T2R2 東京科学大学 リサーチリポジトリ
Science Tokyo Research Repository

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	ディジタルフィルタの特性近似と低感度構成に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	西原明法
Author(English)	AKINORI NISHIHARA
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第994号, 授与年月日:1978年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第994号, Conferred date:1978/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

Powered by T2R2 (Science Tokyo Research Repository)

ディジタルフィルタの特性近似と低感度構成に関する研究

昭和53年1月

指導教官　柳沢 健 教授
提出者　大学院博士課程電子工学専攻
西原 明法

東京工業大学 409919

目　次

第1章　序　論　1
1.1　研究の背景と目的　1
1.2　ディジタルフィルタの概念　4
第2章　対数振幅特性の直接近似　7
2.1　まえがき　7
2.2　フーリエ級数を用いる直接近似　8
2.2.1　トランスバーサルフィルタの構成　8
2.2.2　窓関数を用いる方法　9
2.2.3　Johnsonの方法　10
2.3　直接近似法の改良　12
2.3.1　近似誤差の解析　12
2.3.2　窓関数による修正　14
2.3.3　一般の再帰形フィルタ　14
2.3.4　安定性　15
2.4　近似例　16
2.5　むすび　24
第3章　振幅、遅延同時平坦近似　25
3.1　まえがき　25
3.2　極、零点と周波数特性　25
3.3　平坦性の条件　27
3.3.1　振幅平坦特性　27
3.3.2　遅延平坦特性　31
3.4　近似例　32
3.5　むすび　35

第4章　LCフィルタに基づく低感度ディジタルフィルタの構成　36
4.1　まえがき　36
4.2　LCはしご形回路のSFG表現　37
4.3　ディジタル回路によるSFGの実現　39
4.3.1　低域通過フィルタ　39
4.3.2　帯域通過フィルタ　43
4.4　係数感度の比較　46
4.5　むすび　50
第5章　最少乗算器構成による低感度ディジタルフィルタ　51
5.1　まえがき　51
5.2　低感度伝達関数　52
5.3　回路構造の決定　57
5.3.1　抽出法　57
5.3.2　帰還路付加法　59
5.4　係数感度とまるめ雑音　69
5.5　むすび　72
第6章　結　論　73
謝　辞　74
参考文献　75

第1章 序論

§1.1 研究の背景と目的

通信、計測、制御をはじめ、電子工学の多くの分野でディジタル信号を取り扱うことが多くなり、これにつれて、ディジタル信号処理の重要性は増すばかりである。基本的な信号処理操作であるフィルタリングをディジタル量の代数演算で行なうディジタルフィルタリングについても、その解析や設計に関する研究が盛んに行なわれている。

ディジタルフィルタは、その構造の違いから再帰形と非再帰形とに分類される。非再帰形は内部に帰還ループをもたないため、安定性は常に保証されているが、一般に再帰形よりかなり高い次数が必要である。非再帰形フィルタの設計はトランスバーサルフィルタと同様であり、比較的問題は少ないが、再帰形では、一般に低い次数で希望特性を実現できる反面、安定性や演算誤差の蓄積等の問題があり、やや複雑である。振幅特性の急峻な変化を必要としない等化器等を除いて、一般に多用されるのは再帰形であり、本研究では再帰形ディジタルフィルタの設計について考察する。

ディジタルフィルタの設計もアナログフィルタの場合と同様に、近似と構成の問題に大別される。

要求される特性に近似し、実現可能な伝達関数を求める場合、良く研究されているアナログフィルタから、双一次変換等の写像によって求めれば、多くの既知の関数をそのまま応用できるため、ディジタルフィルタの領域で直接近似する方法についての研究は少ない。ところが、ディジタルフィルタの特徴を積極的に利用する場合や、双一次変換等の写像では保存されない遅延特性を考慮する場合等には、ディジタルフィルタの周波数変数であるzの関数として直接近似することが必要である。

ディジタルフィルタのアナログフィルタと全く違う特徴として、標本化によ

る周波数特性の周期性があり、この性質を利用して、希望する周波数特性のフーリエ級数展開を用いて近似できる。Johnson[1]の方法は、振幅特性が対数目盛で与えられた場合に適した方法であるが、級数打ち切りによる誤差が特性のリプルとして現われ、直接使用に堪えるものではない。

波形伝送用フィルタ等では、振幅特性ばかりでなく、通過域内での遅延特性の平坦性が非常に重要である。双1次変換等の写像では、振幅、遅延双方の平坦性等を保存することはできないため、遅延特性も規定する場合には、直接z平面上で考える必要がある。理想低域フィルタの振幅、遅延同時平坦近似については、振幅と遅延の平坦次数が同程度の時のみ解析的に解かれているが、[7][8]一般に任意の平坦次数による近似も興味深いことである。

ディジタルフィルタでは、伝達関数が与えられれば、直ちに一応の構成は得られるが、フィルタ内で取り扱うすべての量は有限語長に量子化されているため、この影響が無視できない。係数語長の制限は、フィルタの特性を劣化させ、不安定にすることさえある。これは係数感度の問題として取り扱われている。乗算等の演算後のまるめによる語長の制限は白色雑音の混入と考えられ、出力でのSN比の悪化を招く。このような有限語長の影響は回路構造によって大きく異なり、短い語長で実現できる構成方法が望まれている。

本研究の目的は、Johnsonの方法における近似誤差を軽減し、実用になる特性で近似する方法を示し、又、振幅と遅延が同時に平坦なディジタルフィルタを導くことであり、更に、有限語長の影響の小さい低感度ディジタルフィルタの構成法を示すことである。

第1章では、準備としてディジタルフィルタの基本的概念について述べる。又、従来の設計法の主なものを列挙し、本論文の近似法や構成法の位置付けを明確にする。

第2章では、フーリエ級数展開を用いる近似方法として、トランスバーサルフィルタの構成とJohnsonの方法を紹介し、その近似誤差を解析する。非再帰形では減衰域に、又、純再帰形では通過域に、近似誤差によるリプルが生じる

ことを示し、この誤差の影響が、近似過程で窓関数を2回使用することによって大幅に軽減できることを示す。

第3章では、ディジタルフィルタの振幅特性と遅延特性が同時に平坦であるための条件式を求める。この式は、極と零点の位置を、双1次変換したS^{-1}平面上で規定するもので、簡単な多項式で表わされるが、解析的に解くことは困難である。しかしながら、計算機を用いれば容易に解くことができ、得られるフィルタの特性の例も示す。

第4章では、感度特性の優れたLCフィルタをシミュレートする方法による、低感度ディジタルフィルタの構成法を示す。LCフィルタの各節点電圧間の関係を信号流れ線図で表わすと、そのトランスミタンスを双2次関数とすることができる。トランスミタンスにSからZへの変数変換を施してディジタル回路を得るが、この時、変換の工夫によって遅延を含まないループが生じるのを防いでいる。

第5章では、縦続接続によって低感度ディジタルフィルタを得るための、1次と2次のフィルタの低感度構成法を述べる。乗算器係数の値と関係なく利得が1である点を通過域内に設けると共に、乗算器係数の絶対値が小さくなり、極のとり得る格子点密度が高くなるように伝達関数を変形する。更に、これを最少乗算器数で、すべての等価回路と共に得る方法として、帰還路付加法を提案している。

§1.2 ディジタルフィルタの概念

ディジタルフィルタとは、標本化及び量子化されたディジタル量の代数演算によって、周波数選択性や、その他の処理機能を得るものである。時間連続な信号処理の動作が微分方程式で記述されるのに対応して、ディジタルフィルタの動作は差分方程式で表わされる。

今、T秒毎に信号系列 $x(nT)$ が入力された時の出力系列を $y(nT)$ とすれば、

$$y(nT)=\sum_{i=0}^{M} a_i x((n-i)T)-\sum_{i=1}^{N} b_i y((n-i)T) \qquad (1-1)$$

と表わされる。a_i, b_i は実定数であるとする。式(1-1)で表わされるディジタルフィルタを実現する場合、定数倍の乗算器、加算器、単位遅延素子を用いて直ちに構成できる。b_i がすべて零の場合を非再帰形と呼び、b_i が非零の場合を再帰形と呼ぶ。再帰形ディジタルフィルタでは、一般に非再帰形ディジタルフィルタに比べて低い次数で希望特性を実現できるが、帰還系としての安定性や演算誤差の累積などの問題が生ずる。

差分方程式で記述されたシステムを周波数領域で取り扱うためにZ変換が用いられる。系列 $x(nT)$ が $n<0$ で零の時、そのZ変換 $X(z)$ を次式で定義する。

$$X(z)=\sum_{i=0}^{\infty} x(iT) z^{-i} \qquad (1-2)$$

又、逆Z変換は次のように与えられる。

$$x(nT)=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z) z^{n-1} dz \qquad (1-3)$$

ディジタルフィルタの入力 $x(nT)$ と出力 $y(nT)$ のZ変換をそれぞれ $X(z)$, $Y(z)$ とすれば、式(1-1)より次の関係が得られる。

$$Y(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M} a_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N} b_i z^{-i}} X(z)=H(z)X(z) \qquad (1-4)$$

この $H(z)$ を式(1-1)で表わされるシステムの伝達関数と呼び、その周波数特

性は$H(z)$に$z=e^{j\omega T}$を代入することによって得られる。

希望する振幅特性をもつ伝達関数を求める手法は多く研究されており、それらをまとめて表1-1に示す。

表1-1　振幅特性の近似手法

近似手法		概要	適用範囲
フーリエ級数展開法	トランスバーサル形	周波数特性のフーリエ係数をフィルタ係数とする	非再帰形のみ
	ウィンドウ法	級数打ち切り誤差軽減	同上
	Johnsonの方法	対数利得のフーリエ級数展開よりフィルタ係数を算出	非再帰形と純再帰形
	第2章の方法	打ち切り誤差軽減 他	すべての構成
S→Z変換	標準Z変換 双1次Z変換 整合Z変換	アナログフィルタよりS→Zの写像を用いて変換	同上
ポテンシャルアナロジー		望ましい振幅2乗関数より伝達関数を決定	同上
周波数サンプリング		櫛形フィルタの後に共振器を並列に置き、その荷重和をとる	再帰形のみ
最適化法	線形計画法 非線形計画法	特性をいくつかの点周波数で規定し、それを満足するよう最適化する	すべての構成

遅延特性の近似に関する研究は少なく、Johnson[1]やMacnaut等[5]の方法と、Thiran[6]の研究がある。

更に振幅、遅延の同時平坦特性を得る方法は、表1-2に示すようにRhodes and Fahmy[7]と佐藤[8]の研究があった。

表1-2　振幅、遅延同時平坦近似の手法

Rhodes and Fahmy 佐藤	伝達関数の係数が解析的に得られる	振幅、遅延の平坦次数が同程度の時
第3章の方法	極と零点の位置の条件式が与えられる計算機によって解く	任意の平坦次数

ディジタルフィルタの構成手法も数多く提案されている。これらの中で、低感度特性を目的とするものは、LCフィルタのシミュレーションや、低感度2次区間の縦続接続によるもの等があり、表1-3にまとめた。

表1-3 ディジタルフィルタの低感度構成法

構成法		概要
LCフィルタのシミュレーション	ウェイブディジタルフィルタ[11]	Sパラメータのシミュレーション
	リープフロッグ[12]	電圧、電流のシミュレーション
	第4章の方法	節点電圧のシミュレーション
低感度2次区間の縦続接続	Avenhousの方法[17]	極のとり得る格子点密度の上昇
	Agarwal等の方法[16]	$\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$ を構成要素とする
	第5章の方法	利得不変点を設け、最少乗算器構成
その他	格子形、FLF等の多重帰還形等	

第2章　対数振幅特性の直接近似

§2.1　まえがき

ディジタルフィルタの特徴は、信号等が標本化及び量子化されていることである。標本化の操作により、ディジタルフィルタの周波数特性は周期性をもっている。この周期性を積極的に利用し、希望特性のフーリエ級数展開を用いる近似方法として、トランスバーサルフィルタの構成や、Johnson[1]の方法がある。フィルタの仕様は対数目盛（dB単位）で与えられることが多く、このような場合、対数利得を近似するJohnsonの方法は適していると考えられる。

トランスバーサルフィルタの振幅特性は有限項のフーリエ級数で近似されるため、フーリエ級数の性質より、2乗平均誤差が最小になるという意味で最適なものである。ところが希望特性によっては、フーリエ級数の収束があまりはやくない時があり、この場合には級数打ち切りによる誤差が大きくなり、十分な減衰量が得られない。その対策として、窓関数と呼ばれる重み関数をフーリエ級数に乗じることが行なわれている。[2] 窓関数の使用によって最適性は失なわれるが、過渡帯域付近のリプルが軽減されるとともに、減衰量が大きくとれるため、フィルタとしては使い易いものとなる。このような近似方法は、修正フーリエ級数法あるいはウインドウ法と呼ばれ、非再帰形フィルタの近似には有効な手法であり、よく利用されている。

一方、Johnsonの方法では、再帰形フィルタに適用できるという利点があるが、希望特性のフーリエ級数の打ち切りによる誤差以外に、伝達関数をテーラ級数に展開する時の級数打ち切り誤差が含まれ複雑になる。本章では、この近似誤差について解析し、これを軽減するにも窓関数の使用が有効であることを示す。

§2.2 フーリエ級数を用いる直接近似法

従来、フーリエ級数法といえばトランスバーサルフィルタの近似法を示していて、級数打ち切り誤差を軽減するために窓関数が併用されている。これと対比しながらJohnsonの方法を紹介する。

§2.2.1 トランスバーサルフィルタの構成

フーリエ級数を用いた非再帰形フィルタの設計に、古くからトランスバーサルフィルタとして知られているものがある。これは、与えられた振幅特性を近似し直線位相をもつように設計するものである。伝達関数$H(z)$を

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots\cdots + a_N z^{-N}$$
$$= z^{-N/2}\left(a_0 z^{N/2} + a_1 z^{N/2-1} + \cdots + a_N z^{-N/2}\right) \qquad (2\text{-}1)$$

とする。周波数特性は$z = e^{j\beta T}$と置いて、

$$H(e^{j\beta T}) = e^{\frac{-j\beta NT}{2}}\left(a_0 e^{\frac{j\beta NT}{2}} + \cdots\cdots + a_N e^{\frac{-j\beta NT}{2}}\right) \qquad (2\text{-}2)$$

と表わされる。$e^{\frac{-j\beta NT}{2}}$は振幅が1で直線位相を表わす項であり、振幅特性に影響しないので、括弧内の項だけを考えることにする。これをEulerの公式によって実数部と虚数部とに分ければ、実数部は余弦級数、虚数部は正弦級数になるので、振幅特性や位相特性を表わす式は一般に複雑になり特性近似には不便である。そこでトランスバーサルフィルタでは次式の条件を付けて、虚数部あるいは実数部を零にする。

$$a_k = a_{N-k} \qquad (2\text{-}3a)$$

又は、 $a_k = -a_{N-k}$ (2-3b)

この条件によって、振幅特性は1種類の3角関数の級数となり、希望特性のフーリエ級数と等置すればよい。この時、位相特性は直線になって好ましいが、式(2-3)によって係数の自由度が減少するため、フィルタの次数はフーリエ級数の次数の約2倍必要である。式(2-3a)と(2-3b)のどちらを用いるか、即ち振幅特性が余弦級数と正弦級数のどちらか、又、次数Nの偶奇によってトラン

スパーサルフィルタの構成は4通りの場合に分けられる。

こうして得られるフィルタの特性は、希望特性との2乗平均誤差が最小になるという意味で最適なものである。ところがフーリエ級数の収束がそれ程速くない時には、級数打ち切り誤差によりリプルが生じ、十分な減衰量が得られない。特に、与えた特性が階段状に変化する不連続点をもつ時、不連続点付近でのこの誤差のふるまいはGibbsの現象として知られている。この誤差の影響を軽減するためには、係数を修正することが必要である。その1つの方法は、ある条件のもとで最適化することで、もう1つの簡単な方法は、窓関数と呼ばれる重み関数の使用で、これについて次節で述べる。

§2.2.2 窓関数を用いる方法

フーリエ級数法では、一般に無限に続くフーリエ級数を有限項で打ち切らなければならない。この時、打ち切りによる周波数特性の変化の影響がフィルタの仕様で許容され易いものであることが望ましい。非再帰形フィルタの係数a_kはインパルス応答でもあるから、この打ち切りは時間制限と考えることができ、離散的フーリエ変換(DFT)のために時間関数を切り取る場合と同様の問題となる。この要求を満たす時間制限された重み関数が窓関数である。

ある時間関数$f(t)$を、窓関数$w(t)$($w(t)=0, |t|>T$)で切り取って$\hat{f}(t)$とする。即ち、

$$\hat{f}(t) = f(t)\,w(t) \tag{2-4}$$

これは、周波数領域では次のようになる。

$$\hat{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(ju)\,W(j\omega - ju)\,du \tag{2-5}$$

但し、$F(j\omega)$は$f(t)$の、$W(j\omega)$は$w(t)$のフーリエ変換である。式(2-5)からわかるように$W(j\omega)$の望ましい形はδ関数である。ところが不確定性原理によって、時間制限と帯域制限を同時に行なうことは不可能であるから、時間制限関数$w(t)$として、そのフーリエ変換$W(j\omega)$のエネルギーのなるべく多くが低い

周波数に集中しているものを選ぶ。窓関数$w_1(t)$を用いてフーリエ係数f_kを修正して新しい係数$\hat{f}_k$を求めるには、

$$\hat{f}_k = w_1\left(\frac{k}{N}T\right) f_k \tag{2-6}$$

という乗算をするだけでよい。

トランスバーサルフィルタに窓関数を用いる時に、サイドローブの大きい窓では特性にリプルがでるし、帯域幅の広い窓では特性がなまって過渡帯域幅が広がる。窓関数の帯域幅を狭くすることと、サイドローブを小さくすることは相反する条件であるが、ある評価を定めれば最適な関数形が決定される。$W(\omega)$の与えられたピークリプルに対して帯域幅が最小になるという意味で最適な窓としてDolph-Chebyshev窓[3]があり、又、ある帯域内に入るエネルギーの割合が最大になるという意味で最適な窓として、長球波動関数[4]がある。

Kaiserは長球波動関数を良く近似し、しかも計算が比較的容易な関数として次式で定義されるI$_0$-sinh窓を提案している。[2]

$$w(t) = \begin{cases} \dfrac{I_0\left[\alpha\sqrt{1-(t/T)^2}\right]}{I_0[\alpha]} & |t|<T \\ 0 & |t|>T \end{cases} \tag{2-7}$$

但し、$I_0(x)$は零次の第1種変形Bessel関数である。Kaiser窓はαの値によって特性が変化し、柔軟性に富んでいる。$\alpha=0$の時には式(2-7)より四角窓となり、そのまま打ち切ったことになる。

§2.2.3 Johnsonの方法[1]

次式の伝達関数を考える。

$$H(z) = K\frac{A(z)}{B(z)} = K\frac{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} b_k z^{-k}} = K\frac{\prod_{i=1}^{N}(1-z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N}(1-p_i z^{-1})} \tag{2-8}$$

簡単のため$K=1$とし、自然対数をとると次式を得る。

$$\ln H(z) = \ln A(z) - \ln B(z) = \sum_{i=1}^{N} \ln(1-z_i z^{-1}) - \sum_{i=1}^{N} \ln(1-p_i z^{-1}) \tag{2-9}$$

これを $z^{-1}=0$ のまわりでテーラ級数に展開して

$$\ln H(z)=\sum_{k=1}^{\infty} h_k z^{-k} \tag{2-10}$$

とすれば、展開係数 h_k は、$\ln A(z)$ による項 f_k と $\ln B(z)$ による項 g_k との差で表わされる。即ち、

$$h_k=f_k-g_k \tag{2-11}$$

である。テーラ級数の定義により f_k, g_k は次式で与えられる。

$$f_k=-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{N} z_i^{\,k} \tag{2-12a}$$

$$g_k=-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{N} p_i^{\,k} \tag{2-12b}$$

これより、式(2-10)の級数が収束するための必要十分条件は、$|z_i|<1$ 且つ $|p_i|<1$ $(i=1,\cdots,N)$ で、この時収束領式は $|z|\geq 1$ である。

周波数応答を求めるために $z=e^{j\beta T}$ と置けば、式(2-10)は

$$\ln H(e^{j\beta T})=\sum_{k=1}^{\infty} h_k \cos k\beta T - j\sum_{k=1}^{\infty} h_k \sin k\beta T \tag{2-13}$$

となる。一方、次式の関係が成り立っている。

$$\ln H(e^{j\beta T})=\ln|H(e^{j\beta T})|+j\arg H(e^{j\beta T}) \tag{2-14}$$

式(2-13)と(2-14)を比較してみると、希望する振幅特性を式(2-13)右辺第1項のようにフーリエ級数展開して、伝達関数が求められることがわかる。この場合、フーリエ係数 h_k を分子の項 f_k と分母の項 g_k とに分配する方法が問題であるが、$g_k=0$ の非再帰形と $f_k=0$ の純再帰形には直接適用できる。伝達関数の係数との関係式は次式で与えられる。

$$k a_k=\sum_{i=0}^{k-1}(k-i) f_{k-i}\, a_i \qquad \text{但し } a_0=1 \tag{2-15a}$$

$$k b_k=\sum_{i=0}^{k-1}(k-i) g_{k-i}\, b_i \qquad \text{但し } b_0=1 \tag{2-15b}$$

純再帰形フィルタでは、テーラ係数がフーリエ係数と互対符号であるから、ある特性を純再帰形フィルタで近似することは、その特性を対数目盛(dB単位)で書いたものを上下逆にして非再帰形フィルタで近似することと、安定性等の問題を除いて等価である。例えば、LPFを純再帰形で作るときには、同じ遮断周波数のHPFを近似する非再帰形フィルタの伝達関数を求め、その逆数をとれば求める純再帰形フィルタの伝達関数となる。純再帰形フィルタは非再帰形フィルタに比べて、一般に遮断周波数付近の切れが鋭いが、全体の次数はそれ程改善されない。このため、極と零点の両方をもつ一般の再帰形フィルタが望まれる。

対数振幅特性の近似方法としては、Maenhout等[5]も提案しているが、これもJohnsonの方法と全く等価であることが容易に示される。

§2.3 直接近似法の改良

Johnsonの直接近似法は、対数利得を近似できることや、再帰形フィルタに適用できること等の利点をもっているが、近似誤差が比較的大きく、又、再帰形も純再帰形に限られており、そのまま使用するには問題がある。そこで、この近似法に改良を加える。そのためにまず、近似誤差の解析を行なう。

§2.3.1 近似誤差の解析

Johnsonの方法における近似誤差の要因は、近似過程で2回必要な級数展開を有限項までで打ち切ることである。まずフーリエ級数の打ち切りは、トランスバーサルフィルタの場合と同様、この種の近似法では避けられないものである。この誤差の影響を軽減するのが、§2.2.2で述べた窓関数の使用である。

フーリエ級数の打ち切りに窓関数を使用しても、その後でテーラ級数を打ち切るため、この誤差が混入する。このテーラ級数打ち切りによる誤差について考えてみよう。近似誤差が比較的小さい時、誤差はリプル状に現われるため、その微分をとっても同じオーダの値となる。誤差の微分を$E(e^{j\theta})$と置けば、非

再帰形フィルタの時、

$$E(e^{j\beta T}) = \sum_{k=1}^{N} k f_k e^{-jk\beta T} - \frac{\sum_{k=1}^{N} k a_k e^{-jk\beta T}}{\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-jk\beta T}}$$

$$= e^{-jN\beta T} \frac{(f_1 a_N + 2f_2 a_{N-1} + \cdots + N f_N a_1) e^{j\beta T} + (f_2 a_N + \cdots + N f_N a_2) e^{-j2\beta T} + \cdots + N f_N a_N e^{jN\beta T}}{\sum_{k=1}^{N} a_k e^{jk\beta T}} \quad (2\text{-}16)$$

となるから、その絶対値は

$$|E(e^{j\beta T})| = \frac{|(f_1 a_N + 2f_2 a_{N-1} + \cdots + N f_N a_1) e^{j\beta T} + (2f_2 a_N + \cdots + N f_N a_2) e^{j\beta T} + \cdots + N f_N a_N e^{jN\beta T}|}{|\sum_{k=1}^{N} a_k e^{jk\beta T}|} \quad (2\text{-}17)$$

で与えられ、次の不等式が得られる。

$$|E(e^{j\beta T})| \leq \frac{|f_1 a_N + 2f_2 a_{N-1} + \cdots + N f_N a_1| + |2f_2 a_N + \cdots + N f_N a_2| + \cdots + |N f_N a_N|}{|H(e^{j\beta T})|} \quad (2\text{-}18a)$$

同様にして、純再帰形フィルタでは、

$$|E(e^{j\beta T})| \leq \frac{|g_1 b_N + 2g_2 b_{N-1} + \cdots + N g_N b_1| + |2g_2 b_N + \cdots + N g_N b_2| + \cdots + |N g_N b_N|}{1/|H(e^{j\beta T})|} \quad (2\text{-}18b)$$

となる。式(2-18)は誤差の包絡線の限界を与えるもので、分母が小さくなるとその為に近似誤差が大きくなることを示している。式(2-18a)の分母はフィルタの振幅特性であり、式(2-18b)では振幅特性の逆数であるから、非再帰形では減衰域で、純再帰形では通過域でそれぞれ誤差が大きい。このことは、後で述べる近似結果と良く合っている。非再帰形フィルタと純再帰形フィルタの伝達関数は互に逆数の関係であるから、両者で減衰域と通過域の性質が逆転するのも当然のことである。以上のことより、この近似方法を純再帰形に直接適用することは、近似誤差の点から問題があり、注意が必要である。

§2.3.2 窓関数による修正

前節で述べた近似誤差によるリプルを軽減することについて考える。この場合にも、窓関数の理論が適用でき、良い結果が得られる。

前述のように、純再帰形フィルタを近似するときには、希望する対数利得を上下逆にして非再帰形フィルタで近似し、得られた伝達関数の逆数をとれば良いから、ここでは非再帰形フィルタについてのみ考える。

非再帰形フィルタの伝達関数の係数はインパルス応答列であり、式(2-15)で与えられる無限系列を有限項までで打ち切ることは、1種の時間制限と考えられるから、打ち切りによる周波数領域での特性の乱れの影響を小さくするためには適当な窓関数を用いるべきである。又、次のように考えることもできる。即ち、式(2-10)のテーラ展開は、$z=e^{j\beta T}$と置けば、フーリエ級数展開と考えることができ、その打ち切りはトランスベーサルフィルタの場合と同様である。この場合にもKaiserのI₀-sinh窓が有効で、リプルが軽減される。その代償として過渡帯域幅が広がる。式(2-15)で与えられた係数を、窓関数$w_2(n)$を用いて次のように修正する。

$$\hat{a}_k = a_k w_2\left(\frac{k}{N}\tau\right) \qquad (2\text{-}19a)$$

$$\hat{b}_k = b_k w_2\left(\frac{k}{N}\tau\right) \qquad (2\text{-}19b)$$

これが求めるディジタルフィルタの伝達関数の係数である。

§2.3.3 一般の再帰形フィルタ

低い次数で急峻な特性を得るには、極と零点の両方をもつ一般の再帰形フィルタが必要である。分母子共にN次の再帰形フィルタは、N個の遅延素子により実現することができ、最も経済的である。

級数展開を用いて再帰形フィルタを設計するには、Maenhout等[15]が提案しているように非再帰形フィルタから再近似する方法や、これと同様に純再帰形フィルタから再近似する方法が考えられるが、どちらも安定性や近似誤差の点で

問題が多い。

Johnsonの方法で一般の非再帰フィルタを近似する場合に問題となることは、希望特性のフーリエ係数h_kを分子の項f_kと分母の項g_kとに分配する方法である。フーリエ係数h_kが定まっても、$h_k = f_k - g_k$を満足するf_kとg_kの組み合わせは無数にあり、最適な分配方法というものは一般には決まらない。最も単純でしかも多くの場合妥当であると思われる方法は、h_kを2等分してf_kとg_kとに割り当てることである。これは必要な減衰量を2等分して、それぞれを非再帰形と純再帰形で近似し、組み合わせることに相当する。f_kとg_kとが決定すれば、式(2-13)により伝達関数の係数a_iとb_iとが共に定まる。

§2.3.4 安定性

再帰形ディジタルフィルタが安定であるための必要十分条件は、すべての極が単位円内にあること、即ち$|p_i| < 1$である。従って、式(2-10)の級数、あるいはこれと等価なフーリエ級数の収束が問題となる。ところで、フーリエ級数は、ある特性が不連続関数でない限り必ず収束することがわかっているので、ほとんどのフィルタに用いる特性では、次数を無限大にすれば安定である。実際には級数を有限項で打ち切ることが必要であるから、それまでの範囲で収束することがわかる程度に次数を大きくすれば安定である。更に、窓関数によって級数の収束を強制的に速めれば安定性はより確実になる。多くのフィルタを実際に近似した結果も、ほとんどの場合にそれ程高くない次数で安定なフィルタが得られる。

§2.4 近似例

Johnsonの方法で、まず6次バタワース特性を純再帰形で近似してみると、図2-1でわかる通り、元関数と同じ6次で良い近似が得られ、有効性が確認できる。この様に元関数が比較的なめらかな形であれば良いが、一般には理想的な階段状の特性を近似する要求がある。そこで次に階段状に変化するLPFを非再帰形と純再帰形で近似した例を図2-2, 2-3に示す。§2.3.1の解析のとおり、非再帰形では減衰域に、純再帰形では通過域に大きなリプルがでる。

次に、窓による特性改善の効果をみてみよう。図2-2, 2-3のフィルタのフーリエ級数の打ち切りにのみKaiser窓($\alpha_1=6.0$)を使用すると、図2-4, 2-5のようになって、テーラ級数の打ち切りが後続するためにリプルの大きさはそれ程改善されない。フーリエ級数はそのまま打ち切り、テーラ級数のみをKaiser窓($\alpha_2=3.5$)で打ち切ると図2-6, 2-7となり、かなり改善される。これらを併用して2回の窓($\alpha_1=6.0, \alpha_2=3.5$)を用いると図2-8, 9のように著しく改善される。これらを組み合わせて、分母子双方をもつ再帰形とすれば、図2-10のように非常にきれいな特性が得られる。

近似に必要な情報は、2回使用するKaiser窓の変数α_1, α_2と次数N, 及びその時の過渡帯域幅$\Delta\beta$で、これらは次式によって選ぶと良い。

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 \geq 4.0 \\ &\alpha_2/\alpha_1 = 32/ATT \\ &N = \frac{1.5\sqrt{\alpha_2}}{\Delta\beta}\frac{\pi}{T} \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}20)$$

但し、ATTは必要減衰量(dB)である。式(2-20)は多くのフィルタの近似から経験的に得られたもので、大体の目安を与える式である。

同様にして再帰形でHPF, BPF及び複数帯域のBPFを近次した特性を図2-11～13に示す。

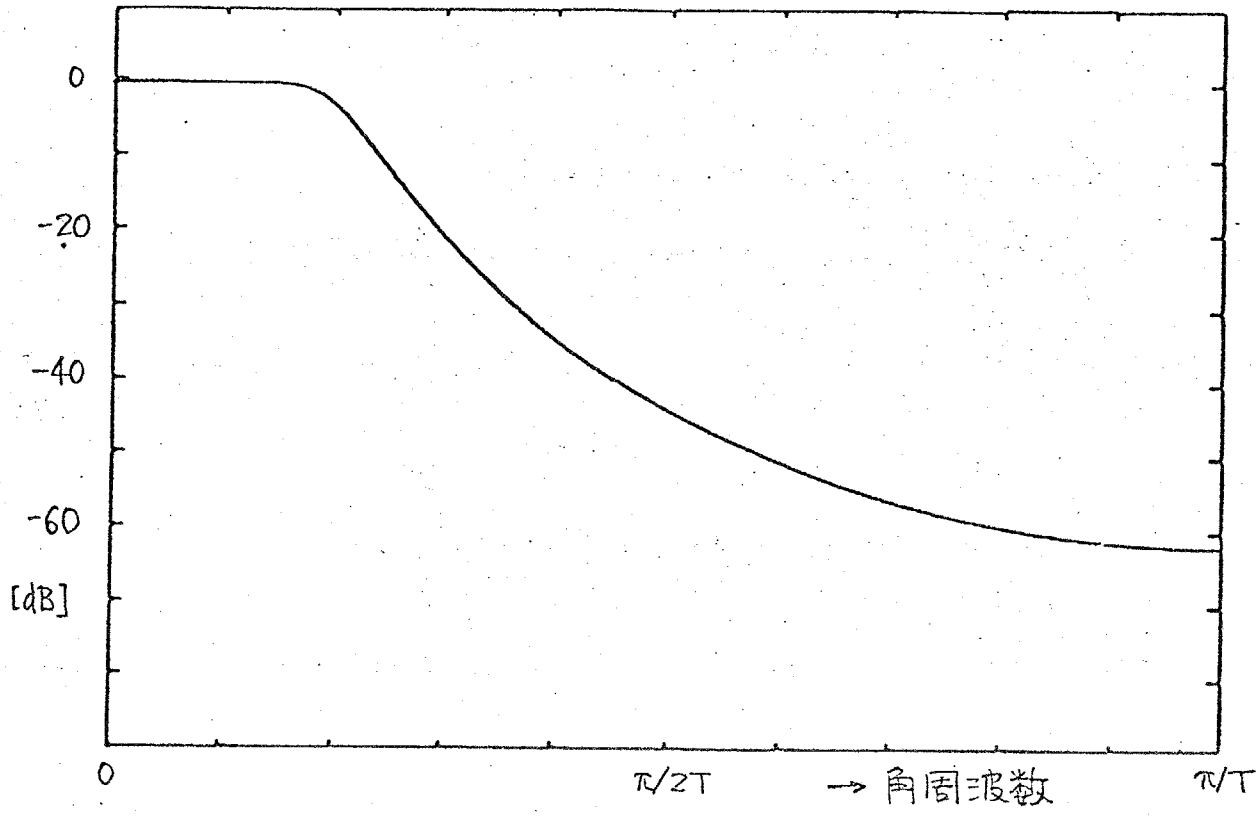


図2-1(a) 元特性 6次sin形バタワース特性

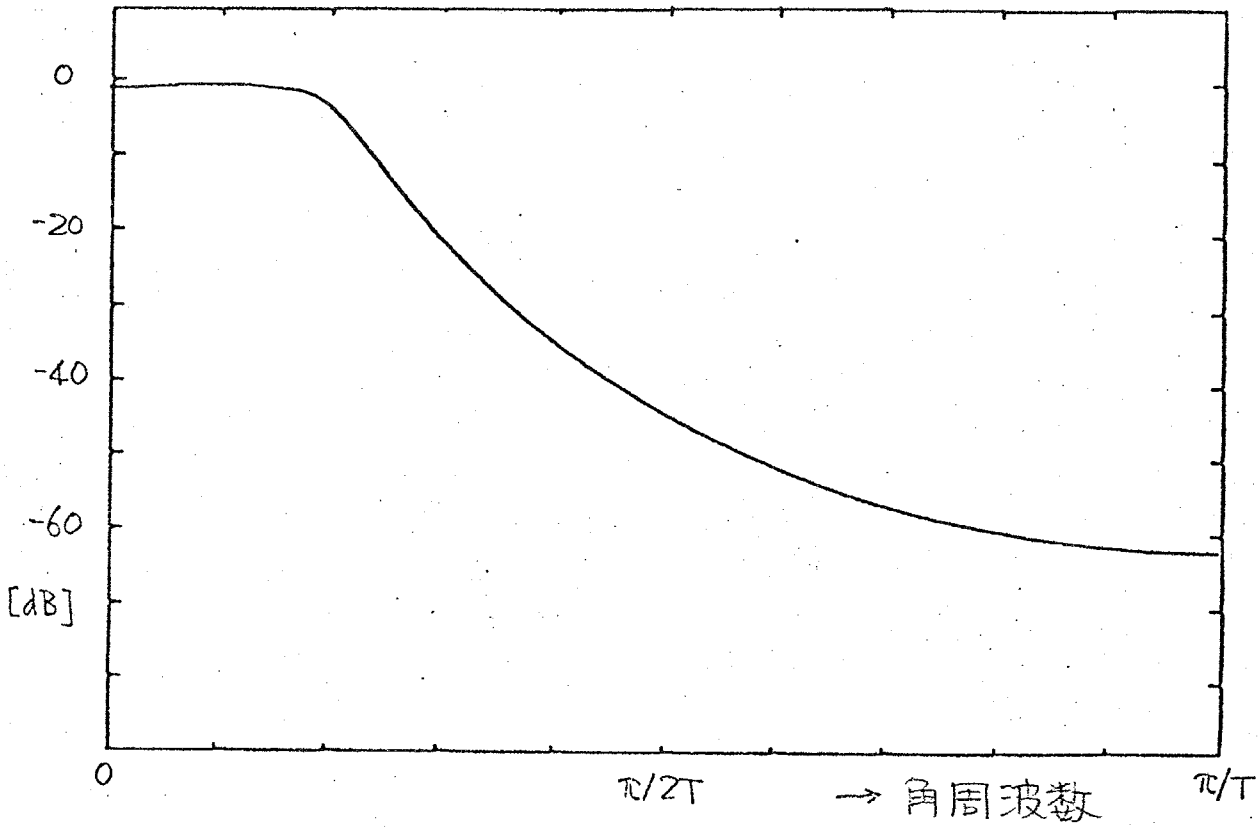


図2-1(b) 6次純再帰形による(a)の近似

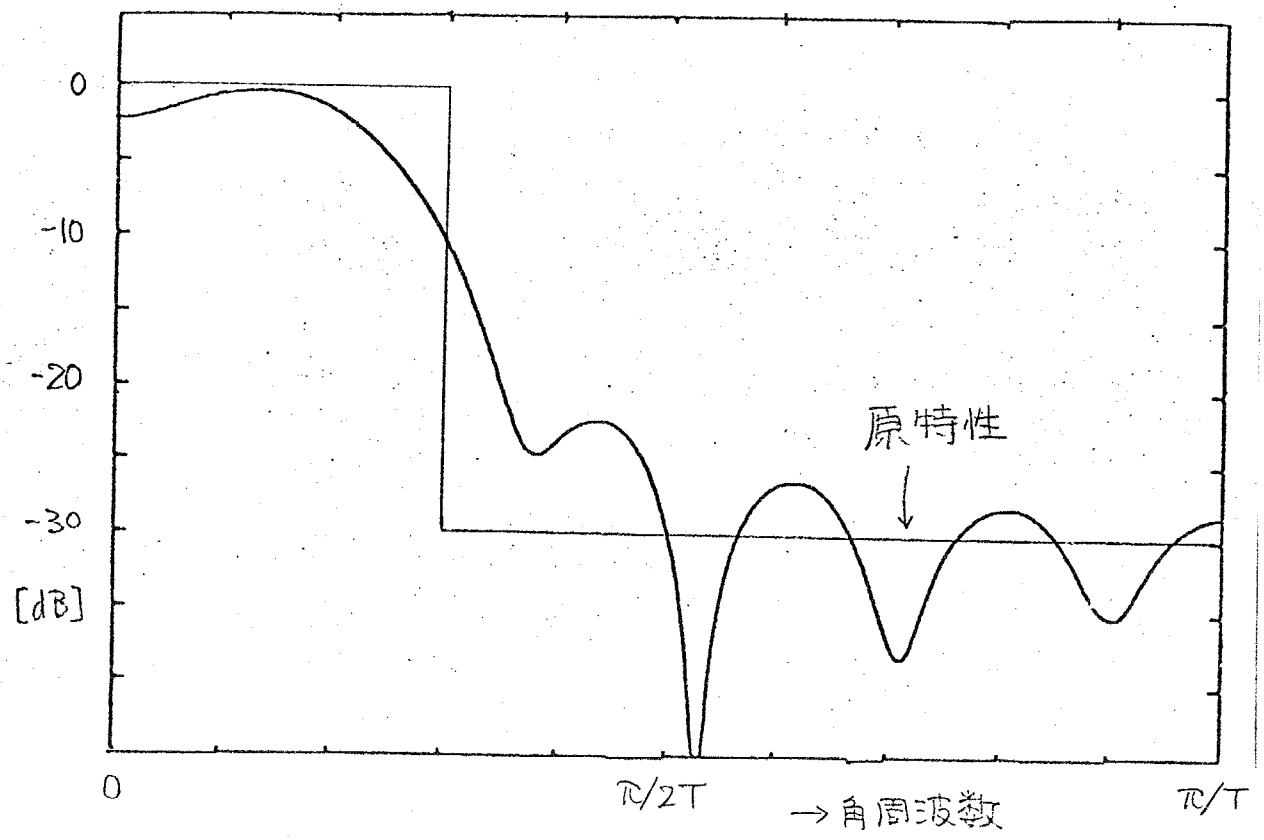


図2-2　　10次 非再帰形

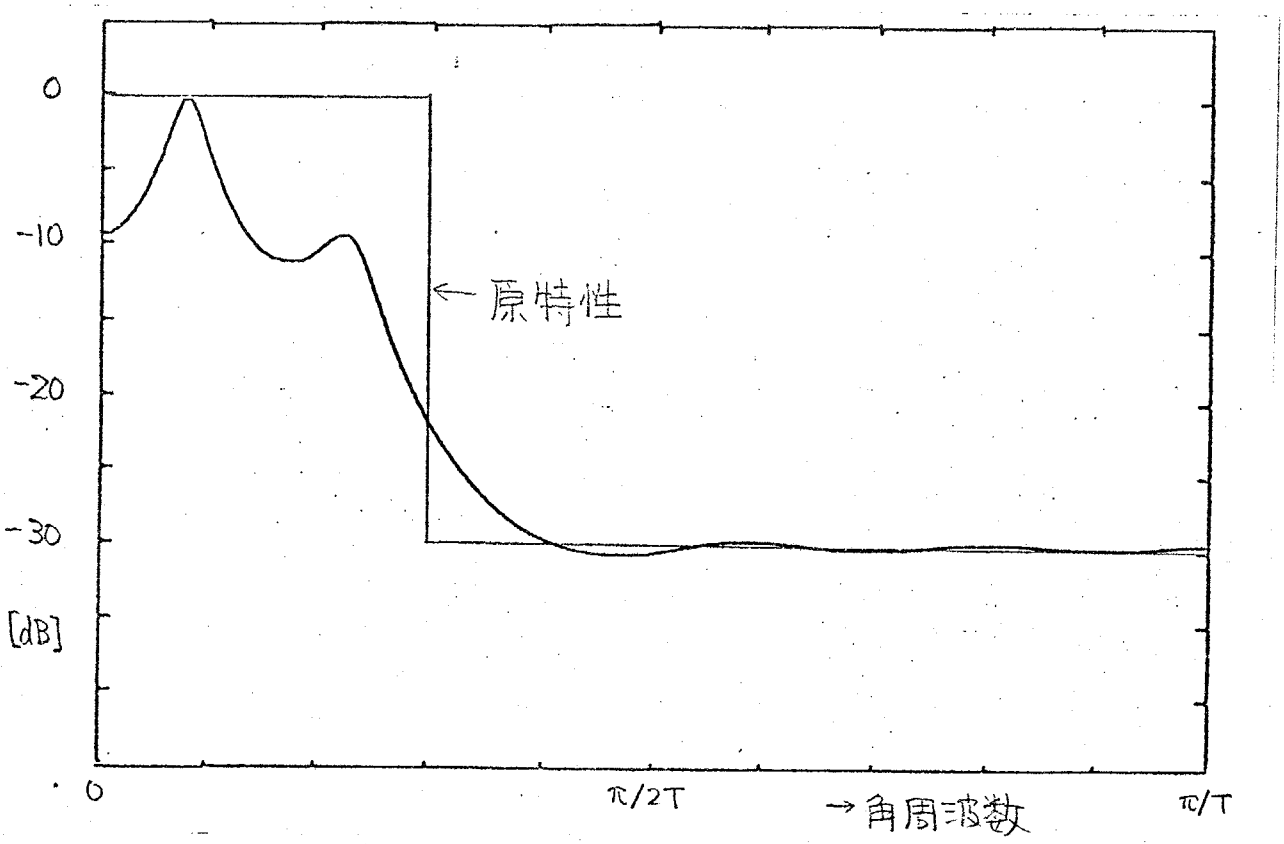


図2-3　　10次 純再帰形

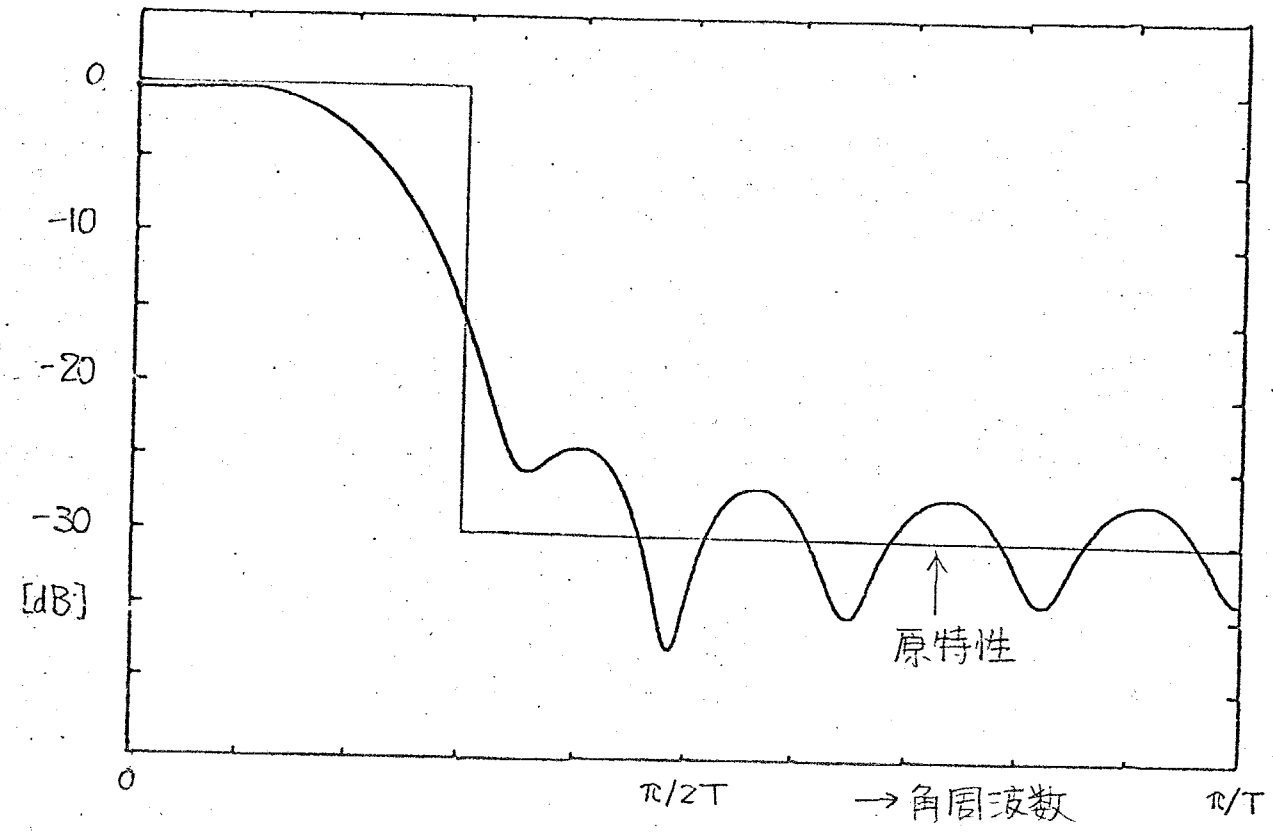


図2-4　10次非再帰形　窓($\alpha_1=6, \alpha_2=0$)あり

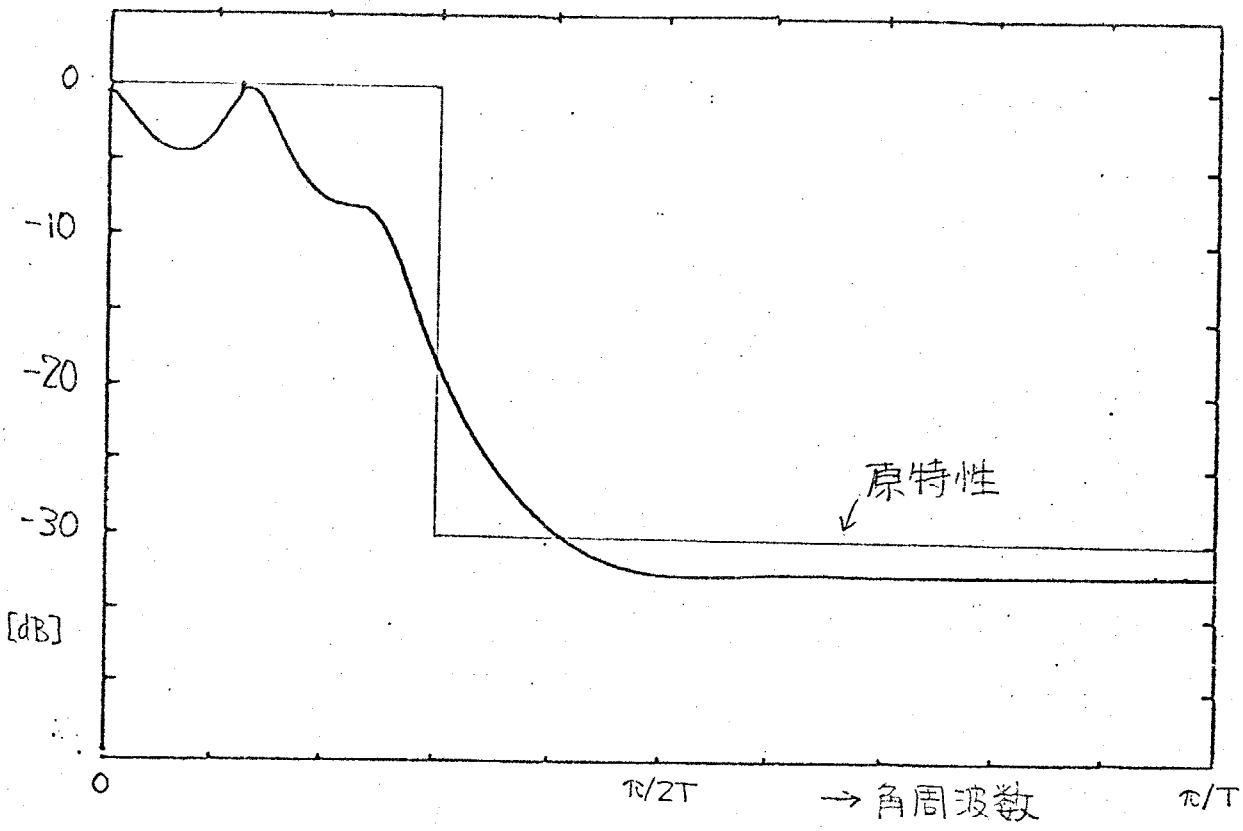


図2-5　10次純再帰形　窓($\alpha_1=6, \alpha_2=0$)あり

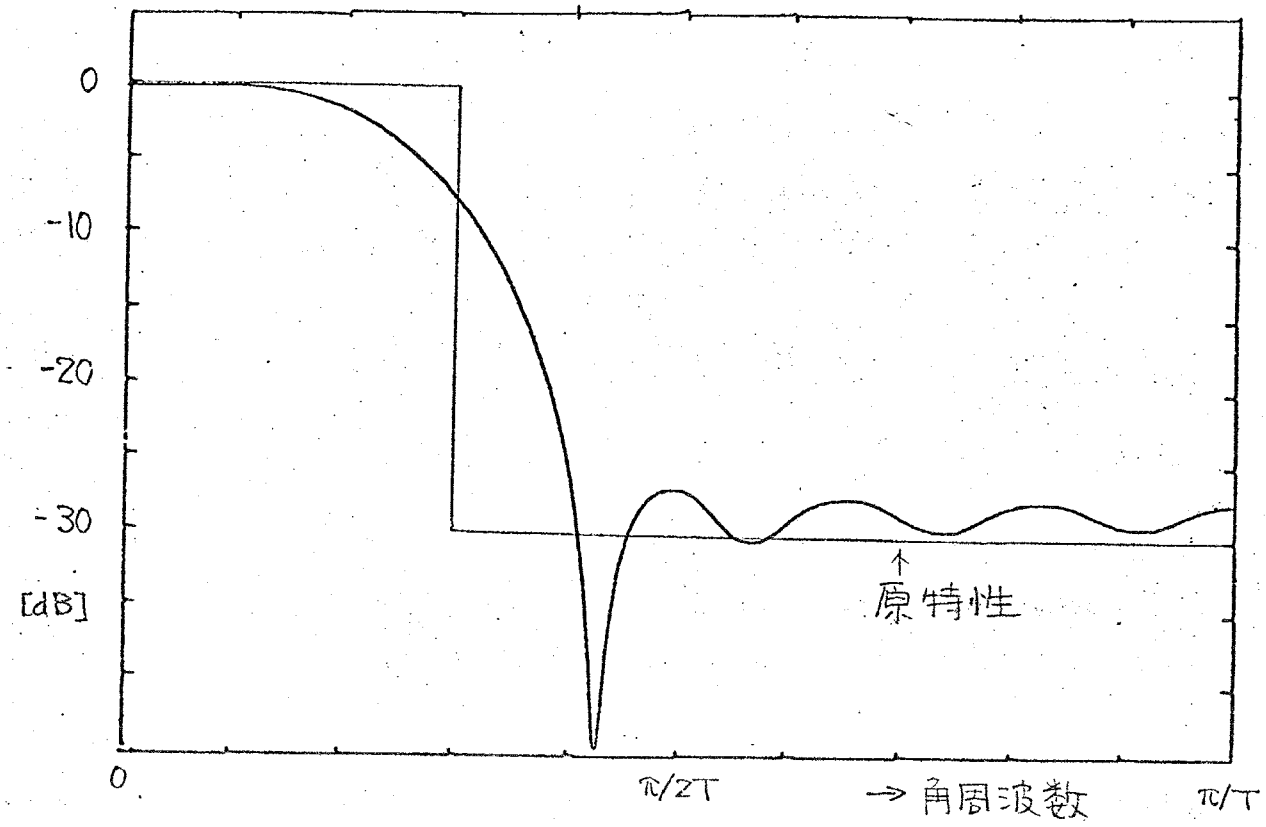


図2-6　10次非再帰形　窓 ($\alpha_1=0$, $\alpha_2=3.5$)

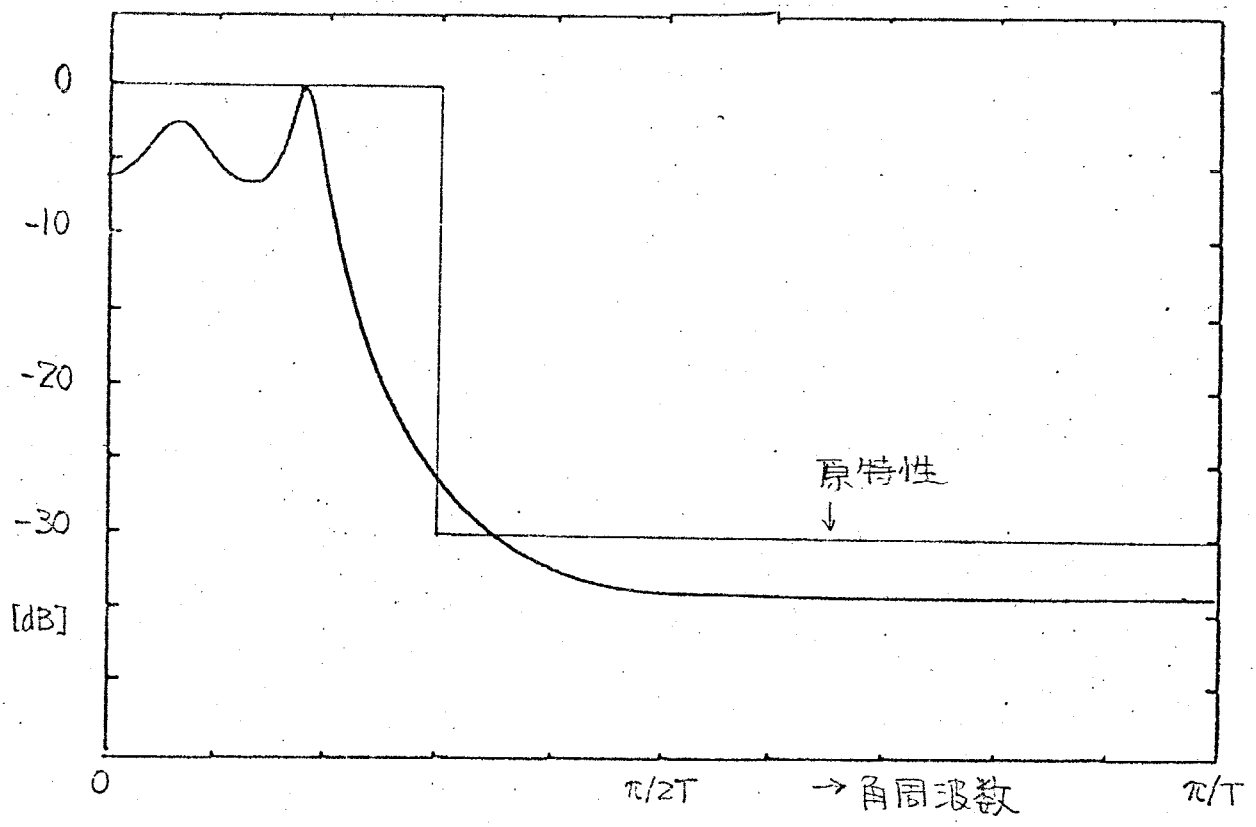


図2-7　10次純再帰形　窓 ($\alpha_1=0$, $\alpha_2=3.5$)

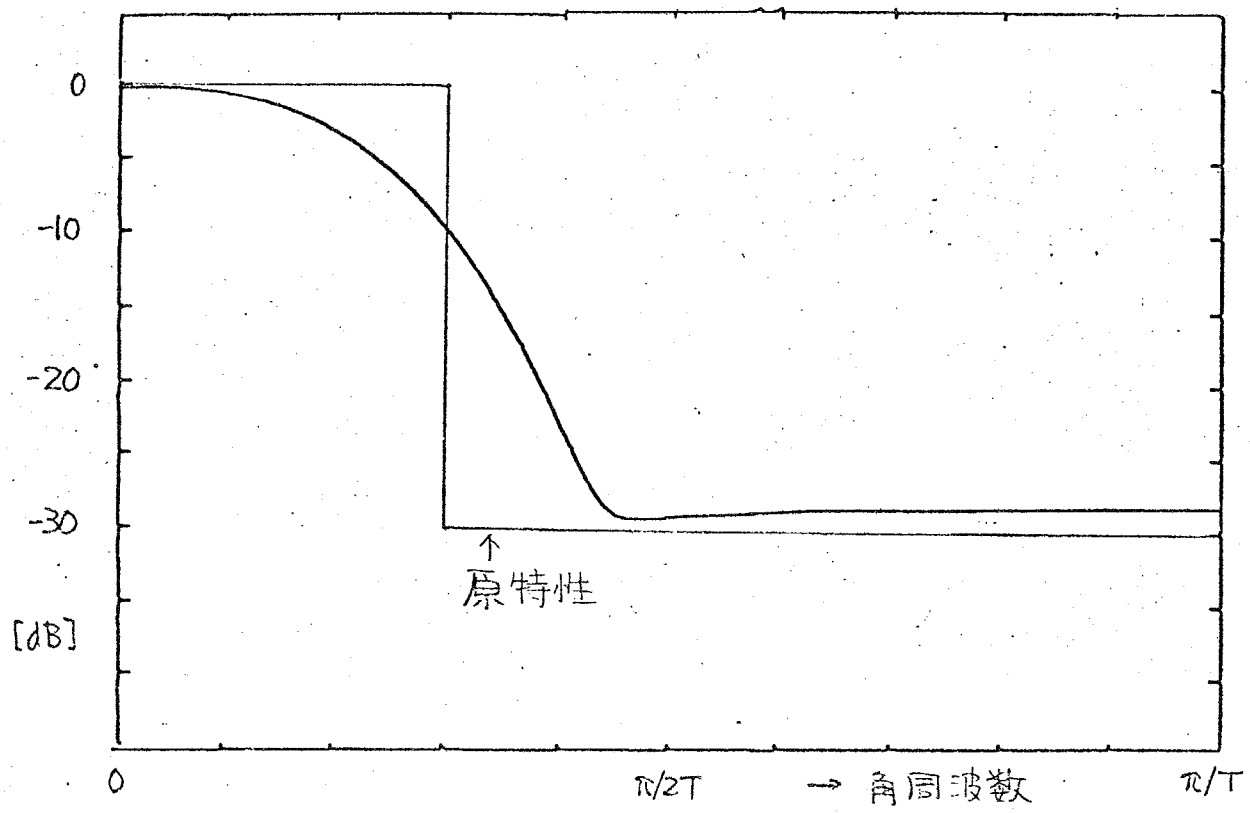


図2-8　10次非再帰形 窓($\alpha_1=6$, $\alpha_2=3.5$)

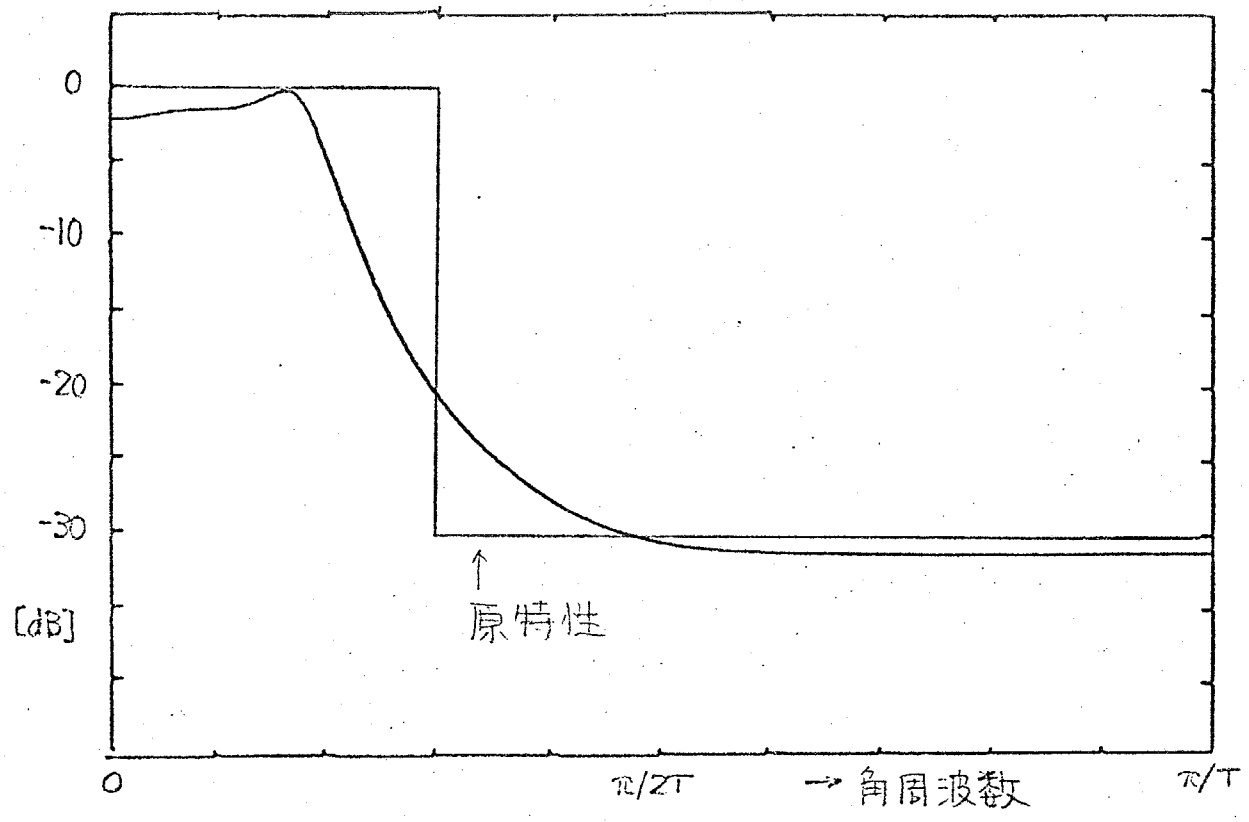


図2-9　10次 純再帰形　窓($\alpha_1=6$, $\alpha_2=3.5$)

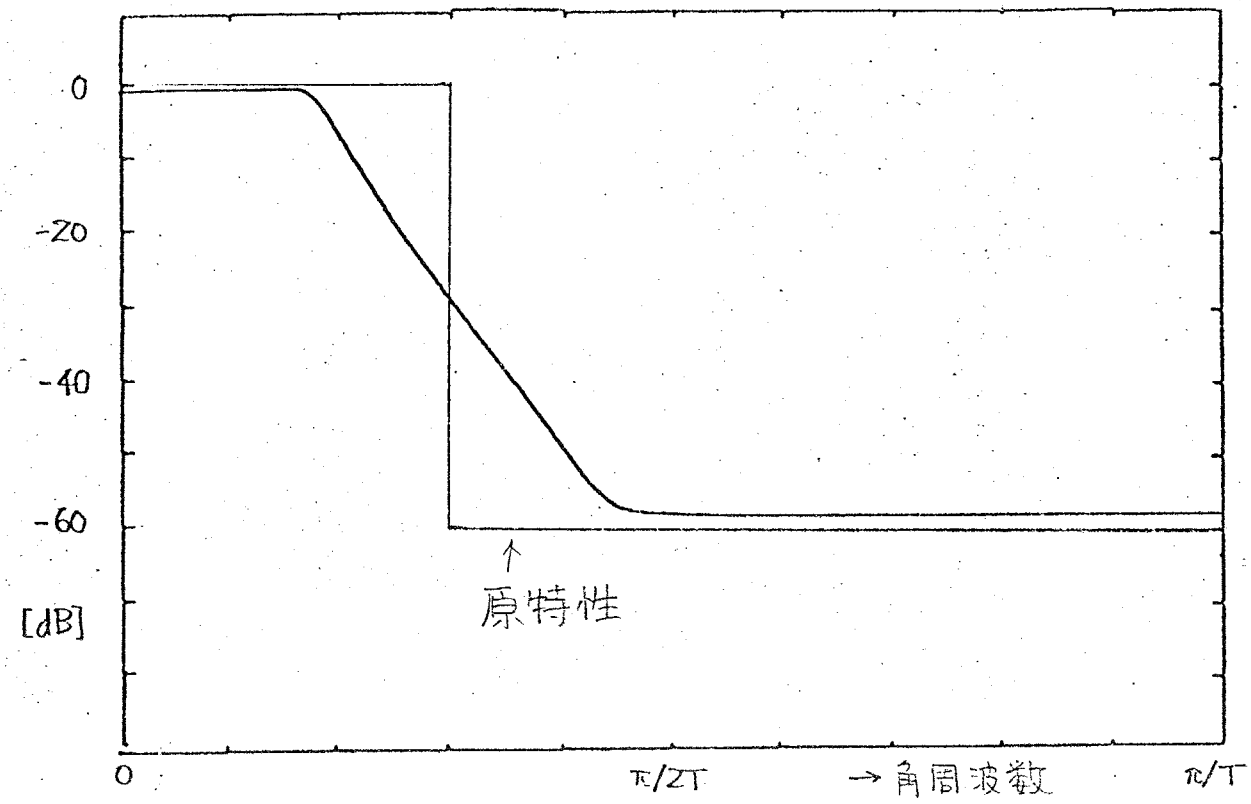


図2-10　10次再帰形LPF　窓 $\alpha_1=6, \alpha_2=3.5$

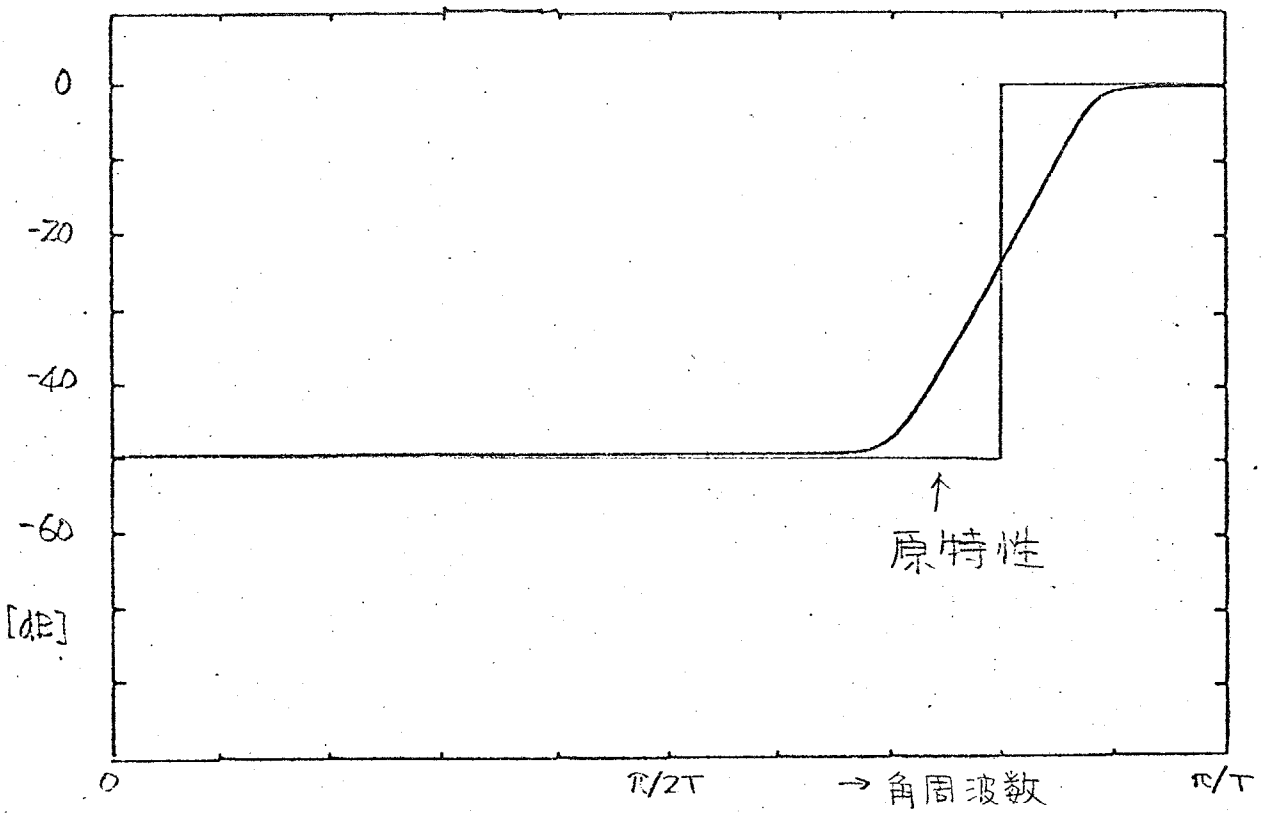


図2-11　15次再帰形HPF　窓 $\alpha_1=6, \alpha_2=4$

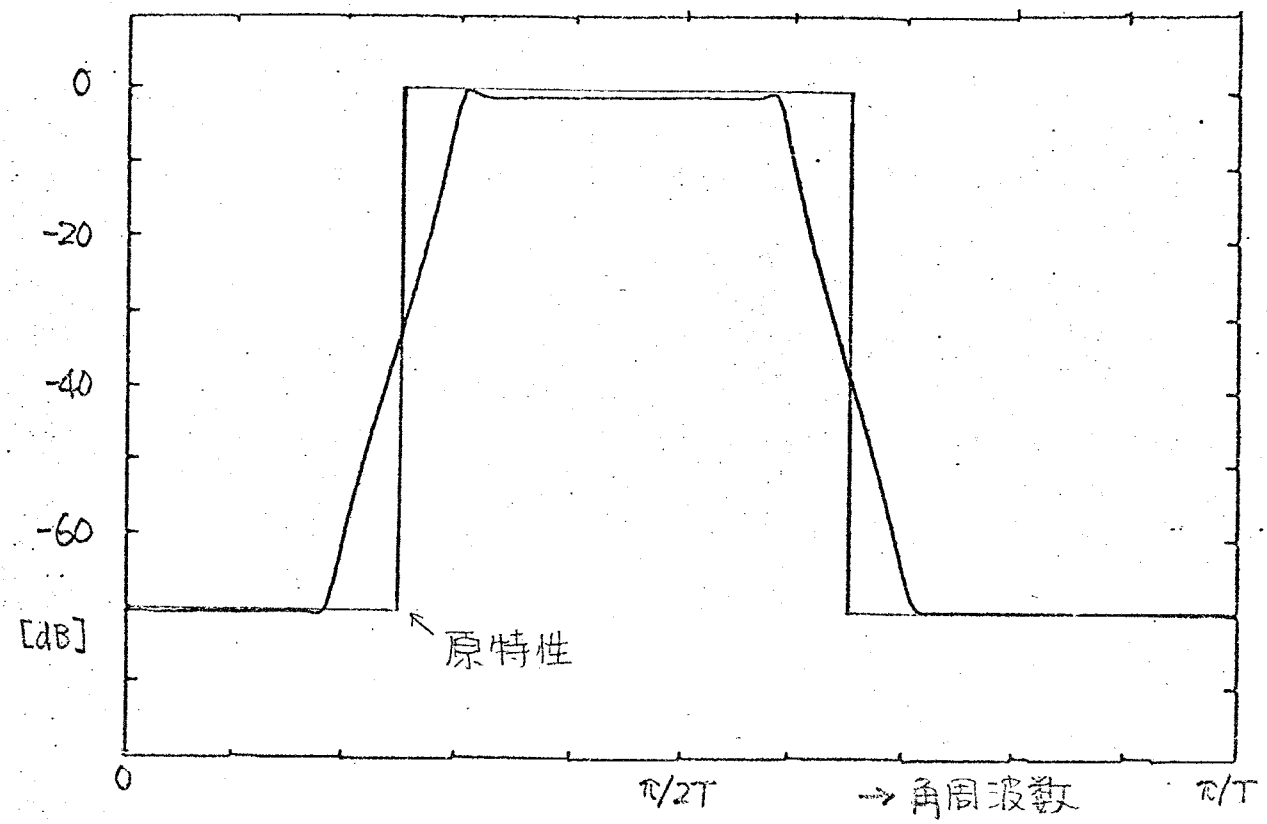


図2-12　25次再帰形BPF　窓 $\alpha_1=8, \alpha_2=4$

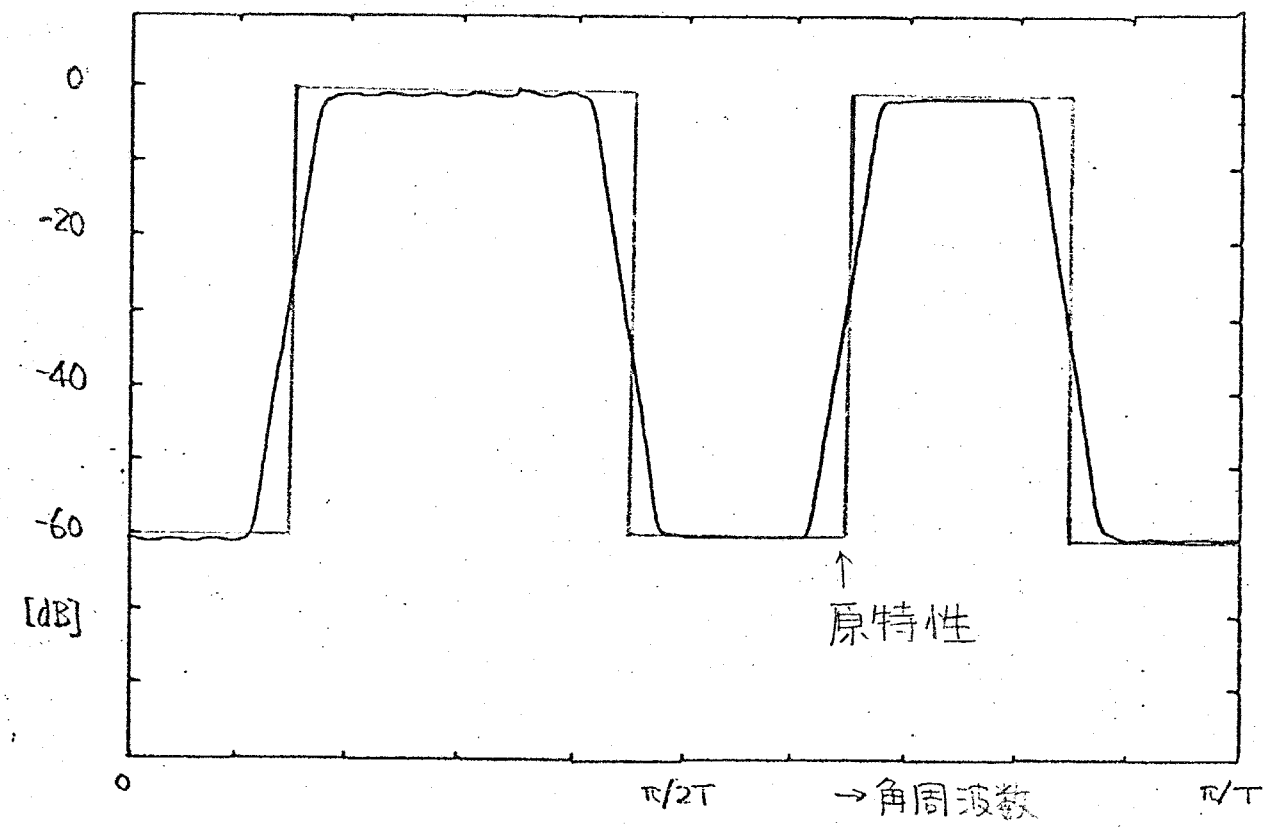


図2-13　44次再帰形複数帯域BPF　窓 $\alpha_1=6, \alpha_2=3.5$

§2.5 むすび

ディジタルフィルタの周波数特性の近似方法のうちで、近似手順が簡便な級数展開による直接近似法に注目して考察を行なった。Johnsonの方法における級数打ち切りによる誤差を解析し、非再帰形では減衰域に、純再帰形では通過域にそれぞれ誤差による大きなリプルが生ずることを導いた。このリプルは、適当な窓関数を使用すれば軽減されることを示した。この場合、窓関数の使用によって安定性はより確実になる。近似に必要な窓関数の変数等をフィルタの仕様から決定する式も与えた。窓を用いる直接近似法は設計手順が非常に簡単で、一応実用になる特性を得られるが、問題点として、安定性を完全には保証していないことと、特性の評価方法があいまいであることなどがある。

第3章 振幅、遅延同時平坦近似

§3.1 まえがき

波形をあまり乱さずに周波数帯域を制限するフィルタがしばしば必要になる。この場合、フィルタの振幅特性ばかりでなく、通過域内での遅延特性の平坦性が非常に重要である。遅延特性が最大平坦であるディジタルフィルタはThiran[6]が発表しているが、アナログフィルタにおけるベッセルフィルタと同様に、振幅特性の急峻な遮断は得られない。波形の歪を少なく伝達するためのフィルタとしては、従来、位相直線の非再帰形フィルタを用いたり、フィルタに遅延等化器を縦続に接続する方法等が用いられていた。これに対し、振幅特性と遅延特性が同時に平坦な再帰形フィルタを設計する方が、素子数や経済性の点で有利であると考えられる。このような観点から、理想低域フィルタを最大平坦近似するディジタルフィルタについてRhodes[7]と佐藤[8]が研究している。これらは、振幅と遅延の平坦次数が同程度の場合のみを取り扱っており、解析的に解いている。

本章では、振幅と遅延の平坦次数が任意に与えられた時の同時平坦近似を行なう。この場合、伝達関数の係数を求めるのではなく、極と零点の位置に関する条件式を求めている。この式は、計算機を使用すれば容易に解ける。

§3.2 極、零点と周波数特性

前章と同様に、ディジタルフィルタの伝達関数を極と零点とで表わす。

$$H(z)=K\frac{\prod_{i=1}^{M}(1-z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N}(1-p_i z^{-1})} \qquad (3\text{-}1)$$

簡単のため$K=1$としても一般性を失なわない。振幅、遅延同時平坦特性は、

最小位相推移関数では実現できないため、式(3-1)で、零点 z_i の位置としては $|z_i|>1$ $(i=1,\cdots,M)$ とする。一方、フィルタの安定性を保証するため、極 p_i の位置は、$|p_i|<1$ $(i=1,\cdots,N)$ でなければならない。

式(3-1)の自然対数をとると、

$$\ln H(z)=\sum_{i=1}^{M}\ln(1-z_i z^{-1})-\sum_{i=1}^{N}\ln(1-p_i z^{-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{M}\ln(z-z_i)-M\ln z-\sum_{i=1}^{N}\ln(1-p_i z^{-1}) \qquad (3-2)$$

を得る。ここで $\ln(z-z_i)$ は $z=0$ のまわりで、又、$\ln(1-p_i z^{-1})$ は $z^{-1}=0$ のまわりでそれぞれテーラ展開できる。即ち、

$$\ln H(z)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=0}^{\infty}f_{ik}z^{k}-M\ln z-\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}g_{ik}z^{-k} \qquad (3-3a)$$

但し、

$$\left.\begin{aligned} f_{i0}&=\ln(-z_i)\\ f_{ik}&=-\frac{1}{k}z_i^{-k}\\ g_{ik}&=-\frac{1}{k}p_i^{k}\end{aligned}\right\} \qquad (3-3b)$$

式(3-3)の級数の収束について調べると、第1項は $|z_i|>1$ のとき $|z|\leqq 1$ で収束し、第3項は $|p_i|<1$ のとき $|z|\geqq 1$ で収束する。結局、式(3-3)全体としては $|z|=1$、即ち単位円上のみで収束する。そこで、$z=e^{j\beta T}$ と置けば周波数特性が次式のように得られる。

$$\ln H(e^{j\beta T})=\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=0}^{\infty}f_{ik}e^{jk\beta T}-jM\beta T-\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}g_{ik}e^{-jk\beta T}$$

$$=\sum_{i=1}^{M}f_{i0}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{M}f_{ik}-\sum_{i=1}^{N}g_{ik}\right)\cos k\beta T$$

$$-j\left\{M\beta T-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{M}f_{ik}+\sum_{i=1}^{N}g_{ik}\right)\sin k\beta T\right. \qquad (3-4)$$

これに式(3-3b)の関係を代入すれば、

$$\ln H(e^{j\beta T}) = \sum_{i=1}^{M} \ln(-z_i) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{N} p_i^k - \sum_{i=1}^{M} z_i^{-k} \right) \cos k\beta T$$

$$- j \left\{ M\beta T + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{N} p_i^k + \sum_{i=1}^{M} z_i^{-k} \right) \sin k\beta T \right\} \quad (3\text{-}5)$$

となる。一方、$H(e^{j\beta T}) = A(\beta T) e^{j\theta(\beta T)}$ と置けば、$\ln H(e^{j\beta T})$ は次のようにも書ける。

$$\ln H(e^{j\beta T}) = A(\beta T) - j\theta(\beta T) \quad (3\text{-}6)$$

式(3-5)と(3-6)を比較すると、振幅特性$A(\beta T)$が、

$$A(\beta T) = \sum_{i=1}^{M} \ln(-z_i) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{N} p_i^k - \sum_{i=1}^{M} z_i^{-k} \right) \cos k\beta T \quad (3\text{-}7a)$$

となり、又、位相特性$\theta(\beta T)$が、

$$\theta(\beta T) = M\beta T + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{N} p_i^k + \sum_{i=1}^{M} z_i^{-k} \right) \sin k\beta T \quad (3\text{-}7b)$$

と書けることが分かる。周波数特性を、極と零点によって表わすことができた。

§3.3 平坦性の条件

通常において、振幅特性や遅延特性が平坦であるということは、それらの特性を$\beta T = 0$のまわりでテーラ展開した時、始めからいくつかのべき乗の係数がすべて零であるということである。振幅特性も遅延特性も周波数の偶関数であるから、そのテーラ展開は偶数べき項のみを含む。$2k$次のべき乗の係数までが零の時、k次の平坦性をもつという。振幅と遅延が平坦であるための条件を求めてみよう。

§3.3.1 振幅平坦特性

式(3-7a)で表わされる振幅特性がk_a次の平坦性をもつための条件を求める。

テーラ展開した時の係数は微分で表わされるから、次式が成り立つ。

$$\frac{d^{2n}}{d(\beta T)^{2n}} A(\beta T)\Big|_{\beta T=0} = 0 \qquad n=1,\cdots,ka \qquad (3\text{-}8)$$

式(3-7a)を代入すると、

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2n-1}\left(\sum_{i=1}^{N} p_i^k - \sum_{i=1}^{M} z_i^{-k}\right)=0 \qquad n=1,\cdots,ka \qquad (3\text{-}9)$$

ここで、極と零点に次のような双一次の変数変換を行なう。

$$x_i = \frac{p_i+1}{p_i-1} \qquad (3\text{-}10a)$$

$$y_i = \frac{z_i+1}{z_i-1} \qquad (3\text{-}10b)$$

この変換によってZ平面がS平面に写像される。従って、極と零点の位置は、$Re[x_i]<0$, $Re[y_i]>0$ が成り立っている。式(3-10)を用いると式(3-9)は次のように書き換えられる。

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2n-1}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i+1}{x_i-1}\right)^k - \sum_{i=1}^{M}\left(\frac{z_i+1}{z_i-1}\right)^{-k}\right\}=0 \qquad n=1,\cdots,ka \qquad (3\text{-}11)$$

いま、$Q_m(x)$を

$$Q_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^m \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^k \qquad (3\text{-}12)$$

で定義すれば、$Q_m(x)$は次のような漸化式で表わされる。

$$Q_m(x) = \frac{1-x^2}{2}\frac{d}{dx}Q_{m-1}(x) \qquad (3\text{-}13)$$

$$Q_0(x) = -\frac{x+1}{2} \qquad (3\text{-}14)$$

これより$Q_m(x)$はxの多項式であることがわかり、次式のようになる。

$$Q_m(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} q_{mj}\, x^{m-2j+1} \qquad (3\text{-}15)$$

係数 g_{mj} は式(3-13)より次のように得られる。

$$Q_m(x)=\frac{1-x^2}{2}\frac{d}{dx}Q_{m-1}(x)$$

$$=\frac{1-x^2}{2}\frac{d}{dx}\sum_{j=0}^{[\frac{m}{2}]}g_{m-1,j}\,x^{m-2j}$$

$$=\frac{1-x^2}{2}\sum_{j=0}^{[\frac{m-1}{2}]}(m-2j)\,g_{m-1,j}\,x^{m-2j-1}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{j=0}^{[\frac{m+1}{2}]}(m-2j+2)\,g_{m-1,j-1}\,x^{m-2j+1}-\sum_{j=0}^{[\frac{m-1}{2}]}(m-2j)\,g_{m-1,j}\,x^{m-2j-1}\right\} \quad (3-16)$$

ここで $g_{m-1,-1}=g_{m-1,[\frac{m+1}{2}]}=0$ とすれば、

$$g_{mj}=\frac{1}{2}\left\{(m-2j+2)\,g_{m-1,j-1}-(m-2j)\,g_{m-1,j}\right\} \quad (3-17)$$

が得られる。式(3-13)(3-14)より $g_{10}=-g_{11}=\frac{1}{4}$ である。ここで、$[x]$ は x を越えない最大整数を表わす。

この $Q_m(x)$ を用いると、式(3-11)は

$$\sum_{i=1}^{N}Q_{2n-1}(x_i)-\sum_{i=1}^{M}Q_{2n-1}(-y_i)=0 \qquad n=1,\cdots,ka \quad (3-18)$$

と書け、更に次のように整理できる。

$$\sum_{j=0}^{n}g_{2n-1,j}\left\{\sum_{i=1}^{N}x_i^{2(n-j)}-\sum_{i=1}^{M}(-y_i)^{2(n-j)}\right\}=0 \qquad n=1,\cdots,ka \quad (3-19)$$

これより次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{N}x_i^{2n}-\sum_{i=1}^{M}y_i^{2n}=N-M \qquad n=1,\cdots,ka \quad (3-20)$$

式(3-20)は数学的帰納法によって次のように示される。

$n=1$ の時は、式(3-13)(3-14)より直ちに次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^{N}x_i^{2}-\sum_{i=1}^{M}y_i^{2m}=N-M \quad (3-21)$$

$n=1,\cdots,k-1$で $\sum_{i=1}^{N} x_i^{2n} - \sum_{i=1}^{M} y_i^{2n} = N-M$ が成り立っているとする。この時 $n=k$ では、式(3-19)は、

$$g_{2k-1,0}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^{2k} - \sum_{i=1}^{M} y_i^{2k}\right) + \sum_{j=1}^{k} g_{2k-1,j}(N-M) = 0 \qquad (3\text{-}22)$$

と書ける。式(3-13)より $\sum_{j=0}^{[\frac{m+1}{2}]} g_{mj} = Q_m(1) = 0$ であるから、

$$\sum_{j=1}^{k} g_{2k-1,j} = -g_{2k-1,0} \qquad (3\text{-}23)$$

となっており、

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^{2k} - \sum_{i=1}^{M} y_i^{2k} = N-M \qquad (3\text{-}24)$$

が得られ、$n=k$ でも成り立つ。

式(3-20)が振幅平坦のための条件である。

次に遮断角周波数の条件を求める。ディジタルフィルタでは、標本化されているため、アナログフィルタのように遮断角周波数で規格化することはできない。

直流利得を A [Neper] とすれば、式(3-7a)より、

$$\sum_{i=1}^{N} \ln(-z_i) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{N} p_i^k - \sum_{i=1}^{M} z_i^{-k}\right) = A \qquad (3\text{-}25a)$$

が成り立ち、遮断角周波数 β_c では

$$\sum_{i=1}^{N} \ln(-z_i) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{N} p_i^k - \sum_{i=1}^{M} z_i^{-k}\right)\cos k\beta_c T = A - \frac{1}{2}\ln 2 \qquad (3\text{-}25b)$$

となる。この2式をまとめて、無限級数の公式

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k = \ln \frac{1}{1-x} \qquad (3\text{-}26a)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k \cos k\theta = \frac{1}{2}\ln(1-2x\cos\theta+x^2) \qquad (3\text{-}26b)$$

を用いて整理し、更に式(3-10)の変数変換をすれば、

$$\sum_{i=1}^{N} \ln \frac{1+x_i^2+(1-x_i^2)\cos\beta_c T}{2} = \sum_{i=1}^{M} \frac{1+y_i^2+(1-y_i^2)\cos\beta_c T}{2} + \ln 2 \tag{3-27}$$

となり、結局

$$\frac{\prod_{i=1}^{N}\{1+x_i^2+(1-x_i^2)\cos\beta_c T\}}{\prod_{i=1}^{M}\{1+y_i^2+(1-y_i^2)\cos\beta_c T\}} = 2^{N+M-1} \tag{3-28}$$

という関係式が得られる。

§3.3.2 遅延平坦特性

位相特性が式(3-7b)で与えられているから、遅延特性$\tau(\beta T)$は、

$$\tau(\beta T) = \frac{d}{d(\beta T)}\theta(\beta T) = M + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{N} p_i^k + \sum_{i=1}^{M} z_i^{-k}\right)\cos k\beta T \tag{3-29}$$

で与えられる。直流で遅延特性が平坦であるための条件は、

$$\frac{d^{2n}}{d(\beta T)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{N} p_i^k + \sum_{i=1}^{M} z_i^{-k}\right)\cos k\beta T\Big|_{\beta T=0} = 0 \qquad n=1,\cdots,kd \tag{3-30}$$

である。振幅特性の場合と同様にして次式のように整理できる。

$$\sum_{i=1}^{N} Q_{2n}(x_i) + \sum_{i=1}^{M} Q_{2n}(-y_i) = 0 \qquad n=1,\cdots,kd \tag{3-31}$$

いま 直流での遅延量をτ_0とすれば、式(3-29)より、

$$\tau_0 = M + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{N} p_i^k + \sum_{i=1}^{M} z_i^{-k}\right) \tag{3-32}$$

である。変数変換をして整理すると次式となる。

$$\sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{M} y_i = 2\tau_0 + N - M \tag{3-33}$$

式(3-33)を用いて、式(3-31)に振幅特性の場合と同様の操作をすると、

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^{2n+1} - \sum_{i=1}^{M} y_i^{2n+1} = 2\tau_0 + N - M \qquad n=1,\cdots,kd \tag{3-34}$$

という関係式が得られる。

§3.4 近似例

前節で、振幅と遅延が平坦なディジタルフィルタの極と零点に関する条件式が得られた。それをまとめると、次式となる。

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} x_i^{2n+1} - \sum_{i=1}^{M} y_i^{2n+1} = 2\tau_0 + N - M \qquad n = 0, 1, \cdots, kd \\
&\sum_{i=1}^{N} x_i^{2n} - \sum_{i=1}^{M} y_i^{2n} = N - M \qquad n = 1, \cdots, ka \\
&\frac{\prod_{i=1}^{N} \{1 + x_i^2 + (1 - x_i^2)\cos\beta_c T\}}{\prod_{i=1}^{M} \{1 + y_i^2 + (1 - y_i^2)\cos\beta_c T\}} = 2^{N-M+1}
\end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}35)$$

但し、 $x_i = \dfrac{P_i + 1}{P_i - 1}$, $y_i = \dfrac{z_i + 1}{z_i - 1}$

振幅特性の平坦次数 ka は $N-1$ 以下、$ka+kd$ は $N+M-1$ 以下である。$ka+kd = N+M-1$ のとき、フィルタの特性は最大平坦であるという。この時、遮断角周波数 β_c と直流遅延 τ_0 を仕様として与えれば、未知数の数と、独立な方程式の数が共に $N+M-1$ で方程式は解ける。しかしながら、これを解析的に解くことは困難であり、計算機を用い修正Newton法で解いている。

$N-M=1$ で、平坦次数が $ka = kd = 1, 3, 5$ の場合について、$\beta_c T = \pi/5$ として式(3-35)を解いて得られたフィルタの振幅特性と遅延特性を図3-1に示す。

平坦次数 ka と kd が $ka = [N+M/2]$, $kd = [N+M-1/2]$ を満足する場合には佐藤・ヤコビフィルタ[8]と一致し、図3-1もこの場合に当たる。

振幅、遅延同時平坦フィルタの特殊な場合として、$M=0$ の全極形で振幅最大平坦 $ka = N-1$ の時、sin形として知られる特性

$$|H_s(e^{j\beta T})|^2 = \frac{1}{1 + \{\sin(\beta T/2)/\sin(\beta_c T/2)\}^2}$$

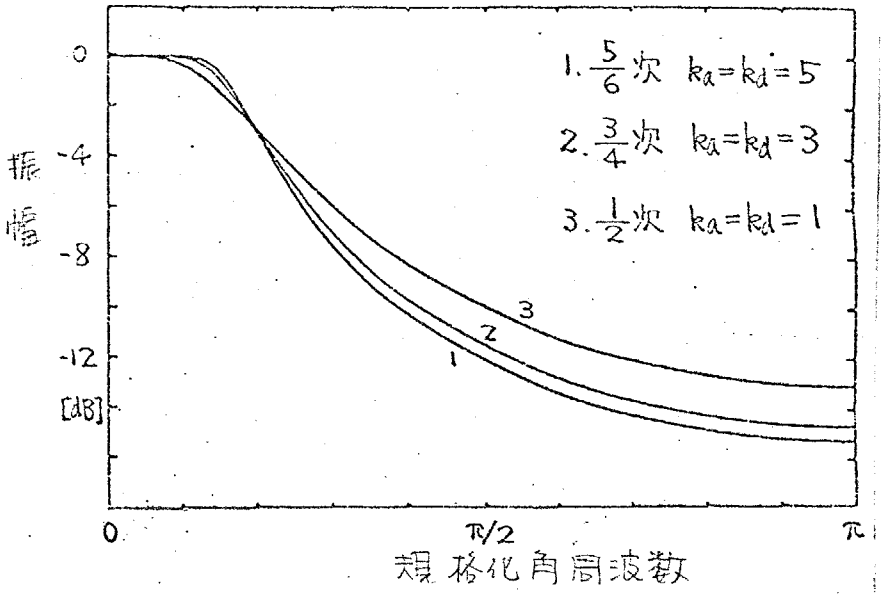


図3-1(a) 振幅遅延同時平坦フィルタの振幅特性

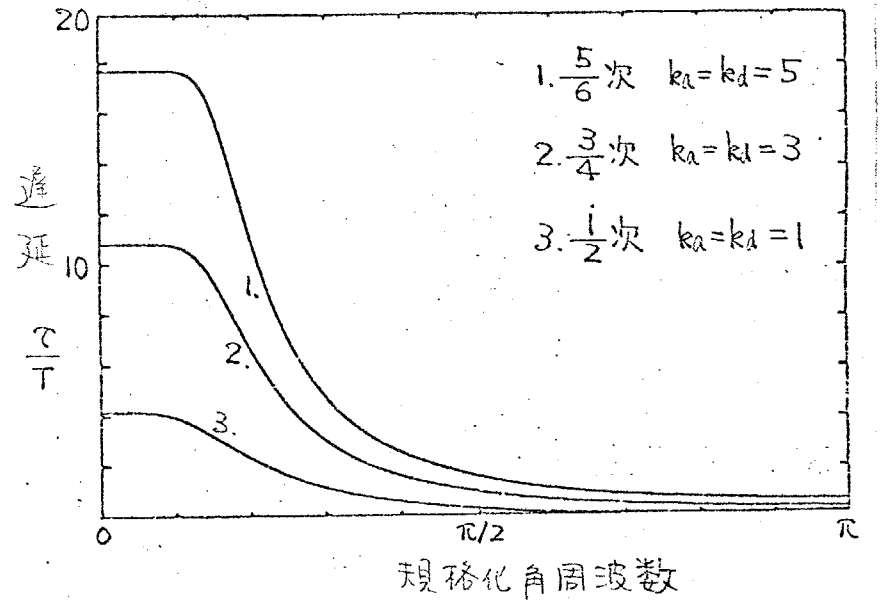


図3-1(b) (a)の遅延特性

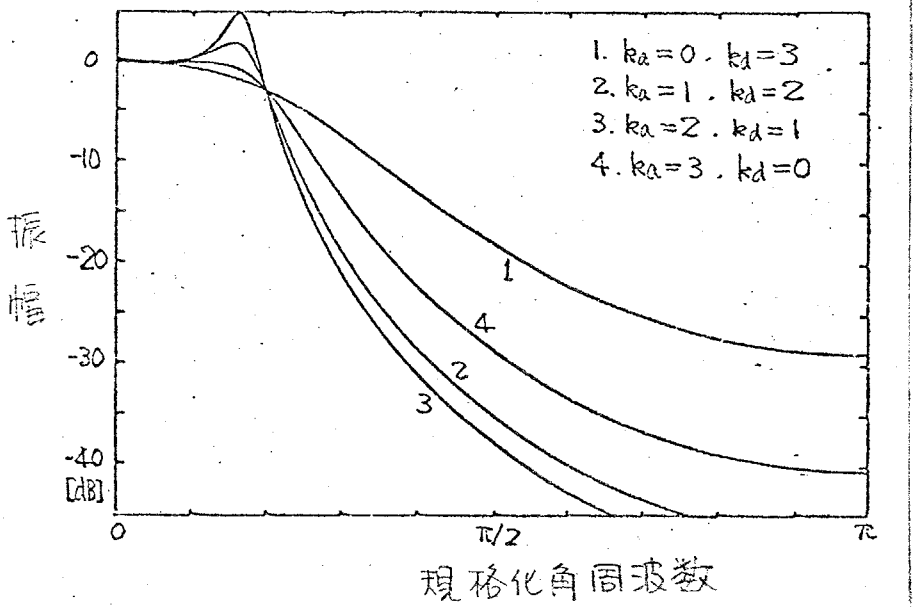


図3-2(a)　4次全極形フィルタの振幅特性

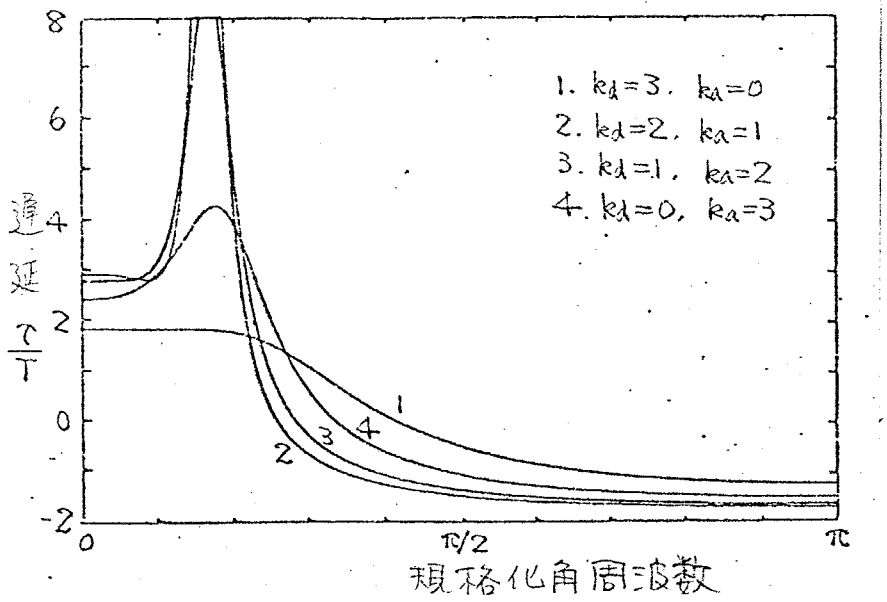


図3-2(b)　(a)の遅延特性

と一致し、又、同様にM=0で遅延最大平坦d=N-1の時、Thiran[4]の与えたものと同じ特性となる。これらと、その中間の特性を図3-2に示す。図3-2のように、分母子の次数差が大きくなると通過域端で特性にピークが出ることがある。

§3.5 むすび

振幅特性と遅延特性が同時に平坦なディジタルフィルタの極と零点の位置を決定する条件式を、双一次変換した平面上で求めた。この方程式はきれいな形をしているが解析的に解くことは困難で、計算機を必要とする。得られるフィルタの特性は理想低域フィルタに近い優れたもので、波形伝送用フィルタとして適している。振幅と遅延の平坦次数が同程度の時には、ヤコビフィルタと完全に一致する。

第4章 LCフィルタに基づく低感度ディジタルフィルタの構成

§4.1 まえがき

ディジタルフィルタを実現する際には、語長が有限であることによる影響が無視できない。係数語長の制限は、フィルタの特性を劣化させ、不安定になることさえある。これは、係数感度の問題として取り扱われ、低感度の構成法を導く研究が為されている。乗算等の演算後のまるめによる語長の制限は、白色雑音の重ね合わせと考えられ、出力でのSN比の悪化を招く。この雑音は、一般に低感度フィルタでは小さいことが知られており[9]、本章と次章では、低感度構成法について考察する。

ディジタルフィルタで高次の伝達関数を実現する場合、能動フィルタ等と同様に、2次または1次の区間を縦続に接続する方法が多く用いられてきた。縦続接続による方法では、伝達関数の各根を分離した部分回路で実現するため、特性変化の推定や安定性の判別等が容易であるが、感度の点ではそれほど優れているとはいえない。感度特性は回路構造によって大きく異なり、低感度の構成方法を導くことが、ディジタルフィルタの実用化に際しての大きな課題の1つである。

抵抗終端LCはしご形フィルタの大きな特徴として、伝達特性の、Lの値に対する感度が通過域内で非常に小さいことがあげられる[10]。ディジタルフィルタにおいても、この抵抗終端LCはしご形フィルタの動作をシミュレートすれば、低感度性をある程度受け継ぐことができる。従来、このような構成法として、wave digital filter[11]やリープフロッグ構成法[12]がある。

本章では、LCフィルタの各節点電圧の関係を表わす新しい形の信号流れ線図(SFG)を考え、これに基づく、低感度ディジタルフィルタの構成法を提案する。

§4.2 LCはしご形回路のSFG表現

抵抗終端LCはしご形フィルタは、通過域内の整合点において、振幅特性の1次素子感度が零になるという特徴を有し、電話回線の通話路フィルタのように急峻な特性を実現する場合極めて有効である。ディジタルフィルタでこれをシミュレートする場合、LCフィルタの各素子のSパラメータをシミュレートするwave digital filterや、各素子の電流、電圧をシミュレートするリープフロッグがある。リープフロッグと対比させながら、ここで提案する方法を説明する。

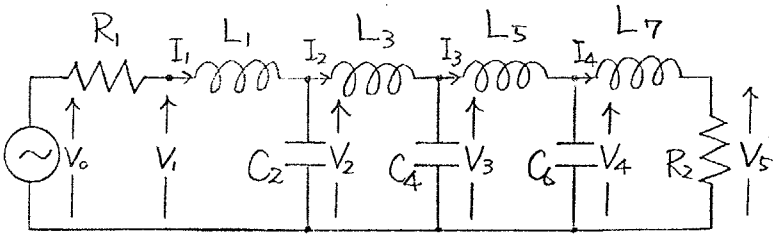
図4-1(a)に示すLPFを考える。この回路で、各素子の電圧、電流の間には、次のような関係が成立する。

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= V_0 - R_1 I_1 \\ I_1 &= \frac{1}{sL_1}(V_1 - V_2) \\ V_2 &= \frac{1}{sC_2}(I_1 - I_3) \\ &\vdots \\ I_4 &= \frac{1}{sL_7}(V_4 - V_5) \\ V_5 &= R_2 I_4 \end{aligned}\right\} \quad (4-1)$$

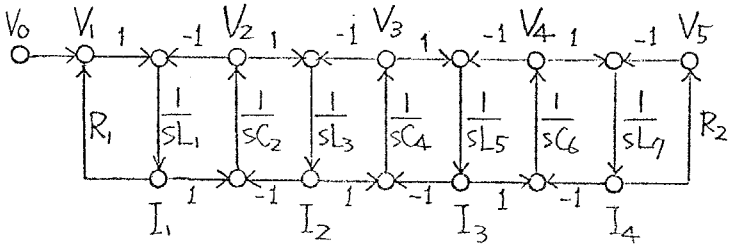
これらの関係式をSFGで表わすと図4-1(b)のようにリープフロッグ形になり、各トランスミッタンスは、入出力端を除いて積分器となる。

これに対し、SFGの節点の変数として、LCはしご形回路の節点電圧のみをとると、図4-1(a)で、

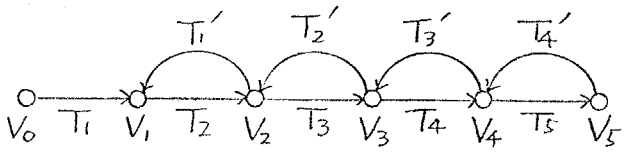
$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{sL_1 V_0 + R_1 V_2}{R_1 + sL_1} = T_1 V_0 + T_1' V_2 \\ V_2 &= \frac{\frac{1}{sL_1} V_1 + \frac{1}{sL_3} V_3}{\frac{1}{sL_1} + sC_2 + \frac{1}{sL_3}} = T_2 V_1 + T_2' V_3 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad (4-2)$$



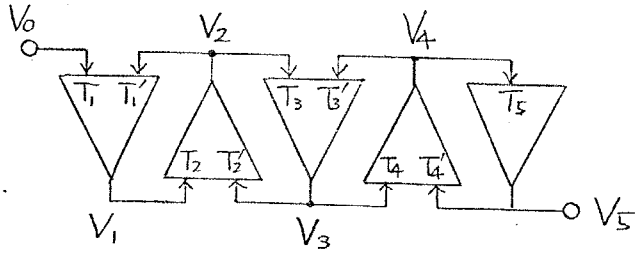
(a)



(b)



(c)



(d)

図4-1 (a) 抵抗終端LCはしご形LPF.
(b) 電圧、電流領域でのSFG.
(c) 電圧領域でのSFG.
(d) (c)のSFGの実現

$$V_4 = \frac{\frac{1}{sL_5}V_3 + \frac{1}{sL_7}V_5}{\frac{1}{sL_5} + sC_6 + \frac{1}{sL_7}} = T_4 V_3 + T_4' V_5$$

$$V_5 = \frac{\frac{1}{sL_7}V_4}{\frac{1}{sL_7} + \frac{1}{R_2}} = T_5 V_4$$

という関係式が成り立ち、図4-1(c)のSFGを書くことができる。この場合のトランスミッタンスは2次以下であり、入出力端を除いて、無損失の共振器となる。同一節点に向かうトランスミッタンスT_kとT_k'は等しい分母多項式をもつため、1つの単位回路で入力側を分けるだけで実現できる。その構成は図4-1(d)のようになる。

§4.3 ディジタル回路によるSFGの実現

複素周波数変数sを含むトランスミタンスによってSFGで表わされた回路は、各トランスミタンスにs-z変換を施すことによって、ディジタル回路で実現することができる。この場合のs-z変換に必要な性質は次の3点である。

(1) s平面の虚軸がz平面の単位円に写像されること。

(2) 変換によって安定性が損われないこと。

(3) ディジタル回路が物理的に実現可能であること。即ち、すべてのループは遅延素子を含むこと。

この3条件を同時に満足する変換はないことが知られており、(1)の条件を緩和した変換を使用する。低域通過フィルタと帯域通過フィルタでは異なる変換を用いるため、それぞれについて分けて考える。

§4.3.1 低域通過フィルタ(LPF)

式(4-2)よりLPFのSFGのトランスミタンスは、入出力端を除いて、$ba^2/(s^2+a^2)$の形で書けることが分かる。Brutonが用いたs-z変換[12]

$$s \longrightarrow \frac{1}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{z^{-1/2}} = \frac{2}{T}\sinh\frac{pT}{2} \qquad (z=e^{pT}) \tag{4-3}$$

をこれに適用すると次のように変換される。

$$\frac{a^2}{s^2+a^2} \longrightarrow \frac{a^2T^2z^{-1}}{(1-z^{-1})^2+a^2T^2z^{-1}} \tag{4-4}$$

式(4-3)の変換は、(1)の条件を緩和し、s平面の虚軸すべてではなく、$-2<\omega T<2$の範囲をz平面の単位円に写像する。又、無損失の関数を対象にするとき、その極は虚軸上にあるから、それが上記周波数範囲内であれば、z平面の単位円上に写像されるため、(2)の安定性が損われることはない。更に、式(4-4)は、分子がz^{-1}の項のみで直接伝送項をもたないため、これらを図4-1(c)のように接続して構成することが可能で、(3)の条件も満たされている。しかし減衰極をもつフィルタではトランスミタンスが$c(s^2+b^2)/(s^2+a^2)$の形になるため、式(4-3)の変換によっても遅延を含まないループが生じ、実現不可能である。

式(4-4)の伝達関数をもつ回路は図4-2(a)のように構成することができる。式(4-4)左辺の1つのパラメータaに1つの乗算器が対応している。これがディジタルLPFの無損失部の単位回路となる。

入出力端のQが有限の部分では式(4-3)の変換を適用すると半遅延$z^{-1/2}$が必要となる。これは標本化間隔を1/2にすることに相当する上、フィルタが不安定になるため好ましくない。そこで、入出力端には双1次変換

$$s \longrightarrow \frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T}\tanh\frac{pT}{2} \tag{4-5}$$

を用いることにする。この変換は分母子同時で、遅延を含まない伝送項を生じさせるが、図4-1(c)においてT_2及びT_4'が式(4-4)のように遅延を含むため、ループとしては遅延を含み、実現可能である。又、$|pT|\ll 1$のとき、$\sinh\frac{pT}{2} \simeq \tanh\frac{pT}{2}$であるから、式(4-3)と式(4-5)の変換を混用しても通過域での特性の乱れは小さい。特に、係数感度が大きな問題となる狭帯域フィルタでは、

この誤差は無視できる。式(4-5)によって T_A および T_B は、

$$\frac{a}{s+a} \longrightarrow \frac{\frac{aT}{2+aT}(1+z^{-1})}{1-\frac{2-aT}{2+aT}z^{-1}} = \frac{\frac{aT}{2+aT}(1+z^{-1})}{1-\left(1-2\frac{aT}{2+aT}\right)} \qquad (4\text{-}6)$$

となり、その実現回路は、第5章で述べる方法により、図4-2(b)のようになる。

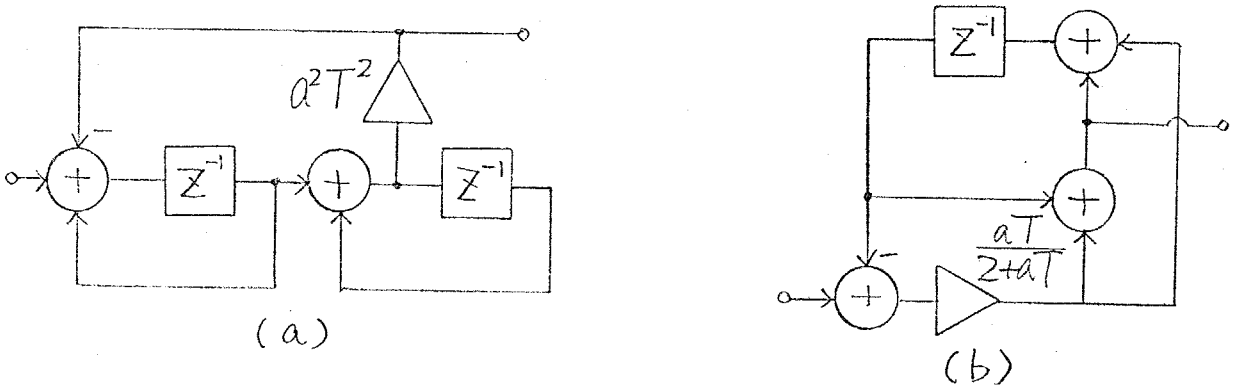


図4-2 単位回路 (a)無損失部 (b)入出力部

これらの単位回路を組み合わせてSFGを実現するわけであるが、

$$V_1 = \frac{s}{s+a}V_0 + \frac{a}{s+a}V_2 = V_0 + \frac{a}{s+a}(V_2 - V_0) \qquad (4\text{-}7a)$$

$$V_2 = \frac{a^2}{s^2+a^2}\left(\frac{L_3}{L_1+L_3}V_1 + \frac{L_1}{L_1+L_3}V_3\right)$$

$$= \frac{a^2}{s^2+a^2}\left\{V_3 + \frac{L_3}{L_1+L_3}(V_1 - V_3)\right\} \qquad (4\text{-}7b)$$

などの関係を用いて T_A と T_B を同時に構成し、乗算器の数が必要以上に増加するのを防いでいる。その結果、図4-3のような回路が得られる。N次のLPFでは、遅延素子と乗算器がN+1個ずつ必要である。

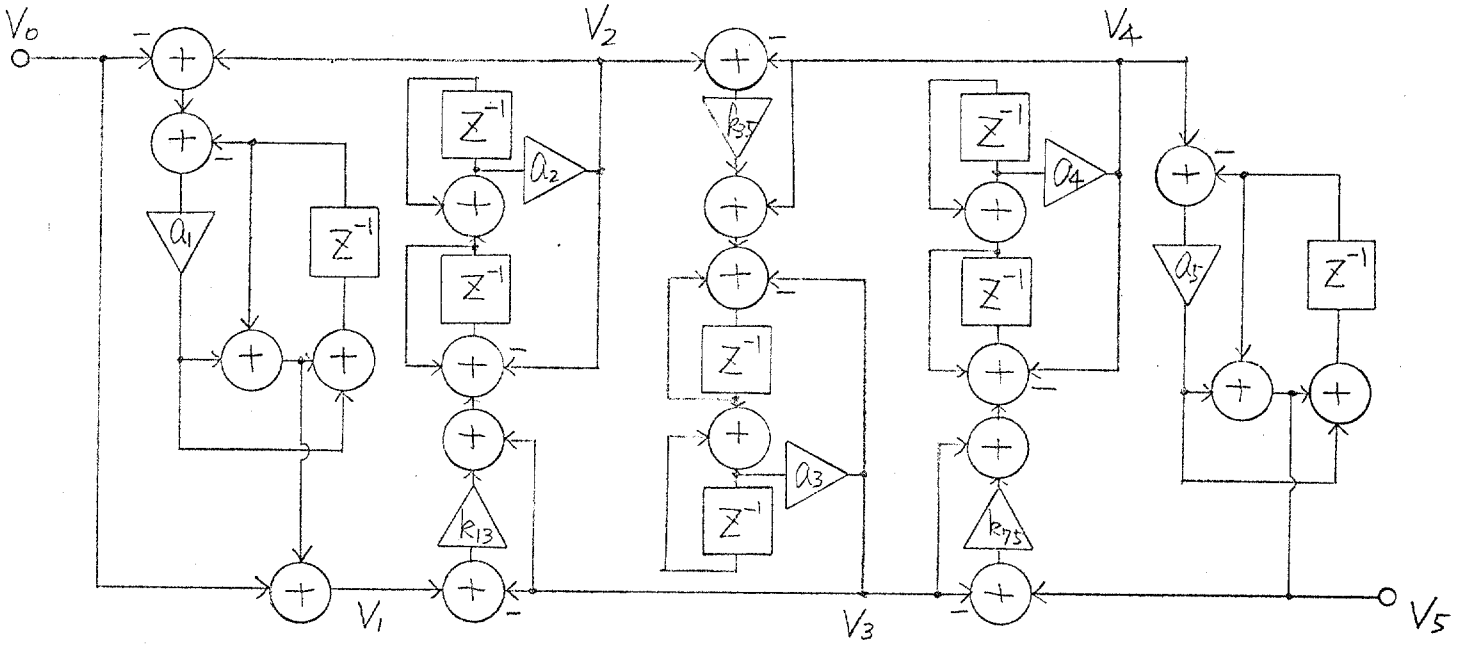


図4-3　7次LPFの回路

但し、 $a_1 = \dfrac{TR_1/L_1}{2+TR_1/L_1}$, $a_2 = \left(\dfrac{1}{L_1}+\dfrac{1}{L_3}\right)^2 \dfrac{T^2}{C_2^2}$, $a_3 = \left(\dfrac{1}{L_3}+\dfrac{1}{L_5}\right)^2 \dfrac{T^2}{C_4^2}$, $a_4 = \left(\dfrac{1}{L_5}+\dfrac{1}{L_7}\right)^2 \dfrac{T^2}{C_6^2}$

$a_5 = \dfrac{TR_2/L_7}{2+TR_2/L_7}$, $k_{13} = \dfrac{L_3}{L_1+L_3}$, $k_{35} = \dfrac{L_5}{L_3+L_5}$, $k_{75} = \dfrac{L_5}{L_5+L_7}$

§4.3.2. 帯域通過フィルタ（BPF）

LPFの構成では直流付近の近似を用いたため、その方法をBPFの場合に直接適用することはできない。ディジタルBPFの構成法としては2通り考えられる。

(1) アナログLPFから導く方法

アナログLPFをディジタルBPFに変換するものとして、次のS-z変換が知られている。[13]

$$S \rightarrow \frac{1}{T}\frac{1-2\cos\beta_0 T z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}} \tag{4-8}$$

式(4-8)を用いると遅延を含まないループを生じ実現不可能となるが、LPFにおける式(4-3),(4-5)の関係にならって次式の変換を考えることができる。

$$S \rightarrow \frac{1}{T}\frac{1-2\cos\beta_0 T z^{-1}+z^{-2}}{2\cos\frac{\beta_0 T}{2}\left(z^{-1/2}-z^{-3/2}\right)} \tag{4-9}$$

式(4-9)を使用すれば、すべてのループが遅延を含むようになる。この変換による周波数の対応を表4-1に示す。

表4-1 周波数の対応

digital BPF	0	β_l	β_0	β_u	π/T
analog LPF	$-\infty$	$-\omega_c$	0	ω_c	ω_e

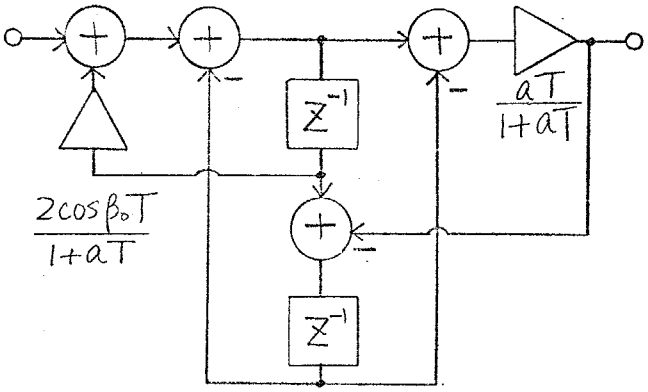
但し、 $\cos\beta_0 T = 1-2\sin\frac{\beta_l T}{2}\sin\frac{\beta_u T}{2}$

$$\omega_e = \frac{1}{T}\cos\frac{\beta_0 T}{2}$$

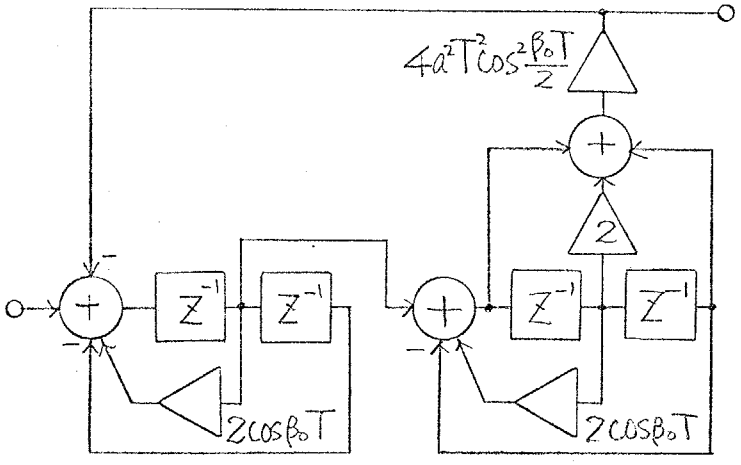
式(4-8)(4-9)によって、入出力部および無損失部分の伝達関数が次式のようになり、その構成は図4-4で表わされる。

$$\frac{a}{s+a} \rightarrow \frac{\frac{aT}{1+aT}\left(1-z^{-2}\right)}{1-\frac{2\cos\beta_0 T}{1+aT}z^{-1}+\left(1-2\frac{aT}{1+aT}\right)z^{-2}} \tag{4-10a}$$

$$\frac{a^2}{s^2+a^2} \rightarrow \frac{4a^2T^2\cos^2\frac{\beta_0 T}{2}\left(z^{-1}-2z^{-2}+z^{-3}\right)}{\left(1-2\cos\beta_0 T z^{-1}+z^{-2}\right)^2+4a^2T^2\cos^2\frac{\beta_0 T}{2}\left(z^{-1}-2z^{-2}+z^{-3}\right)} \tag{4-10b}$$



(a)



(b)

図4-4 BPFの単位回路

(a)入出力部 (b)無損失部

これらの単位回路をLPFの場合と同様に接続すればよい。

(2) ディジタルLPFから導く方式

LCフィルタではBPFを構成する場合、LPF-BPF周波数変換がよく用いられる。ディジタルフィルタ用にもLPF-BPF周波数変換がある。[14] アナログ周波数変換がSをSの関数で置き換えるのと同様に、ディジタル周波数変換の一般形は

$$z^{-1} \longrightarrow g(z^{-1}) \qquad (4\text{-}11)$$

で表わされる。得られる伝達関数がz^{-1}の有理関数でなければならないから、$g(z^{-1})$もまた、z^{-1}の有理関数である。また、この変換によってz平面の単位円が単位円自身に1回あるいはそれ以上写像されねばならないため、$g(z^{-1})$は全域通過フィルタである。LPF-BPF周波数変換では$g(z^{-1})$は2次全域通過フィルタの形をしており、これを用いて容易にBPFの伝達関数が得られるが、もとのLPF回路中の遅延素子z^{-1}を$g(z^{-1})$で置き換えた形の回路構造で構成しようとすると、一般に遅延を含まないループが生じてしまい実現不可能となる。このような問題のない変換として、

$$g(z^{-1}) = -\frac{z^{-1}(z^{-1}-b)}{1-bz^{-1}} \qquad (4\text{-}12)$$

がある。但し、$b=\cos\beta_0 T$, β_0は中心角周波数である。式(4-12)の変換を、式(4-4)(4-6)の伝達関数に適用すると、

$$\frac{a}{s+a} \longrightarrow \frac{\frac{aT}{2+aT}(1+z^{-1})}{1-\left(1-2\frac{aT}{2+aT}\right)z^{-1}}$$

$$\longrightarrow \frac{\frac{aT}{2+aT}(1-z^{-2})}{1-2b\left(1-\frac{aT}{2+aT}\right)z^{-1}+\left(1-2\frac{aT}{2+aT}\right)z^{-2}} \qquad (4\text{-}13a)$$

$$\frac{a^2}{s^2+a^2} \longrightarrow \frac{a^2T^2z^{-1}}{(1-z^{-1})^2+a^2T^2z^{-1}}$$

$$\longrightarrow \frac{-\alpha^2\gamma^2 z^{-1}(z^{-1}-b)(1-bz^{-1})}{(1-2bz^{-1}+z^{-2})^2-\alpha^2\gamma^2 z^{-1}(z^{-1}-b)(1-bz^{-1})} \quad (4\text{-}13b)$$

が得られる。これらの回路は図4-5のように構成できる。これらをLPFの場合と同様に特殊してBPFが構成される。

どちらの方法でも、N次のBPFは、遅延素子と乗算器をN+2個ずつ含んでいる。

§4.4. 係数感度の比較

ディジタルフィルタでは、素子変動などはなく、通過域特性の素子感度が低いという特徴は、乗算器の係数精度を下げられることに利用される。いま、ディジタルフィルタの乗算器係数は2進浮動小数点数で表わし、その仮数部のみを指定した語長にまるめるものとする。固定小数点演算を用いるフィルタにおいても、フィルタ係数が定数であれば、これをスケーリングしておき、演算には適当なシフトを組み合わせれば、有限な語長が有効に利用でき、精度の低下が防止できる。それ故、この場合にもフィルタ係数は浮動小数点数であると考えてよい。信号の語長は十分長いものとし、フィルタの特性の劣化を次式で定義されるChrochière[15]の相対誤差で評価する。

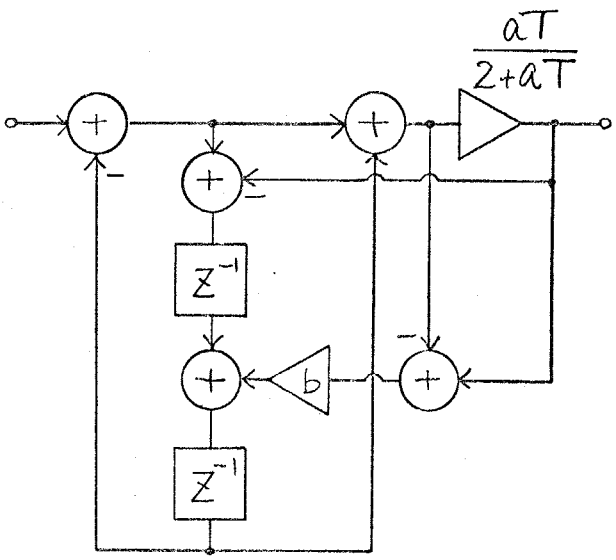
$$\text{相対誤差} = \begin{cases} \dfrac{H_{max}-H_{min}-A_M}{A_M} & H_{max}-H_{min} > A_M \\ 0 & H_{max}-H_{min} < A_M \end{cases}$$

但し、H_{max}：通過域内での最大振幅(dB)

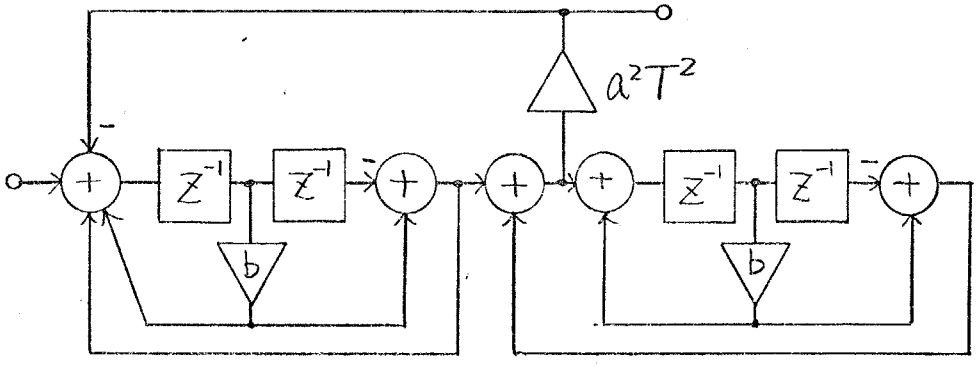
H_{min}：通過域内での最小振幅(dB)

A_M：与えられた通過域リプル(dB)

例として通過域リプル0.1dBの7次チェビシェフLPFを用い、すべての係数を同じ桁数にまるめた時の通過域特性と相対誤差を図4-6,4-7にそれぞれ示す。又、通過域リプル0.1dBの10次チェビシェフBPFの通過域特性を図4-8に示す。LCフィルタの完全なシミュレーションと考えられるwave



(a)



(b)

図4-5 BPFの単位回路
(a) 入出力部
(b) 無損失部

ladderやリープフロッグに比べて本方法の結果に遜色はなく、前述量子シミュレーションの有効性が確かめられたといえる。

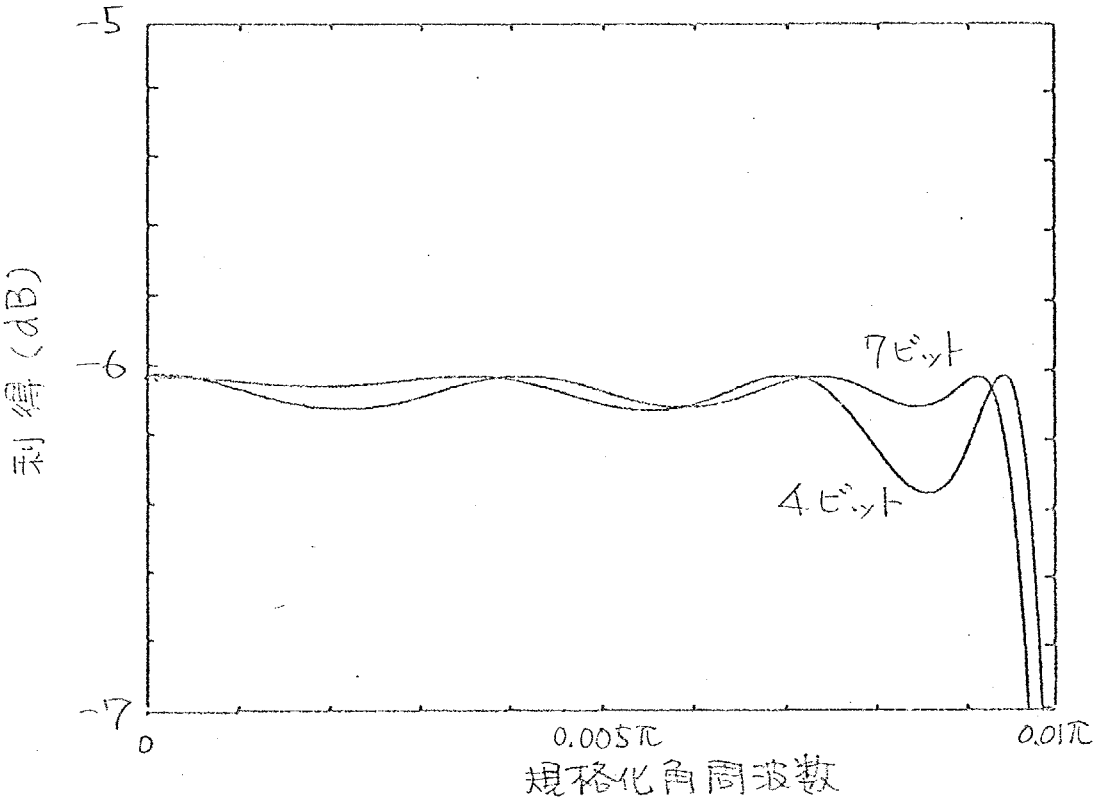


図4-6 7次チェビシェフLPFの通過域特性

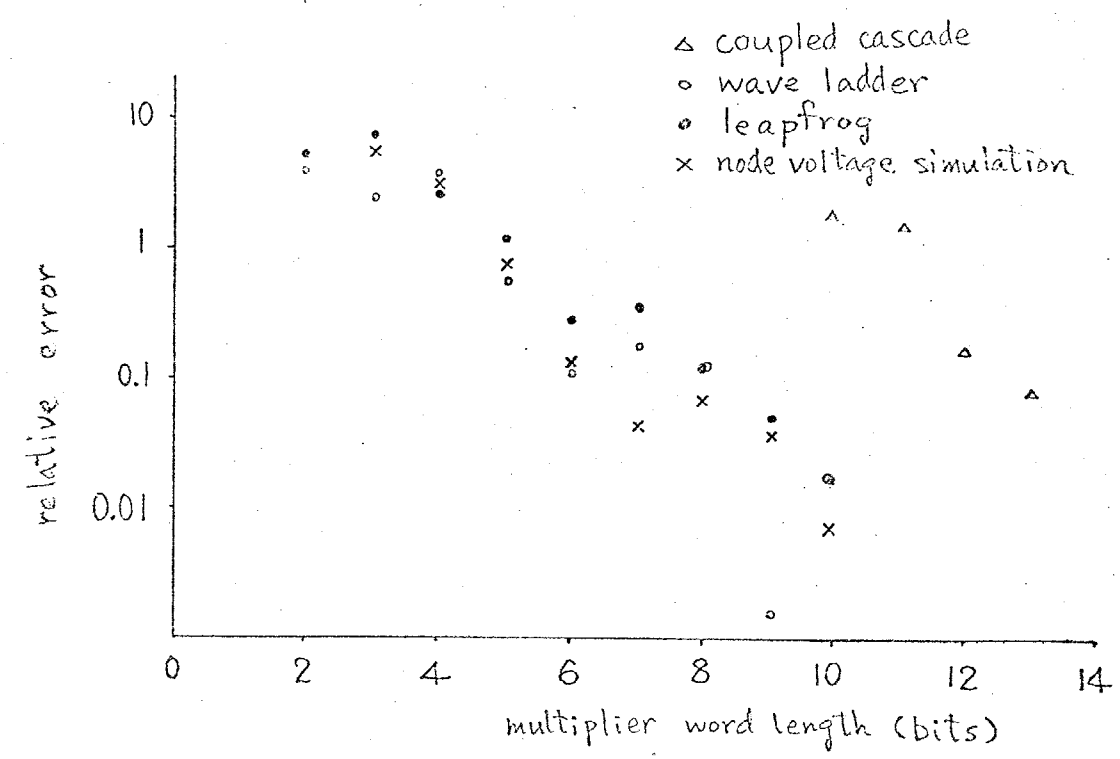


図4-7 各種構成法の誤差の比較

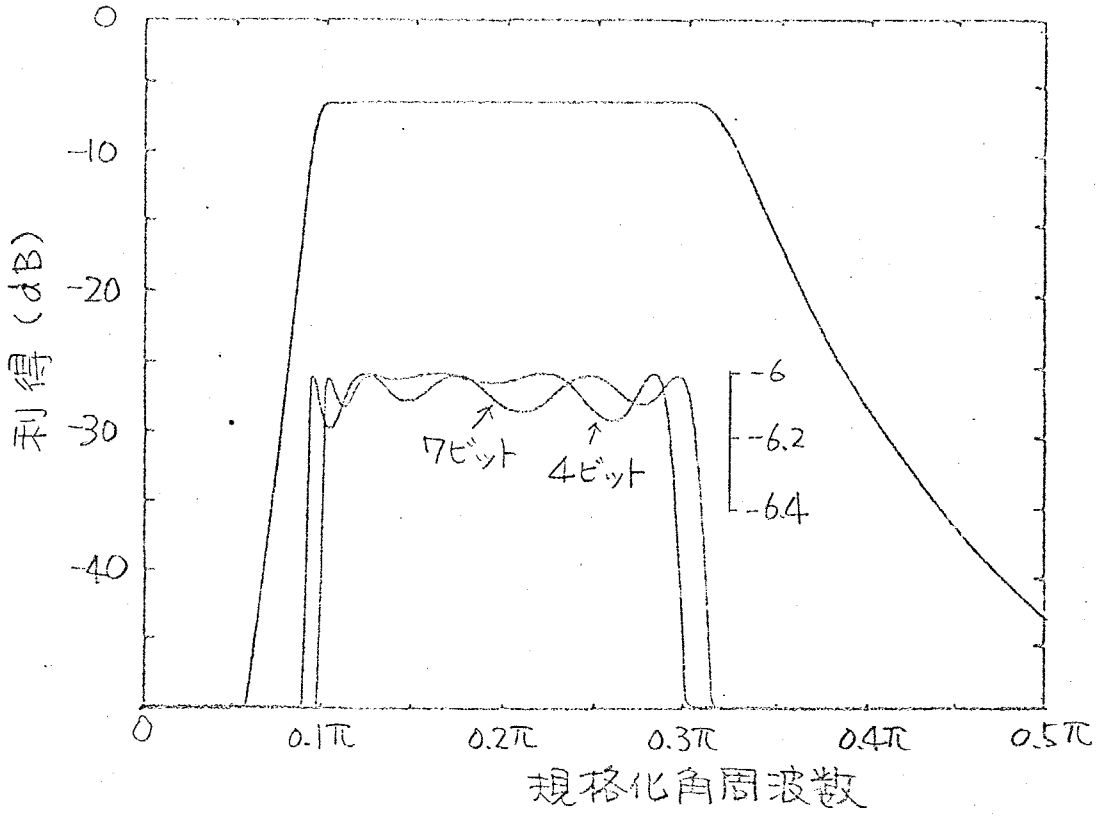


図4-8 10次チェビシェフBPFの通過域特性

§4.5 むすび

抵抗終端LCはしご形フィルタの節点電圧間の関係をSFGで記述する方法を示した。各トランスミタンスは双2次関数となり、これをディジタル回路で置き換えてLCフィルタをシミュレートする方法を提案し、得られたディジタルフィルタがLCフィルタの低感度性を受け継ぐことを示した。Brutonと同様のS-z変換を用いて、遅延を含まないループが生じることを防いでいるが、有理形フィルタの構成は困難である。

第5章 最少乗算器構成による低感度ディジタルフィルタ

§5.1 まえがき

ディジタルフィルタの設計における問題点の1つに、与えられた伝達関数を実現するのに適した回路構造を求めることがある。回路はできる限り単純で、しかも安定であることが望ましい。最も単純な構成法は直接形で、2次までのフィルタにはよく用いられている。直接形構成では、乗算器係数が伝達関数の係数に一致しており、構成することは容易であるが、狭帯域特性を実現する場合や、次数が高い場合には、語長制限による影響が大きく、不安定になることさえある。語長制限の影響を軽減するには、伝達関数を分解又は変形して乗算器の係数感度を小さくし、高次のフィルタには、1次、2次の縦続接続によるという方法が多く用いられている。

低感度フィルタの構成法としては、第4章で述べたような抵抗終端リアクタンス回路をシミュレートする方法が種々提案されているが、構成の複雑さのためにあまり利用されず、実際によく用いられるのは縦続形構成である。縦続形構成では、伝達関数の各根を分離した部分回路で実現するため、特性変化の推定、安定性の判別等が容易であり、更にハードウェアを実現する場合に汎用性があり有利である。本章では縦続形構成を念頭において、1次、2次のフィルタについてのみ考える。

2次ディジタルフィルタの低感度構成としてcoupled form[13]が有名であるが、必要な乗算器の数が多くなるため、たとえ感度は低くても全体のハードウェアの量が減少するか否かは疑わしい。そこで、ここでは乗算器の数が必要最少限であるものを考える。乗算器数を減らすために、フィルタの利得に関するパラメータを1（0dB）に規格化しても一般性を失なわないばかりか、信号レベルが上下せず、ダイナミックレンジの点で有利である。この規格化によって低域通過フィルタ（LPF）の直流利得や帯域通過フィルタ（BPF）の中心利得

等は係数の変動に関係なく1とすることができるから、これらの周波数では感度は完全に零であり、その近傍である通過域内では感度はそれ程高くならないことが予想される。ところが、このような伝達関数では、乗算器係数が分母分双方に関係するため、従来の構成法で最少乗算器数の回路を得るには、かなり煩雑な手数を要した。

まるめ誤差の影響については、係数感度の低いフィルタではまるめ雑音は小さいことが知られているが[6]、係数感度の等しいフィルタでも、まるめ雑音の大きさは一般に異なり、多くの等価回路の中から最適な構造を選ぶのが現状である。従って、回路構造の決定に際しては、すべての等価回路が得られることが必要である。

本章では、低感度伝達関数を最少乗算器数で実現する方法として帰還路付加法を提案し、2次までの各種低感度フィルタを導く。

§5.2 低感度伝達関数

伝達関数$H(z)$をもつディジタルフィルタの乗算器αに対する振幅特性の感度$S_{\alpha}^{|H|}$は、

$$S_{\alpha}^{|H|}=\frac{\alpha}{|H|}\frac{\partial|H|}{\partial\alpha} \tag{5-1}$$

で定義される。狭帯域ディジタルフィルタでは、伝達関数の根が$z=1$あるいは単位円に近づくため、伝達関数の係数は整数に近い値をとることが知られている[16]。今、αが整数nに近いとすれば、同じ語長で実現する時、αを$n-\alpha'$として、小さな数α'を実現する方が精度が高くなる。ディジタルフィルタでは整数倍の乗算は正確に行なわれ、その感度は零である。新しい係数α'に対する感度は

$$S_{\alpha'}^{|H|}=S_{\alpha'}^{\alpha}S_{\alpha}^{|H|}=-\frac{\alpha'}{\alpha}S_{\alpha}^{|H|} \tag{5-2}$$

となる。αは整数nに近く、α'の絶対値は小さいから、

$$\left|S_{x'}^{|H|}\right| < \left|S_{x}^{|H|}\right| \tag{5-3}$$

となり、感度が低下している。係数の絶対値が大きい乗算器があれば、上記の方法で修正し、感度を下げることができるため、低感度ディジタルフィルタには、絶対値が0.5を越える乗算器はない。しかしながら、乗算器係数が小さいだけで良いというものではなく、パラメータの選び方に自由度があり、それによって感度特性が異なる。

Avenhousは、coupled formと同様の考え方により、係数感度を極の存在し得る格子点の密度としてとらえている[17]。格子点密度は、ある回路構造が実現に適しているか否かを知る上での間接的な評価基準であるが、低感度フィルタの格子点密度は高くなっており、以下でもそのような伝達関数を導く。

§5.2.1 1次LPF

直流利得が1である1次LPFは、遮断角周波数を決めるパラメータ1個のみをもっており、これをaと置くと、伝達関数は次のように表わせる。

$$H_{1L}(z) = \frac{f_1(a)(1+z^{-1})}{1-f_2(a)\,z^{-1}} \tag{5-4}$$

LPFであるから、零点の位置は$z=-1$に固定してよい。又、$f_1(a)$はaの1次式でなければ1個の乗算器による構成ができない。直流利得の条件より、$2f_1(a)=1-f_2(a)$が成り立っており、$z=1$と極との距離Rは、

$$R = 1-f_2(a) = 2f_1(a) \tag{5-5}$$

で表わされる。格子点密度を高くするには、Rが係数aを因数としなければならない。従って$f_1(a)=a$, $f_2(a)=1-2a$が得られる。即ち、

$$H_{1L}(z) = \frac{a(1+z^{-1})}{1-(1-2a)z^{-1}} \tag{5-5}$$

但し、$a=1/(1+\cot\beta_0 T/2)$, β_0は遮断角周波数、Tは標本化間隔である。狭帯域フィルタではaは小さく、直流利得はaの値に関係なく1である。

§5.2.2 2次LPF, BPF

能動フィルタにおけるbiquad回路のようにLPFとBPFは同一の回路で構成できる可能性があるので同時に考える。LPFの直流利得は、伝達関数に$z=1$を代入して容易に計算できるが、BPFの中心利得は複雑な式となり、これが1となる条件式を得ることは容易でない。そこで、アナログフィルタからS-Z変換によって求める。規格化したアナログLPFとBPFの伝達関数

$$\tilde{H}_{2L}(s)=\frac{1}{s^2+s/Q+1} \tag{5-7a}$$

$$\tilde{H}_{2B}(s)=\frac{s/Q}{s^2+s/Q+1} \tag{5-7b}$$

に双1次S-Z変換

$$s \longrightarrow k\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}, \qquad k=\cot\frac{\beta_0 T}{2} \tag{5-8}$$

を施すと、

$$H_{2L}(z)=\frac{\dfrac{Q}{Qk^2+k+Q}(1+z^{-1})^2}{1+\dfrac{2Q(1-k^2)}{Qk^2+k+Q}z^{-1}+\dfrac{Qk^2-k+Q}{Qk^2+k+Q}z^{-2}} \tag{5-9a}$$

$$H_{2B}(z)=\frac{\dfrac{k}{Qk^2+k+Q}(1-z^{-2})}{1+\dfrac{2Q(1-k^2)}{Qk^2+k+Q}z^{-1}+\dfrac{Qk^2-k+Q}{Qk^2+k+Q}z^{-2}} \tag{5-9b}$$

が得られる。これを2個のパラメータa,bで表わし、$z=1$の近傍で格子点密度が高くなるには、分子が1個の係数、又は2個の係数の和か積という形でなければならない。即ち、Q/Qk^2+k+Qは極と$z=1$との距離であり、k/Qk^2+k+Qは極と単位円との距離に関係しており、これらが2個の係数の差で表わされてはならない。引き算による打ち消しによってつくられた量は、もとの量の変動の影響を大きく受けるからである。そこで

$$a=\frac{Q}{Qk^2+k+Q} \tag{5-10a}$$

$$b=\frac{k}{Qk^2+k+Q} \tag{5-10b}$$

と置けば、

$$H_{2L}(z)=\frac{a(1+z^{-1})^2}{1-2(1-b-2a)z^{-1}+(1-2b)z^{-2}} \tag{5-11a}$$

$$H_{2B}(z)=\frac{b(1-z^{-2})}{1-2(1-b-2a)z^{-1}+(1-2b)z^{-2}} \tag{5-11b}$$

を得る。式(5-11a)の形でバタワース特性を実現した時の係数感度 $S_a^{|H|}$, $S_b^{|H|}$ を低感度で知られるAgarwal等のRealization II[16]と比較してみると図5-1のように、通過域ではここで導いたフィルタが優れていることがわかる。但し、規格化遮断角周波数 $\rho_0T=\pi/10$ である。

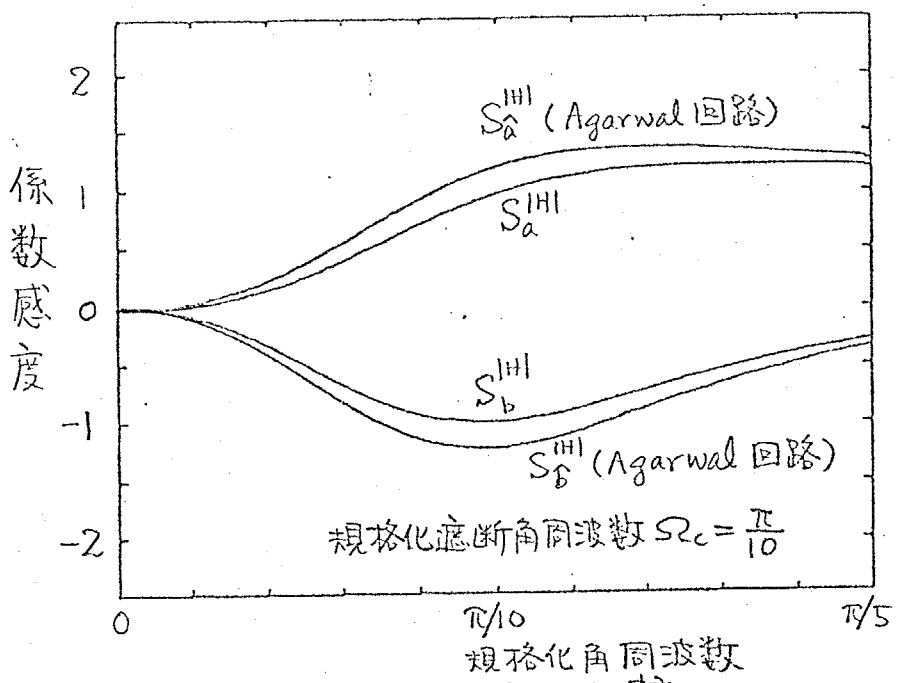


図5-1 係数感度の比較

BPFとしては、中心周波数と帯域幅が独立に可変できる次のような関数も有用である。

$$H_{2B}(z)=\frac{a(1-z^{-2})}{1-2b(1-a)z^{-1}+(1-2a)z^{-2}} \qquad (5\text{-}12)$$

但し、

$$a=\frac{1}{1+\cot\frac{(\beta_2-\beta_1)T}{2}}$$

$$b=\cos\beta_0 T=\frac{\cos\frac{(\beta_1+\beta_2)T}{2}}{\cos\frac{(\beta_1-\beta_2)T}{2}}$$

β_1, β_2は遮断角周波数、β_0は中心角周波数である。式(5-12)は式(5-6)の1次LPFに、式(4-12)のLPF-BPF周波数変換を施せば得られる。西村ら[18]も同様の性質をもつBPFを求めているが、帯域幅を決めるパラメータについては、もとの1次LPFの感度が保存されるため、式(5-12)に示す形の方が低感度である。中心周波数を決めるパラメータについては、西村らのものと等しく、中心周波数が低い時にはbの値が1に近づき感度が高くなる。この場合には、bを$1-b'$で置き換える等の対策が考えられる。

§5.2.3 ノッチフィルタ

LPF形のノッチフィルタで、遮断周波数だけでなく、伝送零点も標本化周波数より十分小さい所にあるとすれば、LPFからの類推で、次のような伝達関数が考えられる。

$$H_{2N}(z)=\frac{b\{1-(2-a)z^{-1}+z^{-2}\}}{1-\{2-a(b+c)\}z^{-1}+(1-ac)z^{-2}} \qquad (5\text{-}13)$$

$z=1$の近傍で、極と零点のとり得る格子点密度が高くなっており、直流利得は係数の値に無関係に1となっている。

§5.2.4 その他のフィルタ

ディジタル高域通過フィルタ（HPF）は、LPFの極と零点の位置をz平面の虚軸に関して対称に移動すれば得られる。即ち、

$$z^{-1} \longrightarrow -z^{-1} \qquad (5\text{-}14)$$

という変換を施せばよい。この変換では回路構造に変化はなく、加算器の符号が何箇所か変わるだけであるから、LPFの構造が知られていれば、HPFはすぐに得られる。式(5-14)の変換を前節までに得られたフィルタに適用することによって、1次、2次のHPF及びHPF形ノッチフィルタが求められる。

全域通過フィルタ（APF）の振幅特性は周波数の全域にわたって直通になっており、振幅特性の感度はもともと零である。APFの構成については、Mitraら[19]が取り扱っているので、ここでは省略する。

§5.3 回路構造の決定

係数感度を低くするのは、発振しにくく安定な回路を求めるだけでなく、ハードウェアの複雑さや価格を低減することも目的であるから、乗算器等の数を必要最少限に留めて実現することが重要である。整数倍の乗算器についても少ないことが望まれる。前節で求めた伝達関数は、パラメータ数の減少と低感度化のための制限を付けたため、従来の構成法で最少乗算器数の回路を求めることは困難であった。

回路を記述する種々の方程式のうち、伝達関数は入出力関係を表わしているが、内部構造に関する情報はほとんどもっていない。回路の内部構造に対応するものが節点方程式であるから、回路構造の決定にあたって節点方程式を利用する方法が考えられる。その1つとして、抽出法を紹介し、これと対比しながら本章で提案する方法を説明する。

§5.3.1 抽出法

最終的に回路中に含まれる乗算器を規定する構成法として乗算器抽出法[20]があ

るが、この方法は、伝達関数の係数が乗算器係数そのままであるか、乗算器係数どうしの積和の場合にのみ有効である。伝達関数の係数に整数項を含む低感度ディジタルフィルタの構成には、乗算器の他に遅延と節点を抽出する必要がある。この時、canonicalな回路を構成するために、伝達関数の次数と同数の遅延を抽出すれば良いが、抽出すべき節点の数は不明である。

例えば式(6)の1次LPFを考えてみる。乗算器aの他に遅延と節点を1個ずつ抽出し、図5-2 aようにする。

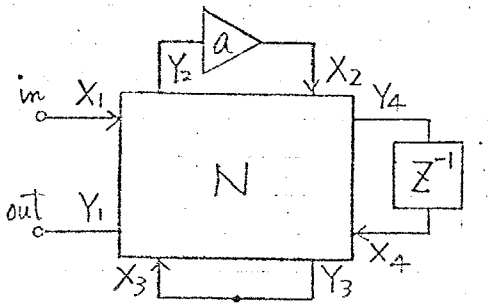


図5-2 外部条件を付けた4pair回路

この時、回路Nを表わす伝送行列は次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & 0 & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & 0 & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}15)$$

但し、遅延を含まないループが生じないように$t_{22}=t_{33}=0$としてある他、$t_{23}t_{32}=0$も成り立っていなければならない。又、外部条件として、

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= a Y_2 \\ X_3 &= Y_3 \\ X_4 &= z^{-1} Y_4 \end{aligned}\right\} (5\text{-}16)$$

がある。式(5-15)(5-16)を適当に処理して内部変数$X_2 \sim X_4$、$Y_2 \sim Y_4$を消去し

て、入出力関係 Y_1/X_1 を導き、これを式(5-6)の伝達関数と等置する。その時に t_{ij} のうちなるべく多くが零となり、非零のものは±1となるように決める。その結果、図5-3に示す、互に Transposed system である2つの回路が得られる。

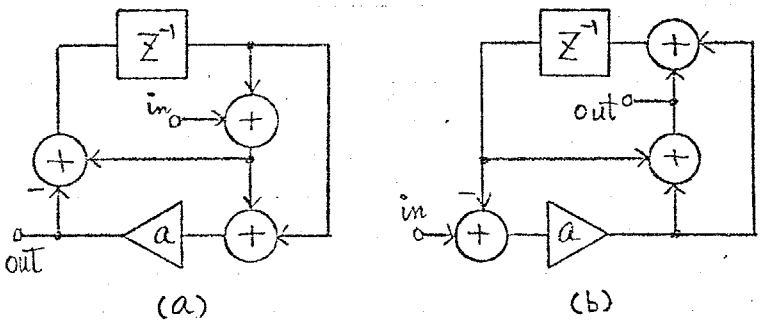


図5-3 1次 LPF

この例において、乗算器と遅延のみを抽出し、節点を抽出しない場合にも解は存在するが、得られる回路は図5-3の回路より、2倍の乗算器1個だけ余分に必要となる。

抽出法では、1次を越える回路では未知数の数が膨大となり、内部変数の消去過程も相当複雑で実際的でない。又、それ以前に節点数が確定していないため、節点数を増加させながら試行錯誤によって最適な回路を求めねばならない。

§5.3.2 帰還路付加法

ディジタルフィルタの回路構造の決定においては、分母多項式のみ先に考え、後から feed forward paths を付加して分子多項式を得る方法がよく用いられるが、ここでは、分母多項式を最後に実現する形で段階的に構成する。基本的には抽出法と同様に、接続が不明な部分を未知数として含む節点方程式をつくり、これより伝達関数を算出し、与えられたものと等置して未知数を決定するものであるが、節点方程式を行列でなく信号流れ線図で表現することが異なる。図式表現によれば、節点数の増減も容易である上、伝達関数の導出に Mason

の規則を用いると、行列式の計算より単純である。但し、計算機向きの方法ではない。

今、与えられた伝達関数を最少乗算器数で実現する回路があるとする。すべての乗算器係数が1に比べて十分小さく無視できると仮定すると、伝達関数中のいくつかの項が消え単純な形となる。これは回路構造の上でも、いくつかの枝が切り離されて縮小されたことに相当する。この縮小回路はパラメータが少なく、構成することは容易であり、構造の種類もそれ程多くない。この回路を骨組として、切り離された枝を探して補えば良い。何種類かある骨組回路のうちのどれかに適当に枝を付加すれば、最少乗算器数の回路が復元されると考えられる。この時同時に等価回路も得られる。枝の切断の時に節点が消滅することもある。乗算器が縦続に接続されている時、枝の切断によって、それらの間の節点が消滅することがあるが、枝を付加する時にも最少乗算器数となるようにすれば、消滅節点も再生できる。それ以外では節点は消滅せず骨組回路中に残っているから、抽出法のように節点数の問題が生ずることはない。

一般によく用いられるフィルタの伝達関数では、分子多項式は単純な形をしていることが多く、まず適当な枝を付加して分子多項式を構成することは容易である。次に、分子多項式が変化しないように帰還路を付加して分母多項式を実現する。この時、遅延を含まないループが生じるような帰還路を付加してはならない。付加可能なすべての帰還路を列挙しても、2次以下のフィルタではそれ程の手数ではない。分子多項式に影響を与えずに、帰還をかけて分母多項式を変形する方法として状態帰還がある。遅延を含む帰還ループをつくることは同じであるが、状態帰還のように状態変数を入力に戻すだけでなく、ここでは、乗算器数の減少を図り、任意の場所から任意の場所への帰還を許す。

この方法によって、前節で求めた低感度伝達関数を最少乗算器数で実現する回路を求めてみよう。

(1) 1次LPF

1次LPFの伝達関数

$$H_{1L}(z)=\frac{a(1+z^{-1})}{1-(1-2a)z^{-1}} \tag{5-6}$$

において、$1 \gg a$ とすると

$$H'_{1L}(z)=\frac{a(1+z^{-1})}{1-z^{-1}} \tag{5-17}$$

となる。H'_{1L} の構成は図5-4のように4種類ある。

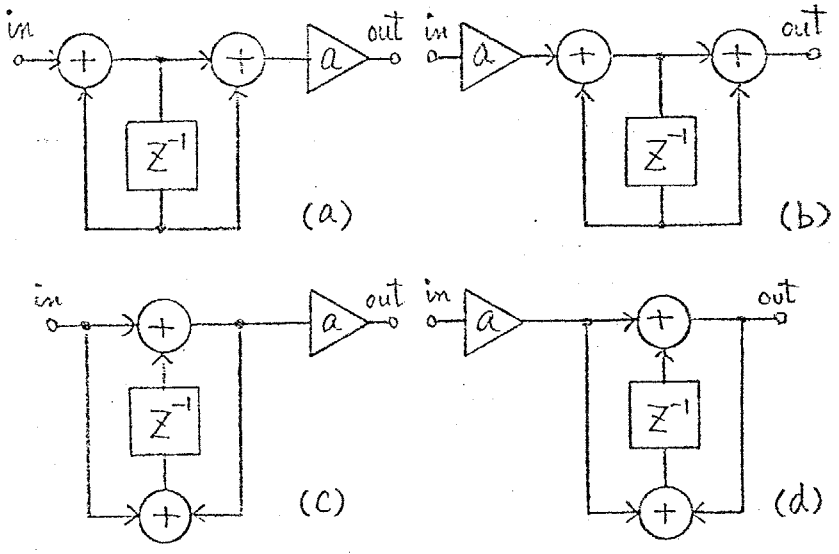


図5-4 1次LPFの骨組

H'_{1L} の分子は H_{1L} の分子とすでに等しい。分子多項式に影響を与えず、遅延を含まないループが生じない帰還路は図5-5に示すようにそれぞれ3本ある。

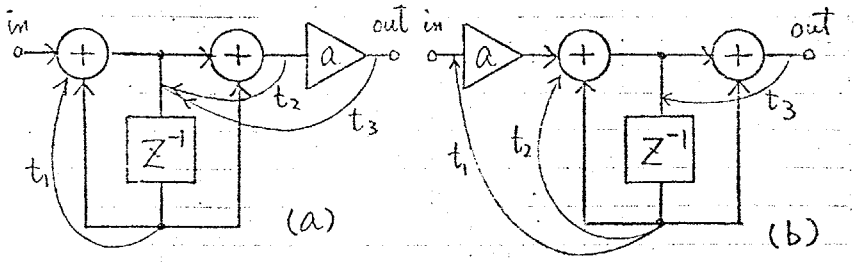


図5-5 帰還路の付加

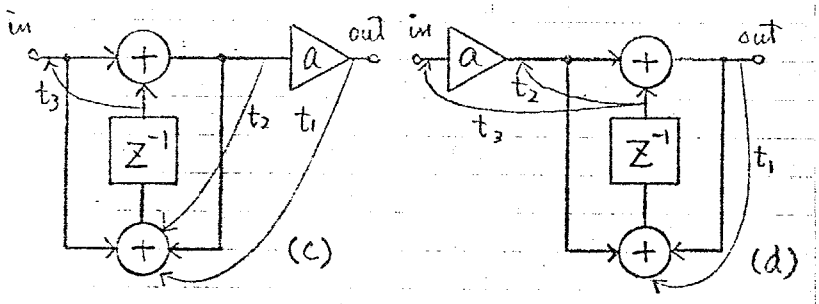


図5-5 帰還路の付加

帰還路付加後の分母多項式をMasonの規則によって求めると、(a)と(d)の回路では、

$$D_{1L}(z) = 1 - z^{-1} - t_1 z^{-1} - 2t_2 z^{-1} - 2at_3 z^{-1} \tag{5-18a}$$

又、(b)(c)の回路では、

$$D_{1L}(z) = 1 - z^{-1} - at_1 z^{-1} - t_2 z^{-1} - 2t_3 z^{-1} \tag{5-18b}$$

となる。式(5-6)と比較すると、(a)(d)の回路では$t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = -1$, (b)(c)の回路では$t_1 = -2$, $t_2 = t_3 = 0$が得られるが、2倍の乗算器を用いなくてよい(a)(d)の回路が経済的である。こうして得られる回路は、図5-3と全く等しい。抽出法より、はるかに容易に回路構造が得られることがわかる。

(2) Biquad回路

まず、LPFから考える。2次LPFの伝達関数は、

$$H_{2L}(z) = \frac{a(1+z^{-1})^2}{1 - 2(1-b-2a)z^{-1} + (1-2b)z^{-2}} \tag{5-11a}$$

で与えられており、ここで$1 \gg a, b$とすると、

$$H'_{2L}(z) = \frac{a(1+z^{-1})^2}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} = a\left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)^2 \tag{5-19}$$

となる。H'_{2L}を最少乗算器数で実現するには縦続形がよく、乗算器aの位置等によって、12通りの構成が可能である。その中で例えば次のものを考える。

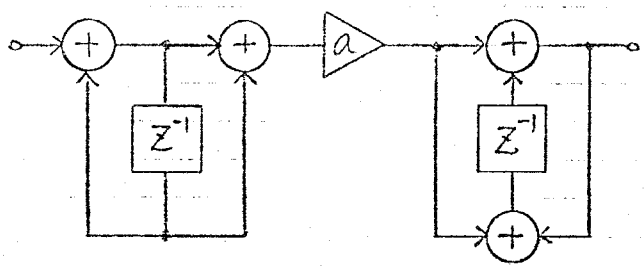


図5-6　2次LPFの骨組

分子多項式はすでに式(5-11)と一致しているので、これに影響を与えず、遅延を含まないループが生じない帰還路を考えると、次に示す11本がある。

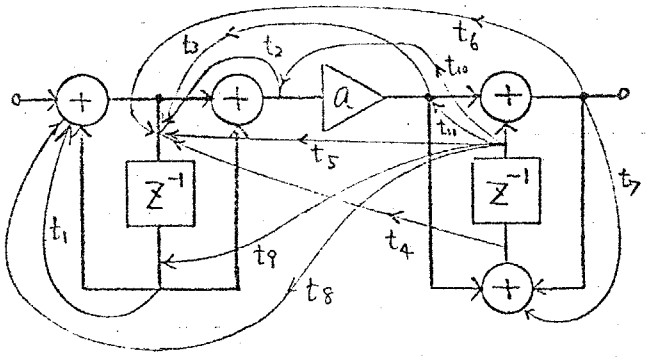


図5-7　帰還路の付加

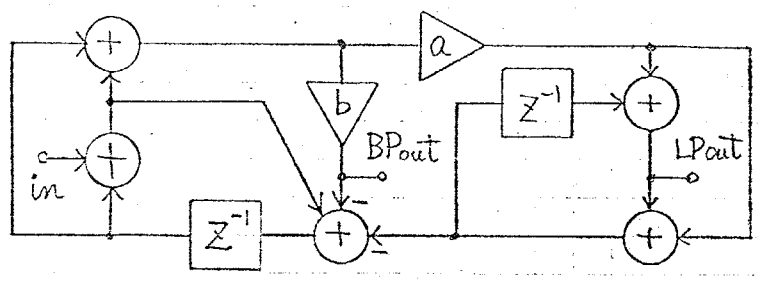
伝達関数の分母多項式$D_{2L}(z)$を求めると、

$$D_{2L}(z)=1-[2+t_1+t_2(2+t_1)+t_7(1+t_{11})+2t_{11}+a\{t_3(2+t_1)+t_4(2+t_1)(2+t_7)+t_6(2+t_1)+t_8(2+t_7)+t_9(2+t_1)(2+t_7)+t_{10}(2+t_7)\}]z^{-1}+[1+t_1(1+t_7)+t_2(2+t_1)(1+t_7)+t_7+(1+t_1)(1+t_2)(1+t_7)t_{11}-a\{t_5(2+t_1)(2+t_7)+t_6(2+t_1)+t_8(2+t_7)-t_3(2+t_1)(1+t_7)-t_{10}(1+t_1)(1+t_7)\}]z^{-2} \quad (5\text{-}20)$$

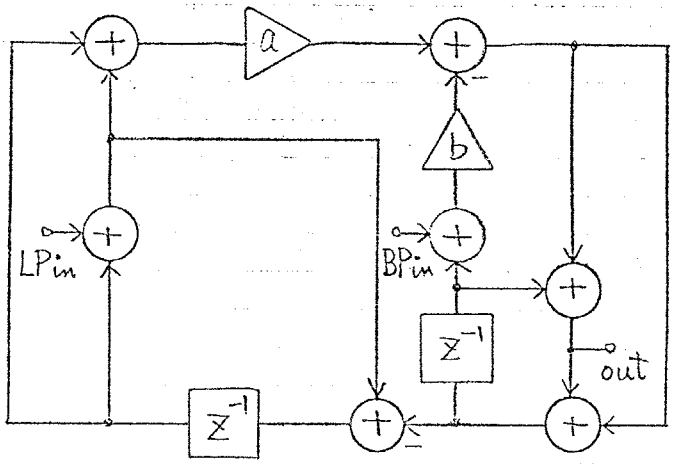
が得られる。式(5-11)の分母と等置して、なるべく多くのt_iが零になるように決めると、

$$t_2 \text{ or } t_{11}=-b,\quad t_4 \text{ or } t_9=-1$$

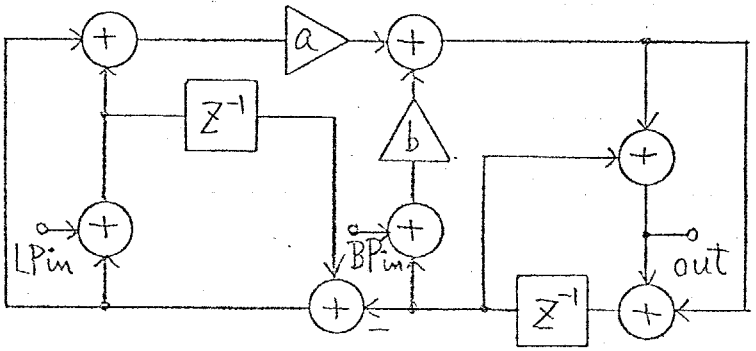
となり、全部で4種類の等価回路となる。それらを整理して描くと次のとおりである。



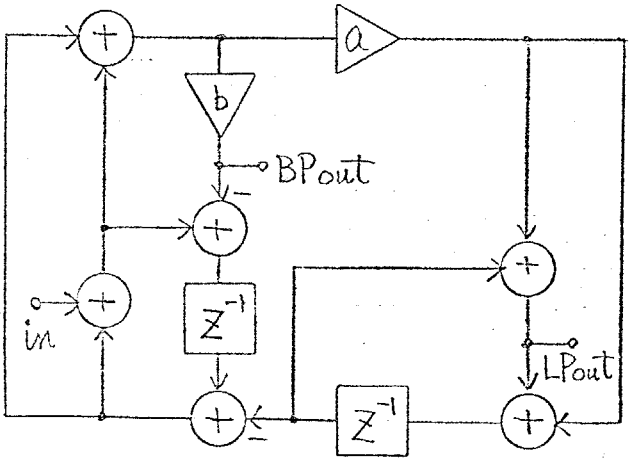
(a)



(b)



(c)



(d)

図5-8 ディジタル biquad 回路

図5-8で(a)と(c),(b)と(d)は互にTransposed systemである。それぞれに式(5-11b)で表わされるBPF用の入出力端子があり、これらの回路はディジタルBiquad回路とも呼ぶべきものであろう。この回路は、2個の乗算器のみで、低感度のLPFとBPFが同時に得られるため、LSI化にも適している。骨組として図5-6のもの以外を使うと、2倍の乗算器等が余分に必要になる。

次にBPFの方から構成を考えてみる。伝達関数は、

$$H_{2B}(z)=\frac{b(1-z^{-2})}{1-2(1-b-2a)z^{-1}+(1-2b)z^{-2}} \qquad (5\text{-}11b)$$

であるから、$1 \gg a, b$とすると

$$H'_{2B}(z)=\frac{b(1-z^{-2})}{1-2z^{-1}+z^{-2}}=b\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \qquad (5\text{-}21)$$

となる。H'は式の上でHから導かれるばかりでなく、回路構造の上でも、乗算器係数が小さいとした時には、HはH'となる。今、式(5-21)のように、H'を求めた時に約分されて消えてしまう項があるが、これは、乗算器係数が小さい時には、この項を表わす部分が構造的に分離されていることを示す。この場合の骨組となる回路の例と、それに付加し得る帰還路を図5-9に示す。

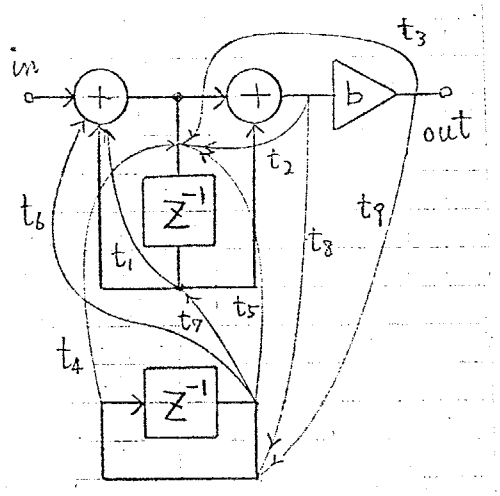


図5-9 2次BPFの骨組と帰還路の付加

伝達関数が式(5-11b)と一致するためには、

$$t_3=-1,\quad t_4t_8 \text{ or } t_7t_8=-2a$$

であれば良い。これに対応する回路は図5-8(a)(d)とほとんど同じであるが、LPF用の入出力端子は直接得られない。又、図5-9のtransposed systemによる回路が、図5-8(b)(c)に対応する。

(3) 2次BPF

式(5-12)のBPFについても同様に、$1 \gg a, b$とすると、

$$H'_{2B}(z)=\frac{a(1-z^{-2})}{1+z^{-2}} \qquad (5\text{-}22)$$

となる。骨組と付加し得る帰還路を図5-10(a)に、最終的な回路を図5-10(b)に示す。式(5-12)の伝達関数を最少乗算器数で実現する回路は図5-10(b)とそのtransposed systemの2通りである。

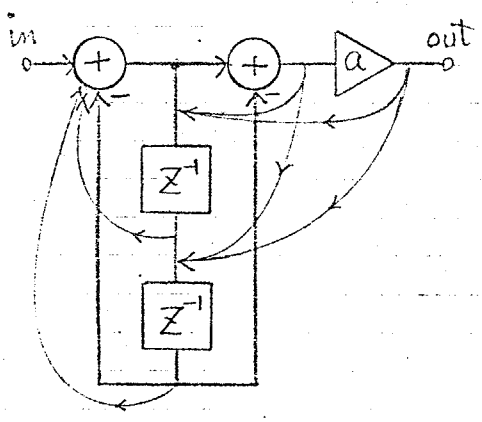


図5-10(a) 2次BPFの骨組と帰還路の付加

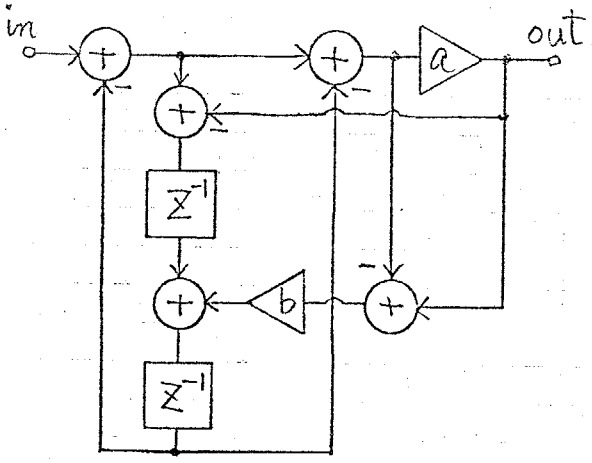


図5-10(b) 2次 BPF

(4) ノッチフィルタ

式(5-13)のノッチフィルタで、$1 \gg a, b, c$とすれば、

$$H'_{2N}(z) = \frac{b(1-2z^{-1}+z^{-2})}{1-2z^{-1}+z^{-2}} = b \qquad (5\text{-}23)$$

であるから、骨組は図5-11のようになる。図5-11の回路をもとにして式(5-13)の分子多項式を構成する方法は12通りある。その中で例えば図5-12のものを用いて、前と同様に帰還路を付加して、分母多項式を計算する。式(5-13)の分母と比較して、

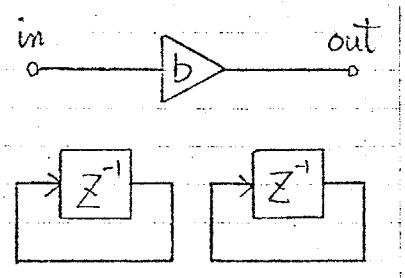


図5-11 ノッチフィルタの骨組

$$t_3 = -c, \quad t_5 = -1$$

が解となる。この回路を図5-13(a)に示す。

図5-12以外から出発した時に得られる回路を図5-13(b)(c)に示す。結局、式(5-13)の伝達関数を最少乗算器数で構成する回路は、図5-13とそのtransposed systemsで、合計6種類ある。

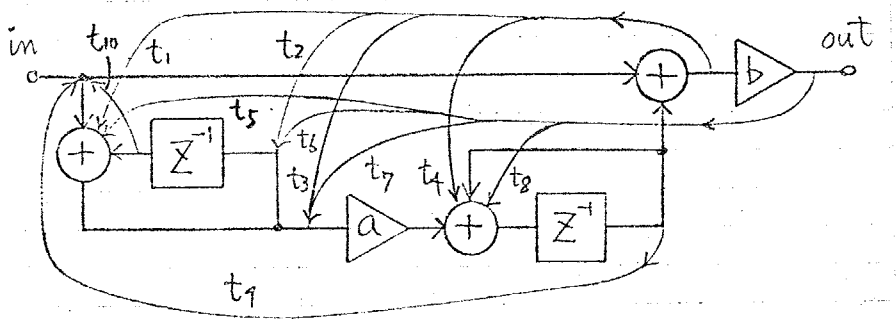


図5-12 分子の構成と帰還路の付加

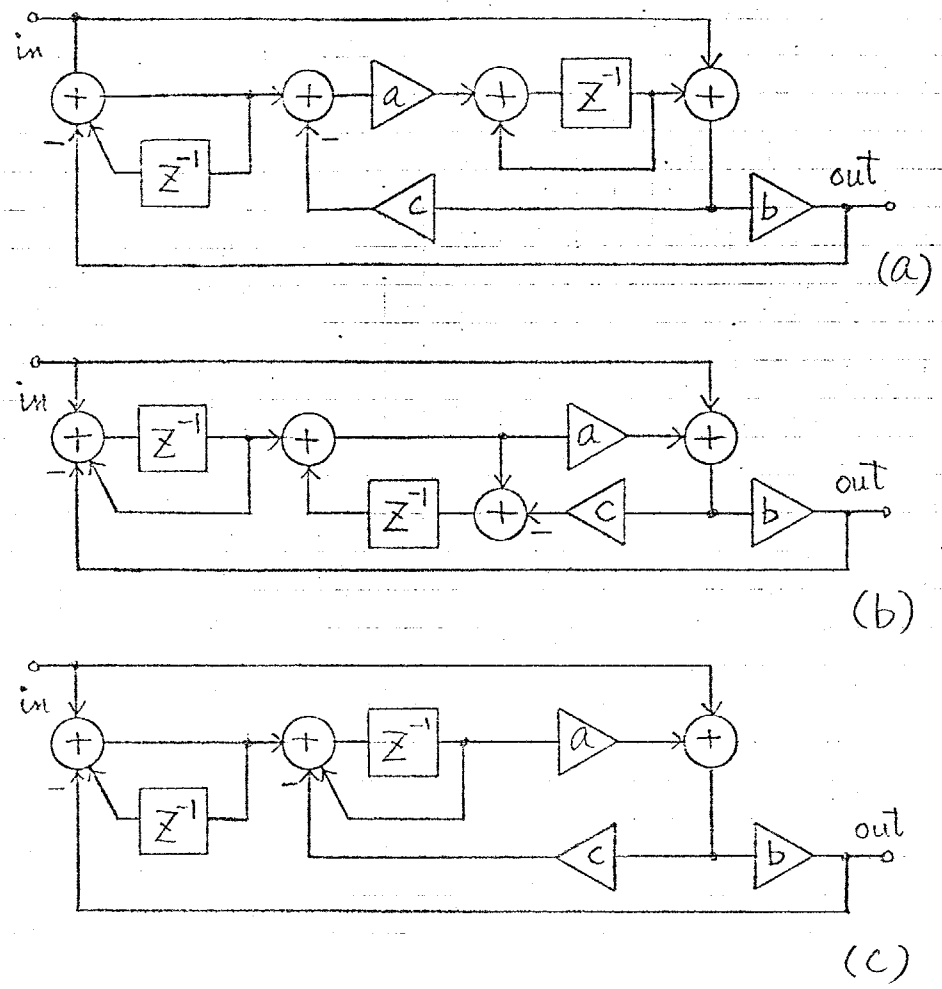


図5-13　ノッチフィルタの回路

§5.4 係数感度とまるめ雑音

前節で得られた回路について、係数感度とまるめ雑音を調べ、従来の回路と比較してみよう。

§5.4.1 係数感度の比較

前章と同様に、フィルタの乗算器係数は2進浮動小数点数で表わし、その仮数部のみを指定した語長にまるめ、フィルタの特性劣化をChrochiéreの相対誤差[11]で評価する。前章と同じ、通過域リプル0.1dBの7次チェビシェフLPFを用いる。フィルタは図5-3の1次LPF1段と図5-8の2次LPF3段を縦続に接続して実現する。通過域内の振幅特性を図5-14に、相対誤差を図5-15に示す。規格化遮断角周波数をπ/100と小さく選んだにもかかわらず、LCシミュレーション法に近い優れた感度特性を示している。

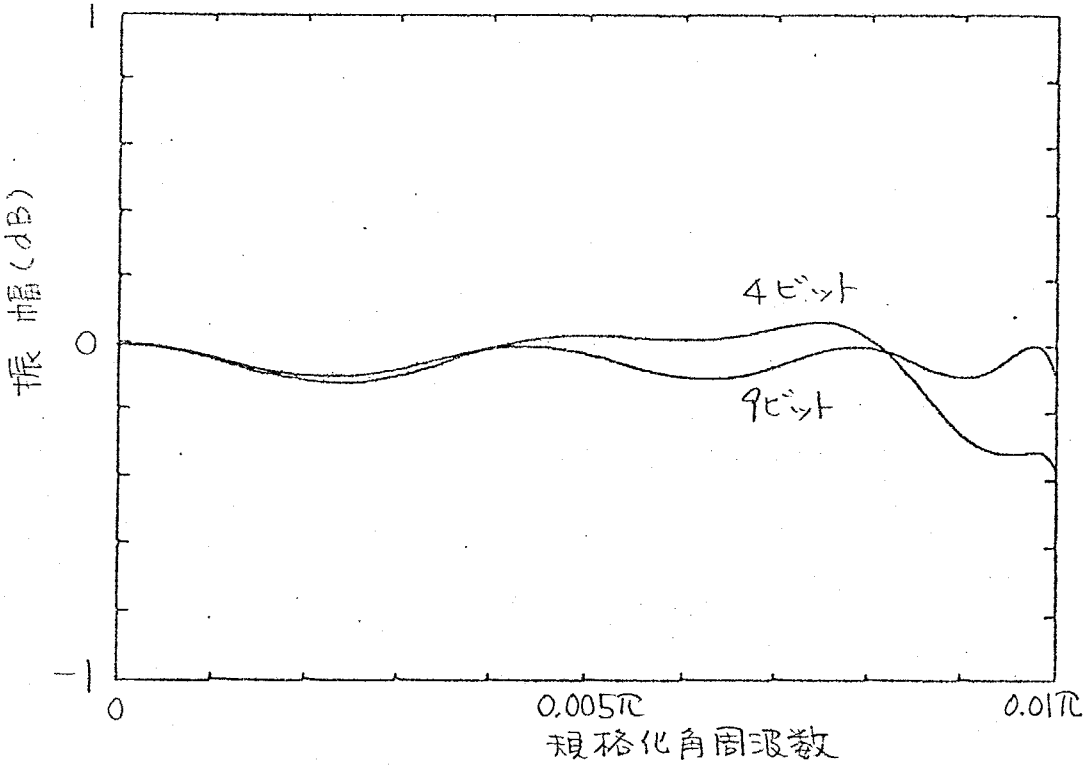


図5-14 7次チェビシェフ LPFの通過域特性

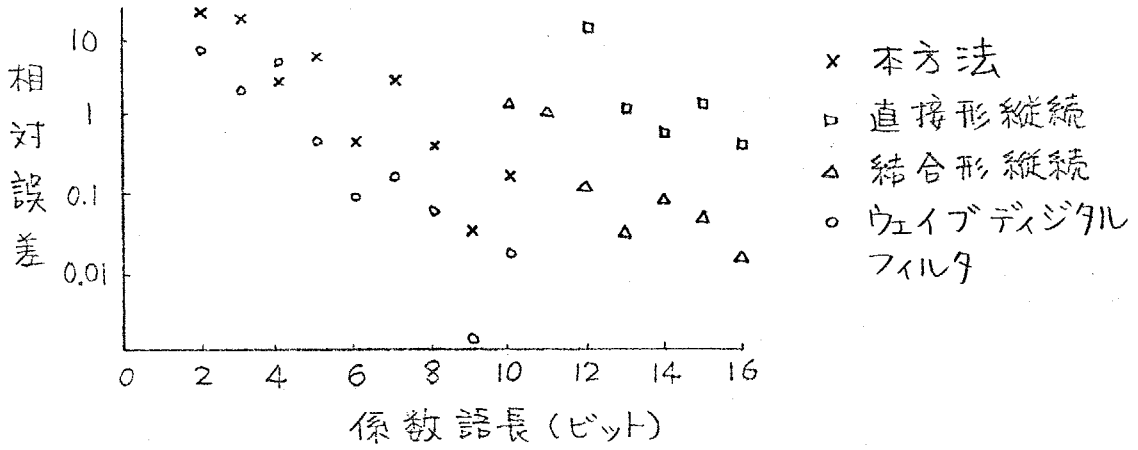


図5-15　相対誤差の比較

§5.4.2　まるめ雑音の比較

浮動小数点演算では、乗算と加算の後でまるめの操作が行なわれ、誤差が生ずる。この誤差が信号の大きさに比べて十分小さい場合には、各演算および時刻について統計的に独立であると仮定することができ、正確な演算に白色雑音が重ね合わされる図5-16のようなモデルを考えることができる。

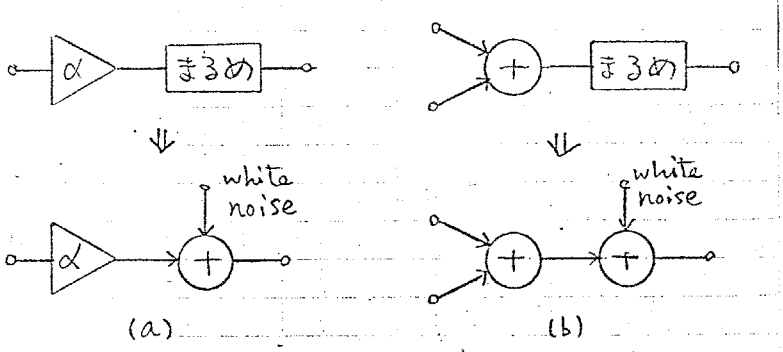


図5-16　まるめの白色雑音源モデル
(a) 乗算器, (b) 加算器

数が浮動小数点で表わされている場合には、まるめは仮数部のみに行なわれるため、信号レベルに比例した白色雑音が加えられることになる。

伝達関数$H(z)$のフィルタに白色雑音を入力した時のまるめ雑音による出力の分散σ_n^2と信号出力の分散σ_s^2との比、即ちNS比は、次式で与えられる。

$$\frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2}=\frac{\sigma_e^2}{2\pi j}\frac{\sum_k \oint F_k(z)F_k(z^{-1})z^{-1}dz \oint G_k(z)G_k(z^{-1})z^{-1}dz}{\oint H(z)H(z^{-1})z^{-1}dz}$$

但し、$F_k(z)$は入力からk番目の雑音発生点までの伝達関数、$G_k(z)$はk番目の雑音源から出力までの伝達関数である。又、語長がbビットの時$\sigma_e^2=2^{-2b}/3$である。

一例として、2次バタワースLPFを各種回路で構成し、NS比を計算する。仮数部7ビットの語長とし、遮断周波数を変化させた時のNS比を図5-17に示す。語長1ビットの変化に対してNS比は6dB変わる。図5-8の4つの等価回路について、図5-17に示す範囲でNS比は1dB以下の差しかないため、最良の(d)の回路で代表した。直接形はJackson[21]の1D形と2D形をとりあげた。図5-17から、狭帯域になる程差が大きいことがわかる。図5-8の回路は、直接形よりはかなり優れているが、Agarwalの回路[14]より少し劣る。しかしながら、図5-8の回路は感度においてAgarwalの回路より優れており(図5-1)、乗算器数も少ない(Agarwalの回路では、分子の構成のために乗算器が2個余分に必要)。更に、構造を変えずにBPFが同時に得られる等の利点をもっている。

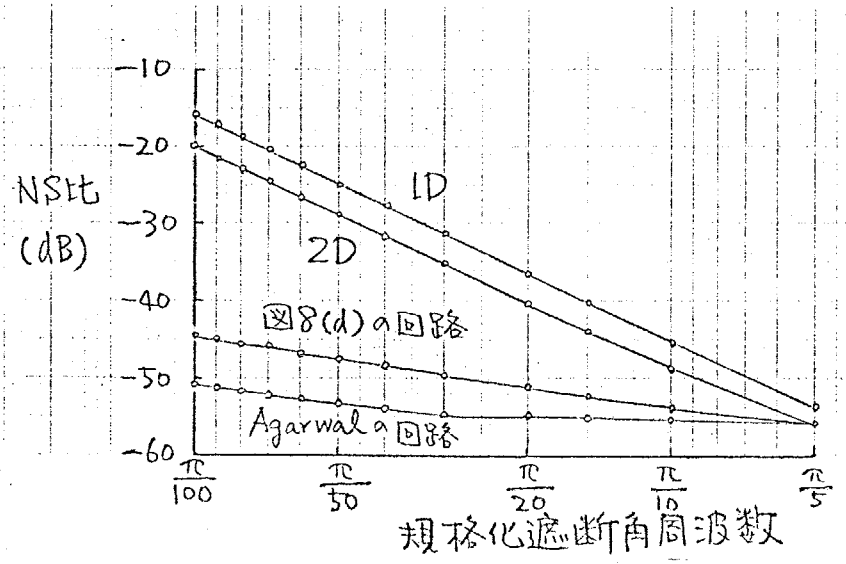


図5-17　NS比の比較

§5.5 むすび

係数感度の低いディジタルフィルタを最少乗算器数で構成する方法として帰還路付加法を提案した。この方法によれば、従来、経験的に求めていた回路が組織的に得られる。しかも、すべての等価回路を求めることができる。この方法によって1次と2次の各種低感度フィルタを構成した。2次のLPFとBPFは同一の回路で入力端子又は出力端子を分けるだけで実現でき、LSI化にも適している。これらの回路の係数感度とまるめ雑音を調べ、従来のものより改善されていることを確認した。より高次のフィルタも、パラメータの数が多くなり複雑ではあるが、同様に構成可能である。

第6章 結論

以上各章にわたって、ディジタルフィルタの特性近似と低感度構成に関する問題について述べた。本研究で得られた成果を要約すると次のとおりである。

第2章では、対称振幅特性をフーリエ級数展開を用いて直接近似する方法における近似誤差が窓関数の使用によって軽減されることを示した。近似過程で2回以上の窓関数の変数と必要な次数を、フィルタの仕様から求める経験的な設計公式も示した。この方法によって、非常に簡単な手順により、円形形ディジタルフィルタの伝達関数が得られる。

第3章では、振幅特性と遅延特性が同時に平坦なディジタルフィルタの極と零点の位置を決定する条件式を導いた。この方程式は計算機を用いて容易に解くことができ、得られるフィルタの応答は理想低域フィルタに近い優れたもので、波形伝送用フィルタとして適している。振幅と遅延の平坦次数は任意に選べ、平坦次数が同程度の時、ヤコビフィルタと一致する。

第4章では、低感度ディジタルフィルタを構成する方法の1つとして、抵抗終端LCはしご形フィルタをシミュレートする方法を示した。LCはしご形フィルタの枝電圧間の関係をSFGで表わし、各トランスミタンスをディジタル回路で置き換えることによって、LCフィルタの低感度特性を受け継ぐディジタルフィルタが得られる。感度特性は、ウェイブディジタルフィルタやリープフロッグ等の他のLCフィルタシミュレーション法と同程度であることが確認された。

第5章では、縦続形構成によって低感度ディジタルフィルタを得るために、1次と2次のディジタルフィルタの伝達関数について考察し、それを最少乗算係数で構成する方法を示した。この時、すべての等価回路が得られるから、それらの中でまるめ雑音の最も小さい回路を選べばよい。2次のLPFとBPFは同一の回路で入力端子と出力端子を分けるだけで実現でき、LSI化にも適している。

謝辞

本研究を行なうにあたり、常に御指導いただいた柳沢健教授に深く感謝する。又、種々御討論いただいた小野田真穂樹助教授、藤井信生助教授をはじめとする柳沢、小野田、藤井研究室の諸兄に深く感謝する。

参考文献

(1) A.T. Johnson: "Magnitude equalization using digital filters," IEEE Trans., CT-20, 3, p.308 (May 1973).

(2) F.F. Kuo and J.F. Kaiser: "System analysis by digital computer," New York, Wiley (1966).

(3) H.D. Helms: "Nonrecursive digital filters: Design method for achieving specifications on frequency response," IEEE Trans., AU-16, p.336 (Sep. 1968)

(4) D. Slepian et al: "Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty principle", B.S.T.J. 40, p.43, (Jan. 1961)

(5) G.C. Maenhout and W. Steenaart: "A direct approximation technique for digital filters and equalizers," IEEE Trans., CT-20, p.548 (Sep. 1973)

(6) J. Thiran: "Recursive digital filters with maximally flat group delay," IEEE Trans., CT-18, p.659 (Nov. 1971)

(7) J.D. Rhodes and M.I.F. Fahmy: "Digital filters with maximally flat amplitude and delay characteristics", Int. J. Circuit Theory and Applications, 2, p.3 (1974)

(8) 佐藤正光: "ヤコビフィルター理想低域特性に近似するディジタルフィルター", 信学論(A), 58-A, 11, p.691 (1975-11)

(9) A. Fettweis: "On the connection between multiplier word length limitation and roundoff noise in digital filters," IEEE Trans., CT-19, p.486 (Sep. 1972)

(10) H.J. Orchard: "Inductorless filters," Electronics Lett., 2, p.224 (June 1966)

(11) A. Fettweis: "Digital filter structures related to classical filter networks," Arch. Eleck. Übertragung, 25, p.79 (Feb. 1971)

(12) L.T. Bruton: "Low-sensitivity digital ladder filters," IEEE Trans., CAS-22, p.168 (Mar. 1975)

(13) B. Gold and C.M. Rader: "Digital processing of signals," McGraw-Hill, New York (1969)

(14) A.G. Constantinides: "Spectral transformations for digital filters," Proc. IEE, 117, 8, p.1585 (Aug. 1970)

(15) R.E. Chrochiére: "Digital ladder structures and coefficient sensitivity," IEEE Trans., AU-20, p.240 (Oct. 1972)

(16) R.C. Agarwal and C.S. Burrus: "New recursive digital filter structures having very low sensitivity and roundoff noise," IEEE Trans., CAS-22, p.921 (Dec. 1975)

(17) E. Avenhous: "A proposal to find suitable structures for the implementation of digital filters with small coefficient word length," NTZ 25, 8, p.377 (Aug. 1972)

(18) 西村, 平野, ミットラ: "特性可変ディジタルフィルタの構成" 信学技報, CST-75-99 (1976-01)

(19) S.K. Mitra and K. Hirano: "Digital all-pass networks," IEEE Trans., CAS-21, p.688 (Sep. 1974)

(20) J. Szczupak and S.K. Mitra: "Digital filter realization using successive multiplier-extraction approach", IEEE, ASSP-23, p.235 (Apr. 1975)

(21) L.B. Jackson: "Roundoff-noise analysis for fixed-point digital filters realized in cascade or parallel form," IEEE Trans., AU-18 p.107 (June 1970)

本研究に関する発表論文

(1) "ディジタルフィルタにおける特性近似について" 信学技報CST74-42 (1974-08) (共著者：杉本)

(2) "再帰形ディジタルフィルタにおける二重窓の応用" 信学論(A) 59-A, 2 (1976-02)

(3) "振幅、遅延同時平坦ディジタルフィルタ" 信学技報CST75-69 (1975-10) (共著者：杉本)

(4) "低係数感度ディジタルフィルタ" 信学技報CST76-26 (1976-06)

(5) "Low-sensitivity active and digital filters based on the node-voltage simulation of LC ladder structures", Proc. 1977 IEEE ISCAS (Apr. 1977) (共著者：吉弘、柳沢)

(6) "低感度能動およびディジタルフィルター LCはしご形回路の節点電圧シミュレーション", 信学論(A) 60-A, 7 (1977-07) (共著者：吉弘、柳沢)

(7) "低感度ディジタルフィルタの一構成法" 信学技報CST77-28 (1977-06)

(8) "最少乗算器構成による低感度ディジタルフィルタ" 信学論(A) 投稿中