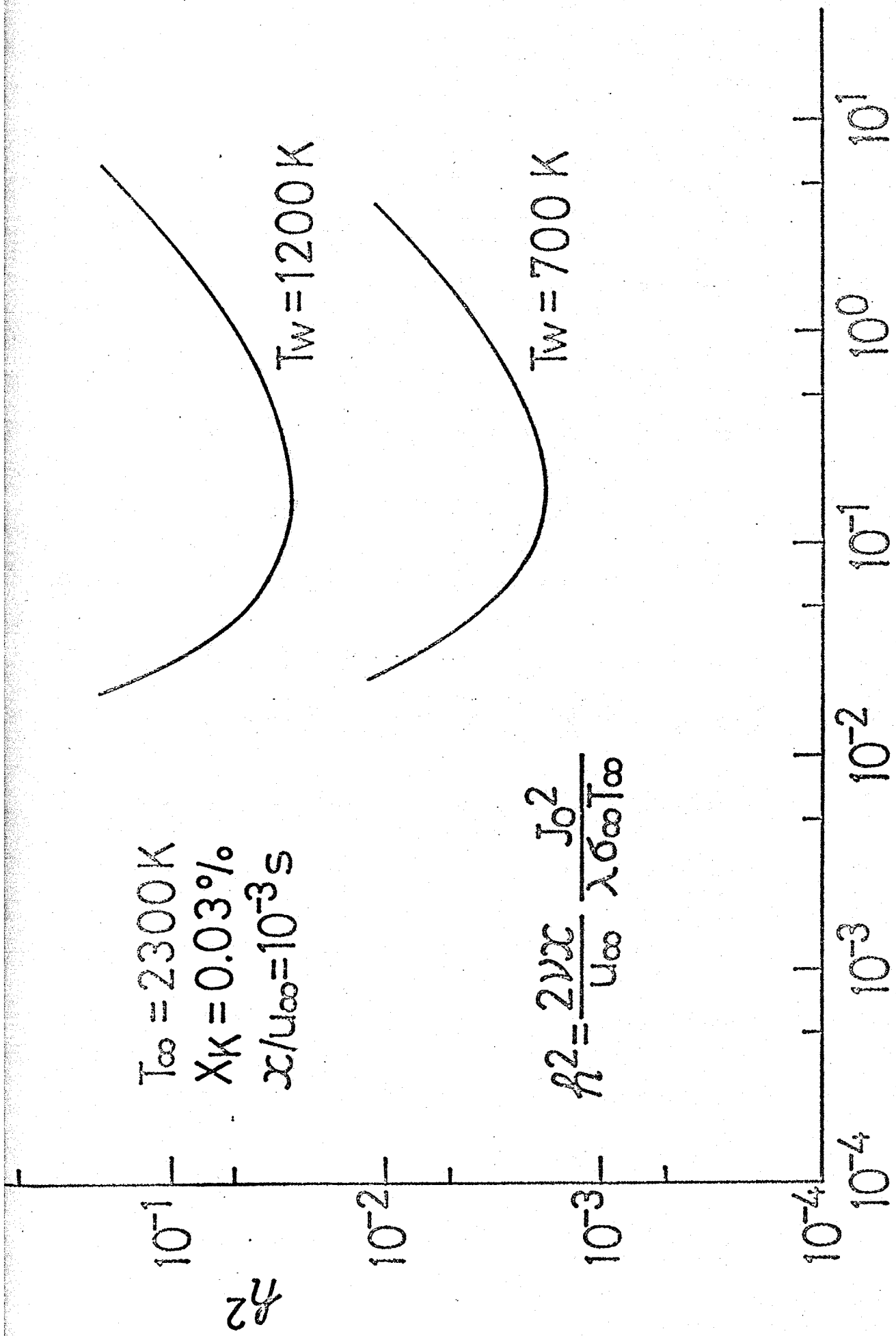
いられる。

4-5. 計算結果と検討

○ 4-5-1. 電子の温度および密度の非平衡がある場合

まず、4-3節において述べたような、電子の熱的および化学的非平衡が考慮された三流体モデルをベースにした一般的な場合の結果について述べる。この場合まず定常状態における電流密度 J_0 を与えると、非擾乱場における冷電極(陽極)まわりの境界層内の種々の物理量の0次分布が、基礎方程式(4.3.21)~(4.3.24)および境界条件(4.3.51)(4.3.52)によって定められ、この0次分布から、1次擾乱場における基礎方程式(4.3.44)~(4.3.46)の各係数の分布が定められ、境界条件(4.3.54)(4.3.55)のもとで k^2 と γ^2 に関する固有値問題が解かれる。電極壁の境界条件としては、(4.3.55)で最も現実的な(ii)の条件を用いる。具体的な計算法は4-3-3に述べたが、 k^2 (4.3.48)は J_0 によって決まるので、結局は、 J_0 と γ^2 についての固有値関係を求める

のと同じであり、 J_0 を変えるごとに0次分布を計算し直さなくてはならないので、実際の計算は煩雑である。種々の電流密度に対して上述の計算を行なうことにより β^2 と γ^2 に関する中立安定曲線が求まる。計算条件としては、第3章の計算条件と対応させて次のように選ばれた。流れ場は (4.3.25) のHあるいはRを見ればわかる通り α/U_0 を規定すれば決まるのでここでは第3章の $\alpha=0.04\text{ m}$, $U_0=40\text{ m/s}$ と対応させて $\alpha/U_0=1.0\times 10^{-3}\text{ s}$ を採用した。また、主流温度は $T_\infty=2300\text{ K}$, カリウム原子モル分率は $X_K=0.03\%$ である。放電の安定性限界に対する電極表面温度の影響をみるために、壁温としては、やはり第3章との対応をとって、 $T_w=1200\text{ K}$, $T_w=700\text{ K}$ の2種類について計算を行なった。このような条件のもとで求められた、放電の安定性に関する中立安定曲線を図4-4に示す。この曲線上は、(4.3.12)~(4.3.20)における増幅率 β が零の場合に相当しており、この曲線より上では $\beta > 0$, この曲線より下では $\beta < 0$ となることは容易に確か



γ2

圖 1-1 中立的自由曲線 (非平衡態の場合)

められる。中立安定曲線が、このように下に凸の極小値をもった曲線として得られたことは、均一放電からアーク放電への放電形態の移行が、ある波数の微小変動に対する、均一放電場における電気場と温度場のカップリングした電気・熱不安定現象として生じうることを示すものである。すなわち、 h^2 が限界値(中立安定曲線の極小値)よりも小さいとき、その均一放電場はあらゆる波数の微小変動に対して安定であるが、 h^2 がこの限界値を越えると、均一放電形態は不安定となり、放電形態の移行が生じ得ることを示している。図中の $T_w = 1200\text{ K}$ における限界値 h_{cr}^2 に対応する電流密度はこの場合 $J_{ocr} = 2100\text{ A/m}^2$ であり、 $T_w = 700\text{ K}$ の場合は $J_{ocr} = 500\text{ A/m}^2$ である。これにより電極表面温度が低くなると、均一放電を維持できる限界電流密度 J_{ocr} が急激に低下することが示された。

しかしながら、これらの限界電流密度は、同条件における実験結果 図 2-11 のアーク発生電流密度(約 100 A/m^2) よりはかなり大きな値となっており、先の実験結果

との対応はとれなかった。この点については、放電の不安定現象の解明を特に目的とした今後の実験結果を待たねばならない。また、主流速度 U_0 および前縁からの距離 x の影響については、 \hat{n}^2 の表示式からわかる通り、 U_0 が大きい程、また x が小さい程、限界電流密度は大きくとれ均一放電はより安定となる。これは、本章でモデル化した冷電極まわりの放電の不安定を大きく支配する低導電度層の実際の厚さが $\sqrt{x/U_0}$ に比例し、この厚さが薄いほど放電の不安定化は抑えられることによると考えられる。

参考までに、 $T_w = 1200\text{ K}$ の中立安定曲線の限界点の条件における均一放電場の ρ 次分布を図4-5に示す。ここでの計算条件のようにシード率も低く壁温も低いときには、壁近傍に、大きな電子の熱的および化学的非平衡性が生じていることがわかる。また、やはりこの限界点における種々の変動量の分布を図4-6に示す。ガス温度の変動量 \hat{T} 、電流密度の変動量 \hat{j} および電子密度の変動量 \hat{n}_e は、上述の固有値問題の

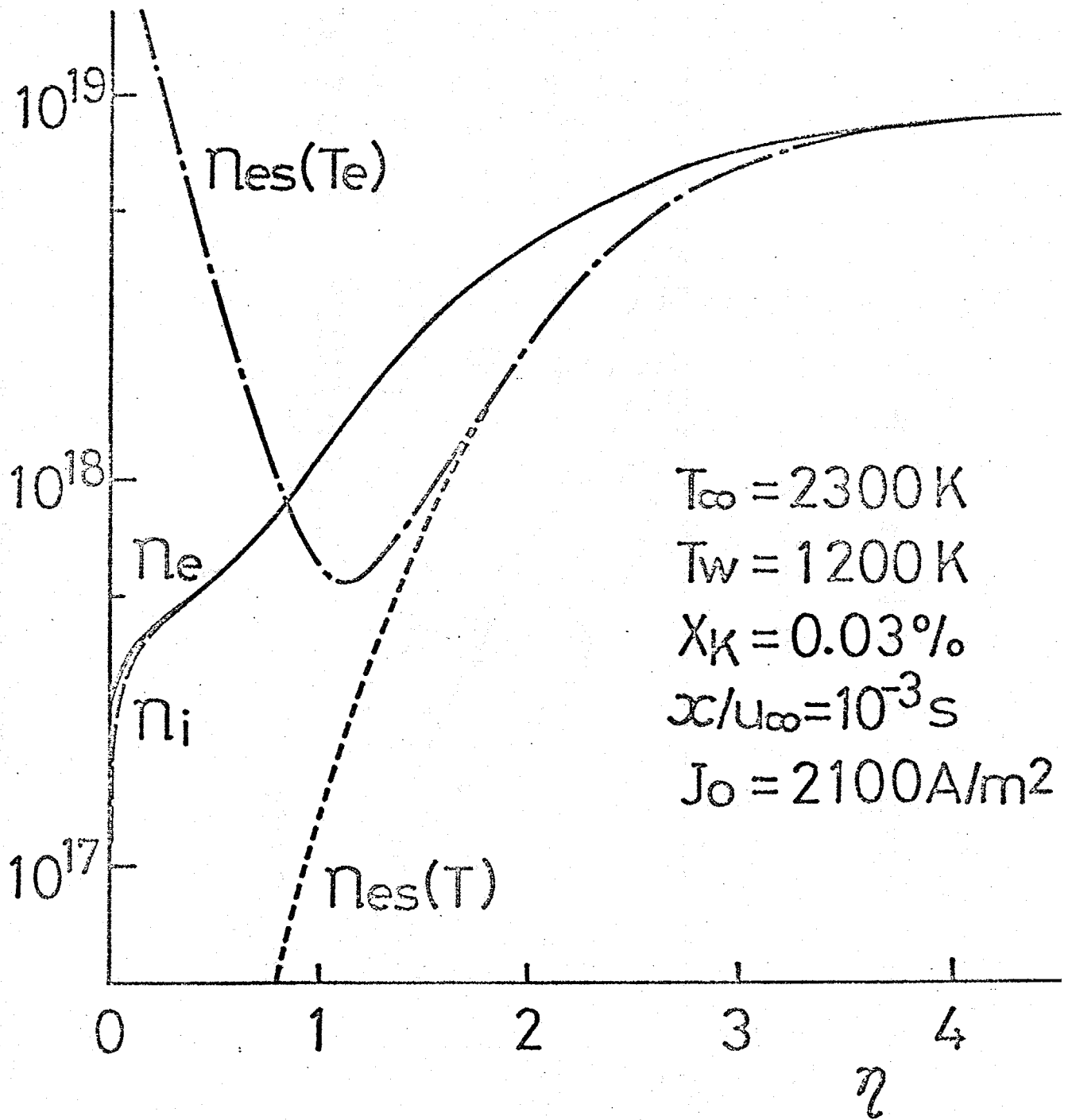


圖4-5. 均一放電場. 0次電子密度分布

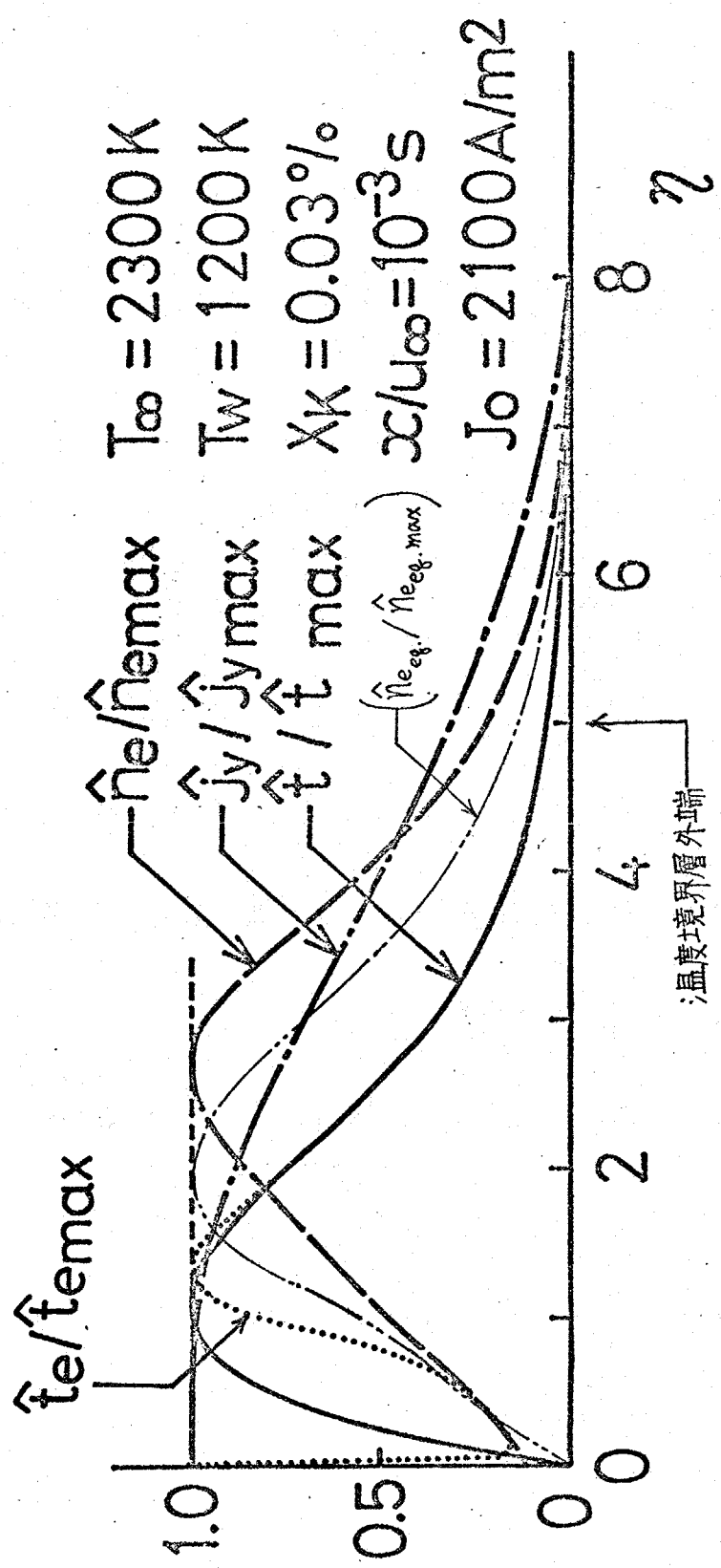


図4-6 変動量の分布 (非平衡の場合)

固有関数として求めたものである。また、電子温度の変動量 \hat{t}_e は、これらの分布より (4.3.36) を用いて算出されたものである。変動量についても、電子温度とガス温度の差が壁近傍で大きく存在するのかわかる。また図中には、電子密度の変動に対する非平衡性をみるために、平衡場で成り立つ \hat{n}_e と \hat{t}_e の関係式 (4.4.2) により \hat{t}_e から算出された $\hat{n}_{e,eq}$ の分布を細い二点鎖線で示してあるが、これにより、非平衡を考慮したとき、電子密度変動も、冷電極の近傍で特に大きくなるガス温度変動には追従していないことがわかる。さらに、 \hat{t}_e の分布を電流集中のモデル図4-3と合わせてみると、電極壁ではガス温度の変動がおさえられているにもかかわらず、電流集中については、壁表面上で最も強く生じており、電極表面上でのアークスポット発生の概念と結びつく。

○ 4-5-2 電子の温度および密度が平衡の場合 (平衡モデルの解)

電子密度が、ガス温度に対するサハ平衡値で与え

られると仮定した場合、非擾乱場の0次の電子温度および電子密度の分布は、カス温度分布が(4.3.22)より与えられれば、直ちに定めることができる。これをもとに、4-4-1の平衡モデルの擾乱場に対する基礎方程式(4.4.3)、(4.4.4)および境界条件(4.4.54)、(4.4.55)を解いて k^2 と γ^2 の固有値関係を求めることができる。この場合も電極壁の条件は、現実的な(4.4.55)の(ii)が用いられる。種々の $\theta_w (= T_w/T_0)$ について求められた中立安定曲線を図4-7に示す。これによれば、放電の安定性に対する限界値は、壁温の低下とともに、非平衡を考慮した図4-4の場合よりもずっと急激に低下していくことがわかる。また、図中の $\theta_w = 0.52174$ は、 $T_w = 1200\text{K}$ に相当するもので、非平衡を考慮した図4-4の $T_w = 1200\text{K}$ の限界値よりも約2桁小さくなっている。この理由は、放電の安定性を主に支配しているのは冷電極表面近傍の低導電度層であり、そこでの導電度(すなわち電子密度)が、非平衡を考慮した場では、図4-5に示した電子密度のように、非平衡性のた

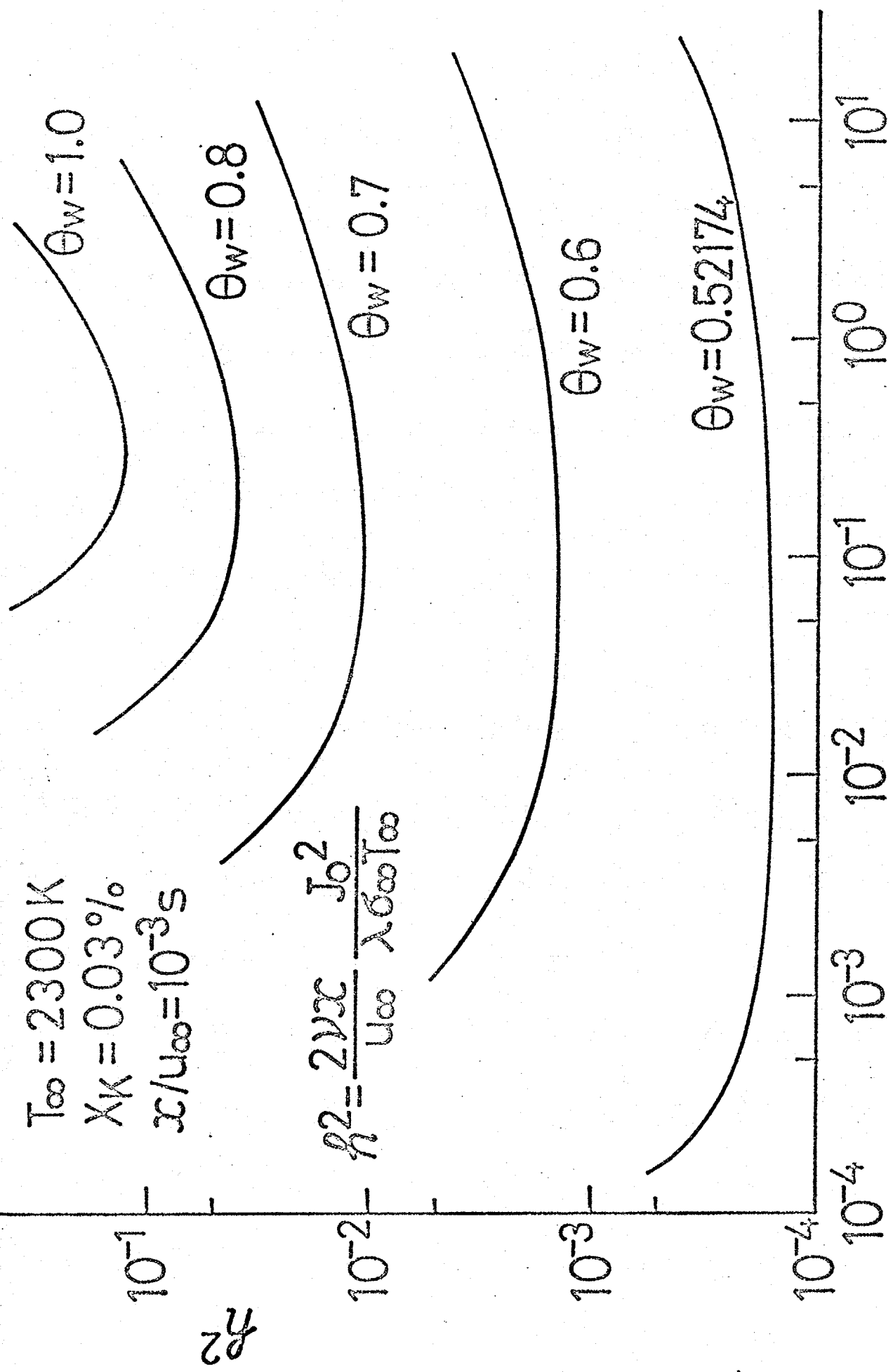


図4-7 中立安定曲線 (平衡の場合) γ^2

めガス温度に対する平衡値よりはずっと大きな値となっているためであると考えることができる。すなわち、通電によって電極壁近くの電子温度が上げられ電子密度が上がるような非平衡性の存在は、冷電極近傍での導電度を高め放電の安定性を高める効果をもつと言える。この事実を端的に示したのが図4-8である。図には、非平衡と平衡のそれぞれの場合についての安定性の限界値 h_{cr}^2 を、 $\theta_w (= T_w/T_0)$ に対して示してある。両方とも T_w の低下に伴い h_{cr}^2 は急激に低下していくが、非平衡の場合は、低導電度層内の導電度の低くなり方が非平衡性によって緩和されるため、 h_{cr}^2 の下がり方は平衡の場合ほどは激しくない。一方、 θ_w が1に近づくにつれて、壁近傍の低導電度層そのものの存在があいまいになってくるために、両方の曲線が漸近していくようすがよく示されている。

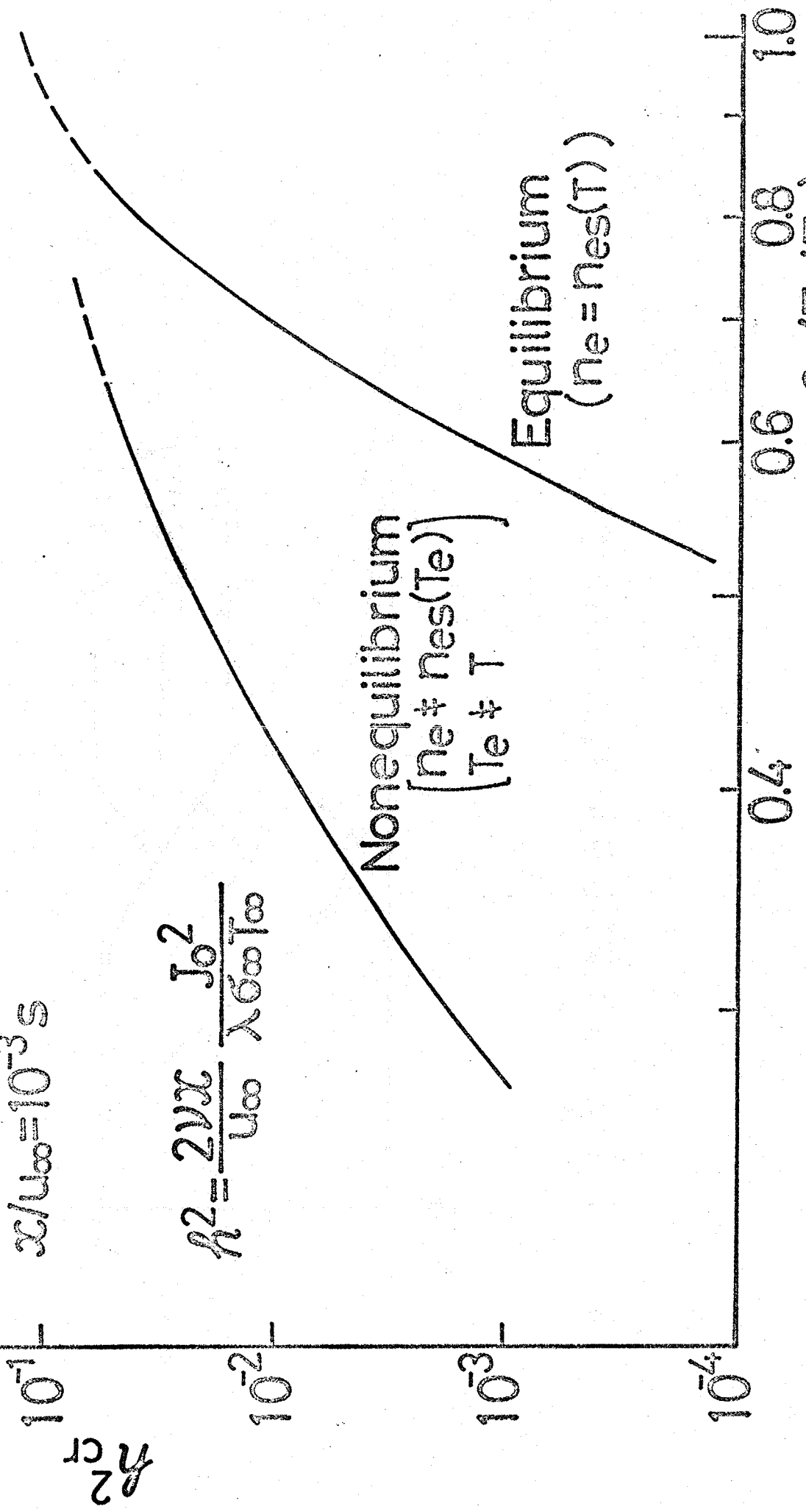
次に、平衡が仮定された場合、 θ_w の変化につれてガス温度変動量の分布がどのように変化していくかを図4-9に示す。この図には、壁温が下がるに従っ

$T_{\infty} = 2300\text{K}$

$X_K = 0.03\%$

$\alpha/u_{\infty} = 10^{-3}\text{ s}$

$$R^2 = \frac{2\nu x}{u_{\infty}} \frac{J_0^2}{\lambda \delta_{\infty} T_{\infty}}$$



Nonequilibrium
($n_e \neq n_{es}(T_e)$)
($T_e \neq T$)

Equilibrium
($n_e = n_{es}(T)$)

図4-8 非平衡と平衡の場合の限界値の比較

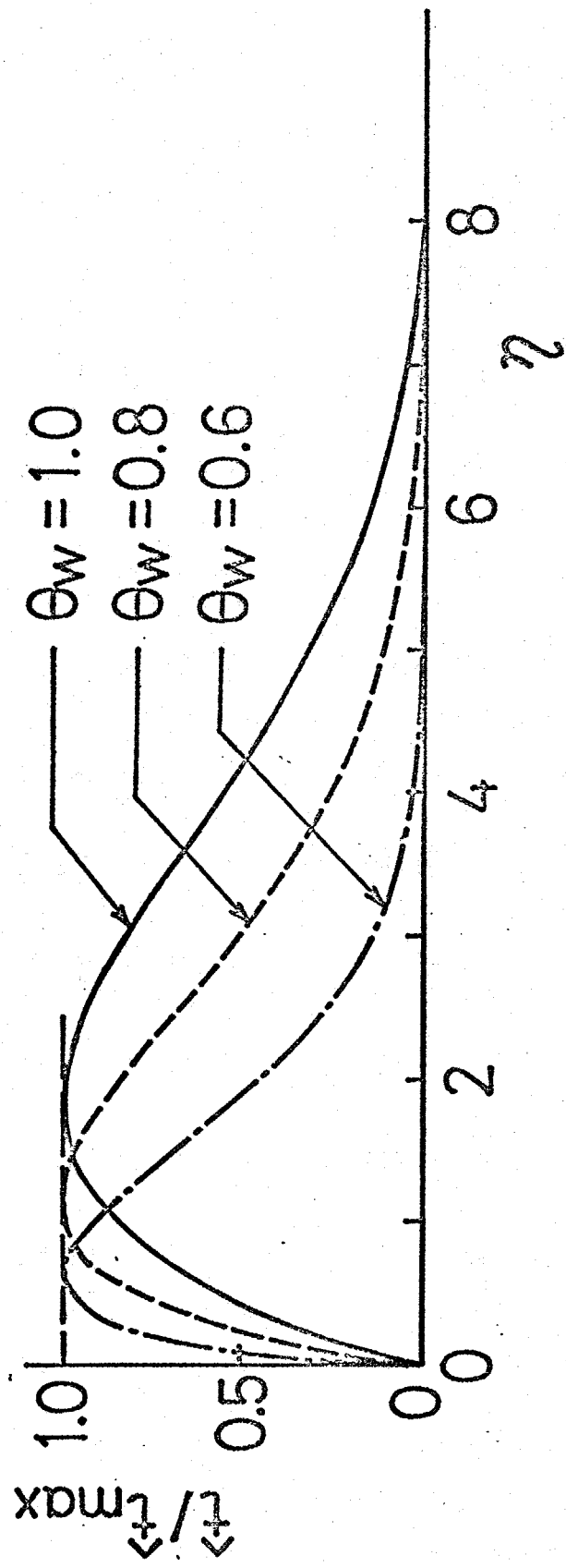


図4-9. ガス温度変動の分布 (平衡の場合)

て、ガス温度変動域が壁近くに押しつけられていく
 ようすが示されているが、実際は θ_w が小さくなった
 時必ず非平衡性が生じ、図4-9程顕著に、温度変動が壁
 近傍に押しつけられていくことはないのである。

・4-5-3 薄層モデルによる境界条件の検討.

ここでは、4-4-2で提示した最も単純化された薄層
 モデル (thin region model) を用いて、物理的状況の互い
 に異なる電極壁の境界条件 (4.3.55) の (i) (ii) (iii) の、安定性の
 限界条件に及ぼす影響について検討する。 (i) (iii) の条
 件は非現実的で、これが厳密に成立するとすると、
 壁への熱流束や電流の流入もあり得ないことになっ
 てしまうが、そのような場合の計算をあえて形式的
 に行なうことにより、電極材料の熱伝導率や導電度
 の影響を検討しようとするわけである。このモデル
 においては全く解析的に解くことができて、(4.4.14)で
 与えられた \hat{e} , \hat{f}_y が、(i) (ii) (iii) の各境界条件のもとで
 有意な解となるための条件より、 k_w^2 と ν_w^2 の固有値関
 係、および固有関数が定まる。

(i) (ii) (iii) の各場合について、(4.4.14) が有意な解となる条件は、

$$(i) \quad (f_1 - f_2)^2 (e^{d_1} - e^{-d_1}) (e^{d_2} - e^{-d_2}) = 0 \quad (4.5.1)$$

$$(ii) \quad (f_1 - f_2) \{ d_1 f_1 (e^{d_1} + e^{-d_1}) (e^{d_2} - e^{-d_2}) - d_2 f_2 (e^{d_1} - e^{-d_1}) (e^{d_2} + e^{-d_2}) \} = 0 \quad (4.5.2)$$

$$(iii) \quad d_1 d_2 (f_1 - f_2)^2 (e^{d_1} + e^{-d_1}) (e^{d_2} - e^{-d_2}) = 0 \quad (4.5.3)$$

(4.4.16) を考えるとき、いずれも d_2 が純虚数 ($i d_0$) となる場合にのみ有意な解をもち

$$(i) \quad d_0 = \pi \quad (4.5.4)$$

$$(ii) \quad \tanh d_0 = \frac{d_0 f_2}{d_1 f_1} \tanh d_1 \quad (d_1 > d_0 > 0) \quad (4.5.5)$$

$$(iii) \quad d_0 = \frac{\pi}{2} \quad (4.5.6)$$

となる。 d_1, d_0, f_1, f_2 に (4.4.12) (4.4.17) (4.4.13) を入れて \hat{h}_x^2 と $\hat{\gamma}_x^2$ についての中立安定曲線を求め図示したのが図 4-10 の (i) (ii) (iii) の曲線である。(4.5.5) については、図 4-11 のようになり、第 1 のモードに対して \hat{h}_x^2 と $\hat{\gamma}_x^2$ の組をくり返し計算で求めた。各場合の固有関数は次のとおりである。

$$(i) \quad \hat{t} = C_1 \sin d_0 \eta_x, \quad \hat{f}_y = C_1 f_2 \sin d_0 \eta_x \quad (4.5.7)$$

$$(ii) \quad \hat{t} = C_2 \left[(e^{d_1 \eta_x} - e^{2d_1 - d_1 \eta_x}) + (e^{2d_1} - 1) \frac{\sin(1 - \eta_x) d_0}{\sin d_0} \right] \quad (4.5.8)$$

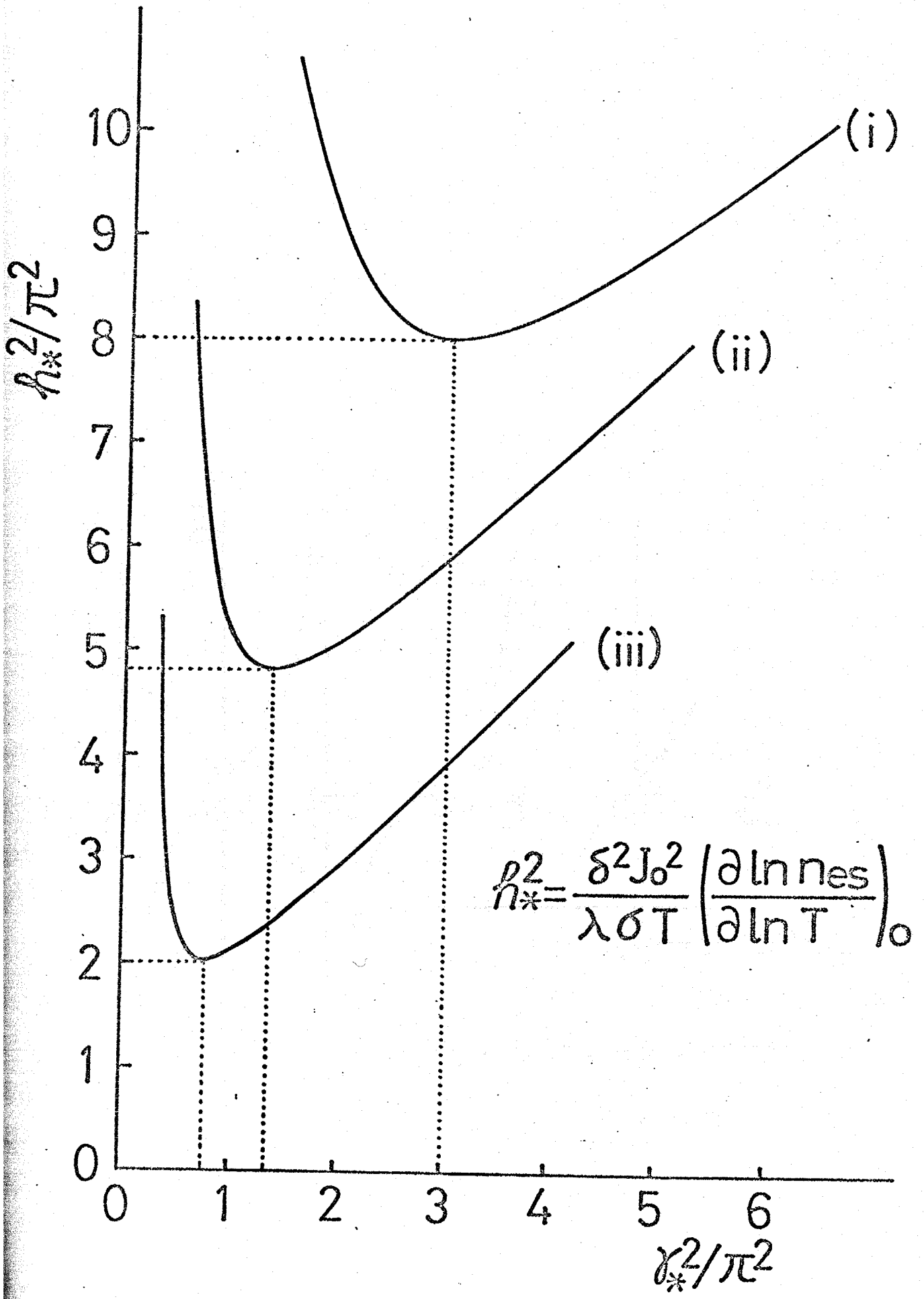


図4-10. 中立安定曲線(薄層モデル)

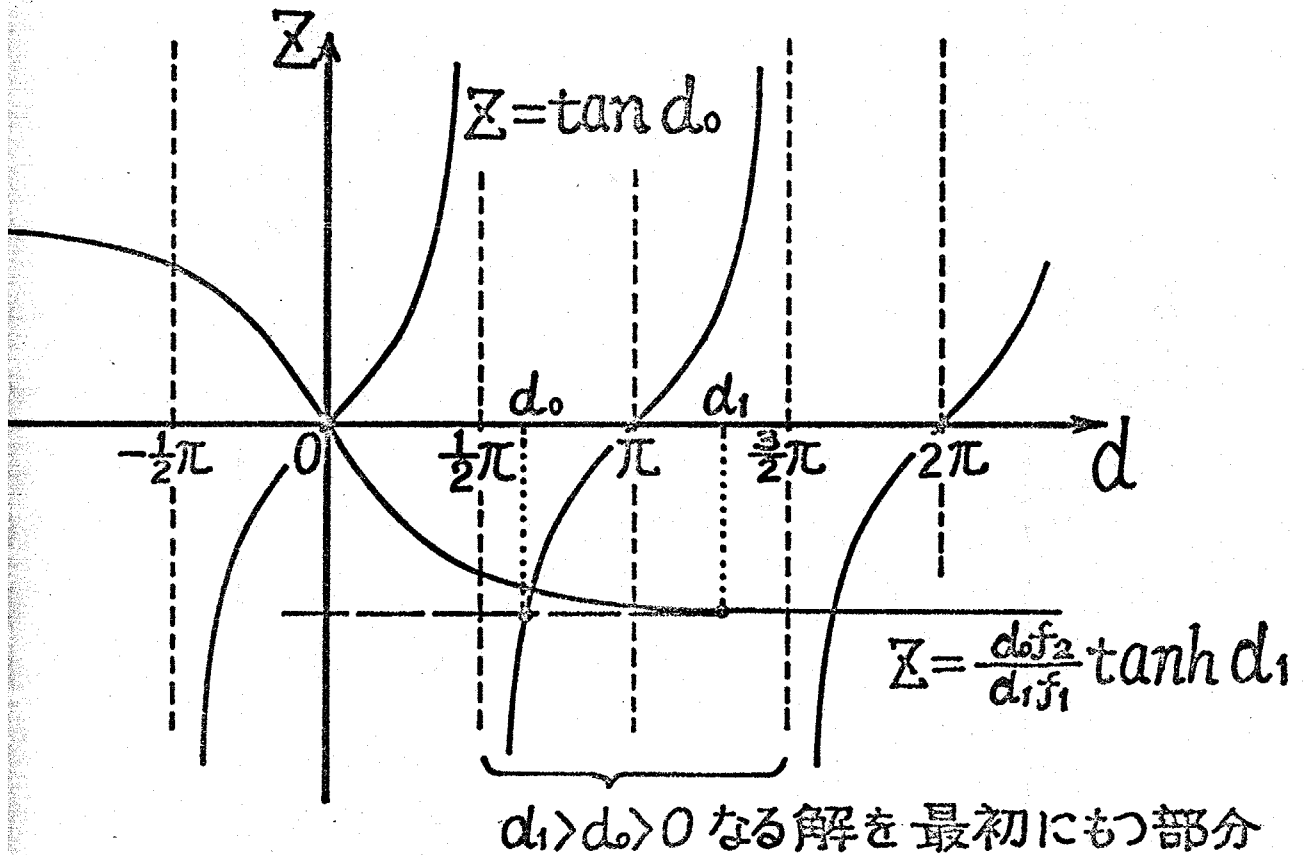


図4-11 (ii)の場合における解の状況

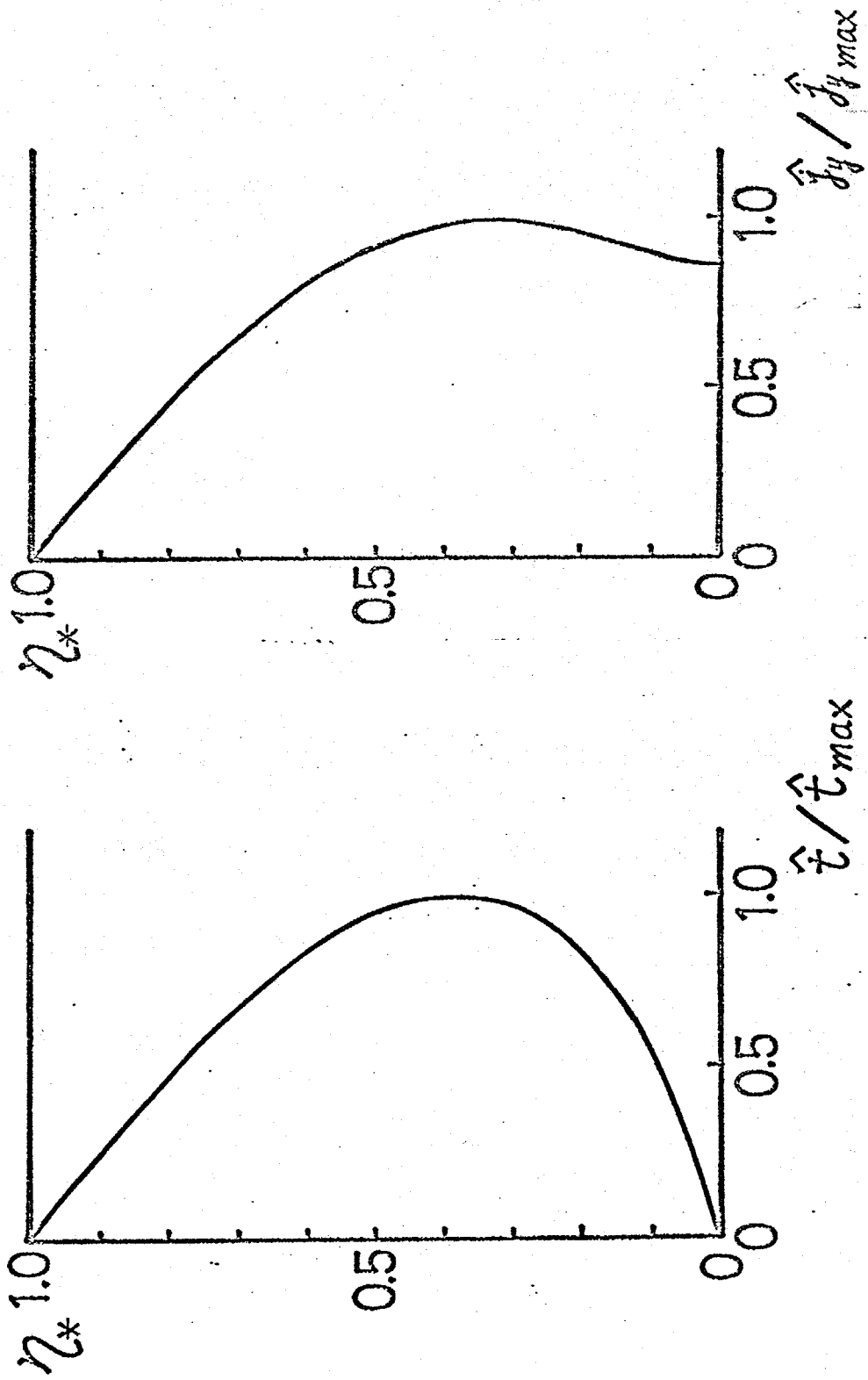


図4-12. 薄層モデル(ii)における変動量の分布

$$\hat{f}_y = C_2 [f_1(e^{d_1 \eta_x} - e^{2d_1 - d_1 \eta_x}) + f_2(e^{2d_1} - 1) \frac{\sin(1 - \eta_x) d_0}{\sin d_0}] \quad (4.5.9)$$

$$(iii) \quad \hat{t} = C_3 \cos d_0 \eta_x, \quad \hat{f}_y = C_3 f_2 \cos d_0 \eta_x \quad (4.5.10)$$

(ii) の場合の固有関数 (4.5.8) (4.5.9) は図示すると図 4-12 のようになり、電流密度変動のピークは、温度場とのカブリングのため壁から少し離れた所に存在している。

(4.3.55) の各境界条件に対する図 4-10 の (i) (ii) (iii) の中立安定曲線の限界値を比較することにより、具体的に材料を選ぶことは別にして、電極材料は熱的には良導体（熱伝導率が大きい）、電気的には不良導体（導電度が小さい）の傾向の強いものの方が不安定をおこしにくいことがわかる。また、(4.4.8) の h_x^2 と (4.4.5) を考えあわせると、シード原子の電離エネルギーが小さい方が放電の安定性が高いこともわかる。

4-6. 結 論

シードされた燃焼ガスの冷電極（陽極）まわりの層流境界層内における均一放電からアーク放電への

放電形態の変化を、冷電極近傍の低導電度層内における、温度場と電気場の相互干渉による不安定向題としてモデル化し、線型安定論を適用して理論解析を行ない以下の結論を得た。

- (1) 均一放電からアーク放電への放電形態の変化は、微小変動に対する電気場と温度場の相互干渉による電気・熱不安定として生じうる。
- (2) 電極温度が低くなると、放電の安定性に対する限界電流度は著しく低下する。これは、放電の安定性を特徴づける冷電極近傍の低導電度領域内での導電度が下がり、さらに、この低導電度領域が広がるためである。
- (3) 主流速度が大きい方が、放電の安定性に対する限界電流密度は大きい。これは、放電の安定性を特徴づける冷電極近傍の低導電度領域の厚さが、流速が大きいほど小さくなるからである。
- (4) 冷電極まわりの電子密度の非平衡性は、電子密度を、ガス温度に対するサハ平衡値よりも高く保った

め、放電の安定性に対する限界電流密度は、平衡電子密度が維持されていると仮定した場合よりは高くなる。

(5) 放電の不安定は、冷電極まわりの低導電度層によって強く支配されるが、変動量については主流部中にも入り込む。また、電流密度の変動量は、ほぼ電極表面で最大となり、このことは、電極表面でのアークスポットの発生の概念と一致する。

(6) 電極材料は、熱的には良導体、電氣的には不良導体の傾向が強い方が、放電の不安定は生じにくい。

第5章 磁場の影響

これまで述べてきた第2章から第4章までの議論では、本研究の対象である、シードされた燃焼ガスの冷電極まわりの境界層内における特徴的な現象を明らかにするという立場から、外部磁場の存在しない場について取り扱ってきたが、本章においては、特に、第3章で明らかにした冷電極まわりにおける種々の非平衡性あるいは電荷分離が、外部磁場の存在によってどのように影響されるかを、やはり三流体モデルを用いて検討する。

5-1. 基礎方程式

5-1-1. 基礎方程式

本章での議論においては、簡単のため、ガスの密度 ρ 、ガスの粘性係数 μ 、電子・イオンの移動度 μ_e, μ_i が一定であると仮定する。この仮定の妥当性は、外

部磁場が存在しない場合に対する本章の解(図5-3)と、物性値の温度依存性を考慮した第3章での解(図3-8)と比較することにより確認される。解析場は図5-1に示すような二次元層流境界層を考え、 x 軸方向に外部磁場 $B = (0, 0, B)$ が存在するとする。このとき、(3.3.2)~(3.3.9)に対応する基礎方程式は次のようになる。

流れ場、温度場については、

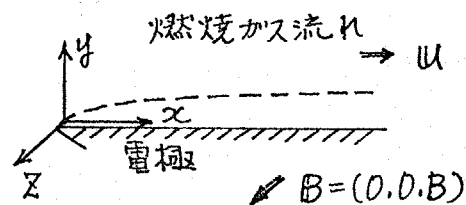


図5-1. 解析場

連続の式

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.1.1)$$

運動量保存式

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} J_y B \quad (5.1.2)$$

エネルギー式

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho c_p} J \cdot E' \quad (5.1.3)$$

電場場については、ベクトル表示で取り扱うことにすれば、

電子保存式

$$\nabla \cdot (n_e u_e) = \dot{n}_e \quad (5.1.4)$$

イオン保存式

$$\nabla \cdot (n_i u_i) = \dot{n}_i \quad (5.1.5)$$

ポアソンの式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{e}{\epsilon} (n_i - n_e) \quad (5.1.6)$$

マクスウェルの式

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (5.1.7)$$

電子エネルギー式

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sum_{\alpha} \delta_{\alpha} \bar{v}_{\alpha} n_{\alpha} \frac{3}{2} k (T_{\alpha} - T) \quad (5.1.8)$$

ここで、

$$n_e u_e = n_e (u + W_e) \quad (5.1.9)$$

$$n_i u_i = n_i (u + W_i) \quad (5.1.10)$$

であるが、電子およびイオンの、ガス流速からのずれすなわち電界によるドリフトと濃度勾配による拡散の和による流速 W_e および W_i は磁場の影響をうけるので、第3章の場合とは異なり、電子およびイオンに対するホール係数

$$\beta_e = \mu_e B, \quad \beta_i = \mu_i B \quad (5.1.11)$$

を導入すると、結局次のようになる。

$$W_e = - \frac{\mu_e}{1 + \beta_e^2} (\mathbb{I} + \beta_e M_e) \cdot \mathbf{E}_e \quad (5.1.12)$$

$$W_i = \frac{\mu_i}{1 + \beta_i^2} (\mathbb{I} - \beta_i M_i) \cdot \mathbf{E}_i \quad (5.1.13)$$

ただし、3次テンソル、 \mathbb{I} , M_e , M_i は、

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_e = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_e \end{pmatrix}, \quad M_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_i \end{pmatrix} \quad (5.1.14)$$

(単位ランソル)

であり、一般化された電界 \mathcal{E}_e , \mathcal{E}_i は次の通りである。

$$\mathcal{E}_e = \mathbb{E}' + \frac{kT_e}{e} \frac{1}{n_e} \nabla n_e \quad (5.1.15)$$

$$\mathcal{E}_i = \mathbb{E}' - \frac{kT}{e} \frac{1}{n_i} \nabla n_i \quad (5.1.16)$$

\mathbb{E}' は、カス流速 u によつた座標から見た電界で、 $B = (0, 0, B)$

のとき、次のように与えられる。

$$\mathbb{E}' = \mathbb{E} + u \times B = \begin{pmatrix} E_x + vB \\ E_y - uB \\ E_z \end{pmatrix} \quad (5.1.17)$$

電気場の基礎式 (5.1.4) ~ (5.1.7) は、第3章に示したのと全く同様な方針により、解きやすい形に変形する。(詳しくは第3章 P.84~88 を参照) まず、(5.1.4) に

(5.1.12) を入れた式を $\frac{\mu_e}{1+\beta_e^2}$ で割った式と、(5.1.5) に

(5.1.13) を入れた式を $\frac{\mu_i}{1+\beta_i^2}$ で割った式を加え合わせ

$$\mu_i \ll \mu_e, \quad \beta_i \ll \beta_e \sim 1 \quad (5.1.18)$$

を用い、また電荷分離 ($n_i - n_e$) を (5.1.6) より $\nabla \cdot \mathbb{E}$ でおきかえ整理すると、次のような電子保存式が得られる。

$$u \cdot \nabla n_e + \nabla \cdot \left[\frac{\epsilon \mu_i}{e} (\nabla \cdot \mathbb{E}) \mathbb{E}' - \frac{v}{\zeta c_i} \left(1 + \frac{T_e}{T} \right) \nabla n_e \right] - \nabla \cdot \left[\mu_i \beta_e n_e M_e \cdot \mathcal{E}_e \right] = \dot{n}_e \quad (5.1.19)$$

(5.1.19) においては、第3章の(3.3.20)の左辺第2項および大括弧内の第3項に相当する項は、第3章での検討の結果小さいことわかっているので省いてある。結局、(3.3.20)と較べてみればわかるように、電子保存式において磁場の影響が出るのは、下線部に対してだけである。

次に、(5.1.5)から(5.1.4)を引き、 $\dot{n}_e = \dot{n}_i$ を用いると、

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5.1.20)$$

また、(5.1.10)から(5.1.9)を引き、(5.1.12), (5.1.13)を考え、(5.1.18)および、第3章の議論と同様、電流が大きいと電子流束において電界によるドリフト流速が卓越すること ($E_e \simeq E'$) を用いると、次式を得る。

$$\mathbf{J} = \frac{en_e m_e}{1 + \beta_e^2} (\mathbf{I} + \beta_e M_e) \cdot \mathbf{E}' \quad (5.1.21)$$

こうして得られたこの近似的な“一般化されたオームの法則”は、(5.1.19)の $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 項をみつもるときにのみ用いられるものである。

以上より、結局、二次元場においては、(5.1.19), (5.1.21), (5.1.20) および (5.1.7) が、 n_e, J_x, J_y, E_x, E_y の

5つの変数に対する5個の基礎方程式となる。これらより求まる n_e , T より、ポアソンの式 (5.1.6) からイオン密度 n_i が定まる。

(5.1.1) ~ (5.1.3) および (5.1.19) に対する境界条件は第3章と同様な考察により、次のようになる。

$$y \rightarrow \infty : \quad U = U_\infty, \quad T = T_\infty, \quad n_e = n_{es}(T_e) \quad (5.1.22)$$

$$y = 0 : \quad U = V = 0, \quad T = T_w, \quad \Gamma_{iw} = 0 \quad (5.1.23)$$

(5.1.23) の壁表面におけるイオン流束が零という条件

$\Gamma_{iw} = 0$ は、次のようにかける。

$$\begin{aligned} \left[\frac{\epsilon \mu_i}{e} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}' - \frac{\nu}{S_{ci}} \left(1 + \frac{T_e}{T}\right) \nabla n_e \right] - \mu_i \beta_e n_e M_e \cdot \mathbf{E}_e \\ = - \frac{(1 + \beta_e^2) \mu_i}{e \mu_e} \mathbf{J} \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

○ 5-1-2 電気場の設定

解くべき場および必要な境界条件が完全に規定されていれば、上述のように電気場に対する基礎式は用いているので、一般に解くことができ電気場を求めることができる。しかしながら、対向の陰極を考えない陽極平板まわりの境界層を単独に取り扱う本解析の立場においては、計算に際して、例えば電流

密度のような計算条件をあらかじめ与えてやらねばならない。しかしながら、この計算条件は勝手に与えることはできず、今考えているような冷電極まわりの薄い境界層内で、急激に導電度に変化しているような場に対して、電流保存式 (5.1.20) および、マクスウェルの式 (5.1.7) を満足するものでなくてはならない。そこで、ここでは、計算に際しどのような条件設定を行えばよいかを示し、計算条件の分類もあわせて行なう。

(5.1.20) および (5.1.7) を 2 次えでかくと、

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0 \quad (5.1.25)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (5.1.26)$$

電流場に対する検討には、次のような関係をみたす流れ関数を導入するのが便利である。

$$J_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad J_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.1.27)$$

このとき、(5.1.25) は成立するから、(5.1.27) を用いて、(5.1.26) を満足する条件を求めればよい。また、次の関係

$$\nabla \times \mathbf{E}' = \nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (5.1.28)$$

において、 $\mathbf{B} = \text{const.}$ ($\mathbf{B} = (0, 0, B)$), $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ であり

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (5.1.29)$$

が成立するから、結局、(5.1.26)のかわりに

$$\frac{\partial E'_y}{\partial x} - \frac{\partial E'_x}{\partial y} = 0 \quad (5.1.30)$$

を満たす条件を求めればよい。

さて、(5.1.21)は2次元で

$$J_x = \frac{en_e \mu_e}{1 + \beta_e^2} (E'_x - \beta_e E'_y) \quad (5.1.31)$$

$$J_y = \frac{en_e \mu_e}{1 + \beta_e^2} (\beta_e E'_x + E'_y) \quad (5.1.32)$$

あるいは逆に、

$$E'_x = E_x + vB = \frac{1}{en_e \mu_e} (J_x + \beta_e J_y) \quad (5.1.33)$$

$$E'_y = E_y - uB = \frac{1}{en_e \mu_e} (-\beta_e J_x + J_y) \quad (5.1.34)$$

となるから、この(5.1.33)(5.1.34)に(5.1.27)を代入し

(5.1.26)に入れて整理すると、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - A_x \frac{\partial \psi}{\partial x} - A_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \beta_e A_y \frac{\partial \psi}{\partial x} - \beta_e A_x \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (5.1.35)$$

ただし、

$$A_x = \frac{\partial \ln \sigma}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial \ln \sigma}{\partial y} \quad (\sigma = en_e \mu_e) \quad (5.1.36)$$

ここで、今考えている冷電極まわりの境界層解析に

おける立場は次のようである。まず、薄い境界層内で導電度が大きく変化しているから、境界層近似により、

$$A_x \ll A_y \quad (5.1.37)$$

このとき、(5.1.35)は、次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - A_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \beta_0 A_y \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (5.1.38)$$

ここで、さらに、次の電流場に対する局所相似を考える。

$$\frac{\partial J_y}{\partial x} = 0 \quad (5.1.39)$$

(5.1.27) (5.1.39) より、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (5.1.40)$$

一方、このとき、(5.1.25)を x で微分し、(5.1.39)を用いると

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = C(y) \quad (5.1.41)$$

(5.1.41)の C が有限な値をとるとすると、 J_y が y 方向に単調減少するような解しか存在しえないことになり、今考えているような対向電極なる有限空間内については不合理となる。よって

$$C=0, \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (5.1.42)$$

ここで、(5.1.38)に(5.1.40) (5.1.42)を考えることにより、

(5.1.33)から次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x'}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \beta_e \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \beta_e \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - A_y \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \beta_e A_y \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0\end{aligned}\quad (5.1.43)$$

よって、(5.1.37) と (5.1.39) を満足する電気場は、(5.1.40), (5.1.42), (5.1.43) より、次のようになることかわかった。

$$J_y = \text{const.}, \quad E_x' = \text{const.}\quad (5.1.44)$$

解析に際し設定する状況は、磁場の向き (B の正負) 電流の向き (J_y の正負) によって大きく異なるが、図 5-1 の陽極まわりの解析を行なう立場から、 $J_y > 0$ とし、またこのとき、MHD 発電との対応も考えて、この電流の方向 (+ y 方向) の起電力を発生するように磁場は (- x) 方向にあるような場合 (すなわち $B < 0$) に議論を限定することにする。すなわち、

$$J_y > 0, \quad B \leq 0\quad (5.1.45)$$

また、電極の形状については、MHD 発電との対応を考慮して、連続ファラデ電極 (分割なし) と、理想分割電極 (無限分割) の 2 つの両極端を考えると、連続ファラデ電極の場合は、電極壁上で $E_x' = E_x = 0$ だから、(5.1.44) より全域で $E_x' = 0$ となり、理想分割電極の

の場合、電極壁上で $E'_x (=E_x)$ の存在が可能となるが、回路の接続法によっていろいろな E'_x の値が存在しうる。

このような状況のもとで、次の4種類の電氣的な場が設定できる。(iv)が最も一般的な場合である。

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} B=0, E_x=0, \quad \text{(ii)} B=0, E_x \neq 0 \\ \text{(iii)} B \neq 0, E'_x=0, \quad \text{(iv)} B \neq 0, E'_x \neq 0 \end{array} \right\} (5.1.46)$$

それぞれの場合について描いた代表的な電流線の説明図を図5-2に示す。(i)の場合が、外部磁場がなく外部印加電圧による通電があるとして取り扱った第3章における解析場と対応するものであり、この場

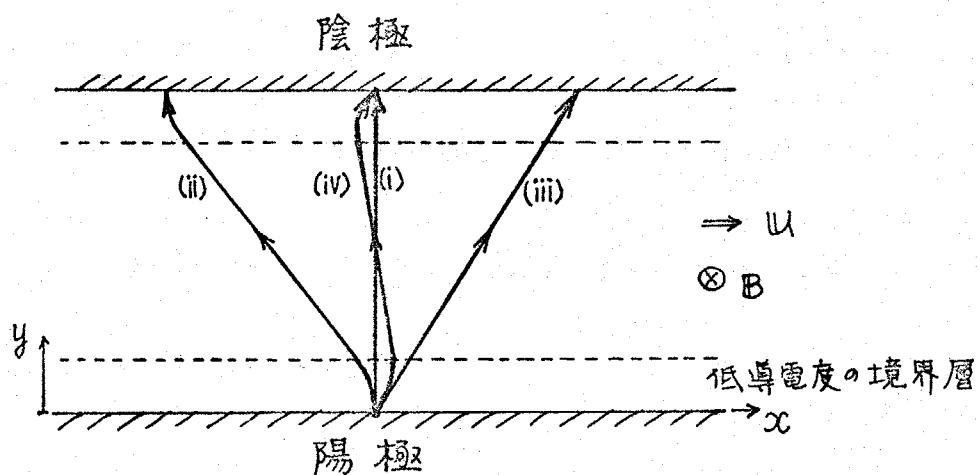


図5-2. 電流線説明図 ($E'_x < 0$ の場合)

合は、

$$J_x = 0, \quad J_y = \text{const.} > 0, \quad E_x = 0, \quad E_y = \frac{1}{\sigma} J_y \quad (5.1.47)$$

となり、電流線は図5-2の(i)となる。(ii)の場合は、外部磁場がなくても、理想分割電極により E_x が存在すると、 E_x によって J_x が存在し、電流の出入りの陽極と陰極の x 方向位置が等しくなっている場合である。この場合

$$J_x = \sigma E_x, \quad J_y = \text{const.} > 0, \quad E_x = \text{const.}, \quad E_y = \frac{1}{\sigma} J_y \quad (5.1.48)$$

となり、 $E_x < 0$ とした時の電流線は図5-2の(ii)となる。(iii)の場合は、MHD発電機における連続ファラデー電極の場合に対応する。この場合、

$$J_x = -\beta_e J_y, \quad J_y = \text{const.} > 0, \quad E_x' = 0, \quad E_y' = \frac{1 + \beta_e^2}{\sigma} J_y \quad (5.1.49)$$

となり、電流線は直線となり、図5-2の(iii)となる。(iv)の場合は、(ii)と(iii)を合わせた場合に対応し、 E_x' の値として種々の組み合わせが可能であるが、ここでは特に、理想分割電極により、 x 方向同位置にある対向電極より電流を取り出すMHD発電の場合を考えることにすれば、

$$\int_0^L J_x dy = 0 \quad (L: \text{上下電極間隔}) \quad (5.1.50)$$

が成立つ。この場合、

$$\left. \begin{aligned} J_x &= -\beta_e J_y + \sigma E'_x, & J_y &= \text{const.} > 0 \\ E'_x &= \text{const.} < 0, & E'_y &= \frac{1+\beta_e^2}{\sigma} J_y - \beta E'_x \end{aligned} \right\} (5.1.51)$$

となり、電流線は図 5-2 の (IV) となる。このようになるのに必要な E'_x の値の設定については、現在のところ陰極まわりの詳細が明らかでないので、いちおうダクト中央部を $y=R$ として、(5.1.50) のかわりに、

$$\int_0^R J_x dy = 0$$

を考えると、これに (5.1.51) を代入して整理することにより

$$E'_x = \beta_e J_y R / \int_0^R \sigma dy \quad (5.1.52)$$

ここで δ を境界層厚さとして

$$\int_0^R \sigma dy = \int_0^\delta \sigma dy + \sigma_\infty (R - \delta) \quad (5.1.53)$$

だから、 $R \gg \delta$ (ダクトが十分大きい) の場合、(5.1.52) は、

$$E'_x = \frac{\beta_e J_y}{\sigma_\infty} \quad (5.1.54)$$

一方 $R \rightarrow \delta$ (ダクトが小さい) の場合、

$$E'_x = \frac{\beta_e J_y}{\sigma_\infty} \left[\delta / \int_0^\delta \frac{\sigma}{\sigma_\infty} dy \right] \quad (5.1.55)$$

となる。一般に $\delta / \int_0^\delta (\sigma / \sigma_\infty) dy \simeq 2$ 程度であるから
この場合設定する E_x' の値としては、

$$E_x' = A_E \frac{\beta_e J_y}{\sigma_\infty} \quad (5.1.56)$$

とにおいて、 $A_E = 1 \sim 2$ 程度の値を考えればよいこと
になる。

以上において、(5.1.41), (5.1.44) より、外部磁場 B ,
電流密度 J_y (const.) および (5.1.56) 程度の大きさの x
方向電界 E_x' (const) を与えれば (5.1.25)(5.1.26) が満足
され、このように設定された場において (5.1.19) と
(5.1.21) を解けば、 n_e と E_y と J_x が求まることにな
る。

・ 5-1-3. 基礎式の整理と無次元化

上で述べた電気場の分類において、(IV) が一般的な
場合である。こゝ (IV) の場合 ($B \neq 0, E_x \neq 0$) について議論を
展開しておけば、(i)(ii)(iii) の場合はその特別な場合と
して位置づけられるので、ここでは (IV) の場合につい
て基礎式を整理し無次元化を行なう。

(5.1.41)(5.1.44) が成立するように定められた場におい

ては、(5.1.21)を用いることにより、電子保存式(5.1.19)および電子エネルギー式(5.1.18)における電気場の関与した項を、既知(計算に際し与えられる)の J_y , E_x' のみを用いた表示に書きかえることができる。それが次のようになる。

電子保存式

$$\begin{aligned}
 & (u+u_1)\frac{\partial n_e}{\partial x} + (v+v_1)\frac{\partial n_e}{\partial y} \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(1+\beta_e^2)\epsilon\mu_i J_y^2}{e^3\mu_e^2} \frac{1}{n_e^3} \frac{\partial n_e}{\partial y} - \frac{\beta_e(1+\beta_e^2)\epsilon\mu_i J_y}{e^2\mu_e^2} \frac{1}{n_e} \frac{\partial u}{\partial y} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\beta_e(1+\beta_e^2)E_x'\epsilon\mu_i J_y}{e^2\mu_e^2} \frac{1}{n_e^2} \frac{\partial n_e}{\partial y} + \frac{\beta_e^2 E_x'\epsilon\mu_i}{e\mu_e} \frac{\partial u}{\partial y} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\nu}{Sc_i} \left(1 + \frac{T_e}{T}\right) \frac{\partial n_e}{\partial y} \right] + \dot{n}_e \tag{5.1.57}
 \end{aligned}$$

電子エネルギー式

$$\frac{(1+\beta_e^2)J_y^2}{e\mu_e} \frac{1}{n_e} - 2\beta_e J_y E_x' + e\mu_e (E_x')^2 n_e = \sum_x \delta_x \bar{v}_{ex} n_e \frac{3}{2} k(T_e - T) \tag{5.1.58}$$

ここで、(5.1.57)の u_1, v_1 は、磁場と電場の相互作用によって生じた電子流束に相当する項であり、次のように導びかれたものである。(5.1.19)の左辺の最後の下線をほどこした項は、 $E_e \sim E'$ を用いて、

$$-\nabla \cdot [\mu_i \beta_e n_e M_e \cdot E'] = \mu_i \beta_e \nabla \cdot \begin{pmatrix} n_e E_y' \\ -n_e E_x' \end{pmatrix} \tag{5.1.59}$$

さらに、(5.1.30)を考慮して、(5.1.51)を代入すれば、 J_y, E_x'

を用いて次のようになる。

$$-\nabla \cdot [\mu_i \beta_e n_e m_e \cdot E'] = u_i \frac{\partial n_e}{\partial x} + v_i \frac{\partial n_e}{\partial y} \quad (5.1.60)$$

ただし、

$$u_i = \frac{(1+\beta_e^2) \beta_e \mu_i J_y}{e \mu_e} \frac{1}{n_e} - \beta_e^2 \mu_i E_x' \quad (5.1.61)$$

$$v_i = -\beta_e \mu_i E_x' \quad (5.1.62)$$

また、(5.1.6)より電荷分離も次のように書き換えられる。

$$n_i - n_e = -\frac{(1+\beta_e^2) \epsilon J_y}{e^2 \mu_e} \frac{1}{n_e^2} \frac{\partial n_e}{\partial y} + \frac{\epsilon}{e} B \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.1.63)$$

基礎式を無次元化するにあたり、ここでは ρ が一定であると仮定しているのので、変換座標としては、第4章と同様に

$$\xi = x, \quad \eta = y \sqrt{\frac{U_{00}}{2Vx}} \quad (5.1.64)$$

を用い、(3.3.38)と同様の無次元化を行なう。ただし $\rho = \text{const.}$ であるので $\zeta = n_e / n_{e0}$ である。このとき $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 0$ なる局所相似仮定を導入すれば、(5.1.57)、(5.1.58)は次のようになる。

$$\begin{aligned} & (f + C_1 \frac{1}{\xi} + C_2 + C_3) \zeta' \\ & + [A_1 \frac{1}{\xi^3} \zeta' + A_2 (1 + \frac{\beta_e}{\theta}) \zeta' + A_3 \frac{1}{\xi} + A_4 \frac{1}{\xi^2} \zeta' + A_5]' = -R \quad (5.1.65) \end{aligned}$$

$$G_1 \frac{1}{\xi^2} + G_2 \frac{1}{\xi} + G_3 = \frac{\sqrt{\theta_e} (\theta_e - \theta)}{\theta} \quad (5.1.66)$$

∴ ∴ ∴

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(1+\beta_e^2)^2 \epsilon \mu_i J_y^2}{e^3 \mu_e^2 n_{e\infty}^3} \cdot \frac{1}{\nu}, & A_2 &= \frac{1}{S c_i} \\ A_3 &= - \frac{(1+\beta_e^2) \beta_e \epsilon \mu_i u_{\infty} J_y}{e^2 \mu_e^2 n_{e\infty}^2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot f'' \quad (f' = \frac{u}{u_{\infty}}) \\ A_4 &= - \frac{(1+\beta_e^2) \beta_e \epsilon \mu_i J_y}{e^2 \mu_e n_{e\infty}^2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot E'_x \\ A_5 &= \frac{\beta_e^2 \epsilon \mu_i u_{\infty}}{e \mu_e n_{e\infty}} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot f'' \cdot E'_x \\ R &= \frac{2 \xi \dot{n}_e}{n_{e\infty} u_{\infty}} \end{aligned} \quad (5.1.67)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(1+\beta_e^2) \beta_e \mu_i J_y}{e \mu_e n_{e\infty} u_{\infty}} \cdot \eta \\ C_2 &= - \frac{\beta_e^2 \mu_i}{u_{\infty}} \eta \cdot E'_x \\ C_3 &= \beta_e \sqrt{\frac{2 \xi}{u_{\infty} \nu}} \mu_i E'_x \end{aligned} \quad (5.1.68)$$

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{(1+\beta_e^2) J_y^2}{e \mu_e n_{e\infty}^2 D} \\ G_2 &= - \frac{2 \beta_e J_y}{n_{e\infty} D} E'_x \\ G_3 &= \frac{e \mu_e}{D} (E'_x)^2 \\ t = t = L, \quad D &= 2P \sqrt{\frac{8 k T_{\infty}}{\pi m_e}} \sum_x \delta_x Q_{ex}^{(1)} X_x \end{aligned} \quad (5.1.69)$$

(5.1.65) に対する境界条件は、(5.1.22), (5.1.23), (5.1.24)

より、

$$\eta \rightarrow \infty : \quad \zeta = 1.$$

$$\eta = 0 : \quad A_1 \frac{1}{\zeta^3} \zeta' + A_2 (1 + \frac{\beta_e}{\beta}) \zeta' + A_3 \frac{1}{\zeta} + A_4 \frac{1}{\zeta^2} \zeta' + A_5$$

$$= Z_1 + Z_2 \zeta \quad (5.1.70)$$

$$Z_1 = \frac{(1 + \beta_e^2) M_i J_y}{e \mu_e n_{e\infty} \sqrt{U_{\infty V}}} \sqrt{\frac{2\zeta}{U_{\infty V}}} \quad \left. \vphantom{Z_1} \right\} (5.1.71)$$

$$Z_2 = -\beta_e \mu_i \sqrt{\frac{2\zeta}{U_{\infty V}}} E_x'$$

以上の無次元表示式 (5.1.65) (5.1.66) (5.1.70) において、5-1-2 (P.213) で定めた (i) (ii) (iii) (iv) はどのような場合に対応しているかを、(5.1.67) (5.1.68) (5.1.69) (5.1.71) を検討しながら調べる。

(i) $B=0$, $E_x'=0$ の場合は、

$$A_3, A_4, A_5, C_1, C_2, C_3, G_2, G_3, Z_2 = 0$$

$$A_1, G_1, Z_1 \text{ において } 1 + \beta_e^2 \rightarrow 1 \quad \left. \vphantom{A_1} \right\} (5.1.72)$$

となり、(5.1.65) (5.1.66) は、第4章における0次の方程式 (4.3.24) (4.3.23) と全く一致する。

(ii) $B=0$, $E_x' \neq 0$ の場合は、(5.1.66) 中の G_3 が残ること以外は (i) の場合と全く一致するが、 ζ が小さいとき、 $G_1 \frac{1}{\zeta^2} \gg G_3$ が成立するから、この (ii) の場合は、電流分布や電位分布については (i) の場合と非常に異なる

が、電子密度および電子温度分布については、全く差異がないということになる。

(iii) $B \neq 0$, $E_x = 0$ の場合は、

$$A_4, A_5, C_2, C_3, G_2, G_3, Z_2 = 0 \quad (5.1.73)$$

(i) の場合と違うのは、(i) の場合に消えていた A_3 と C_1 が残ること、および、 A_1 が (i) の場合の $(1 + \beta_e^2)$ 倍、 G_1 および Z_1 が $(1 + \beta_e^2)$ 倍となることである。 A_1, G_1, Z_1 が磁場の存在によって大きく異なるのは、 y 方向の実質的な導電度が、ホール効果のためにスカラ導電度の $1/(1 + \beta_e^2)$ に低下することによる。また、 A_3 と C_1 は、 A_1 あるいは μ の項とくらべてあまり重要でないから結局、この (iii) の場合には、同じ y 方向電流密度 J_y に対して、 y 方向電界が (5.1.49) により、 $(1 + \beta_e^2)$ 倍になる効果のみが顕著にあらわれるであろうことがわかる。

(iv) $B \neq 0$, $E_x \neq 0$ の場合は、(5.1.65) (5.1.66) (5.1.70)

のすべての項が残るが、 α が小さいとき、(5.1.67) の中では A_1 項のみが、また、(5.1.69) の中では G_1 項のみが

卓越する。しかし、(5.1.68)における C_3 項 ((5.1.61)の v_1 に由来する項) の奇手は、 f 項に対しては $1/f$, C_1 項に対しては α/γ に比例し、いずれにしても境界層内できわめて大きくなる。従って、この (IV) の場合の特徴は、(III) の場合に加えて、電場と磁場の相互作用によって生ずる y 方向の電子流束 ($B < 0$ (磁場が $-z$ 方向), $E_x < 0$ なら、 $-y$ 方向に向いている。… $v_1 < 0$) の発散が大きく残るということであり、このため、境界層内の電子密度の化学的非平衡性の増大が予想される。また、この効果は、(5.1.68) および (5.1.56) より $\frac{\alpha}{\sqrt{U_{\infty}}} \frac{1}{n_{\infty}} A_E J_y$ に比例し、 J_y が大きいほど大きいことかわかる。

以上で、第3章で示した境界層解析の結果に対して、磁場の存在がどのような影響を及ぼすかということの概要が把握できたので、次節で、第3章における条件とほぼ同一の条件のもとで、実際に計算を行ない、求められた結果について検討を加えることにする。

5-2 計算結果と検討

実際の計算において、流れ場としては、簡単のため運動量保存式(5.1.2)において常に

$$\frac{\partial p}{\partial x} = J_y B \quad (5.2.1)$$

が成立している場を考えることにすれば、流れ場、温度場に対する無次元化された基礎方程式は、第4章の(4.3.21)(4.3.22)と一致する。この仮定は、本章の目的においては本質を損うものではない。このような状況のもとで次のように計算を行なった。

前節で述べたように、(i)の場合と(ii)の場合については、電子密度、電子温度に対する基礎方程式上の実質的な差異が全くなくなるので、まず(i)(ii)の場合について $B=0$, $E'_x=0$ ($A_E=0$) として計算し、磁場の影響の存在しない場合の解を定める。続いて(iii)の場合(連続ファラデ電極に対応)について、 $B \neq 0$ (5.1.45)の設定により $B < 0$), $E'_x=0$ ($A_E=0$) として計算し、さらに(iv)の場合(理想分割ファラデ電極に対応)について、 $B \neq 0$ ($B < 0$), $E'_x \neq 0$ (5.1.50)を満たすために $E'_x < 0$) として計

算し、境界層内物理量の分布に対する磁場の影響を検討する。計算条件としては、対比の便宜のため第3章における条件を基準にとった。すなわち、主流温度 $T_{\infty} = 2300\text{K}$ 、壁表面温度 $T_w = 1200\text{K}$ 、カリウム原子モル分率 $X_k = 0.03\%$ 、前縁からの距離 $x = 0.04\text{m}$ である。電流密度 J_y およびガス流速 u_{∞} の値をかえることにより、磁場の効果に及ぼす電流密度やガス流速の影響を調べた。また Ex の値としては、(5.1.56)の A_E の値について、 $A_E = 1$ (上下電極間隔が大きい場合に対応) と $A_E = 2$ (電極間隔が小さい場合に対応) の場合を考えた。以下計算結果を示す。

図5-3に、 $J = 100\text{A/m}^2$ 、 $u_{\infty} = 40\text{m/s}$ に対する (i) (ii) の場合、(iii) の場合 ($|B| = 5\text{T}$)、および (iv) の場合 ($|B| = 5\text{T}$, $A_E = 1, 2$) の4種類の解をあわせて示す。本章の解析は、物性値の温度依存性を考慮していないが、(i) の解を第3章の図3-8とくらべると、結果的には良くあっている。このような場に $|B| = 5\text{T}$ (テスラ) の磁場をかけると、連続ファラデー電極の場合 ($A_E = 0$) には、図中 (iii) で示

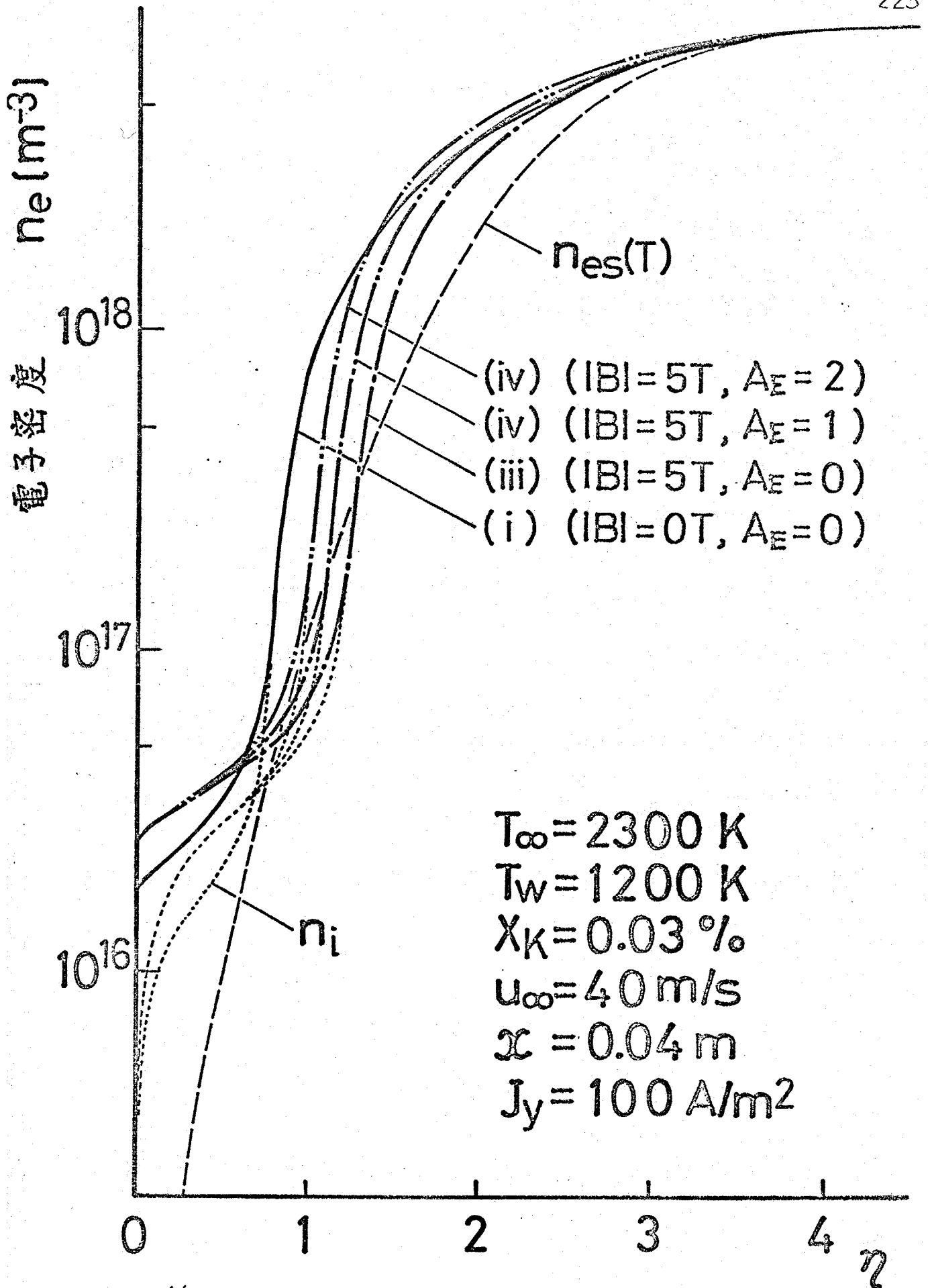


図.5-3 電子密度・イオン密度分布に対する磁場の影響

示す解のようになり、壁近傍の電子密度の低い領域、
 およびそれに伴う、電子・イオンの電荷分離領域の厚さ
 が広がっている。これは前節で議論したように、同
 じ電流密度 J_y に対して、 y 方向の実質的な導電度が、
 ホール効果のため、スカラー導電度の $1/(1+\beta_e^2)$ に低下す
 るため、 y 方向電界が $(1+\beta_e^2)$ 倍になる効果のためであ
 ると考えることができる。また壁近傍の電子密度が
 $|B|=0$ の場合より高くなるのは、電子が電界より得
 るエネルギー (5.1.8) の左辺) $J \cdot E$ が、上述のように E_y の
 増加により $(1+\beta_e^2)$ 倍に大きくなるために壁近傍の電
 子温度の非平衡性が増大し、それに伴い、電子温度に
 対するサハ平衡の電子密度が高くなり、これに伴っ
 て電子密度が上がるためであると考えられ
 る。理想分割電極の場合 ($A_E=1, 2$) には、図中 (iv) で
 示す解のように、 x 方向電界 E_x と磁場の相互作用に
 より新たに誘起された、 y 方向に大きく変化する y 方向
 電子流束 ($-y$ 方向) のため、境界層内での電子密度が
 増大し、電子密度の、サハ平衡値に対する非平衡性が

(iii)の場合より大きくなっている。AEを1から2に大きくする。すなわち上下電極間隔を小さくすると、この効果は増大している。

このような (iv)の場合に、境界層内で電子密度が増大する効果は、前節 (P.222)の議論によれば、電流密度(J_y)が大きいかほど大きくなるであろうから、次に電流密度の大きい $J_y = 1000 \text{ A/m}^2$ の場合の計算を行ない、その結果を図5-4に示す。(i)(ii)から (iii)への変化については 図5-3 での議論と同様であるが、(iii)から (iv)への変化は非常に大きく、(iv)の場合、境界層内の $\eta = 1 \sim 2$ のあたりに大きな電子密度分布のふくらみが存在している。

図5-5は、図5-4において、ガス流速 U_∞ を大きくした場合の計算結果である。流速が大きいと、無次元化された電子保存式 (5.1.65) における反応項 R の表示 (5.1.67) を見ればわかる通り、実質的には対流に対する反応の寄与が小さくなるため、(i)の場合の電子密度分布においては、流速のおそい 図5-4 の場合より

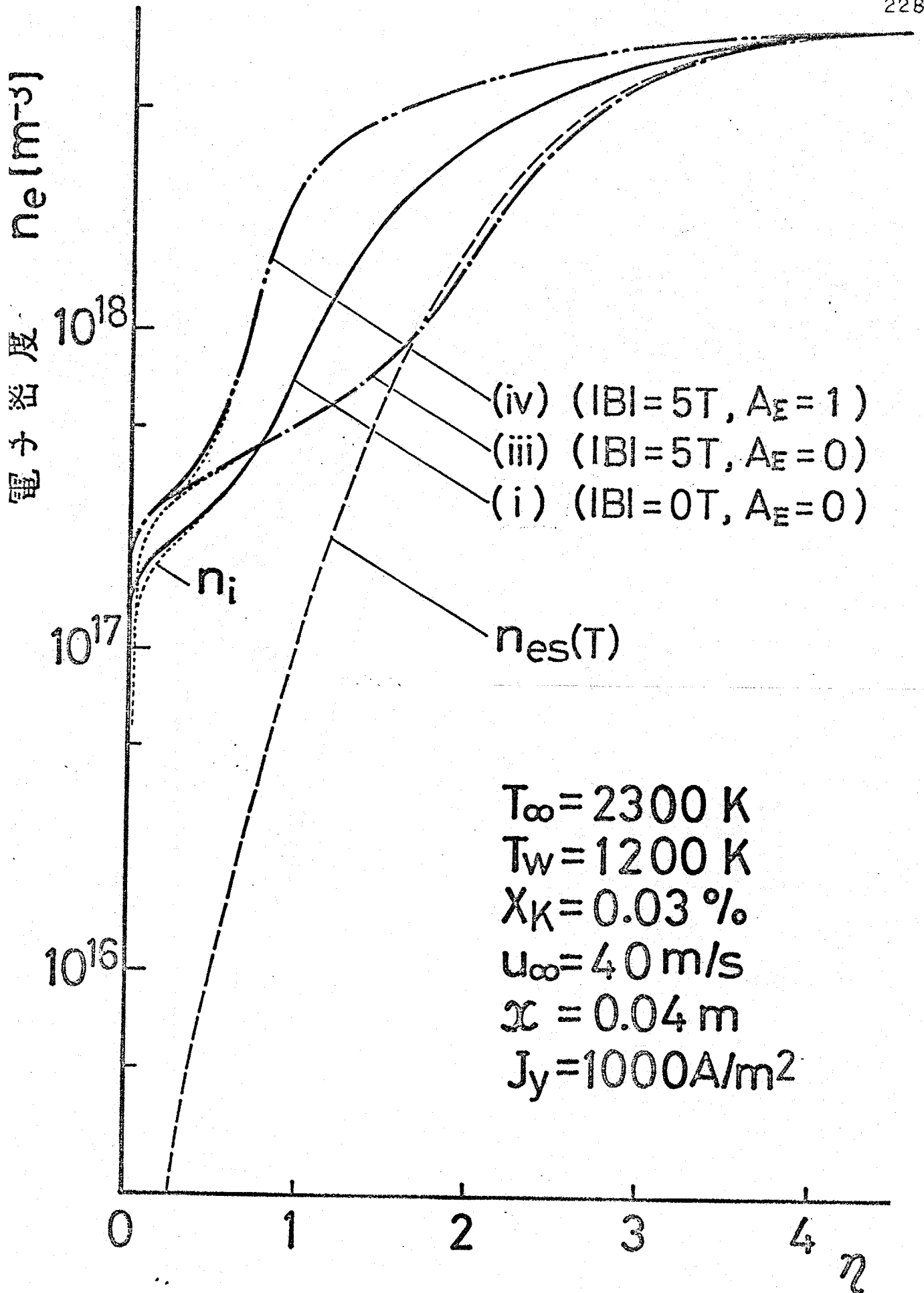


図5-4. 電子密度・イオン密度分布に対する磁場の影響
(電流密度の大きい場合)

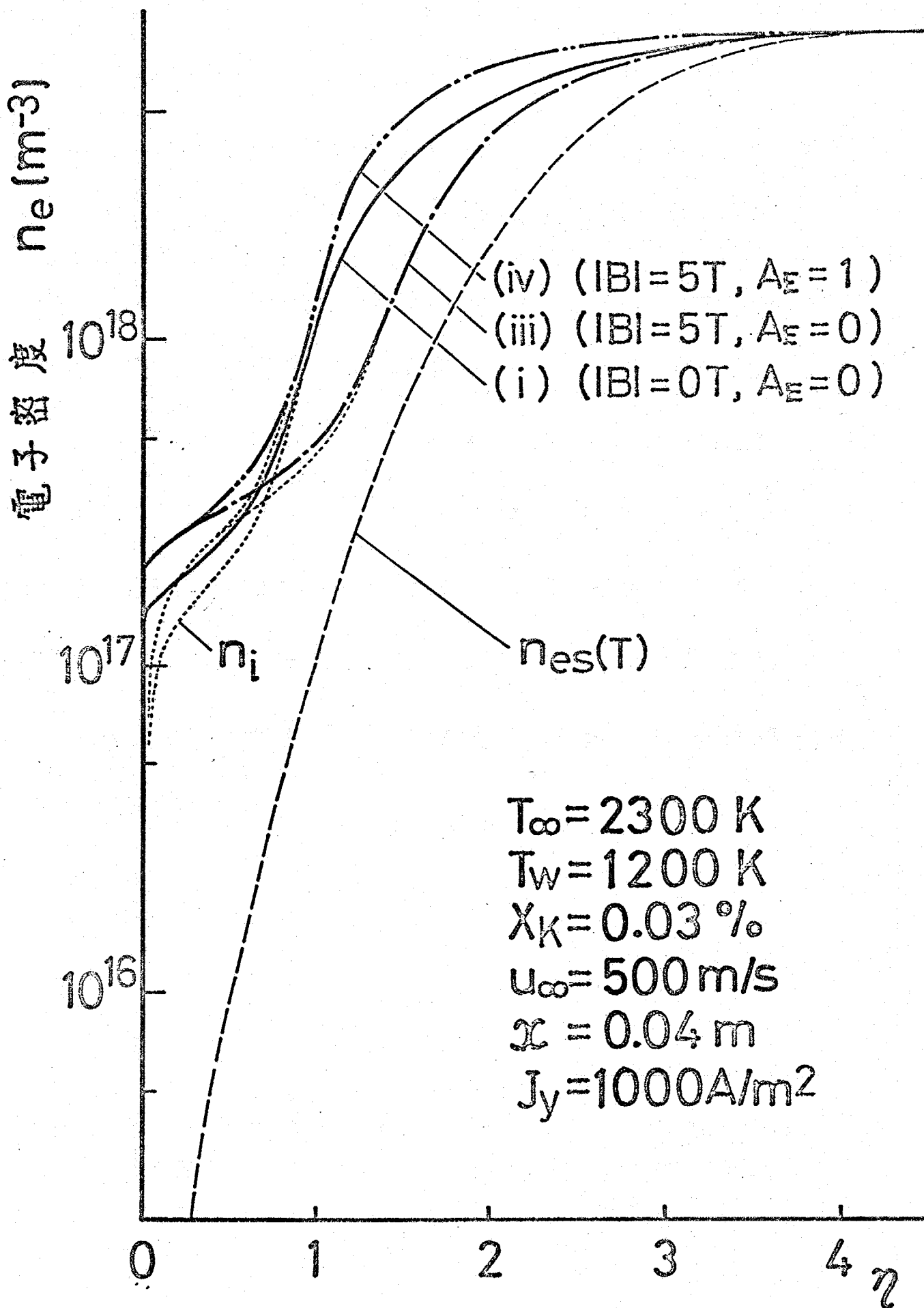
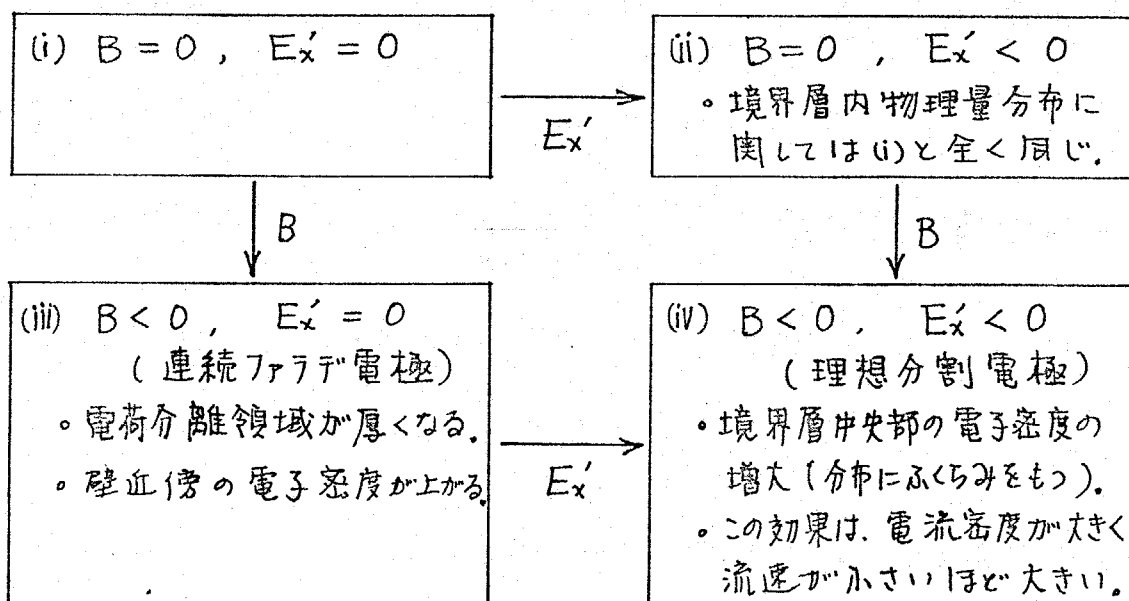


図5-5. 電子密度・イオン密度分布に対する磁場の影響

も、境界層中央部での非平衡性は大きくなっている。
 しかし、磁場そのものの影響については、(i)から(ii)
 への変化は、図5-3の議論と同様であるが、(ii)から(iii)
 への変化は、電流密度の小さな図5-3の場合よりは
 顕著であるが図5-4の場合ほどは大きくない。この
 理由は、流速が大きいと、(ii)から(iii)への変化をつくる
 電界と磁場の相互作用による電子流速の寄与が、対
 流項に対して相対的に小さくなるためである。

以上より、シールドされた燃焼カスの冷電極まわりの
 境界層内物理量分布に対する磁場の影響は、次のよ
 うに整理できる。



5-3 結 論

通電を伴うシールドされた燃焼カスの冷電極(陽極)まわりの境界層内に特徴的な物理現象、すなわち電子の熱的ならびに化学的な非平衡性、および電子・イオンの電荷分離に及ぼす一様な外部磁場の影響について、第3章で提示した三流体モデルを用いて検討した。まず、局所相似の成立するような冷電極まわりの薄い境界層の解折に際して、設定する電気場に課せられる条件は、電極面に垂直方向の電流密度(J_y)および、流れ方向電界($E_x' = E_x + vB$)が、考える範囲内で一定であるということを確認した上で、種々の設定された電気場に対して計算を行ない、外部磁場のない場合と比較して以下の結論を得た。

- (1) 連続ファラデー電極の場合には、磁場の影響は、電極面と垂直方向(y 方向)の実質的な導電度が、ホール効果のために、スカラー導電度の $1/(1+\beta_e^2)$ に低下するため、同じ電流密度(J_y)に対して、 y 方向電界 E_y' が磁場のない場合の $1+\beta_e^2$ 倍になる効果のみが顕

着にあらわれる。これにより、磁場のない場合とくらべて次のように状況が変化する。

◦冷電極面近傍の低導電度領域における電荷分離領域の厚さが厚くなる。

◦壁近傍で、電子温度のガス温度に対する非平衡性が大きくなるため、壁での電子密度が増加する。

(2)理想分割ファラデ電極の場合には、連続ファラデ電極の場合に加えて、流れ方向電界(E_x)が存在し、この電界と磁場との相互作用で誘起される、電極面と垂直方向(y方向)の電子流束がy方向に大きな変化をもっているため、境界層中央部で、大きな電子密度分布のふくらみを持つような効果が出て、電子密度のサハ平衡電子密度に対する非平衡性は増大する。この効果は、電流密度(J_y)が大きいほど、また流速(U_0)が小さいほど大きくあらわれる。

第6章 結 論

MHD発電の実用化における最大の問題点の一つである電極の寿命の問題を解決するために、冷電極を用いることが考えられているが、冷電極近傍の導電度は主流部に比べてきわめて低く、そこに大きな電流が流れるときの複雑な物理現象に関しては、その発電特性等を見積もる上での重要性にもみかわらず、従来、見過ごされてきたかあるいは大胆な仮定のもとでしか取り扱われていない。この点に鑑み、本研究は、特に開放型MHD発電機の作動流体として考えられているカリウムがシードされた燃焼ガスについて、その冷電極まわりの境界層内の現象に関する詳細な検討を行なったもので、まず、従来のあまいな電極面上のシーズ仮定をとり除いた三流体モデル（電子・イオン・中性粒子）を用いて、電子の熱的および化学的な非平衡性、電子・イオンの電荷分離

の存在をも考慮に入れた境界層解析を行ない、冷電極まわりの境界層内の厳密な状況を明らかにし、続いて、特に冷電極の場合に電極の寿命を短縮させる最大の原因となる電極面上のアークスポットの発生に関する放電の安定性理論解析を行ない、アークスポットの発生が、温度場と電気場のカップリングした放電の不安定として生じうることを明らかにし、その発生限界について検討を行なった。解析は、三流体モデルに対する壁面上の境界条件の容易さから、陽極面上の境界層に対して行ない、また、主に磁場のない場を取り扱い、境界層内物理量分布に対する磁場の影響は、最後に検討を加えた。以上のような解析および検討により、第2章から第5章にわたって得られた研究成果の総合的結論を以下に述べる。

第2章「通電特性および伝熱特性に関する実験」においては、流れ方向に分割された測定電極をもつ対向平板冷電極を用い、そのまわりに形成された低導電度の境界層内に外部印加電圧による通電を行な

い、通電特性および伝熱特性を測定し、外部印加電圧の増加により電流密度の増大していくようす、および、この電流密度の増加につれて電極壁への伝熱量が大きくなっていくようすを示した。

第3章「境界層の三流体モデルによる解析」においては、あいまいな電極面上のシース仮定かとり除かれた三流体モデルによる境界層解析法を提示し、これを用いて、冷電極まわりの境界層内の厳密な物理量の分布を示した。これにより、冷電極近傍では多原子分子を多数含む燃焼ガス中においても大きな電界のために電子温度はガス温度に対して非平衡となること、小さい電子密度のため反応が不十分で電子密度はけハ平衡値にはならないこと、三体再結合反応における重い中性粒子の寄与が大きくなること、および、強い電界の変化のために電荷分離がデバイ長さよりもはるかに大きい範囲に生ずる場合もあることなどを明らかにした。また、この解析により算出された通電特性および伝熱特性を第2章で求めた

実験結果と比較し、かなり良い一致が得られ、本解析法の妥当性が示された。さらに、本解析法を乱流場に拡張し、実際のMHD発電機に近い条件のもとで解析を行ない、電荷分離についても、電子の熱的ならびに化学的な非平衡性についても、層流場ほど顕著にはあらわれないことを示した。

第4章「放電の不安定に関する理論解析」においては、冷電極近傍の低導電度の境界層内における、電流密度の増加に伴う電極面上のアークスポットの発生を、均一放電場における放電の不安定問題としてモデル化し、線型安定論を用いて解析し、均一放電からアーク放電への放電形態の移行が、温度場と電気場の相互干渉による放電の不安定として生じうることを示した。これにより、この型の不安定は、冷電極近傍のきわめて導電度の低い領域と密接に関連しており、壁温が低いほど不安定がおきやすいことおよび、通電量の増加に伴う壁近傍の電子密度の増加は不安定をおきにくくすることなどを明らかにし

た。また、平衡モデルと薄層モデルの2種類の簡単化されたモデルを示し、考える領域内での0次の定常分布を一定とした薄層モデルを用いて、電極は熱的には良導体、電氣的には不良導体の傾斜の強い方が、不安定をおこしにくいことを示した。

第5章「磁場の影響」においては、第3章で明らかにしたような種々の非平衡性あるいは電荷分離が外部磁場の存在によってどのような影響をうけるかを検討した。その結果、連続ファラデ電極の場合は、実質的には、電極面と垂直方向の導電度が、スカラ導電度より小さくなるために、電荷分離領域が厚くなり、壁面上的電子密度がわずかに上昇する効果だけしかあらわれないが、理想分割ファラデ電極の場合には、さらに、ホール電流を抑える方向の様電界が生じるか、境界層内で導電度が電極面と垂直方向に大きく変化しているために、結果的にわずかに電流が残り、そのため境界層内での電子密度の非平衡性が大きくなる効果（電流密度が大きいほど大きい）が

存在することを明らかにした。

謝 辞

終わりに臨み、卒業研究の1年間、修士課程の2年間、および博士課程の3年間、あわせて6年間の長きにわたり、終始かわるところない暖かき御援助と、懇切な御指導を賜わりました森康夫教授ならびに大竹一友助教授に深く感謝の意を表します。また、理論解析において多大の御助言をして下さいました土方邦夫助手に深く感謝の意を表するとともに、幾多の御助力をいただきました宮内敏雄助手をはじめとする機械物理工学科熱および熱力学研究室の皆様にも深く感謝いたします。

参 考 文 献

第 1 章

- 1-1 森康夫, 塩田進, 「エネルギー変換の工学」,
共立出版, 昭和51年, p.88
- 1-2 В.А. Кириллин . А.Е. Шейндлин , Теплофизика
Высоких температур , Том. 12, №. 2, 1974. P.372
- 1-3 Институт Высоких Температур Академии Наук СССР,
1976年度学術報告, 1977, P.49-76
- 1-4 D. A. Oliver , Avco Everett Research Laboratory Report,
1975

第 2 章

- 2-1 R. T. Brown , M. Mitchner , The Physics of Fluids ,
Vol. 14 , No. 5 , May, 1971 . P. 933-940
- 2-2 R. T. Brown , SU- IPR Report No. 350 , (Stanford Univ.)
January , 1970
- 2-3 J. W. Daily , C. H. Kruger , S. A. Self , R. H. Eustis
6th International Conference on MHD , Washington , D. C.
1975 , p. 451-470
- 2-4 S. A. Self , C. H. Kruger , AIAA paper , No. 76-310 , 1976
- 2-5 大竹一友 , 東京工業大学学位論文 , 昭和46年

第 3 章

- 3-1 F. J. Hale , J. L. Kerrebrock , AIAA. Journal , Vol. 2, 1964
P. 461

- 3-2 A. Sherman, E. Reshotko, AIAA paper No. 68-134, January, 1968
- 3-3 A. Sherman, H. Yeh, E. Reshotko, E. McAssey, Jr., AIAA paper No. 71-139, 1971
- 3-4 [2-2] 参照
- 3-5 D. W. Cott, AIAA Journal, Vol. 9, No. 12, 1971, P. 2404-2410
- 3-6 M. D. High, E. J. Felderman, AIAA Journal, Vol. 10, No. 1, 1972, P. 98-103
- 3-7 S. T. Demetriades, G. S. Argyropoulos, C. D. Maxwell, I. 5 12th Symp. on Engg. Asp. of MHD, 1972
- 3-8 G. S. Argyropoulos, S. T. Demetriades, E. D. Doss, D. A. Oliver, AIAA Journal, Vol. 12, No. 5, May, 1974, P. 669-671
- 3-9 S. H. Lam, AIAA Journal, Vol. 12, No. 2, Feb. 1964, P. 256-262
- 3-10 P. M. Chung, L. Talbot, K. J. Touryan, AIAA Journal Vol. 12, No. 2, Feb. 1974, P. 133-154
- 3-11 JANAF Thermodynamical Tables, 1965-8
- 3-12 小杉哲夫, 工業化学雜誌, 73卷, 1号, 1970, P. 148-154
- 3-13 小杉哲夫, 工業化学雜誌, 74卷, 5号, 1971, P. 810-814

- 3-14 小杉哲夫, 工業化学雑誌, 74巻, 8号, 1971,
P. 1499-1506
- 3-15 M. Mitchner, C.H. Kruger, Jr., "Partially Ionized
Gases," John Wiley & Sons, 1973
- 3-16 F. E. Spencer, Jr., A. V. Phelps, IX.15th Symp. on
Engg. Asp. of MHD, 1976
- 3-17 E. W. McDaniel, E. A. Manson, "The Mobility and Diffusion
of Ions in Gases", John Wiley & Sons, 1973
- 3-18 神山雅美, 青木昌治編 「気体の物性工学, エネルギー変換」
第4章(MHD発電), オーム社, 昭和44年.
- 3-19 R. J. Rosa, "Magnetohydrodynamic Energy Conversion"
McGraw-Hill; 1968
- 3-20 C. D. Maxwell, S. T. Demetriades, G. S. Argyropoulos, N. J. Patel,
M. Easterling, VIII.5. 13th Symp. on Engg. Asp of MHD,
1973.
- 3-21 藤代亮一, 和田悟朗, 玉虫伶太, 「溶液の性質II,
(電解質溶液)」, 東京化学同人,
- 3-22 E. Hinnov, J. G. Hirscheberg, Physical Rev.,
Vol. 125, No. 3, 1962, P. 795-801
- 3-23 H. S. W. Massay, E. H. S. Burhop, "Electrical and
Ionic Impact Phenomena", Oxford, 1952
- 3-24 岡崎健, 東工大修士論文, 昭和49年度
- 3-25 伝熱工学資料(改訂第3版), 日本機械学会

3-26 J.C. Rotta, 「乱流」 大野通雄訳, 岩波書店, 1975

第4章

4-1 Y. Mori, K. Ohtake, K. Ogasawara, 5th International Conference on MHD, Vol. I, 1971, P. 11-26

4-2 J.L. Kerrebrock, AIAA Journal, Vol. 2, No. 6, 1964, P. 1072-1080 (Theory), P. 1080-1087 (Experiments),

4-3 M.L. Hogen, J.E. McCune, AIAA Journal, October, 1971, P. 1947-1956

4-4 H.H. Bачилев ほか 8名, 6th International Conference on MHD, Vol. I, 1975, P. 359-371

4-5 J.B. Dicks ほか 5名, 11th Symp. on Engg. Asp. of MHD. 1970, P. 16-28

4-6 M.S.S. Hsu, 13th Symp. on Engg. Asp. of MHD. Vol. VI. 6 1973

4-7 [1-4] 参照

4-8 J.K. Wright, Proc. of Physical Society, Vol. 81, 1963, P. 498-505

4-9 D.A. Oliver, 15th Symp. on Engg. Asp. of MHD, IX.4. Philadelphia. 1976.

4-10 巽友正, 後藤金英, 「流れの安定性理論」, 産業図書, 昭和51年.

付 録

[1] 電子エネルギー損失係数

電子が重い粒子 X と衝突した時に失うエネルギーの平均量は、電子の速度も重い粒子の速度もマクスウェル分布をしており、また、それぞれの拡散速度が熱速度より十分小さいとき、弾性衝突に対して次式で与えられる。(Ref.[3-15])

$$\overline{\Delta E_{ex}}(\text{elastic}) = \frac{2m_e}{m_x} \frac{3}{2} k (T_e - T) \quad (\text{A-1})$$

(電子以外の粒子の温度はすべてガス温度 T に等しいとする。)

X がアルゴンやヘリウムのような単原子分子であるときには、MHD発電で対象となるような数千度の電子のエネルギーでは最低励起エネルギーよりもはるかに低く、弾性衝突が卓越して (A-1) が成立する。このとき、 $(2m_e/m_x) \ll 1$ であるので電子温度はたやすくガス温度より高くなる。しかし、 X が、燃焼ガス中に多数存在する多原子分子であるときには、励起エネルギーがはるかに低い振動や回転の内部自由度をもっているために、非弾性衝突が卓越する。このとき、電子の失う平均エネルギーを

$$\overline{\Delta E_{ex}} \text{ (nonelastic)} = \frac{2m_e}{m_x} \delta_x' \frac{3}{2} k (T_e - T) \quad (\text{A-2})$$

とかくと、 δ_x' は、たとえば CO_2 については 10^4 近い大きな値となる。従って、燃焼ガス中では、電子とガスは一般には、熱平衡になりやすい。本論文では、一貫して

$$\delta_x = \frac{2m_e}{m_x} \delta_x' \quad (\text{A-3})$$

なる値を、電子エネルギー損失係数として用いている。

[2] デバイ長さ

熱運動のエネルギーによって達成される電荷分離の範囲の基準を与える長さで、次のように導出される。電気的中性 ($n_e = n_i$) の達成されている場に Δn_e なる空間電荷分離が生じたとすると、ポアソンの式 (3.3.8)

$$\text{より、} \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = - \frac{e}{\epsilon} \Delta n_e \quad (\text{A-4})$$

$$y=0 \text{ で、} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad \phi = 0 \text{ とし 解くと}$$

$$\phi = \frac{1}{2} \frac{e}{\epsilon} \Delta n_e y^2 \quad (\text{A-5})$$

もし、電子の熱運動のエネルギー以外に、この電荷分離によって生ずるポテンシャルエネルギー $e\phi$ を維持する原因が存在しないとすれば、電子の熱運動のエネルギーがこの $e\phi$ より大きければ、この電荷分離は保たれるが、

小さければ電気的中性を回復する。その限界は、 $\lambda_D = \lambda_D$

$$\Delta n_e = n_e \quad \text{と おい て} \quad e\phi = \frac{1}{2} kT_e \quad \text{よ り}$$

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon k T_e}{n_e e^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-6})$$

これが、一様場中での電荷分離領域の目安となるデバイ長さである。外部電界等の存在があっても、空間電荷によるポテンシャルエネルギーはきわめて大きいので、一般には、電荷分離領域の大きさはデバイ長さのオーダーとされているが、大きな通電を伴う冷電極面近傍のような特殊な状況のもとでは、この限りではない。

[3] 三流体モデルによる境界層解析における数値計算法

第3章で述べた解析における具体的な数値計算法を参考のために示す。冗長になるのを避けるために図3-4のフローチャート中の中央の破線で囲んだ部分のみについて示す。基礎式及び境界条件は (3.3.51) (3.3.53) (3.3.46) (3.3.47) に対応している。Runge-Kutta-Gill 数値積分法を用いる。

$$\left[\begin{array}{l} Q_1 = \tau \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} Q_2 &= A_1 \frac{1}{\xi^3} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} + A_2 \left(1 + \frac{\theta_e}{\theta}\right) \frac{\partial \xi}{\partial \eta} + \overset{''}{S} \\ &\quad A_3 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right) \\ Q_3 &= \theta_e \\ \frac{\partial Q_1}{\partial \eta} &= \frac{Q_2 - \overset{''}{S}}{A \frac{1}{Q_1^3} + A_2 \left(1 + \frac{Q_3}{\theta}\right)} = W \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \eta} &= (B_1 Q_1 \theta_3^{-\frac{9}{2}} + B_2 \theta_3^{-\frac{5}{2}}) \left[\theta Q_3^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{C_i}{k T_\infty} \left(1 - \frac{1}{\theta_3}\right)\right) - Q_1^2 \right] \\ &\quad + (B_3 Q_3^{-\frac{9}{2}} + B_4 Q_3^{-\frac{5}{2}} \frac{1}{Q_1} - f) W \\ \frac{\partial Q_3}{\partial \eta} &= \frac{\left(\frac{2Q_3^{\frac{3}{2}}}{\theta^3} - \frac{Q_3^{\frac{1}{2}}}{\theta^2}\right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{2C}{Q_1^3} W}{\frac{3}{2} \frac{Q_3^{\frac{1}{2}}}{\theta^2} - \frac{1}{2\theta} \frac{1}{Q_3^{\frac{1}{2}}}} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \eta = \eta_s \quad (4.5) \quad \tau'' \quad [I=1] & \quad Q_1(1) = \xi_s(T_s) \quad (T_s = T(\eta_s)) \\ & \quad Q_2(1) = (0 \text{ に近いある値}) \rightarrow \text{パラメータにとる。} \\ & \quad Q_3(1) = T_s / T_\infty \\ \eta = 0 \quad \tau'' \quad [I=NX=451] & \quad Q_2(NX) = \infty \end{aligned}$$

$Q_2(1)$ を変化させながら $\eta = \eta_s$ ($I=1$) から, $\eta = 0$ ($I=NX$) へ 数値積分を行ない $\frac{Q_2(NX) - \infty}{\infty} < \lim (10^{-3})$ を満たしたら

解とする。実際には, 主流側から壁へ向かって解いているため, $Q_2(1)$ の値が正しい解の値に 5桁程度あってこないと途中で overflow か underflow をしてしまう。

そこで, Subroutine 中で, 関数値が overflow や underflow しかけたところで計算をストップし, 主プログラムに戻って, $Q_2(1)$ の初期値を変えるようになっていく。以下にそのプログラムを添える。

SOURCE STATEMENT

```

PROGRAM NENEW
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
COMMON A1,A2,A3,B10,B20,B30,B40,EPP,H,Y0,CA,FF(901),SITA(901),
1      SITAD(901)
DIMENSION ETA(451),ENS(451),TE(451),TG(451),
1      EN(451),EE(451),DN(451),QO(3),F(3,13),QQ(3,451) ,
2      FAI(451),POT(451),ENI(451),FFO(901),SITAO(901),
3      SITADO(901),RO(451),POD(451)
DIMENSION QQQ(3,451)
EXTERNAL FUNC
1 FORMAT(1H0,3HTC=F6.1,2X3HTW=F6.1,2X6HTW/TC=1PE11.4,2X2HJ=1PE10.3,
1      2X6HQO(2)=1PE21.14,2X4HXK =1PE10.2,2X5HALXO=1PE10.2,2X4HMUES)
2 FORMAT(1H0,7X3HETA,7X5HSITAE,9X3HTET,10X2HTG,10X2HTE,
1      9X3HNE,10X2HNE,10X2HNI,7X5HNE-NI,11X1HE,11X1HV/)
3 FORMAT(1H ,1P11E12.4)
4 FORMAT(1H ,2HG=1PE15.5,5X2HZ=1PE15.5,5X4HREX=1PE15.5/)
5 FORMAT(1H ,4HKAI=I4,5X3HKK=I4,5X5HETAM=F6.3,5X9HQO(1,KK)=1PE13.5/)
6 FORMAT(1H )
NXF=901
NXM=1
READ(20) (FFO(I),I=1,NXF)
READ(22) (SITAO(I),I=1,NXF)
READ(23) (SITADO(I),I=1,NXF)
Y0=4.5D0 ; NX=451 ; N=3 ; NR=3
NXX=NX-NXM+1
KR=(NX-1)/50
H=-Y0/FLOAT(NX-1)
BK=1.381D-23 ; EPI=6.951D-19 ; EMW=29.5D0 ; SCI=1.5D0
UCL=40.0D0 ; XL=40.0D-3
EPC=8.854D-12 ; SA=2.417D21 ; ALO=1.09D-20 ; ALXO=3.343D-5
EC=1.602D-19 ; PA=1.752D-11 ; PO=1.0133D5
NX1=NX-1 ; NX2=NX-2
KAI=0 ; KT=0
QO0=0.0D0 ; DQ=1.0D-1
TC=2.3D3 ; TW=1.2D3 ; YJ=1.0D2 ; XK=3.0D-4
UIM=8.667D-7 *TC ; UEM=2.411D-4*TC
UEM=1.44D-4*TC
DDD=1.0D0
ALD=1.0D0
PA=PA*DDD
ALO=ALG*ALD
EPP=EPI/BK/TC
ENKCL=PO*XK/BK/TC
ENCL=SQRT(SA*TC**1.5*ENKCL*EXP(-EPP))
CLMU=6.830D-5*(TC/2300.0D0)
ROCL=101.325/8.31434/TC*EMW
REX=ROCL*UCL*XL/CLMU
GZAI=UCL*ROCL*CLMU*XL
400 SITW=TW/TC
DO 50 I=1,NX
50 ETA(I)=-H*FLOAT(NX-I)
DO 490 I=1,901
M=902-I
FF(I)=FFO(M)
SITA(I)=(1.0D0-SITW )*SITAO(M)+SITW
490 SITAD(I)=(1.0D0-SITW)*SITADO(M)
DO 55 I=1,NXM
QQ(3,I)=SITA(2*I-1)
55 QQ(1,I)=SQRT(QQ(3,I)**2.5D0*EXP(EPP*(1.0D0-1.0D0/qq(3,I))))
YOM=ETA(NXM)
300 A1=EPC*UIM*YJ*YJ*ROCL/(EC*EC*EC*UEM*UEM*ENCL*ENCL*ENCL*CLMU)

```

f
θ
θ' } 別に計算して File に入っている。

T_{∞} , T_w , J_y , X_k を与える。

```

A2=1.0D0/SCI
A3=EPC*YJ*ROCL*UCL/(SQRT(2.0D0*REX)*SCI*EC*EC*UEM*ENCL*ENCL*CLMU)
B1Q=-2.0D0*REX*ALO*ENCL*ENCL*CLMU*TC**(-4.5D0)/(ROCL*UCL*UCL)
B2Q=-2.0D0*REX*ALXO*ENCL*CLMJ*TC**(-3.5D0)/(ROCL*UCL*UCL)
B3Q=-SQRT(2.0D0*REX)*ALO*EPC*YJ*TC**(-4.5D0)/(EC*EC*UEM*UCL)
B4Q=-SQRT(2.0D0*REX)*ALXO*EPC*YJ*TC**(-3.5D0)/(EC*EC*UEM*UCL*ENCL)
ZA=1.414213D0*UIM*YJ*SQRT(REX)/(EC*UEM*ENCL*UCL)
CA=YJ*YJ/(EC*ENCL*ENCL*UEM*PA*SQRT(TC))
QQ(1)=SQRT(SITA(1)**2.5D0*EXP(EPP*(1.0D0-1.0D0/SITA(1))))
QQ(3)=SITA(1)
QQ(1)=QQ(1,NXM)
QQ(3)=QQ(3,NXM)
800 QQ(2)=QQ0
WRITE(6,1) TC,TW,SITW,YJ,QQ(2),XK ,ALXO
KAI=KAI+1
CALL RKG (FUNC,YOM,QO,N,H,F,QQQ,NXX,NR,KK)
KK=KK+(NXM-1)
DO 56 I=NXM,KK
DO 56 J=1,3
MQ=I-(NXM-1)
56 QQ(J,I)=QQQ(J,MQ)
WRITE(6,5) KAI,KK,ETA(KK),QQ(1,KK)
IF(NX-KK) 110,110,120
120 IF(KAI.GE.100) GO TO 150
IF(QQ(1,KK).LT.0.0) GO TO 170
QQM=QQ0 ; QQ0=QQ0+DQ ; KT=0 ; GO TO 800
110 IF(ABS(ZA)-1.0D-3) 111,111,112
111 G=QQ(2,NX)-ZA ; GO TO 113
112 G=(QQ(2,NX)-ZA)/ZA
113 WRITE(6,4) G,ZA,REX
IF(ABS(G).LT.1.0D-3) GO TO 160
IF(KAI.GE.100) GO TO 150
IF(G.LE.0.000) GO TO 120
170 IF(KAI.EQ.1.OR.KT.EQ.1) GO TO 130
DQ=1.0D-1*DQ
QQ0=QQM+DQ
GO TO 800
130 KT=1 ; QQ0=QQ0-DQ ; GO TO 800
160 ST=SITA(2*I-1)
TETS=SQRT(ST*QQ(3,I)**1.5D0*EXP(EPP*(1.0D0-1.0D0/QQ(3,I))))
ENS(I)=TETS*ENCL/ST
TE(I)=QQ(3,I)*TC
TG(I)=ST*TC
EN(I)=QQ(1,I)*ENCL/ST
UE=UEM*ST
EE(I)=YJ/(EC*UE*EN(I))
RO(I)=ROCL/ST
POT(I)=-YJ*SQRT(2.0D0*GZAI)/(EC*EN(I)*UE*RO(I)*UCL)
POD(I)=-EPC*RO(I)*UCL/(EC*SQRT(2.0D0*GZAI))
60 CONTINUE
DN(1)=POD(1)*(-3.0D0*EE(1)+4.0D0*EE(2)-EE(3))/H/2.0D0
DN(NX)=POD(NX)*(EE(NX2)-4.0D0*EE(NX1)+3.0D0*EE(NX))/H/2.0D0
DO 70 I=2,NX1
70 DN(I)=POD(I)*(EE(I+1)-EE(I-1))/H/2.0D0
DO 75 I=1,NX
75 ENI(I)=EN(I)-DN(I)
FAI(NX)=0.0E0
DO 81 I=1,NX1
M=NX-I
81 FAI(M)=FAI(M+1)+(POT(M)+POT(M+1))*(-H)/2.0E0
WRITE(6,1) TC,TW,SITW,YJ,QQ(2),XK ,ALXO
WRITE(6,2)

```

```

DO 80 I=1,NX,KR
WRITE(6,3) ETA(I),QQ(3,I),QQ(1,I),TG(I),TE(I),ENS(I),
1      EN(I),ENI(I),DN(I),EE(I),FAI(I)
80 CONTINUE
WRITE(6,6)
WRITE(6,4) G,ZA,REX
WRITE(6,6)
WRITE(6,1) TC,TW,SITW,YJ,QQ(2),XK ,ALXD
WRITE(6,2)
DO 82 I=401,451
WRITE(6,3) ETA(I),QQ(3,I),QQ(1,I),TG(I),TE(I),ENS(I),
1      EN(I),ENI(I),DN(I),EE(I),FAI(I)
82 CONTINUE
WRITE(6,6)
WRITE(6,4) G,ZA,REX
WRITE(6,6)
150 STOP
END

```

```

REAL FUNCTION FUNC*8(K,Y,Q)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
COMMON A1,A2,A3,B10,B20,B30,B40,EPP,H,Y0,CA,FF(901),SITA(901),
1      SITAD(901)
DIMENSION Q(3)
IS=IFIX(2.0*(Y-Y0)/H+1.1)
F=FF(IS)
ST=SITA(IS)
STT=ST*ST
SD=SITAD(IS)
B1=B10/STT ; B2=B20/STT ; B3=B30/STT ; B4=B40/STT
SS=0.0
WW=(Q(2)-SS)/(A1/Q(1)**3+A2*(1.0D0+Q(3)/ST))
GO TO (1,2,3),K
1 FUNC=WW ; GO TO 4
2 FUNC=(B1*Q(1)*Q(3)**(-4.5D0)+B2*Q(3)**(-2.5D0))*(ST*Q(3)**1.5D0
1      *EXP(EPP*(1.0D0-1.0D0/Q(3)))-Q(1)*Q(1))+(B3*Q(3)**(-4.5D0)
2      +B4*Q(3)**(-2.5D0)/Q(1)-F)*WW
GO TO 4
3 FUNC=((2.0D0*Q(3)**1.5D0/ST**3-SQRT(Q(3)))/ST/ST)*SD-2.0D0*CA*WW
1      /Q(1)**3)/(1.5D0*SQRT(Q(3))/ST/ST-0.5D0/ST/SQRT(Q(3)))
4 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE RKG(FUNC,X0,Y0,N,H,F,Y4,NX,NR,KK)
C N-TH ORDER DIFFERENTIAL EQUATION (RUNGE-KUTTA-GILL) ,DOUBLE
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
  DIMENSION Y0(N),Y4(NR,NX),F(NR,13)
  CALL ERRSET(202,256,-1,1)
  CALL OVERFL(IY)
  IF(N.LE.0.OR.N.GT.NR) GO TO 95
  CR2I=0.2928932188 13452 47560 D0
  DO 10 K=1,N
    F(K,1)=0.0D0
    Y4(K,1)=Y0(K)
10  F(K,2)=Y0(K)
    I=1
20  X=X0+(DFLOAT(I-1))*H
    DO 30 K=1,N
      F(K,3)=H*FUNC(K,X,F(1,2))
      F(K,4)=0.5D0*F(K,3)-F(K,1)
      F(K,5)=F(K,2)+F(K,4)
30  F(K,6)=F(K,1)+3.0D0*F(K,4)-0.5D0*F(K,3)
      DO 40 K=1,N
        F(K,7)=H*FUNC(K,X+0.5D0*H,F(1,5))
        F(K,4)=(CR2I*(F(K,7)-F(K,6)))
        F(K,8)=F(K,5)+F(K,4)
40  F(K,9)=F(K,6)+3.0D0*F(K,4)-CR2I*F(K,7)
      DO 50 K=1,N
        F(K,10)=H*FUNC(K,X+0.5D0*H,F(1,8))
        F(K,4)=(2.0D0-CR2I)*(F(K,10)-F(K,9))
        F(K,11)=F(K,8)+F(K,4)
50  F(K,12)=F(K,9)+3.0D0*F(K,4)-(2.0D0-CR2I)*F(K,10)
      DO 60 K=1,N
        F(K,13)=H*FUNC(K,X+H,F(1,11))
        F(K,4)=(F(K,13)-2.0D0*F(K,12))/6.0D0
        F(K,2)=F(K,11)+F(K,4)
        Y4(K,I+1)=F(K,2)
60  F(K,1)=F(K,12)+3.0D0*F(K,4)-0.5D0*F(K,13)
      I=I+1
      DO 150 K=1,N
        IF(ABS(Y4(K,I)).GT.,1.0E10.OR.ABS(Y4(K,I)).LT.1.0E-10) GO TO 110
150 CONTINUE
      IF(Y4(1,I).LT.0.0D0.OR.Y4(3,I).LT.0.0D0) GO TO 110
      KK=I ; GO TO 120
110 KK=I ; GO TO 90
120 CALL OVERFL(IY)
      GO TO (80,70,70) ,IY
70 IF(NX-I) 90,90,20
80 WRITE(6,200) X
90 CALL ERRSET(202, 10, 5,2)
   RETURN
95 WRITE(6,100) N,NR
   CALL ERRSET(202, 10, 5,2)
   RETURN
100 FORMAT('0(SUB-. RKG   ) N=' I3, ' NR=' I3, ', N SHOULD BE A POSIT
  *IVE INTEGER LESS THAN OR EQUAL TO NR. RETURNED WITH NO CALCULATIO
  *N.'//)
200 FORMAT('0(SUBR. RKG   ) CALCULATION OVERFLOW AT X=' F10,4, '. RET
  *URNED WITH NO FURTHER CALCULATION.'//)
  END

```