

論文 / 著書情報
Article / Book Information

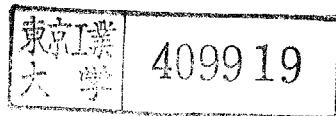
題目(和文)	ディジタルフィルタの特性近似と低感度構成に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	西原明法
Author(English)	AKINORI NISHIHARA
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第994号, 授与年月日:1978年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第994号, Conferred date:1978/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

東京工業大学

ディジタルフィルタの特性近似と
低感度構成に関する研究

昭和 53 年 1 月

指導教官 柳沢 健 教授
提出者 大学院博士課程電子工学専攻
西原 明法



目 次

第1章 序 論	1
1.1 研究の背景と目的	1
1.2 ディジタルフィルタの概念	4
第2章 対数振幅特性の直接近似	7
2.1 まえがき	7
2.2 フーリエ級数を用いる直接近似	8
2.2.1 トランスバーサルフィルタの構成	8
2.2.2 容関数を用いる方法	9
2.2.3 Johnson の方法	10
2.3 直接近似法の改良	12
2.3.1 近似誤差の解析	12
2.3.2 容関数による修正	14
2.3.3 一般の再帰形フィルタ	14
2.3.4 安定性	15
2.4 近似例	16
2.5 むすび	24
第3章 振幅・遅延同時平坦近似	25
3.1 まえがき	25
3.2 極、零点と周波数特性	25
3.3 平坦性の条件	27
3.3.1 振幅平坦特性	27
3.3.2 遅延平坦特性	31
3.4 近似例	32
3.5 むすび	35

第4章	LCフィルタに基づく低感度デジタルフィルタの構成	36
4.1	まえがき	36
4.2	LCはしご形回路のSFG表現	37
4.3	デジタル回路によるSFGの実現	39
4.3.1	低域通過フィルタ	39
4.3.2	帯域通過フィルタ	43
4.4	係數感度の比較	46
4.5	むすび	50
第5章	最少乗算器構成による低感度デジタルフィルタ	51
5.1	まえがき	51
5.2	低感度伝達関数	52
5.3	回路構造の決定	57
5.3.1	抽出法	57
5.3.2	帰還路付加法	59
5.4	係數感度とまろめ雜音	69
5.5	むすび	72
第6章	結論	73
	謝辞	74
	参考文献	75

第1章 序論

1.1 研究の背景と目的

通信、計測、制御をはじめ、電子工学の多くの分野でデジタル信号を取り扱うことが多くなり、これについて、デジタル信号処理の重要性は増すばかりである。基本的な信号処理操作であるフィルタリングをデジタル量の代数演算で行なうデジタルフィルタリングについても、その解析や設計に関する研究が盛んに行なわれている。

デジタルフィルタは、その構造の違いから再帰形と非再帰形とに分類される。非再帰形は内部に帰還ループをもたないため、安定性は常に保証されているが、一般に再帰形よりかなり高い次数が必要である。非再帰形フィルタの設計はトランスポンダルフィルタと同様であり、比較的問題は少ないが、再帰形では、一般に低い次数で希望特性を実現できる反面、安定性や演算誤差の蓄積等の問題があり、やや複雑である。振幅特性の急峻な変化を必要としている等化器等を除いて、一般に多用されるのは再帰形であり、本研究では再帰形デジタルフィルタの設計について考察する。

デジタルフィルタの設計もアナログフィルタの場合と同様に、近似と構成の問題に大別される。

要求される特性に近似し、実現可能な伝達関数を求める場合、良く研究されているアナログフィルタから、双一次変換等の写像によって求めれば、多くの既知の関数をそのまま応用できるため、デジタルフィルタの領域で直接近似する方法についての研究は少ない。ところが、デジタルフィルタの特徴を積極的に利用する場合や、双一次変換等の写像では保存されない遅延特性を考慮する場合には、デジタルフィルタの周波数変数である ω の関数として直接近似することが必要である。

デジタルフィルタのアナログフィルタと全く違う特徴として、標本化によ

る周波数特性の周期性があり、この性質を利用して、希望する周波数特性のフーリエ級数展開を用いて近似できる。Johnson⁽¹⁾の方法は、振幅特性が対数目盛で与えられた場合に適した方法であるが、級数打ち切りによる誤差が特性のリップルとして現われ、直接使用に堪えるものではない。

波形伝送用フィルタ等では、振幅特性ばかりではなく、通過域内での遅延特性の平坦性が非常に重要である。双1次変換等の写像では、振幅、遅延双方の平坦性等を保存することはできないため、遅延特性も規定する場合には、直接Z平面上で考えた必要がある。理想低域フィルタの振幅、遅延同時平坦近似については、振幅と遅延の平坦次数が同程度の時のみ解析的に解かれているが⁽⁷⁾⁽⁸⁾、一般に任意の平坦次数による近似も興味深いことである。

デジタルフィルタでは、伝達関数が与えられれば、直ちに一応の構成は得られるが、フィルタ内で取り扱うすべての量は有限語長に量子化されているため、この影響が無視できない。係数語長の制限は、フィルタの特性を劣化させ、不安定にすることさえある。これは係数感度の問題として取り扱われている。乗算等の演算後のまゝによる語長の制限は白色雑音の混入と考えられ、出力でのS/N比の悪化を招く。このような有限語長の影響は回路構造によって大きく異なり、短い語長で実現できる構成方法が望まれている。

本研究の目的は、Johnsonの方法における近似誤差を軽減し、実用による特性で近似する方法を示し、又、振幅と遅延が同時に平坦なデジタルフィルタを導くことであり、更に、有限語長の影響の小さい低感度デジタルフィルタの構成法を示すことである。

第1章では、準備としてデジタルフィルタの基本的概念について述べる。又、従来の設計法の主なものと列挙し、本論文の近似法や構成法の位置付けを明確にする。

第2章では、フーリエ級数展開を用いる近似方法として、トランスポーザルフィルタの構成とJohnsonの方法を紹介し、その近似誤差を解析する。非再帰形では減衰域に、又、純再帰形では通過域に、近似誤差によりアーチルが生じる

ことを示し、この誤差の影響が、近似過程で窓関数を2回使用することによって大幅に軽減できることを示す。

第3章では、デジタルフィルタの振幅特性と遅延特性が同時に平坦であるための条件式を求める。この式は、極と零点の位置を、双1次変換した S^{-1} 平面上で規定するもので、簡単な多項式で表わされるが、解析的に解くことは困難である。しかしながら、計算機を用いれば容易に解くことができ、得られるフィルタの特性の例も示す。

第4章では、感度特性の優れたLCフィルタをシミュレートする方法による、低感度デジタルフィルタの構成法を示す。LCフィルタの各節点電圧間の関係を信号流れ線図で表わすと、そのトランスミタンスを双2次関数とすることができる。トランスミタンスに S から Z への変数変換を施してデジタル回路を得るが、この時、変換の工夫によって遅延を含まないループが生じるのを防いでいる。

第5章では、縦続接続によって低感度デジタルフィルタを得るための、1次と2次のフィルタの低感度構成法を述べる。乗算器係数の値と関係なく利得が1である点を通過域内に設けると共に、乗算器係数の絶対値が小さくなり、極のとり得る格子点密度が高くなるように伝達関数を変形する。更に、これを最少乗算器数で、すべての等価回路と共に得る方法として、帰還路付加法を提案している。

§1.2 ディジタルフィルタの概念

ディジタルフィルタとは、標準化及び量子化されたディジタル量の代数演算によって、周波数選択性や、その他の処理機能を得るものである。時間連續な信号処理の動作が微分方程式で記述されるのにに対応して、ディジタルフィルタの動作は差分方程式で表わされる。

今、 T 秒毎に信号系列 $x(nT)$ が入力された時、出力系列を $y(nT)$ とすれば、

$$y(nT) = \sum_{i=0}^M a_i x((n-i)T) - \sum_{i=1}^N b_i y((n-i)T) \quad (1-1)$$

と表わされる。 a_i, b_i は実定数であるとする。式(1-1)で表わされるディジタルフィルタを実現する場合、定数倍の乗算器、加算器、単位遅延素子を用いて直ちに構成できる。 b_i がすべて零の場合を非再帰形と呼び、 b_i が非零の場合を再帰形と呼ぶ。再帰形ディジタルフィルタでは、一般に非再帰形ディジタルフィルタに比べて低、次數で希望特性を実現できるが、帰還系としての安定性や換算誤差、累積などの問題が生ずる。

差分方程式で記述されるシステムを周波数領域で取り扱うために Z 变換が用いられる。系列 $x(nT)$ が $n < 0$ で零の時、その Z 变換 $X(z)$ を次式で定義する。

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) z^{-i} \quad (1-2)$$

又、逆 Z 变換は次のように与えられる。

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz \quad (1-3)$$

ディジタルフィルタの入力 $x(nT)$ と出力 $y(nT)$ の Z 变換をそれぞれ $X(z)$ 、 $Y(z)$ とすれば、式(1-1)より次の関係が得られる。

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} X(z) = H(z) X(z) \quad (1-4)$$

この $H(z)$ を式(1-1)で表わされるシステムの伝達関数と呼び、その周波数特

性は $H(z) = e^{j\omega t}$ を代入すると、とによって得られます。

希望する振幅特性をもつ伝達関数を求める手法は多く研究されており、それらをまとめて表1-1に示す。

表1-1 振幅特性の近似手法

近似手法	概要	適用範囲
フーリエ級数展開法	トランスポータル形 周波数特性のフーリエ係数をフィルタ係数とする	非再帰形のみ
	ウインドウ法 級数打ち切り誤差軽減	同上
	Johnsonの方法 対数利得のフーリエ級数展開よりフィルタ係数を算出	非再帰形と純再帰形
	第2章の方法 打ち切り誤差軽減化	すべての構成
$S \rightarrow Z$ 変換	標準Z変換 双1次Z変換	アナログフィルタより $S \rightarrow Z$ の写像を用いて変換
	整合Z変換	同上
	ポテンシャルアナロジー	望むい振幅2乗関数より伝達関数を決定
周波数サンプリング	離散フィルタの後に共振器を並列に置き、その荷重和をとる	再帰形のみ
最適化法	線形計画法 非線形計画法 特性をいくつかの点周波数で規定し、それを満足するよう最適化する	すべての構成

遅延特性の近似に関する研究は少なく、Johnson⁽¹⁾やMaenhout⁽⁵⁾等の方法と、Thiran⁽⁶⁾の研究がある。

更に形態、遅延の同時平坦特性を得る方法は、表1-2に示すように Rhodes and Fahmy⁽⁷⁾と佐藤⁽⁸⁾の研究があった。

表1-2 振幅、遅延同時平坦近似の手法

Rhodes and Fahmy	伝達関数の係数が解析的に得られる	振幅、遅延の平坦次数が同程度の時
佐藤		
第3章の方法	極と零点の位置の条件式が与えられ計算機によて解く。	任意の平坦次数

デジタルフィルタの構成手法は数多く提案されている。これらの中で、低感度性を目的とするものは、LCフィルタのシミュレーションや、低感度2次区間の継続接続によるもの等があり、表1-3にまとめてある。

表1-3 デジタルフィルタの低感度構成法

構成法	概要
LCフィルタの シミュレーション	ウェイブデジタルフィルタ ⁽¹⁾ リーフ ^o フロック ⁽¹²⁾
	Sパラメータのシミュレーション 電圧、電流のシミュレーション
低感度2次区間の 継続接続	第4章の方法 Avenhausの方法 ⁽¹⁷⁾
	Agarwal等の方法 ⁽¹⁶⁾ 第5章の方法
その他	格子形、FLF等の多重帰還形等

第2章 対数振幅特性の直接近似

2.1 まえがき

デジタルフィルタの特徴は、信号等が標本化及び量子化されていることである。標本化の操作により、デジタルフィルタの周波数特性は周期性をもつていて、この周期性を積極的に利用し、希望特性のフーリエ級数展開を用いる近似方法として、トランスポーザルフィルタの構成や、Johnson⁽¹⁾の方法がある。フィルタの仕様は対数目盛（dB 単位）で与えられることが多く、このような場合、対数利得を近似する Johnson の方法は適していると考えられる。

トランスポーザルフィルタの振幅特性は有限項のフーリエ級数で近似されるため、フーリエ級数の性質より、2乗平均誤差が最小になるという意味で最適なものである。ところが希望特性によっては、フーリエ級数の収束があまりはやくない時があり、この場合には級数打ち切りによる誤差が大きくなり、十分な減衰量が得られない。その対策として、窓関数と呼ばれる重み関数をフーリエ級数に乘じることが行なわれている⁽²⁾。窓関数の使用によって最適性は失われるが、過渡帯域付近のリップルが軽減されるとともに、減衰量が大きくとれるため、フィルタとしては使い易いものとなる。このような近似方法は、修正フーリエ級数法あるいはウインドウ法と呼ばれ、非再帰形フィルタの近似には有効な手法であり、よく利用されている。

一方、Johnson の方法では、再帰形フィルタに適用できるという利点があるが、希望特性のフーリエ級数の打ち切りによる誤差以外に、伝達関数をデータ級数に展開する時の級数打ち切り誤差が合計で複雑になる。本章では、この近似誤差について解析し、これを軽減するにも窓関数の使用が有効であることを示す。

§2.2 フーリエ級数を用いる直接近似法

従来、フーリエ級数法といえばトランスポンダルフィルタの近似法を示してて、和数打ち切り誤差を軽減するためには窓関数が併用されている。これに対比しながらJohnsonの方法を紹介する。

§2.2.1 トランスポンダルフィルタの構成

フーリエ級数を用いた非再帰形フィルタの設計に、古くからトランスポンダルフィルタとして知られているものがある。これは、与えられた振幅特性を近似し直線位相をもつように設計するものである。伝達関数 $H(z)$ を

$$\begin{aligned} H(z) &= a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N} \\ &= z^{-N/2} (a_0 z^{N/2} + a_1 z^{N/2-1} + \dots + a_N z^{-N/2}) \end{aligned} \quad (2-1)$$

とする。周波数特性は $z = e^{j\beta T}$ と置いて、

$$H(e^{j\beta T}) = e^{\frac{-j\beta NT}{2}} (a_0 e^{\frac{j\beta NT}{2}} + \dots + a_N e^{-\frac{j\beta NT}{2}}) \quad (2-2)$$

と表められる。 $e^{-\frac{j\beta NT}{2}}$ は振幅が 1 で直線位相を表す項であり、振幅特性に影響しないので、括弧内の項だけを考えることにする。これを Euler の公式によって実数部と虚数部とに分ければ、実数部は余弦級数、虚数部は正弦級数になるので、振幅特性や位相特性を表わす式は一般に複雑になり特性近似には不便である。そこでトランスポンダルフィルタでは次式の条件を付けて、虚数部あるいは実数部を零にする。

$$a_k = a_{N-k} \quad (2-3a)$$

$$\text{又は } a_k = -a_{N-k} \quad (2-3b)$$

この条件によると、振幅特性は 1 種類の 3 角関数の級数となり、希望特性のフーリエ級数と等置すればよい。この時、位相特性は直線になって好ましいが、式(2-3)によって係数の自由度が減少するため、フィルタの次数はフーリエ級数の次数の約 2 倍必要である。式(2-3a)と(2-3b)のどちらを用いるか、即ち振幅特性が余弦級数と正弦級数のどちらか、又、次数 N の偶奇によってトラン

スバーサルフィルタの構成は4通りの場合に分けられる。

こうして得られるフィルタの特性は、希望特性との2乗平均誤差が最小になるという意味で最適なものである。ところがフーリエ級数の収束がそれ程遠くない時には、級数打ち切り誤差によりリップルが生じ、十分な減衰量が得られない。特に、与えた特性が階段状に変化する不連続点をもつ時、不連続点付近でのこの誤差のひるまいはGibbsの現象として知られている。 $\hat{f}(t)$ の誤差の影響を軽減するためには、係數を修正することが必要である。その1つの方法は、ある条件のもとで最適化することで、もう1つの簡単な方法は、窓関数と呼ばれる重み関数の使用で、これについて次節で述べる。

2.2.2 窓関数を用いる方法

フーリエ級数法では、一般に無限に続くフーリエ級数を有限項で打ち切らなければならぬ。この時、打ち切りによる周波数特性の変化の影響がフィルタの仕様で許容され易いものであることが望ましい。非再帰形フィルタの係數 a_k はインパルス応答でもあるから、この打ち切りは時間制限と考えることができ、離散的フーリエ変換(DFT)のために時間関数を切り取る場合と同様の問題となる。この要求を満たす時間制限された重み関数が窓関数である。

ある時間関数 $f(t)$ を、窓関数 $w(t)$ ($w(t)=0, |t|>T$) で切り取って $\hat{f}(t)$ とする。即ち -

$$\hat{f}(t) = f(t) w(t) \quad (2-4)$$

これは、周波数領域では次のようになる。

$$\hat{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(ju) W(j\omega - ju) du \quad (2-5)$$

但し、 $F(j\omega)$ は $f(t)$ の、 $W(j\omega)$ は $w(t)$ のフーリエ変換である。式(2-5)からわかるように $W(j\omega)$ の望ましい形は窓関数である。ところが不確定性原理によつて、時間制限と帯域制限を同時に行なうことは不可能であるから、時間制限関数 $w(t)$ として、そのフーリエ変換 $W(j\omega)$ のエネルギーのなるべく多くが低い

周波数に集中している f_k のを選ぶ。窓関数 $w_i(t)$ を用いて Fourier 級数 f_k を修正して新しい係数 \hat{f}_k を求めるには、

$$\hat{f}_k = w_i\left(\frac{k}{N}\tau\right) f_k \quad (2-6)$$

という乗算をするだけよい。

トランスペーパルフィルタに窓関数を用いる時に、サイドローブの大きい窓では特性にリップルがでるし、帯域幅の広い窓では特性がなまって過渡帶域幅が広がる。窓関数の帯域幅を狭くすることと、サイドローブを小さくすることは相反する条件であるが、ある評価を定めれば最適な窓形が決定される。 $w(\omega)$ の与えられたピーコリップルに対して帯域幅が最小になるという意味で最適な窓として Dolph-Chebyshev 窓⁽³⁾があり、又、ある帯域内に入れるエネルギーの割合が最大になるという意味で最適な窓として、長城波動関数⁽⁴⁾がある。

Kaiser は長城波動関数を良く近似し、しかも計算が比較的容易な窓として次式で定義される I_0 -sinh 窓を提案している⁽²⁾

$$w(t) = \begin{cases} \frac{I_0[\alpha \sqrt{1 - (t/\tau)^2}]}{I_0[\alpha]} & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases} \quad (2-7)$$

但し、 $I_0(x)$ は零次の第1種変形 Bessel 関数である。Kaiser 窓は α の値によって特性が変化し、柔軟性に富んでいる。 $\alpha=0$ の時には式(2-7)より四角窓となり、そのまま打ち切ったことになる。

§ 2.2.3 Johnson の方法⁽¹⁾

次式の伝達関数を考える。

$$H(z) = K \frac{A(z)}{B(z)} = K \frac{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = K \frac{\prod_{i=1}^N (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})} \quad (2-8)$$

簡単のため $K=1$ とし、自然対数をとると次式を得る。

$$\ln H(z) = \ln A(z) - \ln B(z) = \sum_{i=1}^N \ln(1 - z_i z^{-1}) - \sum_{i=1}^N \ln(1 - p_i z^{-1}) \quad (2-9)$$

これを $z^i = 0$ のまわりでテーラ級数に展開して

$$\ln H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k z^{-k} \quad (2-10)$$

とすれば、展開係数 h_k は、 $\ln A(z) =$ より項 f_k と $\ln B(z) =$ より項 g_k との差で表わされる。即ち、

$$h_k = f_k - g_k \quad (2-11)$$

である。テーラ級数の定義により f_k, g_k は次式で与えられる。

$$f_k = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^N z_i^k \quad (2-12a)$$

$$g_k = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^N p_i^k \quad (2-12b)$$

これより、式(2-10)の級数が収束するための必要十分条件は、 $|z_i| < 1$ 且つ $|p_i| < 1$ ($i=1, \dots, N$) で、この時収束領域は $|z| \geq 1$ である。

周波数応答を求めるために $z = e^{j\beta T}$ と置けば、式(2-10)は

$$\ln H(e^{j\beta T}) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \cos k\beta T - j \sum_{k=1}^{\infty} h_k \sin k\beta T \quad (2-13)$$

となる。一方、次式の関係が成り立っている。

$$\ln H(e^{j\beta T}) = \ln |H(e^{j\beta T})| + j \arg H(e^{j\beta T}) \quad (2-14)$$

式(2-13)と(2-14)を比較してみると、希望する振幅特性を式(2-13)右辺第1項のようにフーリエ級数展開して、伝達関数が求められることがわかる。この場合、フーリエ係数 h_k を分子の項 f_k と分母の項 g_k とに分配する方法が問題であるが、 $g_k = 0$ の非再帰形と $f_k = 0$ の純再帰形には直接適用できる。伝達関数の係数との関係式は次式で与えられる。

$$ka_k = \sum_{i=0}^{k-1} (k-i) f_{k-i} a_i \quad \text{但し } a_0 = 1 \quad (2-15a)$$

$$kb_k = \sum_{i=0}^{k-1} (k-i) g_{k-i} b_i \quad \text{但し } b_0 = 1 \quad (2-15b)$$

純再帰形フィルタでは、テー λ ラ係数がフーリエ係数と反対符号であるから、ある特性を純再帰形フィルタで近似することは、その特性を対数目盛(dB単位)で書いたものを上下逆にして非再帰形フィルタで近似することと、安定性等の問題を除いて等価である。例えば、LPFを純再帰形で作るときには、同じ遮断周波数のHPFを近似する非再帰形フィルタの伝達関数を求め、その逆数をとれば求める純再帰形フィルタの伝達関数となる。純再帰形フィルタは非再帰形フィルタに比べて、一般に遮断周波数付近の切れが鋭いが、全体の次数はそれ程改善されない。そのため、極と零点の両方をもつ一般の再帰形フィルタが望まれる。

対数振幅特性の近似方法としては、Maenhout⁽⁵⁾等も提案しているが、これはJohnsonの方法と全く等価であることが容易に示される。

3.2.3 直接近似法の改良

Johnsonの直接近似法は、対数利得を近似できることや、再帰形フィルタに適用できること等、利点をもっているが、近似誤差が比較的大きく、又、再帰形も純再帰形に限られており、そのまま使用するには問題がある。そこで、この近似法に改良を加える。そのためにまず、近似誤差の解析を行なう。

3.2.3.1 近似誤差の解析

Johnsonの方法における近似誤差の要因は、近似過程で2回必要な級数展開を有限項まで打ち切ることである。まずフーリエ級数の打ち切りは、トランスポーラルフィルタの場合と同様、この種の近似法では避けられないものである。この誤差の影響を軽減するが、3.2.2で述べた窓関数の使用である。

フーリエ級数の打ち切りに窓関数を使用しても、その後でテー λ ラ級数を打ち切るため、この誤差が混入する。このテー λ ラ級数打ち切りによる誤差について考えてみよう。近似誤差が比較的小さい時、誤差はリザル状に現われるため、その微分をとっても同じオーダーの値となる。誤差の微分をE($e^{-j\omega}$)と置けば、非

再帰形フィルタの時、

$$\begin{aligned} E(e^{j\beta T}) &= \sum_{k=1}^N k f_k e^{-jk\beta T} - \frac{\sum_{k=1}^N k a_k e^{-jk\beta T}}{\sum_{k=1}^N a_k e^{-jk\beta T}} \\ &= e^{-jN\beta T} \frac{(f_1 a_N + 2f_2 a_{N-1} + \dots + N f_N a_1) e^{j\beta T} + (f_2 a_N + \dots + N f_N a_2) e^{j2\beta T} + \dots + N f_N a_1 e^{jN\beta T}}{\sum_{k=1}^N a_k e^{-jk\beta T}} \end{aligned} \quad (2-16)$$

とすると、この絶対値は

$$|E(e^{j\beta T})| = \frac{|(f_1 a_N + 2f_2 a_{N-1} + \dots + N f_N a_1) e^{j\beta T} + (f_2 a_N + \dots + N f_N a_2) e^{j2\beta T} + \dots + N f_N a_1 e^{jN\beta T}|}{|\sum_{k=1}^N a_k e^{-jk\beta T}|} \quad (2-17)$$

である。次の不等式が得られる。

$$|E(e^{j\beta T})| \leq \frac{|f_1 a_N + 2f_2 a_{N-1} + \dots + N f_N a_1| + |2f_2 a_N + \dots + N f_N a_2| + \dots + |N f_N a_1|}{|H(e^{j\beta T})|} \quad (2-18a)$$

同様にして、純再帰形フィルタでは、

$$|E(e^{j\beta T})| \leq \frac{|g_1 b_N + 2g_2 b_{N-1} + \dots + N g_N b_1| + |2g_2 b_N + \dots + N g_N b_2| + \dots + |N g_N b_1|}{|H(e^{j\beta T})|} \quad (2-18b)$$

となる。式(2-18a)は誤差の包絡線の限界を与えるもので、分母が小さくなるほど誤差が大きくなることを示している。式(2-18a)の分母はフルタの振幅特性であり、式(2-18b)では振幅特性の逆数であるから、非再帰形では減衰域で、純再帰形では通過域でそれが誤差が大きい。このことは、後で述べる近似結果と良く合っている。非再帰形フィルタと純再帰形フィルタの伝達関数は互に逆数の関係であるから、両者で減衰域と通過域の性質が逆転するのも当然のことである。以上のことより、この近似方法を純再帰形に直接適用することは、近似誤差の点から問題があり、注意が必要である。

§2.3.2 密閉数による修正

前節で述べた近似誤差によるリップルを軽減することについて考える。この場合にも、密閉数の理論が適用でき、良い結果が得られる。

前述のように、純再帰形フィルタを近似するときには、希望する汎数利得を上下逆にして非再帰形フィルタで近似し、得られた伝達関数の逆数をとれば良いから、ここでは非再帰形フィルタについてのみ考える。

非再帰形フィルタの伝達関数の係数はインパルス応答列であり、式(2-15)で与えられる無限系列を有限項まで打ち切ることは、1種の時間制限と考えられるから、打ち切りによる周波数領域での特性の乱れの影響を小さくするために適当な密閉数を用いるべきである。又、次のように考えることもできる。即ち、式(2-10)のデータ展開は、 $Z = e^{j\omega T}$ と置けば、フーリエ級数展開を考えることができ、その打ち切りはトランスペーサルフィルタの場合と同様である。この場合には Kaiser の I_0 -Sinc 密が有効で、リップルが軽減される。その代償として過渡帶域幅が広がる。式(2-15)で与えられた係数を、密閉数 $w_2(t)$ を用いて次のよう修正する。

$$\hat{a}_k = a_k w_2 \left(\frac{k}{N} \pi \right) \quad (2-19a)$$

$$\hat{b}_k = b_k w_2 \left(\frac{k}{N} \pi \right) \quad (2-19b)$$

これが求めたディジタルフィルタの伝達関数の係数である。

§2.3.3 一般の再帰形フィルタ

低い次並で急峻な特性を得るには、極と零点の両方をもつ一般の再帰形フィルタが必要である。分子子共に N 次の再帰形フィルタは、 N 個の遅延素子により実現することができ、最も経済的である。

級数展開を用いて再帰形フィルタを設計するには、Maehmout 等⁽⁵⁾が提案しているように非再帰形フィルタから再近似する方法や、これと同様に純再帰形フィルタから再近似する方法が考えられるが、どちらも安定性や近似誤差の点で

問題が多い。

Johnson の方法で一般の持満形フィルタを近似する場合に問題となることは、希望特性のフーリエ係数 h_k を分子の項と分母の項 f_k とに分配する方法である。フーリエ係数 h_k が定まつても、 $h_k = f_k - g_k$ を満足する f_k と g_k の組み合わせは無数にあり、最適な分配方法というものは一般には決まらない。最も単純でしかも多くの場合妥当であると思われる方法は、 h_k を 2 等分して f_k と g_k とに割り当てるこことある。これは必要な減衰量を 2 等分して、それぞれを非再帰形と純再帰形で近似し、組み合せることに相当する。 f_k と g_k が決定すれば 式(2-13)により伝達関数の係数 a_k と b_k が共に定まる。

2.3.4 安定性

再帰形ディジタルフィルタが安定であるための必要十分条件は、すべての極が單位円内にあること、即ち $|P| < 1$ である。従って、式(2-10)の級数であるには必ず等置するフーリエ級数の収束が問題となる。ところが、フーリエ級数は、与えられた特性が正関数ではない限り必ず収束するとは限らないので、ほとんどのフィルタに用いる特性では、次数を無限大にすれば安定である。實際には級数を有限項で打ち切るところが必要であるが、それまでの範囲で収束するところがわかる程度に次数を大きくすれば安定である。更に、窓関数によつて級数の収束を強制的に速めれば安定性がより確実になる。多くのフィルタを實際に近似した結果も、ほとんどの場合にこれ程高くないう次数で安定なフィルタが得られる。

§2.4 近似例

Johnson の方法で、まず 6 次バタワース特性を純再帰形で近似してみる。図 2-1 でわかる通り、元関数と同じ 6 次で良い近似が得られ、有効性が確認できる。この様に元関数が比較的簡単な形であれば良いが、一般には理想的な階段状の特性を近似する要求がある。そこで次に階段状に変化する LPF を非再帰形と純再帰形で近似して例を図 2-2, 2-3 に示す。§2.3.1 の解析の通り、非再帰形では減衰域に、純再帰形では通過域に大きなノルムがある。

次に、窓による特性改善の効果を見てみよう。図 2-2, 2-3 のフィルタのフーリエ級数の打ち切りにのみ Kaiser 窓 ($\alpha_1 = 6.0$) を使用すると、図 2-4, 2-5 のようになって、テラ級数の打ち切りが後続するためになりノルムの大きさは少しこれ程改善されない。フーリエ級数はそのまま打ち切り、テラ級数のみを Kaiser 窓 ($\alpha_2 = 3.5$) で打ち切りと図 2-6, 2-7 となり、かなり改善される。これを併用して 2 回の窓 ($\alpha_1 = 6.0, \alpha_2 = 3.5$) を用いると図 2-8, 9 のように著しく改善される。これらを組み合わせて、分子子双方をもつ再帰形とすれば、図 2-10 のように非常に美しい特性が得られる。

近似に必要な情報は、2 回使用する Kaiser 窓の変数 α_1, α_2 と次数 N 、及びその時々の過渡帯域幅 $\Delta\beta$ で、これらは次式によって置ぶと良い。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &\geq 4.0 \\ \alpha_2/\alpha_1 &= 32/ATT \\ N &= \frac{1.5\sqrt{\alpha_2}}{\Delta\beta} \frac{\pi}{T} \end{aligned} \right\} (2-20)$$

但し、ATT は必要減衰量 (dB) である。式 (2-20) は多くのフィルタの近似が経験的に得られたもので、大体の目安を与える式である。

同様にして再帰形で HPF, BPF 及び複数帯域の BPF を近似した特性を図 2-11 ~ 13 に示す。

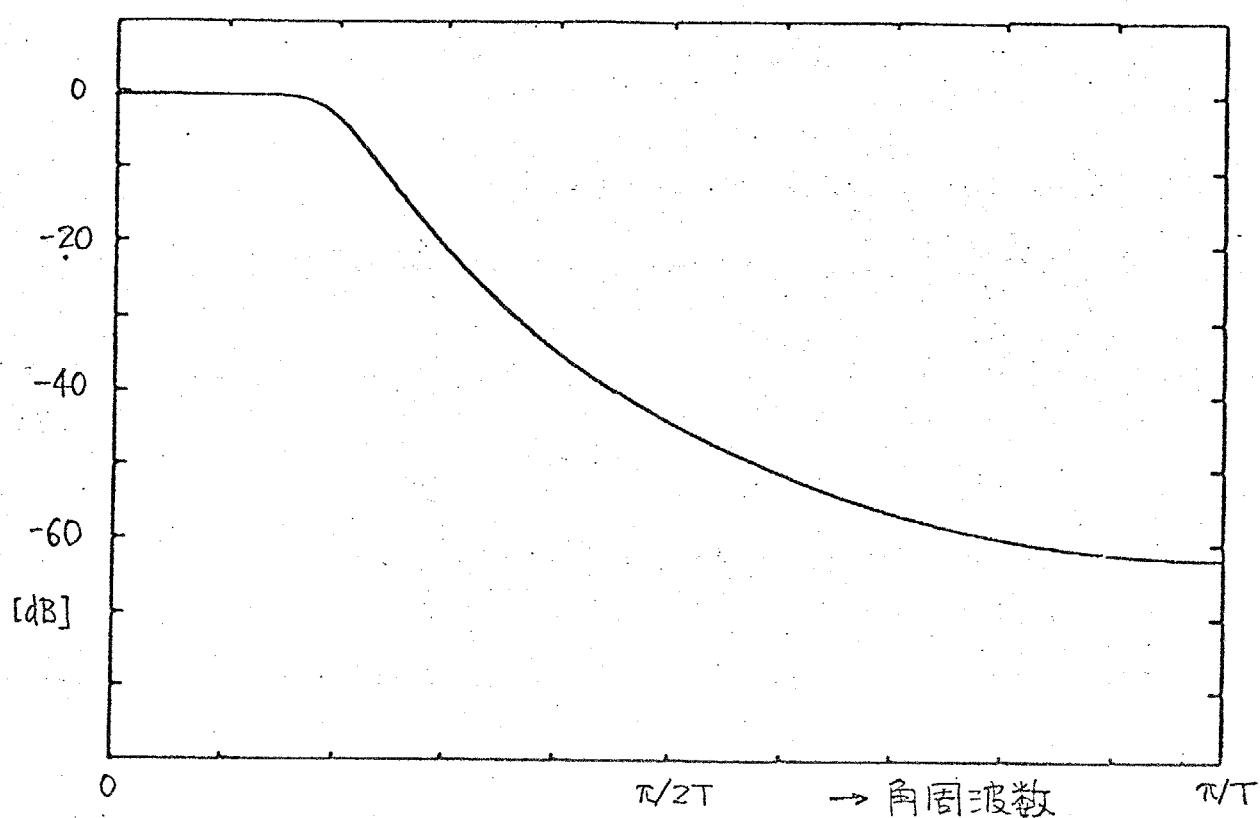


図 2-1(a) 元特性 6次 sin形バタワース特性

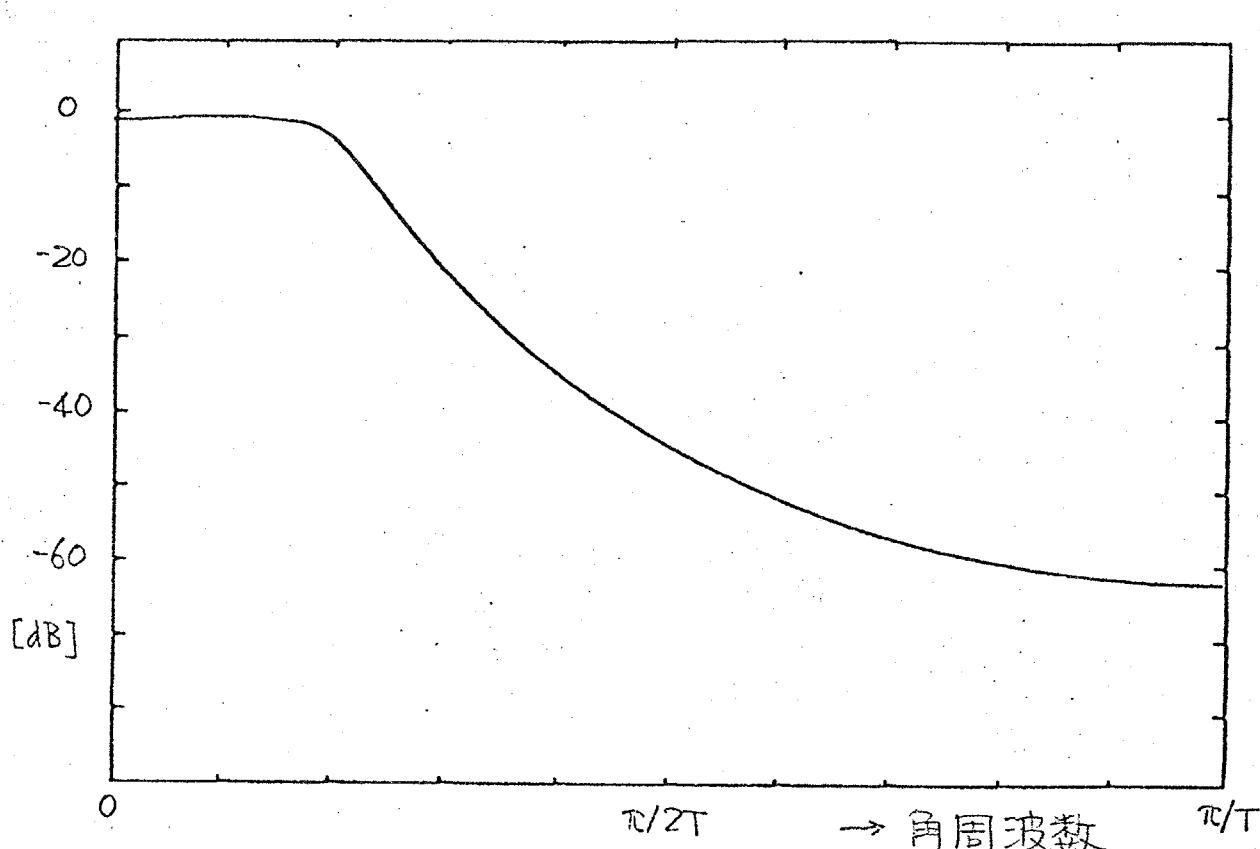


図 2-1(b) 6次純再帰形による(a)の近似

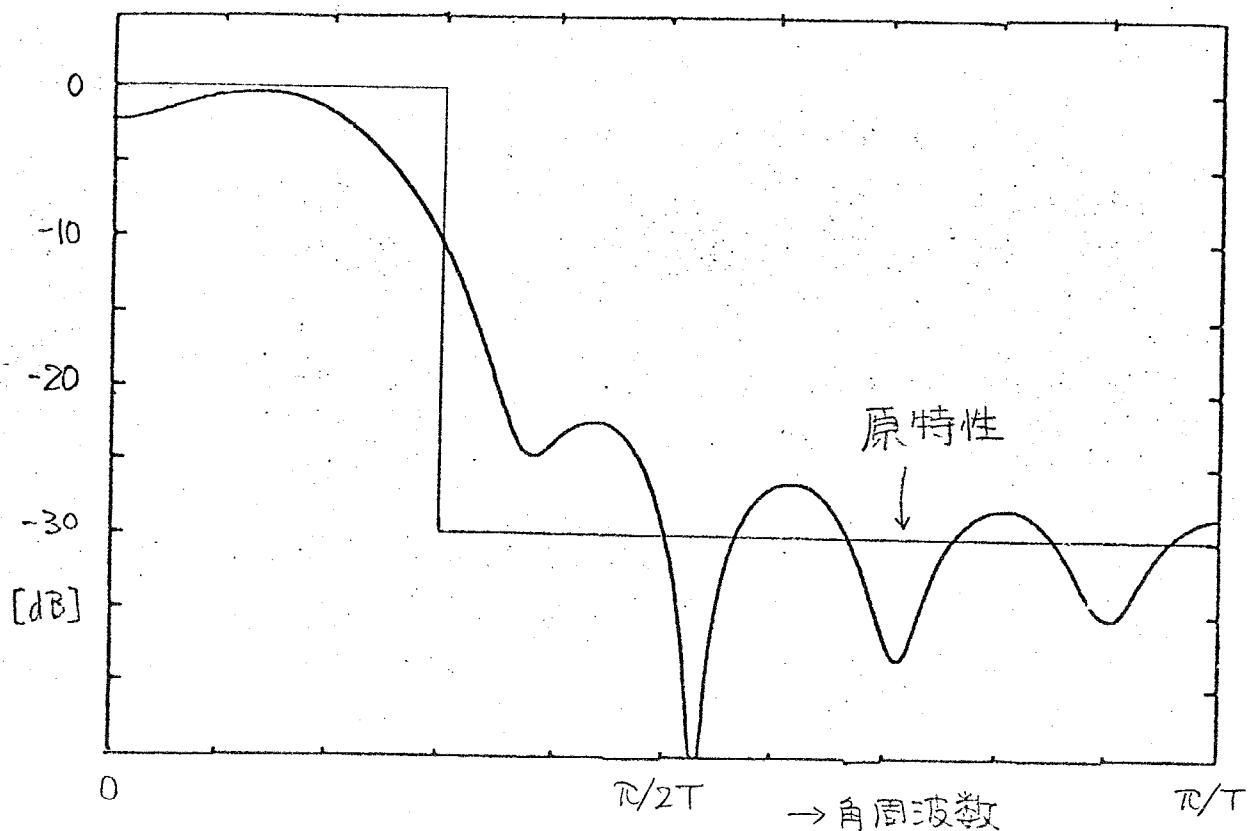


図2-2 10次 非再帰形

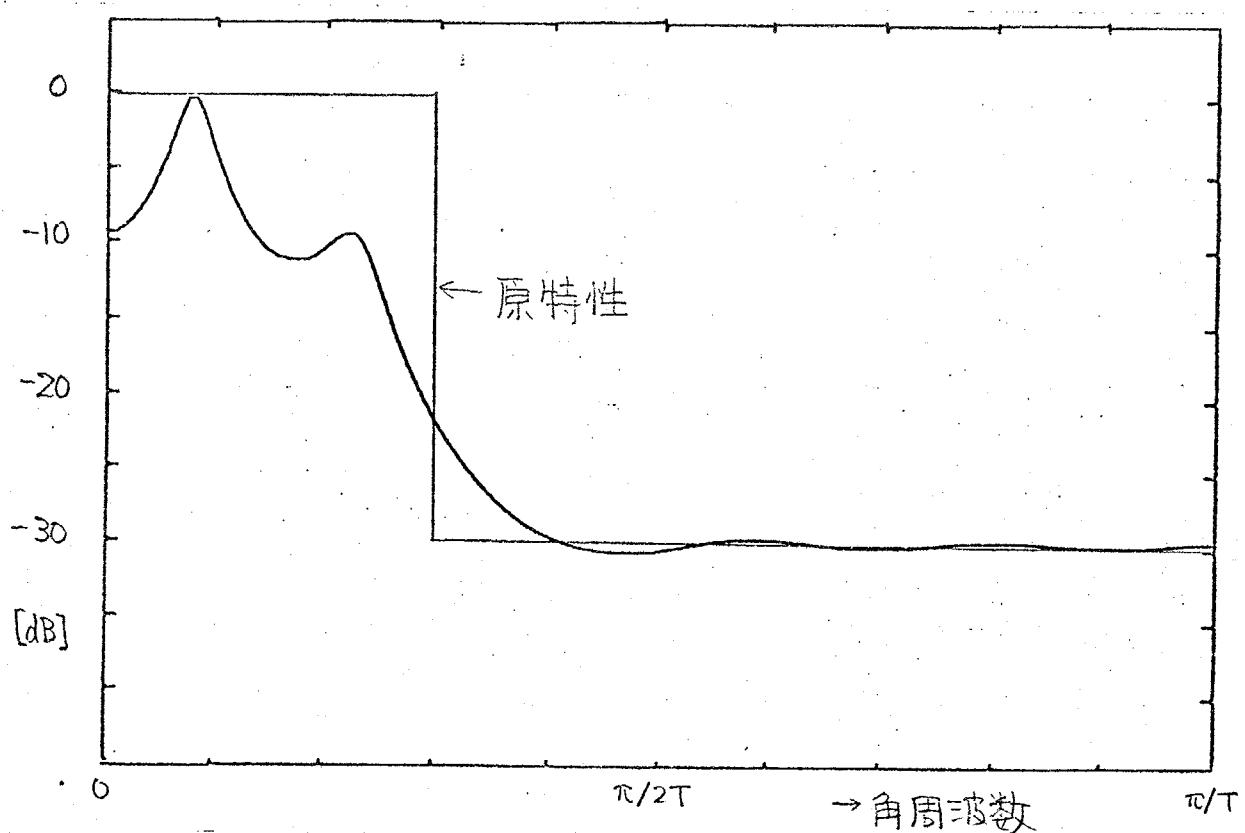


図2-3 10次 純再帰形

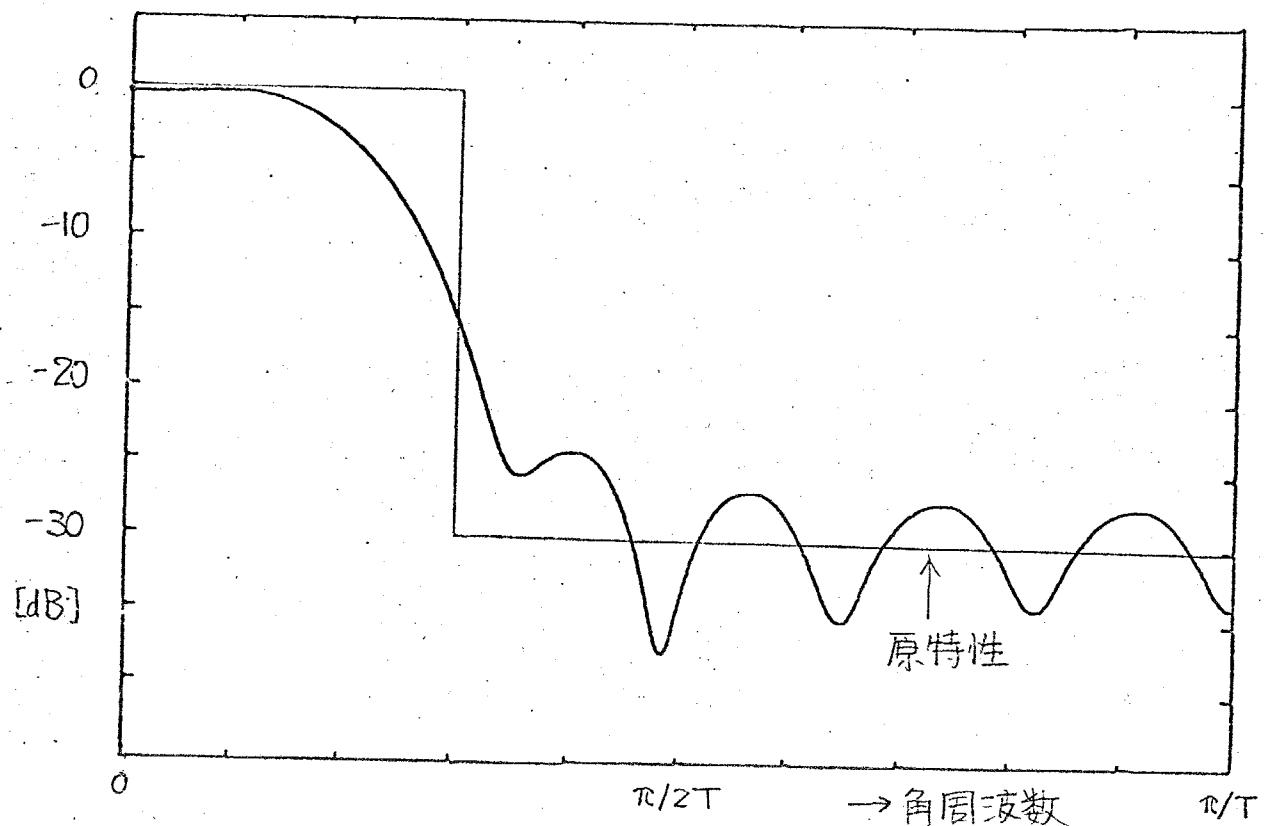


図2-4 10次非再帰形 濾 ($\alpha_1=6, \alpha_2=0$) あり

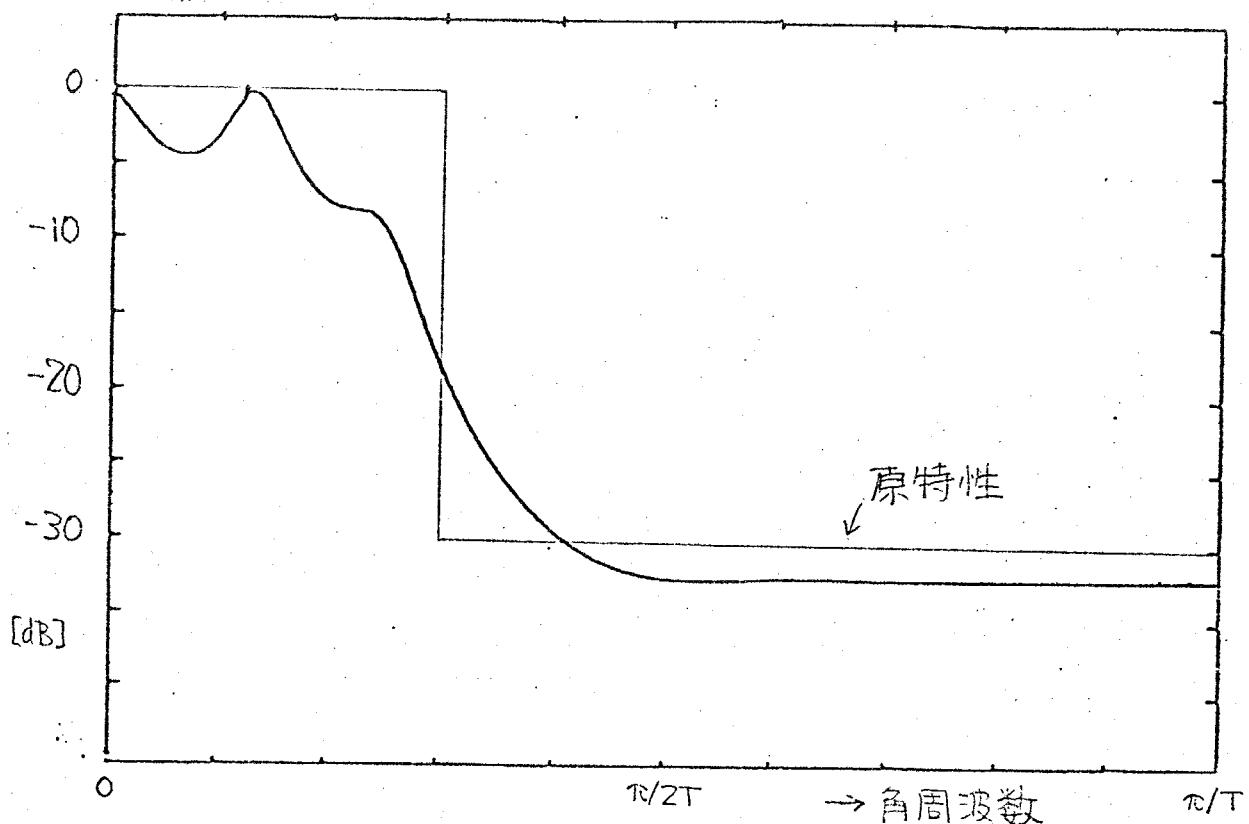


図2-5 10次純再帰形 濾 ($\alpha_1=6, \alpha_2=0$) あり

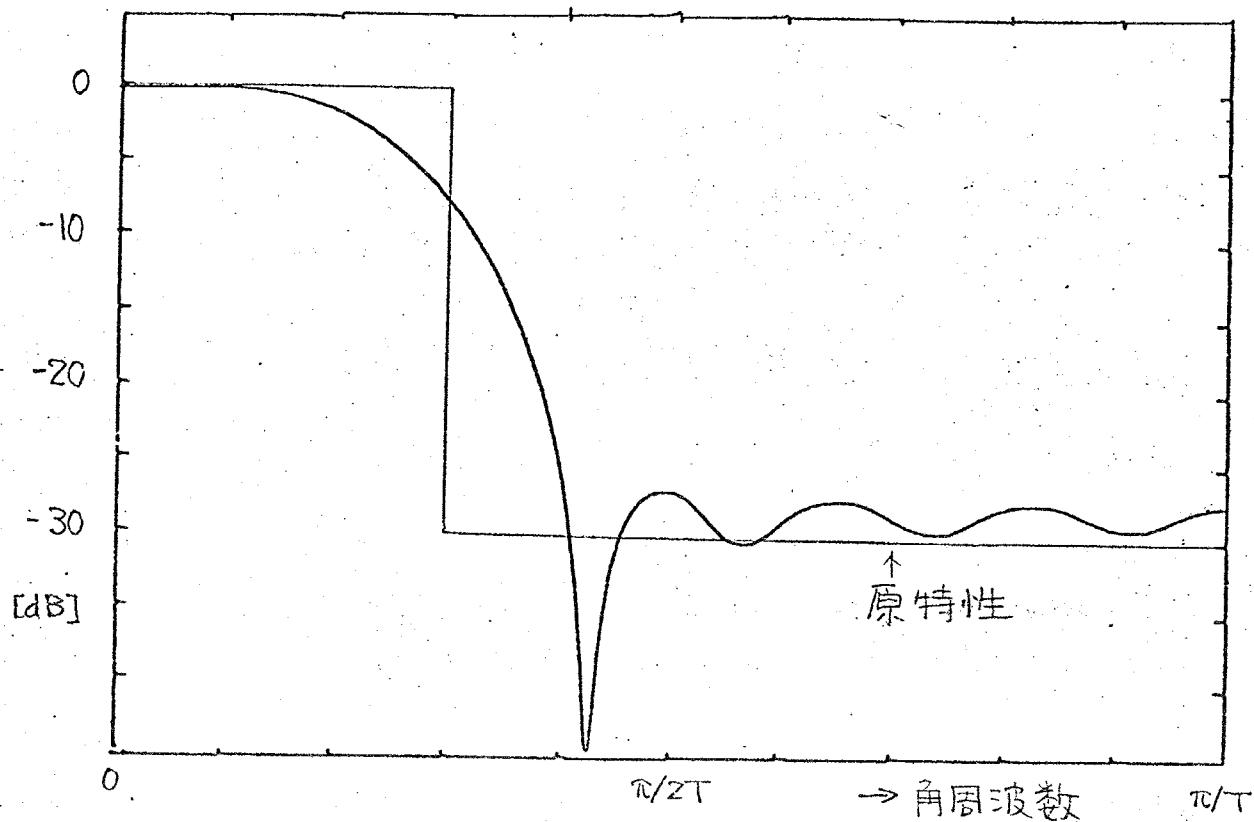


図2-6 10次非再帰形 積 ($\alpha_1=0, \alpha_2=3.5$)

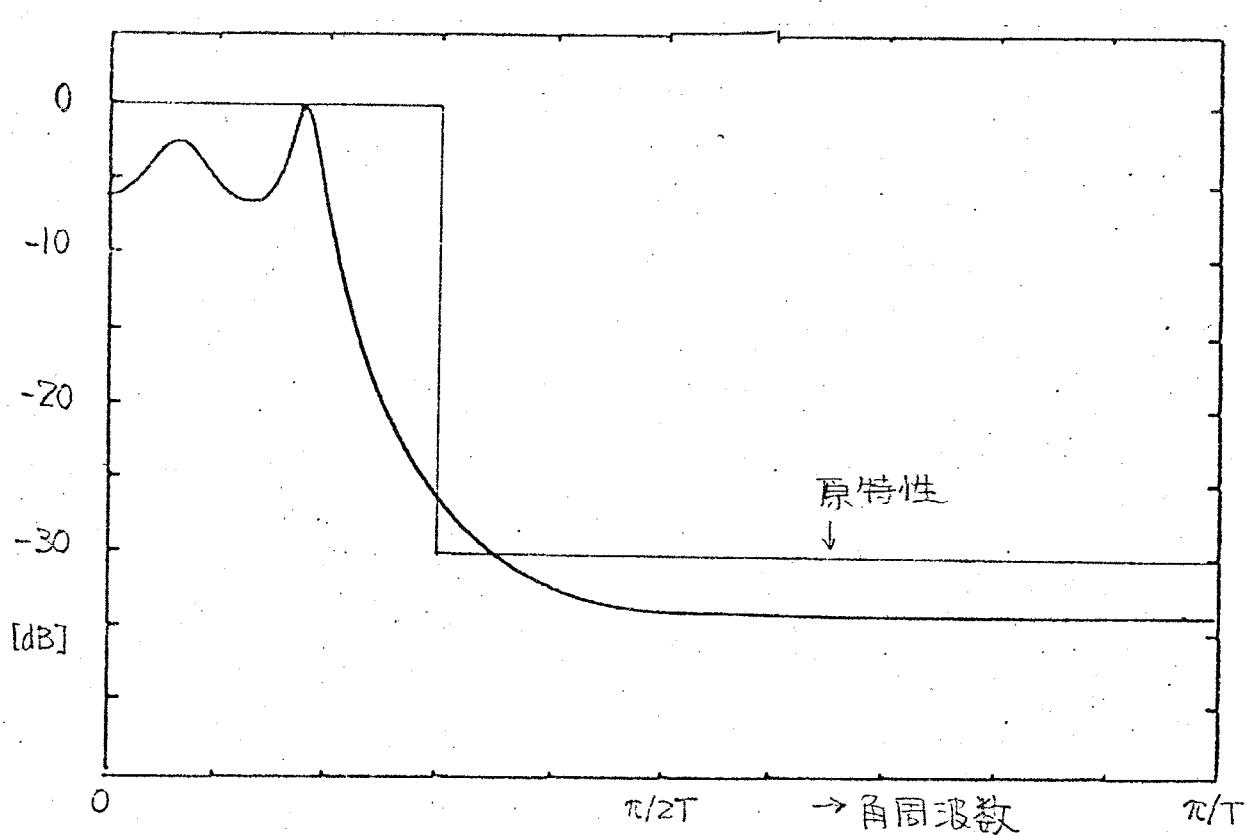
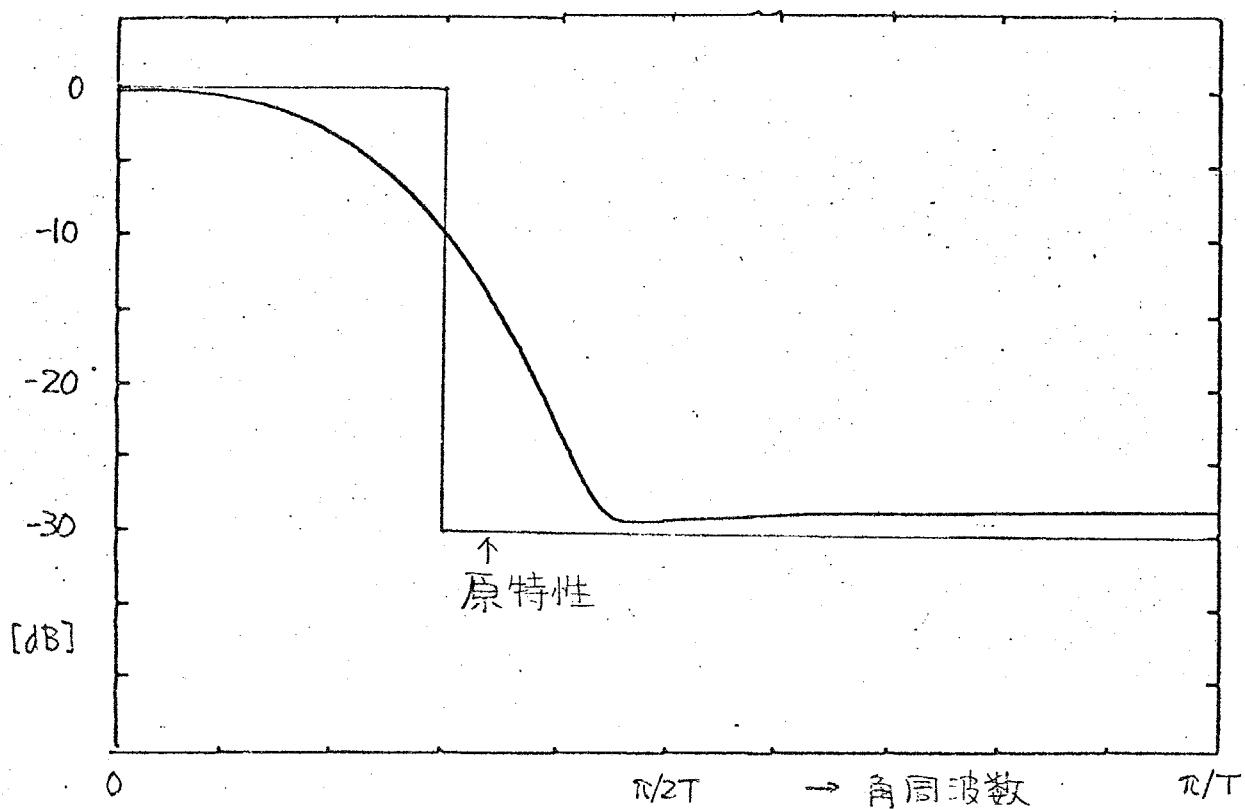
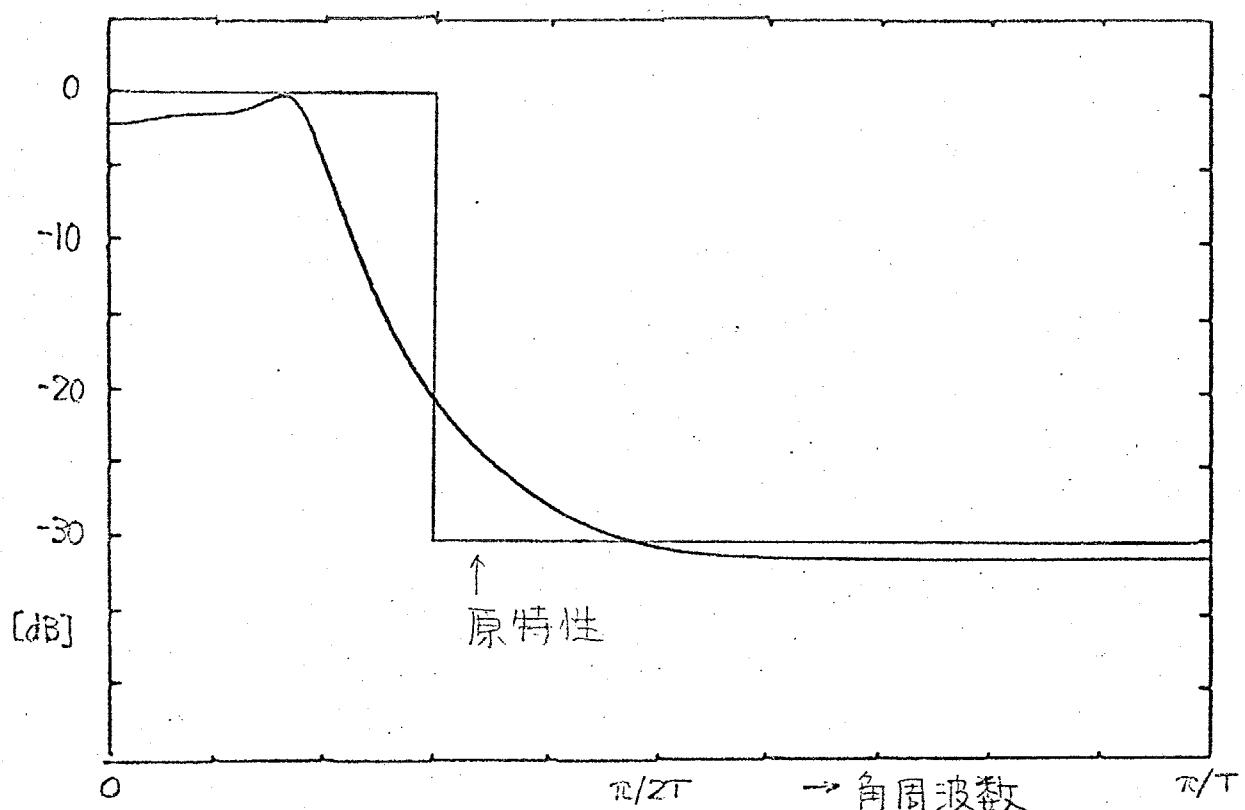


図2-7 10次純再帰形 積 ($\alpha_1=0, \alpha_2=3.5$)

図2-8 10次非再帰形 窓 ($\alpha_1=6, \alpha_2=3.5$)図2-9 10次 純再帰形 窓 ($\alpha_1=6, \alpha_2=3.5$)

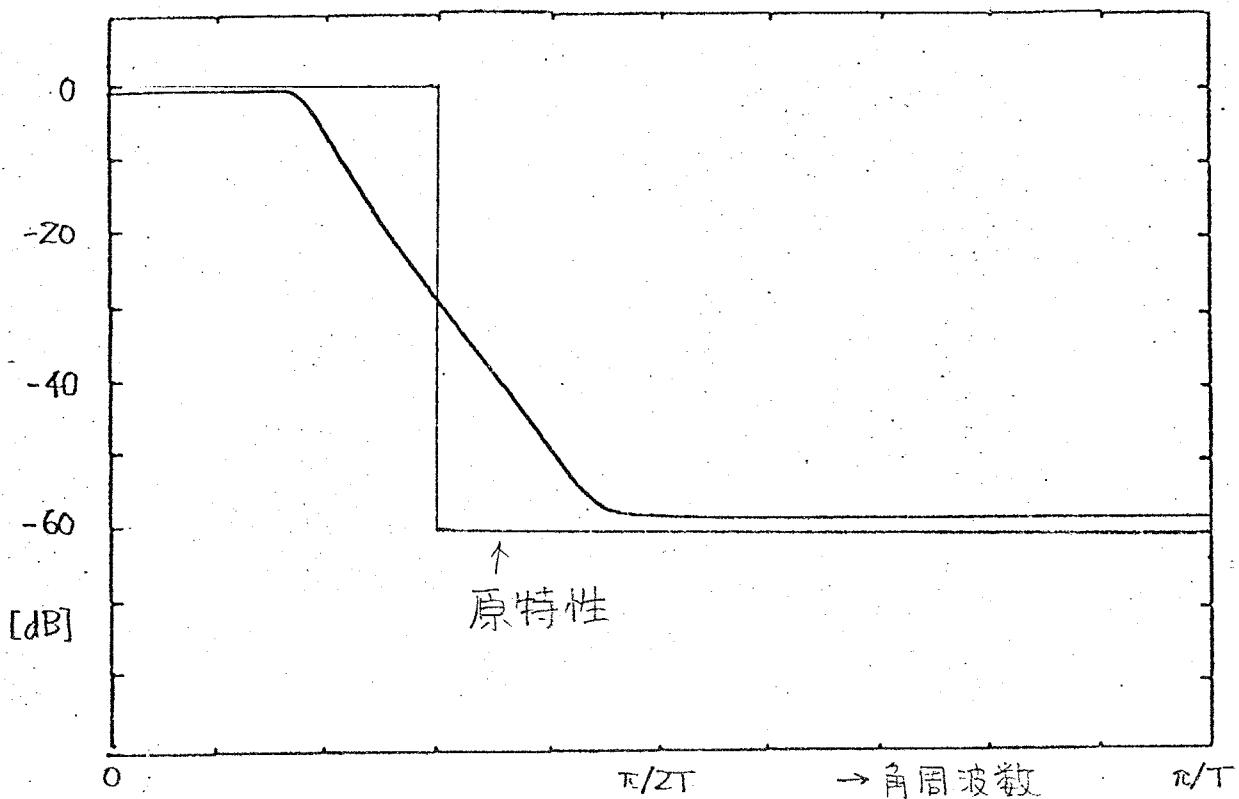


図2-10 10次再帰形LPF 容 $\alpha_1=6, \alpha_2=3.5$

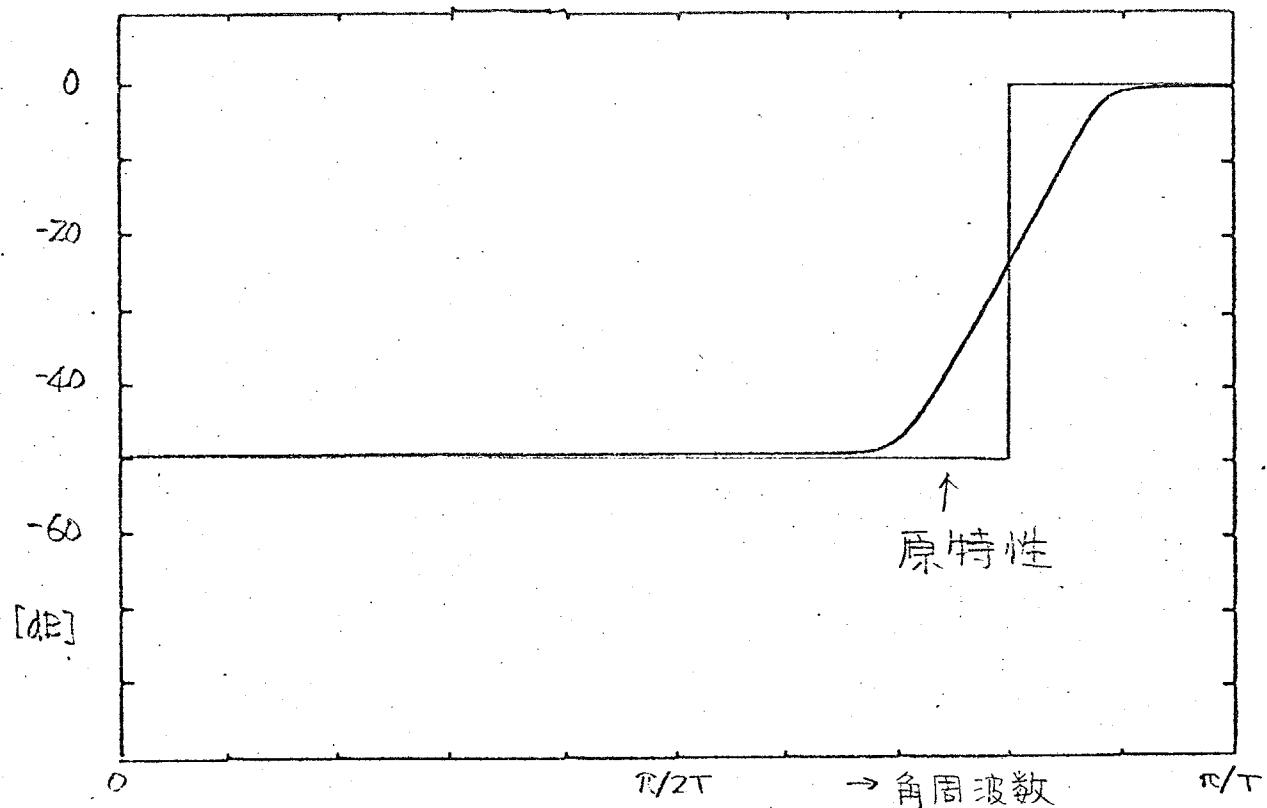


図2-11 15次再帰形HPF 容 $\alpha_1=6, \alpha_2=4$

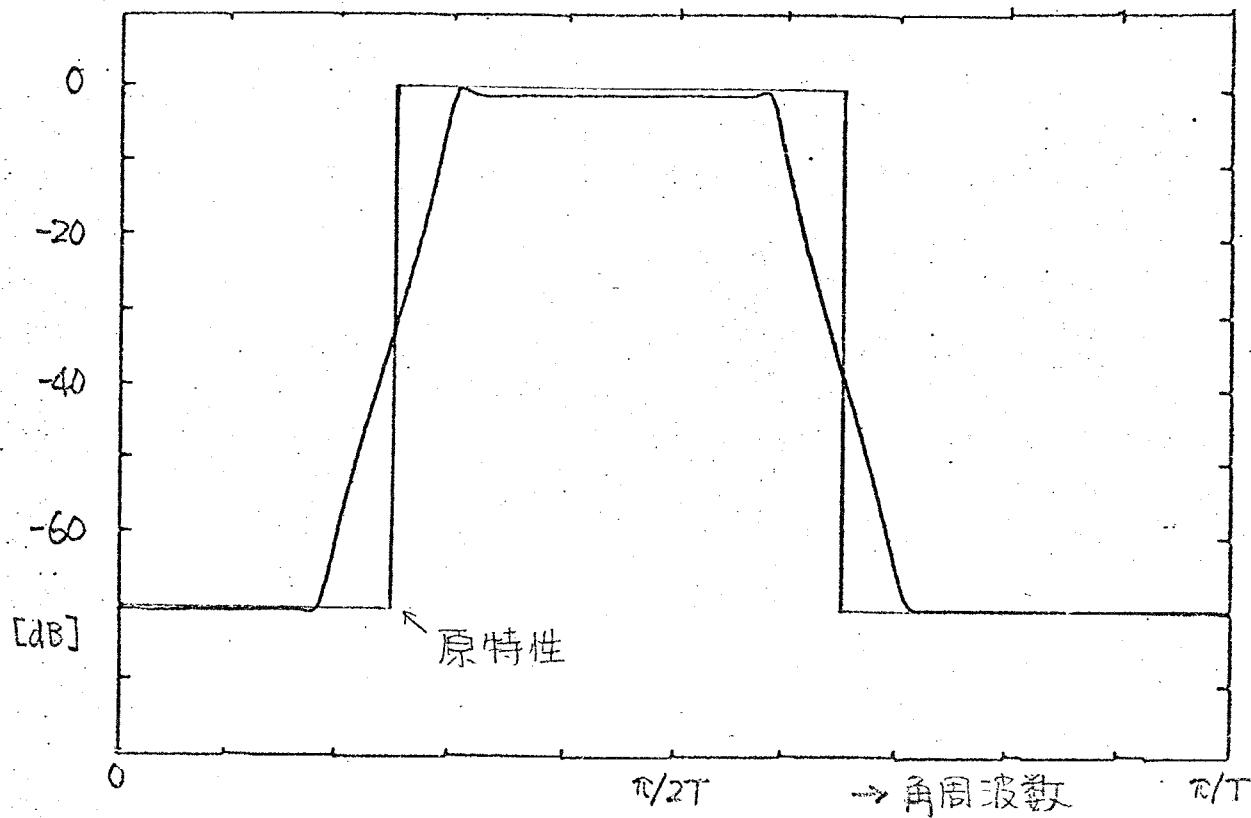


図2-12 25次再帰形BPF 寄 $\alpha_1=8, \alpha_2=4$

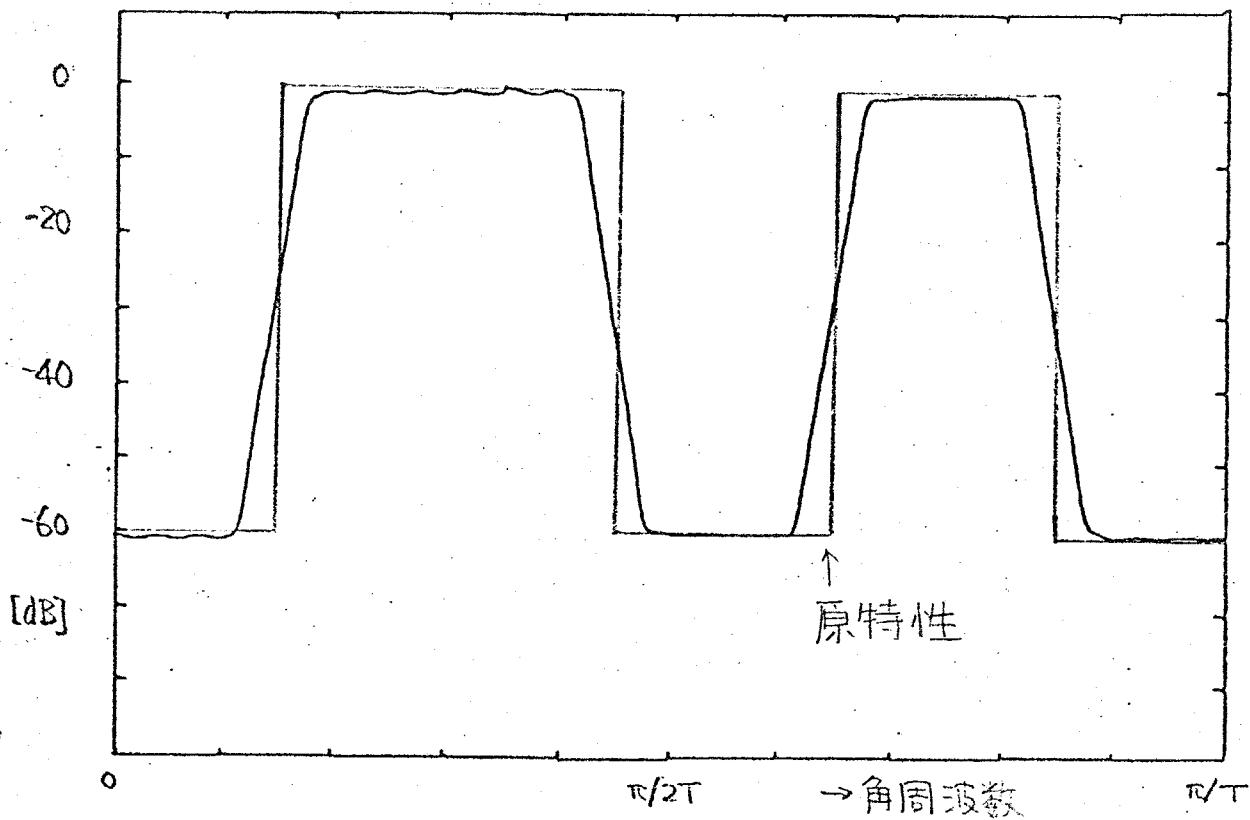


図2-13 44次再帰形複数帯域BPF 寄 $\alpha_1=6, \alpha_2=3.5$

§ 2.5 可観性

ディジタルフィルタの周波数特性の近似方法のうちで、近似手順が簡単な級数展開による直接近似法に注目して考察を行なった。Johnson の方法における級数打ち切りによる誤差を解析し、非再帰形では減衰域に、純再帰形では通過域にそれぞれ誤差による大きなりぶれが生ずることを導いた。ヒリガルは、適当な窓関数を使用すれば軽減されるることを示した。この場合、窓関数の使用によって安定性はより確実になる。近似に必要な窓関数の変数等をヘルツの仕様から決定する式も与えた。窓を用いる直接近似法は設計手順が非常に簡単で、一応实用による特性を得られるが、問題点として、安定性を完全には保証していないことと、特性の評価方法があいまいであることなどがある。

第3章 振幅、遅延同時平坦近似

§3.1 まえがき

波形をあまり乱さずに周波数帯域を制限するフィルタがしばしば必要になる。この場合、フィルタの振幅特性ばかりでなく、通過域内での遅延特性の平坦性が非常に重要である。遅延特性が最大平坦であるデジタルフィルタはThiran⁽⁴⁾が発表しているが、アナログフィルタにおけるベッセルフィルタと同様に、振幅特性の急峻な遮断は得られない。波形の歪を少なく伝達するためのフィルタとしては、従来、位相直線の非再帰形フィルタを用いたり、フィルタに遅延等化器を絶続に接続する方法等が用いられていた。これに対し、振幅特性と遅延特性が同時に平坦な再帰形フィルタを設計する方が、素子数や経済性の点で有利であると考えられる。このような観点から、理想低域フィルタを最大平坦近似するデジタルフィルタについて Rhodes⁽⁵⁾と佐藤⁽⁶⁾が研究している。これらは、振幅と遅延の平坦次数が同程度の場合のみを取り扱っており、解析的に解いている。

本章では、振幅と遅延の平坦次数が任意に与えられた時、同時平坦近似を行なう。この場合、伝達関数の係数を求めるのではなく、極と零点の位置に関する条件式を求めていく。この式は、計算機を使用すれば容易に解ける。

§3.2 極、零点と周波数特性

前章と同様に、デジタルフィルタの伝達関数を極と零点とで表わす。

$$H(z) = K \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})} \quad (3-1)$$

簡単のために $K = 1$ としても一般性を失はない。振幅、遅延同時平坦特性は、

最小位相移関数では実現できないため、式(3-1)で、零点 z_i の位置として $|z_i| > 1$ ($i=1, \dots, M$) とする。一方、フィルタの安定性を保証するため、極 p_i の位置は、 $|p_i| < 1$ ($i=1, \dots, N$) でなければならぬ。

式(3-1)の自然対数をとると、

$$\begin{aligned} \ln H(z) &= \sum_{i=1}^M \ln(1-z_i z^{-1}) - \sum_{i=1}^N \ln(1-p_i z^{-1}) \\ &= \sum_{i=1}^M \ln(z-z_i) - M \ln z - \sum_{i=1}^N \ln(1-p_i z^{-1}) \end{aligned} \quad (3-2)$$

を得る。ここで $\ln(z-z_i)$ は $z=0$ のまわりで、又、 $\ln(1-p_i z^{-1})$ は $z=0$ のまわりでそれぞれテーラー展開できる。即ち、

$$\ln H(z) = \sum_{i=1}^M \sum_{k=0}^{\infty} f_{ik} z^k - M \ln z - \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} g_{ik} z^{-k} \quad (3-3a)$$

但し、 $f_{i0} = \ln(-z_i)$

$$\left. \begin{aligned} f_{ik} &= -\frac{1}{k} z_i^{-k} \\ g_{ik} &= -\frac{1}{k} p_i^k \end{aligned} \right\} \quad (3-3b)$$

式(3-3)の級数の収束について調べると、第1項は $|z_i| > 1$ のとき $|z| \leq 1$ で収束し、第3項は $|p_i| < 1$ のとき $|z| \geq 1$ で収束する。結局、式(3-3)全体として $|z|=1$ 即ち単位円上で収束する。そこで、 $z = e^{j\beta T}$ と置けば周波数特性が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \ln H(e^{j\beta T}) &= \sum_{i=1}^M \sum_{k=0}^{\infty} f_{ik} e^{jk\beta T} - jM\beta T - \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} g_{ik} e^{-jk\beta T} \\ &= \sum_{i=1}^M f_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^M f_{ik} - \sum_{i=1}^N g_{ik} \right) \cos k\beta T \\ &\quad - j \left\{ M\beta T - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^M f_{ik} + \sum_{i=1}^N g_{ik} \right) \sin k\beta T \right\} \end{aligned} \quad (3-4)$$

これに式(3-3b)の関係を代入すれば、

$$\begin{aligned} \ln H(e^{j\beta T}) &= \sum_{i=1}^M \ln(-z_i) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^N p_i^{-k} - \sum_{i=1}^M z_i^{-k} \right) \cos k\beta T \\ &\quad - j \left\{ M\beta T + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^N p_i^{-k} + \sum_{i=1}^M z_i^{-k} \right) \sin k\beta T \right\} \end{aligned} \quad (3-5)$$

となる。一方、 $H(e^{j\beta T}) = A(\beta T) e^{j\Theta(\beta T)}$ と置けば、 $\ln H(e^{j\beta T})$ は次のようにも書ける。

$$\ln H(e^{j\beta T}) = A(\beta T) - j\Theta(\beta T) \quad (3-6)$$

式(3-5)と(3-6)を比較すると、振幅特性 $A(\beta T)$ が、

$$A(\beta T) = \sum_{i=1}^M \ln(-z_i) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^N p_i^{-k} - \sum_{i=1}^M z_i^{-k} \right) \cos k\beta T \quad (3-7a)$$

となり、又、位相特性 $\Theta(\beta T)$ が、

$$\Theta(\beta T) = M\beta T + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^N p_i^{-k} + \sum_{i=1}^M z_i^{-k} \right) \sin k\beta T \quad (3-7b)$$

と書けることが分かる。周波数特性を、極と零点によって表わすことができた。

§3.3 平坦性の条件

遅延において、振幅特性や遅延特性が平坦であるということは、これらの特性を $\beta T = 0$ まわりでテーラ展開した時、始めからいくつかのべき乗の係数がすべて零であるということである。振幅特性も遅延特性も周波数の偶関数であるから、そのテーラ展開は偶数べき項のみを含む。 $2k$ 次のべき乗の係数までが零の時、 k 次の平坦性をもつという。振幅と遅延が平坦であるための条件を求めてみよう。

§3.3.1 振幅平坦特性

式(3-7a)を表すとこれ3振幅特性が k 次の平坦性をもつための条件を求める。

テー λ 展開した時の係数は微分で表められるから、次式が成り立つ。

$$\frac{d^{2n}}{d(\beta T)^{2n}} A(\beta T) \Big|_{\beta T=0} = 0 \quad m=1, \dots, k_a \quad (3-8)$$

式(3-7a)を代入すると、

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2n-1} \left(\sum_{i=1}^N P_i^k - \sum_{i=1}^M Z_i^{-k} \right) = 0 \quad m=1, \dots, k_a \quad (3-9)$$

ここで、極と零点に次のように双一次の変数変換を行なう。

$$x_i = \frac{P_i + 1}{P_i - 1} \quad (3-10a)$$

$$y_i = \frac{Z_i + 1}{Z_i - 1} \quad (3-10b)$$

この変換によって Z 平面が s^{-1} 平面に写像される。従って、極と零点の位置は、 $\operatorname{Re}[x_i] < 0$, $\operatorname{Re}[y_i] > 0$ が成り立っている。式(3-10)を用いると式(3-9)は次のように書き換えられる。

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2n-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i+1}{x_i-1} \right)^k - \sum_{i=1}^M \left(\frac{y_i+1}{y_i-1} \right)^{-k} \right\} = 0 \quad n=1, \dots, k_a \quad (3-11)$$

いま、 $Q_m(x)$ を

$$Q_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^m \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^k \quad (3-12)$$

で定義すれば、 $Q_m(x)$ は次のよう漸化式で表わされる。

$$Q_m(x) = \frac{1-x^2}{2} \frac{d}{dx} Q_{m-1}(x) \quad (3-13)$$

$$Q_0(x) = -\frac{x+1}{2} \quad (3-14)$$

これが $Q_m(x)$ は x の多項式であることがわかり、次式のようになる。

$$Q_m(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} q_{mj} x^{m-2j+1} \quad (3-15)$$

係数 $\beta_{m,j}$ は式(3-13)より次のようにならうに得られる。

$$\begin{aligned}
 Q_m(x) &= \frac{1-x^2}{2} \frac{d}{dx} Q_{m-1}(x) \\
 &= \frac{1-x^2}{2} \frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \beta_{m-1,j} x^{m-2j} \\
 &= \frac{1-x^2}{2} \sum_{j=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} (m-2j) \beta_{m-1,j} x^{m-2j-1} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=0}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} (m-2j+2) \beta_{m-1,j-1} x^{m-2j+1} - \sum_{j=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} (m-2j) \beta_{m-1,j} x^{m-2j-1} \right\}
 \end{aligned} \tag{3-16}$$

$x = 1$ 时 $\beta_{m-1,-1} = \beta_{m-1,\left[\frac{m+1}{2}\right]} = 0$ とすれば。

$$\beta_{m,j} = \frac{1}{2} \left\{ (m-2j+2) \beta_{m-1,j-1} - (m-2j) \beta_{m-1,j} \right\} \tag{3-17}$$

が得られる。式(3-13)(3-14)より $\beta_{10} = -\beta_{11} = \frac{1}{4}$ である。又、 $[x]$ は x を越えてい最大整数を表す。

したがって $Q_m(x)$ を用いると、式(3-11)は

$$\sum_{i=1}^N Q_{2n-1}(x_i) - \sum_{i=1}^M Q_{2n-1}(-y_i) = 0 \quad n=1, \dots, k_a \tag{3-18}$$

と書く、更に次のようにならうに整理でき。

$$\sum_{j=0}^n \beta_{2n-1,j} \left\{ \sum_{i=1}^N x_i^{2(n-j)} - \sum_{i=1}^M (-y_i)^{2(n-j)} \right\} = 0 \quad n=1, \dots, k_a \tag{3-19}$$

これより次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^N x_i^{2n} - \sum_{i=1}^M y_i^{2n} = N - M \quad n=1, \dots, k_a \tag{3-20}$$

式(3-20)は数学的帰納法によって次のようにならうに示される。

$n=1$ の時は、式(3-13)(3-14)より直ちに次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^M y_i^2 = N - M \tag{3-21}$$

$m=1, \dots, k-1$ で $\sum_{i=1}^N x_i^{2m} - \sum_{i=1}^M y_i^{2m} = N-M$ が成り立つ。3と可3。 $\geq a$ 時
 $m=k$ のは、式(3-19)の。

$$g_{2k-1,0} \left(\sum_{i=1}^N x_i^{2k} - \sum_{i=1}^M y_i^{2k} \right) + \sum_{j=1}^k g_{2k-1,j} (N-M) = 0 \quad (3-22)$$

と書け3。式(3-13)より $\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} g_{mj} = Q_m(1) = 0$ であるが3。

$$\sum_{j=1}^k g_{2k-1,j} = -g_{2k-1,0} \quad (3-23)$$

となるのであり、

$$\sum_{i=1}^N x_i^{2k} - \sum_{i=1}^M y_i^{2k} = N-M \quad (3-24)$$

が得られ。 $m=k$ でも成り立つ。

式(3-20) が振幅平坦のための条件である。

次に遮断角周波数の条件を求める。デジタルフィルタでは、標準化されてい3ため、アナログフィルタのように遮断角周波数で規格化することはできない。

直線利得を A [Neper] とすれば、式(3-7a)より、

$$\sum_{i=1}^N \ln(-z_i) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^N p_i^k - \sum_{i=1}^M z_i^{-k} \right) = A \quad (3-25a)$$

が成り立ち、遮断角周波数 β_c では、

$$\sum_{i=1}^N \ln(-z_i) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^N p_i^k - \sum_{i=1}^M z_i^{-k} \right) \cos k\beta_c T = A - \frac{1}{2} \ln 2 \quad (3-25b)$$

となる。この2式をまとめて、無限級数の公式

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k = \ln \frac{1}{1-x} \quad (3-26a)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k \cos k\theta = \frac{1}{2} \ln (1 - 2x \cos \theta + x^2) \quad (3-26b)$$

を用いて整理し、更に式(3-10)の変数変換をすれば、

$$\sum_{i=1}^N \ln \frac{1+x_i^2 + (1-x_i^2) \cos \beta cT}{2} = \sum_{i=1}^M \frac{1+y_i^2 + (1-y_i^2) \cos \beta cT}{2} + \ln 2 \quad (3-27)$$

とより、結局

$$\frac{\prod_{i=1}^N \{1+x_i^2 + (1-x_i^2) \cos \beta cT\}}{\prod_{i=1}^M \{1+y_i^2 + (1-y_i^2) \cos \beta cT\}} = 2^{N+M-1} \quad (3-28)$$

という関係式が得られる。

§ 3.3.2 遅延平坦特性

位相特性が式(3-7b)で与えられているが、遅延特性 $\tau(\beta T)$ は、

$$\tau(\beta T) = \frac{d}{d(\beta T)} \theta(\beta T) = M + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^N p_i^k + \sum_{i=1}^M z_i^{-k} \right) \cos k\beta T \quad (3-29)$$

で与えられる。直流で遅延特性が平坦であるための条件は、

$$\frac{d^{2n}}{d(\beta T)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^N p_i^k + \sum_{i=1}^M z_i^{-k} \right) \cos k\beta T \Big|_{\beta T=0} = 0 \quad m=1, \dots, k_d \quad (3-30)$$

である。振幅特性の場合と同様にして次式のように整理できる。

$$\sum_{i=1}^N Q_{2n}(x_i) + \sum_{i=1}^M Q_{2n}(-y_i) = 0 \quad m=1, \dots, k_d \quad (3-31)$$

いま、直流での遅延量を τ_0 とすれば、式(3-29)より、

$$\tau_0 = M + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^N p_i^k + \sum_{i=1}^M z_i^{-k} \right) \quad (3-32)$$

である。変数変換をして整理すると次式となる。

$$\sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^M y_i = 2\tau_0 + N - M \quad (3-33)$$

式(3-33)を用いて、式(3-31)に振幅特性の場合と同様の操作をすると、

$$\sum_{i=1}^N x_i^{2n+1} - \sum_{i=1}^M y_i^{2n+1} = 2\tau_0 + N - M \quad m=1, \dots, k_d \quad (3-34)$$

という関係式が得られる。

§3.4 近似例

前節で、振幅と遅延が平坦なディジタルフィルタの極と零点に関する条件式が得られた。それをまとめると、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N x_i^{2n+1} - \sum_{i=1}^M y_i^{2n+1} &= 2T_0 + N - M \quad n=0,1,\dots,k_d \\ \sum_{i=1}^N x_i^{2n} - \sum_{i=1}^M y_i^{2n} &= N - M \quad n=1,\dots,k_a \\ \frac{\prod_{i=1}^N \{1+x_i^2 + (1-x_i^2) \cos \beta_c T\}}{\prod_{i=1}^M \{1+y_i^2 + (1-y_i^2) \cos \beta_c T\}} &= 2^{N-M+1} \end{aligned} \right\} \quad (3-35)$$

但し、
 $x_i = \frac{p_i + 1}{p_i - 1}, \quad y_i = \frac{z_i + 1}{z_i - 1}$

振幅特性。平坦次数 k_a は $N-1$ 以下、 k_a+k_d は $N+M-1$ 以下である。 $k_a+k_d = N+M-1$ のとき、フィルタの特性は最大平坦であるといふ。この時、遅延角周波数を又は直流遅延 T_0 を仕様として与えれば、未知数の数と、独立な方程式の数が共に $N+M-1$ で方程式は解ける。しかしながら、これを解析的に解くことは困難であり、計算器を用い修正Newton法で解いている。

$N-M=1$ のとき、平坦次数が $k_a=k_d=1, 3, 5$ の場合について、 $\beta_c T = \pi/5$ として式(3-35)を解いて得られたフィルタの振幅特性と遅延特性を図3-1に示す。

平坦次数 k_a と k_d が $k_a = [N+M/2], k_d = [N+M-1/2]$ を満足する場合には佐藤・ヤコビフィルタ⁽⁸⁾と一致し、図3-1もこの場合に当たる。

振幅・遅延同時平坦フィルタの特殊の場合として、 $M=0$ の全極形で振幅最大平坦 $k_a=N-1$ の時、sin形として知られる特性

$$|H_s(e^{j\omega T})|^2 = \frac{1}{1 + \{ \sin(\beta_c T/2) / \sin(\beta_c T/2) \)^2}$$

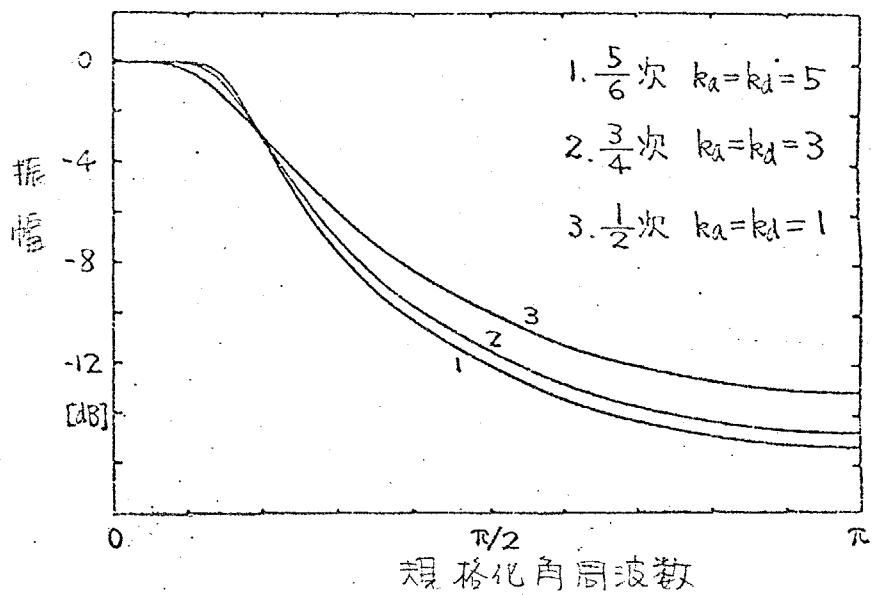


図3-1(a) 振幅遅延同時平坦 FIR の振幅特性

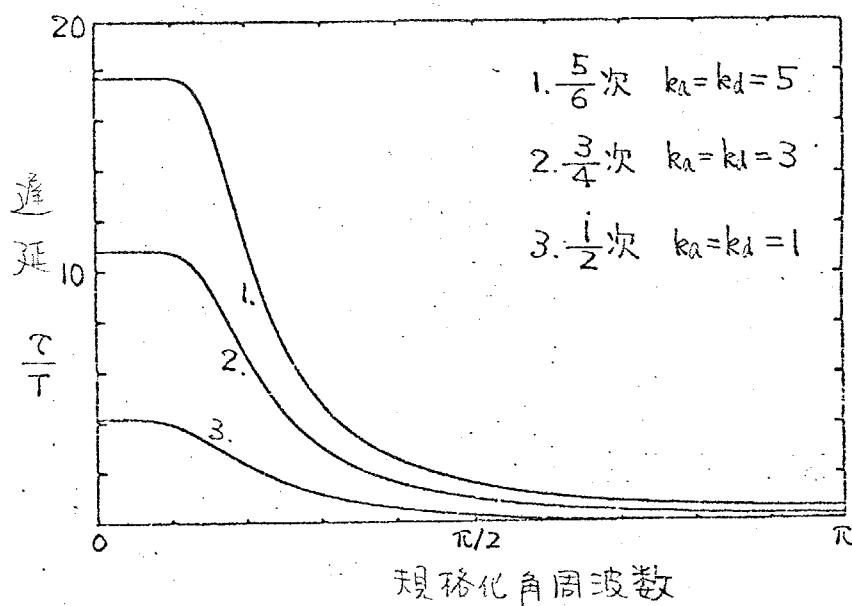


図3-1(b) (a) 遅延特性

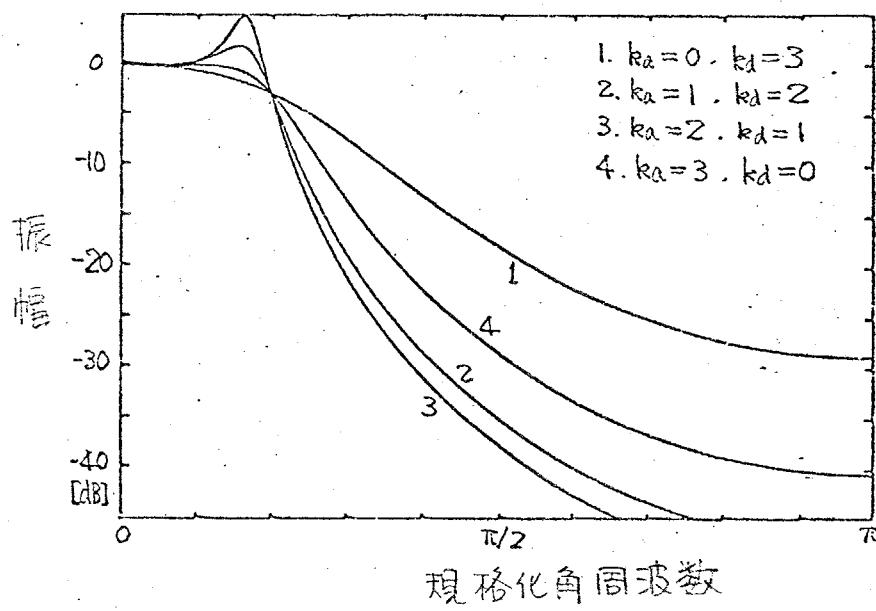


図3-2(a) 4次全極形 FIR の振幅特性

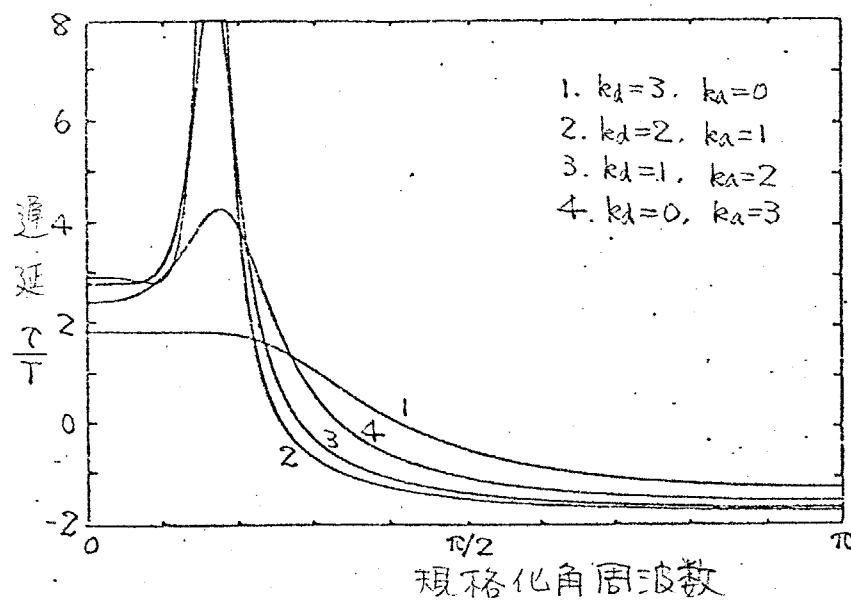


図3-2(b) (a)の遅延特性

と一致し、又、同様に $M=0$ で遅延最大平坦 $k_d=N-1$ の時 Thiran⁽⁴⁾ の与えたものと同じ特性となる。これらと、3の中間の特性を図3-21に示す。図3-2 のように、分子子の次数差が大きくなると通過域端で特性にピークが出るようである。

§3.5 不可逆

振幅特性と遅延特性が同時に平坦なデジタルフィルタの極と零点の位置を決定する条件式を、双一次変換した平面上で求めた。この方程式はきれいな形をしていても解析的に解くことは困難で、計算機を必要とする。得られるフィルタの特性は理想低域フィルタに近い優れたもので、波形伝送用フィルタとして適している。振幅と遅延の平坦次数が同程度の時には、ヤコビフィルタと完全に一致する。

第4章 L C フィルタに基づく低感度ディジタルフィルタの構成

§4.1 まえがき

ディジタルフィルタを実現する際には、語長が有限であることによる影響が無視できない。係数語長の制限は、フィルタの特性を劣化させ、不安定にすることさえある。これは、係数感度の問題として取り扱われ、低感度の構成法を導く研究が為されている。乗算等の演算後のまろめによる語長の制限は、白色雑音の重ね合わせと考えられ、出力でのSN比の悪化を招く。この雑音は、一般に低感度フィルタでは小さいことが知られており⁽⁹⁾、本章と次章では、低感度構成法について考察する。

ディジタルフィルタで高次の伝達関数を実現する場合、能動フィルタ等と同様に、2次または1次の区間を継続に接続する方法が多く用いられてきた。継続接続による方法では、伝達関数の各根を分離した部分回路で実現するため、特性変化の推定や安定性の判別等が容易であるが、感度の点ではそれほど優れているとはいえない。感度特性は回路構造によって大きく異なり、低感度の構成方法を導くことが、ディジタルフィルタの実用化に際しての大きな課題の1つである。

抵抗終端LCはしご形フィルタの大きな特徴として、伝達特性の、LCの値に対する感度が通過域内で非常に小さいことがあげられる⁽¹⁰⁾。ディジタルフィルタにおいても、この抵抗終端LCはしご形フィルタの動作をシミュレートすれば、低感度性をある程度受け継ぐことができる。従来、このような構成法として、wave digital filter⁽¹¹⁾やリープフロッギ構成法⁽¹²⁾がある。

本章では、LCフィルタの各節点電圧の関係を表わす新しい形の信号流れ線図(STG)を考え、これに基づく、低感度ディジタルフィルタの構成法を提案する。

§4.2 LCはしご形回路のSFG表現

抵抗終端LCはしご形フィルタは、通過域内の整合点において、振幅特性の1次素子感度が零になるという特徴を有し、電話回線の通話路フィルタのように急峻な特性を実現する場合極めて有効である。デジタルフィルタでこれをシミュレートする場合、LCフィルタの各素子のSパラメータをシミュレートするwave digital filterや、各素子の電流、電圧をシミュレートするリープフロッゲがある。リープフロッゲと対比させながら、ここで提案する方法を説明する。

図4-1(a)に示すLPFを考える。この回路で、各素子の電圧、電流の間には、次のようないくつかの関係が成立する。

$$V_1 = V_o - R_1 I_1$$

$$I_1 = \frac{1}{sL_1} (V_1 - V_2)$$

$$V_2 = \frac{1}{sC_2} (I_1 - I_3)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$I_4 = \frac{1}{sL_7} (V_4 - V_5)$$

$$V_5 = R_2 I_4$$

これらのおかげで、これらの関係式をSFGで表わすと図4-1(b)のようにリープフロッゲ形になり、各トランスマッタは、入出力端を除いて積分器となる。

これに対し、SFGの節点の変数として、LCはしご形回路の節点電圧のみをとると、図4-1(a)で、

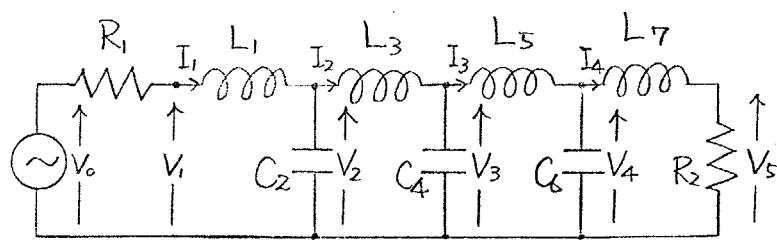
$$V_1 = \frac{sL_1 V_o + R_1 V_2}{R_1 + sL_1} = T_1 V_o + T_1' V_2$$

$$V_2 = \frac{\frac{1}{sL_1} V_1 + \frac{1}{sL_3} V_3}{\frac{1}{sL_1} + sC_2 + \frac{1}{sL_3}} = T_2 V_1 + T_2' V_3$$

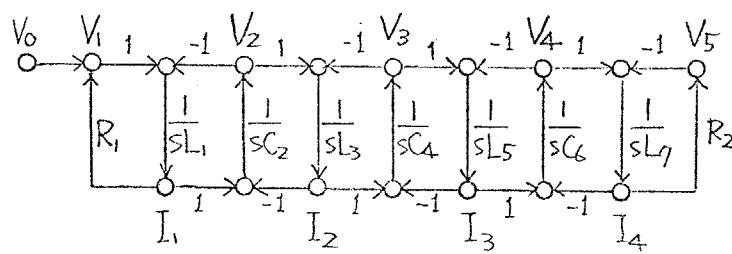
$$\vdots \quad \vdots$$

(4-1)

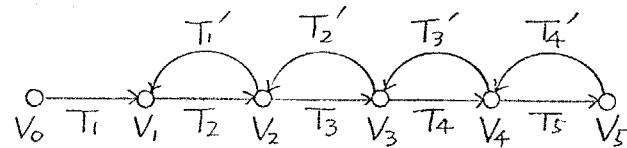
(4-2)



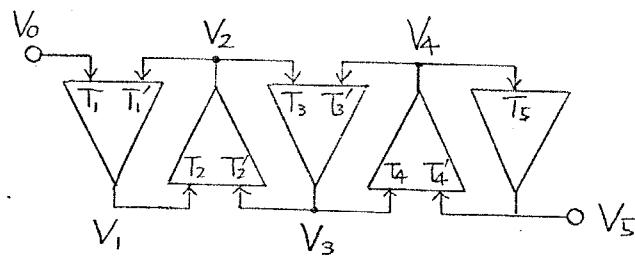
(a)



(b)



(c)



(d)

図4-1 (a) 抵抗終端LCはしご形LPF.
 (b) 電圧、電流領域でのSFG.
 (c) 電圧領域でのSFG.
 (d) (c)のSFGの実現

$$V_4 = \frac{\frac{1}{sL_5} V_3 + \frac{1}{sL_7} V_5}{\frac{1}{sL_5} + sC_6 + \frac{1}{sL_7}} = T_4 V_3 + T_4' V_5$$

$$V_5 = \frac{\frac{1}{sL_7} V_4}{\frac{1}{sL_7} + \frac{1}{R_2}} = T_5 V_4$$

という関係式が成り立ち、図4-1(c)のSFGを書くことができる。 ω の場合トランミッタスは2次以下であり、入出力端を除いて、無損失の共振器となる。同一節点に向かうトランミッタス T_k と T_k' は等しい分母多項式をもつため、1つの単位回路で入力側を分けるだけで実現できる。その構成は図4-1(d)のようになる。

§4.3 ディジタル回路によるSFGの実現

複素周波数変数 s を含むトランミッタスによって SFG で表わされた回路は、各トランミッタスに $S-Z$ 変換を施すことによって、ディジタル回路で実現することができる。この場合の $S-Z$ 変換に必要な性質は次の3点である。

- (1) S 平面の虚軸が Z 平面の单位円に写像されること。
- (2) 変換によって安定性が損われないこと。
- (3) ディジタル回路が物理的に実現可能であること。即ち、すべてのループは遅延素子を含むこと。

この3条件を同時に満足する変換はないことが知られており、(1)の条件を緩和した変換を使用する。低域通過フィルタと帯域通過フィルタでは異なる変換を用いるため、それぞれについて分けて考える。

§4.3.1 低域通過フィルタ(LPF)

式(4-2)より LPF の SFG のトランミッタスは、入出力端を除いて、 $b\alpha^2/(s^2+\alpha^2)$ の形で書けることが分かる。Bruton が用いた $S-Z$ 変換⁽¹²⁾

$$s \rightarrow \frac{1}{T} \frac{1-z^{-1}}{z^{1/2}} = \frac{2}{T} \sinh \frac{PT}{2} \quad (z=e^{PT}) \quad (4-3)$$

をこれに適用すると次のように変換される。

$$\frac{a^2}{s^2+a^2} \rightarrow \frac{a^2 T^2 z^{-1}}{(1-z^{-1})^2 + a^2 T^2 z^{-1}} \quad (4-4)$$

式(4-3)の変換は、(1)の条件を緩和し、S平面の虚軸すべてではなく、 $-2 < \omega T < 2$ の範囲を Z 平面の単位円に写像する。又、無損失の関数を対象にするととき、その極は虚軸上にあるから、それが上記周波数範囲内であれば、Z 平面の単位円上に写像されるため、(2)の安定性が損われることはない。更に、式(4-4)は、分子が Z^{-1} の項のみで直接伝送項をもたないため、これらを図4-1(C)のように接続して構成することができる。(3)の条件も満たされている。しかし減衰極をもつフィルタではトランスミッタが $C(S^2+b^2)/(S^2+a^2)$ の形になるため、式(4-3)の変換によっても遅延を含むループが生じ、実現不可能である。

式(4-4)の伝達関数をもつ回路は図4-2(a)のように構成することができる。式(4-4)左辺の 1 つのパラメータ a に 1 つの乘算器が対応している。これがデジタル LPF の無損失部の単位回路となる。

入出力端の Q が有限の部分では式(4-3)の変換を適用すると半遅延 τ_0 が必要となる。これは標準化間隔を $1/2$ にすることに相当する上、フィルタが不安定になるため好ましくない。そこで、入出力端には双1次変換

$$s \rightarrow \frac{Z}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T} \tanh \frac{PT}{2} \quad (4-5)$$

を用いることとする。この変換は分母子同時で、遅延を含まない伝送項を生じさせるが、図4-1(C)において T_2 及び T'_4 が式(4-4)のように遅延を含むため、ループとしては遅延を含み、実現可能である。又、 $|PT| \ll 1$ のとき、 $\sinh \frac{PT}{2} \approx \tanh \frac{PT}{2}$ であるから、式(4-3)と式(4-5)の変換を混用しても通過域での特性の乱れは小さい。特に、係数感度が大きな問題となる狭帯域フィルタでは、

\approx の誤差は無視できる。式(4-5)によつて T_k 及 UT_5 は、

$$\frac{a}{s+a} \rightarrow \frac{\frac{aT}{2+aT}(1+z^{-1})}{1 - \frac{2-aT}{2+aT}z^{-1}} = \frac{\frac{aT}{2+aT}(1+z^{-1})}{1 - (1-2\frac{aT}{2+aT})} \quad (4-6)$$

となり、その実現回路は、第5章で述べる方法により、図4-2(b)のようにならう。

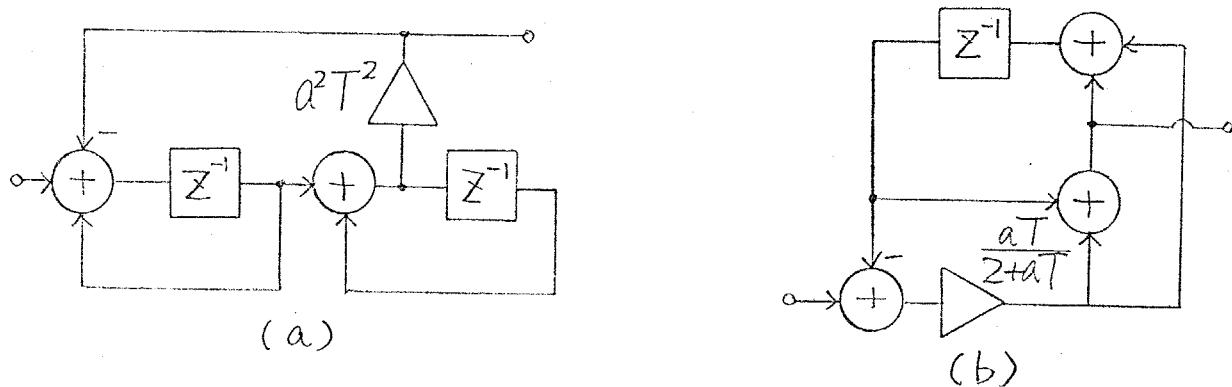


図4-2 単位回路 (a) 無損失部 (b) 入出力部

これらの単位回路を組み合わせて SFG を実現するわけであるが、

$$V_1 = \frac{s}{s+a} V_0 + \frac{a}{s+a} V_2 = V_0 + \frac{a}{s+a} (V_2 - V_0) \quad (4-7a)$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{a^2}{s^2+a^2} \left(\frac{L_3}{L_1+L_3} V_1 + \frac{L_1}{L_1+L_3} V_3 \right) \\ &= \frac{a^2}{s^2+a^2} \left\{ V_3 + \frac{L_3}{L_1+L_3} (V_1 - V_3) \right\} \end{aligned} \quad (4-7b)$$

などの関係を用いて T_k と T'_k を同時に構成し、乗算器の数が必要以上に増加するのを防いでいる。その結果、図4-3のよくな回路が得られる。N次のLPFでは、遅延素子と乗算器が $N+1$ 個ずつ必要である。

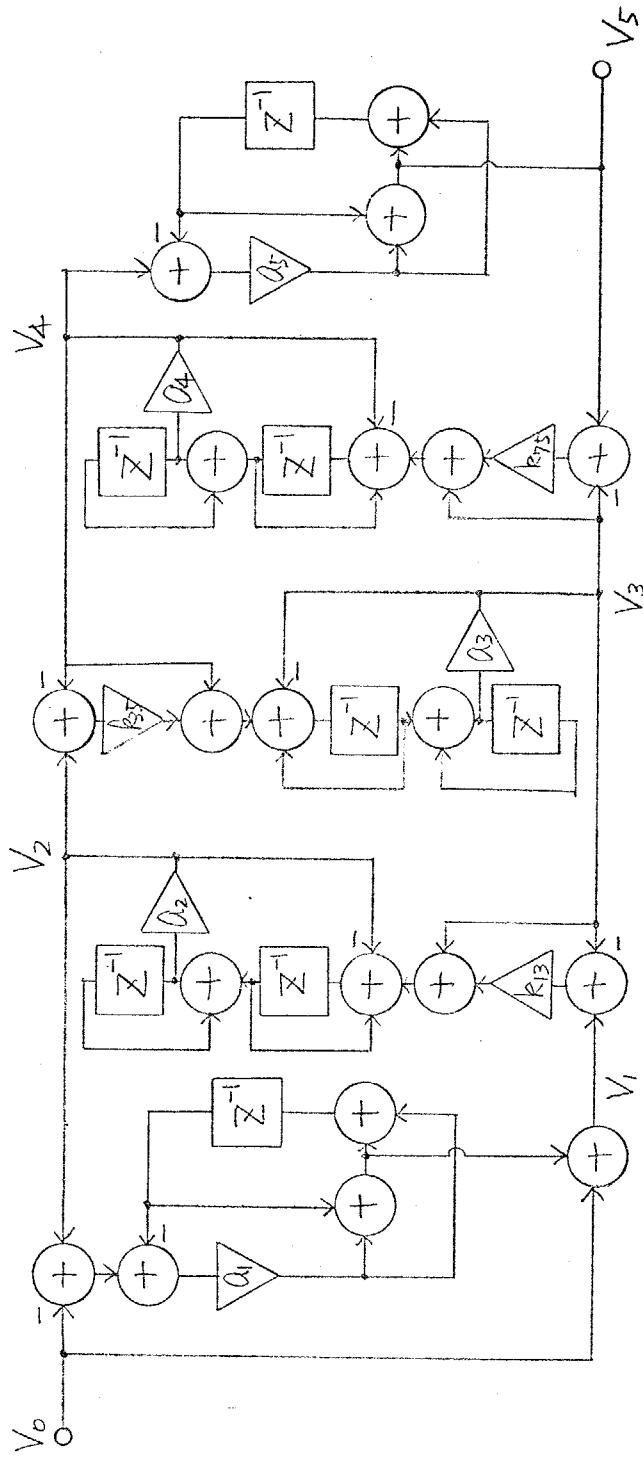


图 4-3 7 次 LPF 电路图

$$\text{但 } L, \quad a_1 = \frac{\text{TR}_1/L_1}{2 + \text{TR}_1/L_1}, \quad a_2 = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_3}\right)^2 \frac{T^2}{C_2^2}, \quad a_3 = \left(\frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_5}\right)^2 \frac{T^2}{C_4^2}, \quad a_4 = \left(\frac{1}{L_5} + \frac{1}{L_7}\right)^2 \frac{T^2}{C_6^2}$$

$$a_5 = \frac{\text{TR}_2/L_7}{2 + \text{TR}_2/L_7}, \quad k_{13} = \frac{L_3}{L_1 + L_3}, \quad k_{35} = \frac{L_5}{L_3 + L_5}, \quad k_{75} = \frac{L_5}{L_5 + L_7}$$

§4.3.2. 帯域通過フィルタ(BPF)

LPFの構成では直流付近の近似を用いたため、その方法をBPFの場合に直接適用することはできない。デジタルBPFの構成法としては2通り考えられる。

(1) アナログLPFから導く方法

アナログLPFをデジタルBPFに変換するものとして、次のS-Z変換が知られている。⁽¹³⁾

$$s \rightarrow \frac{1}{T} \frac{1 - 2 \cos \beta_0 T z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}} \quad (4-8)$$

式(4-8)を用いると遅延を含まないループを生じ実現不可能となるが、LPFにおける式(4-3), (4-5)の関係に留意して次式の変換を考えることができる。

$$s \rightarrow \frac{1}{T} \frac{1 - 2 \cos \beta_0 T z^{-1} + z^{-2}}{2 \cos \frac{\beta_0 T}{2} (z^{-\frac{1}{2}} - z^{-\frac{3}{2}})} \quad (4-9)$$

式(4-9)を使用すれば、すべてのループが遅延を含むようになる。Z変換による周波数の対応を表4-1に示す。

表4-1 周波数の対応

digital BPF	0	β_L	β_0	β_H	π/T
analog LPF	$-\infty$	$-w_c$	0	w_c	w_c

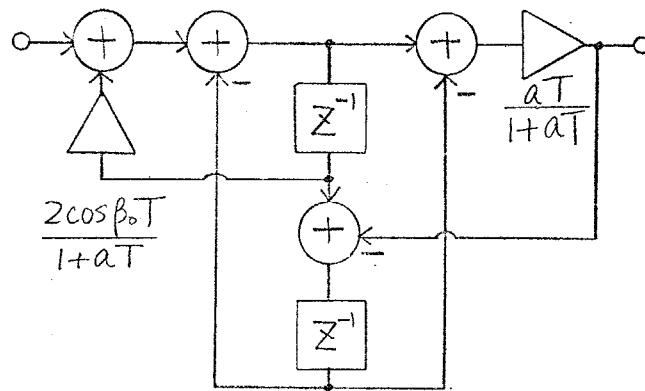
$$\text{但し, } \cos \beta_0 T = 1 - 2 \sin \frac{\beta_L T}{2} \sin \frac{\beta_H T}{2}$$

$$w_c = \frac{1}{T} \cos \frac{\beta_0 T}{2}$$

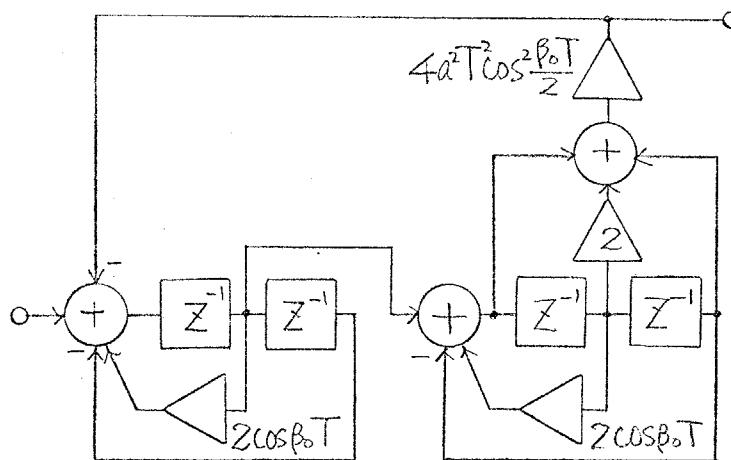
式(4-8)(4-9)によると、入出力部および無損失部分の伝達関数が次式のようにになり、その構成は図4-4で表わされる。

$$\frac{a}{s+a} \rightarrow \frac{\frac{aT}{1+aT} (1-z^{-2})}{1 - \frac{2 \cos \beta_0 T}{1+aT} z^{-1} + (1 - 2 \frac{aT}{1+aT}) z^{-2}} \quad (4-10a)$$

$$\frac{a^2}{s^2+a^2} \rightarrow \frac{4a^2 T^2 \cos^2 \frac{\beta_0 T}{2} (z^{-1} - 2z^{-2} + z^{-3})}{(1 - 2 \cos \beta_0 T z^{-1} + z^{-2})^2 + 4a^2 T^2 \cos^2 \frac{\beta_0 T}{2} (z^{-1} - 2z^{-2} + z^{-3})} \quad (4-10b)$$



(a)



(b)

図4-4 BPFの単位回路

(a) 入出力部 (b) 無損失部

これらの単位回路を LPF の場合と同様に構成すればよい。

(2) ディジタル LPF から導く方法

LC フィルタでは BPF を構成する場合、LPF-BPF 周波数変換がよく用いられる。ディジタルフィルタ用にも LPF-BPF 周波数変換がある⁽⁴⁾。アナログ周波数変換が S を S の関数で置き換えるのと同様に、ディジタル周波数変換の一般形は

$$z^{-1} \rightarrow g(z^{-1}) \quad (4-11)$$

で表される。得られる伝達関数が z^{-1} の有理関数でなければならぬ。

$g(z^{-1})$ も又、 z^{-1} の有理関数である。又、この変換によって Z 平面の単位円が単位円自身に 1 回あるいはそれ以上写像されねばならないのに、 $g(z^{-1})$ は全域通過フィルタである。LPF-BPF 周波数変換では $g(z^{-1})$ は 2 次全域通過フィルタの形をしており、これを用いて容易に BPF の伝達関数が得られるが、もとの LPF 回路中の遅延素子 τ を $g(z^{-1})$ で置き換えた形の回路構造で構成しようとすると、一概に遅延を含む方のループが生じてしまい実現不可能となる。

このような問題を、変換として、

$$g(z^{-1}) = -\frac{z^{-1}(z^{-1}-b)}{1-bz^{-1}} \quad (4-12)$$

がある。但し、 $b = \cos \beta_0 T$ 、 β_0 は中心角周波数である。式(4-12)の変換を、式(4-4)(4-6)の伝達関数に適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{a}{s+a} &\xrightarrow{\text{ }} \frac{\frac{aT}{2+aT}(1+z^{-1})}{1-(1-\frac{aT}{2+aT})z^{-1}} \\ &\xrightarrow{\text{ }} \frac{\frac{aT}{2+aT}(1-z^{-2})}{1-2b(1-\frac{aT}{2+aT})z^{-1}+(1-2\frac{aT}{2+aT})z^{-2}} \quad (4-13a) \end{aligned}$$

$$\frac{a^2}{s^2+a^2} \xrightarrow{\text{ }} \frac{a^2 T^2 z^{-1}}{(1-z^{-1})^2 + a^2 T^2 z^{-1}}$$

$$\rightarrow \frac{-a^2 T^2 z^{-1} (z^{-1} - b)(1 - bz^{-1})}{(1 - 2bz^{-1} + z^{-2})^2 - a^2 T^2 z^{-1} (z^{-1} - b)(1 - bz^{-1})} \quad (4-13b)$$

が得られる。これら回路は図4-5のように構成できる。これらをLPFの場合と同様に構成してBPFが構成される。

どちらの方法でも、N次のBPFは、遅延素子と乗算器をN+2個ずつ含んでいる。

34.4. 係数感度の比較

デジタルフィルタでは、素子変動などではなく、通過域特性の素子感度が低いという特徴は、乗算器の係数精度を下げられることに利用される。いま、デジタルフィルタの乗算器係数は2進浮動小数点数で表され、その仮数部のみを指定した譜長とするものとする。固定小数点演算を用いるフィルタにあっても、フィルタ係数が定数であれば、これをスケーリングしておき、演算には適当なシフトを組み合わせれば、有限な譜長が有効に利用でき、精度の低下が防止できる。それ故、この場合にもフィルタ係数は浮動小数点数であると考えてよい。信号の譜長は十分長いものとし、フィルタの特性の劣化を次式で定義される Chrochieré の相対誤差⁽¹⁵⁾で評価する。

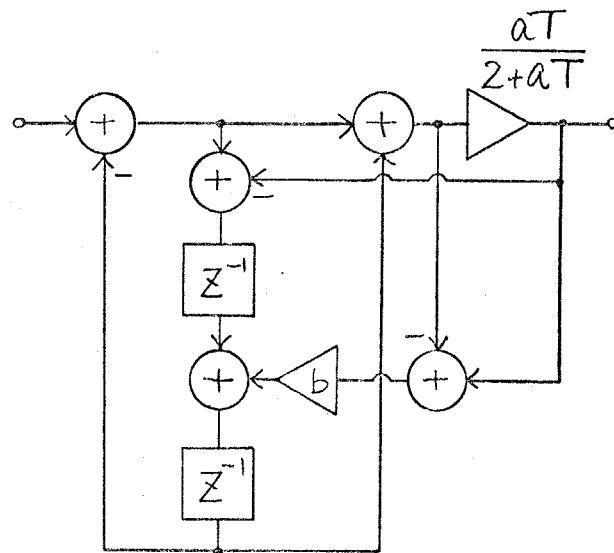
$$\text{相対誤差} = \begin{cases} \frac{|H_{\max} - H_{\min}| - A_M}{A_M} & H_{\max} - H_{\min} > A_M \\ 0 & H_{\max} - H_{\min} \leq A_M \end{cases}$$

但し、 H_{\max} ：通過域内の最大振幅(dB)

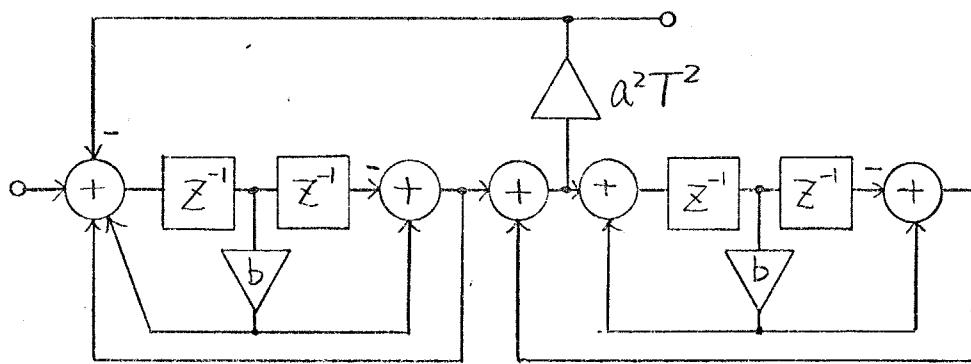
H_{\min} ：通過域内の最小振幅(dB)

A_M ：与えられた通過域リップル(dB)

例として通過域リップル0.1dBの7次チエビシェフLPFを用い、すべての係数を同じように数にまとめて時の通過域特性と相対誤差を図4-6, 4-7にそれぞれ示す。又、通過域リップル0.1dBの10次チエビシェフBPFの通過域特性を図4-8に示す。LCフィルタの完全なシミュレーションと考えられる wave



(a)



(b)

図 4-5 BPF の単位回路

(a) 入出力部

(b) 無損失部

ladderやリーフロッギングに比べて本方法の結果に遜色はなく、節点電圧シミュレーションの有効性が確かめられたといえる。

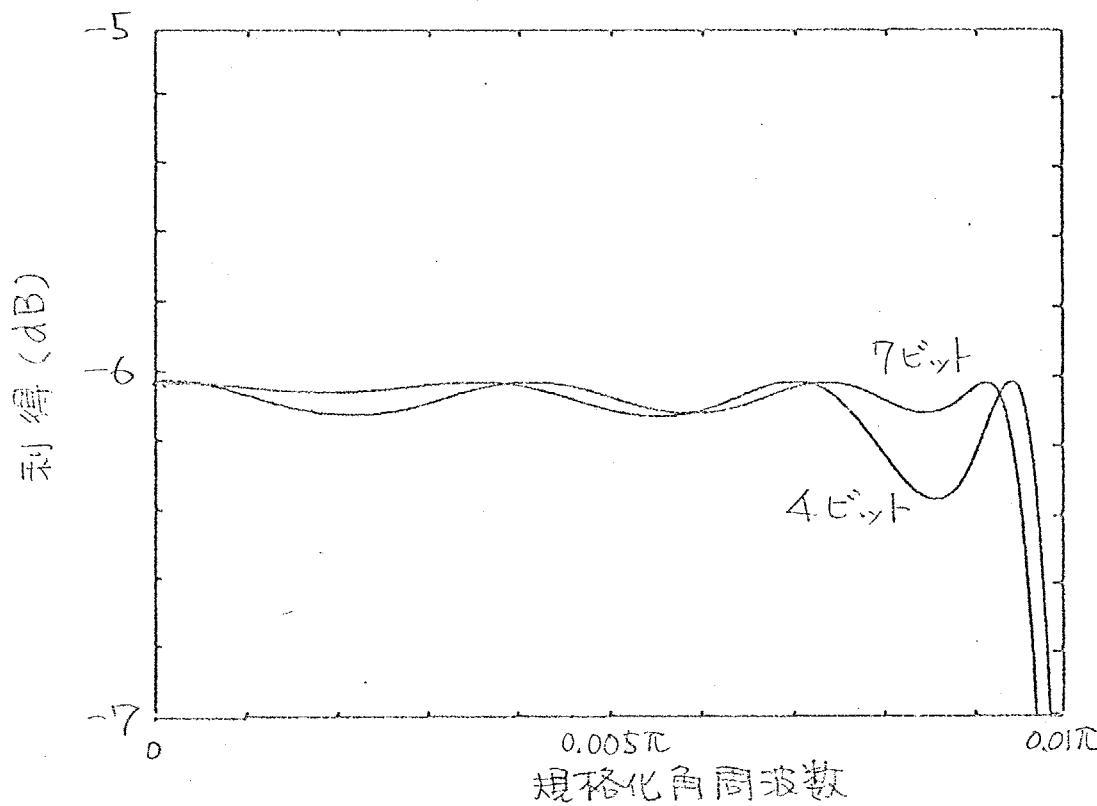


図4-6 7次チエビシェフLPFの通過域特性

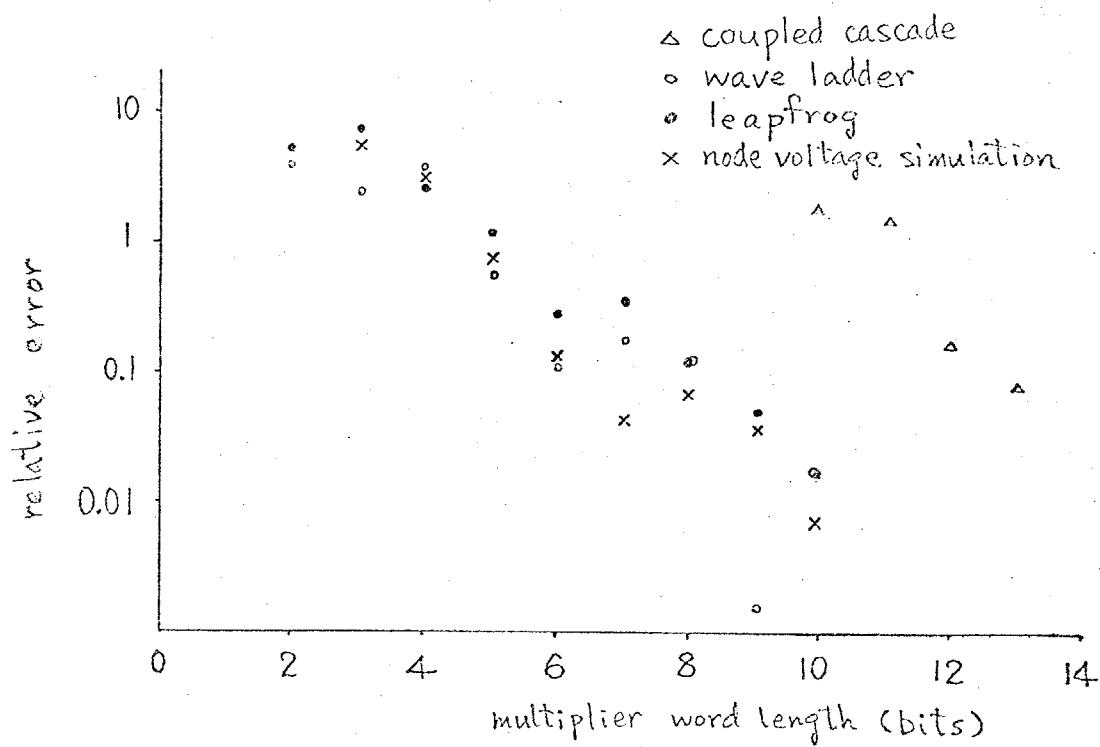


図4-7 各種構成法の誤差の比較

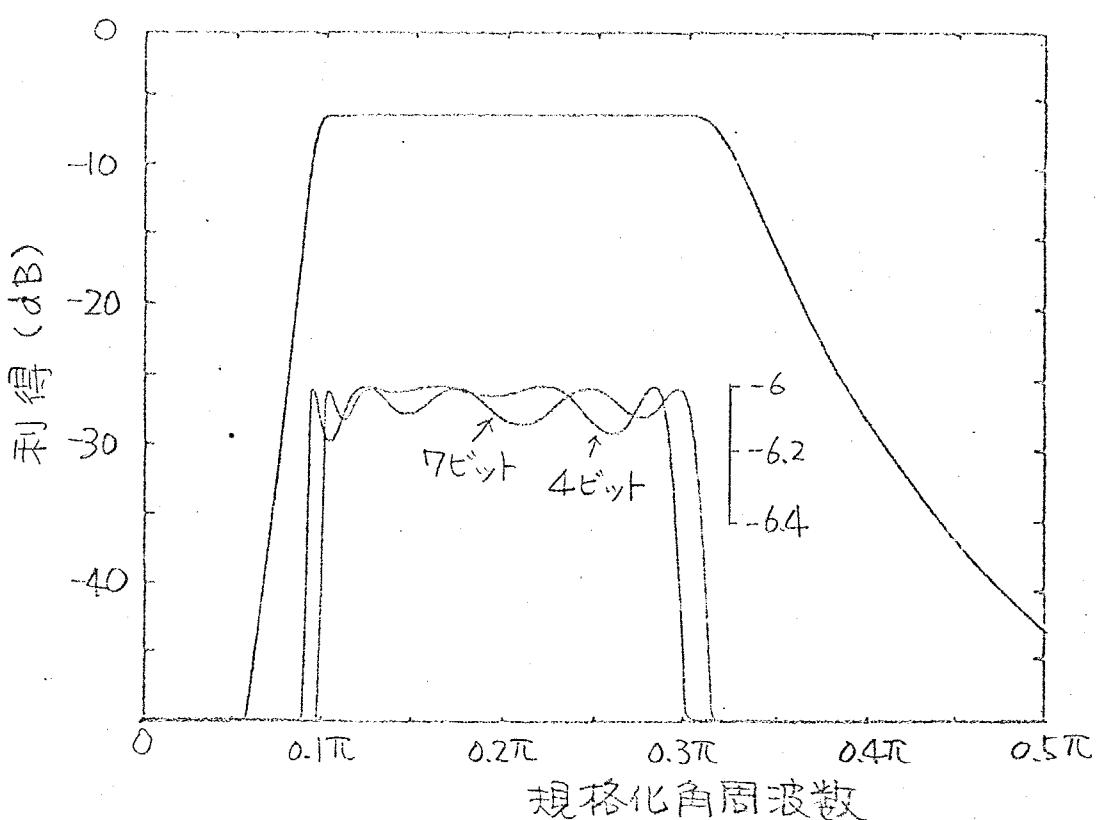


図4-8 10次チエビシェフBPFの通過域特性

§4.5 ますび

折角終論ではしき形フィルタの節点電圧間の関係をSFGで記述する方法を示した。各トランスマミタンスは双2次関数となり、これをデジタル回路で置き換えてLCフィルタをシミュレートする方法を提案し、得られたデジタルフィルタがLCフィルタの低感度性を受け継ぐことを示した。Brutonと同様のS-Z変換を用いて、遅延を含まないループが生じることを防いでいるが、有極形フィルタの構成は困難である。

第5章 最少乗算器構成による低感度ディジタルフィルタ

5.1 まえがき

ディジタルフィルタの設計における問題点の1つに、与えられた伝達関数を実現するのに適した回路構造を求めることがある。回路はできる限り単純で、しかも安定であることが望ましい。最も単純な構成法は直接形で、2次までのフィルタにはよく用いられている。直接形構成では、乗算器個数が伝達関数の係數に一致しており、構成することは容易であるが、狭帯域特性を実現する場合や、次数が高い場合には、語長制限による影響が大きく、不安定になることさえある。語長制限の影響を軽減するには、伝達関数を分解又は変形して乗算器の個数を小さくし、高次のフィルタには、1次、2次の継続形線によるという手法が多く用いられている。

低感度フィルタの構成法としては、第4章で述べたような抵抗終端リニアコンデンサ回路をシミュレートする方法が種々提案されているが、構成の複雑さのためにあまり利用されず、実際に用いられるのは継続形構成である。継続形構成では、伝達関数の各根を分離して部分回路で実現するため、特性変化の推定、安定性の判別等が容易であり、更にハードウェアを実現する場合に汎用性があり有利である。本章では継続形構成を念頭において、1次、2次のフィルタについてのみ考える。

2次ディジタルフィルタの低感度構成として coupled form⁽³⁾ が有名であるが、必要な乗算器の数が多くなるため、たとえ感度は低くても全体のハードウェアの量が減少するか否かは疑わしい。そこで、ここでは乗算器の数が必要最少限であるものを考える。乗算器数を減らすために、フィルタの利得に関するペラメータを 1 (0 dB) に規格化しても一般性を失なわないばかりか、信号レベルが上下せず、ダイナミックレンジの点で有利である。この規格化によって低域通過フィルタ (LPF) の直流利得や帯域通過フィルタ (BPF) の中心利得

等は係数の変動に関係なく 1 とすることができるから、これらの周波数では感度は完全に零であり、その直傍である通過域内では感度はそれ程高くならないことが予想される。ところが、このような伝達関数では、乗算器係数が分母子双方に関係するため、従来の構成法で最少乗算器数の回路を得るには、かなり煩雑な手数を要した。

また誤差の影響については、係数感度の低いフィルタではまた雑音は小さいことが知られているが⁽¹⁾、係数感度の等しいフィルタでも、また雑音の大きさは一般に異なり、多くの等価回路の中から最適な構造を選ぶのが現状である。従って、回路構造の決定に際しては、すべての等価回路が得られることが必要である。

本章では、低感度伝達関数を最少乗算器数で実現する方法として帰還路付加法を提案し、2次までの各種低感度フィルタを導く。

3.5.2 低感度伝達関数

伝達関数 $H(z)$ をもつディジタルフィルタの乗算器 x に対する振幅特性の感度 S_x^{IH} は、

$$S_x^{IH} = \frac{x}{|H|} \frac{\partial |H|}{\partial x} \quad (5-1)$$

で定義される。狭帯域ディジタルフィルタでは、伝達関数の根が $z=1$ あるいは単位円に近づくため、伝達関数の係数は整数に近い値をとることが知られている⁽¹⁶⁾。今、 x が整数 n に近いとすれば、同じ語長で実現する時、 x を $n-x'$ として、小さな数 x' を実現する方が精度が高くなる。ディジタルフィルタでは整数倍の乗算は正確に行なわれ、その感度は零である。新しい係数 x' に対する感度は

$$S_{x'}^{IH} = S_{x'}^x S_x^{IH} = -\frac{x'}{x} S_x^{IH} \quad (5-2)$$

となる。 x は整数 n に近く、 x' の絶対値は小さいから、

$$|S_{x'}^{(H)}| < |S_x^{(H)}| \quad (5-3)$$

となり、感度が低下している。係数の絶対値が大きい乗算器があれば、上記の方法で修正し、感度を下げることができるため、低感度ディジタルフィルタには、絶対値が0.5を越える乗算器はない。しかしながら、乗算器係数が小さいだけで良いというものではなく、パラメータの選び方に自由度があり、それによって感度特性が異なる。

Avenhausは、coupled formと同様の考え方により、係数感度を極の存在し得る格子点の密度としてとらえている。⁽¹⁷⁾格子点密度は、ある回路構造が実現に適しているか否かを知る上で間接的な評価基準であるが、低感度フィルタの格子点密度は高くなっている。以下でもそのような伝達関数を導く。

5.2.1 1次LPF

直流利得が1である1次LPFは、遮断角周波数を決めるパラメータ1個のみをもっており、これを a と置くと、伝達関数は次のように表わせる。

$$H_{IL}(z) = \frac{f_1(a)(1+z^{-1})}{1-f_2(a)z^{-1}} \quad (5-4)$$

LPFであるから、零点の位置は $z=-1$ に固定してよい。又、 $f_1(a)$ は a の1次式でなければ1個の乗算器による構成ができない。直流利得の条件より、 $2f_1(a)=1-f_2(a)$ が成立しており、 $z=1$ と極との距離 R は、

$$R = 1 - f_2(a) = 2f_1(a) \quad (5-5)$$

で表わされる。格子点密度を高くするには、 R が係数 a を因数としなければならない。従って $f_1(a)=a$, $f_2(a)=1-2a$ が得られる。即ち、

$$H_{IL}(z) = \frac{a(1+z^{-1})}{1-(1-2a)z^{-1}} \quad (5-5)$$

但し、 $a=1/(1+\cot\beta_0 T/Z)$, β_0 は遮断角周波数, T は標準化間隔である。狭帯域フィルタでは a は小さく、直流利得は a の値に関係なく1である。

5.2.2 2次LPF, BP

能動フィルタにおける biquad 回路のように LPF と BP は同一の回路で構成できる可能性がある α で同時に考える。LPF の直流利得は、伝達関数に $Z=1$ を代入して容易に計算できるが、BP の中心利得は複雑な式となり、これが 1 となる条件式を得ることは容易でない。そこで、アナログフィルタから S-Z 変換によって求めることとする。規格化したアナログ LPF と BP の伝達関数

$$\tilde{H}_{2L}(s) = \frac{1}{s^2 + s/Q + 1} \quad (5-7a)$$

$$\tilde{H}_{2B}(s) = \frac{s/Q}{s^2 + s/Q + 1} \quad (5-7b)$$

= 双 1 次 S-Z 変換

$$s \rightarrow k \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \quad k = \cot \frac{\beta_0 T}{Z} \quad (5-8)$$

を施すと、

$$H_{2L}(z) = \frac{\frac{Q}{Qk^2+k+Q} (1+Z^{-1})^2}{1 + \frac{2Q(1-k^2)}{Qk^2+k+Q} Z^{-1} + \frac{Qk^2-k+Q}{Qk^2+k+Q} Z^{-2}} \quad (5-9a)$$

$$H_{2B}(z) = \frac{\frac{k}{Qk^2+k+Q} (1-Z^{-2})}{1 + \frac{2Q(1-k^2)}{Qk^2+k+Q} Z^{-1} + \frac{Qk^2-k+Q}{Qk^2+k+Q} Z^{-2}} \quad (5-9b)$$

が得られる。これを 2 個のパラメータ a, b で表わし、 $Z=1$ の近傍で格子点密度が高くなるには、分子が 1 個の係数、又は 2 個の係数の和が積という形でなければならぬ。即ち、 Q/Qk^2+k+Q は極と $Z=1$ との距離であり、 k/Qk^2+k+Q は極と単位円との距離に関係しており、これらが 2 個の係数の差で表わされてはならぬ。引き算による打ち消しによってつくられた量は、もとの量の変動の影響を大きく受けるからである。そこで

$$a = \frac{Q}{Qk^2 + k + Q} \quad (5-10a)$$

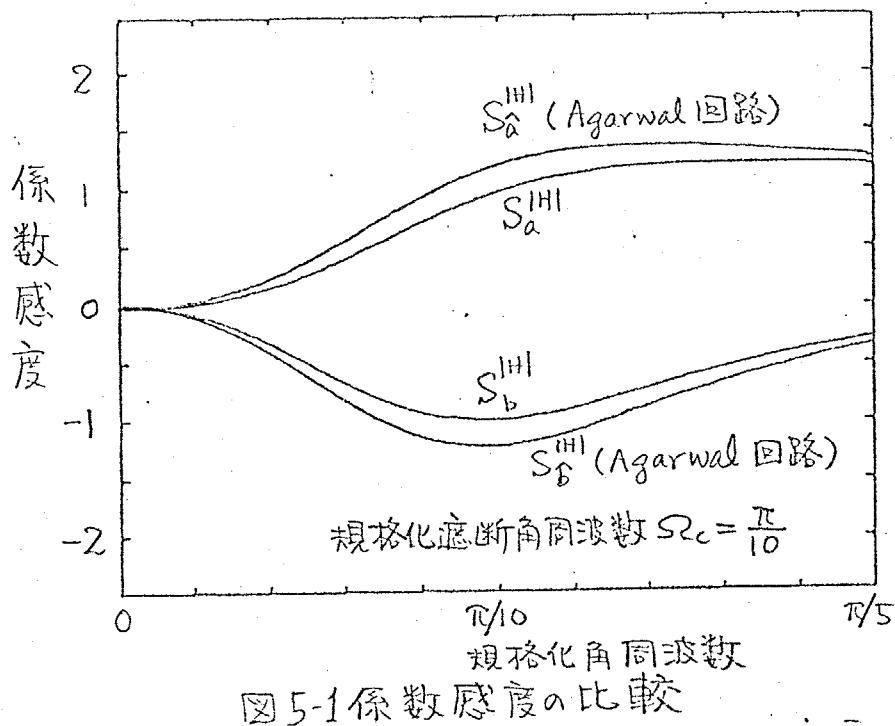
$$b = \frac{k}{Qk^2 + k + Q} \quad (5-10b)$$

と置けば、

$$H_{2L}(z) = \frac{a(1+z^{-1})^2}{1 - 2(1-b-2a)z^{-1} + (1-2b)z^{-2}} \quad (5-11a)$$

$$H_{2B}(z) = \frac{b(1-z^{-2})}{1 - 2(1-b-2a)z^{-1} + (1-2b)z^{-2}} \quad (5-11b)$$

を得る。式(5-11a)の形でバタワース特性を実現した時の係数感度 S_a^{III} , S_b^{III} を低感度で知られる Agarwal 等の Realization II⁽¹⁶⁾ と比較してみると図 5-1 のように、通過域ではここで導いたフィルタが優れていることがわかる。但し、規格化遮断角周波数 $\omega_c = \pi/10$ である。



BPFとしては、中心周波数と帯域幅が独立に可変できる次のような関数も有用である。

$$H_{2B}(z) = \frac{a(1-z^{-2})}{1-2b(1-a)z^{-1}+(1-2a)z^{-2}} \quad (5-12)$$

但し、

$$a = \frac{1}{1 + \cot \frac{(\beta_2 - \beta_1)T}{2}}$$

$$b = \cos \beta_0 T = \frac{\cos \frac{(\beta_1 + \beta_2)T}{2}}{\cos \frac{(\beta_1 - \beta_2)T}{2}}$$

β_1, β_2 は遮断角周波数、 β_0 は中心角周波数である。式(5-12)は式(5-6)の1次LPFに、式(4-12)の LPF-BPF 周波数変換を施せば得られる。西村⁽⁸⁾も同様の性質をもつ BPF を求めているが、帯域幅を決めるパラメータについては、もとの1次LPFの感度が保存されたため、式(5-12)に示す形の方が低感度である。中心周波数を決めるパラメータについては、西村のものと等しく、中心周波数が低い時には b の値が 1 に近づき感度が高くなる。この場合には、 b を $1 - b'$ で置き換える等の対策が考えられる。

5.2.3 ノッチフィルタ

LPF形のノッチフィルタで、遮断周波数だけではなく、伝送零点も標本化周波数より十分小さい所にあるとすれば、LPFからの類推で、次のような伝達関数が考えられる。

$$H_{2N}(z) = \frac{b\{1-(2-a)z^{-1}+z^{-2}\}}{1-\{2-a(b+c)\}z^{-1}+(1-ac)z^{-2}} \quad (5-13)$$

$z=1$ 附近で、極と零点 a とり得る格子点密度が高くなっている。直流利得は係数の値に無関係に 1 となっている。

§5.2.4 その他のフィルタ

デジタル高域通過フィルタ (HPF) は、LPF の極と零点の位置を平面の虚軸に関して対称に移動すれば得られる。即ち、

$$z^{-1} \rightarrow -z^{-1} \quad (5-14)$$

という変換を施せばよい。この変換では回路構造に変化はなく、計算器の符号が何箇所か変わるものだけであるから、LPF の構造が知られていれば、HPF はすぐに得られる。式(5-14)の変換を前節までに得られたフィルタに適用することによって、1次、2次のHPF 及びHPF形ノッチフィルタが求められる。

全域通過フィルタ (APF) の振幅特性は周波数の全域にわたって直通になっており、振幅特性の感度はもともと零である。APF の構成については、Mitra⁽¹⁹⁾ が取り扱っているので、ここでは省略する。

§5.3 回路構造の決定

係数感度を低くするには、発振にくく安定な回路を求めるだけでなく、ハードウェアの複雑さや価格を低減することも目的であるから、乗算器等の数を必要最少限に留めて実現することが重要である。整数倍の乗算器についても少しがいことが望まれる。前節で求めた伝達関数は、パラメータ数の減少と低感度化のための制限を付けていたため、従来の構成法で最少乗算器数の回路を求めるとは困難であった。

回路を記述する種々の方程式のうち、伝達関数は入出力関係を表わしているが、内部構造に関する情報はほとんどもっていない。回路の内部構造に対応するものが節点方程式であるから、回路構造の決定にあたって節点方程式を利用する方法が考えられる。その1つとして、抽出法を紹介し、これと対比しながら本章で提案する方法を説明する。

§5.3.1 抽出法

最終的に回路中に含まれる乗算器を規定する構成法として乗算器抽出法があ

るが、この方法は、伝達関数の係数が乗算器係数とのままであるか、乗算器係数どうしの積和の場合にのみ有効である。伝達関数の係数に整数項を含む低感度ディジタルフィルタの構成には、乗算器の他に遅延と節点を抽出する必要がある。この時、canonicalな回路を構成するために、伝達関数の次数と同数の遅延を抽出すれば良いが、抽出すべき節点の数は不明である。

例えば式(6)の1次LPFを考えてみる。乗算器 a の他に遅延と節点を1個ずつ抽出し、図5-2のようにする。

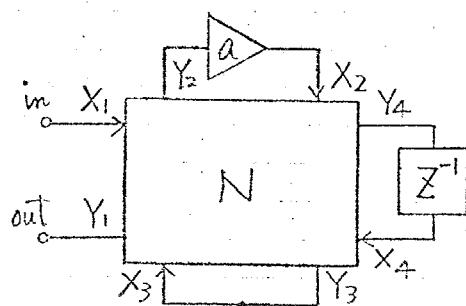


図5-2 外部条件を付けた4 pair回路

≥ 2 の時、回路 N を表わす伝達行列は次のようになる。

$$\begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & 0 & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & 0 & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{vmatrix} \quad (5-15)$$

但し、遅延を含まないループが生じないように $t_{22}=t_{33}=0$ としてある他、

$t_{23}, t_{32}=0$ も成り立っていないければならない。又、外部条件として、

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= a Y_2 \\ X_3 &= Y_3 \\ X_4 &= Z^{-1} Y_4 \end{aligned} \right\} (5-16)$$

がある。式(5-15)(5-16)を適当に処理して内部変数 $X_2 \sim X_4, Y_2 \sim Y_4$ を消去し

て、入出力関係 Y_1/X_1 を導き、これを式(5-6)の伝達関数と等置する。その時に t_{ij} のうちなるべく多くが零となり、非零のものは ± 1 となるように決める。その結果、図5-3に示す、互に Transposed system である 2つの回路が得られる。

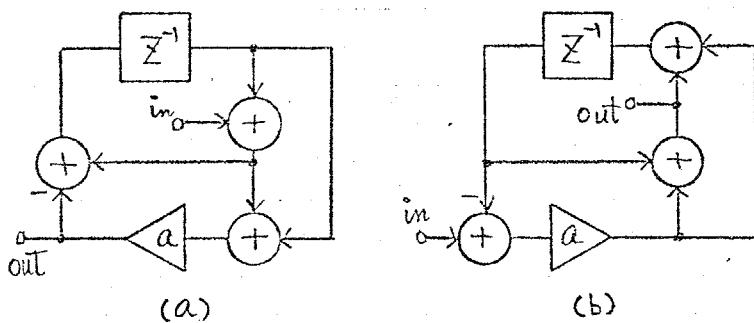


図5-3 1次 LPF

この例において、乗算器と遅延のみを抽出し、節点を抽出しない場合にも解は存在するが、得られる回路は図5-3の回路より、2倍の乗算器1個だけ余分に必要となる。

抽出法では、1次を越える回路では未知数の数が膨大となり、内部変数の消去過程も相当複雑で実際的でない。又、それ以前に節点数が確定していなければ、節点数を増加させながら試行錯誤によって最適な回路を求めるべきである。

5.3.2 帰還路付加法

ディジタルフィルタの回路構造の決定においては、分母多項式のみ先に考え、後から feed forward paths を付加して分子多項式を得る方法がよく用いられるが、ここでは、分母多項式を最後に実現する形で段階的に構成する。基本的には抽出法と同様に、接続が不明な部分を未知数として含む節点方程式をつくり、こより伝達関数を算出し、与えられたものと等置して未知数を決定するものであるが、節点方程式を行列ではなく信号流れ線図で表現することが異なる。図式表現によれば、節点数の増減も容易である上、伝達関数の導出に Mason

の規則を用いると、行列式の計算より単純である。但し、計算機向す方法ではない。

今、与えられた伝達関数を最少乗算器数で実現する回路があるとする。すべての乗算器係数が 1 に比べて十分小さく無視できると仮定すると、伝達関数中のいくつかの環が消え単純な形となる。これは回路構造の上でも、いくつかの枝が切り離されて縮小されたことに相当する。この縮小回路はパラメータが少なく、構成することに容易であり、構造の種類もそれ程多くない。この回路を骨組として、切り離された枝を探して補えば良い。何種類かある骨組回路のうちのどれかに適当に枝を付加すれば、最少乗算器数の回路が復元されると言えられる。この時同時に等価回路も得られる。枝の切断の時に節点が消滅するものもある。乗算器が継続に接続されている時、枝の切断によって、これらの間の節点が消滅することがあるが、枝を付加する時にも最少乗算器数となるようにはすれば、消滅節点も再生できる。その他では節点は消滅せず骨組回路中に残っているから、抽出法のように節点数の問題が生ずることはない。

一般によく用いられるフィルタの伝達関数では、分子多項式は單純な形をしていることが多く、まず適当な枝を付加して分子多項式を構成することに容易である。次に、分子多項式が変化しないように帰還路を付加して分母多項式を実現する。この時、遅延を含まないループが生じるような帰還路を付加してはならない。付加可能なすべての帰還路を列挙しても、2 次以下のフィルタでは、それ程の手数ではない。分子多項式に影響を与えるに、帰還をかけて分母多項式を変形する方法として状態帰還がある。遅延を含む帰還ループをつくることは同じであるが、状態帰還のように状態変数を入力に戻すだけでなく、ここでは、乗算器数の減少を図り、任意の場所から任意の場所への帰還を許す。

この方法によって、前節で求めた低感度伝達関数を最少乗算器数で実現する回路を求めてみよう。

(1) 1 次 LPF

1次LPFの伝達関数

$$H_{IL}(z) = \frac{a(1+z^{-1})}{1-(1-2a)z^{-1}} \quad (5-6)$$

$|a|$ において、 $1 > a$ とすると

$$H'_{IL}(z) = \frac{a(1+z^{-1})}{1-z^{-1}} \quad (5-7)$$

となる。 H'_{IL} の構成は図5-4(a)のように4種類ある。

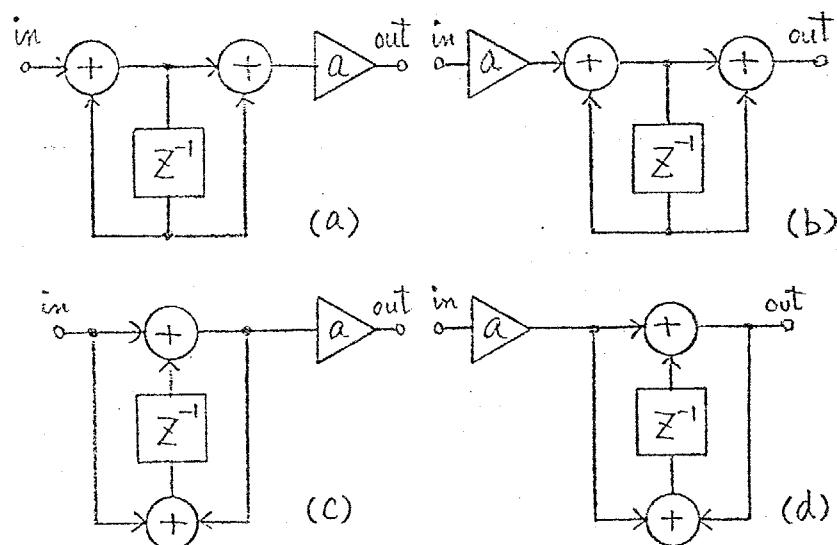


図5-4 1次LPFの骨組

H'_{IL} の分子は H_{IL} の分子とすでに等しい。分子多項式に影響を与える、遅延を含まないループが生じない帰還路は図5-5に示すようにそれぞれ3本ある。

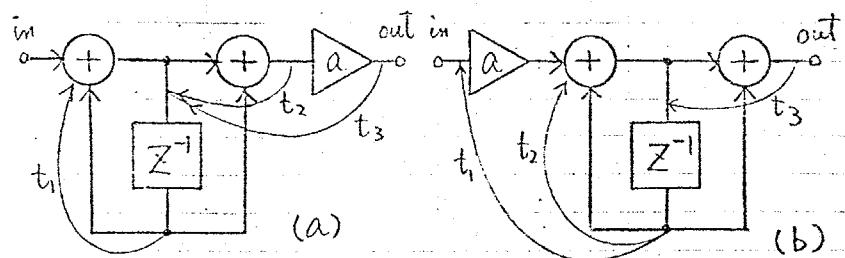


図5-5 帰還路の付加

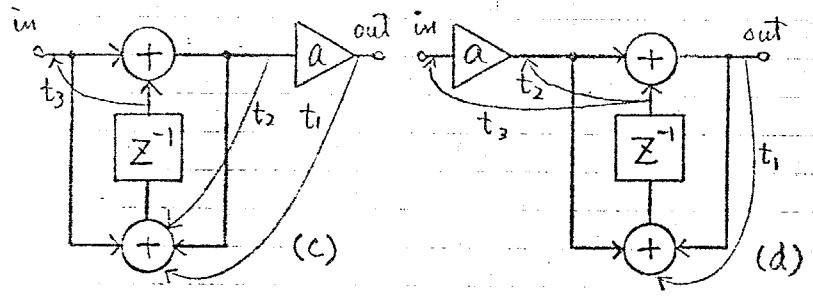


図 5-5 帰還路の付加

帰還路付加後の分母多項式を Mason の規則によって求めると、(a) と (d) の回路では、

$$D_{IL}(z) = 1 - z^{-1} - t_1 z^{-1} - 2t_2 z^{-1} - 2at_3 z^{-1} \quad (5-18a)$$

又、(b)(c) の回路では、

$$D_{IL}(z) = 1 - z^{-1} - at_1 z^{-1} - t_2 z^{-1} - 2t_3 z^{-1} \quad (5-18b)$$

となる。式(5-6)と比較すると、(a)(d) の回路では $t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = -1$, (b)(c) の回路では $t_1 = -2$, $t_2 = t_3 = 0$ が得られるが、2 倍の乗算器を用いてなくてよい (a)(d) の回路が経済的である。こうして得られる回路は、図 5-3 と全く等しい。抽出法より、はるかに容易に回路構造が得られることがわかる。

(2) Biquad 回路

まず、LPF を考えよ。2 次 LPF の伝達関数は、

$$H_{2L}(z) = \frac{a(1+z^{-1})^2}{1 - 2(1-b-2a)z^{-1} + (1-2b)z^{-2}} \quad (5-11a)$$

で与えられており、 $a \gg 1 \gg b$ とすると、

$$H'_{2L}(z) = \frac{a(1+z^{-1})^2}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} = a \left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right)^2 \quad (5-19)$$

となる。 H'_{2L} を最少乗算器数で実現するには直線形がよく、乗算器 a の位置等によって、12通りの構成が可能である。その中で例えば次のもとを考えよ。

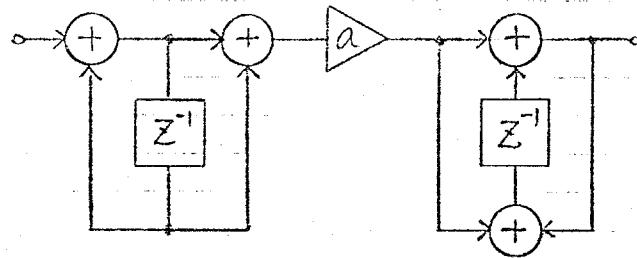


図5-6 2次LPF α骨組

分子多項式はすでに式(5-11)と一致しているので、これに影響を与えるず、遅延を含まないループが生じない帰還路を考えると、次に示す11本がある。

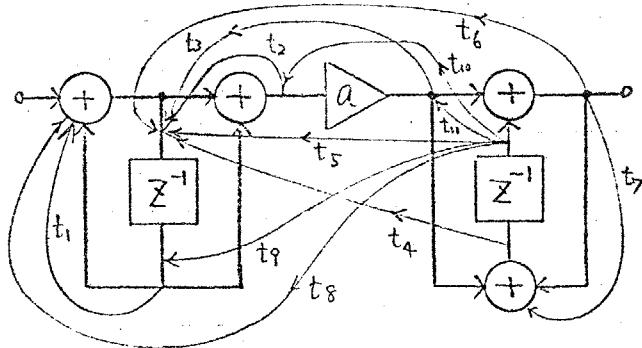


図5-7 帰還路の併加

伝達関数の分母多項式 $D_{2L}(z)$ を求めると、

$$\begin{aligned}
 D_{2L}(z) = & 1 - [2 + t_1 + t_2(2+t_1) + t_7(1+t_{11}) + 2t_{11} + a\{t_3(2+t_1) + \\
 & t_4(2+t_1)(2+t_7) + t_6(2+t_1) + t_8(2+t_7) + t_9(2+t_1)(2+t_7) + \\
 & t_{10}(2+t_7)\}]z^{-1} + [1 + t_1(1+t_7) + t_2(2+t_1)(1+t_7) + t_7 + \\
 & (1+t_1)(1+t_2)(1+t_7)t_{11} - a\{t_5(2+t_1)(2+t_7) + t_6(2+t_1) + \\
 & t_8(2+t_7) - t_3(2+t_1)(1+t_7) - t_{10}(1+t_1)(1+t_7)\}]z^{-2} \quad (5-20)
 \end{aligned}$$

が得られる。式(5-11)の分母と等置して、なるべく多くの t_i が零になるよう決めると、

$$t_2 \text{ or } t_{11} = -b, \quad t_4 \text{ or } t_9 = -1$$

となり、全部で4種類の等価回路となる。これらを整理して描くと次のとおりである。

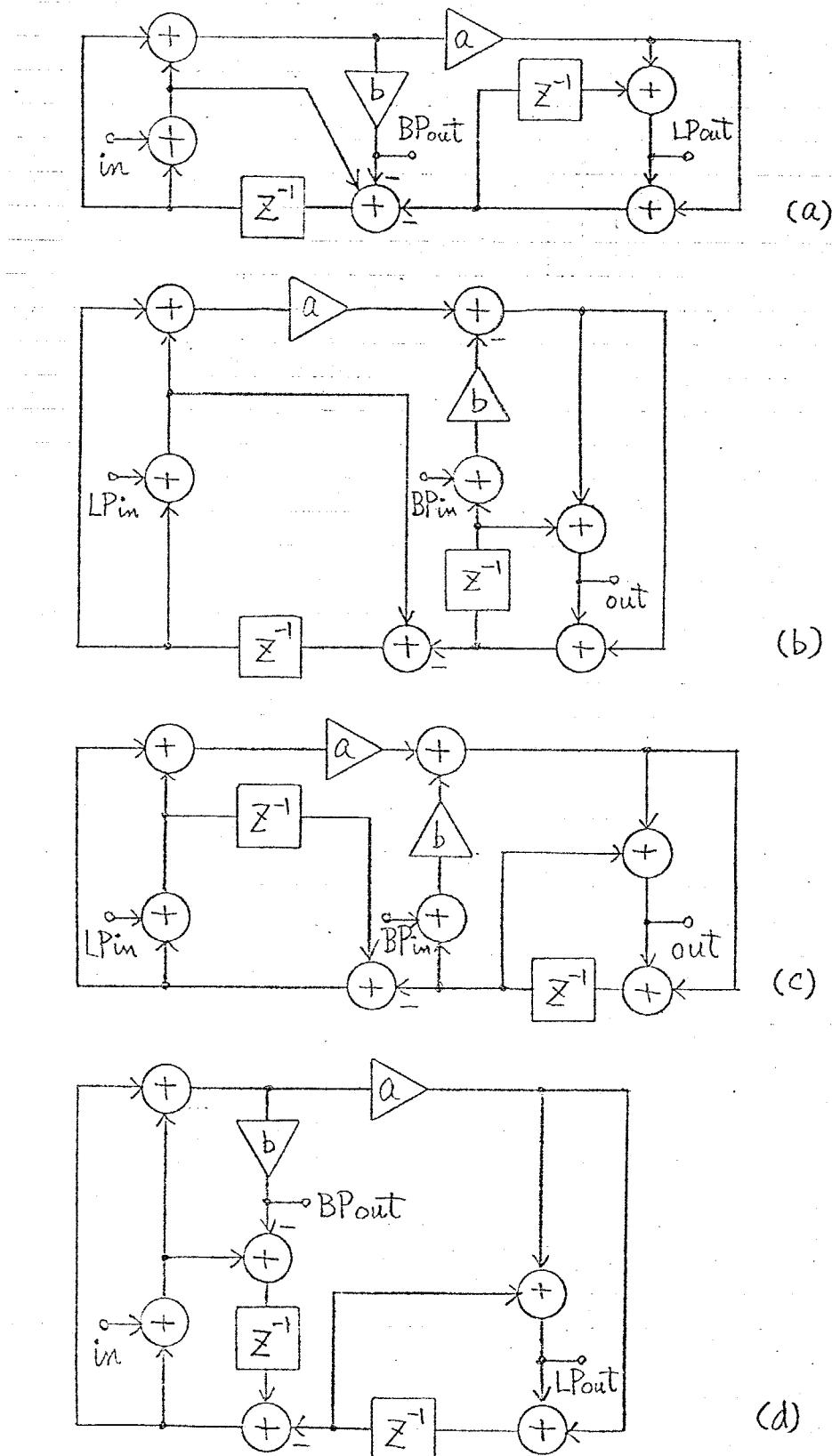


図 5-8 デジタル biquad 回路

図5-8で(a)と(c), (b)と(d)は互にTransposed systemである。それるために式(5-11b)で表わされるBPF用の入出力端子があり、これらの回路はデジタルBiquad回路とも呼ぶべきものであろう。この回路は、2個の乗算器のみで、低周波のLPFとBPFが同時に得られるため、LSI化にも適している。骨組として図5-6のもの以外を使うと、2倍の乗算器等が余分に必要になる。

次にBPFの構成を考えてみる。伝達関数は、

$$H_{2B}(z) = \frac{b(1-z^{-2})}{1-2(1-b-2a)z^{-1}+(1-2b)z^{-2}} \quad (5-11b)$$

であるから、 $1 \gg a, b$ とすると

$$H'_{2B}(z) = \frac{b(1-z^{-2})}{1-2z^{-1}+z^{-2}} = b \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (5-21)$$

となる。 H' は式の上で H から導かれるばかりでなく、回路構造の上でも、乗算器係数が小さいとした時には、 H は H' となる。今、式(5-21)のように、 H' を求める時に約分されて消えてしまう項があるが、これは、乗算器係数が小さい時には、この項を表わす部分が構造的に分離されていることを示す。この場合の骨組となる回路の例と、それに付加し得る帰還路を図5-9に示す。

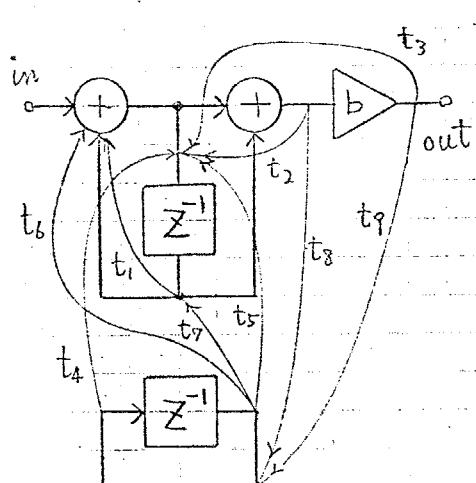


図5-9 2次BPFの骨組と帰還路の付加

伝達関数が式(5-11b)と一致するためには、

$$t_3 = -1, \quad t_4 + t_8 \text{ or } t_7 + t_8 = -2a$$

であれば良い。これに対応する3回路は図5-8(a)(d)とほとんど同じであるが、LPF用の入出力端子は直接得られない。又、図5-9のtransposed systemによる回路が、図5-8(b)(c)に対応する。

(3) 2次BPF

式(5-12)のBPFについても同様に、 $1 \gg a, b$ とすると、

$$H'_{2B}(z) = \frac{a(1-z^{-2})}{1+z^{-2}} \quad (5-22)$$

となる。骨組と付加し得る帰還路を図5-10(a)に、最終的な回路を図5-10(b)に示す。式(5-12)の伝達関数を最少乗算器数で実現する回路は図5-10(b)とそのtransposed systemのZ通りである。

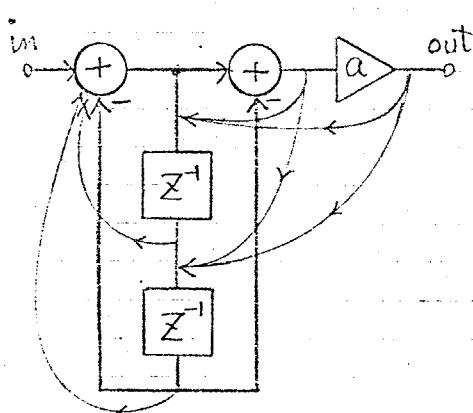


図5-10(a) 2次BPFの骨組と
帰還路の付加

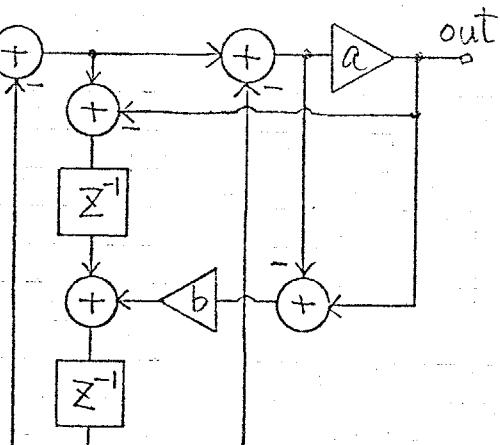


図5-10(b) 2次 BPF

(4) ノットフィルタ

式(5-13)a ノットフィルタで、 $b \gg a, b, c$ とすれば、

$$H'_{2N}(z) = \frac{b(1-2z^{-1}+z^{-2})}{1-2z^{-1}+z^{-2}} = b \quad (5-23)$$

であるから、骨組は図5-11のようになる。

図5-11の回路をもとに式(5-13)の分子多項式を構成する方法は12通りある。その中で例えば図5-12のものを用いて、前と同様に帰還路を付加して、分母多項式を計算する。式(5-13)の分母と比較して、

$$t_3 = -c, \quad t_5 = -1$$

が解となる。 \therefore の回路を図5-13(a)に示す。

図5-12以外から出発した時に得られる回路を図5-13(b)(c)に示す。結局、式(5-13)の伝達関数を最少乗算器数で構成する回路は、図5-13のTransposed systems で、合計6種類ある。

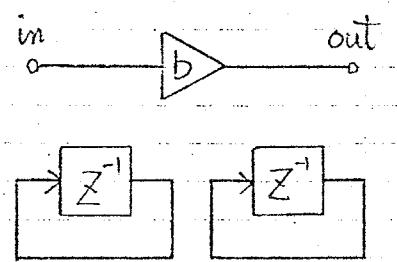


図5-11 ノットフィルタの骨組

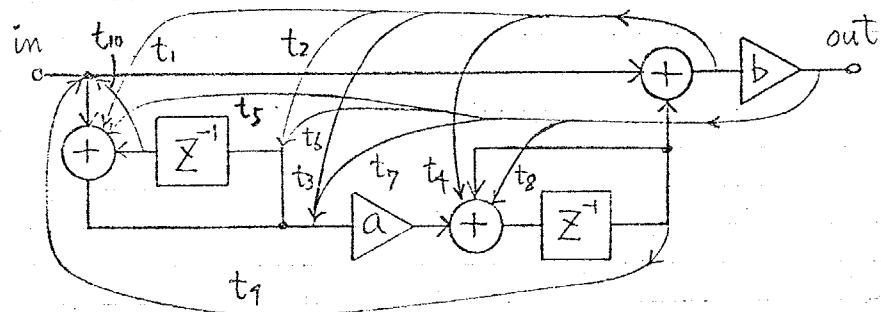


図5-12 分子の構成と帰還路の付加

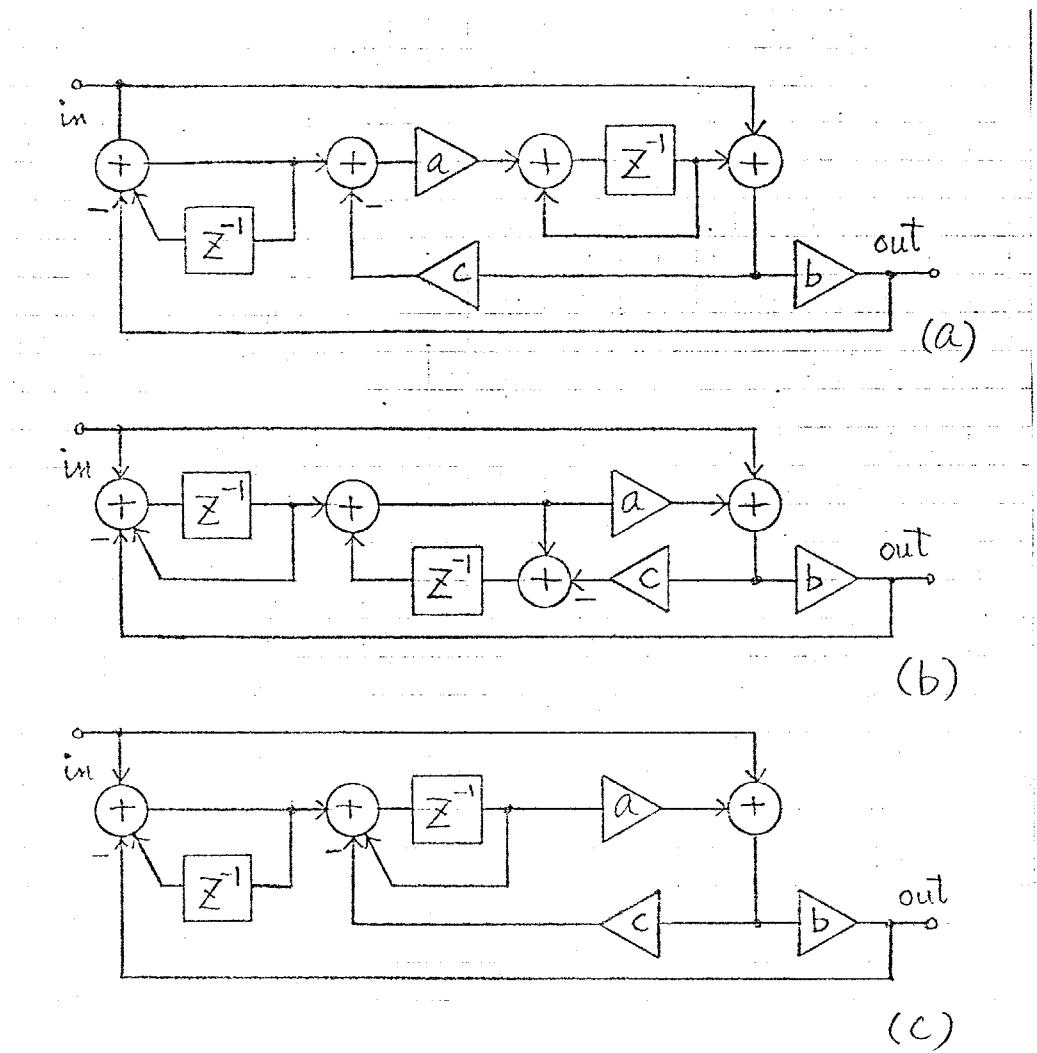


図5-13 ハンデフィルタの回路

§5.4 係数感度とまるめ雑音

前節で得られた回路について、係数感度とまるめ雑音を調べ、従来の回路と比較してみよう。

§5.4.1 係数感度の比較

前章と同様に、フィルタの乗算器係数は2進浮動小数点数で表わし、その係数部のみを指定した語長によるまろめ、フィルタの特性劣化を Chrochiére の相対誤差⁽¹⁵⁾で評価する。前章と同じ、通過域リップル 0.1dB の 7 次チエビシェフ LPF を用いる。フィルタは図 5-3 の 1 次 LPF 1 段と図 5-8 の 2 次 LPF 3 段を繰り返して実現する。通過域内の振幅特性を図 5-14 に、相対誤差を図 5-15 に示す。規格化遮断角周波数を $\pi/100$ と小さく選んだにもかかわらず、LC シミュレーション法に近い優れた感度特性を示している。

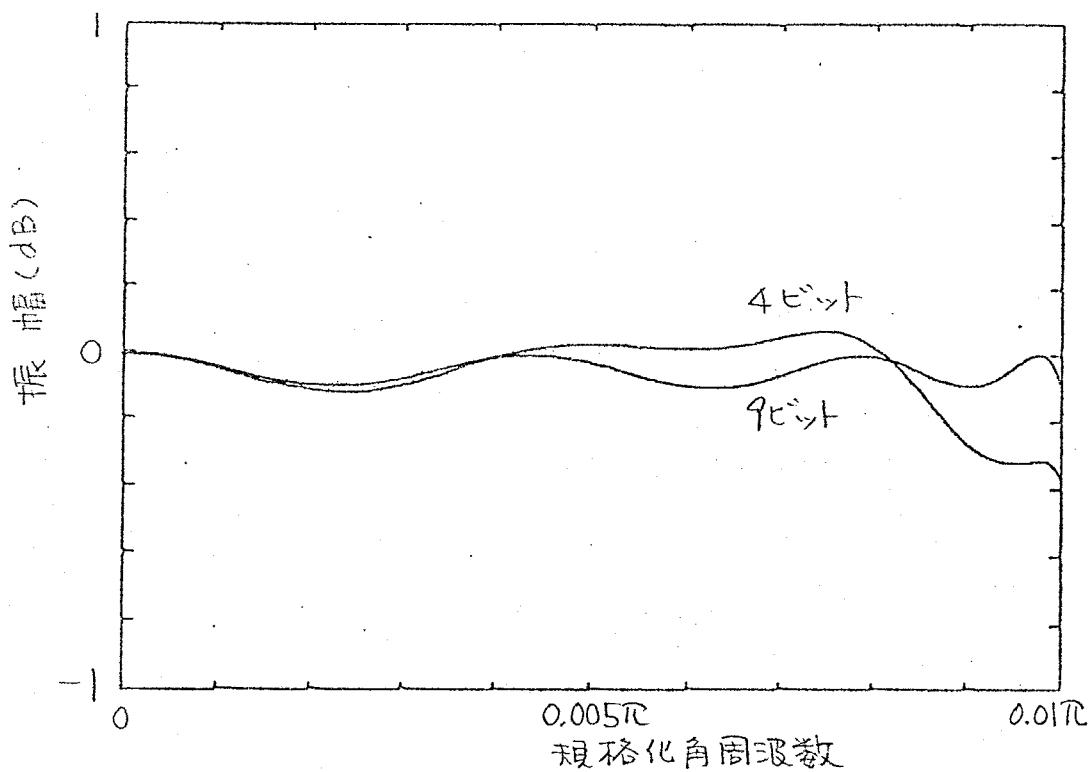


図 5-14 7 次チエビシェフ LPF の通過域特性

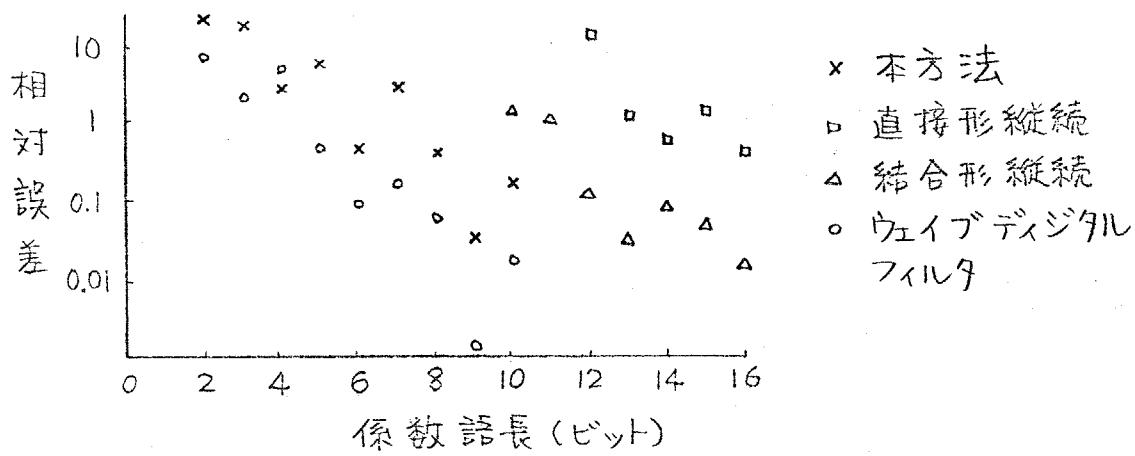


図5-15 相対誤差差の比較

5.5.4.2 まろめ雑音の比較

浮動小数点演算では、乗算と加算の後でまろめの操作が行なわれ、誤差が生ずる。この誤差が信号と大きさに比べて十分小さい場合には、各演算および時刻について統計的に独立であると仮定することができ、正確な演算に白色雑音が重ね合わされる図5-16のようなモデルを考えることができる。

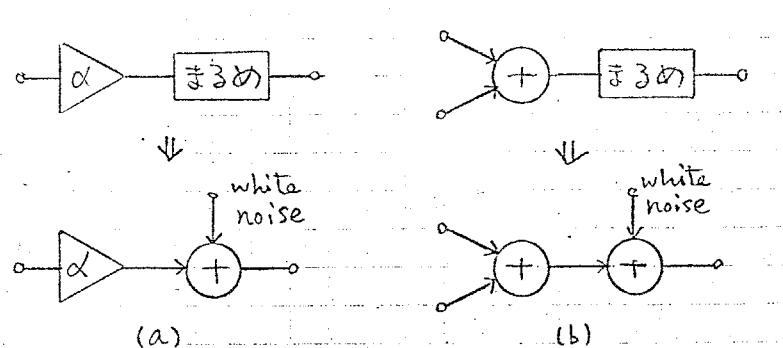


図5-16 まろめの白色雑音源モデル

(a) 乗算器, (b) 加算器

数が浮動小数点で表わされている場合には、まろめは仮数部のみに行なわれるので、信号レベルに比例した白色雑音が加えられることになる。

伝達関数 $H(z)$ のフィルタに白色雑音を入力した時のまろめ雑音による出力の分散 σ_n^2 と信号出力の分散 σ_s^2 の比、即ち NS 比は、次式で与えられる。

$$\frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2} = \frac{\sigma_z^2}{2\pi j} \frac{\sum_k \int F_k(z) F_k(z') z' dz \int G_k(z) G_k(z') z' dz}{\int H(z) H(z') z' dz}$$

但し、 $F_k(z)$ は入力から k 番目の雑音発生点までの伝達関数、 $G_k(z)$ は k 番目の雑音源から出力までの伝達関数である。又、譜長が b ビットの時 $\sigma_z^2 = 2^{-2b}/3$ である。

一例として、2次バタワース LPF を各種回路で構成し、NS 比を計算する。仮数部 9 ビットの譜長とし、遮断周波数を変化させた時の NS 比を図 5-17 に示す。譜長 1 ビットの変化に対して NS 比は 6 dB 变わる。図 5-8 の 4 つの等価回路について、図 5-17 に示す範囲で NS 比は 1 dB 以下の差しかねいため、最も良の (d) の回路で代表した。直接形は Jackson⁽²¹⁾ の 1D 形と 2D 形をとりあげた。図 5-17 から、狭帯域にて 3 程差が大きいことがわかる。図 5-8 の回路は、直接形よりけなり優れているが、Agarwal の回路⁽¹⁶⁾ より少し劣る。しかししながら、図 5-8 の回路は感度において Agarwal の回路より優れており(図 5-1)、乗算器数も少ない(Agarwal の回路では、分子の構成のために乗算器が 2 個余分に必要)。更に、構造を変えずに BPF が同時に得られる等の利点をもつて いる。

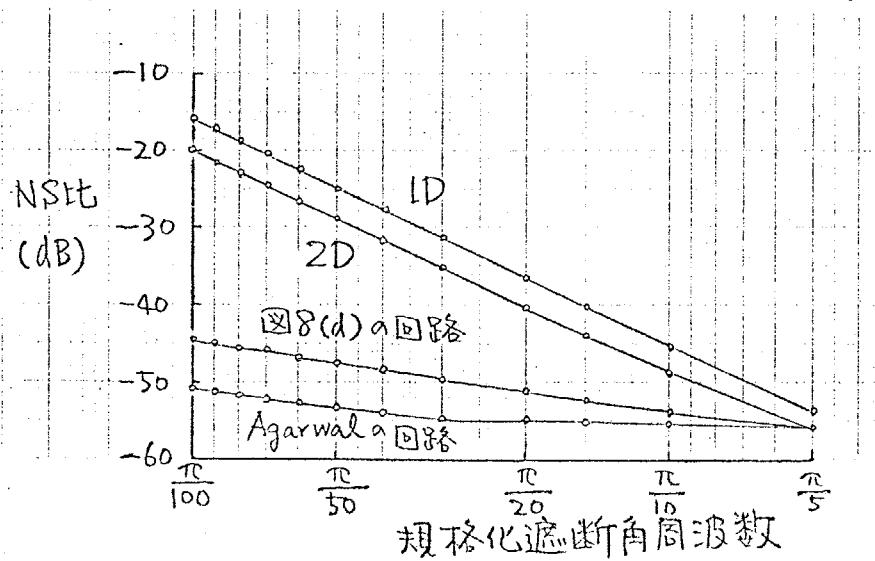


図 5-17 NS 比の比較

5.5 まとめ

係数感度の低いディジタルフィルタを最少乘算次数で構成する方法として帰還路併加法を提案した。この方法によれば、従来、経験的に求めっていた回路が組織的に得られる。しかも、すべての等価回路を求めることができる。この方法によって1次と2次の各種低感度フィルタを構成した。2次のLPFとBPFでは同一の回路で入力端子又は出力端子を分けるだけで実現でき、LSI化にも適している。これらの回路の係数感度とまでの雜音を調べ、従来のものより改善されていることを確認した。より高次のフィルタも、パラメータの数が多くなり複雑ではあるが、同様に構成可能である。

第6章 結論

以上各章にわたって、デジタルフィルタの特性近似と低感度構成に関する問題について述べた。本研究で得られた成果を要約すると次のとおりである。

第2章では、計数振幅特性をフーリエ級数展開を用いて直接近似する方法における近似誤差が窓関数の使用によって軽減されることを示した。近似過程で2回必要とする窓関数の変数と必要な次数を、フィルタの仕様から求める経験的な設計公式を示した。この方法によつて、非常に簡単な手順により、再帰形デジタルフィルタの伝達関数が得られる。

第3章では、振幅特性と遷移特性が同時に平滑なデジタルフィルタの極と零点の位置を決定する条件式を導いた。この方程式は計算機を用いて容易に解くことができる、得られたフィルタの応答は理想低域フィルタに近い優れたもので、透形伝達用フィルタとして適している。振幅と遷移の平坦性を特に注意に述べ、平坦度が高精度の時、ヤコビフィルタと一致する。

第4章より、低感度デジタルフィルタを構成する方法の1つとして、抵抗終端LCヒザ形フィルタをシミュレートする方法を示した。LCヒザ形フィルタの特性と電圧の関係をSFGで表わし、各ランансミタンスをデジタル回路で適切に選ぶことによって、LCフィルタの低感度特性を受け継ぐデジタルフィルタが得られる。感度特性は、ウェイブデジタルフィルタやリニアプロック等の他のLCフィルタシミュレーション法と同程度であることが確認された。

第5章では、線形形構成にて低感度デジタルフィルタを得るために、1次と2次のデジタルフィルタの伝達関数について考察し、それを最少乘算器数で構成する方法を示した。この時、すべての等価回路が得られるから、それらの中でもある一つの回路を最も小さい回路を選べば良い。2次のLPFとBPFは同一の回路で入力端子と出力端子を分けるだけで実現でき、LSI化にも適している。

謝 辞

本研究を行なうにあたり、常に御指導いただいた柳沢健教授に深く感謝する。
又、種々御討論いたいた小野田真穂樹助教授、藤井信生助教授をはじめとする
柳沢、小野田、藤井研究室の諸兄に深く感謝する。

参考文献

- (1) A.T. Johnson : "Magnitude equalization using digital filters," IEEE Trans., CT-20, 3, p.308 (May 1973).
- (2) F.F. Kuo and J.F. Kaiser : "System analysis by digital computer," New York, Wiley (1966).
- (3) H.D. Helms : "Nonrecursive digital filters: Design method for achieving specifications on frequency response," IEEE Trans., AU-16, p.336 (Sep. 1968)
- (4) D. Slepian et al : "Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty principle," B.S.T.J. 40, p.43, (Jan. 1961)
- (5) G.C. Maenhout and W. Steenaart : "A direct approximation technique for digital filters and equalizers," IEEE Trans., CT-20, p.548 (Sep. 1973)
- (6) J. Thiran : "Recursive digital filters with maximally flat group delay," IEEE Trans., CT-18, p.659 (Nov. 1971)
- (7) J.D. Rhodes and M.I.F. Fahmy : "Digital filters with maximally flat amplitude and delay characteristics," Int. J. Circuit Theory and Applications, 2, p.3 (1974)
- (8) 佐藤正光 : "ヤコビフィルタ—理想低域特性に近似するデジタルフィルター", 信学論(A), 58-A, 11, p.691 (1975-11)
- (9) A. Fettweis : "On the connection between multiplier word length limitation and roundoff noise in digital filters," IEEE Trans., CT-19, p.486 (Sep. 1972)
- (10) H.J. Orchard : "Inductorless filters," Electronics Lett., 2, p.224 (June 1966)
- (11) A. Fettweis : "Digital filter structures related to classical filter networks," Arch. Eleck. Übertragung, 25, p.79 (Feb. 1971)

- (12) L.T. Bruton: "Low-sensitivity digital ladder filters," IEEE Trans., CAS-22, p.168 (Mar. 1975)
- (13) B. Gold and C.M. Rader: "Digital processing of signals," McGraw-Hill, New York (1969)
- (14) A.G. Constantinides: "Spectral transformations for digital filters," Proc. IEE, 117, 8, p. 1585 (Aug. 1970)
- (15) R.E. Crochiere: "Digital ladder structures and coefficient sensitivity," IEEE Trans., AU-20, p. 240 (Oct. 1972)
- (16) R.C. Agarwal and C.S. Burrus: "New recursive digital filter structures having very low sensitivity and roundoff noise," IEEE Trans., CAS-22, p. 921 (Dec. 1975)
- (17) E. Avenhaus: "A proposal to find suitable structures for the implementation of digital filters with small coefficient word length," NTZ, 25, 8, p. 377 (Aug. 1972)
- (18) 西村、平野、ミットラ: "特性可変デジタルフィルタの構成" 信学技報 CST-75-99 (1976-01)
- (19) S.K. Mitra and K. Hirano: "Digital all-pass networks," IEEE Trans., CAS-21, p. 688 (Sep. 1974)
- (20) J. Szczupak and S.K. Mitra: "Digital filter realization using successive multiplier-extraction approach," IEEE, ASSP-23, p. 235 (Apr. 1975)
- (21) L.B. Jackson: "Roundoff-noise analysis for fixed-point digital filters realized in cascade or parallel form," IEEE Trans., AU-18, p. 107 (June 1970)

本研究に関する発表論文

- (1) "ディジタルフィルタにおける特性近似について" 信学技報 CST74-42
(1974-08) (共著者: 杉本)
- (2) "再帰形ディジタルフィルタにおける二重窓の応用" 信学論(A) 59-A,
2 (1976-02)
- (3) "振幅・遅延同時平坦化ディジタルフィルタ" 信学技報 CST75-69
(1975-10) (共著者: 杉本)
- (4) "低感度ディジタルフィルタ" 信学技報 CST76-26 (1976-06)
- (5) "Low-sensitivity active and digital filters based on the
node-voltage simulation of LC ladder structures," Proc.
1977 IEEE ISCAS (Apr. 1977) (共著者: 吉弘、柳沢)
- (6) "低感度能動およびディジタルフィルター LC はしご形回路の節点電圧シ
ミュレーション", 信学論(A) 60-A, 7 (1977-07)
(共著者: 吉弘、柳沢)
- (7) "低感度ディジタルフィルタの一構成法" 信学技報 CST77-28 (197
7-06)
- (8) "最少計算器構成による低感度ディジタルフィルタ" 信学論(A) 投稿中