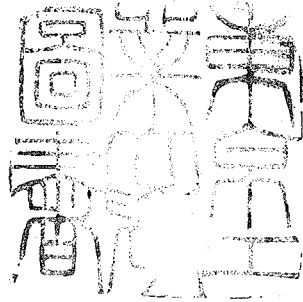


論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	繰返し荷重をうける鋼構造骨組の3次元弾塑性大変形解析に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	和田章
Author(English)	akira wada
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:乙第1069号, 授与年月日:1981年9月30日, 学位の種別:論文博士, 審査員:藤本盛久
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:乙第1069号, Conferred date:1981/9/30, Degree Type:Thesis doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis



繰返し荷重をうける

鋼構造骨組の

3次元弾塑性大変形解析に関する研究

和田 章

東京大学	471665
------	--------

謝 辞

本研究を始めたのは、修士論文を纏めつつあった昭和44秋に
恩師東京工業大学教授 藤本 盛久博士より立体骨組、板の変形を考慮した鋼
構造骨組の力学解析を奨められてからであります。それから10年以上の歳月
の間、常に懇切な御指導を賜わっております藤本盛久先生に心から感謝し厚く
御礼申し上げます。

大学を卒業した後も、東京工業大学教授 小林 啓美博士、東京工業大
学教授 黒正 清治博士、東京工業大学教授 吉見 吉昭博士、東京工業大学
助教授 岸田 英明博士、東京工業大学助教授 鈴木 敏郎博士には、公私に
わたり、研究の有り方、耐震問題、鉄筋コンクリート構造の動的問題、基礎構
造に関する耐震性の問題、鋼構造物の弾塑性不安定問題等について御指導賜わ
り、小生の研究についても御助言、激励を戴き心から感謝致しております。特
に、鈴木敏郎先生には、研究論文の纏め方について心強い御示唆を戴き御礼申
し上げます。

東京工業大学土木工学科助教授 吉田 裕博士には鋼構造協会の応力解析
分科会等で、小生の論文発表の機会をつくって下さり、さらに激励を戴き感謝
致しております。

㈱日建設計に入社した後には、当時社長をされていた
塚本 猛次博士、小生の元上司、現在は東京電機大学教授をされている
須藤 福三博士 の御好意と激励によって研究を進めることができたものであ
ります。心から感謝致しております。

昭和56年春には、藤本盛久教授、近藤和平様をはじめ藤本研究室の方々
が大学の研究室に席をつくって下さり、

日建設計副社長 林 昌二様，東京本社代表 矢野 克巳様，東京本社副代表 岩井 一三様はじめ日建設計の役職員の方々の御好意と御協力によって研究を纏める機会を与えて戴き，今日，ここに研究論文を集成することができた次第であります。以上の方々へ心から感謝の意を表します。

福岡大学教授 多田 英之博士には構造設計における解析の位置付け，研究の有り方等について御教示戴き，千葉工業大学助教授 橋本 篤秀博士ならびに 神奈川大学助教授 大熊 武司博士には絶えず御助言と激励を戴き心から感謝致します。

日建設計取締役技師長 川村 政美博士，大阪本社構造部長 青柳 司様をはじめ同構造部の方々，東京本社構造部長 阿部 宏正様をはじめ同構造部の方々，コンピューター部長 杉原 健児様をはじめコンピューター部の方々には，実際の構造設計について多くを御教示下さり，コンピューターの有効利用について共に考え研究開発を行なってきた方々であります。これに加え，小生が本研究を纏めるために会社を離れたときに最も御迷惑をおかけした方々でもあります。ここに感謝の意をこめて御礼申し上げます。

本研究を進めるために労苦を共にして下さった藤本研究室の卒業生の方々にも御礼を申さねばなりません。特に，清水建設設計部の白方和彦様，新日本製鐵標準建築事業部の岩田衛博士，東京工業大学助手の岡田久志博士，間組東京支店の小杉 立様，東京工業大学助手の中込忠男博士，日建設計構造部の彦根 茂様，建設省建築研究所の緑川光正博士，日本電信電話公社武蔵野通信研究所の中谷文俊様，新日本製鐵の原田昭穂様，東京工業大学藤本研究室の松下真治博士，大学院修士2年生の斉藤安生様，多賀雅泰様に心から感謝致します。

内容概要

本研究論文は、「繰返し荷重をうける鋼構造骨組の3次元弾塑性大変形解析に関する研究」と題して纏めたものであり、鋼構造骨組に静的な繰返し力が働く場合の弾塑性大変形状態における力学的挙動の解析を目的として、自由度の高い仮定条件のもとに誘導した精度の高い解析理論について論じたのち、これを用いた数値解析例について考察するものである。本論文は以下に示す6章より構成されている。特に5章5節において述べる数値解析例は、鋼部材の構成要素である板の変形による断面のゆがみを考慮して部材の弾塑性大変形解析を行なうものであり、今まで非常に難解とされていた問題である。

第1章 序論

数値解析によって鋼構造骨組の3次元弾塑性大変形挙動を解明するために、行なう本研究の背景、既往の研究との対比、鋼構造骨組の力学解析のためのモデル化について論じる。

第2章 弾塑性大変形を考慮した、繰返し荷重をうける 鋼構造骨組の3次元数値解析法

本論文の以下の章において線材解析、板構造解析、これらを一体化して解析する方法について述べるが、本章ではこれらすべての問題について弾塑性大変形解析を行なうことのできる一般論について論じる。具体的には、非線形問題である弾塑性大変形解析を増分法によって行なうための増分段階の計算において、増分歪エネルギーを節点の増分変位を未知量としたまま数値積分によって求め、結果としてこれを増分変位の2次形式で表わし、増分ポテンシャルエネルギーの停留原理にもとづき、変分法を用いて、その1増分を線形化する方法について論じる。この方法は1段階の計算を進めるに当たって1つの近似にす

ぎないので、これを繰返して精度の良い解を得るための方法について詳細に論じる。

第3章 繰返し荷重をうける線材構造の3次元弾塑性大変形解析理論

本章では、2章の一般論に従い、繰返し荷重をうける線材構造の3次元弾塑性大変形解析理論に関して論じる。この理論を用いて、梁の横座屈挙動、2軸曲げをうける柱の挙動、高軸力をうける圧縮材の3次元弾塑性座屈挙動等について数値解析を行なうことができる。さらに、これらの現象を考慮しつつ3次元骨組全体について弾塑性大変形解析を行なうことが可能である。

数値解析例として、理論解の存在している弾性大変形問題 (the elastic) および弾完全塑性梁に集中荷集が働く弾塑性問題を探り上げ本理論の検証を行なう。

より実際的な問題に関する数値解析例については別冊の付録に載せる。

第4章 繰返し荷重をうける板構造の3次元弾塑性大変形解析理論

本章では、2章の一般論に従い3章に述べた線材解析理論を発展させ、繰返し荷重をうける板構造の3次元弾塑性大変形解析理論について論じる。ここで導く理論の特徴は板の面外変位についてだけでなく面内変位についても大変形の影響を考慮していることにある。これによって5章でこの理論を組立て鋼構造部材の解析を行なう際に、部材としての、つまり板にとっては面内変形を伴なうような、弾塑性座屈挙動の追跡が可能となるわけである。この理論を用いることによって、平面応力問題としての弾塑性挙動、板の面外曲げ問題、板の大たわみ問題としての弾塑性座屈問題、板の剪断座屈問題等について数値解析を行なうことができる。さらに、これらの現象を同時に考慮した解析を行なうことも可能である。本章においても数値解析例は理論の検証のために、理論解の得られている問題として等分布荷重をうける周辺完全固定板の大たわみ問題を探り上げ、実際的な問題、弾塑性問題に関する数値解析例は別冊の付録に

載せる。

第5章 部材断面のゆがみを考慮した、繰返し荷重をうける 鋼構造部材の3次元弾塑性大変形解析

本章では、序論において述べた鋼構造骨組のモデル化に従い、鋼構造部材を線材要素と板要素の集合と考える解析法と数値解析例について論じる。

始めに、4章に述べた板構造の解析理論を発展させ、それを立体的に組立ることによって、板要素の集合として鋼構造部材を解析する方法について論じる。

第2に、上記の方法によって部材全体を扱うことは、数値解析上明らかに無駄な部分が多くなるので、局部座屈等の断面のゆがみを無視し得る部分は線材要素によってモデル化し、板の変形を考慮すべき部分だけを板要素の集合として扱う方法を述べ、その両モデルの接合面において力の伝達と変位の適合性を大変形の影響を考慮しつつ満足させる方法について詳細に論じる。

第3に、板要素の立体化解析法および線材要素と板要素の一体化解析法の検証のために、H形鋼片持梁に3種類の荷重を与えた弾性問題を数値解析し、変形状態について理論解と比較する。以上に述べてきた理論によって、繰返し荷重をうける鋼構造部材について、断面のゆがみを考慮すると同時に、部材としての座屈、横座屈等の問題を扱う数値解析を行なうことができる。

最後に、弾塑性不安定解析として最も急激な耐力低下を生じ難解な問題の1つである、繰返し軸力をうけて部材としての座屈を起し、さらに局部座屈が発生する問題を扱う。具体的には、幅厚比の異なる2種類のH形鋼部材を線材要素と板要素の集合によってモデル化し、繰返し軸力を与える数値解析を行ない、軸力-変位の関係、座屈を起す過程における変形状態の変化、応力分布の変化、断面のゆがみ、歪の履歴等について、各種のグラフを用いて考察する。

第6章 結論

本研究論文の結論と今後の研究課題について論じる。

目 次

謝 辞

内容概要

目 次

第1章	序 論	1
1・1	本研究の背景と主題	2
1・2	既往の研究と本研究との対比	5
1・3	鋼構造骨組の応力解析モデル	17
第2章	弾塑性大変形を考慮した、繰返し荷重をうける 鋼構造骨組の3次元数値解析法	21
2・1	序	22
2・2	繰返し荷重をうける鋼構造骨組の3次元弾塑性大変形解析理論	25
第3章	繰返し荷重をうける線材構造の3次元弾塑性大変形解析理論	43
3・1	序	44
3・2	線材構造の解析のための仮定条件	45
3・3	線材構造の数値解析法	49
3・4	理論解との比較のための数値解析例	57

第4章	繰返し荷重をうける板構造の3次元弾塑性大変形解析理論	63
4・1	序	64
4・2	板構造の解析のための仮定条件	66
4・3	板構造の数値解析法	71
4・4	理論解との比較のための数値解析例	81
第5章	部材断面のゆがみを考慮した、繰返し荷重をうける鋼構造部材の 3次元弾塑性大変形解析	85
5・1	序	86
5・2	板要素に分割することによって断面のゆがみを考慮した、 鋼構造部材の3次元弾塑性大変形解析理論	87
5・3	板要素を組立てた鋼構造部材と、線材にモデル化した鋼構造部材の 一体化解析理論	92
5・4	一体化解析理論の検証のための数値解析例	102
5・5	部材断面のゆがみを考慮した、繰返し軸力をうけるH形鋼部材の 3次元弾塑性大変形数値解析例	105
第6章	結 論	165
6・1	結 論	166
6・2	今後の研究課題	169
参考文献		172
筆者の発表した論文		192
付 録		199

第1章

序 論

1・1	本研究の背景と主題	2
1・2	既往の研究と本研究との対比	5
1・3	鋼構造骨組の応力解析モデル	17

1・1 本研究の背景と主題

構造物を設計する際に考慮すべき外力条件が我国と異なる例えばヨーロッパ諸国あるいは韓国のように、設計条件として考える外力が静的であり、外力の大きさにも限界を設定できるような環境に建つ構造物に関する力学的挙動について究明すべき問題は、最大耐力に至るまでの過程と最大耐力そのものにあると言ってよく、最大耐力以降の挙動について分析することは、前記のものほど重要な意味をもたない。なぜならば、最大耐力より大きな荷重が静的に働き続けるとすれば、最大耐力以降の挙動がいかなるものであれ、その構造物は必ず崩壊してしまふからである。

しかしながら、設計条件として大地震、台風等による過酷な動的な外乱を考慮しなくてはならない我国の建築構造においては、上記の考え方をを用いることはできない。

それは、地震、風等の規模が数十年に1度発生するような大きさのときに、経済的理由により構造物が塑性変形を起すことを許容する考え方が一般的であり、構造物が塑性変形する際に吸収する塑性歪エネルギーによって、建物が大幅で振動することを押えろと考えるからであり、さらに動的な外乱は一過性であり静的に働き続けるものではないから、最大耐力を越えるような外力が瞬間的に働いたとしても建物の崩壊にはむすびつかないと考えるからである。

しかし、このような考え方によって、構造物の塑性変形を許容する設計法を用いる場合は、繰返し荷重をうける構造物の弾塑性大変形状態における力学的性状を、最大耐力以降も含めて構造物が崩壊するまでの挙動すべてについて分析し究明しておく必要がある。

特に建築に用いられる鋼構造骨組の場合には、鉛直荷重の他に、地震力等の水平荷重を考慮して設計しているため、骨組としての弾性的不安定現象を起すことは少ない。使用部材の断面形状を選択する際にも、座屈現象による急激な耐力低下を避けるために断面の圧縮に関する許容耐力値をできる限り引張りに関する許容耐力値に近づけるようにする結果として、部材の細長比、板の幅厚比はそれぞれ塑性座屈領域の値をもつ、つまり太短い部材が多用されることになる。

このように、建築に用いられる鋼構造骨組は大荷重をうけると、まず始めに、塑性域の歪をうけ、最終的に弾塑性座屈を生じて不安定になるか、あるいは部材または接合部が破断するかによって崩壊する。さらに、これに作用する外力は1方向的に増加するような荷重ではなく、ランダムな振幅で正負に繰返す荷重であることが特徴である。

このような背景にあつて、本研究の主題は建築構造物の真の安全性を調べるために、大きな繰返し荷重をうけ、構造物に生じる歪が塑性域に進入した後に起る不安定現象までを追跡できる理論を確立し、この理論を応用した数値解析によって、構造物の終局的な崩壊のメカニズムを究明することにある。

始めに、繰返し荷重をうける鋼構造骨組を対象として、材料の降伏現象に起因する弾塑性問題としての非線形性(material nonlinearity)と構造体が外力をうけて変形した後の形状を用いて釣合条件を考えるために生じる非線形性(geometrical nonlinearity)を同時に考慮した3次元弾塑性大変形解析法の一般論を提示する。次に、繰返し荷重をうける線材構造と板構造について独立にこの一般論を適用して、それぞれの3次元弾塑性大変形解析理論を展開し、解析解のある問題について数値解析を行い本理論の検証を行う。特に線材理論については、具体的な鋼構造骨組に関する実験との比較検討を行ない付録の論文集へ別載する。最後に、線材構造と板構造を一体として解析する理論を展開し、この解析法によって、繰返し荷重をうける鋼構造部材の断面のゆがみを考慮した3次元弾塑性大変形解析を行う。

本研究の大きな特徴は、力学解析を行う際に最も基本的条件となる外力の設定として繰返し荷重を扱っていることである。特に塑性座屈を起すような鋼構造骨組の場合、処女載荷時と繰返し荷重をうけた後の挙動は大きく異なることが実験的に明らかであるにもかかわらず、従来の研究は一方向的に増加する外力に関するものがほとんどである。

本論文において提示する解析法のもう一つの大きな特徴は鋼構造部材を構成する板の弾塑性局部座屈現象と部材としての座屈現象を同時に考慮できるところにある。たとえば、H形鋼部材について考えるとき、今まで非常に難解とされていたフランジ、ウェブの局部座屈が部材全体の座屈現象へ与える影響、逆

に部材としての座屈がフランジ，ウェブの局部座屈を誘発する問題等を総合的に数値解析できる特徴がある。

本研究の最終的な目標は，構造物全体を対象として，地震等の大きな動的外乱を受けたときの挙動を調べるために動的弾塑性大変形解析を目指すものであるが，本論文では静的な繰返し荷重をうける鋼構造骨組の3次元弾塑性大変形解析に関して論じるものである。

1・2 既往の研究と本研究との対比

1. 本研究の基礎となる材料力学の歴史

コークス高炉が完成し、パドル法によって錬鉄が作られ、構造材料として鉄が使えるようになったのは18世紀末であるから、鉄骨構造の歴史は約200年ということになる。ガリレオ・ガリレイ、ニュートン、フック、ベルヌイ、オイラー、ラグランジュ等は1800年以前に活躍した人々であり、オイラーが棒の座屈理論を発表したのは1744年、クーロンが中立軸、梁の曲げ理論を発表したのが1776年であるから、鉄の本格的な構造物への利用の基礎的順備はでき始めていたと考えられる。

本論文の3章の理論の検証のために用いる“ELASTICA”はオイラーによって解かれている問題である。オイラーは先に有限変位理論を考え、後になって微小変位理論を作っている。真の挙動が大変形理論によって説明できることから考えると、この理論が先に生まれていたのは当然であるとも考えられるが、このような研究をてがけた者にとって非常に興味のあることである。コールブルックデールにスパン30.5mのIron Bridgeが作られたのは、1779年、1776年にはアメリカの独立、1789年にはフランス革命があった時代である。

1800年代に入ると、1831年にはイギリスでアングル材の生産が始まり、1856年には、現在でも鋼の生産に最も標準的に使われている、転炉の発明、1864年には平炉が発明され、1881年にはアーク溶接も使われるようになっていく。これにともなって、実際の建築・土木にも鉄が使われており、イギリスの万博にはクリスタルパレスが1851年に作られ、1889年にはパリのエッフェル塔、1884年にはシカゴに10階建の鋼構造ビルが建てられている。橋梁では、1874年に158mスパンのEads橋が、1890年には521mスパンのForth橋が作られている。しかし、この時代は、座屈に関する設計方式が確立していなかったために落橋した橋もあり、これに刺激されて、以下に示すように座屈の研究が進み、設計のための応力解析法として、各種の理論の基礎がかためられていった時代である。

1823年にはNavierが板の座屈に関する微分方程式を導き、ヤンスキ

ーはボニー橋の事故で知られる構面外座屈の研究を行っている。1876年にはカステリアーノが“ Theory of Equilibrium of Elastic Systems and its Applications ” を発表し、1889年にEngesserがTangnt Modulus theory により塑性座屈の領域について理論を発表し、数年後には Reduced Modulus theory も発表している。1896年にはテトマイヤーの座屈公式が出されている。

1900年代に入ると、1921年には、H形鋼がベルレヘムスチールによって生産され始め、1952年にオーストリアで純酸素の転炉が発明されている。1914年～1918年は第1次世界大戦、1939年～1945年は第2次世界大戦があつたが、建築・土木の技術は飛躍的に進み、1931年にはエンパイーステートビル、1937年にはゴールデンゲート橋、1953年にはMIT講堂、1967年にはアストロドーム、1973年にはシカゴにシアーズタワー等が建てられている。しかし、この間にもケベック橋の落橋、タコマ・ナロウズ橋の落橋、1923年の関東大地震、世界にも地震による被害は現在でも多い。

1900年代には構造物の終局的な耐力を求める理論研究が進み、たとえば、弾性破損に関するせん断歪エネルギー説がM.T. Huberによって1904年に発表され、1914年にはハンガリーのKazinczyによってPlastic Hingeの実験が行われている。F. Breichによって板の塑性座屈の研究が1924年に、Von Karman によって座屈後の板の挙動に関して有効幅の考え方が1932年に発表され、塑性設計に関する研究がイギリスのJ.F. Bakerらによって1936年に始められている。1947年にShanleyは単純圧縮材の弾塑性座屈に関してジャンレイモデルを用いた論文を発表している。第2次世界大戦以後は電子計算機の発達、宇宙開発の目的等で急速に進んだ応力解析法、非線形解析法、動的解析法がある。

2. 有限要素法の開発とその発達

1956年9月号のJournal of the Aeronautical Sciencesに有限要素法に関する初めての論文“ Stiffness and Deflection Analysis

of Complex Structures”がボーイング社のエンジニアM.J.Turner, L.J.Topp, カリフォルニア大学のR.W.Clough とワシントン大学のH.C. Martinによって発表されている。この考え方の発展形として1960年2月号の同誌にはM.J.Turner, E.H.Dill, H.C.Martin, R.J.Meloshによって“Large Deflection of Structures Subjected to Heating and External Loads”が発表されている。この論文は本研究の主題である有限変位を考慮する解析法をマトリックス展開してStep by Step法, Iteration法による収束計算によって, 行い得ることを論じた最初の論文である。

1960年にはドイツ・スツットガルト大学のArgyrisによって“Energy Theorems and Structural Analysis”が発表され, 応力法と変位法を併記している。この時の変位法は現在Direct Stiffness Methodとして使われている変位法とは異り, 応力法と対称的に考えられた方法で, 不静定にかかわる変位だけを未知量として問題を解くものである。

1965年には, 日本語に翻訳された初めてのマトリックス法の教科書“Introduction to Matrix Method of Structural Analysis”がMartinによって書かれ, 単行本としては初めて有限要素法を紹介している“Stress Analysis”も同年にO.C.ZienkiewiczとG.S.Holisterによって書かれている。1967年にO.C.Zienkiewicz, Y.K.Cheungによって“The Finite Element Method in Structural and Continuum mechanics”が発刊され, その後のなばなしい有限要素法に関する開発が始められる。有限要素法, マトリックス法の考え方は力学理論の最も基本に立って作られており, 汎用的であるため, その応用は航空機, 船, 建築, 土木等の分野にかかわらず共通になる特徴がある。

このため, 1960年代に日本へ輸入されたこの考え方は急速に各種の分野へ拡がり, 日本航空宇宙学会, 日本造船学会, 日本機械学会, 日本土木学会, 日本建築学会等の学会において, それぞれの研究開発が発表されると同時に, 日本鋼構造協会の応力解析分科会, 日本学術会議の主催による応用力学連合会等が異った分野の技術交流の場となっており, 現在ではヨーロッパ, アメリカとならんで日本における研究も国際的なものになっている。

基礎理論の展開については鷺津久一郎，山本善之，川井忠彦，栖原二郎，成岡昌夫，川股重也，等が研究の中心であり，数値解析の基本について，戸川隼人，菊池文雄，Transfer Matrix については柴田碧，板曲げに関する理論については吉田裕等が多く論文を発表している。非線形問題については1968年に山田嘉昭らによって平面応力問題に関する応力-歪のマトリックスが“Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method”において発表され，この後，有限要素法による弾塑性解析が実用的に行われるようになる切っ掛けを作った。破壊力学への応用は宮本博が中心になって研究を進めている。有限変位問題への適用は航空機材料部材の安定問題へ三本木茂夫，造船構造の分野では上田幸雄が板の座屈に関連した研究を行っている。

3. 日本の建築構造に関する非線形解析の歴史

我国の建築構造力学の分野では，大地震に対する耐震設計として古くから，塑性変形を許容するという考え方があり，構造物の終局強度を求める必要もあったため，骨組構造に関する終局強度解析，不安定問題の解析の研究の歴史は長い。これらの研究は，坂静雄が1931年に発表した「撓角法による剛節架構の安定論」に始まり，基本的に撓角法の考え方に添って進められている。

弾塑性性状を考慮する場合には，部材端部の塑性ヒンジにその効果を集約して考える方法，または部材の中の塑性域を考慮して撓角法の係数そのものを弾性時の値と変えて考える方法等がある。この考え方に大変形を考慮して軸力による付加曲げの項を考慮することによって弾性，弾塑性域における不安定問題を扱ったのが藤本盛久の論文である。

その後，1960年代中期まで，これらの研究は骨組の持っている終局強度を直接求めることにあったが，1966年に服部正が「繰返し荷重をうける建築構造骨組の崩壊過程追跡に関する研究」を発表してから，骨組の崩壊過程そのものを追跡し，その最終状態が終局強度を示すという考え方も用いられるようになった。

しかし、1970年ごろ有限要素法、マトリックス法の考え方がこの研究分野に応用されるまでは撓角法的考え方、つまり柱・梁等の部材を解析上の単位とすること、節点の変位としては回転角を考え、部材角によって節点の移動を考える方法が採られている。

部材断面の降伏条件としては、曲げモーメントと軸力の interaction curve を仮定しているものが多い。後期になって断面をサンドウィッチ構造と考え、各々の層における応力-歪関係を直接追跡する方法も表われているが、主に鉄骨断面に曲げモーメントと軸力が働いているときの曲率、歪について扱った断面解析、または1本の柱について扱ったようなものが多く、骨組まで解いているものは少ない。

このころまでに発表された主な論文は以下に示すようなものである。1955年小野薫、田中尙の「軸方向力を考慮したラーメンのリミットデザイン」、1963年牧野稔の「水平力を受ける鉄骨ラーメンの変形状に関する一考察」、1964年若林実、辻文三の「繰返し水平荷重をうけるラーメンの性状」、1965年坂本 順らの「鋼構造骨組の弾塑性域における変形と安全性に関する考察」、1965年～1968年藤本盛久、羽倉弘人の「繰返し荷重をうける鉄骨断面の弾塑性解析に関する研究」及び「繰返し荷重をうける鋼構造物の歪硬化モデルを用いた弾塑性解析」、1966年～1968年加藤勉、秋山宏の「鋼構造部材の耐力」、1966年 黒羽整明の「Analysis of Inelastic Frame Buckling」、1966年中村恒義の「繰返し応力を受ける線形歪硬化サンドウィッチ柱の弾塑性挙動」、1966年五十嵐定義らの「繰返し荷重をうける鋼構造架構の塑性性状」、1967年山田稔らの「軸圧をうけるH形鋼部材の弾塑性曲げ変形状に関する研究」、1968年若林実、野中泰二郎の「架構の復元力特性に関する軸力を考慮した多線型解析」、1970年藤本盛久、松本芳紀の「軸力と2方向曲げモーメントをうけるH形断面部材の力学的性状に関する研究」、1971年松井千秋らの「鉄骨圧縮筋違の弾塑性解析」、1973年花井正実らの「繰返し荷重をうける鋼構造骨組の弾塑性解析」、1977年岡田久志の「鋼構造骨組の三次元弾塑性解析に関する研究」等が主な論文である。

4. 本研究の特徴

以上のような研究活動を背景として、本研究「繰返し荷重をうける鋼構造骨組の弾塑性大変形解析に関する研究」は1968年に着手したものである。このころまで、有限要素法は、連続体特に平面応力問題に用いられ、弾塑性解析にもその有効性が発揮されていたが、本研究の特徴はこの考え方を骨組解析に応用し、1本の部材を長さ方向に細かく分割し、5～20本の1次元有限要素を用いて表わし、それを組み立てることによって骨組の解析を行おうとしたところにある。(付録-Aを参照)

1971年に建築学会論文報告集に発表した論文「任意形平面骨組の非線形応力解析」においては、要素の軸方向の変位を2次関数、横変位を4次関数で表わし、曲率の計算に厳密な式である $\phi = v'' / (1 + v'^2)^{3/2}$ を用い、断面内の応力-歪分布をガウスの積分点において追跡する方法を用い、各種の鋼構造平面骨組について弾塑性有限変位解析を行った。この論文において、非線形問題を増分法によって線形化するために、歪エネルギーをすべて数値積分によって計算し、増分変位をポテンシャルエネルギーの停留原理にもとづき変分法によって決定する一般的な方法を提案した。

1973年にはこの解析法をさらに発展させ、部材断面を20層のサンドウィッチ断面要素の集まりであるとして、各断面要素において応力-歪を追跡する方法を用い、材料の特性として歪硬化、バウシinger効果を扱える解析法を発表した。この解析法により弾塑性座屈を生じる軸力材が繰返し軸力をうける場合の挙動を追跡し、このころ、国内及び米国において発表されつつあった同種の繰返し荷力実験によって得られる結果とほとんど同じ現象を数値解析によって表わすことができることを示した。同時に、繰返し水平力をうける筋違付鉄骨ラーメンの挙動を、数値解析によって解明し、既に行われていた実験の結果との比較検討を行った。この論文においては、要素分割を細かく行うことにより、変形後の要素内部の変位関数を先の論文より1次下げ軸方向1次、横変位3次の多項式を用い、曲率 ϕ は v'' によっても高い精度が得られ、断面の塑性化の追跡はその要素の両端の断面で行えば、充分追従性の良い解が得られることを示している。

1975年にはこの考え方を3次元鋼構造骨組へ適用できるように拡張し、曲げねじれ座屈等も扱える一般的解析法を確立し、建築学会論文報告集へ「鋼構造骨組の三次元非線形解析」という表題で発表した。

この論文中では、軸力をうけつつ2軸曲げをうける柱、曲げモーメントをうけて横座屈する梁について数値解析を行い、最後に構面外座屈を生じるK形筋違をもった骨組について数値解析を行い、実験結果と比較検討を行った。先の論文に発表した構面内座屈する筋違付き骨組についても同様であるが、圧縮材が実際に座屈する現象をそのまわりの骨組の弾塑性解析と同時に行い、梁、柱の変形性状が圧縮材の変形挙動へ与える影響をそのまま扱った研究は現在においてもない。

これまで行ってきた研究の特徴は先にも述べたように、繰返し荷重を受ける鉄骨骨組の解析を行い、実験結果と比較検討することにより、例えば一つの圧縮材である部材の挙動についても、そのみを骨組から取り出し単材で扱うときと、骨組の中に組み込まれているときの挙動の違いについて、その問題点を明らかにできることにある。さらに、3次元解析法においては部材が面外座屈する際に周辺の部材のねじれ抵抗を非線形の範囲で評価する等、骨組の三次元的な非線形挙動を解析的に適格に把握することを可能にしたこと等が大きな特徴である。さらに我国の建築構造物のように、重力に対する抵抗より水平方向の繰返し力を大きく問題としている構造物は他には少なく、土木の分野、外国の研究等を調査しても、一方向载荷に対する終局耐力、終局の安全性の問題を扱っているものは数多くあるが、繰返し荷重、歪の戻り現象等を考慮した研究は非常に少ない。それゆえ、繰返し荷重、初期たわみ、歪の戻り現象等の外的、内的な条件をできる限り考慮した解析を共通した考え方により、ある程度複雑な問題にも応用できるようにしたことが本研究の最も大きな特徴である。

5. 部材の力学的挙動に与える部材断面の変形の影響

これまでの骨組解析に関する研究には重要な仮定条件として「部材が変形をうけても部材の断面形状は変化しない」を常に設けている。実際の被害例、実験によって壊わされた鋼構造骨組について、部材が大きな変形を起こしている

ところでは、必ずしも局部座屈が発生しているにもかかわらず、骨組解析に関するほとんどの研究が断面の変形を無視した仮定の上に成り立っている。

一方、鋼構造部材の構成要素である板の局部座屈については、部材の変形挙動とは切り放し、各種の境界条件（周辺ピン支持、3辺ピン支持、3辺固定支持、他の板の剛性を回転バネにした支持等がある）における純圧縮座屈、純せん断座屈、純曲げ座屈、互いが同時に作用した場合の問題等について扱われているだけである。実際の設計においては、部材が、局部座屈を起すことなく、部材としての降伏現象を生じさせるために必要な幅厚比の規定を満たすことにより、部材としての性質と板としての性質を分けることでこの問題は処理されている。

たとえば、ウェブの幅厚比の規定とフランジの幅厚比の規定、部材の細長比の規定が独立に決められており、降伏耐力、最大耐力を越えた後の挙動が重要な問題とされている今日においても、これらの違いが互いに、部材の耐力、変形挙動にどのような影響を与えるかについてはまったく考えられていないのが現状である。

1つの例として、本論文の5章で述べるような問題、つまり、ウェブ、フランジの幅厚比が異なる2つの断面について、それぞれ同じ細長化の圧縮材を2本作ったとしたとき、これらの座屈後の挙動の差異等についてはまったく考察されていない。

この問題に関する解析的な既往の研究としては、H形鋼部材についてフランジ、ウェブにYield Lineを仮定することにより局部座屈モードを考える極限解析的手法が用いられており、局部座屈の発生にともなって部材としての変形挙動、座屈現象について、その崩壊過程を追跡するような解析的研究はない。

極限解析的手法の研究論文は、1957年G.Haaijerの“Plate Buckling in the Strain-Hardening Range”，1965年M.G.Layの“Flange Local Buckling in Wide-Flange Shapes”，1964年～1968年田中尚、高梨晃一の「プラスチックヒンジにおけるウェブ幅、フランジ幅の制限に関する研究(1)～(8)」，1966年加藤勉、福知保長の「フランジの変形能力とはりの崩壊について(1)，(2)」，1969年福知保長の「モーメント勾配を

有するはりのフランジ局部座屈と耐力について」, 1973年加藤勉, 秋山宏の「H形断面柱フランジの塑性局部座屈耐力」等がある。先にも述べたように, 部材が荷重を受け, 局部座屈, 全体座屈をともないながら挙動する現象を解析的に扱った論文はない。

本研究における最も大きな特徴は, ここに述べたような問題を, 先に示した線材構造について導いた理論を発展させ, 鋼構造部材を板の集合でモデル化し, 繰返し荷重下での板の局部座屈による断面のゆがみを考慮しつつ部材の弾塑性有限変位解析を行う理論を確立し, 実際に数値解析を行ったことである。

6. アメリカにおける同種の研究

本研究に関連した分野における, 米国の研究活動は盛んであり, 1960年～1970年代にかけて以下に示すような内容の論文が発表されている。しかし, 日本における耐震構造の研究にとって不可欠の大きな繰返し荷重を対象としているものは少なく, 一方向外力下における挙動の追跡を扱ったものがほとんどである。板の集合として梁の問題を解き, 局部座屈を扱っているものもあるが, 弾性固有値解析であって本研究で行ったような, 板材料の降伏を考慮して部材の解析を行った研究論文はない。

1968年 J.S.Przemieniecki の "Discrete-Element Methods for Stability Analysis of Complex Structures" は板の座屈問題に有限要素法を用い, 固有値解析によって得られた解を古典的な解と比較している。1969年 D.W.Murray, E.L.Wilson は "Finite-Element Large Deflection Analysis of Plate" において, 三角形の有限板要素を用い弾性大たわみの問題を扱っている。1973年 Przemieniecki は "Finite Element Structural Analysis of Local Instability" において, 細長い板の長辺方向に多くのリブを有する補強板構造について長さ方向にはフーリエ級数, 断面方向には有限要素的な変位関数を考えて弾性座屈の問題を扱っている。1973年 S.Rajasekaran, D.W.Murray は "Coupled Local Buckling in Wide-Flange Beam-Columns" において H形鋼梁の局部座屈と横座屈を同時に考慮した弾性固有値問題を解いている。フランジはウェブ

との交点を中心に回転を生じ、ウェブは3次曲線の変形を生じるとして全体の固有値問題を組み立てている。1973年S.Rajasekaran, D.W.Murrayは“Finite Element Solution of Inelastic Beam Equations”において線材の単調載荷による弾塑性有限変位解析を紹介している。1974年C.P.JohnsonとK.M.Willは“Beam Buckling by Finite Element Procedure”において梁部材をすべて有限板要素に分割し、梁の途中に入れるリブの効果等も考慮して、固有値問題として局部座屈と梁としての座屈を同時に解析したものである。

7. 国内の建築構造以外の分野の研究

我国の建築構造以外の構造工学の分野でも、本研究と同様の研究がなされている。しかし、解析手法の基本は共通であるにもかかわらず、最終的に応用しようとしている構造そのものが、船、飛行機、自動車、橋梁等のように異なるため、本研究で扱ったように具体的な構造部材、骨組構造について、最大耐力時の変位を超える大きな振幅で繰返し変位を与える解析はみられない。1960年～1970年代に発表された論文を以下に紹介する。

1971年大坪英臣は「平板の弾塑性大たわみ問題の一解法——特に平板の圧縮最終強度について——」を発表し、面内変位は有限要素法による変位関数、面外変位はフーリエ級数を用いて弾塑性大たわみ解析を行っているが、最大耐力以降の追跡については良好な解を得られていない。1972年に山本善之は「外圧を受ける球殻の座屈」、横内康人は「軸対称円筒殻の大変形問題」を発表している。同年に上田幸夫らは“Elastic-Plastic Analysis of Framed Structures using the Matrix Method”においてWebの終局強度について論じている。1973年に山田嘉昭、高塚公郎は「平面変形モデルによるはりおよび柱の弾塑性解析」を発表し、一般の有限要素では平面問題におけるbeam的な変形(3次曲線)を表現しにくいことを改良するために $v = \beta_1 x^2 + \beta_2 x^3$, $u = 2\beta_1 xy + 3\beta_2 x^2 y$ なる変位の補正関数を提案している。本研究においても同様の理由で面内変位の補正関数を用いている。

1973年に荒井宏範は「板構造物の大変形解析」によって板材の弾塑性性

状を考慮した大変形問題の解析を発表している。しかし、この研究も一方向載荷しか行っておらず、最大耐力以降の挙動はうまく追跡できていない。1974年、結城皓曠、前田幸雄は「薄肉断面構造の三次元挙動の解析」を発表し、アーチ状の梁等について弾性大たわみの解析を行い、横座屈の現象を扱っている。

8. ま と め

1950年代に生まれた有限要素法は1970年代なかばまでに急速な進歩をとげ、その基本的な開発は終りに近づいたと言えよう。1970年代後半からは、理論体系を数学的に証明する研究と、実際の構造設計への応用へ、その主な研究開発の勢力が使われるようになっていく。1978年にアメリカのNASA Langley Research Centerで開かれた会議“Trends in Computerized Structural Analysis and Synthesis”がこの時代の様子をよく表わしており、これらの分野の人々が今後の方向を見い出そうとして努力していることが分る。

この会議にGeneral MotorsのKuo-Kuang Chenが本論文で扱おうとしている問題と同様のテーマの論文“A Triangular Plate Finite Element for Large-Displacement Elastic-Plastic Analysis of Automobile Structural Components”を発表している。しかし、この研究においても、繰返し荷重は扱われておらず、本研究で扱おうとしている板を組み立てて作られた部材について解析を行っているが、板としての座屈現象は考慮しているものの、部材としての座屈現象つまり板にとっては面内の有限変位の項が扱われていないため、板座屈と部材座屈の相互影響を考慮した解析とは言えない。

国内における最近の研究としては鈴木敏郎、金子洋文が「鉄骨H形断面部材の連成局部座屈解析」においてウェブおよびフランジの局部座屈変形をRayleigh-Ritz的に関数展開し部材の面内初期ひずみ問題として有限要素法を用いる方法を導びき、ウェブとフランジの局部座屈の連成効果について論じている。土木の分野では吉田裕、増田陳紀らが势力的に研究発表を行っており、「薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法」において本研究と同様な目的をもった数値解析法を提案しており、アーチの座屈問題、円板の弾

塑性大たわみ問題，軸圧縮力をうけるH型鋼柱の問題，正方形板の非常に大きな変形の問題，軸圧縮力を受ける円筒殻の問題等について数値解析を行い，有効な解析法であることを示している。以上，著者は本研究を有限要素法の研究開発の最盛期に続けてきたことになる。ここで本研究の持つ特徴をまとめると以下のようになる。

繰返し荷重をうける鋼構造物に関して，弾塑性有限変位解析理論の一般論を展開し，これを線材構造，板構造に応用した後，骨組を線材と板によってモデル化し，その非線形挙動，特に繰返し荷重下における部材座屈，断面のゆがみ（局部座屈）の現象を数値解析によって明らかにしようとするものである。

本研究の最終的な目標は，このモデル化によって骨組全体を解くことにあるが，現段階では線材モデルによって骨組を扱い，部材の問題を線材と板構造を合わせたモデルによって解析する。

特に5章において扱っている繰返し荷重下で局部座屈をともなうH形鋼部材の数値解析の結果から得られた部材の中央断面における曲げモーメントと軸力の降伏曲線図上での軌跡は，実験によらずに局部座屈の影響を考慮して解析的に求めた最初のものである。2枚のフランジが局部座屈することによって，本来断面のもっている曲げモーメントと軸力に関する降伏曲線が極端に縮少することが表わされている。

今後，このモデル化によって骨組全体の数値解析を行うことができれば，板，部材と骨組それぞれの弾塑性，大変形問題が相互影響し合う実際に近い現象を追跡できるようになり，実験だけでは知ることのできない，鋼構造骨組の複雑な性質を明らかにすることができると思う。

1・3 鋼構造骨組の応力解析モデル

建築構造の力学解析を行うためには、その構造物をモデル化すると同時に、それに働く外乱のモデル化が必要である。構造物を観察し、マクロ (10^4 cm) からミクロ (10^{-9} cm) へ分析して整理すると図1.1のように書くことができる。このAからHの段階に応じてそれぞれの力学解析が可能である。

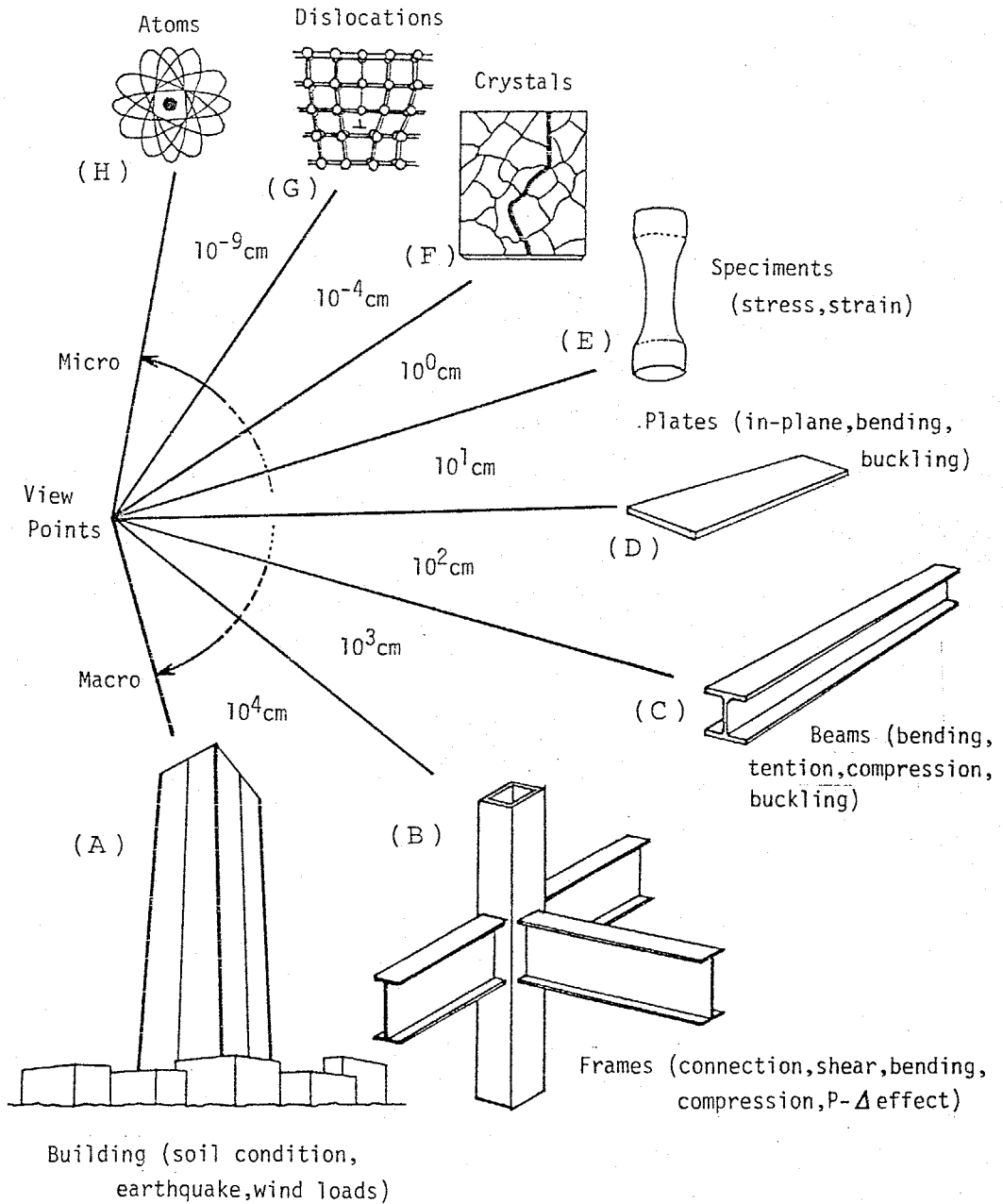


図1.1 鋼構造骨組のモデル化とスケール

一般に、実際の構造物を対象としたとき、マクロに近い構造モデルを扱う際には多くの仮定条件を用いて構造物を単純化する必要がある、ミクロに近い構造モデルを扱う際には、その仮定条件は徐々に少なくなり、真の物理的現象を忠実に追跡できるようになってゆく。しかし、それに対応させて考えるべき外乱のモデルについては、問題をマクロにとらえているときの方が実際に近いものを対象とすることができ、ミクロにとらえようとするときには理想化された外乱を用いなくてはならなくなるが多い。例えば、ビル構造の耐震問題を動的に研究する場合は、構造物をバネとマスによっていわゆる串団子に置換するマクロモデル、極端な場合として、金属工学においては、原子の構造、転移論により鋼棒の引張り強度を論じようとするミクロモデルがある。

本論文では、外乱を静的な繰返し荷重モデルに限定して考え、構造物については以下に述べるような2段階のモデル化を考える。

第1段階は1本の部材を10～20本の線材要素によって分割して表わし、立体骨組構造をその部材を用いて組立てるモデル化である。この場合、部材断面のゆがみは無視し、平面保持の仮定のもとに材料の降伏現象を断面内に発生する応力と歪によって直接追跡する。このモデルを用いることによって、柱、梁等の単一の部材としての3次元の挙動を扱えることは当然であるが、さらに骨組としての3次元の挙動も扱うことができる。

第2段階は、図1.2(c)に示すように部材を板要素の集合として考えるモデル化である。このモデル化によって板の変形、つまり断面形のゆがみ(局部座屈)を考慮することができる。しかし、一般に、部材の中で局部座屈の発生するであろう位置は、外力の働き方、支持条件によって決められるので、図1.2(d)に示すように、板の変形を考慮しなくてもよい部分を線材に置換するモデル化が有効である。このモデル化によって、繰返し荷重をうける鋼構造部材について、部材の曲げ座屈、曲げねじれ座屈現象と、板座屈(局部座屈)の連成効果を考慮した弾塑性大変形解析が可能である。

本論文において用いた新しいモデル化の意義は、次の3点である。「外乱として静的ではあるが、繰返し荷重を扱っている。」、「立体骨組解析を、各々の部材の3次元弾塑性大変形挙動を考慮して解析する。」、「部材を扱うときに、

その構成要素である板の変形を考慮して部材全体の解析を可能にする。」

このように、力学解析のある意味での進歩は、その問題を扱っているモデル化の幅が図1.1のview pointから見て広い角度になってゆくことである
と考える。

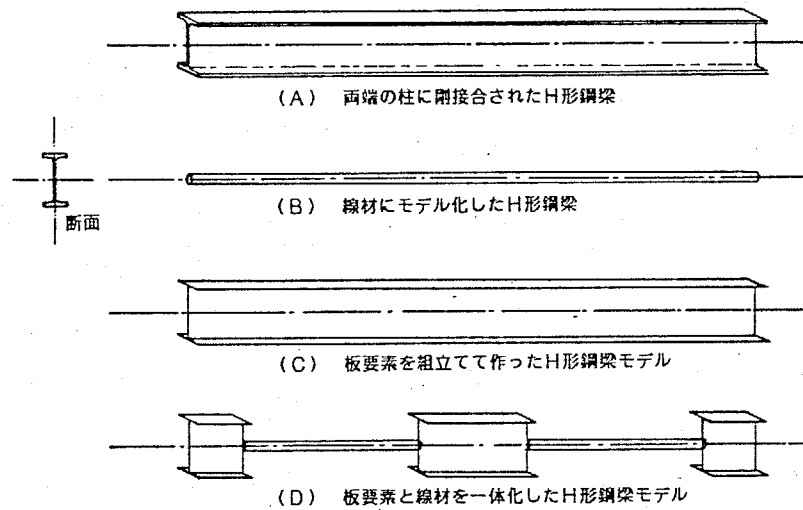
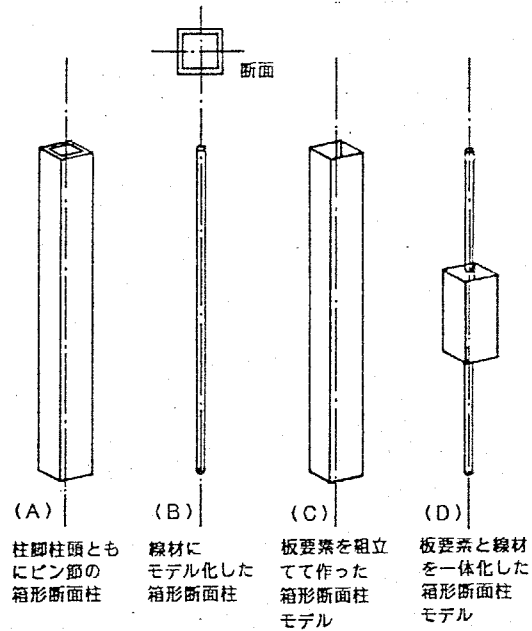


図1.2 柱、梁の力学解析モデル

第 2 章

弾塑性大変形を考慮した、 繰返し荷重をうける 鋼構造骨組の 3 次元数値解析法

2・1	序.....	22
2・2	繰返し荷重をうける鋼構造骨組の 3 次元弾塑性大変形解析理論.....	25

工学の問題を数値解析によって解決しようとする場合、その方法として次に述べるような2つの方法が考えられる。

1つは解析的に展開された式を数値解析により計算するもの、もう1つは物理現象及び全体挙動を表わす数学的なモデルを作り、それを数値解析によって Simulate させて問題を解く方法である。

両者には各々特徴があるが、前者は解析解であるため、その解が陽な形で表わされていれば、理論式そのものから物理現象の定性的な性質を直接読みとれる利点がある。この場合には、ただ数値を代入して計算を進めるだけである。しかし、実際の工学における問題は、このように陽な形で解が表わせるものばかりでなく、解析解といっても、その解が陰な形でしか導けないものが多い。たとえば、その解を求めるためには数値積分、未定係数を決定するために多元の方程式、高次方程式の根を求める等の処理が必要になるような問題である。このような場合には後者に述べる方法に比べて、解析解の優位性はなく、その解が陽な形で表わされていないため、物理現象の定性的な性質を、その式展開から直接に読みとれないことになる。しかし、後者の方法に比較して、たとえば対象としている物体の大きさについて無限を表わすことができる、局所的に特異点のある場合に、それが明確に展開式に反映される等、問題の本質を見失わなわないという利点がある。

しかし、解析解が陽な形で表わされているか、陰な形でしか表わされないかにかかわらず、この方法は非線形問題、特に材料の降伏による弾塑性解析には適さない。なぜならば、連続体について弾塑性解析を進めるためには、塑性状態に入った物体そのものが部分部分によって異った応力状態をもち、異った弾塑性性質をもつことになるから、それをも解析対象全体を表現しうるような関数で表わさなくてはならないためである。

後者は本論文で用いる解析法である。この解析法の基本を成す考え方は、できる限り対象を細かく分解、分析 (Analysis) し、その分解された個々の要素のもつべき基本的性質を明確なものに仮定し、これらを1つ1つ明確な方法で積み上げ集約、総合 (Synthesis) して、その全体としての物理現象を数値

解析により出来る限り実際に近づくように再現して、その挙動を調べようとするものである。

本章では、以上の考え方を基本として、繰返し荷重をうける鋼構造骨組の弾塑性大変形解析法の一般論について述べる。具体的には、非線形問題である弾塑性大変形解析を増分法によって行うための増分段階の計算において、増分歪エネルギーを節点の増分変位を未知量としたまま数値積分によって求め、結果としてそれを増分変位の2次形式で表わし、増分ポテンシャルエネルギーの停留原理にもとづき、変分法を用いて、その1増分の計算を線形化する方法に関して述べる。この計算は1段階の計算を進めるに当たって1つの近似にすぎないので、これを繰返して精度の良い解を得るための方法について詳細に述べる。3章、4章、5章の解析法はすべてここで示す基本的な考え方にそって導くものである。

この解析理論において、力学解析の3つの基本の条件

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none">• 変位の適合条件• フックの法則（構成方程式）• 力の釣合条件 |
|--|

は以下のようにして満足されている。

変位の適合条件は、適合条件を満足しなくてはならない要素間で各々、同一の節点を共有し、つまり、その節点の未知量となっている、増分変位を共有していることによって満足されている。フックの法則（構成方程式）は歪エネルギーの計算における増分歪と増分応力との関係において満足され、増分変位が求められた後に、応力を正しく修正することでさらに完全に満足される。力の釣合条件は増分ポテンシャルエネルギーが停留するように増分変位を求め、さらに収束計算を行うことによって満足される。

この理論によれば、2次元骨組、3次元骨組、板曲げ問題、平面応力問題、板を立体的に組立てて作られた部材、これらの集合としての骨組等、いかなる鋼構造物に関しても弾塑性大変形解析を行うことができる。この解析を行うことによって、一般に構造解析の結果として必要とされている構造物の変形、応

力，歪の分布等が得られ，実験では視覚的にはわかっているも，測定できない構造内部の歪，応力そのものまで，構造全体にわたり知ることができる。

2・2 繰返し荷重をうける鋼構造骨組の3次元弾塑性大変形解析理論

ここで提示する理論によって、繰返し荷重をうける鋼構造骨組、その部材等の弾塑性大変形解析を行うことができる。各論は3章、4章、5章で詳述するが、ここでは理論の一般的展開を以下に示す28項目の順に従って論じる。

1. 外力の条件
2. step by step 法による線形近似計算
3. 大変形（有限変位）を考慮した歪増分
4. 材料の降伏による非線形性
5. Iteration 法による収束計算
6. 全体座標系
7. 有限要素への分割
8. 節点の定義
9. 全体座標系における増分変位ベクトル Δg_u
10. 要素座標系（移動座標系）とその系における増分変位ベクトル Δe_u
11. 要素内部の増分変位を Δe_u によって表現
12. Δe_u による要素内部の増分歪の表現
13. 応力と歪の関係
14. 要素の増分歪エネルギー（ ΔeU ）
15. 増分歪エネルギーの数値積分による eK , $e f_{in}$
16. Δg_u を座標変換して Δe_u を表現
17. 構造体全体の増分歪エネルギー（ ΔU ）
18. Δg_u によって外力の失うポテンシャルエネルギー（ ΔW ）
19. 全体系の増分ポテンシャルエネルギー（ $\Delta U - \Delta W$ ）
20. 増分ポテンシャルエネルギーの停留原理により、変分法を用いて線形方程式を誘導
21. Δg_u の計算
22. Δg_u から Δe_u を求め要素内部の増分歪を求める。
23. 歪増分によって要素内の新しい応力を計算する。
24. 節点、要素の座標位置を移動

25. 1 段階の計算の終了

26. 繰返し荷重

27. フローチャート

1. 外力の条件

外力は静的な繰返し荷重を対象とし、ポテンシャルエネルギーを有する保存力を考える。構造体は準静的に釣合ながら変形してゆくものと考え、動的効果は考慮しない。

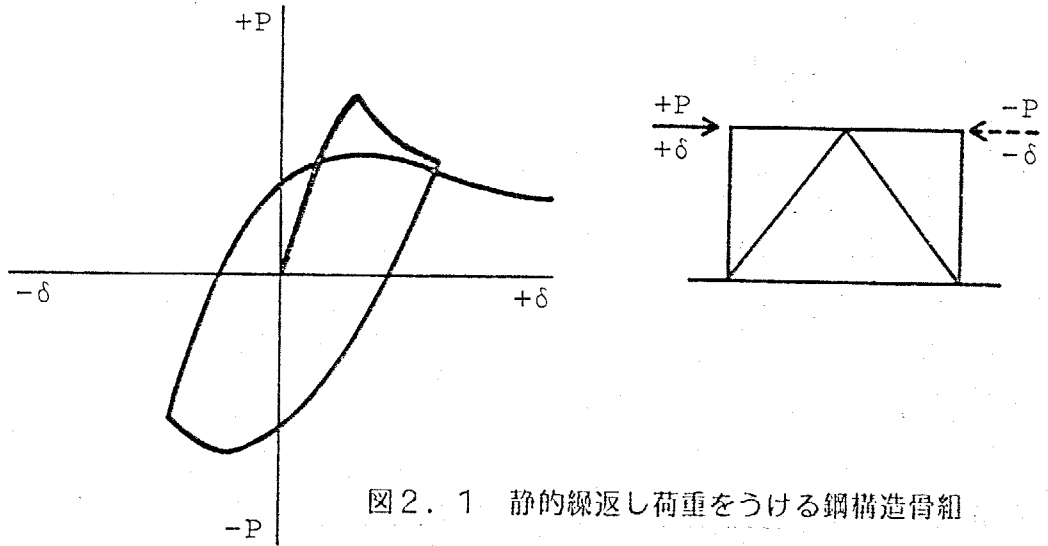


図2.1 静的繰返し荷重をうける鋼構造骨組

2. Step by step法による線形近似計算

材料の降伏による非線形性、大変形（有限変位）を考慮するために生じる非線形性をもった問題を解くために、荷重又は強制変位の増減を細かく、段階に分け、その1回の増分計算を線形化する方法を用いる（Step by Step法）

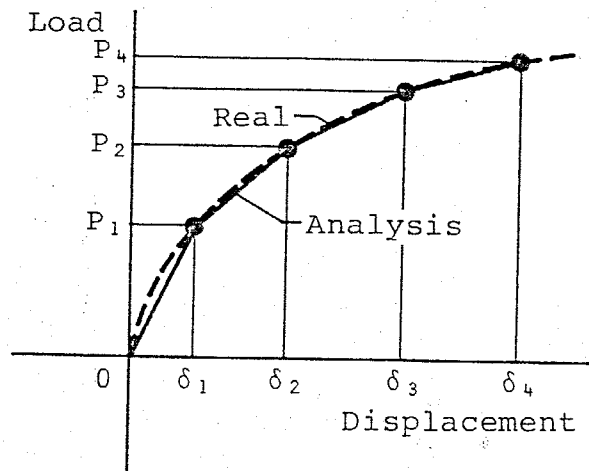


図2.2 step by step 法による線形近似計算

3. 大変形（有限変位）を考慮した歪増分

構造体の釣合を考えるとき、それ自身が変形することによって位置が変わることを考慮し、変形後における釣合条件を満たすように解析する。このために、変形と歪との間の関係式に有限変位を考慮し、増分歪は増分変位の1次と2次の項で表わせるものとする。

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (2.1) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

4. 材料の降伏による非線形性

応力と歪の関係は、材料の降伏による非線形性を考慮するが、各荷重段階ではその時点の応力状態を初期応力と考え、細い実直線で示すように、その応力

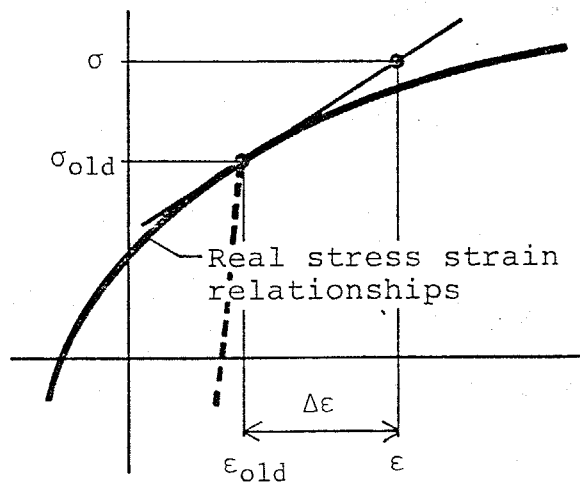


図2.3 疑似弾性体と仮定した材料の応力-歪の関係

状態によってきまる構成式をもった疑似弾性体と考える。計算過程において歪が逆方向へ進み弾性挙動する場合には点線に示すような関係を用いる。

5. Iteration法による収束計算

1段階の計算を線形化するために生じる誤差を少なくするために、増分ポテンシャルエネルギーの計算には常に、全外力成分と、全内力成分を考慮する。その結果、常に全外力と全内力は釣り合うはずであるが、構造物が大変形することによって内力の向きが変わる現象および材料の降伏現象のため、1段階の計算を進めた後に全外力と全内力は釣り合わなくなる。この釣り合を確実にするために、外力又は強制変位の値をその段階のまま止めておき、釣り合の計算だけを行う収束計算を各段階において数回づつ行う。(Iteration法)

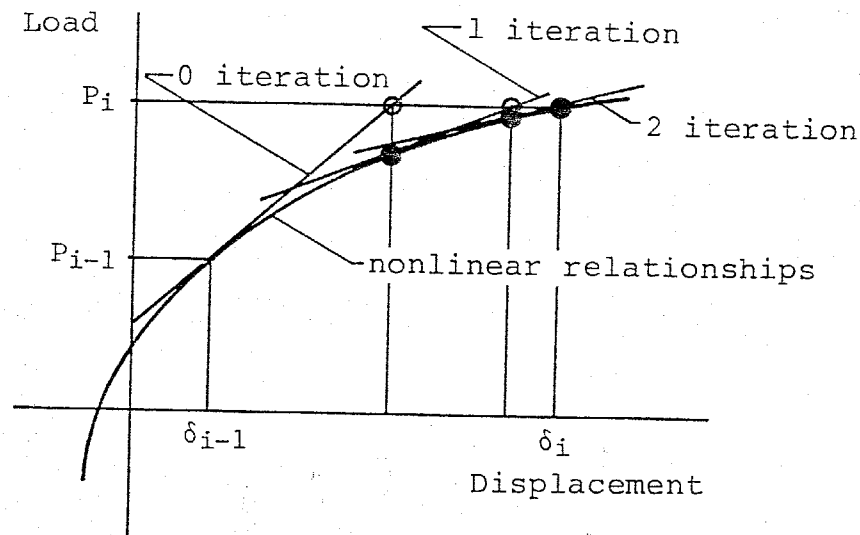


図2.4 iteration法による収束計算

6. 全体座標系

構造体を空間の中で定義でき、構造体が大変形しても移動しない全体座標系 $O_I (g^x, g^y, g^z)$ を設定する。

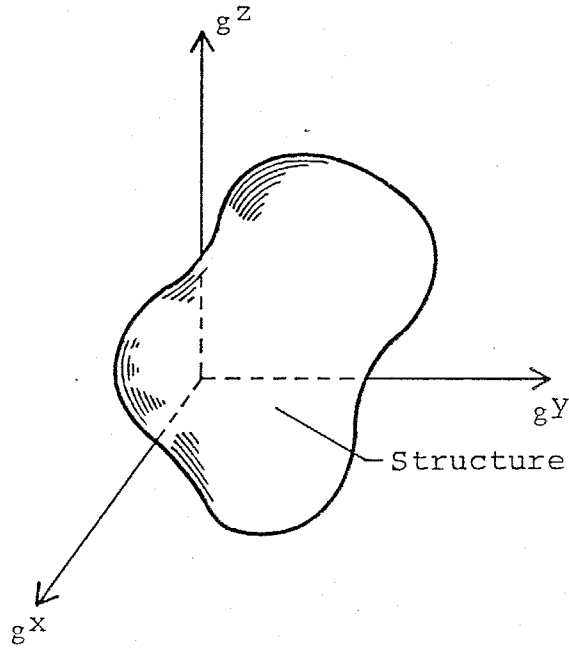


図2.5 構造体と全体座標系

7. 有限要素への分割

増分ポテンシャルエネルギーの計算のために、構造体を有限要素に分割する。材料の降伏現象はこの各要素の中に、後の数値計算に必要な数だけとった点における応力-歪の履歴を追跡することによって考慮する。

各々の要素の増分歪エネルギーはこの各位置の応力を用いて数値積分を行い、得られる。

8. 節点の定義

有限要素の分割に対応させて、要素の交点に節点を定義する。

9. 全体座標系における増分変位ベクトル Δg^u

解析する問題にあわせて、各節点に、全体座標系に添った変位を考える。これらの集合をベクトル表示したものを変位ベクトル g^u と定義する。1段階の増分計算に対応した変位ベクトルを増分変位ベクトル Δg^u と定義する。

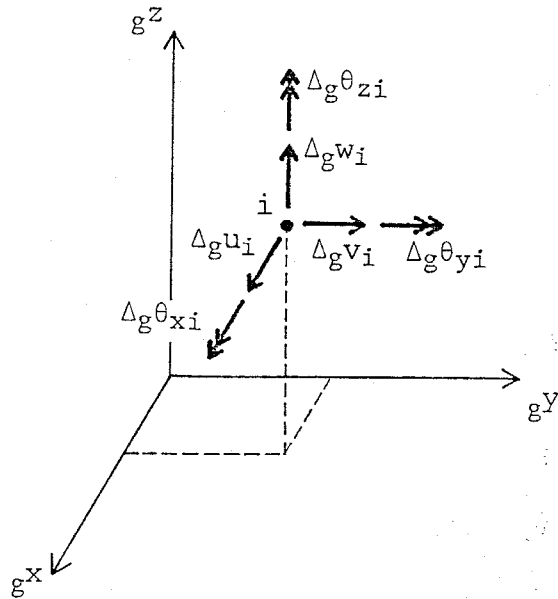


図 2. 6 全体座標系における増分変位

10. 要素座標系 (移動座標系)

各要素において、その要素の増分歪エネルギーの計算に都合のよいように、要素の変形に追随して移動する要素座標系 $O_{II}(x, y, z)$ を定義する。

この座標系における要素の節点の増分変位ベクトルを各々の要素毎に独立し

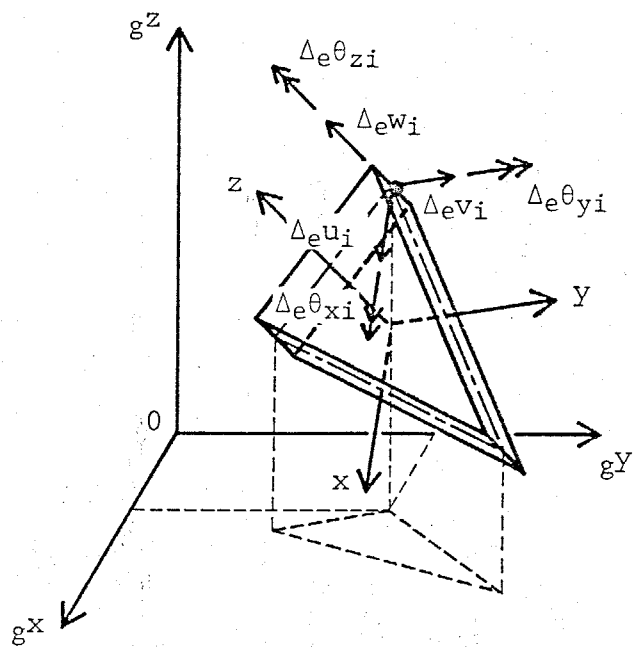


図 2. 7 要素座標系における増分変位

て考え Δe^u と定義する。

大変形問題を移動座標系を用いて展開し、全体の解析には、全体座標系を用いて釣合の計算を行うため、本解析法では、この2つの座標系間の座標変換法が重要である。特に3章に示す数値解析例によって解析解の得られている大変形問題を扱い、本論文における座標変換の考え方が正しいことを説明する。

11. 要素内部の増分変位を Δe^u によって表現

一般的な有限要素法の考え方に従って、その要素内部の増分変位の分布を、変形後の各要素に設定された要素座標系における増分変位関数を用いて表わす。この関数は(2.2)式に示すように、その点の要素内の座標値によって決まる関数 $N(x, y, z)$ と増分節点変位 Δe^u の積によって表わす。

$$\Delta u(x, y, z) = N(x, y, z) \Delta e^u \dots\dots\dots (2.2)$$

12. Δe^u による要素内部の増分歪の表現

有限変位を考慮した要素内部の増分歪は3の(2.1)式によって示してあるとおり、要素の変位関数の導関数の1次項と2次項との和で表わされる。要素内部の増分変位 $\Delta u(x, y, z)$ は増分節点変位ベクトル Δe^u の1次式によって表わされているから、増分歪 $\Delta \epsilon$ は Δe^u に関する1次の項から求められる増分歪 $\Delta \epsilon_I$ と、 Δe^u の2次の項によって計算される増分歪 $\Delta \epsilon_{II}$ の和で表わすことができる。

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon_I + \Delta \epsilon_{II} \dots\dots\dots (2.3)$$

ここにおいて、 $B(x, y, z)$ と $C(x, y, z)$ をそれぞれ、 $\Delta \epsilon_I$ のために求めた $N(x, y, z)$ の導関数、 $\Delta \epsilon_{II}$ のために求めた $N(x, y, z)$ の導関数とすると $\Delta \epsilon_I$ 、 $\Delta \epsilon_{II}$ は(2.4)式、(2.5)式によって表わすことができる。

$$\Delta \epsilon_I = B(x, y, z) \Delta e^u \dots\dots\dots (2.4)$$

$$\Delta \epsilon_{II} = E \{ C(x, y, z) \Delta e^u \} \dots\dots\dots (2.5)$$

ただし E は2次の多項式で表わされる関数

この項に関する詳細は、線材について3章、板について4章でそれぞれ論じる。

13. 応力と歪の関係

4.に述べたように増分計算を行う際に、構造体をその時点における応力状態 σ_{old} を原点とし、その応力状態によって求められる構成方程式 D_t をもった疑似弾性体と仮定しているので、増分計算中の応力 σ は(2.6)式によって表わすことができる。

$$\sigma = \sigma_{old} + D_t \Delta \epsilon \dots\dots\dots (2.6)$$

14. 要素の増分歪エネルギー (Δe_u)

増分変位 Δe_u によって要素 e に保えられる増分歪エネルギー Δe_u は要素内部の応力 σ を $\Delta \epsilon$ で積分した後、これを要素全体にわたって体積積分することによって求められる。その結果 Δe_u は図 2.8 に示すように 4 項に分けて考えることができる。

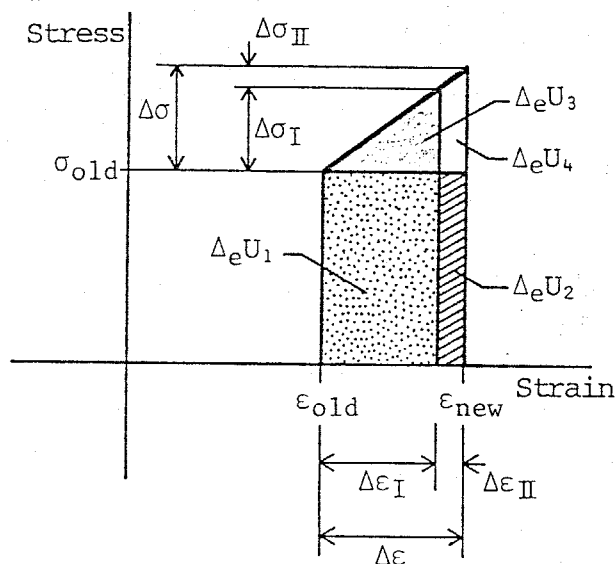


図 2.8 要素の増分歪エネルギー

$$\Delta_e U_I = \int_V \Delta \epsilon_I^T \sigma_{old} dV \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

その段階までに生じていた応力 σ_{old} と $\Delta_e u$ の 1 次項から求められる増分歪の積によって求められる増分歪エネルギー。

$$\Delta_e U_{II} = \int_V \Delta \epsilon_{II}^T \sigma_{old} dV \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

σ_{old} と $\Delta_e u$ の 2 次項から求められる増分歪との積によって求められる。

$$\begin{aligned} \Delta_e U_{III} &= \frac{1}{2} \int_V \Delta \epsilon_I^T \Delta \sigma_I dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \Delta \epsilon_I^T D_t \Delta \epsilon_I dV \quad \dots\dots\dots (2.9) \end{aligned}$$

増分計算中に $\Delta \epsilon_I$ によって増加する応力 $\Delta \sigma_I$ と増分歪 $\Delta \epsilon_I$ との積によって求められる増分歪エネルギー

$$\Delta_e U_{IV} = \int_V \Delta \epsilon_I^T D_t \Delta \epsilon_{II} dV + \frac{1}{2} \int_V \Delta \epsilon_{II}^T D_t \Delta \epsilon_{II} dV \quad \dots\dots (2.10)$$

増分計算中に $\Delta \epsilon_{II}$ によって増加する応力に関連する増分歪エネルギーであるが、いずれも $\Delta_e u$ に関して 3 次以上の微小項となるので $\Delta_e u_{IV}$ は無視する。

結果として $\Delta_e u$ は (2.11) 式によって表わすことができる。

$$\Delta_e U = \Delta_e U_I + \Delta_e U_{II} + \Delta_e U_{III} \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

15. 増分歪エネルギーの数値積分による e_K と e_{fin} の計算

増分歪エネルギー $\Delta_e U_I$, $\Delta_e U_{II}$, $\Delta_e U_{III}$ は $\Delta \epsilon_I$ が (2.4) 式によって, $\Delta \epsilon_{II}$ が (2.5) 式によって表わされているから, 以下に示すように, $\Delta_e u$ に関する 1 次又は 2 次形式で求められる。ここに示されている体積積分は数値積分によって求める。

$$\begin{aligned}
\Delta_e U_I &= \int_V \Delta \epsilon_I^T \sigma_{old} dV \\
&= \Delta_e u^T \int_V B^T(x, y, z) \sigma_{old} dV \\
&= \Delta_e u^T e f_{in} \dots\dots\dots (2.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_e U_{II} &= \int_V \Delta \epsilon_{II}^T \sigma_{old} dV \\
&= \frac{1}{2} \Delta_e u^T \int_V C^T(x, y, z) S C(x, y, z) dV \Delta_e u \\
&= \frac{1}{2} \Delta_e u^T e K_G \Delta_e u \dots\dots\dots (2.13)
\end{aligned}$$

この式においてSは σ_{old} によって作られる正方対称マトリックスであり詳細は3章, 4章に示す。

$$\begin{aligned}
\Delta_e U_{III} &= \frac{1}{2} \int_V \Delta \epsilon_I^T D t \Delta \epsilon dV \\
&= \frac{1}{2} \Delta_e u^T \int_V B^T(x, y, z) D t B(x, y, z) dV \Delta_e u \\
&= \frac{1}{2} \Delta_e u^T e K_t \Delta_e u \dots\dots\dots (2.14)
\end{aligned}$$

(2.12), (2.13), (2.14)式の結果を加えて整理することにより, $\Delta_e u$ の増分変位によって要素eにたくわえられる増分歪エネルギー eU は(2.15)式によって表わすことができる。

$$\Delta_e U = \Delta_e u^T e f_{in} + \frac{1}{2} \Delta_e u^T e K \Delta_e u \dots\dots\dots (2.15)$$

この式において $\Delta_e u$ は要素座標系における増分節点変位ベクトル, $e f_{in}$ は増分変形前の内部応力に釣り合うべき要素の節点内力ベクトルであり(2.16)式によって表わされ, $e K$ は要素の剛性マトリックスであり, (2.17)式によって表わされる。いずれも詳細な誘導については3章, 4章に論じる。

$$e f_{in} = \int_V B^T(x, y, z) \sigma_{old} dV \dots\dots\dots (2.16)$$

$$e K = e K_G + e K_t \dots\dots\dots (2.17)$$

ここに

$$e K_G = \int_V C^T(x, y, z) S C(x, y, z) dV \dots\dots (2.18)$$

$$e K_t = \int_V B^T(x, y, z) D t B(x, y, z) dV \dots\dots (2.19)$$

16. $\Delta g u$ を座標変換して $\Delta e u$ を表現

要素 e の要素座標系における増分節点変位ベクトル $\Delta e u$ は、単に座標間の幾何学的な関係により、(2.20)式に示すように $\Delta g u$ に線形な変換マトリックス $e L$ をかけることによって表わすことができる。

$$\Delta e u = e L \Delta g u \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

17. 構造体全体の増分歪エネルギー (ΔU)

(2.20)式の座標変換を考慮しつつ、各要素のたくわえる増分歪エネルギー $\Delta e U$ の総和を計算することにより、全構造体がたくわえる増分歪エネルギー ΔU が求められる。歪エネルギーはスカラー量であるから座標変換によってその内容は影響をうけない。座標変換の目的は全体座標系における共通した増分変位ベクトルによって構造体全体の増分歪エネルギーを表わすためである。

$$\Delta U = \Delta g u^T f_{in} + \frac{1}{2} \Delta g u^T K \Delta g u \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

ここにおいて

$$f_{in} = \sum_e e L^T e f_{in} \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

$$K = \sum_e e L^T e K e L \quad \dots\dots\dots (2.23)$$

f_{in} は本論で考慮している非線形性をすべて無視したならば、増分前に働いている全外力ベクトル $f_{ex \cdot old}$ と釣り合うべき節点内力ベクトルである。

18. $\Delta g u$ によって外力の失うポテンシャルエネルギー (ΔW)

保存力である節点外力 f_{ex} は増分節点変位 $\Delta g u$ が生じることによって ΔW なるポテンシャルエネルギーを失う。

$$\Delta W = \Delta g u^T f_{ex} \quad \dots\dots\dots (2.24)$$

ただし f_{ex} は増分節点外力を含む、その時点で働いている全節点外力ベクトルである。

19. 全体系の増分ポテンシャルエネルギー ($\Delta U - \Delta W$)

(2.21)式で求めた増分歪エネルギーと(2.24)で求めた外力の失なりポテンシャルエネルギーにより、この構造系が増分変位 $\Delta g u$ を起したときの、系全体の増分ポテンシャルエネルギー $\Delta \pi$ を求めることができる。

$$\Delta \pi = \Delta U - \Delta W \quad \dots\dots\dots (2.25)$$

$$= \Delta g u^T f_{in} + \frac{1}{2} \Delta g u^T K \Delta g u - \Delta g u^T f_{ex} \quad \dots\dots\dots (2.26)$$

20. 増分ポテンシャルエネルギーの停留原理により、変分法を用いて線形方程式を誘導

外力が保存力でありポテンシャルエネルギーを有し、応力-歪の関係を初期応力存在下での疑似弾性体と仮定したために歪エネルギーもポテンシャルエネルギーを有しているため、この構造系の釣合位置はこの増分ポテンシャルエネルギーの停留するところにあるという、増分ポテンシャルエネルギー停留の原理を用いることができる。これを用いて、釣合条件を満たすための増分変位を次のようにして求めることができる。

2次形式の変分原理を用いて、増分変位 $\Delta g u$ に関する任意の微小な変分量 $\delta \Delta g u$ に対して、増分ポテンシャルエネルギーの変分量 $\delta \Delta \pi = 0$ より(2.27)式が得られる。(付録-Bを参照)

$$\delta \Delta \pi \equiv f_{in} + K \Delta g u - f_{ex} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.27)$$

21. $\Delta g u$ の計算

(2.27)式は $\Delta g u$ に関する連立一次方程式である。

$$f_{ex} - f_{in} = K \Delta g u \quad \dots\dots\dots (2.28)$$

この連立方程式を解くことにより増分ポテンシャルエネルギーを停留させるような増分節点変位 $\Delta g u$ を求めることができる。

22. Δg^u から Δe^u を求め、要素内部の増分歪 $\Delta \epsilon$ を求める。

(2.20) 式において示した座標変換マトリックス eL を用いて Δg^u を各要素毎に変換し Δe^u を求めることができる。

$$\Delta e^u = eL \Delta g^u \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

Δe^u によって (2.3), (2.4), (2.5) 式を用いることによって要素内部の任意の位置で増分歪 $\Delta \epsilon$ を求めることができる。

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon_I + \Delta \epsilon_{II} \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

$$\Delta \epsilon_I = B(x, y, z) \Delta e^u \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

$$\Delta \epsilon_{II} = E \{ C(x, y, z) \Delta e^u \} \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

この計算には Δe^u に関する 1 次, 2 次の項をすべて考慮した正確な誘導式を用いる。この部分において近似式を用いないことが、本解析法にとって最も重要な点である。非線形問題を線形化して解いているために生じる誤差をなくするために収束計算を行った後に、非常に精度の高い解を得られるのは、ここで近似式を用いずに厳密式を用いているためである。(図 2.9 参照)

23. 増分歪によって、要素内部の新しい応力を計算する。

増分歪 $\Delta \epsilon$ ($\Delta \epsilon_I + \Delta \epsilon_{II}$) と増分変形前の応力状態 σ_{old} を用いて材料の性質によって決まる降伏現象を考慮して、増分変形後の応力状態 σ_{new} を求める。

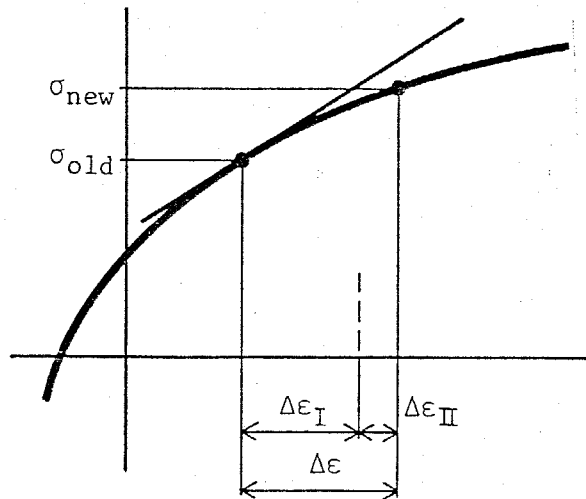


図 2.9 増分歪による増分変位後の応力の計算法

24. 節点, 要素の座標位置を移動

22, 23 の計算をすべての要素について行った後、各節点の座標値を変形後の位置の値へ修正する。同時に、各要素を修正された歪と応力を保持したまま、

その新しい座標位置に存在するものとする。

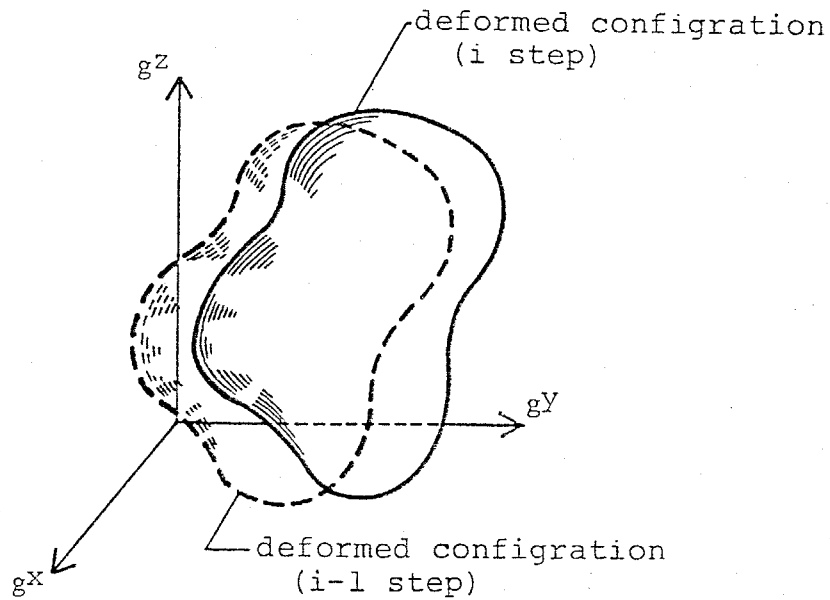


図2.10 全体座標系における構造体の変位と移動

25. 1段階の計算の終了

15~24の計算によって、1段階の解析を終了することができる。しかし、5.に述べたように非線形問題を線形化しているために生じる誤差をなくすため、外力または強制変位の値をこの段階の状態に止めておき、 f_{ex} と f_{in} が完全に等しくなり釣合条件が満されるまで、以上の計算を繰返し行なわなければならない。

26. 繰返し荷重

繰返し荷重をうける構造物を解析は、全節点外力ベクトル f_{ex} を増減することによって進めることができる。しかし、図2.11にも示してあるように正荷重方向に変位を与えても荷重低下をとまなりような問題もあるので繰返し荷重に関する解析は難しい。

しかし、応力-歪の追跡を厳密に行うことと、外力を力で与えるのではなく、強制変位によって与え、変位制御を行うことによって繰返し荷重に関する解析を進めることができる。

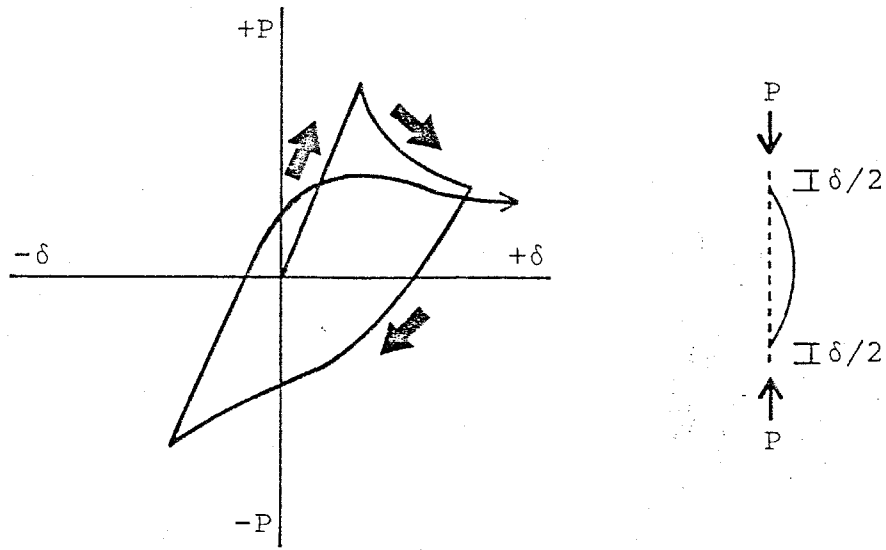


図2. 11 繰り返し荷重を受け耐力低下をともなう構造物

27. フローチャート

以上の計算の流れをブロックチャートにし、図2. 12に示す。この中で Iteration を行いながら $f_{in} = f_{ex}$ を調べている部分があるが、本論文の解析においては(2.29)式の値が $10^{-4} \sim 10^{-6}$ 以下になったことによって、全節点外力と全節点内力が等しくなったとしている。

$$\frac{(f_{in} - f_{ex}, f_{in} - f_{ex})}{(f_{in}, f_{in})} \dots\dots\dots (2.29)$$

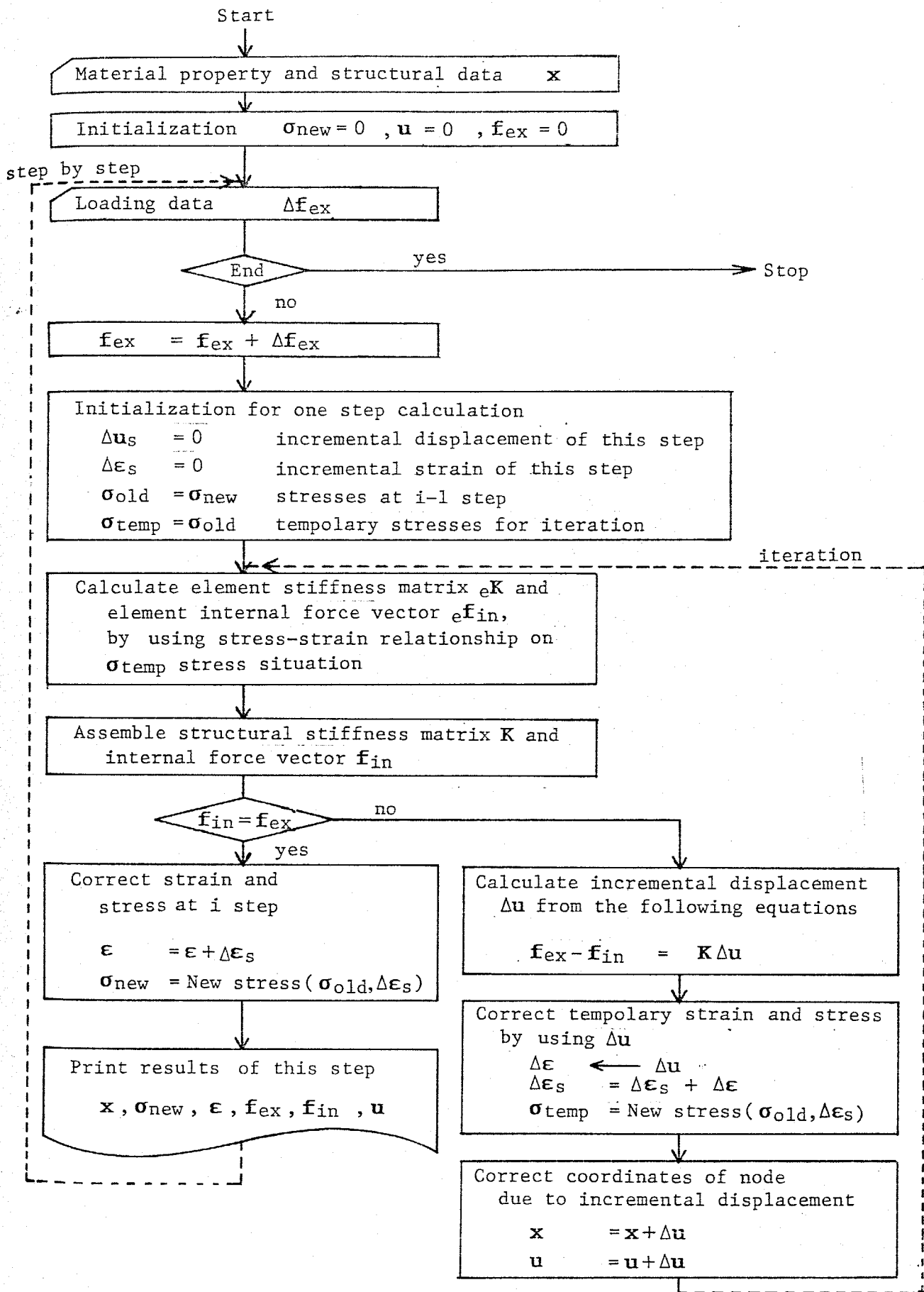


図2.12 フローチャート

第3章

繰返し荷重をうける線材構造の 3次元弾塑性大変形解析理論

3・1	序	44
3・2	線材構造の解析のための仮定条件	45
3・3	線材構造の数値解析法	49
3・4	理論解との比較のための数値解析例	57

3・1 序

本章では，2章において述べた一般論に従い，繰返し荷重をうける線材構造の3次元弾塑性大変形解析理論に関して論じる。

この理論の確立によって，梁の横座屈の挙動，2軸曲げをうける柱の挙動，高軸力をうける圧縮材の3次元的弾塑性座屈の挙動等について数値解析を行うことができる。さらに，これらの現象を部材毎に考慮しつつ3次元骨組の弾塑性大変形解析を行うことが可能になる。

基本的な理論展開は，2章に述べたものと同一であるから，本章では線材構造の解析にとって特に必要となる仮定条件と，1段階の増分計算を行うために必要となる要素の剛性マトリックス eK ，節点内力ベクトル $e\mathbf{f}_{in}$ の誘導について論じる。

最後に，理論解との比較のための数値解析例を示し，この理論の検証を行う。さらに実的な問題への応用，実験結果との比較等については付録（No. 2，No. 4，No. 5，No. 6，No. 7）に別載する。

ここで展開する理論は，5章の解析理論において，その線材部分に適用するためのものでもある。

3・2 線材構造の解析のための仮定条件

本解析を行うにあたって仮定する事項を以下に示す。

1. 鋼構造骨組は、柱、梁、筋違等の骨組部材によって構成され、1本の骨組部材は、図3.1に示すように5～20個の要素に分割して扱う。この理由は、降伏域の進行、大変形によって部材の変形、内部の応力、歪の状態が複雑なものとなり、これを連続な1つの関数によったのでは、少々高次の関数を用いても正しく表現できないからである。それよりも、1部材を細く要素に分け、その要素ごとに独立な関数を用い、各要素の間で変位、回転の連続は満たすが、それ以上の微小項（歪、曲率、ねじれ率等）の連続は満たさなくてもよいとする方が、かえって複雑な状態を表現するときの追従性がよいからである。

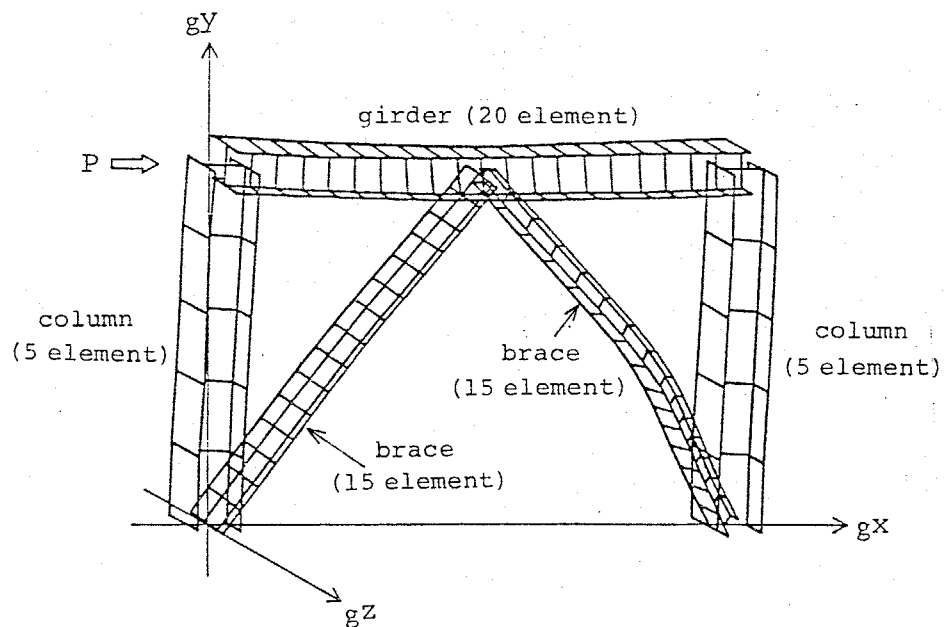


図3.1 鋼構造骨組の線材要素によるモデル化

2. 3次元的な広がりをもつ要素を線材と考える。部材断面の中の状態は、材軸に平行な断面内の任意の点を通る要素の座標 x の関数として表わす。
3. 部材の断面の局所的な変形を無視する。
4. 各要素の変形については、材軸方向の変形、2軸方向の曲げ変形と、断

面のそり変形，サングナンのねじれを含んだ材軸まわりのねじれ変形を考慮する。

5. 曲げ，及びそりにともなうせん断変形は無視できるものとする。

6. 荷重をうける前の要素の初期形状は，材軸にそってねじれと曲がりのない直線とし，断面形は材軸に添って一様なものを対象とするが，荷重をうけて変形した段階における要素の形状は，図 3.2 を参考にして次のように考える。

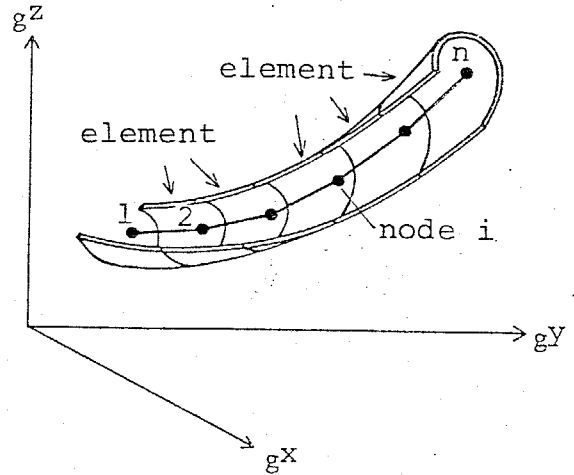


図 3. 2 材軸にそって生じるねじれ変形を考慮した線材のモデル化

その荷重段階までに生じている曲がりは無視して，要素はその両端の変形後の節点を結ぶ直線上に存在するものと

する。しかし，ねじれの形状については，材軸に添った両端の全ねじれ角を線形に結ぶように部材の中間部は一様なねじれ率 $(\frac{d\varphi}{dx})$ をもつとする。

$$\overline{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)} = \frac{\varphi_j - \varphi_i}{l} \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

ここにおいて φ_i, φ_j は要素の両端の材軸に添った全ねじれ角， l は要素の長さ。

この仮定によって有限変位を考慮することができ，特に平均ねじれ率 $\overline{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}$ を考慮することによってねじれの不安定問題を扱うことが可能になる。

7. 要素の断面内の応力が弾性状態にあるか，塑性状態にあるかにかかわらず，2軸方向の曲げに関しては，断面は平面を保持する仮定とする。そり関数についても同様に考え，弾性，塑性状態にかかわらず，断面形によって決まる1つのそり関数 $\omega(x, y)$ を用いる。結果として2軸方向の曲げ変形とそり変形を生じているときには，断面を構成している平板ごとに平面保持を仮定したことになる。

8. サンプナンのねじれに関しては常に弾性を保つものとする。
9. 適用できる断面形状は薄肉断面，閉断面，その他任意である。各断面は図3.3に示すように，数十の単位面に分割し，その各々の単位面について材軸方向の応力 σ_x と歪 ϵ_x を考慮する。

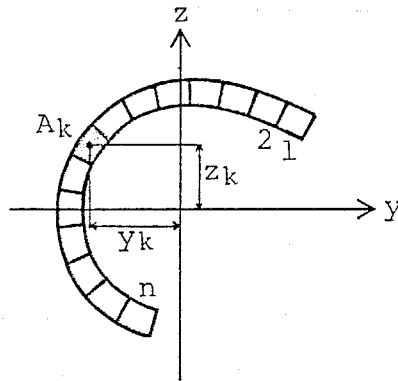


図3.3 単位断面に分割された鋼構造部材の断面

10. 断面の降伏現象は，材軸方向の歪 ϵ_x と応力 σ_x のみによって評価し，せん断応力の影響は無視する。 ϵ_x と σ_x との関係は図3.4に示すような，歪硬化，バウシinger効果を考慮したものを用いる。

繰返し荷重をうける場合に限らず，単調荷重によっても生じる歪のもどりによる弾性復活を考慮する。

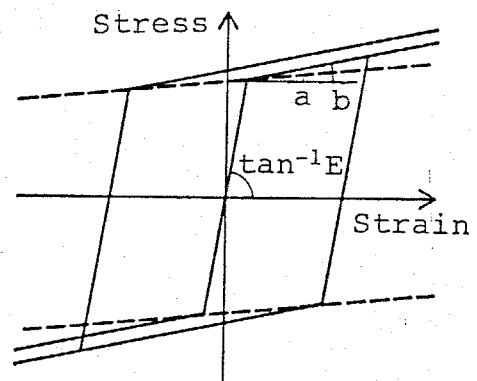


図3.4 応力-歪の関係

11. 要素内の応力，歪状態は各要素の両端の断面についてのみ追跡し，要素中間部の断面内の応力，歪状態の追跡は行わない。ただし，歪エネルギーを計算する際には内部の応力状態が必要であるが，これは両端における応力を用いて線形補間する。

12. 各骨組部材は，節点に直接剛に接続すると考え，柱，梁接合部のシャーパネル等は無視する。

13. 部材端部のそりに関する拘束条件は，完全拘束または，完全自由とする。
ただし一本の部材を分割した各要素関ではそり変形の連続を保つように解析を進める。そのために要素端部において，ねじれ角だけでなく，ねじれ率 $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$ を未知変位として考慮する。

3・3 線材構造の数値解析法

本章の序にも述べたように線材構造に関する数値解析法は2章において述べた一般論に従って行うことができるので、本節では線材構造に特有の項目として座標系、変位関数、増分歪、増分歪エネルギーの積分について述べ、ある荷重段階において次の段階の増分変位を求めるために必要な要素の剛性マトリックス eK と節点内力ベクトル ef_{in} の数値積分による計算法について論じる。

1. 座標系と増分節点変位

2章において述べたように、座標系としては、構造物の変形にともない要素とともに移動する座標系 (x, y, z) と変形の影響を受けない不動な全体座標系 (g^x, g^y, g^z) を、図3.5に示すように定義する。要素座標系は要素両端の断面の同一の点を通り原点を要素の長さの中央においた軸を x 軸とし、これに直交するような面の中に右手系の法則を満たすように y 軸、 z 軸を定義する。この y 軸、 z 軸は要素の軸回転にともなって回転し、常に変形後の要素の両端の軸回転量を平均した方向へ向くものとする。さらに、本理論においては断面の中の変位、歪、応力を表わすための座標系とし断面座標系 (s^y, s^z) を定義する。 (s^y, s^z) は要素の中央部において (y, z) と一致し、 $x = -l/2$ の位置では $-\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\frac{l}{2}$ 、 $x = l/2$ の位置では $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\frac{l}{2}$ だけ回軸しているような座標系である。

増分節点変位は前2つの座標系において考える。要素座標系では図3.5に示すようにその要素の両端の節点 i, j に関して増分節点変位ベクトル Δe^u を(3.2)式によって定義する。

$$\Delta e^u = \left\{ \Delta e^u_i, \Delta e^v_i, \Delta e^w_i, \Delta e^{\theta_{xi}}, \Delta e^{\theta_{yi}}, \Delta e^{\theta_{zi}}, \Delta \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_i, \Delta e^u_j, \Delta e^v_j, \Delta e^w_j, \Delta e^{\theta_{xj}}, \Delta e^{\theta_{yj}}, \Delta e^{\theta_{zj}}, \Delta \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_j \right\}^T \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

全体座標においては同様に、増分節点変位ベクトル Δg^u を(3.3)式のように定義する。

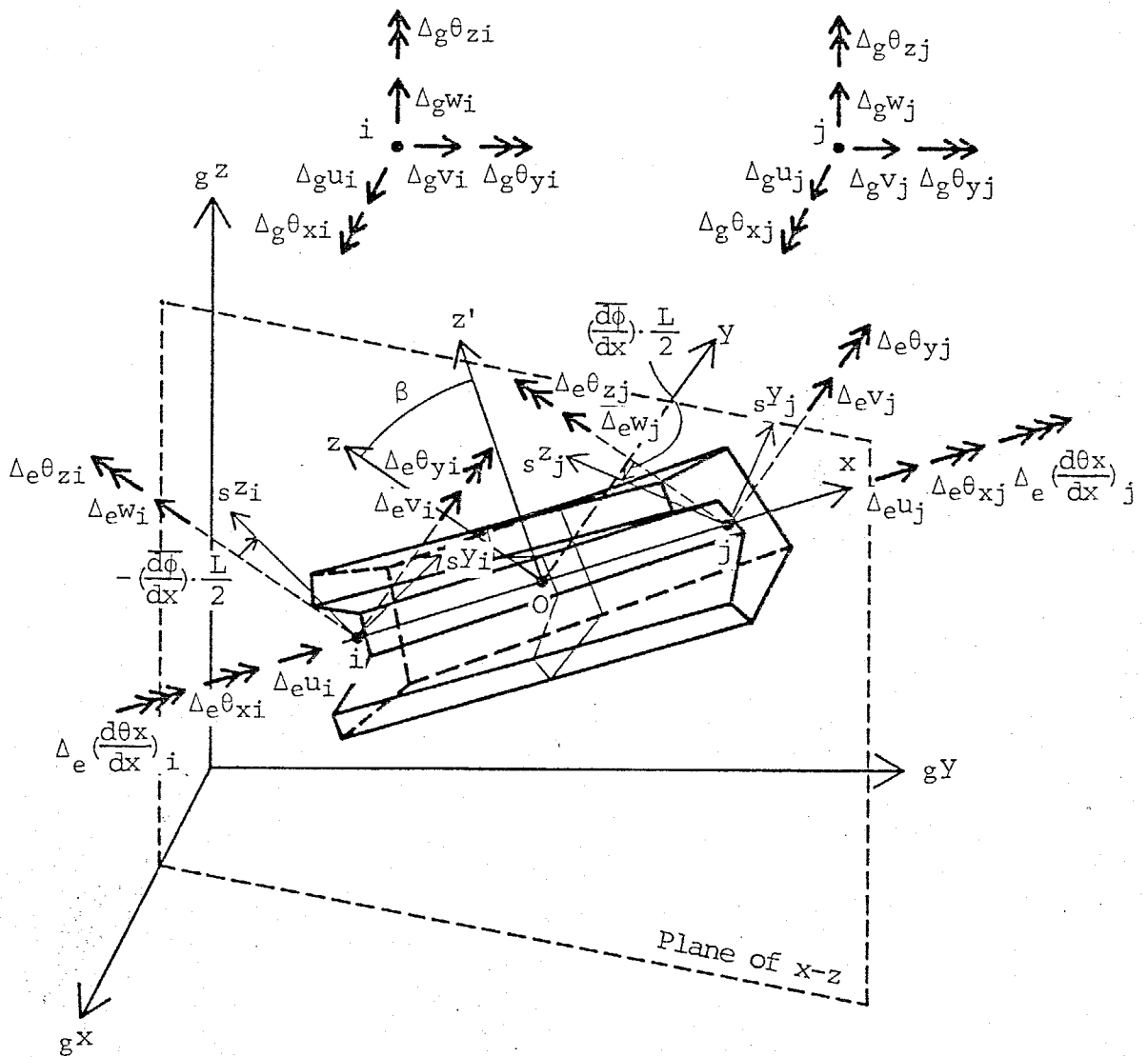


図3.5 全体座標系における増分変位と要素座標系における増分変位

$$\Delta g u = \left\{ \Delta g u_i, \Delta g v_i, \Delta g w_i, \Delta g \theta_{x i}, \Delta g \theta_{y i}, \Delta g \theta_{z i}, \Delta \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_i, \right. \\ \left. \Delta g u_j, \Delta g v_j, \Delta g w_j, \Delta g \theta_{x j}, \Delta g \theta_{y j}, \Delta g \theta_{z j}, \Delta \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_j \right\}^T \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

要素座標系における増分節点変位ベクトル $\Delta e u$ は全体座標系の増分節点変位ベクトル $\Delta g u$ と、両座標間の座標変換マトリックス $e L$ によって (3.4) 式によって表わすことができる。

$$\Delta e u = e L \Delta g u \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

$e L$ は変形後の要素の位置、断面の向き等によって決まるマトリックスである。

2. 増分変位関数

要素の応力状態が降伏しているか否かにかかわらず，要素座標系において， x 軸方向の軸上の増分変位 Δu_0 を x の 1 次式， x 軸上の y ， z 方向の増分変位 Δv_0 ， Δw_0 ，および x 軸に添った増分ねじれ変形 $\Delta \varphi$ を x の 3 次式の関数で表わす。

α を Δ_{eu} によって決められる 14 個の未定係数をもったベクトルとして Δu_0 ， Δv_0 ， Δw_0 ， $\Delta \varphi$ は (3.5) 式によって表わすことができ，これを Δ_{eu} を用いて表わすと (3.6) 式のようになる。

$$\begin{pmatrix} \Delta u_0 \\ \Delta v_0 \\ \Delta w_0 \\ \Delta \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \alpha \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta u_0 \\ \Delta v_0 \\ \Delta w_0 \\ \Delta \varphi \end{pmatrix} = N(x) \cdot \Delta_{eu} \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

ここに $N(x)$ は x の 1 次～3 次までの多項式によって作られるマトリックスであり，すでに 2 章においても同様の定義を行ってある。

3. 有限変位を考慮した。増分変位による増分歪

図 3.6 に示すように，要素内部の任意点 (x, y, z) における線素 (fiber と呼び直おしてもよいが，これはすでにねじれを起こしている要素において，ねじれをうける以前に要素の材軸方向を向いていたものを考えている) の微小区間 dx についての増分変形後の伸び歪はピタゴラスの定理を用いて，(3.7) 式に示すように増分形前後の線素の長さの比を考えることによって求めることができる。

$$\begin{aligned} & \{ (x+dx+\Delta u+d\Delta u) - (x+\Delta u) \}^2 + \{ (y+\rho_y dx+\Delta v+d\Delta v) - (y+\Delta v) \}^2 \\ & + \{ (z+\rho_z dx+\Delta w+d\Delta w) - (z+\Delta w) \}^2 \\ & = \{ (1+\epsilon) \sqrt{dx^2 + (\rho_y dx)^2 + (\rho_z dx)^2} \}^2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

(3.7)式において $(\frac{d\Delta u}{dx})^2$ は微小項として省略し、移動座標系を用いているので ρ_y^2, ρ_z^2 も微小項となるから、この線素の増分歪 $\Delta\epsilon$ は(3.8)式によって表わすことができる。

$$\Delta\epsilon = \frac{d\Delta u}{dx} + \rho_y \frac{d\Delta v}{dx} + \rho_z \frac{d\Delta w}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Delta w}{dx} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (3.8)$$

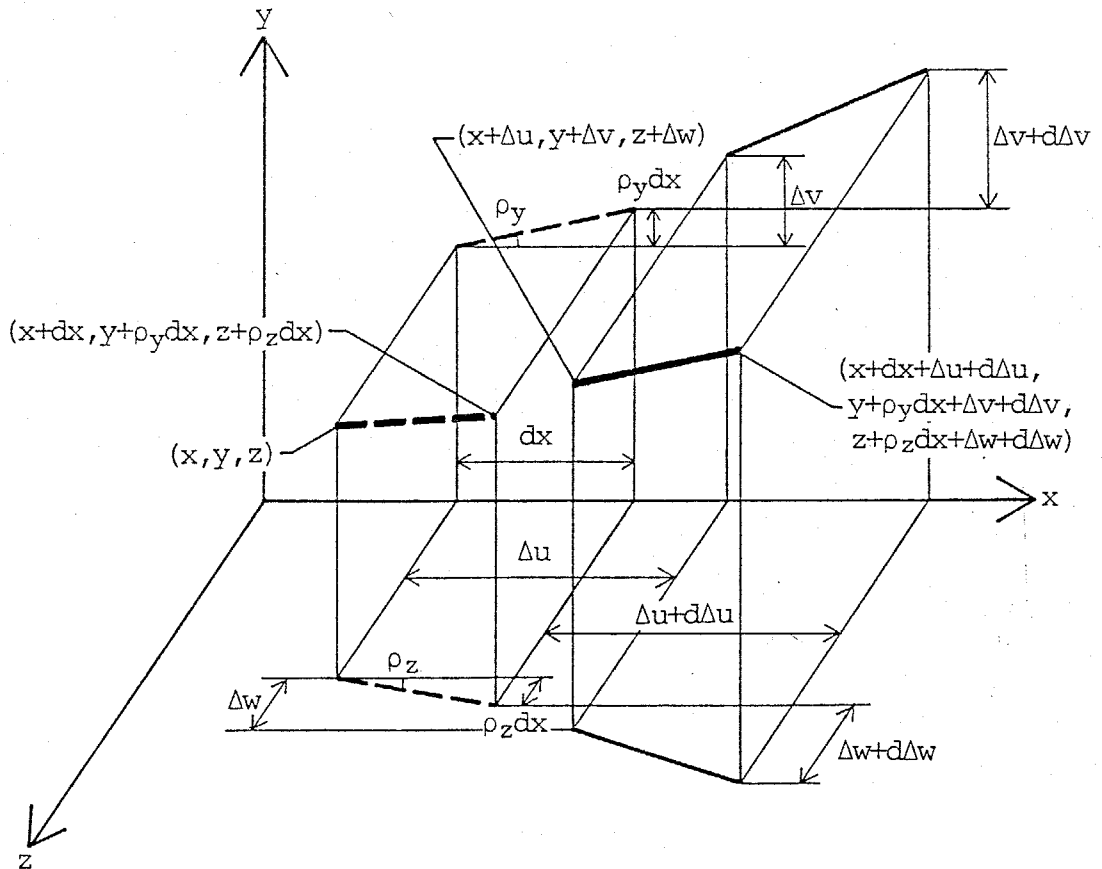


図3.6 線材要素内部の線素の増分変位と増分歪

(3.8)式によって表わされた増分歪 $\Delta\epsilon$ は、その点における増分変位 $(\Delta u, \Delta v, \Delta w)$ によって表わされたが、これを要素の材軸上の増分変位 $(\Delta u_0, \Delta v_0, \Delta w_0, \Delta\phi)$ によって表現する。図3.7に示すように要素の材軸上の増分変位

を $(\Delta u_0, \Delta v_0, \Delta w_0, \Delta\phi)$ とし、増分変形前にねじれ変形としている軸回りの回転量を ϕ とすると、要素内部の一般的な位置 (x, s_y, s_z) における変位増分 $(\Delta u, \Delta v, \Delta w)$ は (3.9) 式によって表わすことができる。

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta u_0 - \{s_y - s_z(\phi + \Delta\phi)\} \frac{d\Delta v}{dx} - \{s_z + s_y(\phi + \Delta\phi)\} \frac{d\Delta w}{dx} - \omega \frac{d\Delta\phi}{dx} \\ \Delta v &= \Delta v_0 - s_z \Delta\phi \\ \Delta w &= \Delta w_0 + s_y \Delta\phi \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.9)$$

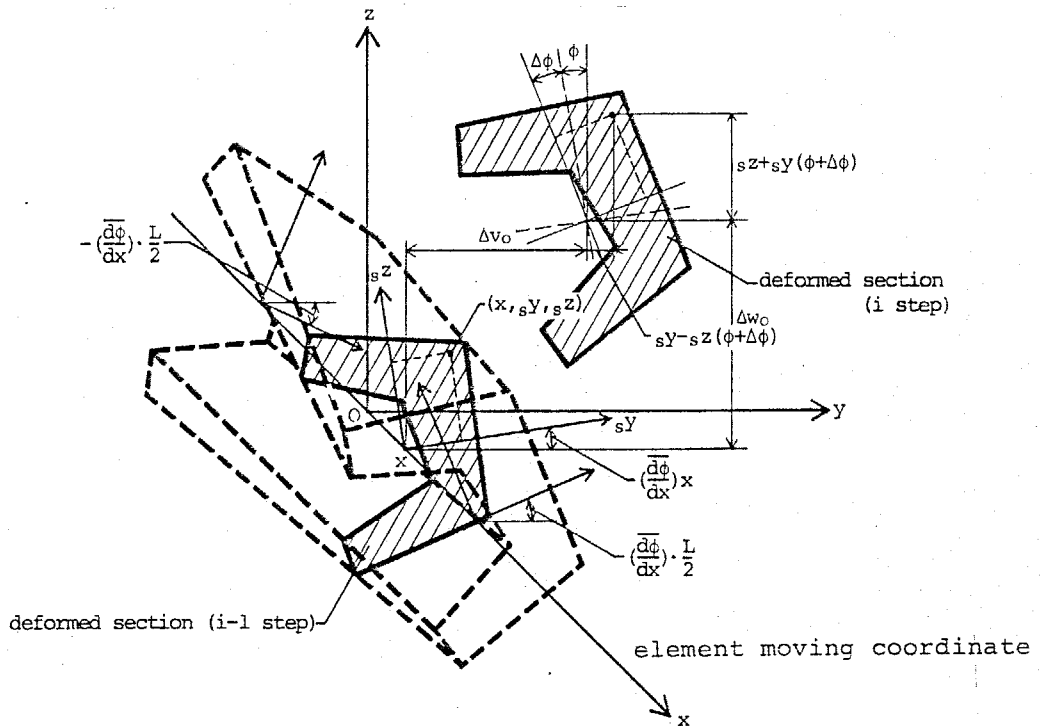


図3.7 線材要素内部の一般的位置の増分変位

(3.9) 式において ω はその関数であり、断面の形と断面内の原点の位置を決めることによって定められるものである。

ρ_y, ρ_z は要素の平均ねじれ率を $(\frac{d\phi}{dx})$ として (3.10) 式によって表わすことができる。

$$\begin{aligned} \rho_y &= -s_z \left(\frac{d\phi}{dx} \right) \\ \rho_z &= s_y \left(\frac{d\phi}{dx} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

以上, (3.8), (3.9), (3.10) 式を用いることにより, 要素内部の点における増分歪 $\Delta \epsilon_x$ を (3.11) によって表わすことができる。

$$\Delta \epsilon_x = \Delta \epsilon_{xI} + \Delta \epsilon_{xII} \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_{xI} = & \frac{d\Delta u_0}{dx} - s_y \left(\frac{d^2 \Delta v_0}{dx^2} + \varphi \frac{d^2 \Delta w_0}{dx^2} \right) \\ & - s_z \left(\frac{d^2 \Delta w_0}{dx^2} - \varphi \frac{d^2 \Delta v_0}{dx^2} \right) - \omega \frac{d^2 \Delta \varphi}{dx^2} \\ & + (s_y^2 + s_z^2) \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\Delta \varphi}{dx} \quad \dots\dots\dots (3.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_{xII} = & \frac{1}{2} \left(\frac{d\Delta v_0}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Delta w_0}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} (s_y^2 + s_z^2) \left(\frac{d\Delta \varphi}{dx} \right)^2 \\ & - s_y \Delta \varphi \frac{d^2 \Delta w_0}{dx^2} + s_z \Delta \varphi \frac{d^2 \Delta v_0}{dx^2} \quad \dots\dots\dots (3.13) \end{aligned}$$

(3.12) 式によって示される ϵ_{xI} は増分変位に関する 1 次の項, (3.13) 式によって示される ϵ_{xII} は増分変位に関する 2 次の項である。

4. 増分変位によって要素 e がたくわえる増分歪エネルギー $\Delta_e U$

増分変位 $\Delta_e u$ によって要素にたくわえられる増分歪エネルギー $\Delta_e U$ は図 3.8 に示すように, その段階までに要素に生じていた応力 σ_{xold} と $\Delta \epsilon_{xI}$ の積 (${}_e U_{11}$), σ_{xold} と ϵ_{xII} の積 (${}_e U_{12}$), 応力歪の関係を疑似弾性体としていたために ϵ_{xI} によって増加する応力のする仕事 (${}_e U_{13}$) と, ねじれ応力に関する歪エネルギー (${}_e U_{21}$, ${}_e U_{23}$) の和によって表わせる。
($\Delta_e U_{23}$) の和によって表わせる。

$$\Delta_e U = \Delta_e U_{11} + \Delta_e U_{12} + \Delta_e U_{13} + \Delta_e U_{21} + \Delta_e U_{23} \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

$$\Delta_e U_{11} = \int_V \sigma_{xold} \Delta \epsilon_{xI} dV \quad \dots\dots\dots (3.15)$$

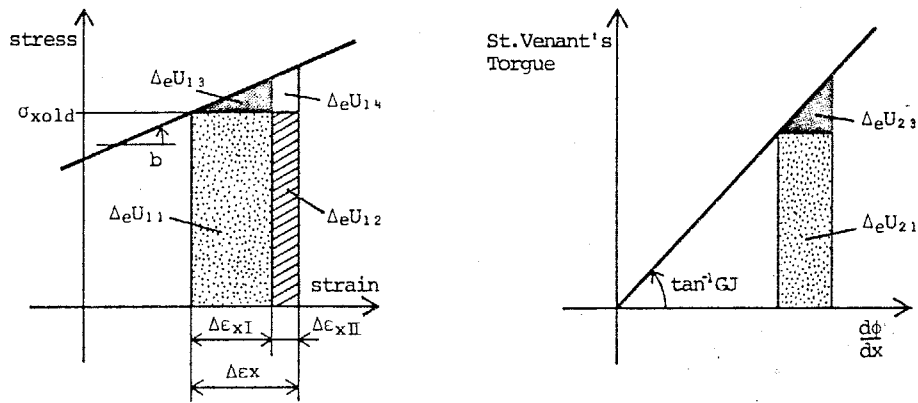
$$\Delta_e U_{12} = \int_V \sigma_{xold} \Delta \epsilon_{xII} dV \quad \dots\dots\dots (3.16)$$

$$\Delta_e U_{13} = \int_V \frac{1}{2} E_t \Delta \epsilon_{xI}^2 dV \quad \dots\dots\dots (3.17)$$

$$\Delta_e U_{21} = \int_\ell T_{sv} \frac{d\Delta \varphi}{dx} dx \quad \dots\dots\dots (3.18)$$

$$\Delta_e U_{23} = \int_\ell \frac{1}{2} GJ \left(\frac{d\Delta \varphi}{dx} \right)^2 dx \quad \dots\dots\dots (3.19)$$

$\Delta_e U_{14}$ は 2 章において述べたように, 増分変位に関して 3 次以上の微小項となるので無視する。(3.15)~(3.19) 式において σ_{xold} , E_t , T_{sv} , G , J は以下に示すものである。



(a) 軸方向応力によるもの (b) ねじれモーメントによるもの

図3.8 線材要素の増分歪エネルギー

- σ_{xold} : 増分計算前に働いていた応力
- E_t : 接線係数
- T_{sv} : 増分計算前に働いていたサンブナンねじれモーメント
- G : せん断剛性
- J : サンブナンのねじれ定数

5. 要素の剛性マトリックス eK と節点内力ベクトル ef_{in}

増分変位関数 $N(x)$ の x に関する導関数, 要素の両端における応力分布, ねじれモーメント, 変形後の要素のねじれ形状等を用いて (3.14) 式を数値積分により計算し, 未知量である増分節点変位 $\Delta_e u$ の2次形式によって, 要素がたくわえる増分歪エネルギー $\Delta_e U$ を求めることができる。 eU_{11} と eU_{21} は増分変位に関して1次の項より成っているので, 数値積分を行った結果は, (3.20) 式のようにまとめることができる。

$$\Delta_e U_{11} + \Delta_e U_{21} = \Delta_e u^T ef_{in} \quad \dots\dots\dots (3.20)$$

eU_{12} , eU_{13} と eU_{23} は増分変位に関して2次の項より成っているので, 数値積分を行った結果, (3.21) 式のようにまとめることができる。

$$\Delta_e U_{12} + \Delta_e U_{13} + \Delta_e U_{23} = \frac{1}{2} \Delta_e u^T eK \Delta_e u \quad \dots\dots\dots (3.21)$$

結果として増分節点変位 $\Delta_e u$ によって要素 e がたくわえる増分歪エネルギー $\Delta_e U$ は (3.22) 式によって表わすことができる。

$$\Delta_e U = \Delta_e u^T e f_{in} + \frac{1}{2} \Delta_e u^T e K \Delta_e u \quad \dots\dots\dots (3.22)$$

この数値積分に関する具体的な方法は別冊の付録 (No. 4 , No. 6) に載せる。

6. 弾塑性大変形解析法

以上に述べた方法によって、増分計算のために必要な要素の剛性マトリックス eK と節点内力ベクトル $e f_{in}$ を求めることができるので、2節に述べた仮定条件のもとで、線材構造の3次元弾塑性大変形解析を、2章に述べた一般論に添って行いことができる。

3・4 理論解との比較のための数値解析例

本理論を用いた鋼構造骨組の3次元弾塑性大変形問題の数値解析例については、すでに日本建築学会の論文報告集189号、209号、227号に発表し、実験との対比等の検討を行っている。

本節では本理論の検証のために、理論解の存在している弾性大変形問題 (Elastica) と理論解の存在する弾塑性問題 (集中荷重をうける弾完全塑性梁) を数値解析し、理論解との比較を行う。

1. 弾性大変形問題 (Elastica)

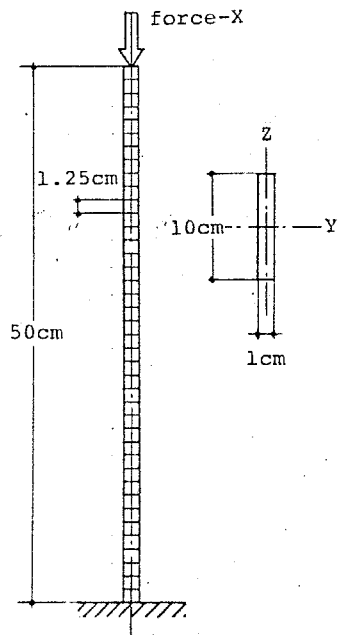
数値解析を行う対象は、図3.9に示すような軸力をうける弾性片持梁である。(付録-C参照)

要素分割は図3.9に示すように行う。初期荷重として、非常に微小な(解析対象としている棒の自動の約 $1/40$ の値)横方向力を先端に加えた後、図3.10に示すように145段階にわたって先端に初期の部材軸方向へ強制的に増分変位を徐々に与えて数値解析を進める。

図3.11には先端の鉛直変位 u と力との関係、図3.12には、先端の横変位 v と力との関係を示す。これらの図中、十字で示してある点はTheory of Elastic Stabilityに載せられているTableから引用したものであるが、完全に、この数値解析と一致していることがわかる。

図3.13には、図3.11、3.12に1~10の番号で指している荷重時の変形の様子を示す。この図を見ても明らかなように、先端の要素は初期の位置から要素自身の大きさの数十倍離れた位置へ変位し、その要素の方向は 150° 程度回転している。

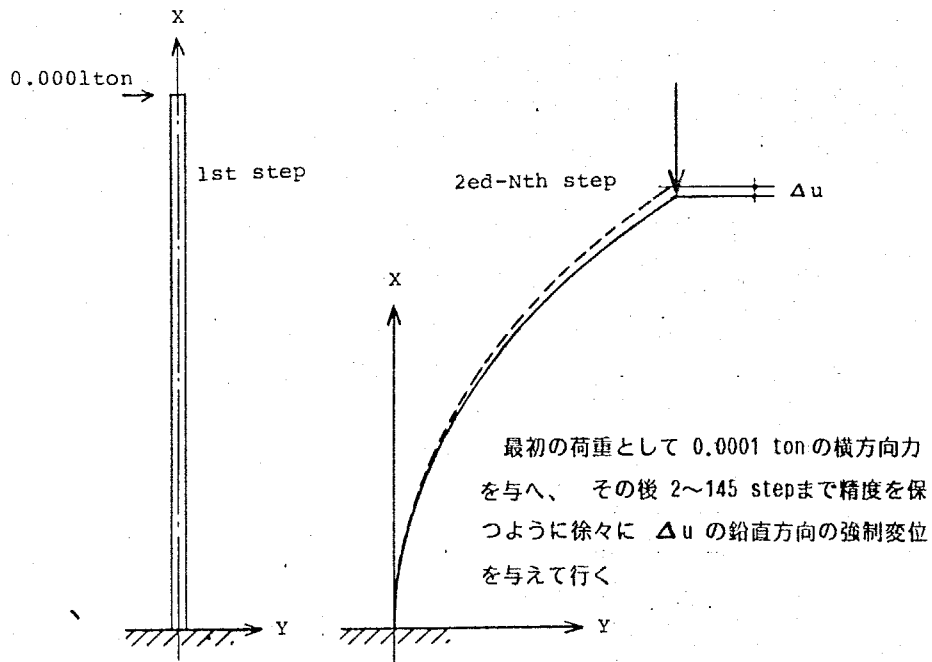
ここに示したように、極端な大変形現象について、理論解と完全に一致する数値解析を行えたことによって、大変形問題に関する本理論の展開が正しいことを検証できたと考える。



ヤング率	$E = 2100 \text{ t/cm}^2$
断面積	$A = 10.0 \text{ cm}^2$
断面二次モーメント	$I = 0.833 \text{ cm}^4$
断面二次半径	$i = 1/\sqrt{12} \text{ cm}$
長さ	$L = 50.0 \text{ cm}$
細長比	$\lambda = 100\sqrt{12}$
オイラー座屈荷重	$P_{EU} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} A$ $= 1.727 \text{ ton}$

材料は弾性体とする

図3.9 数値解析モデル (elastica)



最初の荷重として 0.0001 ton の横方向力
を与へ、その後 2~145 step まで精度を保
つように徐々に Δu の鉛直方向の強制変位
を与えて行く

図3.10 増分強制変位による数値解析法

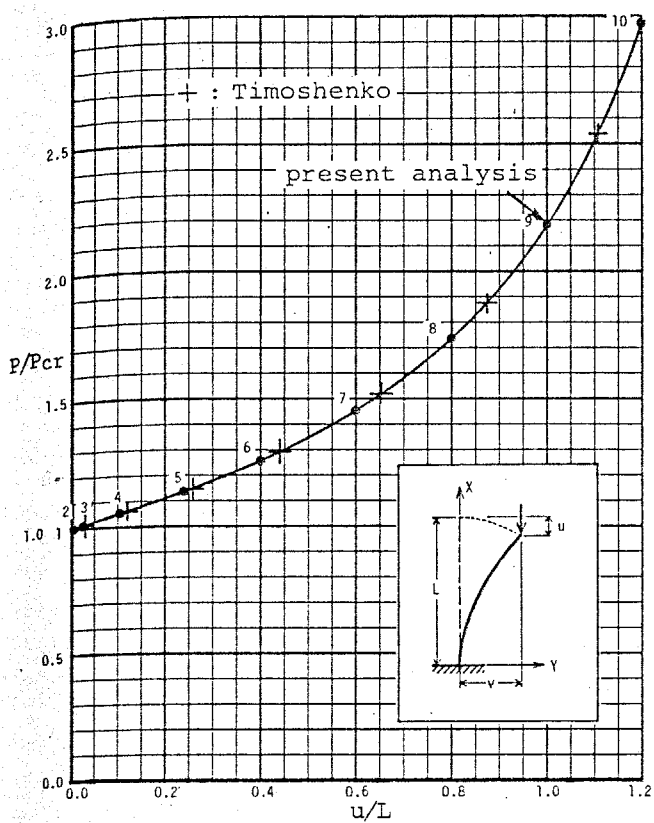


図3. 11 荷重と先端の鉛直方向変位

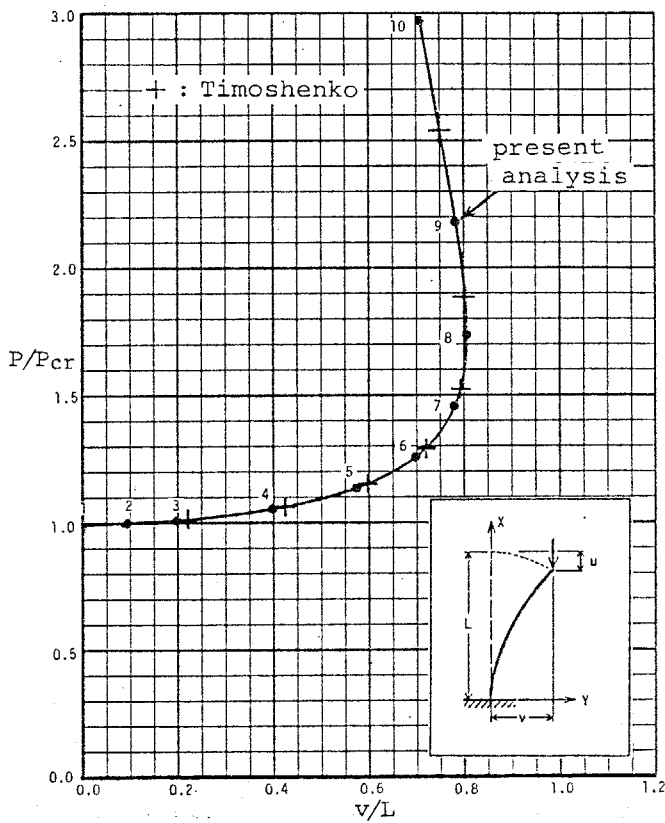


図3. 12 荷重と先端の水平方向変位

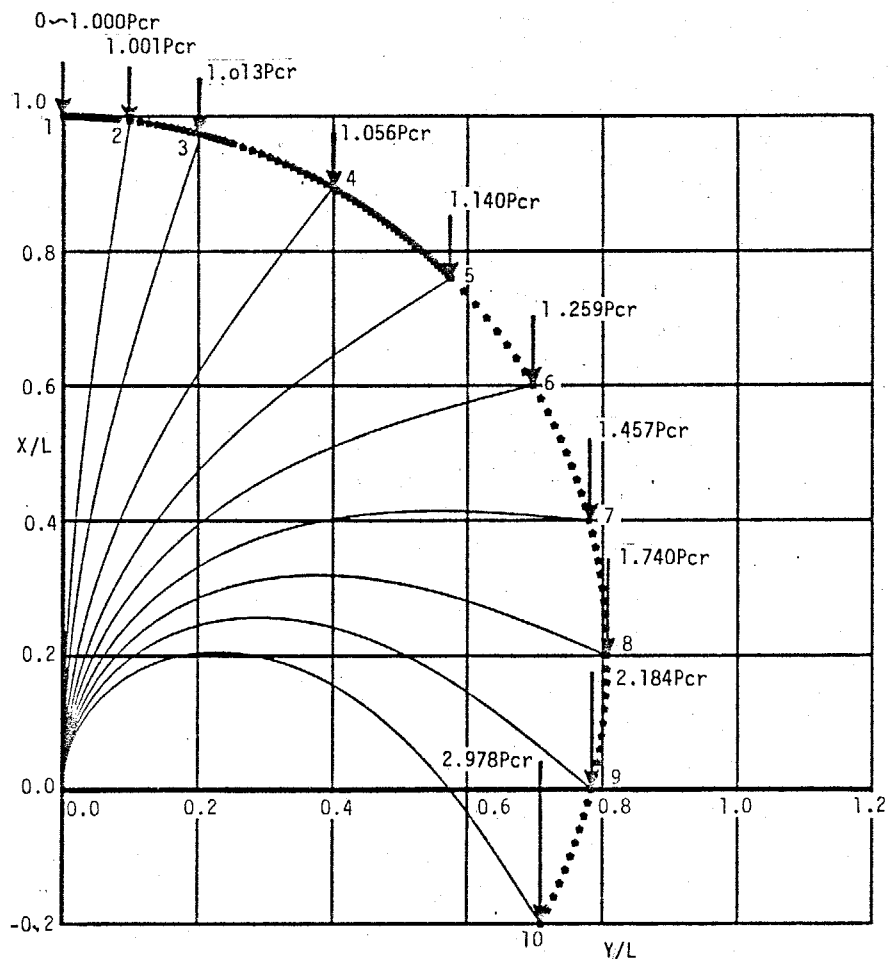


図3. 13 弾性座屈後の棒の変形状態の軌跡

2. 集中荷重をうける弾完全塑性梁

図3.14の中に示すように、弾完全塑性材料からなる長方形断面単純支持梁に中央集中荷重の作用する問題を対象に数値解析を行う。

材料を弾完全塑性体と考えているため、断面に働く曲げモーメントと曲率の関係は陽に表わすことができ、これを積分することによって中央のたわみ δ 、断面内の応力分布を解析的に求めることができる。弾性限荷重 P_e 、中央のたわみ δ_e は(3.23)式によって表わせ、断面が塑性域に進入した後の中央のたわみ δ は上記の理論解によって(3.24)式のように表わされる。

$$P_e = 2BD^2\sigma_{\text{yield}}/3L \quad \dots\dots\dots(3.23)$$

$$\delta_e = P_e L^3 / 48EI = \sigma_{\text{yield}} \cdot L^2 / 6ED$$

$$\frac{\delta}{\delta_e} = \left(\frac{P_e}{P}\right)^2 \left\{ 5 - 3 \left(3 - 2\frac{P}{P_e}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{P}{P_e} - \left(3 - 2\frac{P}{P_e}\right)^{\frac{3}{2}} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.24)$$

本理論による数値解析は梁を60分割して行っているが、図3.14に示すように、中央のたわみは(3.24)式によって求められる結果と完全に一致する解が得られる。図3.15には、図3.14中にA, B, C, Dで示した荷重時における塑性域の進入状態について示す。これについても(D)に示すように理論解と完全に一致する結果が得られた。これらの結果と付録(No. 2, No. 4, No. 6)に示すいくつかの数値解析結果によって本理論における塑性問題の扱い方について検証を行うことができたと考える。

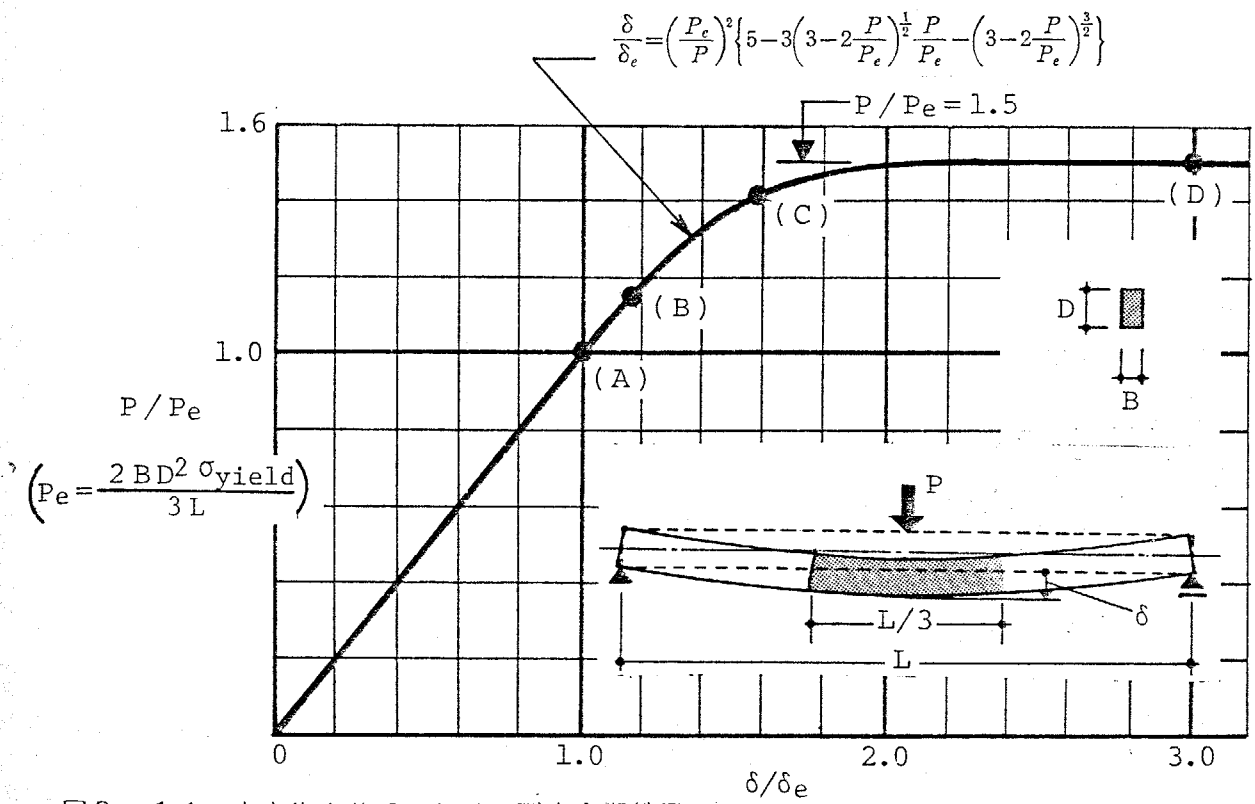


図3. 14 中央集中荷重をうける弾完全塑性梁の荷重—中央変位の関係
 $(\delta_e = P_e L^3 / 48 EI = \sigma_{yield} L^2 / 6 ED)$

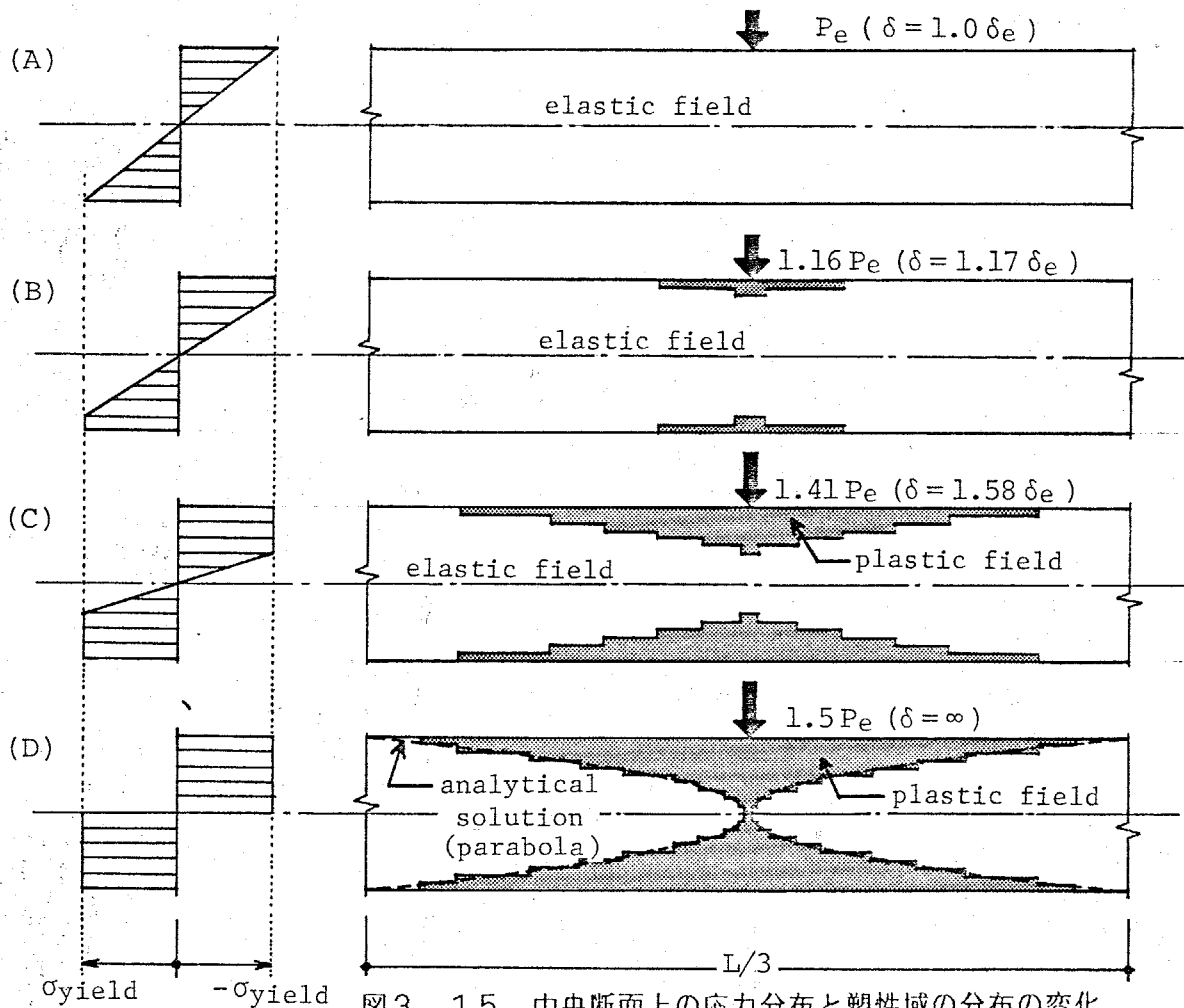


図3. 15 中央断面上の応力分布と塑性域の分布の変化
 (中央スパン $< L/3 >$ について表示)

第4章

繰返し荷重をうける板構造の 3次元弾塑性大変形解析理論

4・1	序	64
4・2	板構造の解析のための仮定条件	66
4・3	板構造の数値解析法	71
4・4	理論解との比較のための数値解析例	81

4・1 序

本章では，3章にて論じた線材理論を発展させ，2章において述べた一般論に従い，繰返し荷重をうける板構造の3次元弾塑性大変形解析理論に関して論じる。

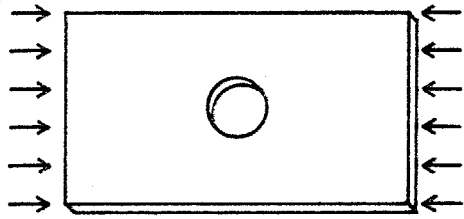
この理論の確立によって，平面応力問題としての弾塑性挙動，面内の大変形問題としての弾塑性座屈挙動，板の面外面げ問題，板の大たわみ問題としての弾塑性面外座屈問題，せん断座屈挙動等について，数値解析を行うことができる。さらに，これらの現象を同時に考慮した解析を行うことも可能である。

(図4.1を参照)

基本的な理論展開は，2章に述べたものと同一であるから，本章では板構造の解析にとって特に必要となる仮定条件および1段階の増分計算を行うために必要となる要素の剛性マトリックス eK と節点内力ベクトル ef_{in} の誘導について論じる。

最後に，理論解との比較のための数値解析例を示し，この理論の大変形問題に関する検証を行う。弾塑性問題に関する検証と実際的な問題への応用については付録 (No.11, No.13, No.14) に別載する。

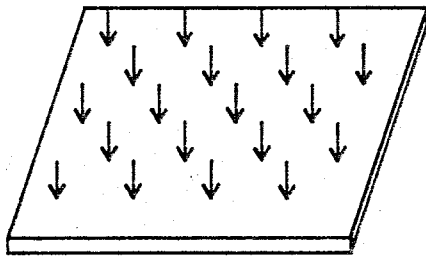
ここで展開する理論は，5章の解析理論において，その部材を板要素の組立てとしてモデル化する部分に適用するためのものである。



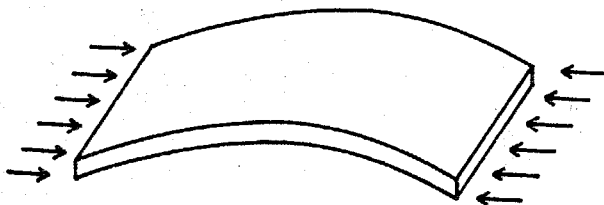
Elastic-Plastic Analysis
for Plane Stress Problem



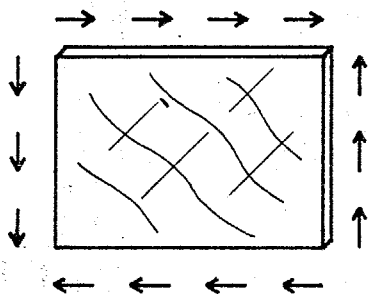
Elastic-Plastic Buckling
Analysis of Plate in
Plane Stress Field



Elastic-Plastic Analysis
for Plate Bending Problem



Elastic-Plastic Buckling
Analysis of Plate



Elastic-Plastic Shear
Buckling Analysis of Plate

図4. 1 本章の理論によって扱うことのできる板構造の弾塑性大変形解析の問題

4・2 板構造の解析のための仮定条件

本解析を行うにあたって仮定する事項を以下に示す。

1. ここで対象とする板構造は、広さに比較して厚さが薄く、その厚さ方向の応力、板の曲げにともなって生じるせん断応力による歪（変形）を無視できると考える。（図4.2参照）

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

2. 曲げ変形による面内歪（ $\epsilon_x, \epsilon_y, \tau_{xy}$ ）の板厚方向への変化はキルヒホッフ・ラブの仮定、つまり変形前に板の中央面に立てた法線は、変形後も直線であり変形後の中央面に関しても法線になっているという仮定に従うものとする。本理論では面内変形も同時に扱っているので、この中央面についても歪（ $\epsilon_{x0}, \epsilon_{y0}, \tau_{xy0}$ ）なる歪を生じることを考慮する。

結果として、図4.2に示すように、板構造の3次元解析を行うために考える

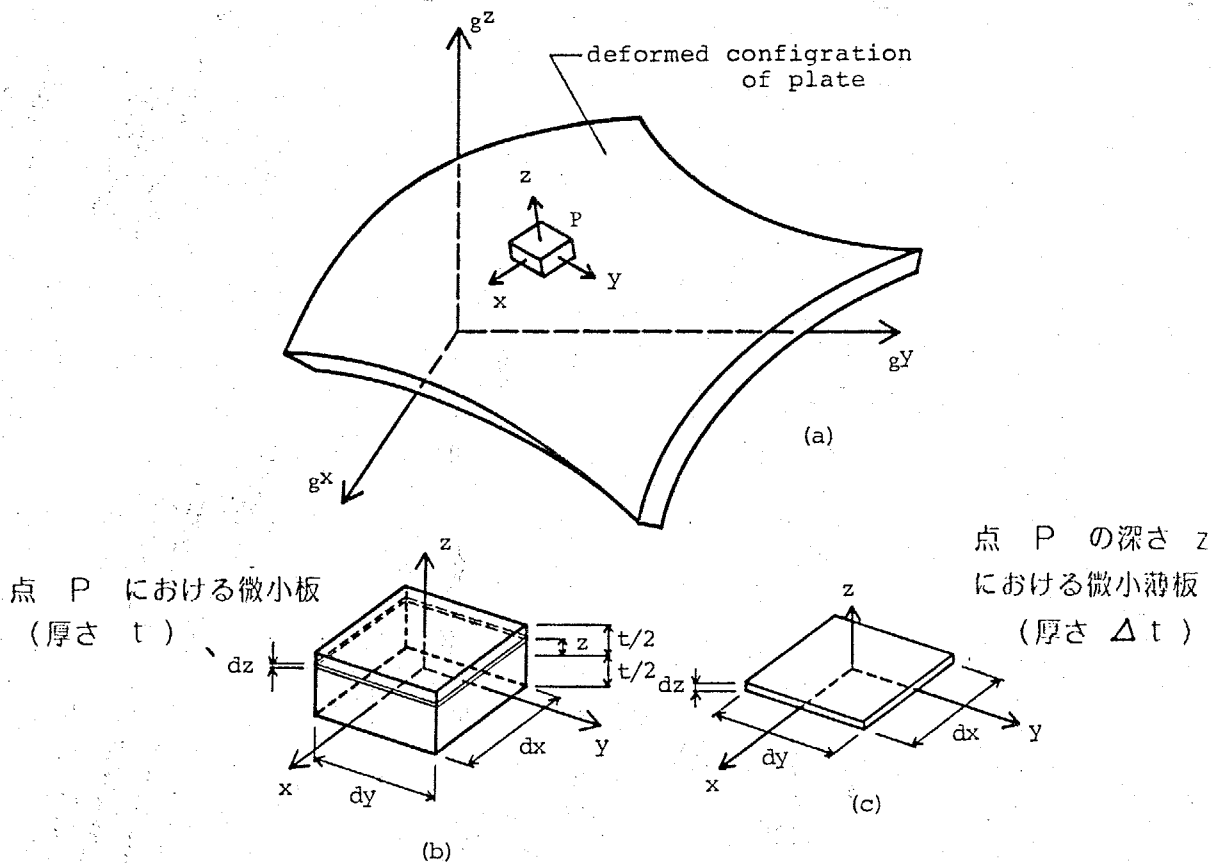


図4.2 変形して曲面状となった板に考える微小部分

べき、板内部のある一点の応力と歪については、その点を通るように立てた法線上のその深さにおいて、板を層状に切つてできる Δz の厚さの板の平面応力状態 (Plane stress) を考えればよいことになる。それは、応力として $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ 、歪として $(\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy})$ である。

3. 2の仮定条件を板の内部の変形で表わすと、(4.2)式のようになる。この式において (u_0, v_0, w_0) は各々、中央面における変位、 z はその点の中央面からの高さである。

$$\begin{aligned} u &= u_0 - \frac{\partial w_0}{\partial x} z \\ v &= v_0 - \frac{\partial w_0}{\partial y} z \\ w &= w_0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

この仮定は板の応力状態が塑性域に入っても適用する。

4. 板の形状は、本論文の主題である鋼構造骨組、部材の解析の基本とするために、変形後には曲面になるが、初期には長方形平板を考える。この板を、3次元弾塑性大変形解析のために、変形後の曲面形に対して追従性が高く、応力状態を細かく追跡し易い三角形の有限板要素を用いて分割しモデル化する。要素分割は図4.3に示すように、板の長さ方向、幅方向に関して平行線で分割した長方形を2つの三角形に分ける方法によって行う。

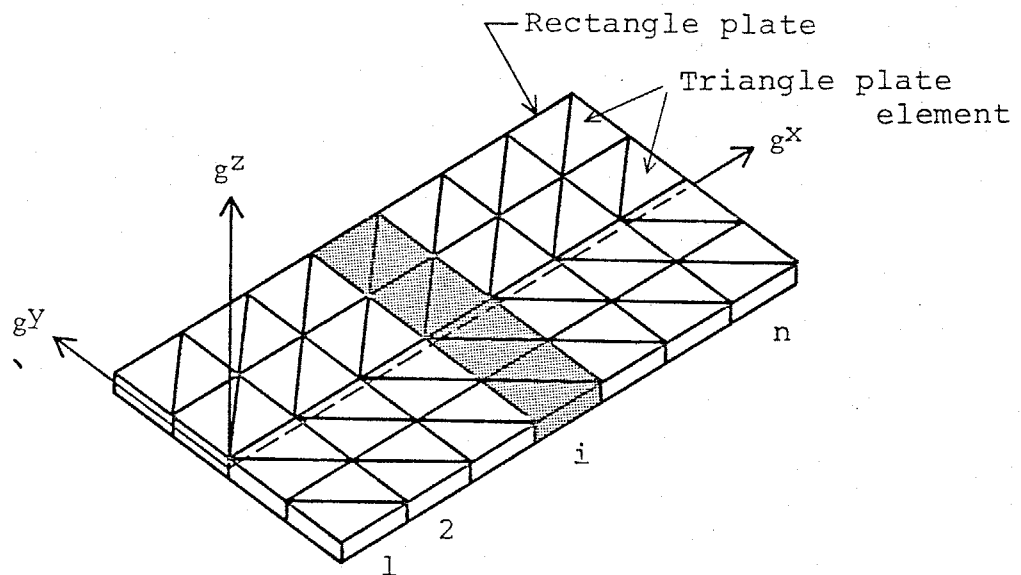


図4.3 全体座標系において三角形板要素に分割された長方形板

5. 4.で述べた分割法に関連して、本論文では板の長さ方向にそった面内の変位が、全体としていわゆる線材としての変形性状を表わし、図4.4に示すように曲げ応力分布を正しく表現できることを重点に考慮し、(4.3)式のように、横変位を長手方向(r)の2次、3次の多項式、長手方向の変位をその導関数に幅(s)を乗じた値だけ補正する。この補正は図4.3を参考として、1つの帯状ならんだ三角形要素群について、それぞれ共通なものを用い、一つの群毎に独立なものを用いる。横方向の補正変位 v_{add} 、長手方向の補正変位 u_{add} は、それぞれの方向の座標を r, s として(4.3)式の補正関数によって表わされる。 β_1, β_2 は未定係数である。

$$\begin{aligned} v_{add} &= \beta_1 r^2 + \beta_2 r^3 \\ u_{add} &= -2\beta_1 r s - 3\beta_2 r^2 s \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

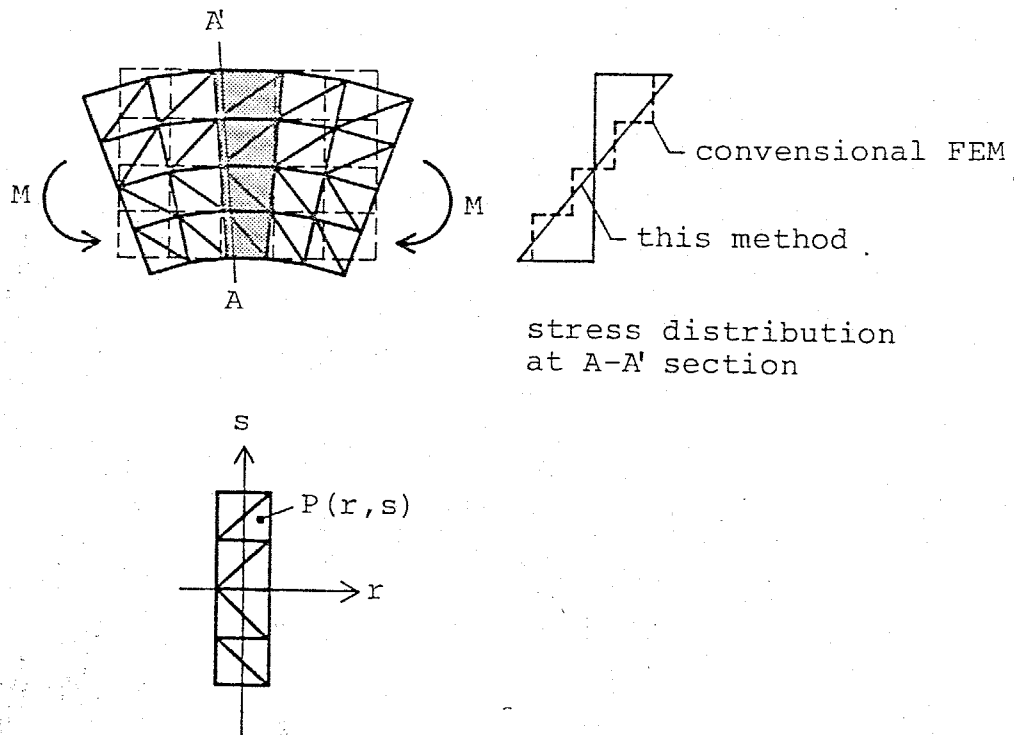


図4.4 板面内の曲げ応力を正しく表すための補正関数

6. 板の要素分割を十分に細かく行うことを前提に、変形後の板の形状は4.において分割された各々の三角形要素を、その変形状態に対応させて、折面に近似することにより解析を進める。ここに曲面要素を用いて要素の分割数を

減らす考え方もあるが、ここで用いる方法の方が弾塑性大変形問題の解析には適しているからである。これは、3章にて述べた線材解析を行う際に確認したことであり、変形して曲線になり部分的に塑性化している部材を曲線要素を用いて解析するより、短い直線要素を多く用いて解析する方が、弾塑性大変形解析には適しているからである。

7. 要素内の応力、歪状態は各要素の重心と3辺の中央位置の4断面についてのみ追跡する。歪エネルギーを計算する際には、内部の応力状態が必要であるが、これはこの4断面に応力により補間計算して数値積分を行う。

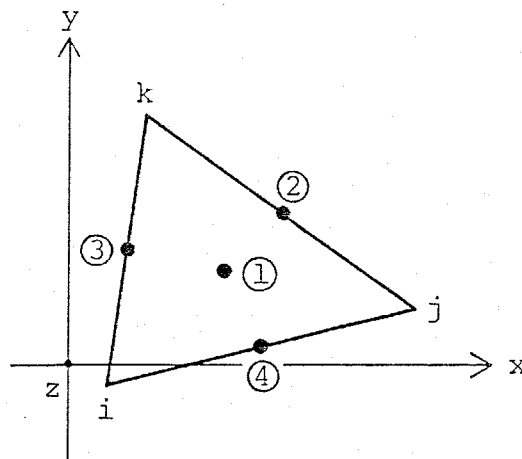
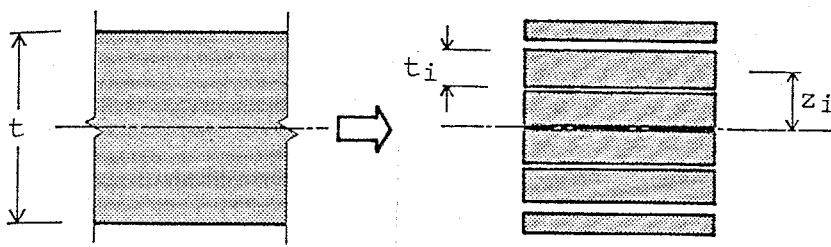


図4.5 要素内において応力-歪の追跡計算および数値積分を行なう断面の位置

この各4断面は図4.6に示すように、6個の単位の厚さに分割した層として考え、その各々の単位厚さについて、平面応力場($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \epsilon_x, \epsilon_y, \tau_{xy}$)を考慮する。図4.6に示す t_i と z_i は(4.4)式を満足するように定めただものである。

$$\begin{aligned} \sum t_i &= t \\ \sum t_i z_i^2 &= t^3/12 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.4)$$



	t_i/t	z_i/z
1	0.0833	0.5
2	0.2083	0.3
3	0.2083	0.1
4	0.2083	-0.1
5	0.2083	-0.3
6	0.0833	-0.5

図4.6 6層に分割した厚さ t の板断面

8. 7.において述べた単位厚さの各層について、材料の降伏現象を追跡する。応力と歪の関係は2章にも述べたように、増分変形前の応力を初期応力とした疑似弾性体と仮定し、増分変形を生じている過程の応力 σ は(4.5)式によって書くことができる。

$$\sigma = \sigma_{old} + D_t \Delta \epsilon \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

この式において σ は $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$, σ_{old} は増分変形前に働いていた応力 $(\sigma_{xold}, \sigma_{yold}, \tau_{xold})$, $\Delta \epsilon$ は増分変位によってその点に生じる増分歪 $(\Delta \epsilon_x, \Delta \epsilon_y, \Delta \gamma_{xy})$ である。 D_t は構成方程式であり、この部分が弾性挙動域にあるときには Hooke の法則に従い、塑性状態にあるときには Reuss の法則 (塑性歪はその偏差応力に比例して生じる) に従うとする。ただし、塑性状態にあっても、相当塑性歪 $\bar{\Delta \epsilon}_p$ が減少する場合には、ただちに弾性復活したと考へ Hooke の法則を用いる。

Equivalent stress

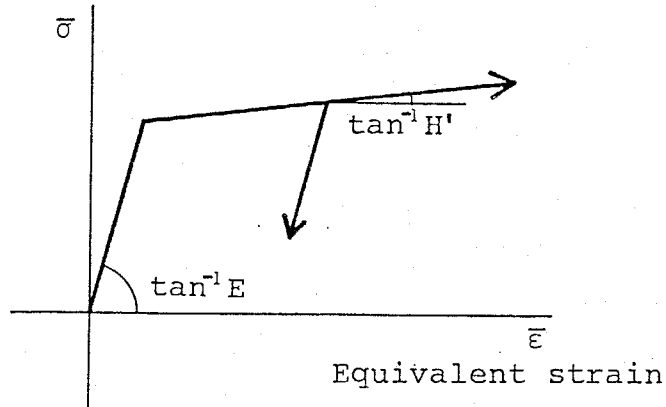


図4.7 相当応力-相当歪の関係

4・3 板構造の数値解析法

本章の序にも述べたように、板構造に関する数値解析法は2章において述べた一般論に従って行うことができるので、本節では、板構造に特有の項目として座標系、変位関数、増分歪エネルギーについて論じ、ある荷重段階において次の段階の増分変位を求めるために必要な要素の剛性マトリックス eK と節点内力ベクトル ef_{in} の数値積分による計算法について論じる。

1. 座標系と増分節点変位

本理論の展開には、図4.8に示すように、基本的に3つの座標系 (O_I, O_{II}, O_{III}) を用いる。

座標系 O_I は (g_x, g_y, g_z) 軸によって定義され、図4.8(a)に示すように、板の変形には関係なく不動な全体座標系である。この座標系において有限要素の各節点に変位ベクトル $g u_i$ 、増分変位ベクトル $\Delta g u_i$ を考える。

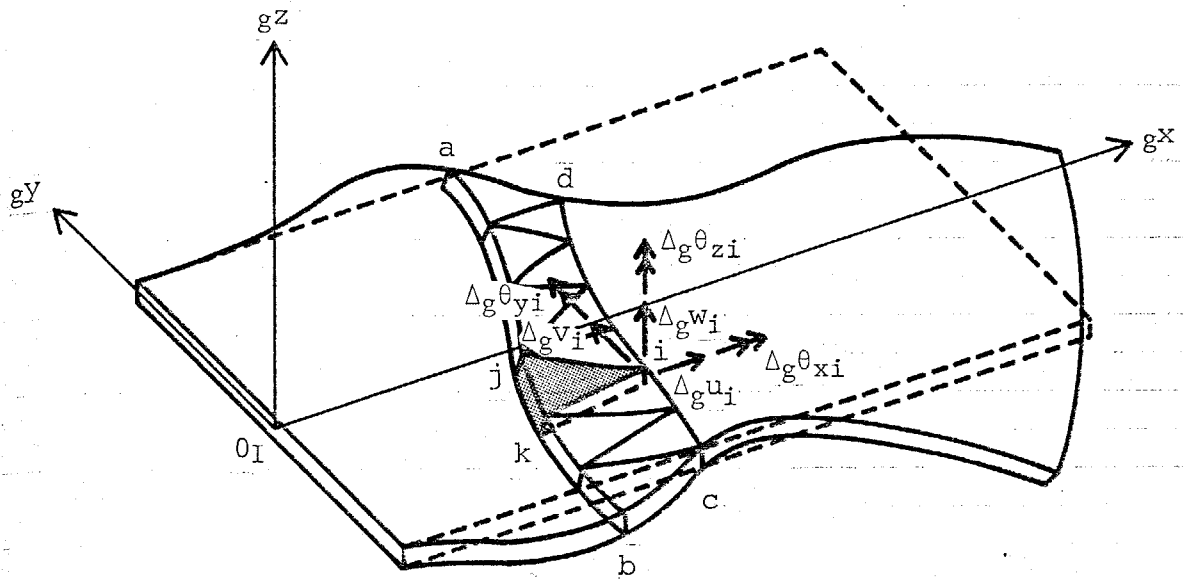
$$g u_i = (g u_i, g v_i, g w_i, g \theta_{xi}, g \theta_{yi}, g \theta_{zi})^T \quad \dots\dots (4.6)$$

$$\Delta g u_i = (\Delta g u_i, \Delta g v_i, \Delta g w_i, \Delta g \theta_{xi}, \Delta g \theta_{yi}, \Delta g \theta_{zi})^T \quad \dots\dots (4.7)$$

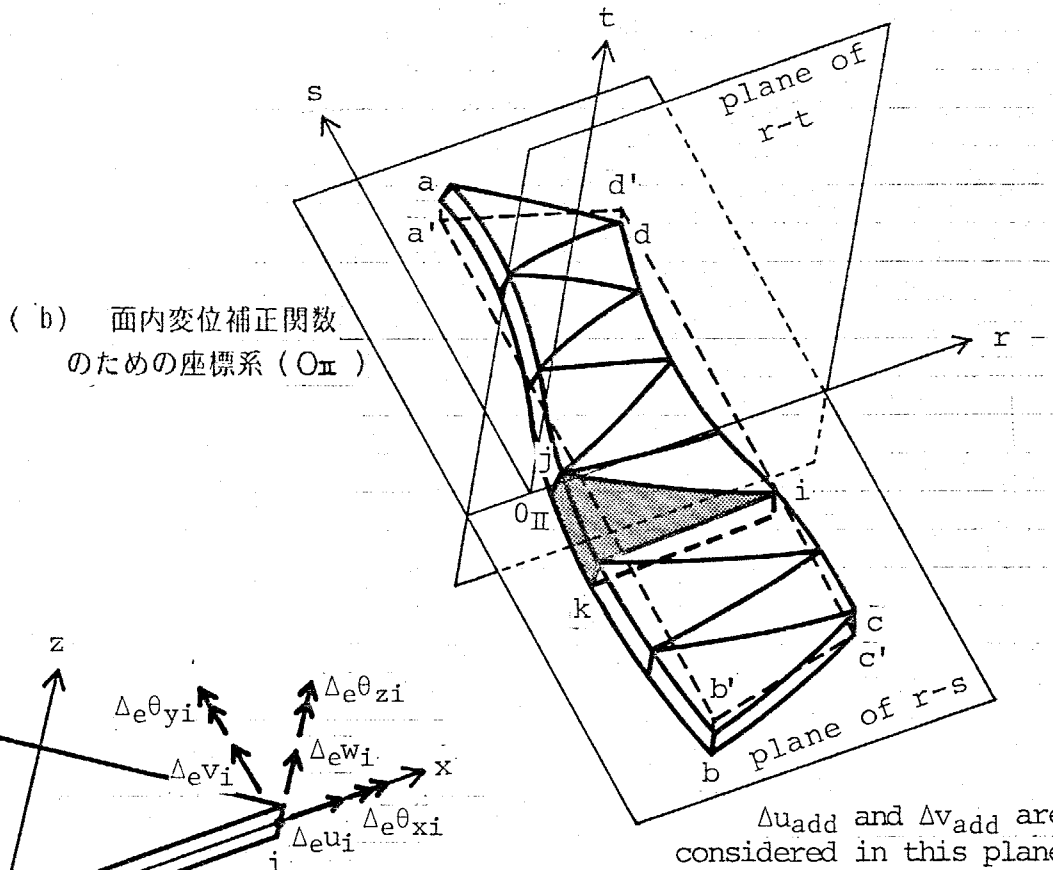
座標系 O_{II} は (r, s, t) 軸によって定義され、板の変形にもなって移動する座標系であり、先に述べた板の面内変形の精度を高めるために導入する変位の補正関数を展開するために用いる座標系である。この座標系 O_{II} は以下に示す方法によって板の幅方向へならんだ変形後の要素群に関して定義する。

図4.8(b)に示すように、この要素群の4隅の点を a, b, c, d として、その対角にある点を結んでできる2本のベクトル ac, bd に直交するように t 軸を定義する。 r 軸はベクトル ab, dc を平均したベクトルに直交した面 ($r-t$ 平面) と、 t 軸に垂直な平面 ($r-s$ 平面) との交線によって定義する。最後に t 、 r 軸に関して直交した軸として s 軸を定義する。

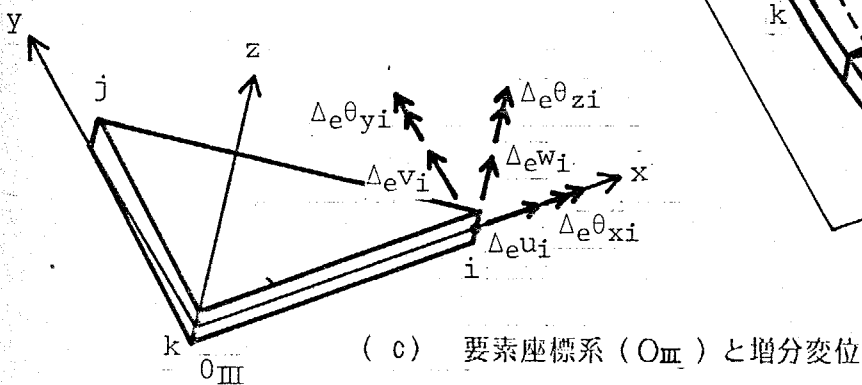
この座標系において面内変位の補正関数を考え、(4.3)式で定義した未定係数の増分を $(\Delta \beta_1, \Delta \beta_2)$ とする。



(a) 全体座標系 (O_I) と増分変位



(b) 面内変位補正関数のための座標系 (O_{II})



(c) 要素座標系 (O_{III}) と増分変位

図 4. 8 座標系 (O_I , O_{II} , O_{III}) と増分変位

$$\begin{aligned} \Delta u_{\text{add}} &= -2 \Delta \beta_1 r s - 3 \Delta \beta_2 r^2 s \\ \Delta v_{\text{add}} &= \Delta \beta_1 r^2 + \Delta \beta_2 r^3 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

座標系 O_{III} は (x, y, z) 軸によって定義され、変形する三角形板要素とともに移動する、最も局所的な座標系である。xy 平面は要素の面内にある座標系であり、z 軸はこれに垂直な軸である。この座標系において増分節点変位 $\Delta e u_i$ を考える。

$$\Delta e u_i = (\Delta e u_i, \Delta e v_i, \Delta e w_i, \Delta e \theta_{xi}, \Delta e \theta_{yi}, \Delta e \theta_{zi})^T \quad \dots\dots\dots (4.9)$$

O_{III} 座標系の x, y, z 軸の O_I 座標系における各方向余弦によって作られる座標変換マトリックスを ${}_{\text{III}}L_I$ とする。

$$x = {}_{\text{III}}L_I \cdot g^x \quad \dots\dots\dots (4.10)$$

$$\begin{aligned} \text{ここにおいて} \quad x &= (x, y, z)^T \\ g^x &= (g_x, g_y, g_z)^T \end{aligned}$$

この座標変換マトリックスによって $\Delta e u_i$ は $\Delta g u_i$ によって表わすことができる。

$$\Delta e u_i = {}_{\text{III}}L_I \cdot \Delta g u_i \quad (4.11)$$

同様にして O_{II} 座標系の r, s, t 軸の O_I 座標系における各方向余弦によって作られる座標変換マトリックスを ${}_{\text{II}}L_I$ とすると、 O_{III} 座標系と O_{II} 座標系との間の座標変換マトリックス ${}_{\text{III}}L_{\text{II}}$ は (4.13) 式によって求めることができる。 ${}_{\text{III}}L_{\text{II}}$ は $r-s$ 面上において求められる面内補正変位を O_{III} 座標系における増分変位 (u, v, w) に変換するために用いられる。

$$x = {}_{\text{III}}L_{\text{II}} \cdot r \quad \dots\dots\dots (4.12)$$

$$\begin{aligned} \text{ここにおいて} \quad {}_{\text{III}}L_{\text{II}} &= {}_{\text{III}}L_I \cdot {}_{\text{II}}L_I^{-1} \\ r &= (r, s, t)^T \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.13)$$

2. 増分変位関数

要素の応力状態が降伏しているか否かにかかわらず、変形後の要素座標系において、板の中央面上の点の面内の増分変位 $\Delta u_0, \Delta v_0$ を x と y に関する 1 次の多項式と先に示した補正関数との和で表わし、中央面上の点の面外方向の増

分変位 w_0 を x と y の 3 次の多項式によって表わす。通常の有限要素法の手順に従って要素毎に計算を進めることによって、これらの多項式は、要素の節点における増分節点変位 $\Delta_e u$, $\Delta \beta$ を未知量として、(4.14), (4.15) 式のような形に整理できる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_0 \\ \Delta v_0 \end{Bmatrix} = N_p(x, y) \cdot \Delta_e u_p + \text{III}' L_{\text{II}} \cdot N_{\text{add}}(r, s) \cdot \Delta_e \beta \quad \dots\dots\dots (4.14)$$

$$\Delta w_0 = N_w(x, y) \cdot \Delta_e u_w \quad \dots\dots\dots (4.15)$$

ここにおいて、 N_p , $\Delta_e u_p$, $\text{III}' L_{\text{II}}$, N_{add} , $\Delta_e \beta$, N_w , $\Delta_e u_w$ は以下に示すようなものである。

N_p は x, y に関する 1 次の関数マトリックス, N_w は x, y に関する 3 次の関数ベクトル, N_{add} は r, s に関する 3 次の関数マトリックス, $\text{III}' L_{\text{II}}$ は O_{II} 座標系と O_{III} 座標系の変換マトリックス $\text{III}' L_{\text{II}}$ の内 (r, s) , (x, y) に関する項だけで作られる 2×2 の変換マトリックスであり, $\Delta_e u_p$, $\Delta_e u_w$, $\Delta_e \beta$ は (4.16), (4.17), (4.18) 式に示す増分節点変位ベクトルである。

$$\Delta_e u_p = (\Delta_e u_i, \Delta_e u_j, \Delta_e u_k, \Delta_e v_i, \Delta_e v_j, \Delta_e v_k)^T \quad \dots\dots\dots (4.16)$$

$$\Delta_e u_w = (\Delta_e w_i, \Delta_e w_j, \Delta_e w_k, \Delta \theta_{xi}, \Delta \theta_{xj}, \Delta \theta_{xk}, \Delta \theta_{yi}, \Delta \theta_{yj}, \Delta \theta_{yk}, \Delta \theta_{zi}, \Delta \theta_{zj}, \Delta \theta_{zk})^T \quad \dots\dots (4.17)$$

$$\Delta_e \beta = (\Delta \beta_1, \Delta \beta_2)^T \quad \dots\dots\dots (4.18)$$

ここで $\Delta_e u_p$ と $\Delta_e u_w$ を集合したものを $\Delta_e u$ と定義する。

$$\Delta_e u = \begin{Bmatrix} \Delta_e u_p \\ \Delta_e u_w \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4.19)$$

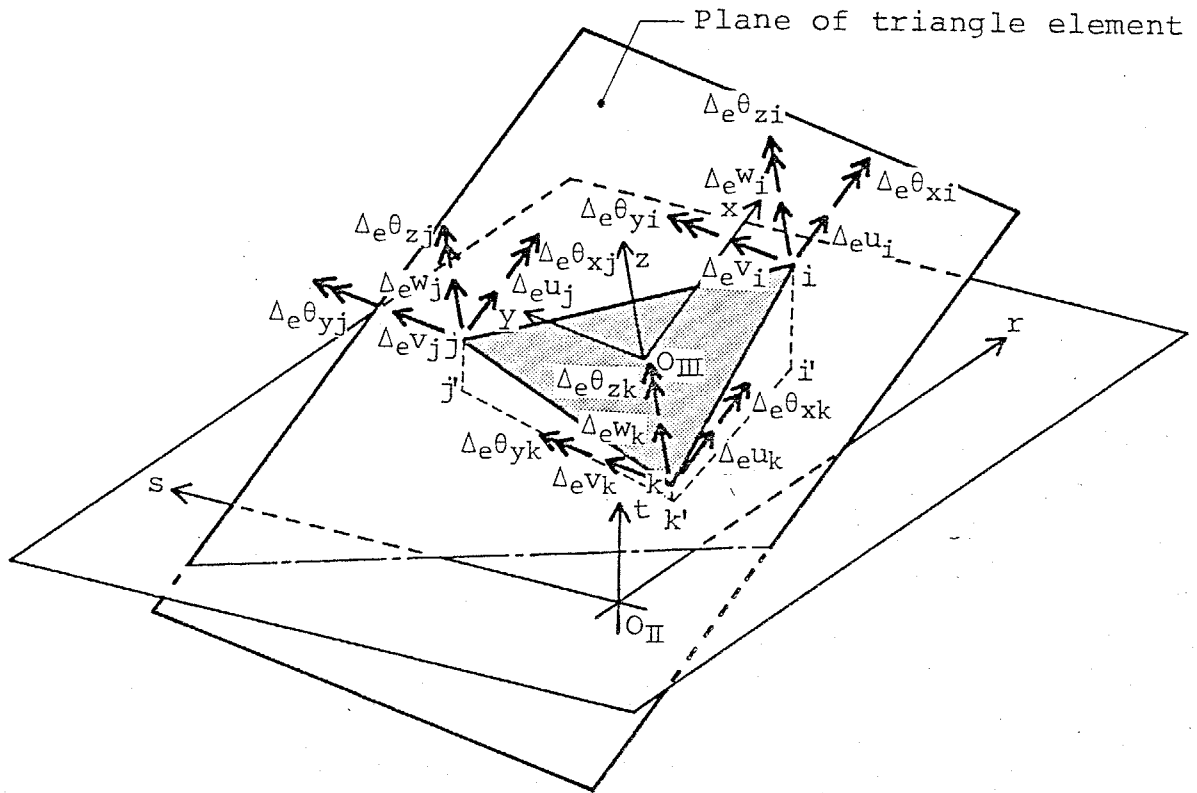


図4.9 面内変位補正関数のための座標系 (O_{II}) と要素座標系 (O_{III}) の関係

3. 増分変位によって要素 e がたくわえる増分歪エネルギー

外力をうけて変形し、内部にはある応力が分布している板要素の応力、歪が増分の外力をうけて変化する過程を考える。増分変形前に生じている応力状態を σ_{xold} , σ_{yold} , τ_{xyold} 増分応力を $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$, $\Delta\tau_{xy}$, 増分歪を $\Delta\epsilon_x$, $\Delta\epsilon_y$, $\Delta\tau_{xy}$ とすると、要素 e のたくわえる増分歪エネルギー $\Delta_e U$ は歪エネルギーの定義により (4.20) で表わすことができる。 v は要素 e の体積を示す。

$$\Delta_e U = \int v (\sigma_{xold} \Delta\epsilon_x + \sigma_{yold} \Delta\epsilon_y + \tau_{xyold} \Delta\tau_{xy}) dv + \frac{1}{2} \int v (\Delta\sigma_x \Delta\epsilon_x + \Delta\sigma_y \Delta\epsilon_y + \Delta\tau_{xy} \Delta\tau_{xy}) dv \quad \dots\dots (4.20)$$

第1項は増分変形前に内部に分布していた応力と増分歪に関する増分歪エネルギーである。第2項は、仮定に述べたように、応力-歪の関係を疑似弾性体と考えているために求められるもので、増分応力と増分歪に関する増分歪エネルギーである。

$\Delta\epsilon_x$, $\Delta\epsilon_y$, $\Delta\tau_{xy}$ は有限変位を考慮すると材料力学の教科書にあるように

(4.21)式によって表わせる。

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_x &= \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ \Delta \varepsilon_y &= \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ \Delta \gamma_{xy} &= \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right\} \end{aligned}$$

.....(4.21)

この式において Δu , Δv , Δw は各々 x , y , z 方向の増分変位である。本節における式展開は、移動座標系 O_{III} を用いており、変形して曲面をなしている板について、その点で曲面に接するような平面を考え、 x , y , Δu , Δv は要素の面内、 z , Δw は面に対して法線方向に関するものを考えている。

2章に述べたように、本論文における最も基本的な理論の成り立ちは、増分歪エネルギーを増分変位の2次形式で表わすことにある。本章における展開においても、増分計算中の材料を疑似弾性体としているため、応力増分は歪増分の1次式によって表わせる。よって(4.20)式の増分歪エネルギーの計算に際して、図4.10の $\Delta_e U_1$, $\Delta_e U_2$ にあたる第1項は応力が一定値なのですべて考慮するが、第2項については歪の2次項に関する項 $\Delta_e U_4$ を微小項として、 $\Delta_e U_3$ のみを考慮する。実際に数値解析を行うときには、各段階ごとに外力と

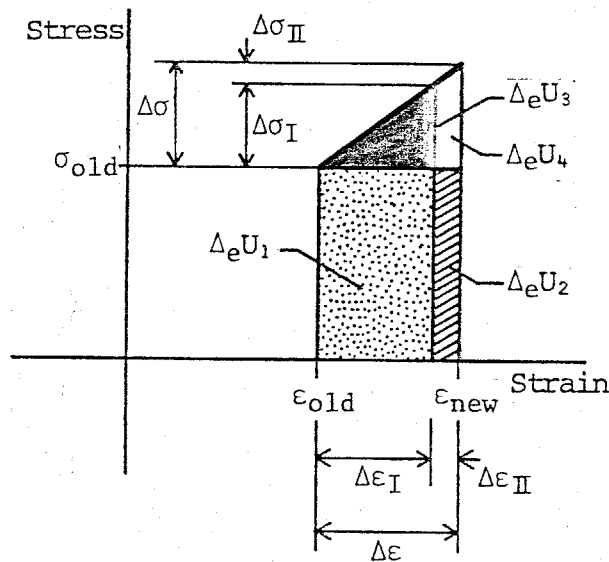


図4.10 板要素の増分歪エネルギー

内力の釣合条件が満足されるまで収束計算 (iteration) を行うので、この3次以上の項を省略したために生じる誤差は、結果として完全に除去される。

以上をまとめ、要素 e にたくわえられる増分歪エネルギー $\Delta_e U$ は (4.22) 式のように表わすことができる。

$$\Delta_e U = \Delta_e U_1 + \Delta_e U_2 + \Delta_e U_3 \quad \dots\dots\dots (4.22)$$

この式において $\Delta_e U_1$, $\Delta_e U_2$, $\Delta_e U_3$ は以下のようにして求めることができる。

$$\begin{aligned} \Delta_e U_1 &= \int_V \sigma_{xold} \cdot \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \sigma_{yold} \cdot \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \tau_{xyold} \cdot \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u}{\partial y} \right) dV \\ &= \int_V \Delta \epsilon_I^T \sigma_{old} dV \quad \dots\dots\dots (4.23) \end{aligned}$$

ただし $\Delta \epsilon_I$ は (4.2) 式を用いて (4.24) 式で示されるものである。

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_I &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u}{\partial y} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z \\ \frac{\partial \Delta v_0}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z \\ \frac{\partial \Delta v_0}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u_0}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_e U_2 &= \int_V \sigma_{xold} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ &\quad + \sigma_{yold} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ &\quad + \tau_{xyold} \cdot \left\{ \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right\} dV \\ &\quad \dots\dots\dots (4.25) \\ &= \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} \frac{\partial \Delta u}{\partial y} \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}
 \sigma_{xold} & \tau_{xyold} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \tau_{xyold} & \sigma_{yold} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \sigma_{xold} & \tau_{xyold} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \tau_{xyold} & \sigma_{yold} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{xold} & \tau_{xyold} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{xyold} & \sigma_{yold}
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \\
 \frac{\partial \Delta u}{\partial y} \\
 \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \\
 \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \\
 \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \\
 \frac{\partial \Delta w}{\partial y}
 \end{pmatrix} dV$$

..... (4 . 2 6)

この計算において、増分変位の微分量の曲げ変形による板厚方向の変化を無視し、それぞれの微分量を中央面上の値で代表し(4.27)式に示す応力マトリックスSを用いると $\Delta_e U_2$ は(4.28)式によって表わすことができる。

$$S = \begin{bmatrix}
 S_x & S_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 S_{xy} & S_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & S_x & S_{xy} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & S_{xy} & S_y & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & S_x & S_{xy} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & S_{xy} & S_y
 \end{bmatrix} \dots (4 . 2 7)$$

ただし、 S_x, S_y, S_{xy} は下に示すように応力を板厚方向に積分して得られるものである。

$$S_x = \int_t \sigma_{xold} dt$$

$$S_y = \int_t \sigma_{yold} dt$$

$$S_{xy} = \int_t \sigma_{xyold} dt$$

$$\underline{\Delta U_2 = \int_A \Delta u_0'^T \cdot s \cdot \Delta u_0' dA} \dots\dots\dots (4 . 2 8)$$

ここに $\Delta u_0'$ は以下に示す Δu_0 の導関数である。

$$\Delta u'_0 = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \Delta u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta u_0}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta w_0}{\partial y} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \Delta_e U_3 &= \frac{1}{2} \int_V \Delta \sigma_x \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \Delta \sigma_y \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \Delta \tau_{xy} \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u}{\partial y} \right) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \Delta \epsilon_I^T \cdot D \cdot \Delta \epsilon_I dV \quad \dots\dots\dots (4.29) \end{aligned}$$

(4.26)式に関連して、一般に板構造の大変形問題を扱った論文では面外変位についてのみ大変形項を考慮し、面内変位に関する $\frac{\partial \Delta u}{\partial x}$, $\frac{\partial \Delta u}{\partial y}$, $\frac{\partial \Delta v}{\partial x}$, $\frac{\partial \Delta v}{\partial y}$ の2次の項は省略している。しかし、本論では、最終的に板を組立てて作られる鋼部材の解析を目的としているため、板としては面内の変位である Δu , Δv についても大変形の項を考慮する。

これを考慮しているため、部材としての座屈の問題を扱うことができる。

4. 要素eの剛性マトリックス $_e K$ と節点内力ベクトル ef_{in}

増分変位関数 N_p, N_{add}, N_w の x 及び y に関する偏導関数によって $\Delta \epsilon_I$ と $\Delta u'$ は $\Delta_e u$ と $\Delta_e \beta$ を未知量として表わされ、要素の中にとった4断面の応力分布を用いて、 $\Delta_e U_1, \Delta U_2, \Delta U_3$ は(4.23), (4.28), (4.29)式を数値積分することによって、 $\Delta_e u, \Delta_e \beta$ の2次形式によって求めることができる。

$\Delta_e U_1$ は増分変位に関して1次の項より成っているので、数値積分を行った結果は(4.30)式のようにまとめることができる。

$$\begin{aligned} \Delta_e U_1 &= \int_V \Delta \epsilon_I^T \sigma_{old} dV \\ &= (\Delta_e u^T, \Delta_e \beta^T) \left\{ \begin{array}{c} ef_{in} \\ eb_{in} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.30) \end{aligned}$$

$\Delta_e U_2$, $\Delta_e U_3$ は増分変位に関して2次の項より成っているので、数値積分を行なった結果は(4.31)のようにまとめることができる。

$$\begin{aligned} \Delta_e U_2 + \Delta_e U_3 &= \frac{1}{2} \int_A \Delta u_0^T \cdot s \cdot u_0 dA + \frac{1}{2} \int_V \Delta \epsilon_I^T \cdot D \cdot \Delta \epsilon dV \\ &= \frac{1}{2} (\Delta_e u^T, \Delta_e \beta^T) \cdot {}_e K \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_e u \\ \Delta_e \beta \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4.31) \end{aligned}$$

結果として、増分節点変位 $\Delta_e u$ および補正関数の未定係数の増分 $\Delta_e \beta$ によって要素 e がたくわえる増分歪エネルギー $\Delta_e U$ は(4.32)式によって表わすことができる。

$$\begin{aligned} \Delta_e U &= \Delta_e U_1 + \Delta_e U_2 + \Delta_e U_3 \\ &= (\Delta_e u^T, \Delta_e \beta^T) \cdot \begin{Bmatrix} e f_{in} \\ e b_{in} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} (\Delta_e u^T, \Delta_e \beta^T) \cdot {}_e K \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_e u \\ \Delta_e \beta \end{Bmatrix} \\ &\quad \dots\dots\dots (4.32) \end{aligned}$$

5. 弾塑性大変形解析法

以上に述べた方法によって、増分計算のために必要な要素の剛性マトリックス ${}_e K$ と節点内力ベクトル $e f_{in}$, $e b_{in}$ を求めることができ、 O_{III} と O_I 間の座標交換を行い、 $\Delta_e \beta$ は $\Delta_e u$, $e b_{in}$ は f_{in} の集合に含めて考えることにより、2節で述べた仮定条件のもとで、板構造の3次元弾塑性大変形解析を、2章に述べた一般論にそって行うことができる。

して、理論展開が複雑である板構造の大変形問題について数値解析を行い、検証を行う。

数値解析に用いる対象は図 4. 11 に示すように、等分布荷重をうける、周辺が完全に固定された厚さ 1 cm、1 辺の長さ 1 0 0 cm の正方形板である。

(付録-D を参照)

数値解析は対称条件を用いて全体の 1 / 4 について行い、要素分割を図 4.1 2 に示すように行い。数値解析結果を図 4.1 3 ~ 4.1 5 に示す。

図 4.1 3 は分布荷重の大きさと板中央の鉛直変位の関係を示したものであり Levy によって "Square Plate Clamped Edges under Normal Pressure Producing Large Deflection" TR740-National Advisory for Aeronautics, 1942 に発表されている高次のフーリエ級数を用いた理論解と完全に一致している。図中の細い実線は微小変位 (線形) 解析による結果を示しているが、中央のたわみが板厚の 3 倍になると、大変形解析による解は微小変位解析による解の 6 倍の荷重に抵抗しうることを示している。

図 4. 14 は板中央の表面および裏面における応力度の変化を示したものである。図中 a, b はそれぞれ微小変位解を示し, c, d は大変形解を示している。a と c, b と d は初期の微小荷重時には完全に一致した挙動を示しているが、変形が大きくなるに従い、それぞれ異った軌跡を示し、荷重が 0.01 t/cm^2 を超えた後は表面にも引張応力が発生していることが分る。裏面に発生している引張応力は微小変位解に比べると極端に小さく、中央変位が板厚の 3 倍になると $1/3.5$ になることが分る。図 4. 15 には変形状態の変化を等変位曲線図によって示す。この例と付録に示した数値解析結果の考察により、本理論の検証を行えたと考える。

図4.13
等分布荷重
と中央変位
の関係

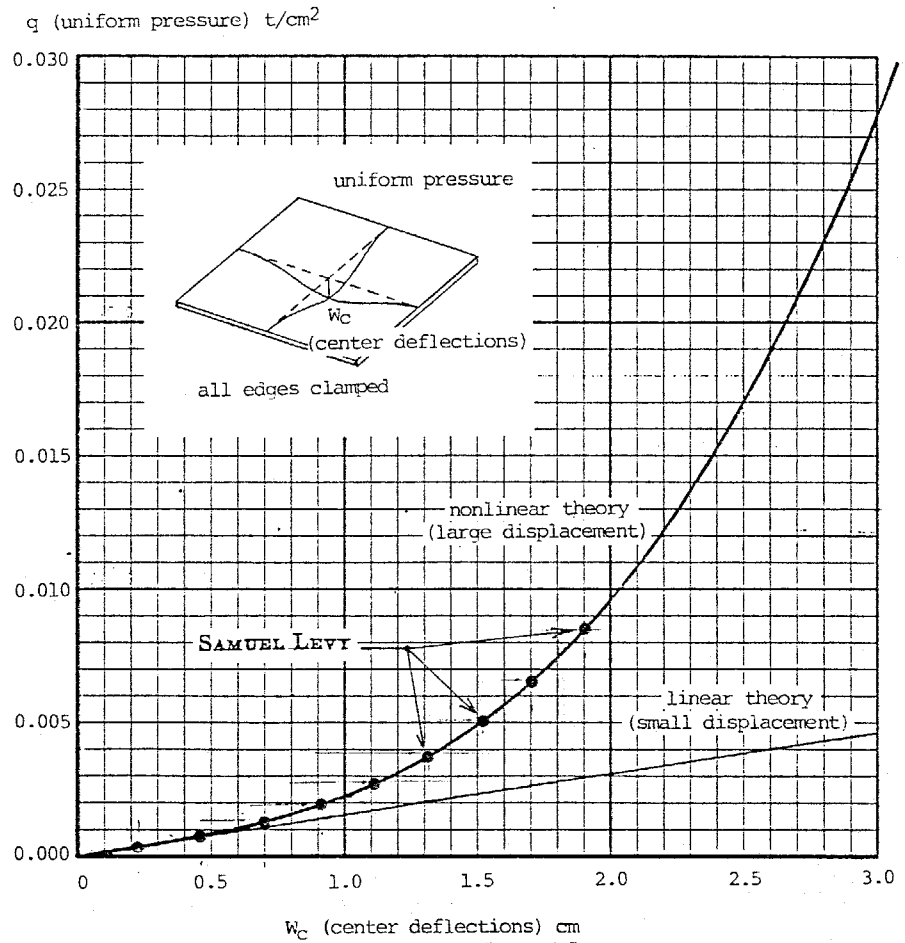
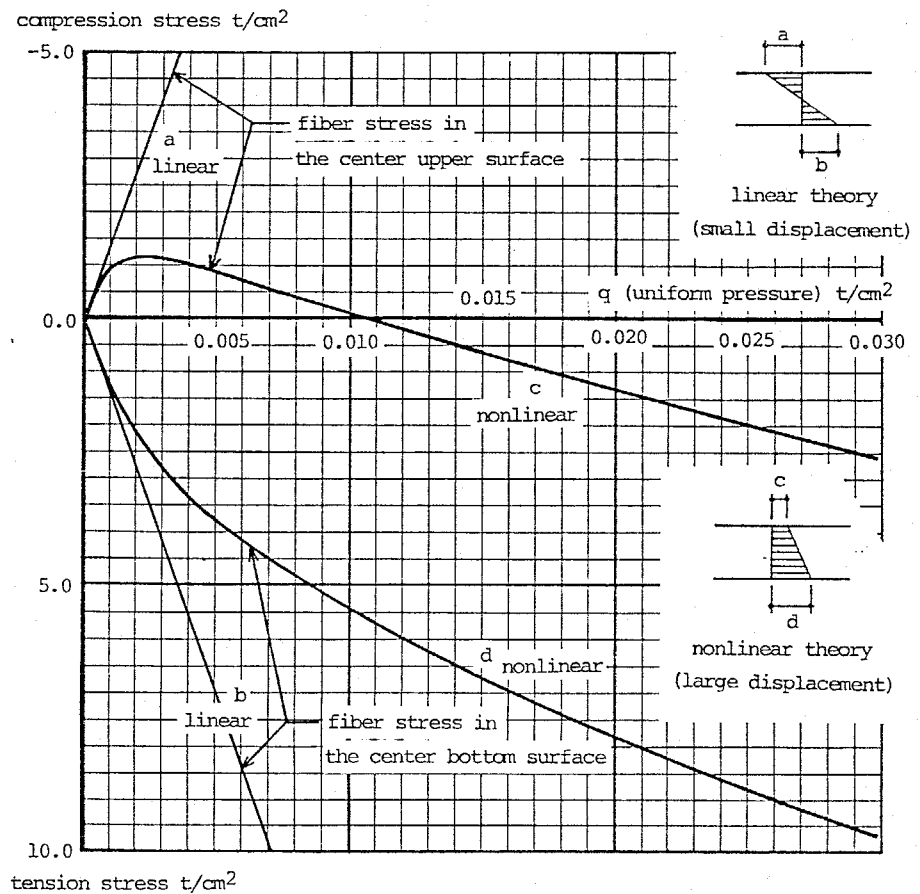


図4.14
等分布荷重
と板中央の
表裏の応力度
の関係



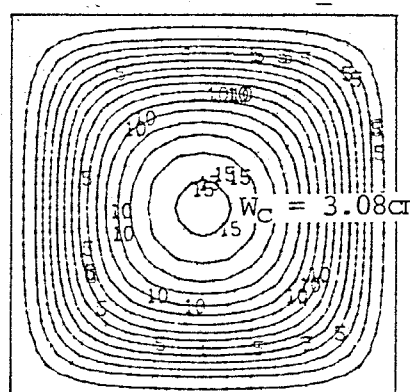
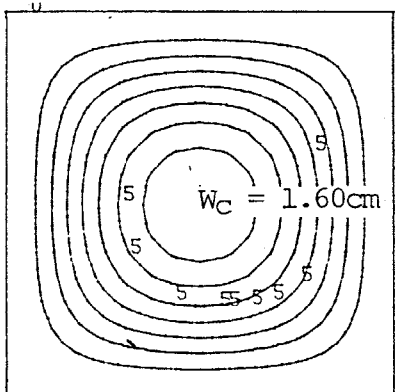
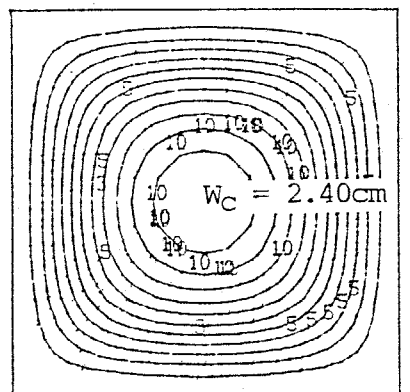
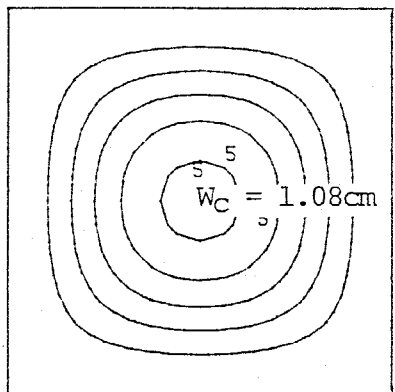
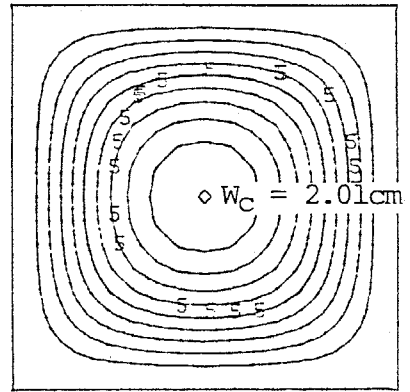
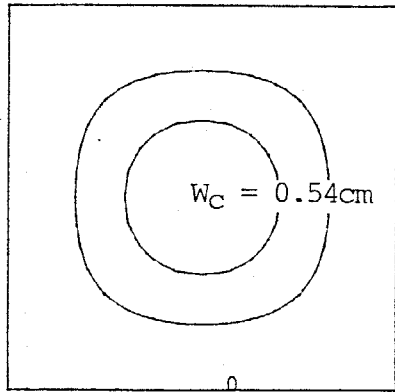


図4. 15 等変位曲線によって表した変形状態の変化

第5章

部材断面のゆがみを考慮した、 繰返し荷重をうける鋼構造部材の 3次元弾塑性大変形解析

5・1	序	86
5・2	板要素に分割することによって断面のゆがみを考慮した、 鋼構造部材の3次元弾塑性大変形解析理論	87
5・3	板要素を組立てた鋼構造部材と、線材にモデル化した鋼構造部材の 一体化解析理論	92
5・4	一体化解析理論の検証のための数値解析例	102
5・5	部材断面のゆがみを考慮した、繰返し軸力をうけるH形鋼部材の 3次元弾塑性大変形数値解析例	105

本章では1章3節において述べた鋼構造骨組のモデル化に従い、鋼構造部材を線材要素の集合と考える解析法および数値解析例について論じる。

2節では、4章に述べた板構造の解析理論を発展させ、それを立体的に組立てることによって、板要素の集合として鋼構造部材を解析する方法について論じる。

3節では、上記の方法によって部材全体を扱うことは、数値解析上明らかに無駄な部分が多くなるので、局部座屈等の断面のゆがみを無視し得る部分は線材要素によってモデル化し、板の変形を考慮すべき部分だけを板要素の集合として扱う方法を述べ、その両モデルの接合面において力の伝達と変位の適合性を大変形の影響を考慮しつつ満足させる方法について詳細に論じる。

4節では、板要素の立体化解析法および線材要素と板要素の一体化解析法の検証のために、H形鋼片持梁に3種類の荷重を与えた弾性問題を数値解析し、変形性状について理論解と比較する。

以上に述べてきた理論によって、繰返し荷重をうける鋼構造部材について、断面のゆがみを考慮すると同時に、部材としての座屈、横座屈等の問題を扱う数値解析を行うことができる。問題によっては、部材としての座屈、横座屈が先行し、後に局部座屈が発生するもの、逆に局部座屈が先行して後に部材としての座屈が起るもの、塑性域において両者が相互影響するような挙動等、いずれの問題についても数値解析を行うことが可能である。

5節においては、弾塑性不安定解析として最も急激な荷重低下を生じ難解な問題の一つである、繰返し軸力をうけて座屈し、局部座屈が発生する問題を扱う。具体的には、幅厚比の異なる2種類のH形鋼部材を線材要素と板要素の集合によってモデル化し、繰返し軸力を与える数値解析を行い、軸力-変位の関係、座屈を起す過程における変形状態の変化、応力分布の変化、断面のゆがみ、歪の履歴等について、各種のグラフを参照しながら考察する。

5・2 板要素に分割することによって断面のゆがみを考慮した、
鋼構造部材の3次元弾塑性大変形解析理論

本節では、4章で導いた板構造に関する理論を数学的に組立て、鋼構造部材を板要素の集合として解析する理論について論じる。(図5.1)

基本的な理論展開は2章に述べた考え方と同一であるから、ここでは、部材のモデル化、座標系の設定法、板構造と板構造の間において、変形の連続性を満し、力、モーメントの伝達を行なわせる方法について述べ、解析しようとしている構造全体について、増分計算を行うために必要な剛性マトリックス K と節点内力ベクトル f_{in} の計算法について論じる。

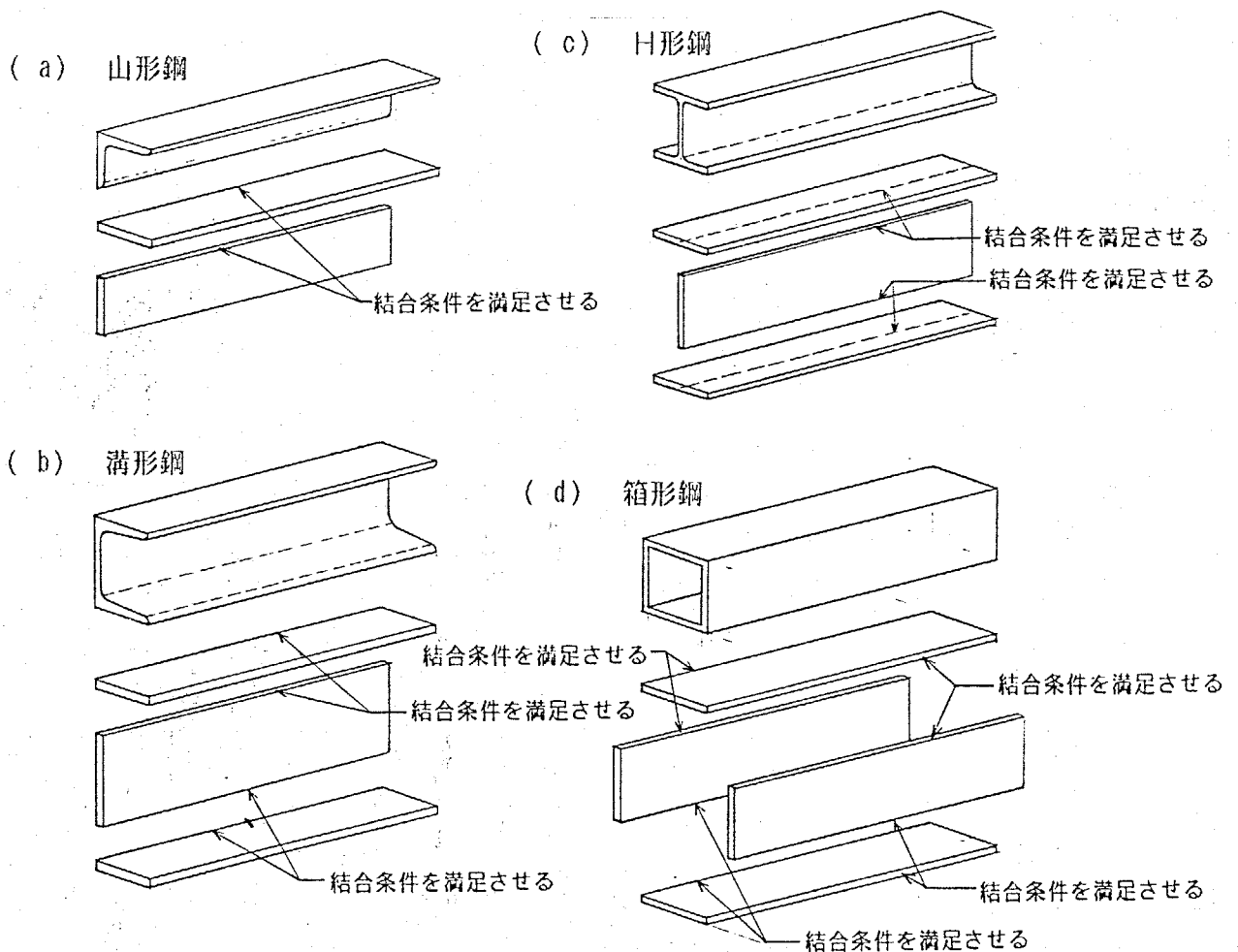


図5.1 本解析理論によって扱うことのできる鋼構造部材の例
(結合条件：変位の連続と力の釣合)

1. 全体座標系と増分変位ベクトルの定義

材長に添って一様な断面形をもつ部材について、図5.2(a)に示すように、断面上の任意の点を通る材軸に平行な軸を作り、A端を原点として、B端に向い g_x 軸を定義する。A端の断面上に右手系の法則に従い g_y 軸、 g_z 軸を定義する。この座標系 $O_1 (g_x, g_y, g_z)$ は構造物の変形にはかかわらず、不動の全体座標系である。

有限要素への分割は図5.2のように、板構造毎に4章に述べたものと同様な方法に従って行う。各々の節点について g_x, g_y, g_z 方向の変位、 g_x, g_y, g_z 軸回りの回転変位をそれぞれ、 $g_{ui}, g_{vi}, g_{wi}, g^{\theta}_{xi}, g^{\theta}_{yi}, g^{\theta}_{zi}$ とする。これらと同じ成分について増分変位を $\Delta g_{ui}, \Delta g_{vi}, \Delta g_{wi}, \Delta g^{\theta}_{xi}, \Delta g^{\theta}_{yi}, \Delta g^{\theta}_{zi}$ と定義する。この増分変位をすべての節点について集合したものを、全体座標系における増分変位ベクトル Δg_u と定義する。

$$\Delta g_u = (\Delta g_{u_1}^T \quad \Delta g_{u_2}^T \quad \dots \quad \Delta g_{u_i}^T \quad \dots \quad \Delta g_{u_n}^T)^T \dots \dots \dots (5.1)$$

$$\Delta g_{ui} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta g_{ui} \\ \Delta g_{vi} \\ \Delta g_{wi} \\ \Delta g^{\theta}_{xi} \\ \Delta g^{\theta}_{yi} \\ \Delta g^{\theta}_{zi} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (5.2)$$

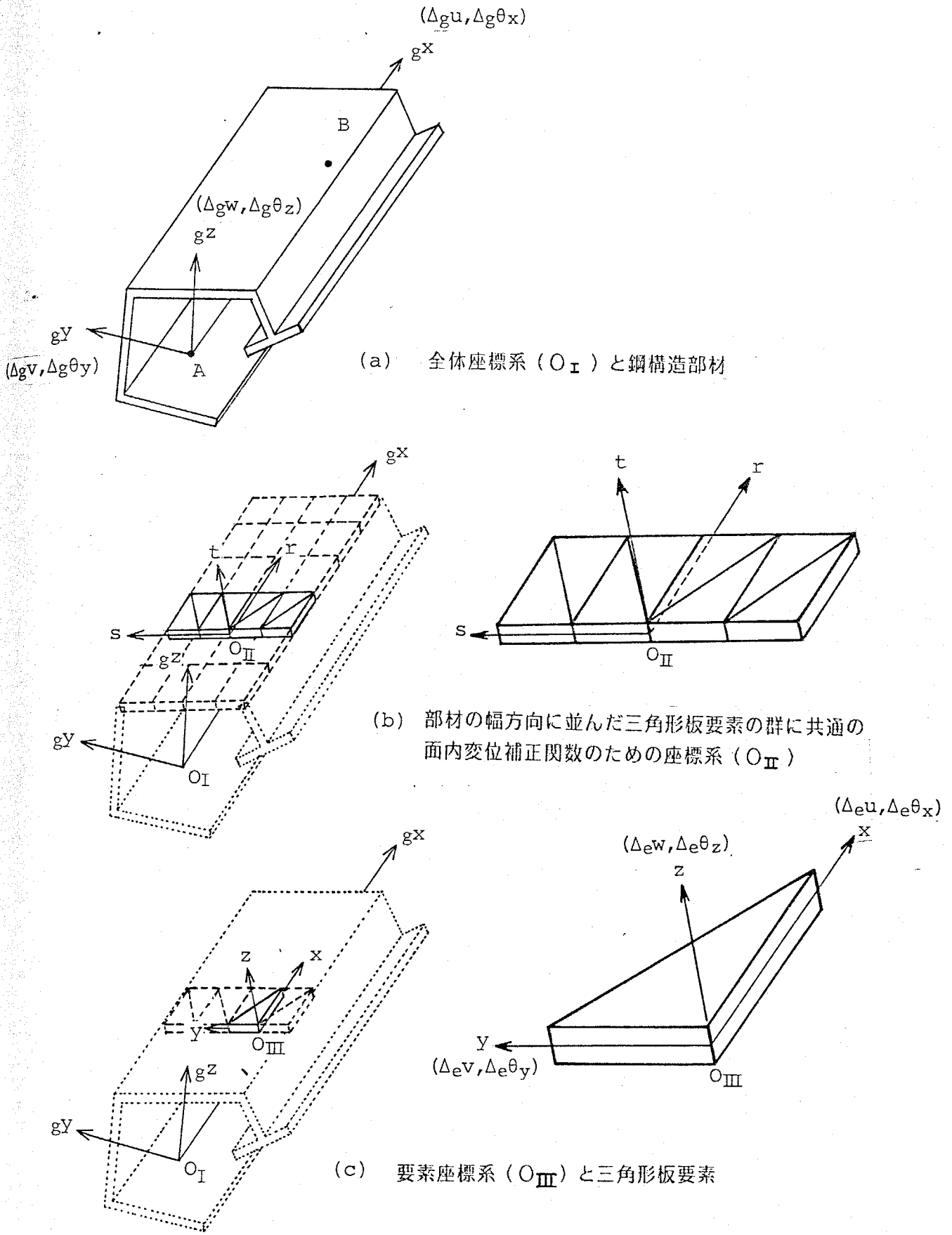


図5.2 板要素による鋼構造部材のモデル化と座標系 (O_I , O_{II} , O_{III})

2. 板の面内変位の補正項のための移動座標系 O_{II} の定義

4章において述べたように、本解析法では有限要素の面内変位の精度を高めるために、一般に線材構造の曲げ変形を表わすために使われている変位関数を用いて、板面内の変位を補正する。この補正関数は図5.2(b)に示す要素群について共通であり、他の板要素とは直接関係をもたないので、それぞれの要素群について独立に扱い、その座標系を、4章と同様な方法により移動座標系として $O_{II}(r, s, t)$ で定義する。

要素群毎に定義した補正関数の未定係数を $\Delta\beta_{1i}, \Delta\beta_{2i}$ としすべての要素群についてこの未定係数を集合させたベクトル $\Delta\beta$ を(5.3)式によって定義する。

$$\Delta\beta = (\Delta\beta_{11}^T \quad \Delta\beta_{21}^T \cdots \Delta\beta_{1i}^T \cdots \Delta\beta_{2m}^T)^T \cdots \cdots (5.3)$$

ただし、

$$\Delta\beta_i = \begin{Bmatrix} \Delta\beta_{1i} \\ \Delta\beta_{2i} \end{Bmatrix} \cdots \cdots (5.4)$$

m は要素群の数であり、板構造の枚数と、部材の長さ方向の分割数の積で与えられる。

3. 三角形有限板要素の座標系と増分変位の定義

本解析においては、外力をうけて変形し、曲面状になった板構造を細かく分割した三角形板要素の集合で表わす。

各々の三角形板要素は、変形後の曲面上の3節点を通る平面板とし、この三角形板要素を表わす移動座標系を $O_{III}(x, y, z)$ と定義する。この座標系において節点の増分変位ベクトル Δe_{ui} を定義する。

$$\Delta e_{ui} = (\Delta e_{ui}^T \quad \Delta e_{uj}^T \quad \Delta e_{uk}^T)^T \cdots \cdots (5.5)$$

、ただし

$$\Delta e_{ui} = \begin{Bmatrix} \Delta e_{ui} \\ \Delta e_{vi} \\ \Delta e_{wi} \\ \Delta e_{\theta xi} \\ \Delta e_{\theta yi} \\ \Delta e_{\theta zi} \end{Bmatrix} \cdots \cdots (5.6)$$

4. 要素 e のたくわえる増分歪エネルギー ΔeU

増分変位によって要素 e のたくわえる増分歪エネルギー ΔeU は 4 章に述べた (4.32) 式により表わすことができる。

$$\Delta eU = (\Delta e u^T, \Delta e \beta^T) \cdot \begin{Bmatrix} e f_{in} \\ e b_{in} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} (\Delta e u^T, \Delta e \beta^T) \cdot e K \cdot \begin{Bmatrix} \Delta e u \\ \Delta e \beta \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5.7)$$

5. 弾塑性大変形解析法

増分変位によって要素 e がたくわえる増分歪エネルギー ΔeU (5.7) 式をすべての要素について積分することによって全構造体のたくわえる増分歪エネルギー ΔU を求めることができる。この計算の際、4 章で述べたように増分変位ベクトルの表現を O_{III} 座標系から O_I 座標系に変換しなくてはならない。この変換によって板構造と他の板構造との接する線上における節点の増分変位が共通な座標系で 1 つの値となって表わされるため、変形の連続性を満たすことができる。力、モーメントの伝達は、この共通な節点において力のベクトルが共通になっており、力の釣合を全構造体について満たすように解析することによって、確実にこなされる。(5.8) に示す ΔU を用いて、2 章において述べた一般論に従い、板要素に分割することによる断面のゆがみを考慮した鋼構造部材の 3 次元弾塑性大変形解析を行うことができる。

$$\Delta U = (\Delta g u^T \quad \Delta \beta^T) \cdot \begin{Bmatrix} f_{in} \\ b_{in} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} (\Delta g u^T \quad \Delta \beta^T) \cdot K \cdot \begin{Bmatrix} \Delta g u \\ \Delta \beta \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5.8)$$

ただし

$$f_{in} = \sum_e e f_{in}$$

$$b_{in} = \sum_e e b_{in} \quad \dots\dots\dots (5.9)$$

$$K = \sum_e e K$$

5・3 板要素を組立てた鋼構造部材と、線材にモデル化した鋼構造部材の 一体化解析理論

本節では、1章3節において述べた鋼構造部材のモデル化に従って、3章に述べた線材構造の理論と、5章2節に述べた板要素を組立てて鋼構造部材を解析するための理論を用いて、線材と板要素を接続させて鋼構造部材の3次元弾塑性大変形解析を行うための理論について論じる。

解析理論の大きな流れは、2章に述べたものと同様である。特に、本解析のために考慮する項目は、線材部分と、板構造部分のそれぞれに考える座標系と、両者に共通な座標系の定義、線材部分と板構造部分の接合の方法である。

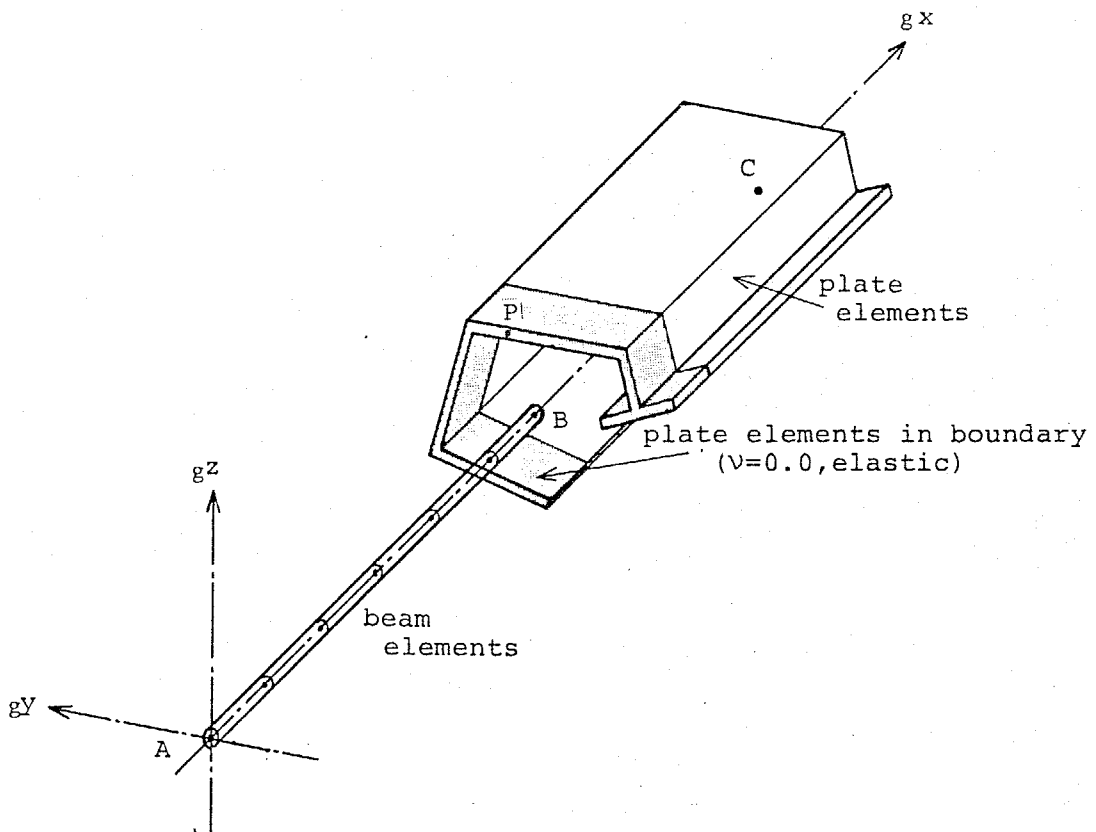


図5.3 線材要素と板要素を用いた鋼構造部材のモデル化

1. 全体座標系の定義

本節では1本の直線状部材を解析対象としているため、全体座標系 $O_1(gx, gy, gz)$ は5.2において示したように、材軸に平行に gx 軸を定義し、 gy 軸、 gz 軸を端部の断面内に定義する。この座標系は線材部分と板構造部について共通で不動な座標系である。

2. 線材部分のモデル化

線材部分に用いる理論は3章に述べたものを用い、線材を長さ方向に細かく線材要素に分割して解析を進める。全体座標系における節点の増分変位ベクトル Δbu は(5.10)式に示すように各節点について7成分の増分変位から成るベクトルである。

$$\Delta bu = (\Delta bu_1^T \ \Delta bu_2^T \ \dots \ \Delta bu_i^T \ \dots \ \Delta bu_n^T)^T \quad \dots \dots \dots (5.10)$$

$$\Delta bu_i = \begin{Bmatrix} \Delta g u_i \\ \Delta g v_i \\ \Delta g w_i \\ \Delta g \theta_{xi} \\ \Delta g \theta_{yi} \\ \Delta g \theta_{zi} \\ \Delta \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_i \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (5.11)$$

この増分変位によって、線材部分にたくわえられる増分歪エネルギー ΔbU は3章に示した(3.22)を積分して、全体座標系に変換することにより(5.12)式で表わせる。

$$\Delta bU = \Delta bu^T \cdot b_{fin} + \frac{1}{2} \Delta bu^T \cdot b_K \cdot \Delta bu \quad \dots \dots \dots (5.12)$$

ただし

$$\begin{aligned} b_{fin} &= \sum_e e^T \cdot e_{fin} \\ b_K &= \sum_e e^T \cdot e_K \cdot e^T \quad \dots \dots \dots (5.13) \end{aligned}$$

e^T は線材の要素座標系と全体座標の変換マトリックス、 e は線材要素を示し、 b はすべての線材要素を集合した線材全体を示す。

3. 板構造部分のモデル化

板構造部分に用いる理論は5.2に述べたものを用いる。ただし、線材部分との接合を行う断面において、以下に述べるような仮定条件を設けて解析を進める。これは、線材構造に関する理論を展開する際に一般的に用いる「部材の断面形は変化しない」という仮定条件と、「断面形が変形する」ことを目的と

した板構造理論の仮定条件の間にある矛盾を解決するために必要な仮定条件である。

図5.3に示してあるように、本解析を行う際には、板要素を用いてモデル化する部分の長さを、本来、板の変形性状を表わすために必要と考えられる長さより1要素の長さだけ大きく考え、この部分の要素を仮定条件の異なる線材部分と板構造部分の間の緩衝部分と考える。この範囲の要素については、ポアソン比 ν をゼロとして解析し、線材理論の仮定条件に近い条件が成立つようにする。

板構造部分の全体座標系における節点の増分変位ベクトル Δp_u を (5.1) により (5.14) 式のように書くと、この増分変位によって板構造部分がたたくわえる増分歪エネルギーは (5.8) 式により (5.16) 式のように表わすことができる。

$$\Delta p_u = (\Delta p_{u1}^T \quad \Delta p_{u2}^T \quad \cdots \quad \Delta p_{ui}^T \quad \cdots \quad \Delta p_{un}^T) \quad \cdots \quad (5.14)$$

ただし

$$\Delta p_{ui} = \begin{Bmatrix} \Delta g_{ui} \\ \Delta g_{vi} \\ \Delta g_{wi} \\ \Delta g_{\theta xi} \\ \Delta g_{\theta yi} \\ \Delta g_{\theta zi} \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\Delta p_U = (\Delta p_u^T \quad \Delta \beta^T) \cdot \begin{Bmatrix} p_{fin} \\ b_{in} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} (\Delta p_u^T \quad \Delta \beta^T) \cdot p_K \cdot \begin{Bmatrix} \Delta p_u \\ \Delta \beta \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

ただし p_{fin} , p_K は (5.8) に用いた f_{in} , K に対応している。

板構造と線材との接合部分においては、変位の連続が満され、力の伝達が完全に行なえなければならない。図5.4に示すように接合部分における板構造のもっている自由度の方が線材の端部の自由度(7成分)より多いので、板構造の端部の増分変位を線材の端部の増分変位の1次結合によって集わすことができれば、互いのモデルを接合することができる。

線材部分と板構造部分の接合理論は4.に述べるが、その展開のために(5.16)式の増分変位ベクトル Δp_u を接合部分にかかわるもの Δg_{pu} とかかわらないもの Δp_{pu} に分けて考え、(5.16)式を書きなおす。

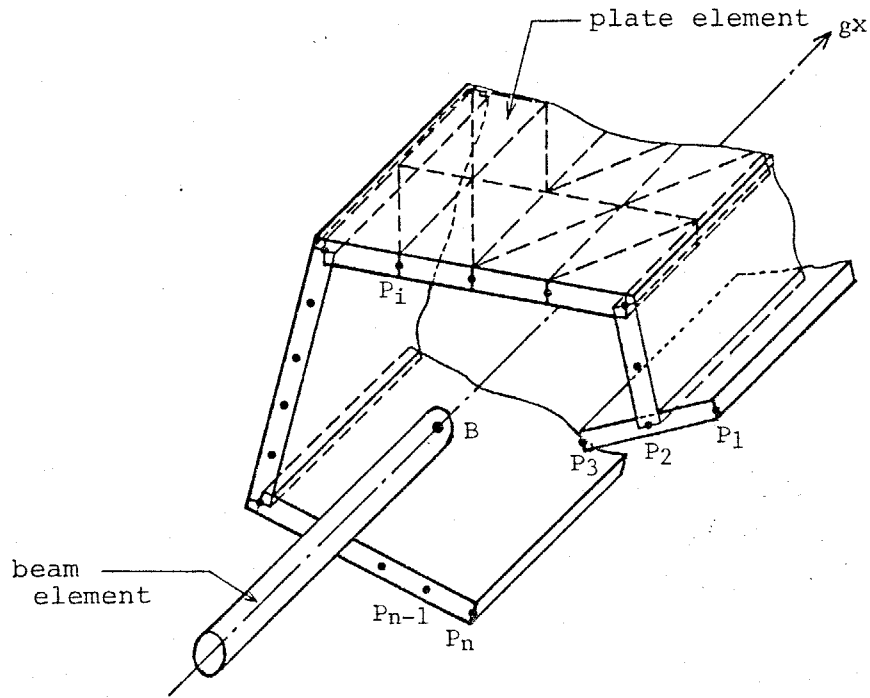


図5.4 線材構造と板構造の接合

$$\Delta pU = (\Delta g_{pu}^T \Delta p_{pu}^T \Delta \beta^T) \cdot \begin{Bmatrix} g_{pfin} \\ p_{pfin} \\ b_{in} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} (\Delta g_{pu}^T \Delta p_{pu}^T \Delta \beta^T) pK$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta g_{pu} \\ \Delta p_{pu} \\ \Delta \beta \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (5.17)$$

4. 接合面上にある板構造の節点の増分変位ベクトル Δg_{pu} を線材構造の端部の節点の増分変位ベクトル Δg_{bu} によって表わすための変換

接合面上にある板構造の各節点の増分変位ベクトル Δg_{pu} を同じ面上にある線材構造の端部の節点の増分変位ベクトル Δg_{bu} によって表わすための変換を行なう。この鋼構造部材がある荷重あるいは強制変位をうけているとき、この接合面(c)は $O_1(gx, gy, gz)$ 座標に関して、変位、回転を生じている。この面の変形後の法線を cx 軸、右手系の法則に従い、変形前に定めたものと同一の方法で、この変形後の接合面上に cy, cz 軸を移動座標として定義する。

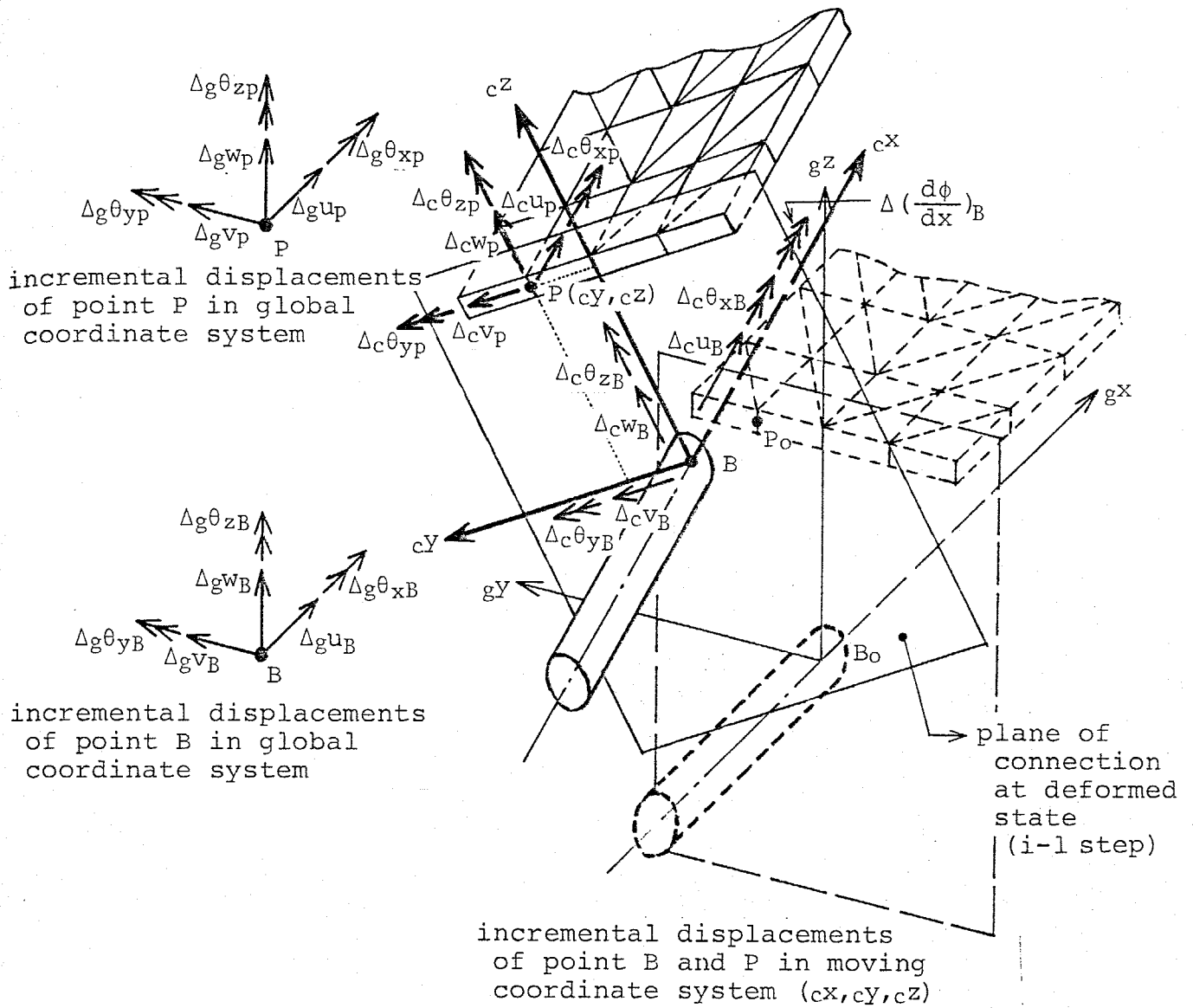


図5.5 接合面上の節点の全体座標系における増分変位成分と部材の変形にともなって移動する接合面上にとつた座標系における増分変位成分

(c_x, c_y, c_z) 座標系の各座標軸の全体座標系 $O_1(g_x, g_y, g_z)$ における方向余弦をそれぞれ、 c_x について λ_x, μ_x, ν_x , c_y について λ_y, μ_y, ν_y , c_z について λ_z, μ_z, ν_z とすると、これらは各荷重段階における部材の変形状態、特に接合面の移動、回転の状態から求めることができる。

これをマトリックスで表わし、 A と定義する。

$$\begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{Bmatrix} = A \cdot \begin{Bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5.18)$$

ただし

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ \nu_x & \nu_y & \nu_z \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5.19)$$

逆に表わすと(5.20)式のように表わせる。

$$\begin{Bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{Bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5.20)$$

ただし

$$A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} \lambda_x & \mu_x & \nu_x \\ \lambda_y & \mu_y & \nu_y \\ \lambda_z & \mu_z & \nu_z \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5.21)$$

(5.17)式の定義において述べたように、板構造の節点の中でこの接合面上にある節点の増分変位ベクトルを Δg_{pu} で表わし、同様にして図5.5に示すように、この接合面上にある線材の節点の増分変位ベクトルを Δg_{bu} で表わす。これらは両者とも全体座標系 O_I に関する増分変位である。

$$\Delta g_{pu} = (\Delta g_{pu1}^T \quad \Delta g_{pu2}^T \quad \dots\dots\dots \Delta g_{pui}^T \quad \dots\dots\dots \Delta g_{puc}^T)^T \quad \dots\dots\dots (5.22)$$

ただし

$$\Delta g_{pui} = \begin{Bmatrix} \Delta g_{ui} \\ \Delta g_{vi} \\ \Delta g_{wi} \\ \Delta g_{\theta xi} \\ \Delta g_{\theta yi} \\ \Delta g_{\theta zi} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5.23)$$

添字 c は接合面上の板要素分割の節点数を示す。

$$\Delta g_{bu} = \begin{Bmatrix} \Delta g_{ub} \\ \Delta g_{vb} \\ \Delta g_{wb} \\ \Delta g^{\theta}_{xb} \\ \Delta g^{\theta}_{yb} \\ \Delta g^{\theta}_{zb} \\ \Delta \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_b \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (5.24)$$

右添字 b は線材の節点の中で接合面上にある端部の節点であることを示す。

(5.23) 式, (5.24) 式によって定義される板構造, 線材構造の節点の全体座標系 $O_I(gx, gy, gz)$ における増分変位ベクトル $\Delta g_{pu}, \Delta g_{bu}$ は (5.20) の座標変換マトリックス A^{-1} を用いることにより, (cx, cy, cz) 座標系における増分変位ベクトル $\Delta c_{pu}, \Delta c_{bu}$ として表わされる。

$$\Delta c_{pui} = A^{-1} \cdot \Delta g_{pui} \dots\dots\dots (5.25)$$

$$\Delta c_{bu} = A^{-1} \cdot \Delta g_{bu} \dots\dots\dots (5.26)$$

$\Delta c_{pui}, \Delta c_{bu}$ は両者とも接合面上にある節点の (cx, cy, cz) 座標系における増分変位ベクトルであり, i 点の座標値を (c_{yi}, c_{zi}) とし, b 点は原点にあるから, 線材の 3次元理論に従い, この断面のそり関数を ω とすると, 板要素の i 節点の増分変位ベクトル Δc_{pui} は (5.27) 式によって Δc_{bu} によって表わすことができる。

$$\Delta c_{pui} = \Delta c_{ub} - c_{yi} \cdot \Delta c^{\theta}_{zb} + c_{zi} \cdot \Delta c^{\theta}_{yb} - \omega_i \cdot \Delta \frac{d\varphi}{dx}_b$$

$$\Delta c_{pvi} = \Delta c_{vb} - c_{zi} \cdot \Delta c^{\theta}_{xb}$$

$$\Delta c_{pwi} = \Delta c_{wb} + c_{yi} \cdot \Delta c^{\theta}_{xb} \dots\dots\dots (5.27)$$

$$\Delta c_{p^{\theta}_{xi}} = \Delta c^{\theta}_{xb}$$

$$\Delta c_{p^{\theta}_{yi}} = \Delta c^{\theta}_{yb} - c_{yi} \cdot \Delta \frac{d\varphi}{dx}_b$$

$$\Delta c_{p^{\theta}_{zi}} = \Delta c^{\theta}_{zb} - c_{zi} \cdot \Delta \frac{d\varphi}{dx}_b$$

マトリックスによって書きなおすと(5.28)式が得られる。

$$\Delta_{cpu} = C_i \cdot \Delta_{cbu} \quad \dots\dots\dots(5.28)$$

ただし

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & czi & -cyi & -\omega_i \\ 0 & 1 & 0 & -czi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & cyi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -cyi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -czi \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(5.29)$$

(5.28)式の関係を接合面上にある板要素のすべての節点について書くと(5.30)式が得られる。

$$\Delta_{cpu} = C \cdot \Delta_{cbu} \quad (5.30)$$

ただしCはC_iをたて方向にc個集合して作られる(6c×7)のマトリックスである。

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ C_i \\ \cdot \\ \cdot \\ C_c \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(5.31)$$

(5.30)式を用いてΔ_{cpu}, Δ_{cub}を関係づけることができたので、この式の両辺に(5.25), (5.26)式を代入することによりΔ_{gpu}をΔ_{gub}によって(5.32)式のように表わすことができる。

$$\Delta_{gpu} = p^T b \cdot \Delta_{gub} \quad \dots\dots\dots(5.32)$$

ただし

$$p^T b = p^T A \cdot C \cdot A^{-1} \quad \dots\dots\dots(5.33)$$

$$pA = \begin{bmatrix} A \\ A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5.34)$$

以上のようにして得られる変換マトリックス pT_b を用いることによって板構造の接合面上の節点の増分変位を線材の端部の節点の増分変位と同一の成分を用いて表わすことができ、次に述べる方法によって線材と板構造の一体解析を行なうことができる。

5. 線材と板構造の一体化解析法

4.に述べたように接合面上の板構造の節点増分変位を線材の端部の節点増分変位の成分によって表わすことができるから(5.17)式に示した板構造のたぐわえる増分歪エネルギー ΔpU は(5.32)式の変換マトリックスを用いて(5.35)式のように書くことができる。

$$\Delta pU = (\Delta g_{pu}^T \Delta p_{pu}^T \Delta \beta^T) \cdot \begin{Bmatrix} g_{pfin} \\ p_{pfin} \\ b_{in} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} (\Delta g_{pu}^T \Delta p_{pu}^T \Delta \beta^T) \cdot pK \cdot$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta g_{pu} \\ \Delta p_{pu} \\ \Delta \beta \end{Bmatrix} = (\Delta g_{bu}^T \Delta p_{pu}^T \Delta \beta^T) \cdot \begin{Bmatrix} g_{pfin} \\ p_{pfin} \\ b_{in} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} (\Delta g_{bu}^T \Delta p_{pu}^T \Delta \beta^T) \cdot pK \cdot \begin{Bmatrix} \Delta g_{bu} \\ \Delta p_{pu} \\ \Delta \beta \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (5.35)$$

ただし

$$g_{pfin} = pT_b^T \cdot g_{pfin} \dots\dots\dots (5.36)$$

$$pK' = \begin{bmatrix} pT_b^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot pK \cdot \begin{bmatrix} pT_b & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5.37)$$

I は板構造の接合面以外の節点の自由度の数の大きさの単位マトリックスである。

(5.35)式の $\Delta g_{bu}, g_{bfin}$ は線材の端部の増分変位の成分と完全に一致しているため、(5.12)に示した線材のたくわえる歪エネルギーと加えることができ、(5.38)式に示すように全部材が、増分変位によってたくわえる増分歪エネルギーを求めることができる。

$$\begin{aligned} \Delta U &= \Delta bU + \Delta pU \\ &= (\Delta b_{u^T} \quad \Delta p_{pu^T} \quad \Delta \beta^T) \cdot \begin{Bmatrix} b_{pfin} \\ p_{pfin} \\ b_{in} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} (\Delta b_{u^T} \Delta p_{pu^T} \Delta \beta^T) \cdot b_{pK} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta b_u \\ \Delta p_{pu} \\ \Delta \beta \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (5.38) \end{aligned}$$

ただし

$$b_{pfin} = b_{fin} + g_{pfin} \dots\dots\dots (5.40)$$

$$b_{pK} = b_K + p_K \dots\dots\dots (5.41)$$

(5.38)によって導かれた増分歪エネルギーを用いて、2章に述べた一般論に従い数値解析を行うことによって、板構造を組立てた鋼構造部材と線材にモデル化した鋼構造部材を一体化して解析することができる。

5・4 一体化解析理論の検証のための数値解析例

本節では、線材と板構造の一体化解析理論の検証のために、H形鋼片持梁の弾性問題を例として、3種の外力条件について数値解析を行い、理論解との比較を行う。

数値解析モデルは図5.6に示すようにH形鋼片持梁であり、荷重条件は強軸方向に12.45t、弱軸方向に4.261t、ねじれ方向に83.89t cmの3種類の外力を

材料定数

$$E = 2100 \text{ t/cm}^2$$

$$G = 810 \text{ t/cm}^2$$

断面性能

$$A = 119.8 \text{ cm}^2$$

$$A_{sy} = 90.0 \text{ cm}^2$$

$$A_{sz} = 28.5 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 20400 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 6750 \text{ cm}^4$$

$$J_t = 77 \text{ cm}^4$$

$$C_m = 1.371 \times 10^6 \text{ cm}^6$$

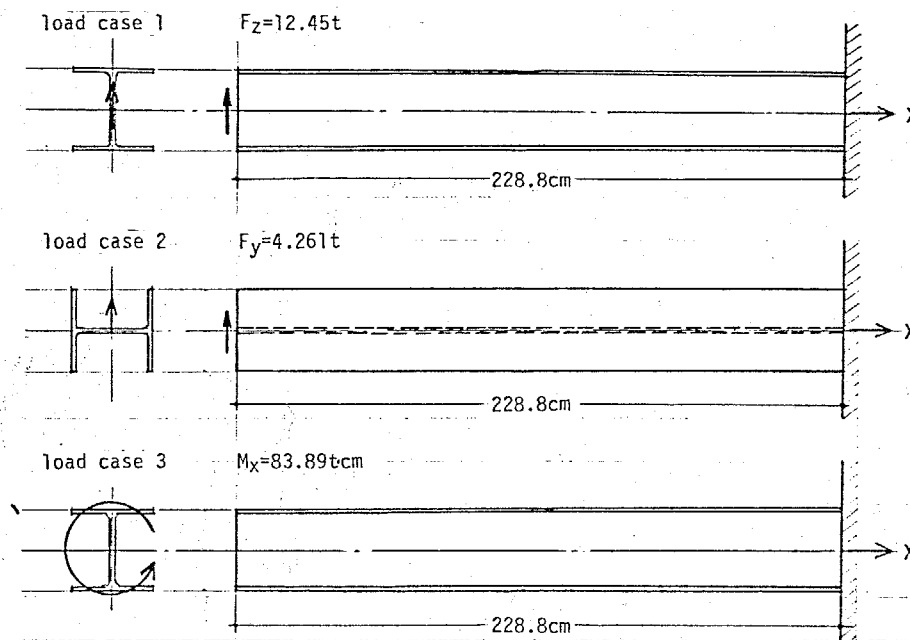
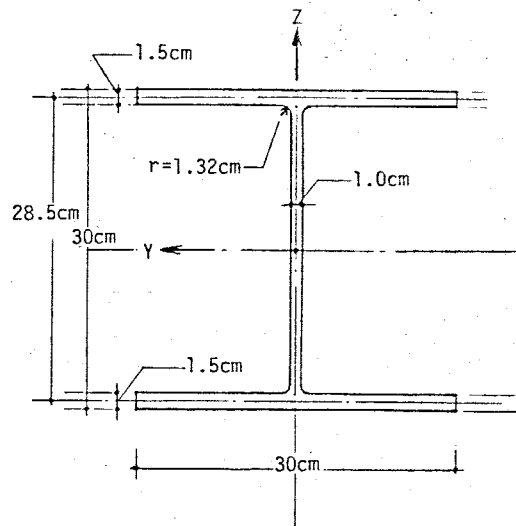


図5.6 各種の荷重をうけるH形鋼片持梁

片持梁の先端に与える。

本解析理論を用いるためのモデル化を図5.7に示す。A点は片持梁の先端であり、すべての変位成分をそり変形も含めて自由とし、c点を固定点としてすべての変成分を特に板要素の曲げ変形に関しても固定とする。

B点において線材A-Bと板構造BCの間を5.3に述べた理論によって、平面保持、そり変形の連続という条件で接合する。A-B間に用いる線材要素は10要素、B-C間の板構造の分割は上下フランジともに8行13列、ウェブは6行13列の分割とする。要素の大きさはフランジにおいて、 $3.75\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ 、ウェブ

において、 $4.75\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ の直角三角形である。

各荷重の場合について変形の様子を図5.8に示す。

この図中には先端の変形について理論解を計算し、十分に本法と一致していることを示している。

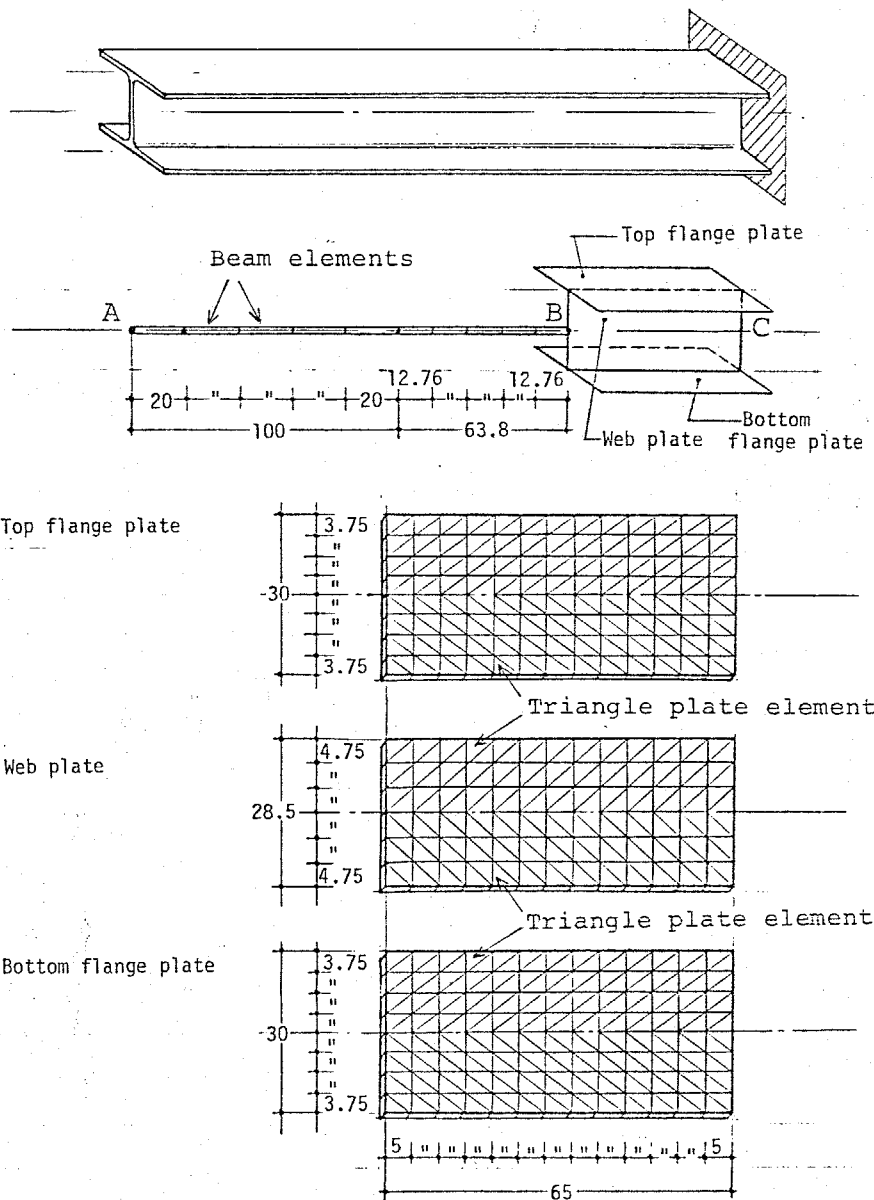


図5.7 線材要素と板要素を用いたH形鋼片持梁の数値解析モデル

case 1

$$\delta_A = \frac{Pl^3}{3EI_y} + \frac{Pl^2}{AszG}$$

$$= \frac{12.45 \times 228.8^3}{3 \times 2100 \times 20400} + \frac{12.45 \times 65}{28.5 \times 810}$$

$$= 1.195 \text{ cm}$$

case 2

$$\delta_A = \frac{Pl^3}{3EI_z} + \frac{Pl^2}{AsyG}$$

$$= 1.205 \text{ cm}$$

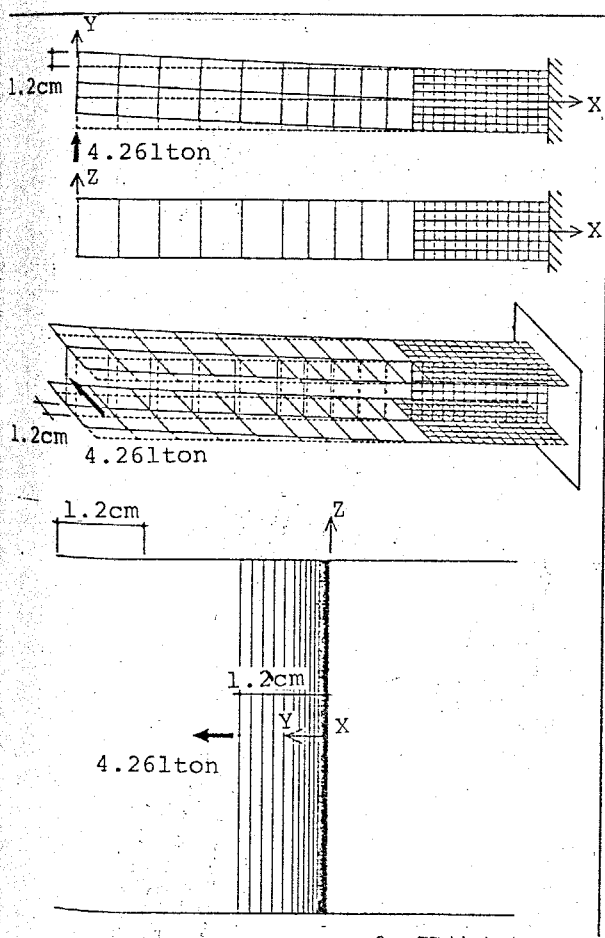
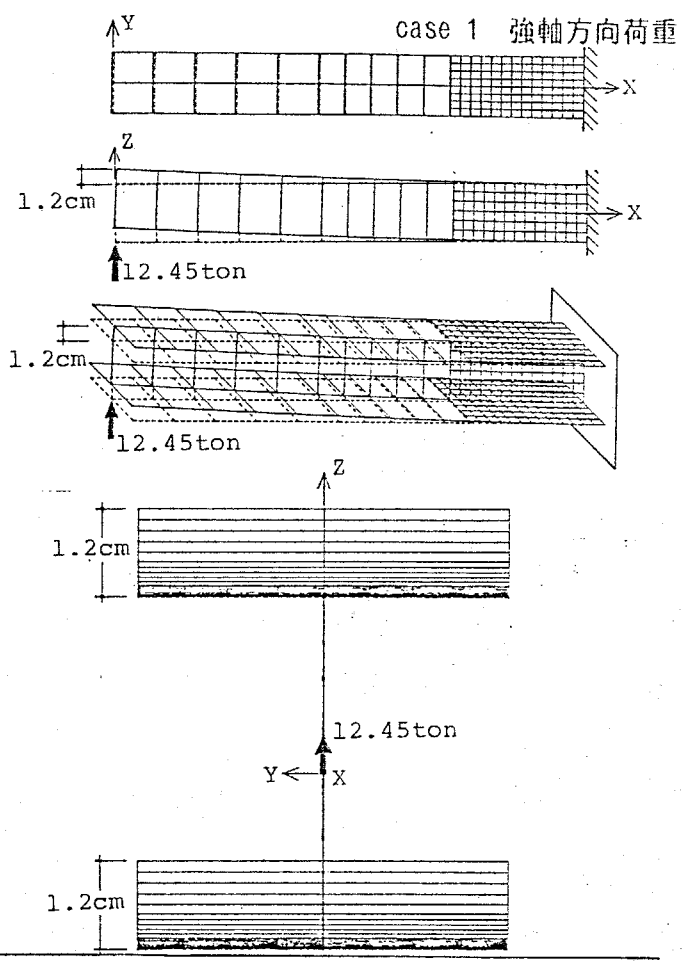
case 3

$$\theta_A = \frac{M_*}{\lambda GJ_*} \{ (\cosh \lambda l - 1) \tanh \lambda l - \sinh \lambda l + \lambda l \}$$

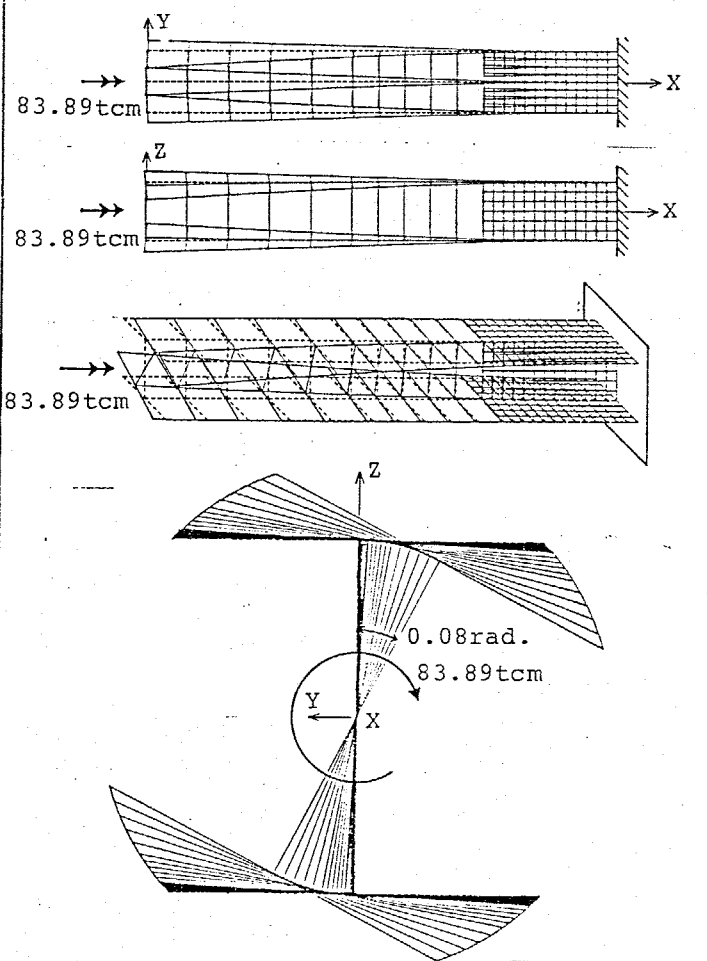
$$\lambda = \sqrt{\frac{GJ_*}{ECm}} = 4.655 \times 10^{-3}$$

$$\theta_A = \frac{83.89}{1046}$$

$$= 0.0801 \text{ rad.}$$



case 2 弱軸方向荷重



case 3 ねじれモーメント荷重

図5.8 3種の荷重による変形状態

5・5 部材断面のゆがみを考慮した、繰返し軸力をうけるH形鋼部材の 3次元弾塑性大変形数値解析例

本章にて導いた解析法を用いることにより、以下に列記するような曲げ座屈と曲部座屈の達成効果を考慮した各種の問題を解析、考察することができる。

- ・ 圧縮力を受け、繰返し曲げモーメントをうける柱の柱頭または、柱脚に発生するフランジの局部座屈現象を考慮した部材解析。
- ・ 繰返し曲げモーメントとせん断力をうける梁が横座屈する際にもなっ発生する、フランジの局部座屈と、その後の耐力低下挙動の解析。
- ・ 薄いウェブをもつ梁が繰返し曲げモーメントとせん断力をうけるときの挙動に関して、ウェブとフランジの局部座屈の達成効果を考慮した梁全体としての解析。
- ・ 繰返し軸力をうける部材について、板の幅厚比と部材としての細長比が、その座屈後の挙動に与える影響を調べるために、曲げ座屈と局部座屈の達成効果を考慮した解析。

以上、ここには4例を示したが、鋼構造骨組を構成している部材が、その接合部の破断等によって破壊するような場合は別の解法によるとして、座屈現象によって終局状態に達するような挙動については、ほとんどの問題を本理論によって解析的に調べることができる。

本節では、これまで、線材解析によって行ってきた、繰返し軸力をうける部材の座屈問題の研究の総括として、この4例の中では最も不安定現象が顕著に表われる、つまり、部材としての座屈現象と局部座屈現象が急激に連続して発生する、繰返し軸力を受けるH形鋼部材の弾塑性大変形解析を行う。

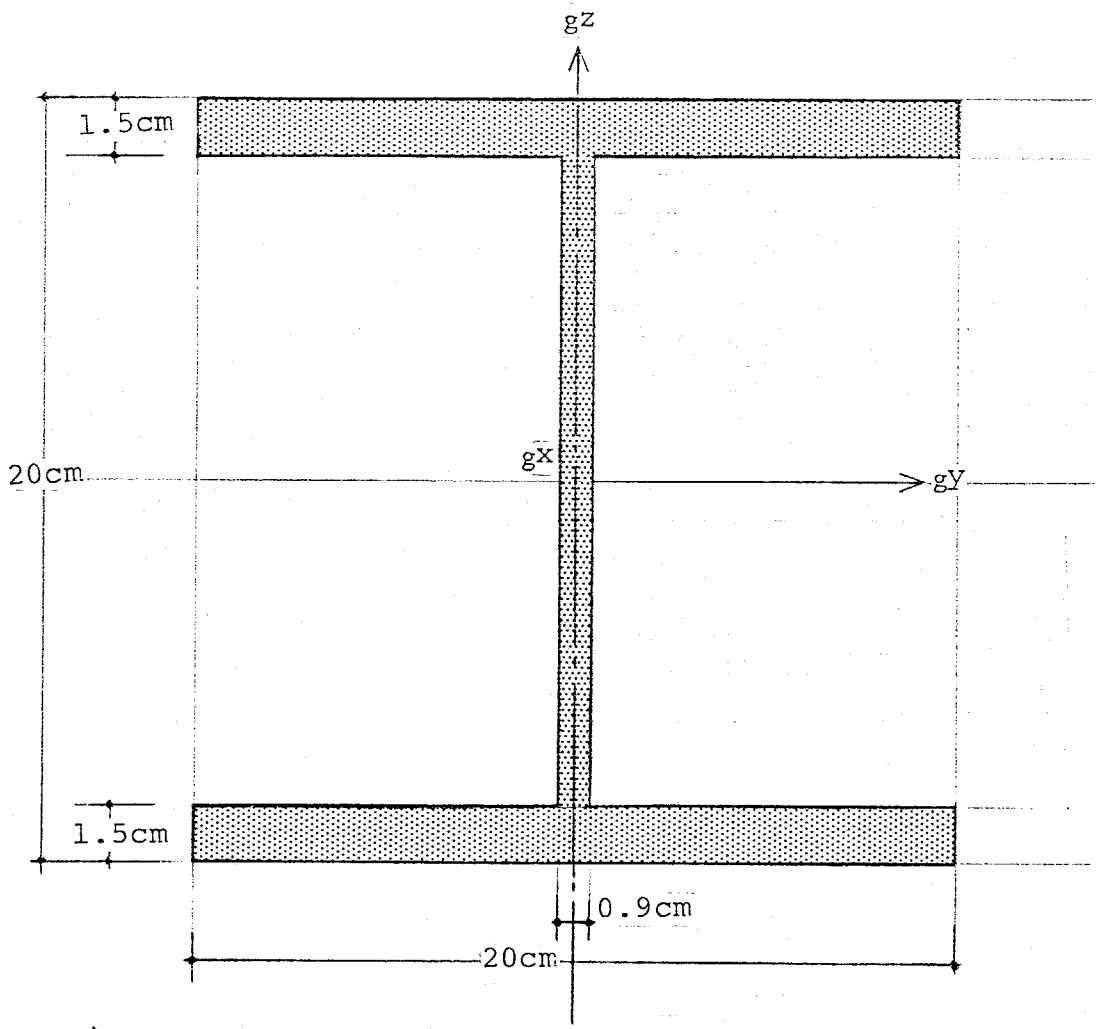
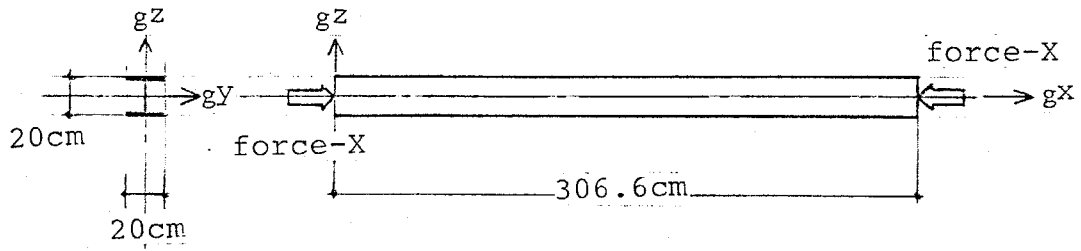
解析の対象とする部材は、図5.9(a)、(b)に示すように2例であり、ともに弱軸方向の細長比が60のH形鋼部材である。

Model-Aは塑性設計のための幅厚比の制限を十分に満足している厚肉H形鋼部材(H-200×200×9×15, L=306.6cm)であり、Model-Bは弾性設計のための幅厚比の制限にほぼ等しいような薄板で構成される薄肉H形鋼部材(H-300×300×6×10, L=457.6cm)である。

この両断面は断面積が等しくなるようにその形を決め、細長比を等しくする

ように長さを決めたものである。さらに、JISによって規定され、一般に用いられているH形鋼断面と、この2例を比較するために、図5.10に断面の成と幅の関係、ウェブとフランジの板厚の関係、フランジの幅と板厚の関係、ウェブの成と板厚の関係について示す。

表5.1には、Model-A, Bについて、断面積、断面2次モーメント、細長比、フランジ、ウェブの幅厚比、降伏軸力、長期及び短期の許容軸力等を一覧表にして示す。



SCALE = 1/2

図5. 9 (a) Model-Aの形状
 塑性設計のための幅厚比制限を十分に満足している
 H形鋼部材 (H-200x200x9x 15, L = 306.6cm)
 $\langle B/2t_f = 6.67, (D-2t_f)/t_w = 18.9 \rangle$

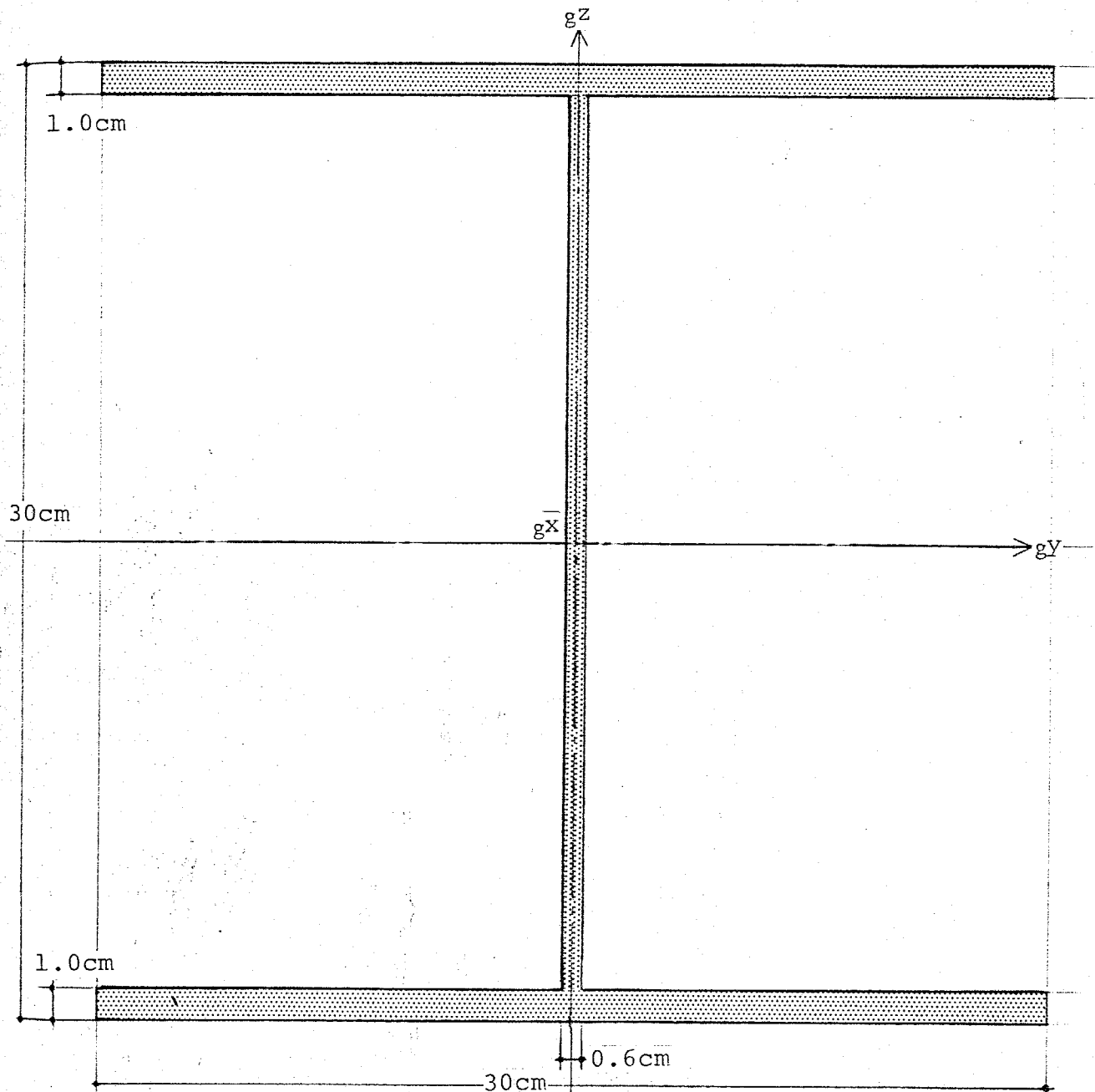
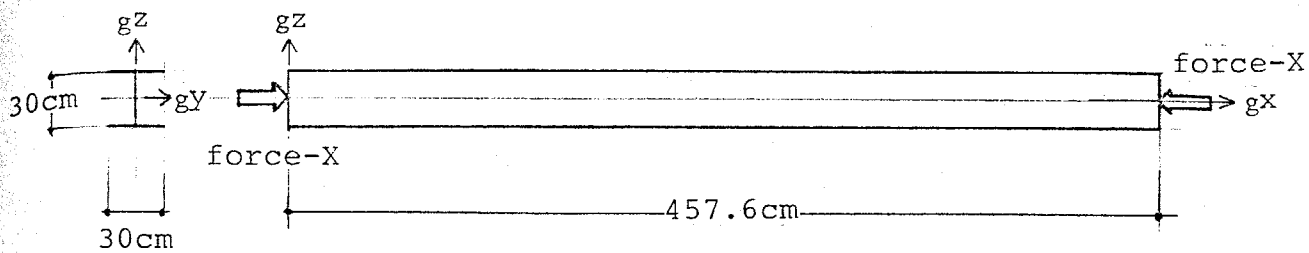


図5.9 (b) Model-Bの形状

弾性設計のための幅厚比制限に近い形状を持つ

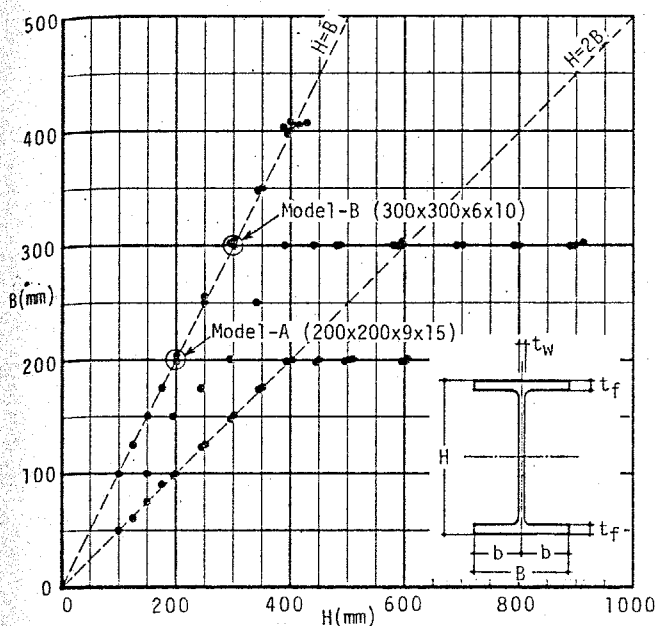
H形鋼部材 (H-300x300x6x 10, L = 457.6cm)

SCALE = 1/2

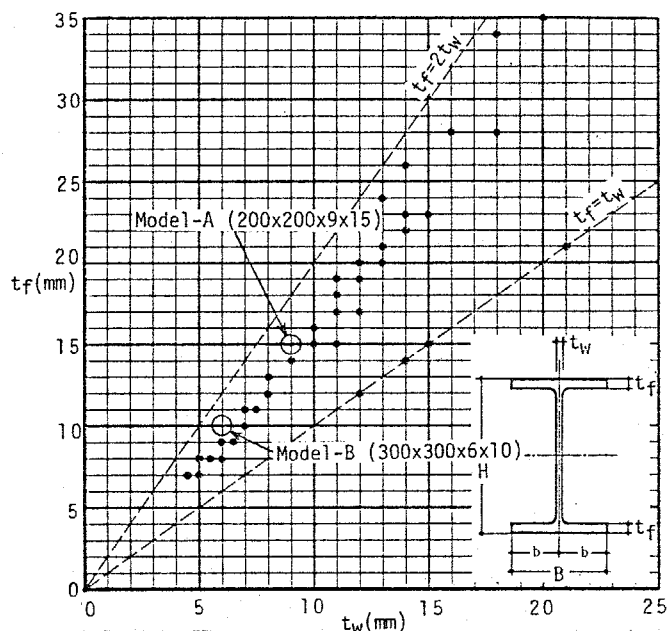
$\langle B/2t_f = 15.0, (D - 2t_f)/t_w = 46.7 \rangle$

• JIS

• JIS



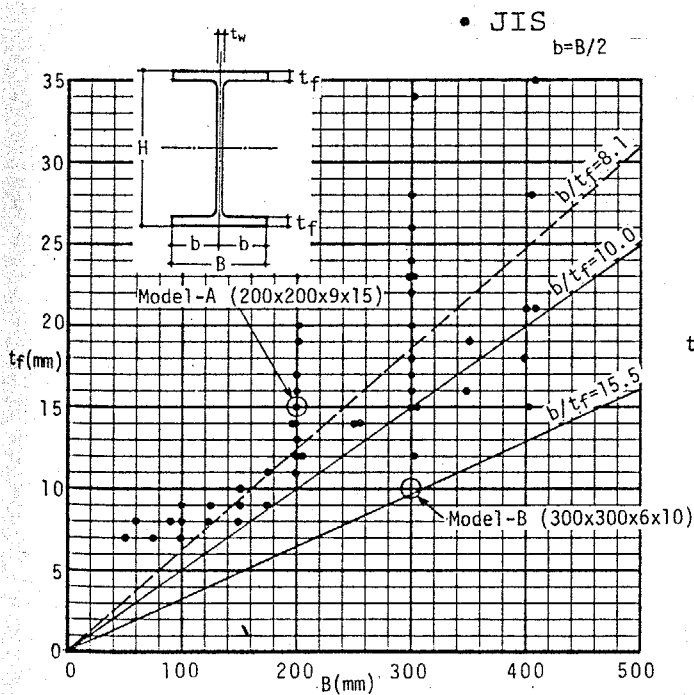
(a) 幅 (B) と成 (H or D)



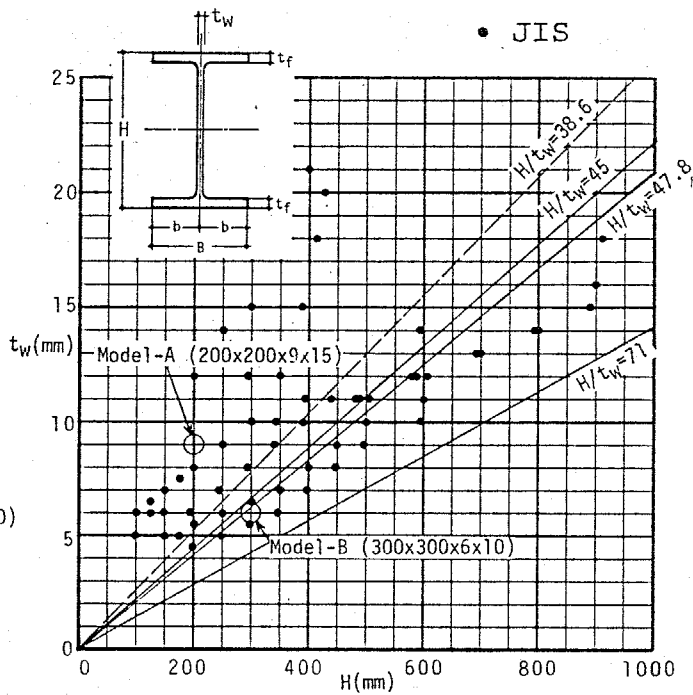
(b) フランジ板厚 (tf) とウェブ板厚 (tw)

• JIS

• JIS



(c) フランジの板厚 (tf) と幅 (B)



(d) ウェブ板厚 (tw) と成 (H or D)

図5.10 JISに規定されている圧延H形鋼の形状と Model-A, Model-Bの断面形状の比較

表5. 1 数値解析モデルの形状、強度に関する諸数値

解析モデル		Model-A	Model-B
断面形状 (mm)		H-200x200x9x15	H-300x300x6x10
断面積	A (cm ²)	75.30	76.80
板要素の和	A' (cm ²)	76.65	77.40
背	D (mm)	200	300
幅	B (mm)	200	300
ウェブ厚さ	tw (mm)	9	6
フランジ厚さ	tf (mm)	15	10
強軸 (Y-Y)	I _y (cm ⁴)	5513	13718
	Z _y (cm ³)	551	915
	i _y (cm)	8.557	13.36
強軸 (Y-Y)	I' _y (cm ⁴)	5619	13840
	Z' _y (cm ³)	562	923
	i' _y (cm)	8.562	13.37
弱軸 (Z-Z)	I _z (cm ⁴)	2001	4501
	Z _z (cm ³)	200	300
	i _z (cm)	5.155	7.655
弱軸 (Z-Z)	I' _z (cm ⁴)	2001	4501
	Z' _z (cm ³)	200	300
	i' _z (cm)	5.110	7.625
部材長 L (cm)		306.6	457.6
細長比	λ _y (L/i' _y)	35.8	34.2
	λ _z (L/i' _z)	60.0	60.0
オイラー座屈荷重 N _e = π ² EI ² /L	N _{ey} (ton)	1239	1370
	N _{ez} (ton)	441.2	445.5
降伏応力度	yield (t/cm ²)	2.4	2.4
降伏軸力	N _{yield} (ton)	184.0	185.8
降伏時縮み変形	U _{yield} (cm)	0.350	0.523
許容応力度 (長期)	σ _a (t/cm ²)	1.30	1.30
降伏応力に対する比		0.542	0.542
許容軸力 (長期)	N _a (ton)	99.6	100.6
許容軸力時縮み変形 (長期)	δ _a (cm)	0.190	0.283
許容応力度 (短期)	σ _a (t/cm ²)	1.95	1.95
降伏応力に対する比		0.813	0.813
許容軸力 (短期)	N _a (ton)	149.5	150.9
許容軸力時縮み変形 (短期)	δ _a (cm)	0.285	0.425
フランジ幅厚比	B/2tf	6.67	15.0
ウェブ幅厚比	D/tw	22.2	50.0
	(D-2tf)/tw	18.9	46.7
フランジの幅厚比の制限			
鋼構造設計規準	B/2tf	15.5	
塑性設計指針	B/2tf	10.0	
高層建築技術指針	B/2tf	9.0	
ウェブの幅厚比の制限			
鋼構造設計規準	(D-2tf)/tw	47.8	
塑性設計指針	D/tw	45.0	
高層建築技術指針	(D-2tf)/tw	43.2	

1. H形鋼部材の数値解析モデル

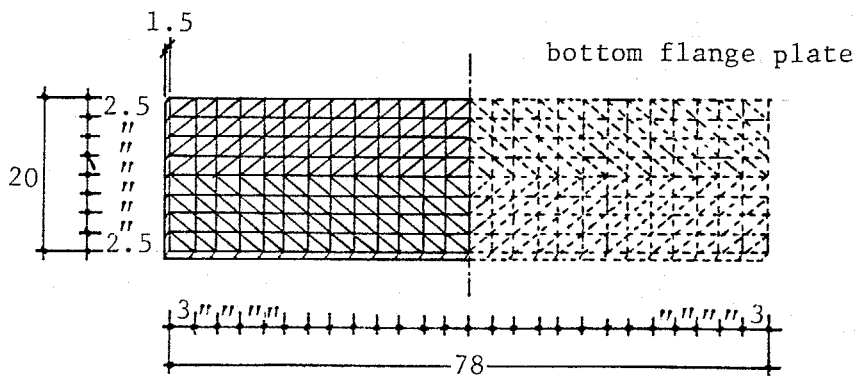
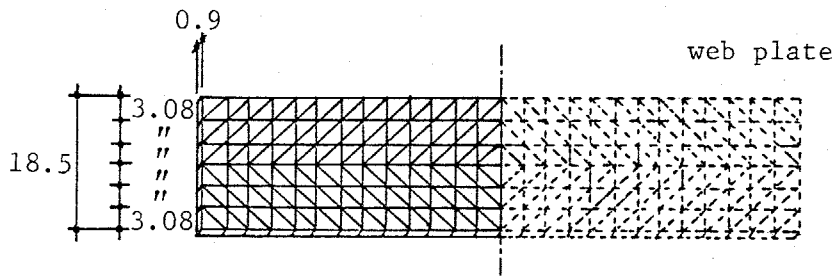
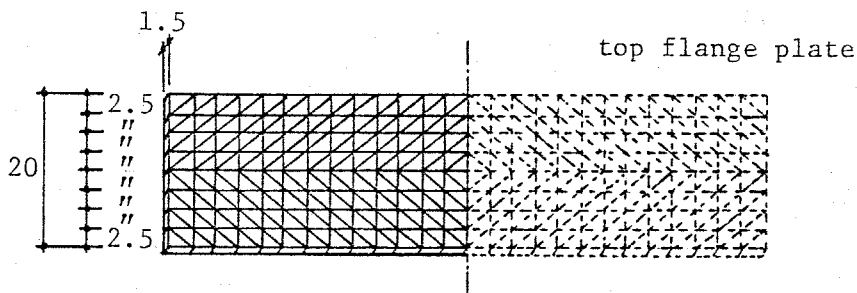
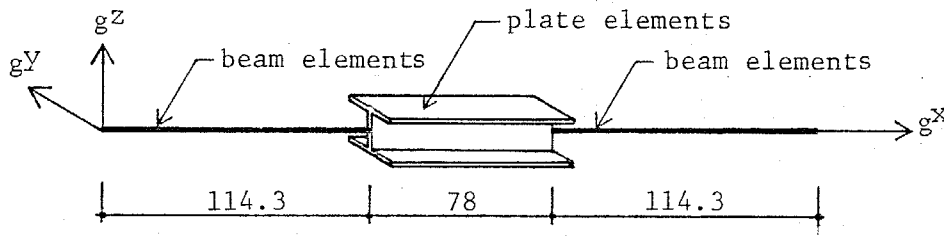
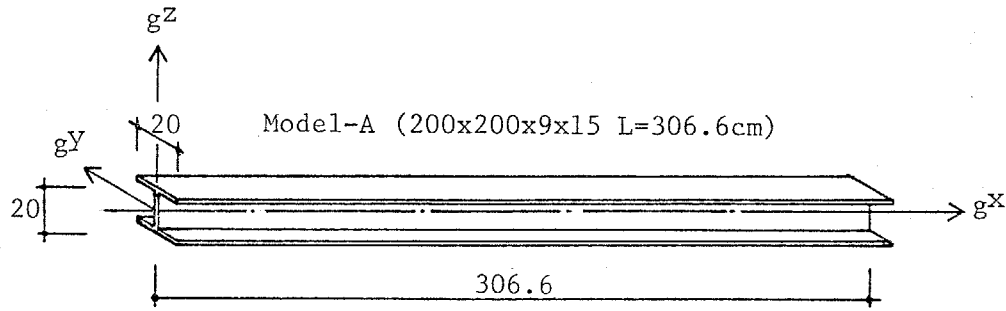
Model-Aについては図5.11, Model-Bについては図5.12に数値解析のためのモデル化を示す。座標系は全体座標系として部材軸方向へ g_x , フランジに平行に g_y , ウェブに平行に g_z を定義する。

Model-Aについては中央部分の78cm(フランジの $1/2$ 幅の7.8倍), Model-Bについてはその中央部分の130cm(フランジの $1/2$ 幅の8.7倍)を有限板要素によって分割し, その他の部分を3次元弾塑性大変形解析のための線材要素によって分割する。

数値解析は, 全体の挙動の対称性を仮定し, 図5.13, 5.14に示すように部材の中央断面に対称条件を満たすような境界条件を設定して, 全体の $1/2$ について行う。この結果, 要素分割は両モデルとも, 572枚の三角形板要素と, 10本の線材要素で行ない全体の増分変位の未知数は線材部分の77と板部分の1332と板面内の補正関数の未定係数(β_1, β_2)78の和として1497となる。

本解析法は弾塑性座屈問題を主に対象としているので, 座屈荷重と座屈後の変形を求めるために固有値解析を用いていない。このため, 本例のような問題を扱うためには微小な初期たわみを解析モデルに与えて曲げ問題として解析を進めなくてはならない。ここではJIS3192-1977「熱間圧延形鋼の形状, 寸法, 重量およびその許容差」の表4「H形鋼の形状および寸法許容差」の“曲がり”についての規定に呼称高さが300mm以下のものについては長さの0.2%, 呼称高さが300mmをこえるものについては長さの0.1%の曲がりを許容していることを参考にして, 部材の全長の0.1%の初期曲がりを与えて解析を進める。初期曲がりの与え方は図5.13, 5.14に示すように線材要素の各節点の(g_x, g_y)座標値を定義することによる。ただし, 有限板要素によって分割しモデル化する部分には初期変形は与えない。

- ・縦弾性係数(ヤング率) $E = 2100 \text{ t/cm}^2$
- ・せん断弾性係数 $G = 810 \text{ t/cm}^2$
- ・降伏応力度 $\sigma_{\text{yield}} = 2.4 \text{ t/cm}^2$
- ・歪硬化剛性 $H = 2.1 \text{ t/cm}^2$



(unit:cm)

図5. 11 線材要素と板要素を用いて分割したModel-Aの数値解析モデル

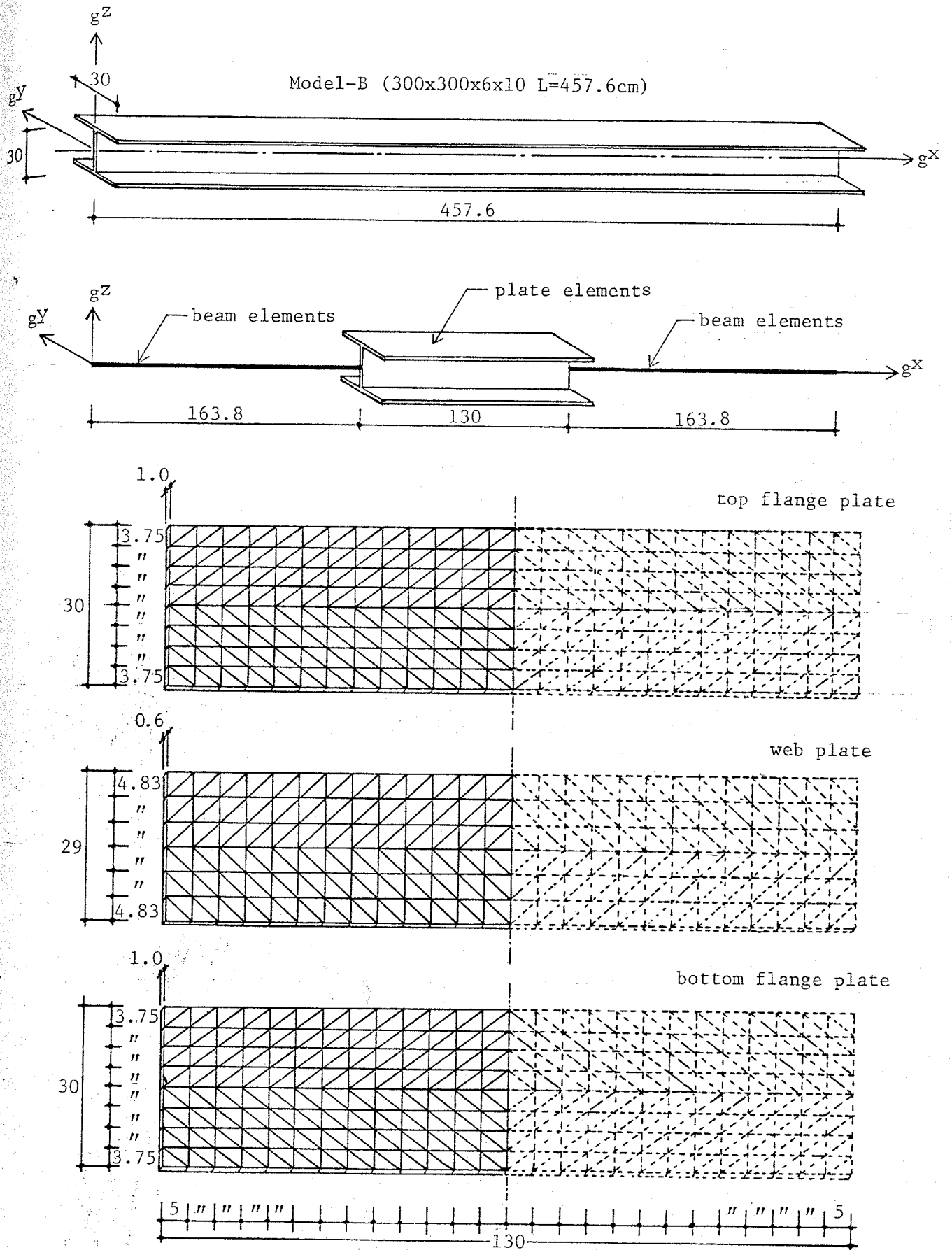


図5. 12 線材要素と板要素を用いて分割したModel-Bの数値解析モデル (unit:cm)

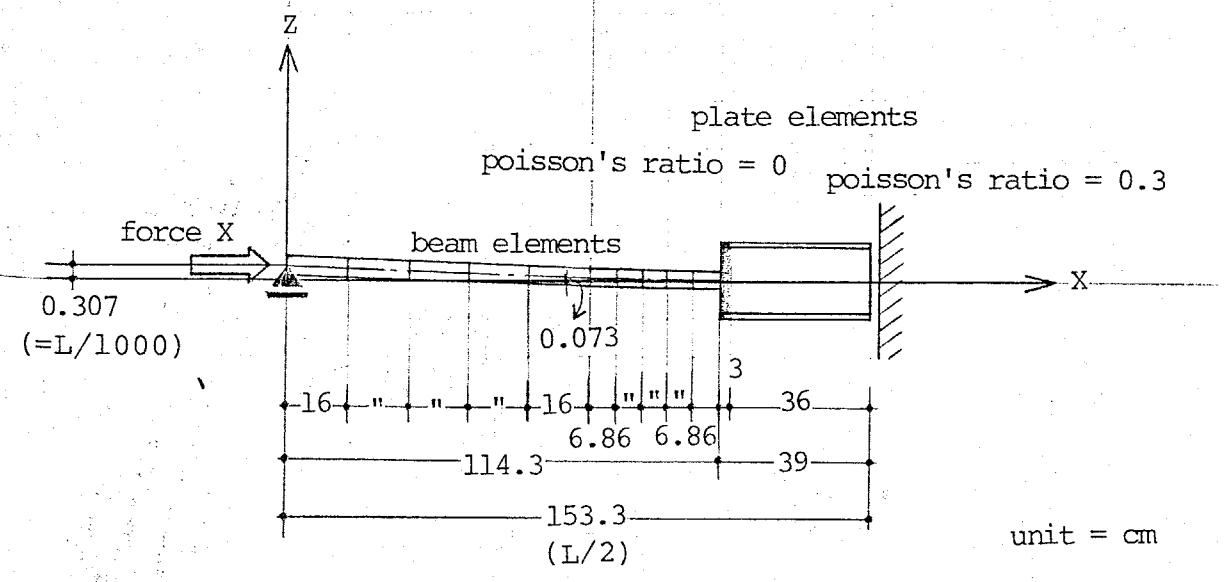
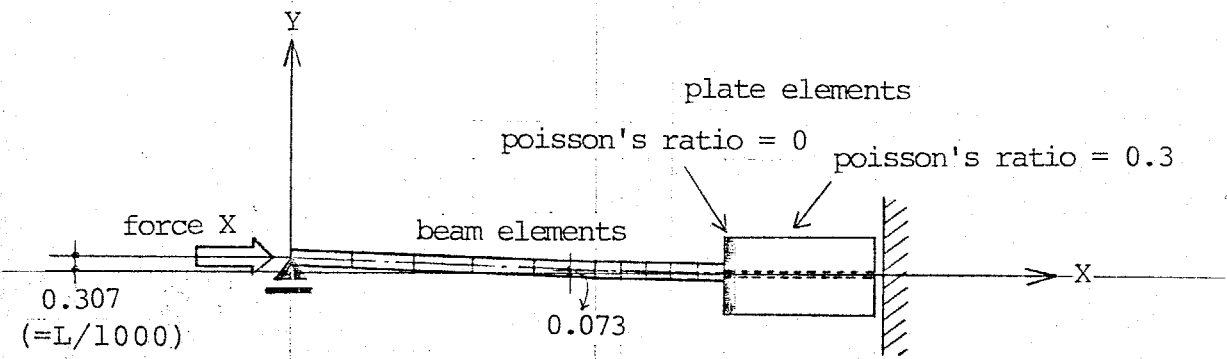
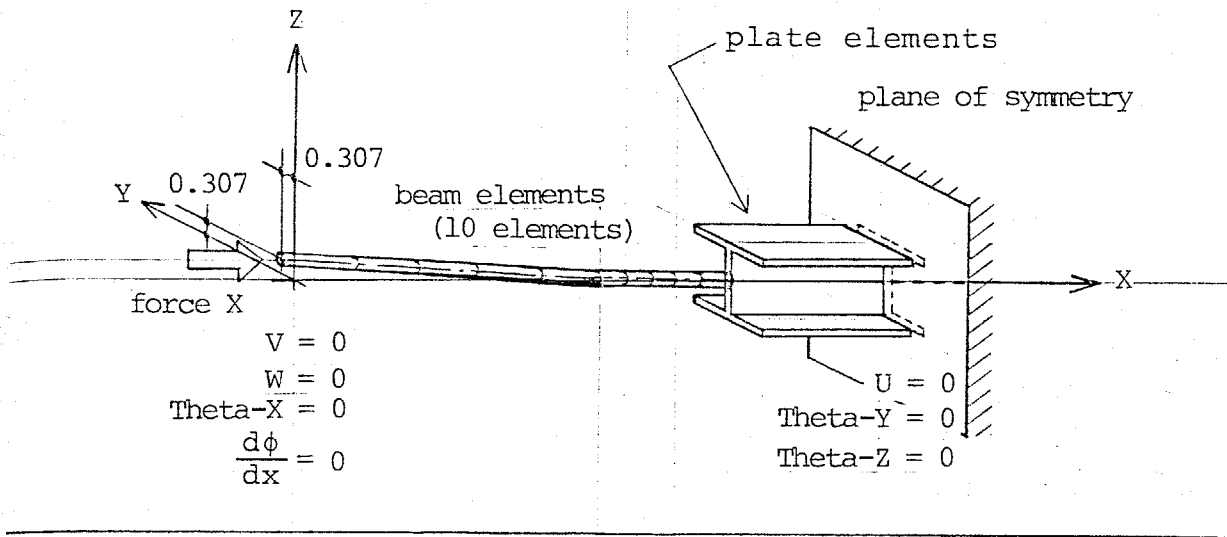


図5. 13 Model-Aの数値解析のための境界条件と初期たわみ

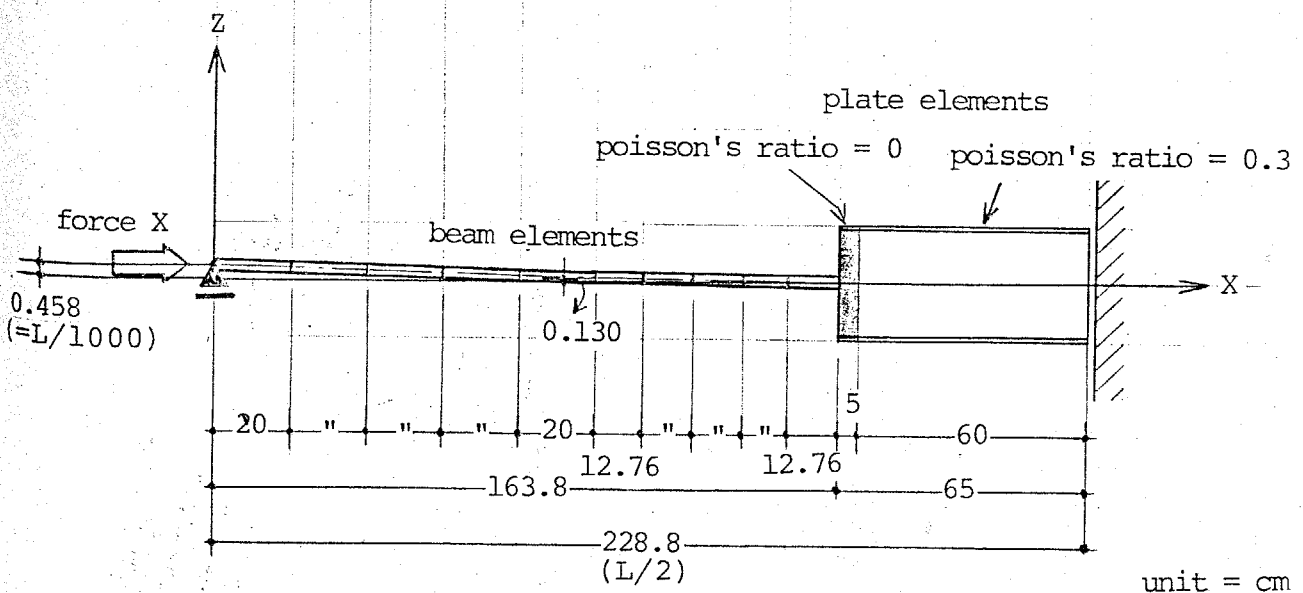
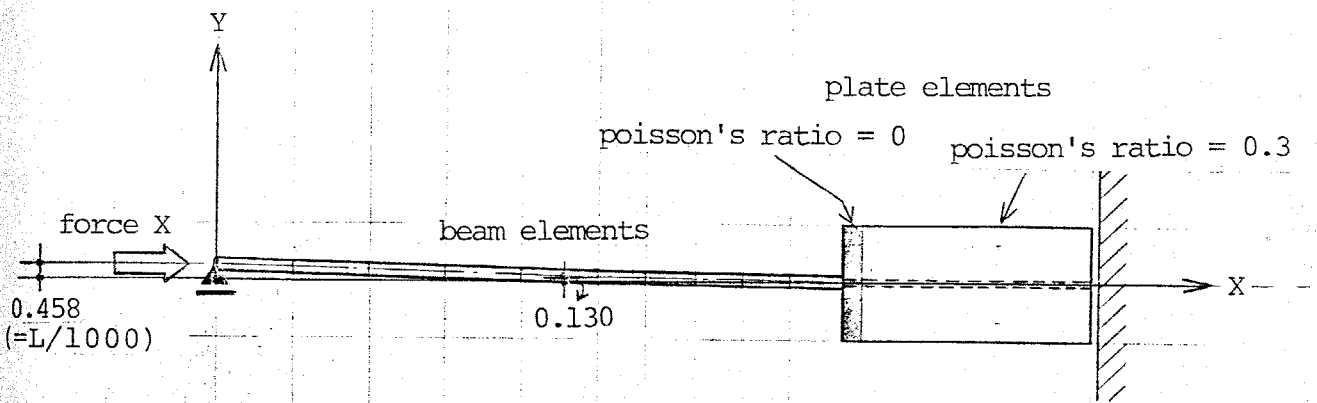
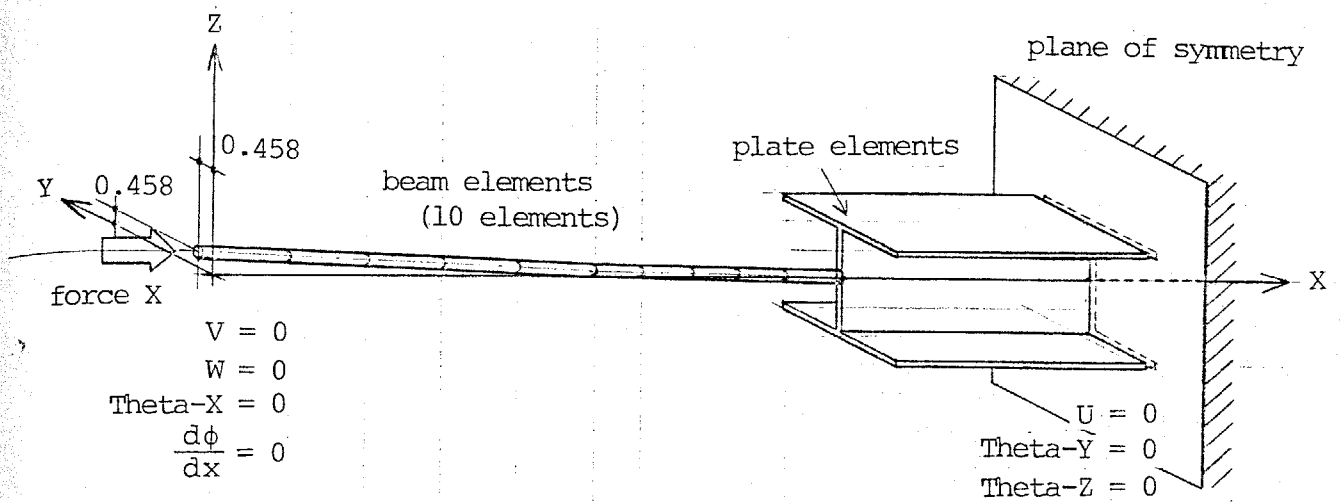


図5. 14 Model-Bの数値解析のための境界条件と初期たわみ

2. 数値解析の過程

数値解析は東京大学大型電子計算センターに設置されている HITAC-8700-8800 を用いて行った。解析に用いた計算時間は Model-A, Model-B を合わせて 60 時間 (cpu-time) である。

外力は、部材の端部に gx 方向の強制変位を除々に与えてゆくことによって、その反力として加わる。Model-A は 1 2 2 段階, Model-B は 1 4 1 段階の荷重段階により解析が進められ、それぞれ収束計算のために同一荷重段階において iteration 計算を行っているので総計 400 回程度の繰返し計算 (数値積分と連立方程式の求根) を行ったことになる。

図 5.15 には Model-A について、図 5.16 には Model-B について横軸を解析段階 ($s = \sum_i |\Delta u_i| / u_{yield}$) として、(a) に加力点の軸変位、(b) に 1 段階毎の増分変位 (Δu_i)、(c) に収束精度を集わす指標として各節点の不釣合力の内積と、全内力ベクトルの内積との比を示す。

Model-A, Model-B ともに初期に圧縮変位を降伏変位の 3.5 倍まで与え、その後引張方向の変位を降伏変位と等しいまで与え、最後に再度圧縮方向の変位を降伏変位の 4 倍まで与える。後に述べる各種の図を用いた説明によって明らかになるが、Model-A では $S = 1.0$ の初期座屈の付近、Model-B では $S = 1.0$ の部材座屈、 $S = 1.5$, 2.2 の局部座屈の発生する付近において非常に細かい増分計算が必要となっている。

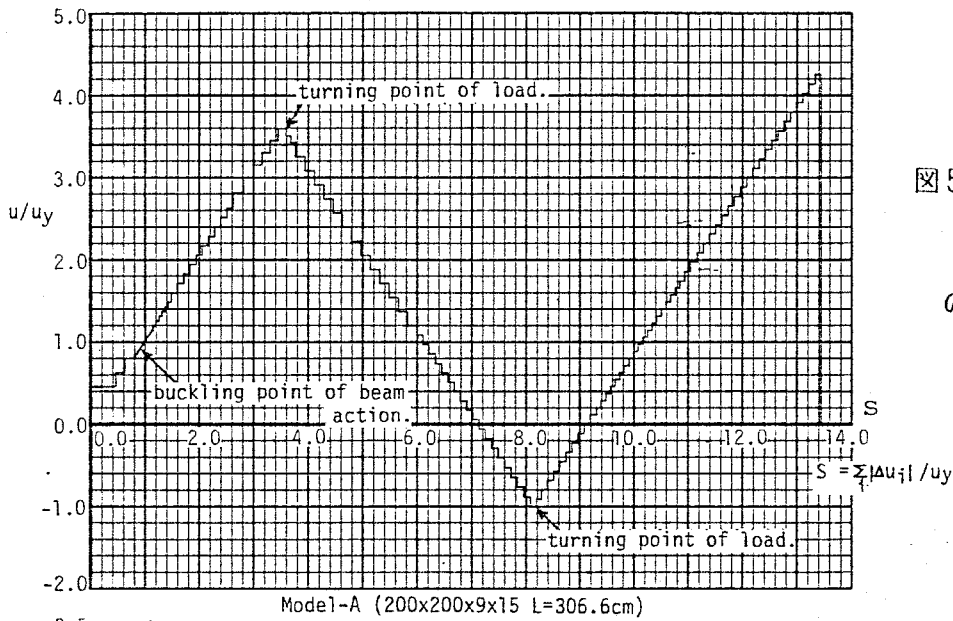


図5.15 (a)

軸方向強制変位の履歴 (Model-A)

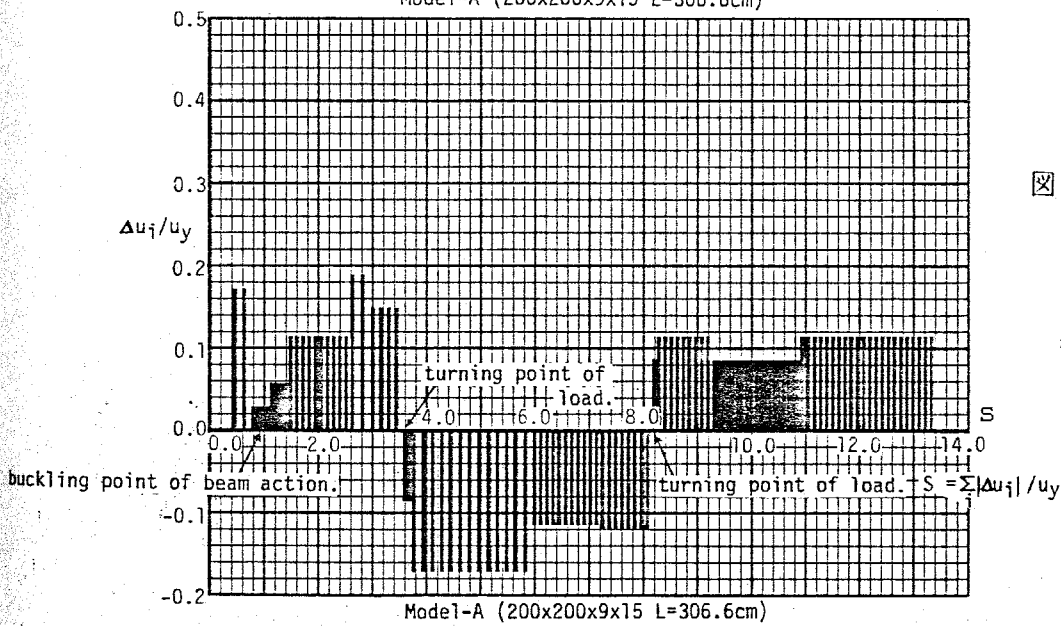


図5.15 (b)

各step毎に強制的に与えた増分軸方向変位の変化 (Model-A)

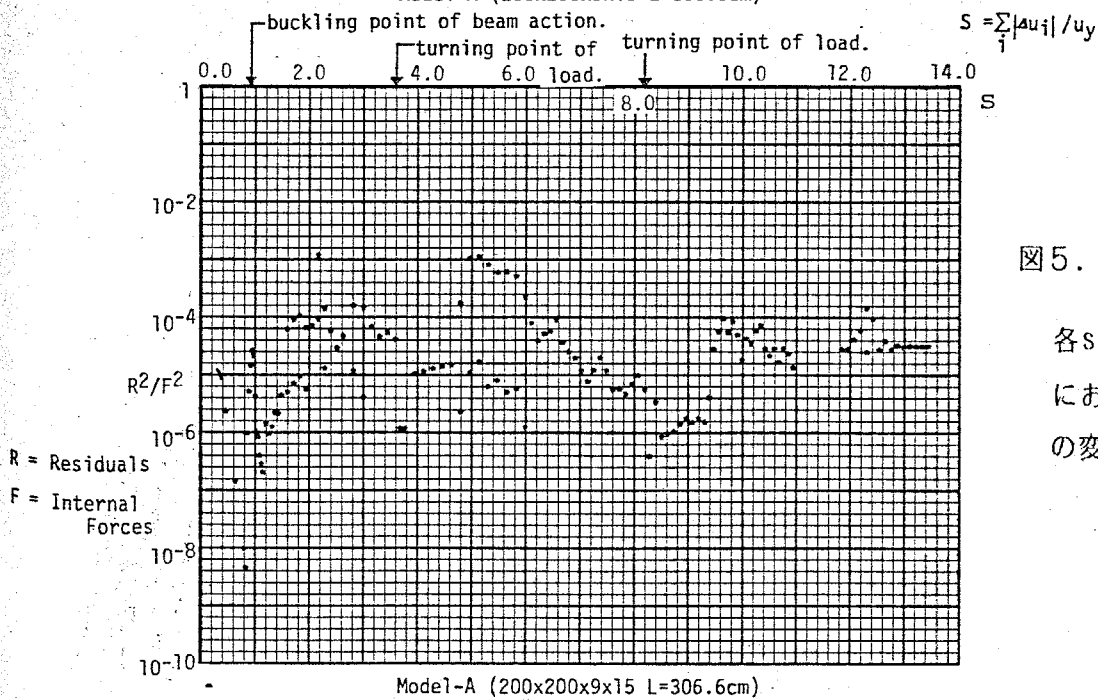


図5.15 (c)

各step、各 iteration における計算精度の変化 (Model-A)

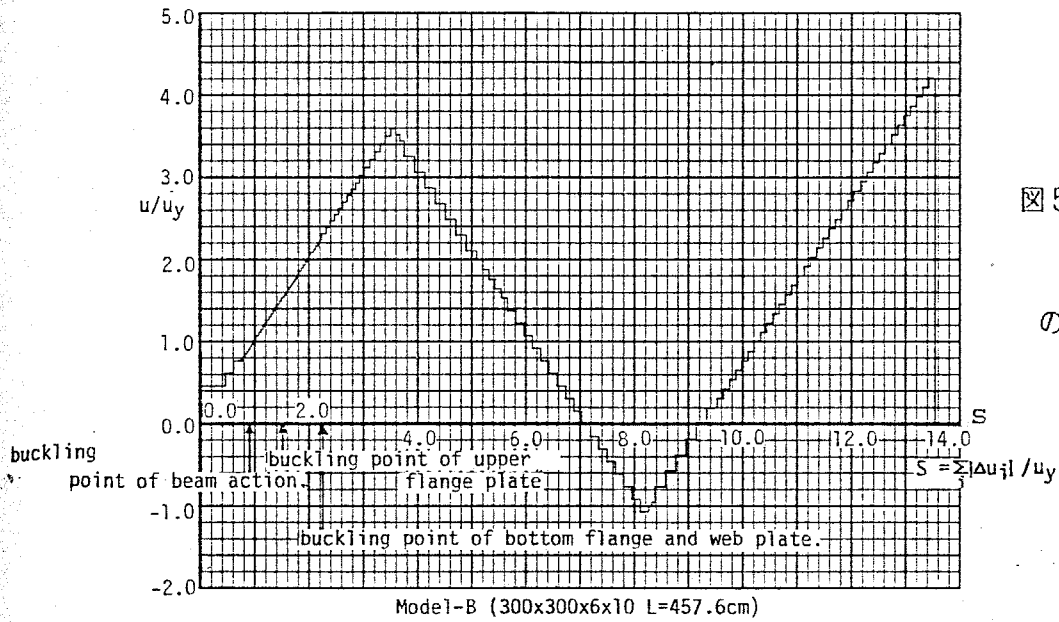


図5.16(a)

軸方向強制変位の履歴 (Model-B)

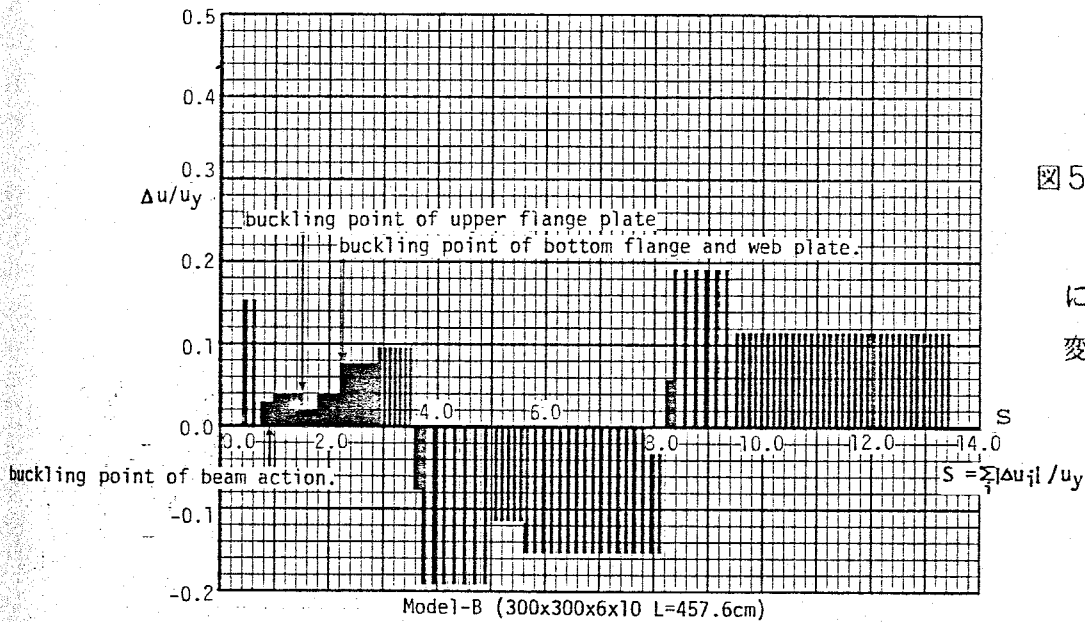


図5.16(b)

各step毎に強制的に与えた増分軸方向変位の変化

(Model-B)

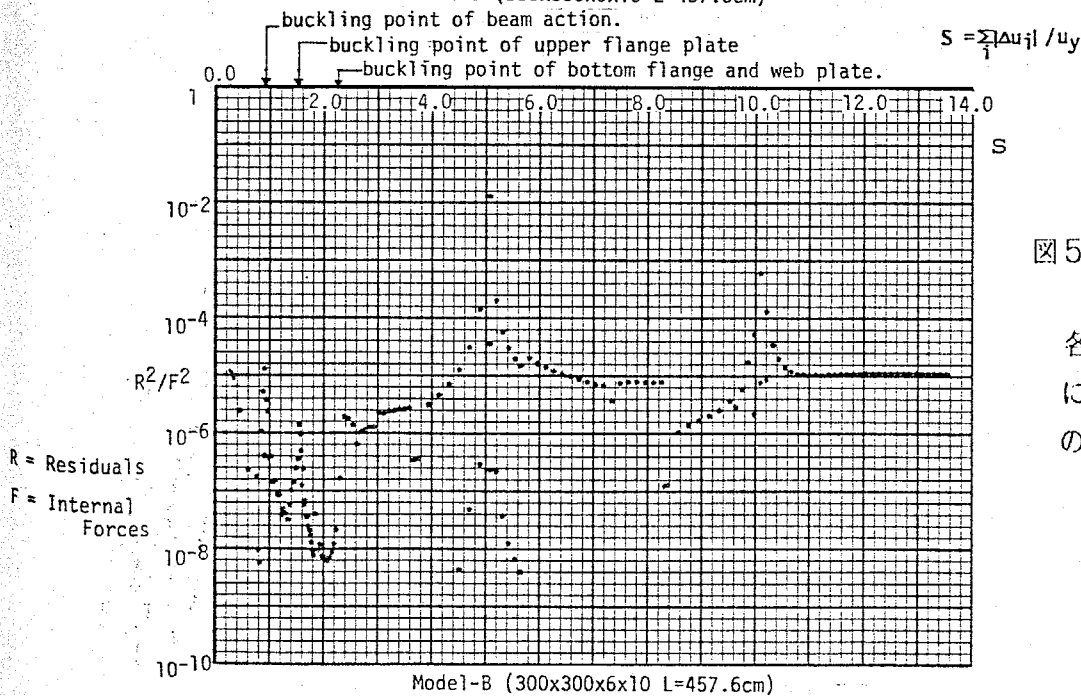


図5.16(c)

各step、各iterationにおける計算精度の変化 (Model-B)

R = Residuals
F = Internal Forces

3. 数値解析結果と考察

数値解析の結果を以下に示すようなグラフ，変形図，応力分布図等に整理し考察を行う。

- 軸力－軸方向変位関係 (Model - A , B) 図 5.17
- Model - A の変形図 (11 荷重段階について示す) 図 5.18 (1~11)
- Model - B の変形図 (11 荷重段階について示す) 図 5.19 (1~11)
- 軸力－変位関係 (Model - A と Model - B を対照)
 - 軸力－軸方向変位 図 5.20 (a , b)
 - 軸力－弱軸方向横変位 (中央断面) 図 5.21 (a , b)
 - 軸力－強軸方向横変位 (中央断面) 図 5.22 (a , b)
 - 軸力－軸方向回転 (中央断面) 図 5.23 (a , b)
- 荷重段階－軸歪関係 (中央断面) Model - A 図 5.24 (a)
 - 荷重段階－軸方向回転 (中央断面) Model - A 図 5.24 (b)
 - 荷重段階－強軸方向横変位 (中央断面) Model - A 図 5.24 (c)
- 荷重段階－軸歪関係 (中央断面) Model - B 図 5.25 (a)
 - 荷重段階－軸方向回転 (中央断面) Model - B 図 5.25 (b)
 - 荷重段階－強軸方向横変位 (中央断面) Model - B 図 5.25 (c)
- 中央断面における軸方向応力分布の変化 Model - A 図 5.26
- 中央断面における軸方向応力分布の変化 Model - B 図 5.27 (a , b)

(1) 軸力一軸方向変位の関係 (Model-A, B) 図 5.17

Model-A と Model-B について強制変位を与えた点に反力として表われる軸力と、その軸方向の変位の関係を示す。 Model-A は、後に断面のゆがみを見無視した線材解析の結果を示すが、板としての座屈現象が生じなかったため従来、線材解析によって得られていた荷重 - 変位関係と同一の関係となっている。 これに反して、Model-B では板の局部座屈現象が生じたため、従来線材解析によって得られていたものは異なった関係となっている。 u/u_{yield} が 1 に達する直前で部材としての座屈を起し、 $u/u_{yield} = 1.5$ の点において片側のフランジが局部座屈を起し、 $u/u_{yield} = 2.4$ 付近で反対側のフランジとウェブが局部座屈を起し急激に耐力が低下している。

Model-A, B ともに $u/u_{yield} = 3.5$ の点において強制変位の増分を逆方向へ進め引張力を与えている。 $u/u_{yield} = -1$ に達した後、再度圧縮荷重が加わる方向へ増分変位を与え、 $u/u_{yield} = 4.2$ において解析を終了させる。 2 度目の曲線についても、Model-B は中央断面の板が局部座屈を起したままになっているため Model-A より低い耐荷能力しか発揮されていない。

この図中に、SS41 ($\sigma_{yield} = 2.4 \text{ t/cm}^2$) の鋼部材として、細長比 (λ) が 60 の場合の、長期許容引張応力度 ($f_t = 1.6 \text{ t/cm}^2$)、短期許容引張応力度 ($f'_t = 2.4 \text{ t/cm}^2$) と長期許容圧縮応力度 ($f_c = 1.3 \text{ t/cm}^2$)、短期許容圧縮応力度 ($f'_c = 1.95 \text{ t/cm}^2$) に対応する応力比を示す。 Model-A, B 両者とも u/u_{yield} が 1.1 を越える付近から短期の許容圧縮応力度を下まわり、Model-A では $u/u_{yield} = 2.2$ 、Model-B では $u/u_{yield} = 1.7$ において長期の許容圧縮応力度を下まわっていることがわかる。 引張力をうける場合、この例のように一度座屈現象を起した部材は $u/u_{yield} = -1$ となっているにもかかわらず $P/P_{yield} = 0.8 \sim 0.9$ までしか達しない。 これは座屈した部材に引張力を与えると、座屈してくびれた側の断面だけが引張応力を負担して塑性変形を生じ、全体が弾性的に伸びる場合に比較して、小さな荷重段階で大きな伸びを生じてしまうからである。 このため、引張力は短期の引張許容応力度に達していない。 再度、圧縮力を与えた場合は、長期許容

圧縮応力度の近くまで耐力が向上するが再度，座屈現象が表われ荷重低下を起している。

$$P_y = \text{Area} \times \text{Yield-stress}$$

$$u_y = \frac{\text{Yield-stress} \times \text{Length}}{\text{Young's modulus}}$$

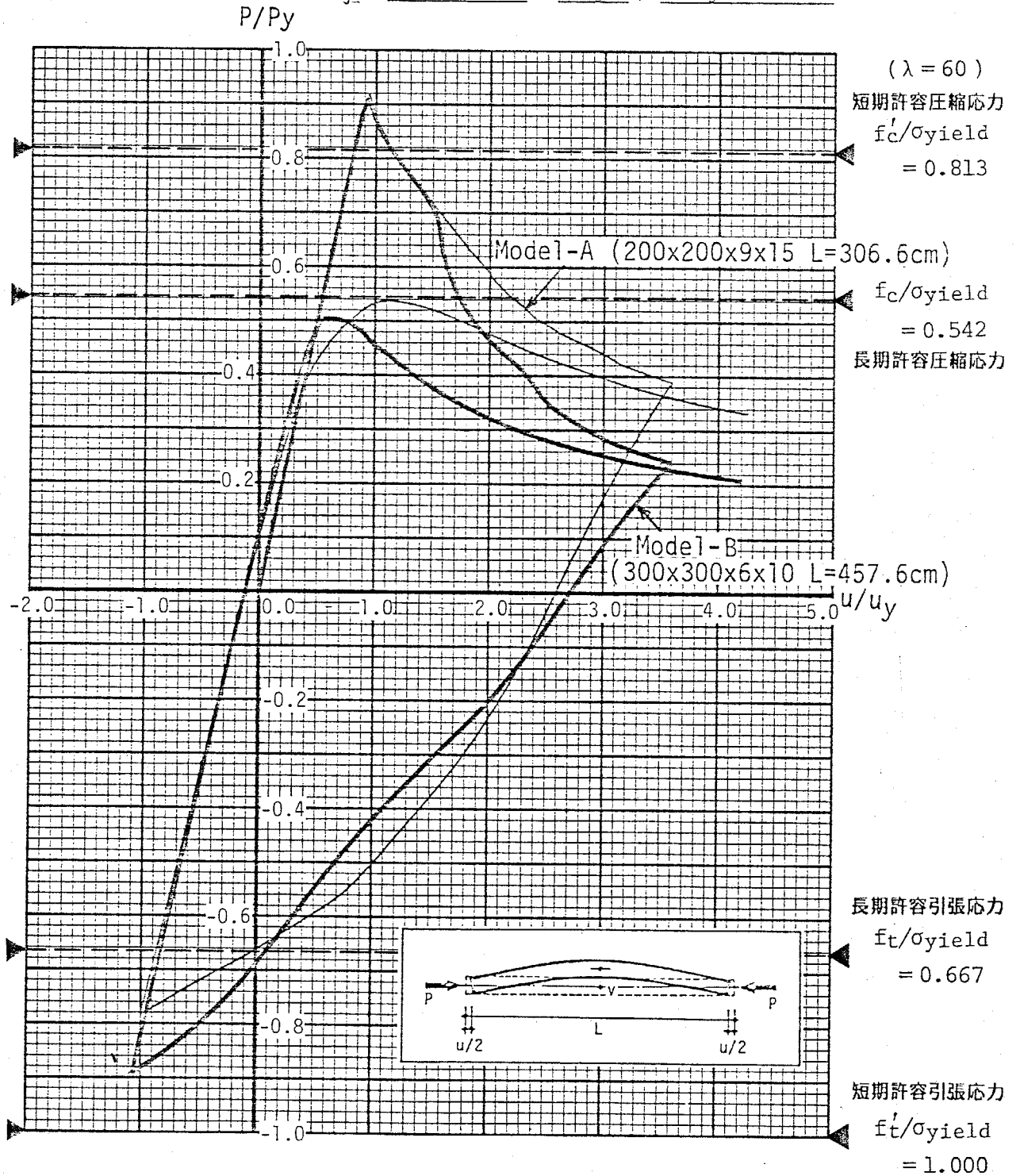


図5. 17 軸力-軸方向変位の関係 (Model-A, B)

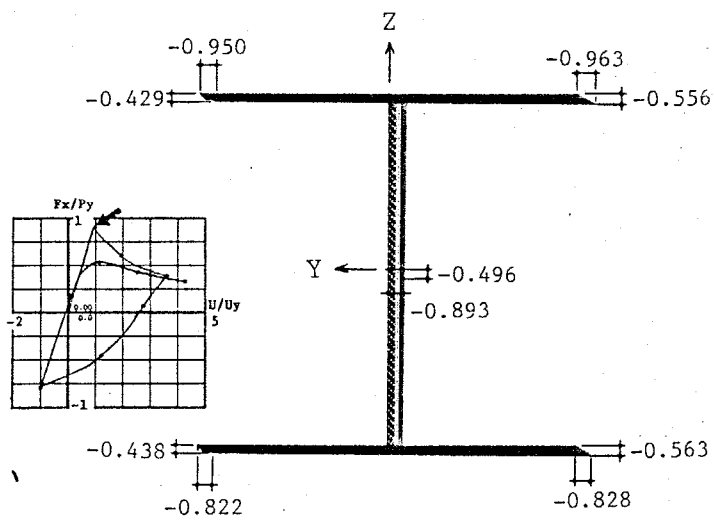
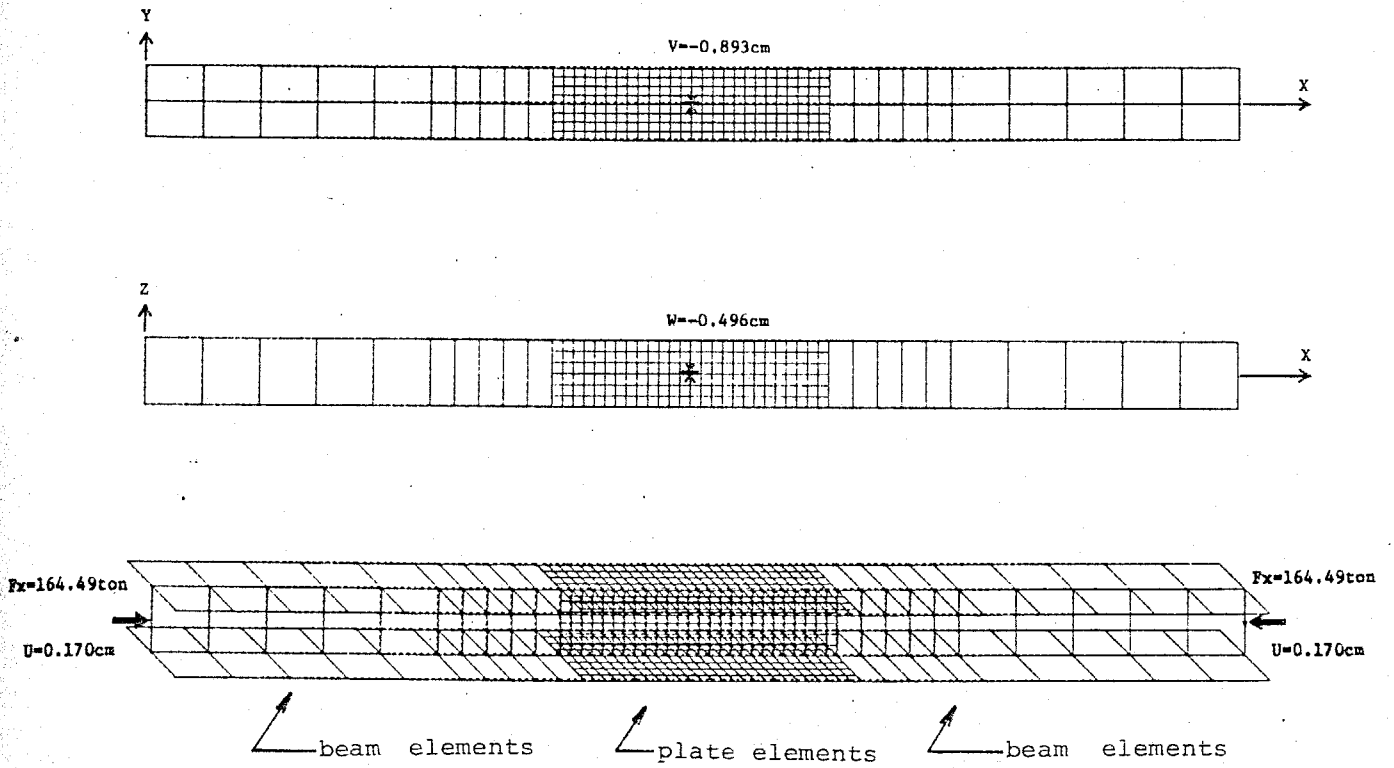
(2) Model - Aの変形状態の変化…………… 図 5.18(1~11)

122段階の解析結果の中から11の変形状態を選び，XY平面上に投影した平面図，XZ平面上に投影した平面図，アイソメトリック投視図，YZ平面上に投影した正面図の4種の図法によって示す。

これらの各変形図は1.において述べた対称条件に従って部材全体を表わすように図化し，細かい格子部分が有限板要素，あらい格子部分が線材要素による分割によることを示している。

- XY平面投影図は部材の弱軸方向の変形状態（フランジの面内変位，ウェブの面外変位）をみるために都合がよい。
- XZ平面投影図は部材の強軸方向の変形状態（フランジの面外変位，ウェブの面内変位）をみるために都合がよい。
- アイソメトリック投視図は全体的な変形挙動をみるために都合がよい。
- YZ平面正面図は有限板要素に分割したときにできる各位置の断面のゆがみを知るために都合がよい。

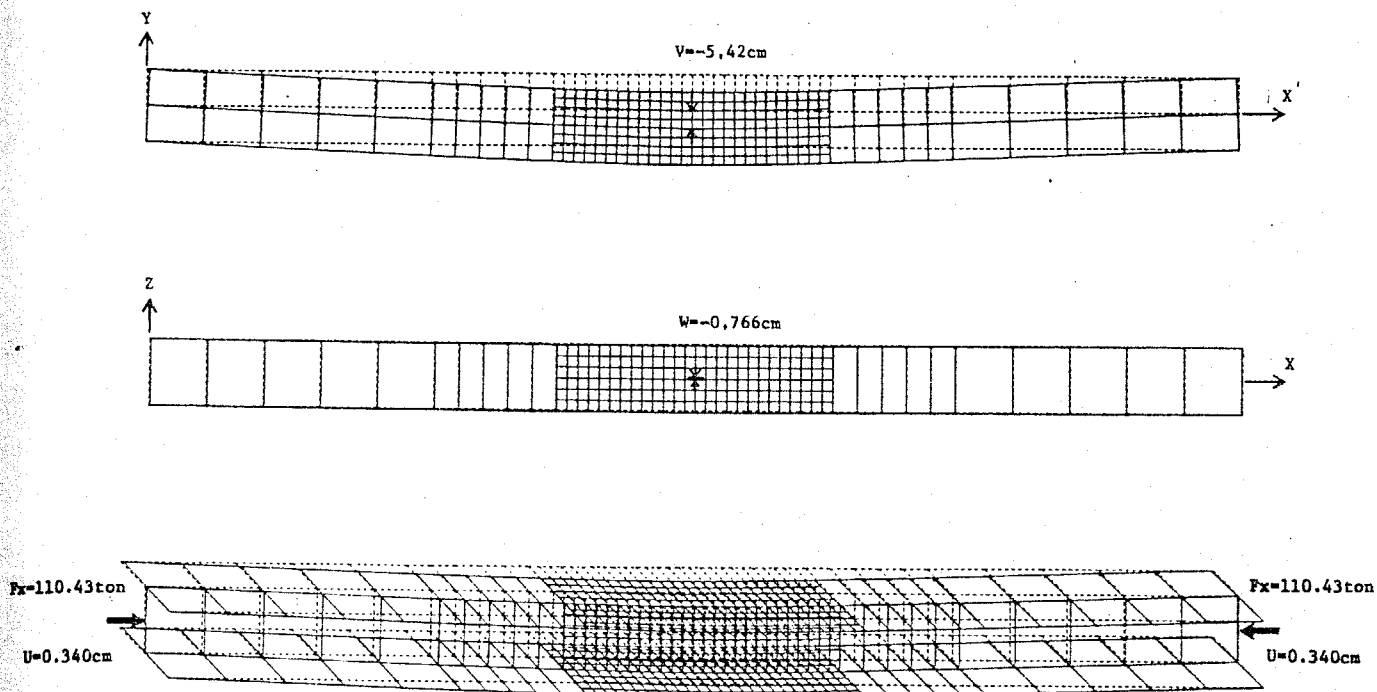
図 5.18(1) は部材としての座屈が発生する最大荷重時点における変形状態を示している。この図によると，初期曲がりを強軸，弱軸ともに $L/1000$ だけ与えたため，若干のねじれた変形を起している。(2),(3)(4)は初期の座屈に至る過程をよく表わしており，局部座屈は発生していないことがわかる。(5),(6),(7)は逆方向に変位を与え引張状態になる過程を示している。弱軸方向へ進んでいた横たわみが除々に戻っていることが表われている。(8),(9),(10),(11)は再度，圧縮方向の強制変位を与えて座屈するまでの過程を示している。



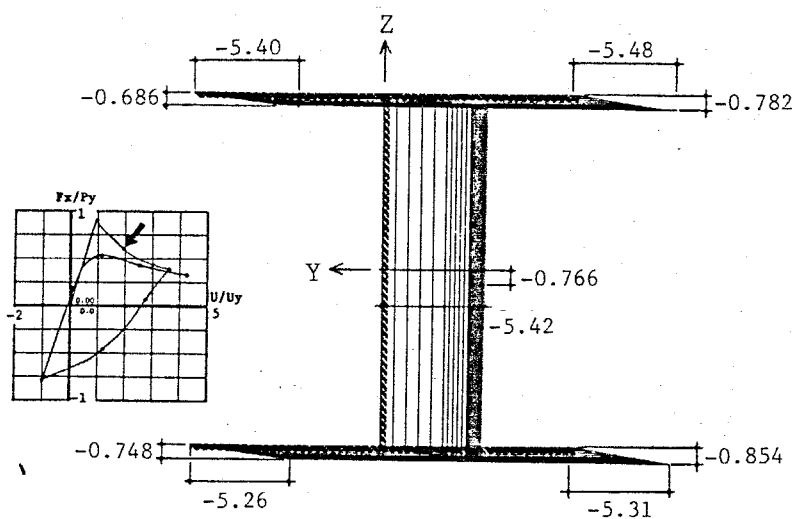
unit=cm

図5. 18 (1) Model-Aの変形状態 no.1

$F_x = 164.49 \text{ ton}$ $U = 0.170 \text{ cm}$ $F_x/P_y = 0.8997$ $U/U_Y = 0.9703$



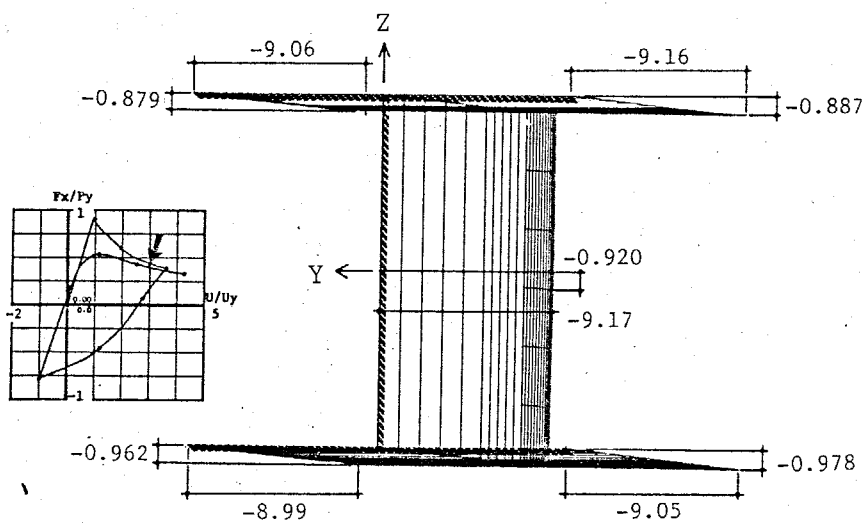
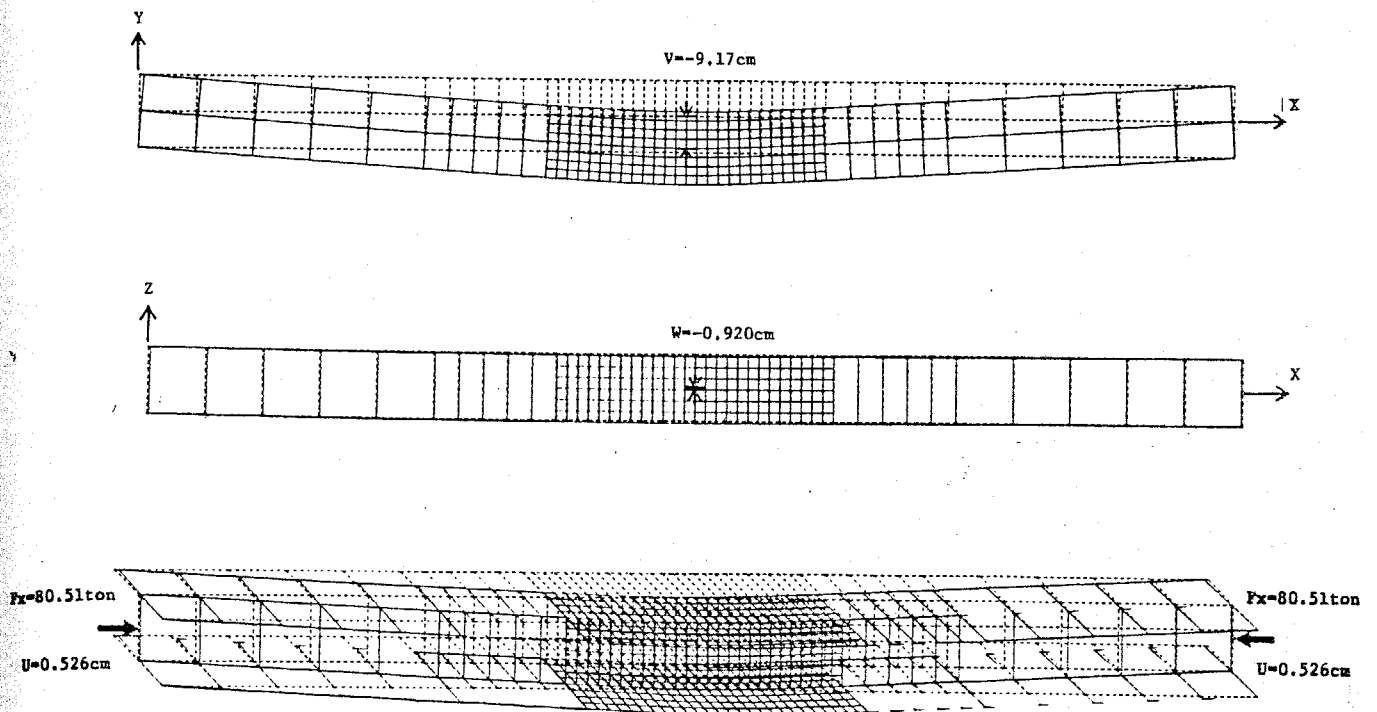
H-200x200x9x15 25step NO.2 Fx=110.43ton U=0.340cm Fx/Py=0.6040 U/UY=1.9406



unit=cm

図5. 18 (2) Model-Aの変形状態 no.2

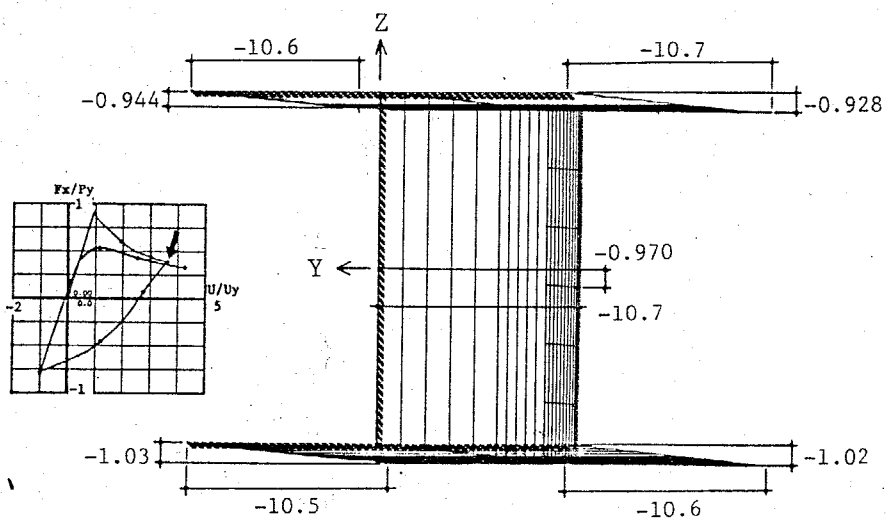
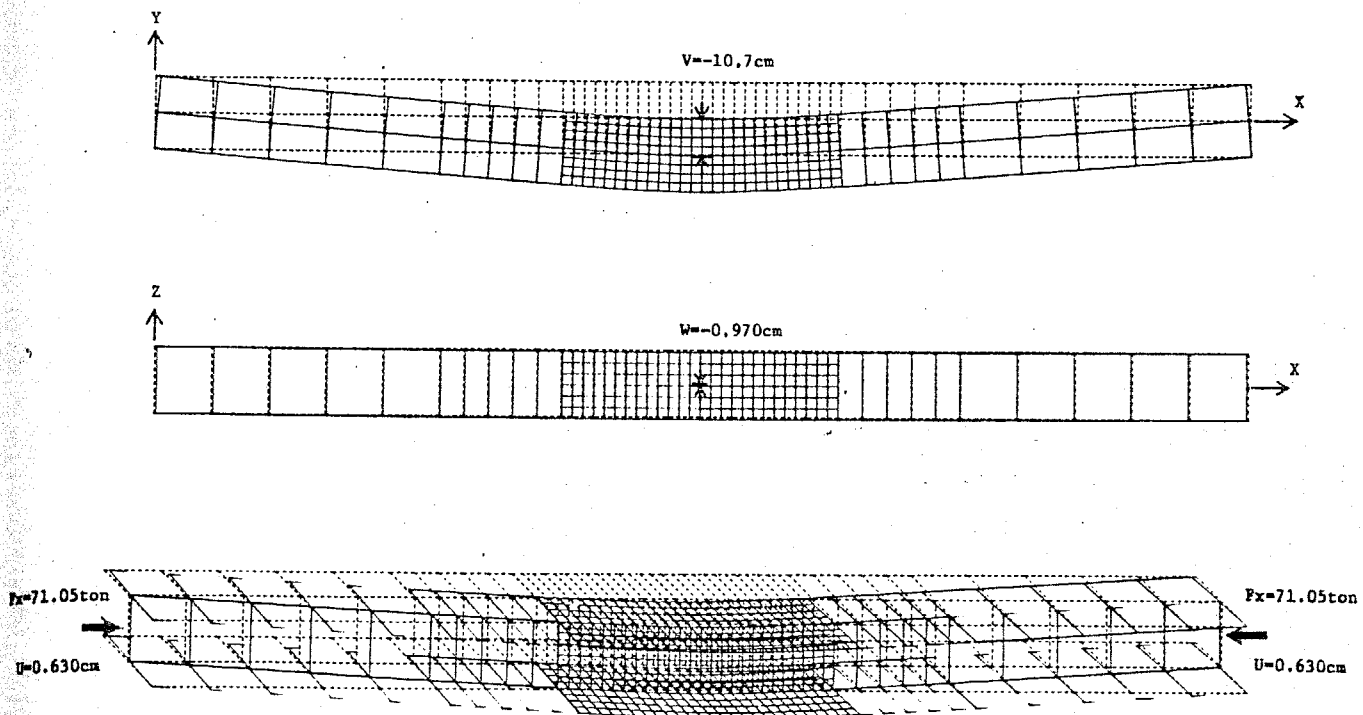
Fx=110.43ton U=0.340cm Fx/Py=0.6040 U/UY=1.9406



unit=cm

図5.18(3) Model-Aの変形状態 no.3

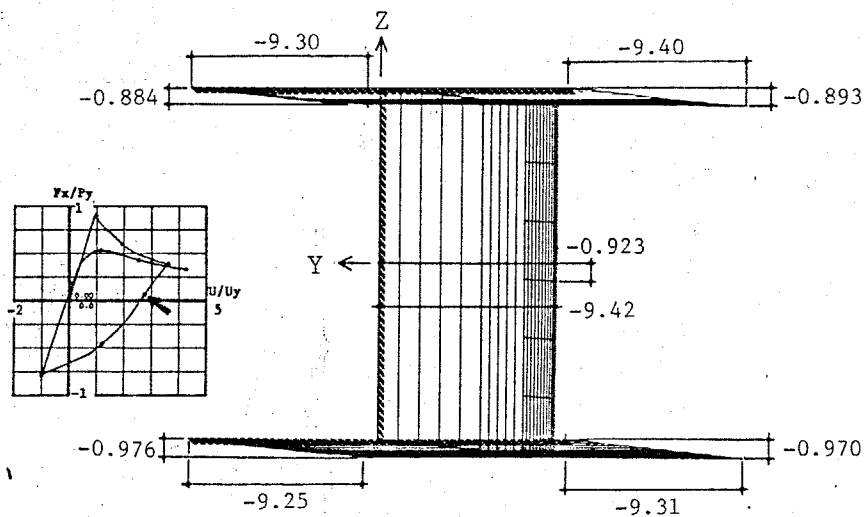
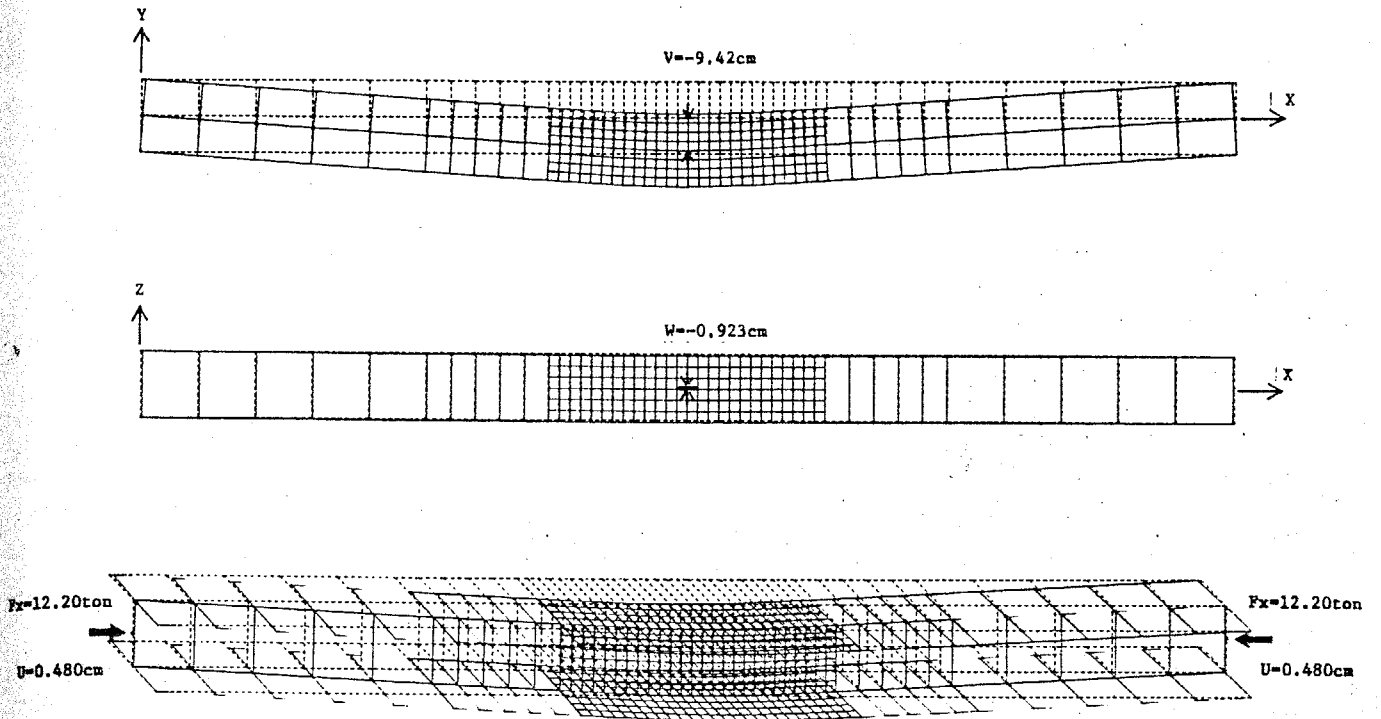
$F_x = 80.51 \text{ ton}$ $U = 0.526 \text{ cm}$ $F_x/P_y = 0.4404$ $U/U_y = 3.0023$



unit=cm

図5. 18 (4) Model-Aの変形状態 no.4

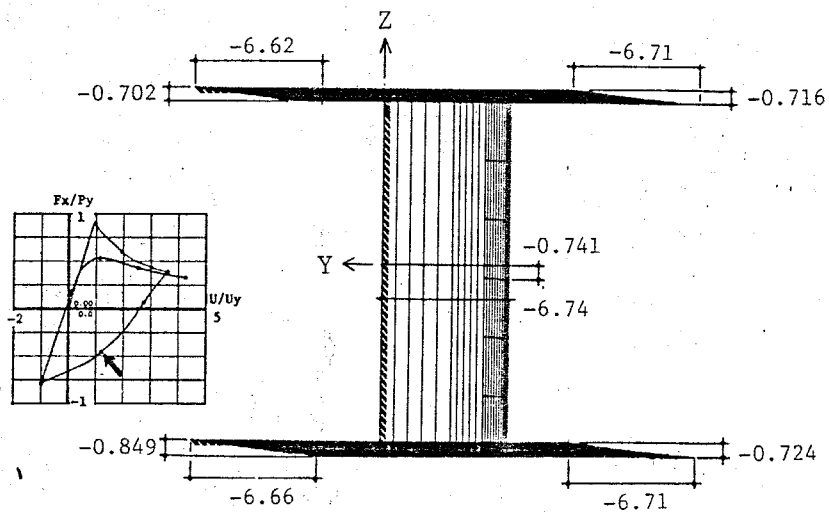
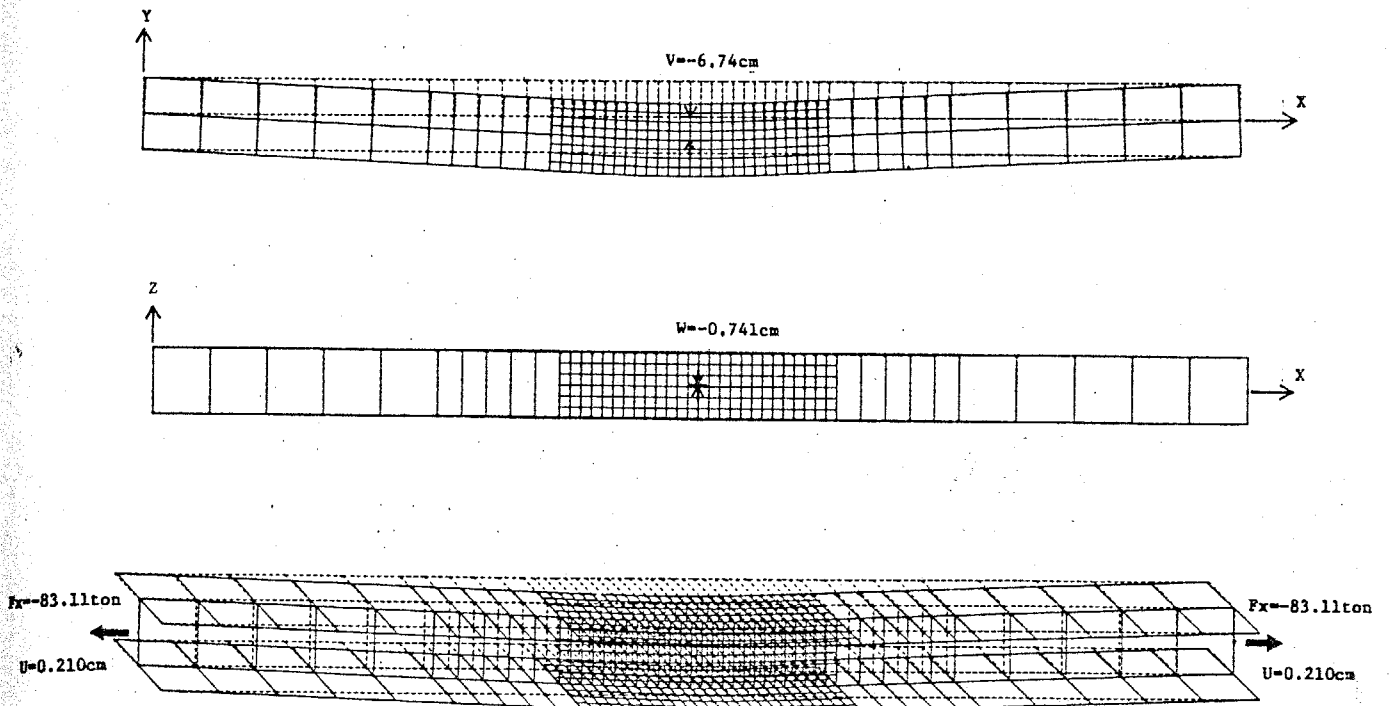
$F_x = 71.05\text{ton}$ $U = 0.630\text{cm}$ $F_x/P_y = 0.3886$ $U/U_y = 3.5959$



unit=cm

図5. 18 (5) Model-Aの変形状態 no.5

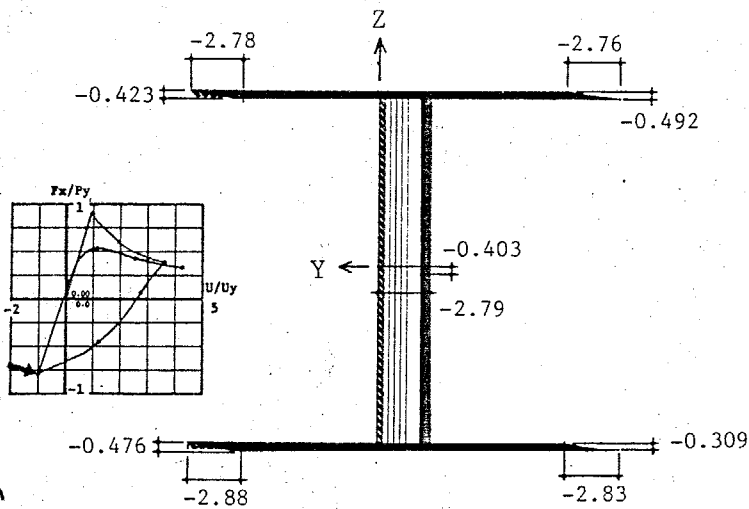
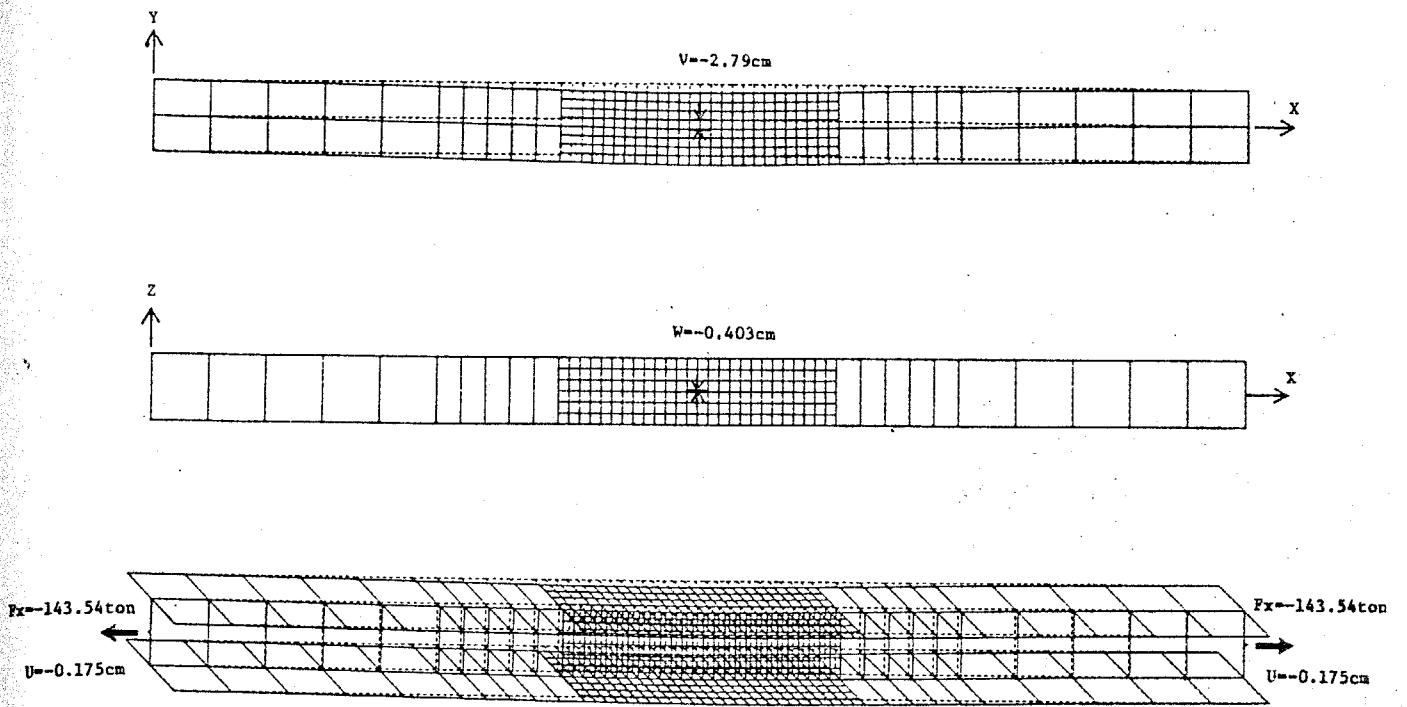
$F_x = 12.20 \text{ ton}$ $U = 0.480 \text{ cm}$ $F_x/P_y = 0.0667$ $U/U_y = 2.7397$



unit=cm

図5. 18 (6) Model-Aの変形状態 no.6

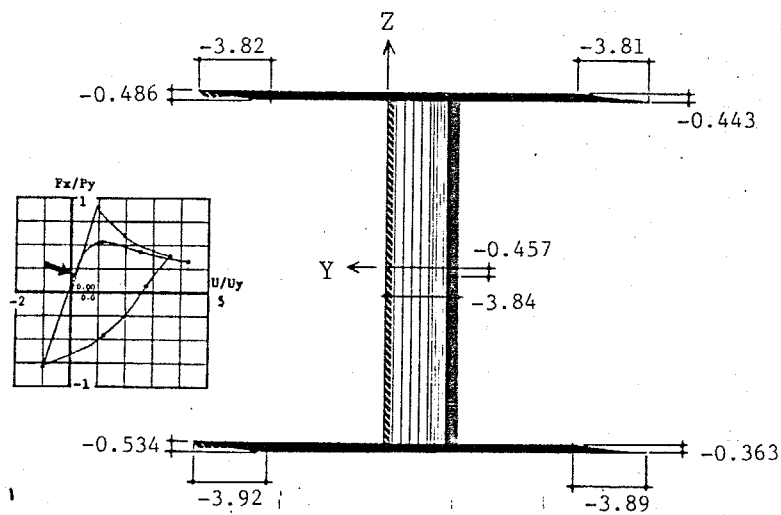
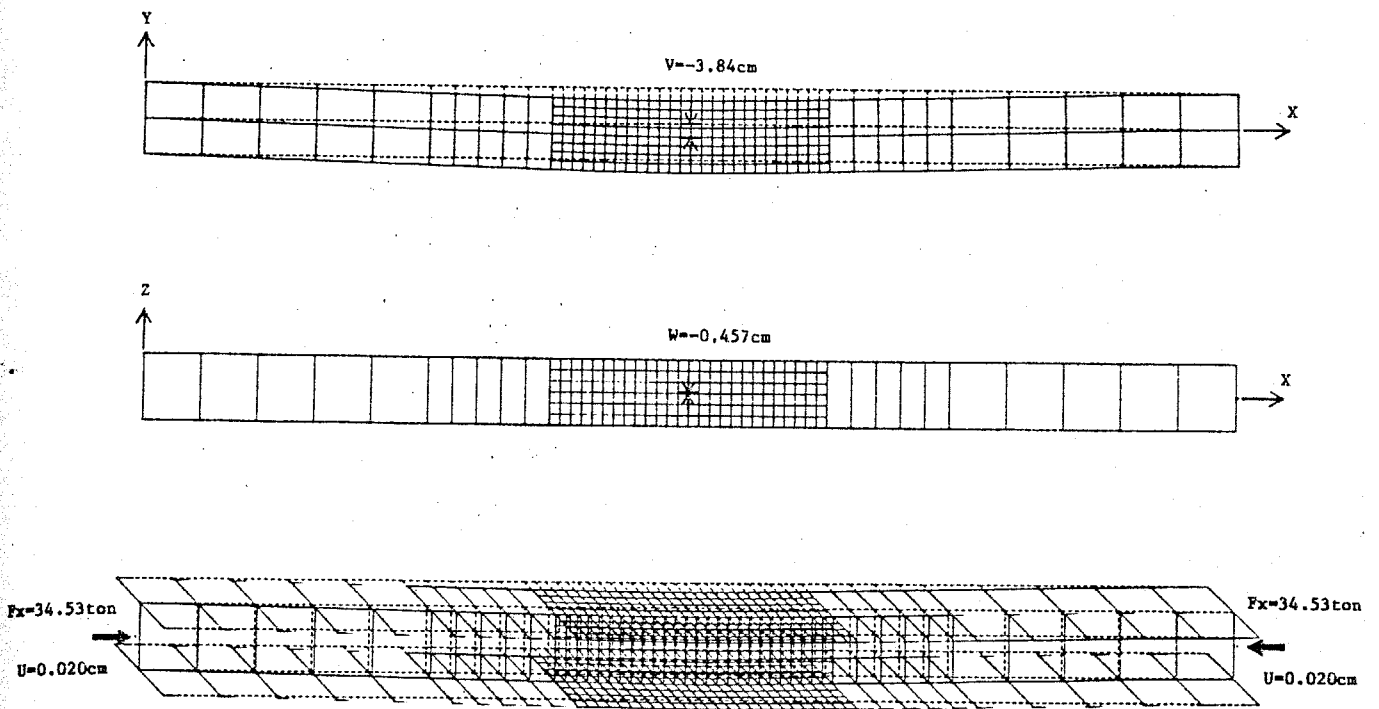
$F_x = -83.11 \text{ ton}$ $U = 0.210 \text{ cm}$ $F_x/P_y = -0.4546$ $U/U_y = 1.1986$



unit=cm

図5. 18 (7) Model-Aの変形状態 no.7

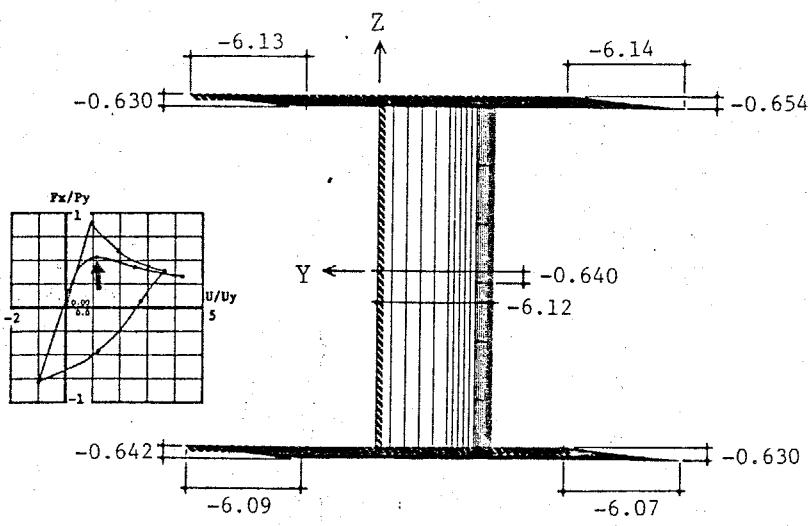
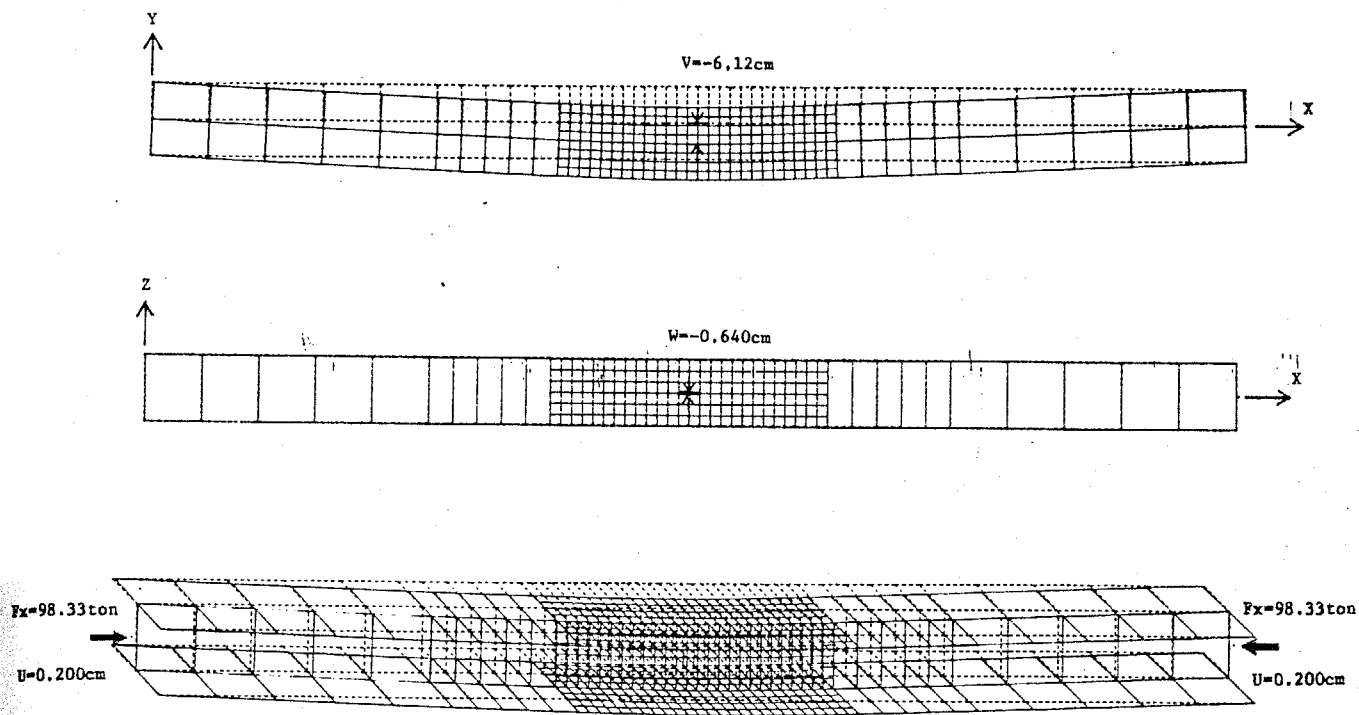
$F_x = -143.54 \text{ ton}$ $U = -0.175 \text{ cm}$ $F_x/P_y = -0.7851$ $U/U_y = -1.0000$



unti=cm

図5. 18 (8) Model-Aの変形状態 no.8

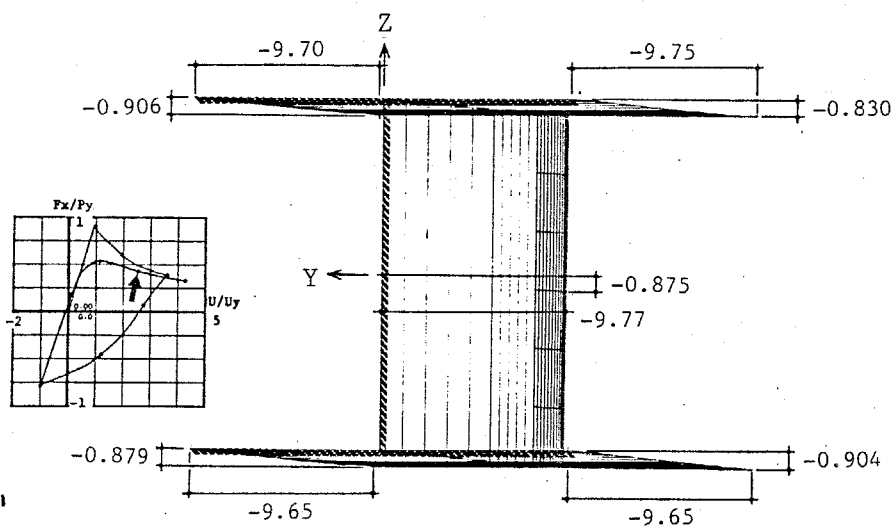
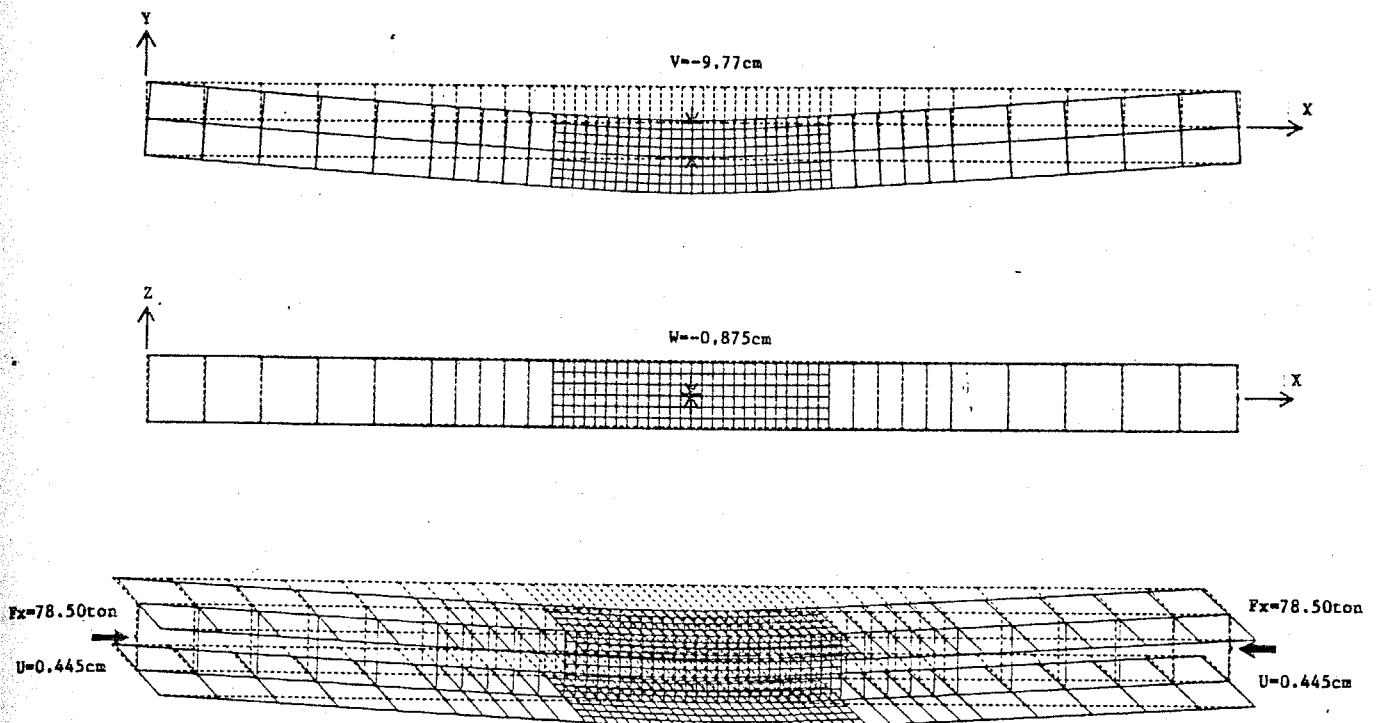
$F_x=34.53\text{ton}$ $U=0.020\text{cm}$ $F_x/P_y=0.1889$ $U/U_y=0.1142$



unit=cm

図5. 18 (9) Model-Aの変形状態 no.9

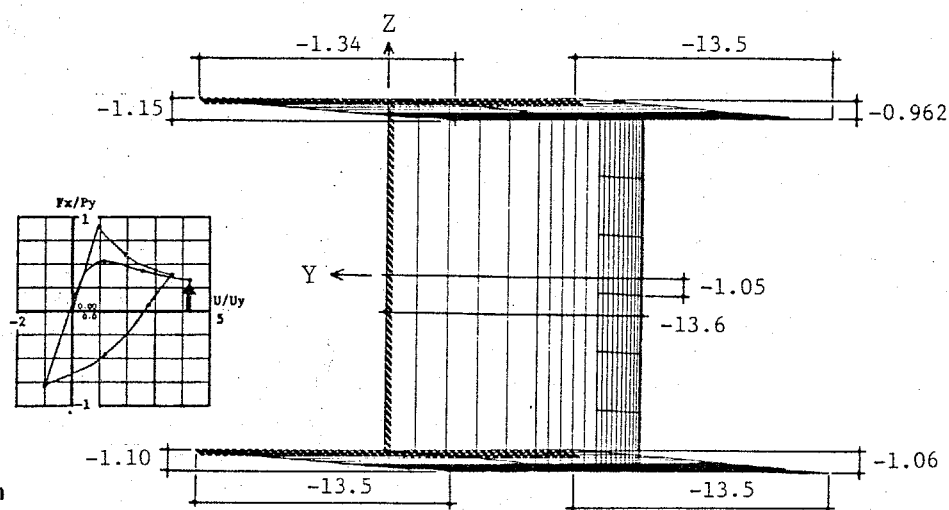
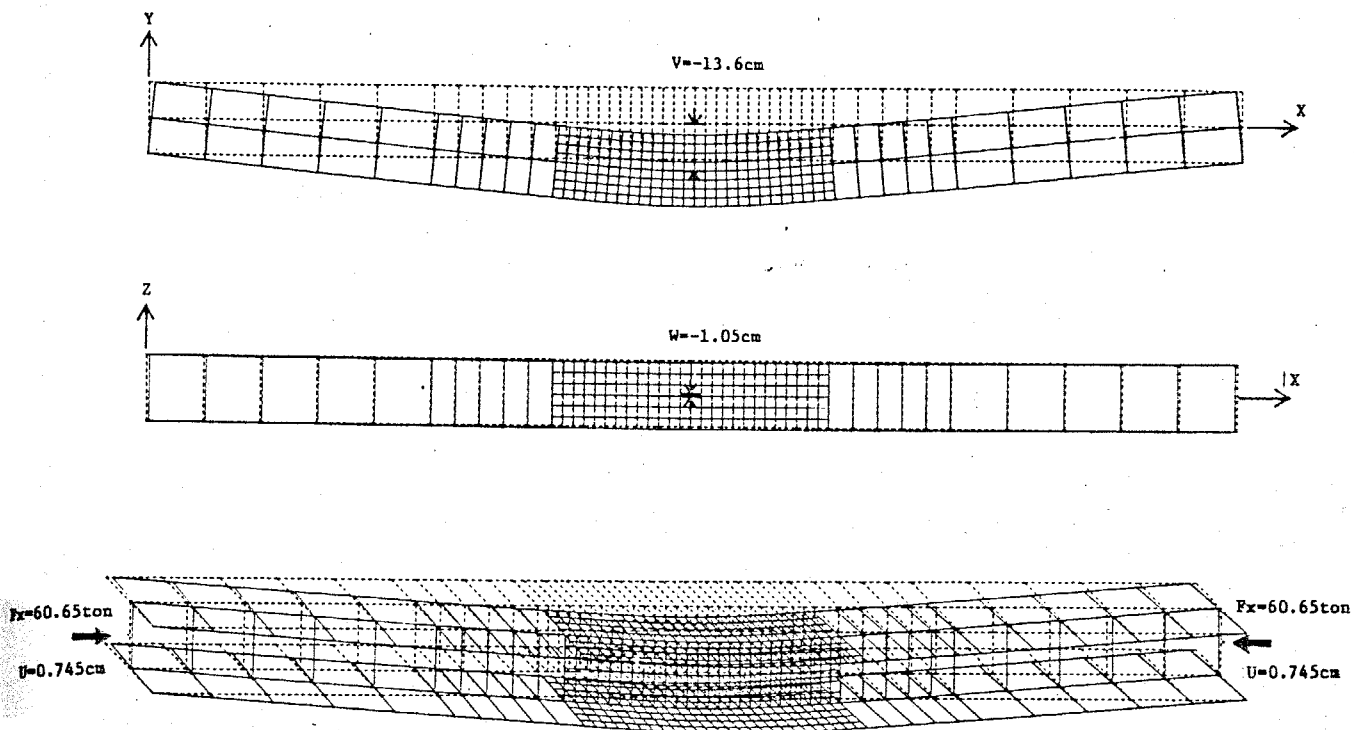
Fx=98.33ton U=0.200cm Fx/Py=0.5378 U/Uy=1.1416



unit=cm

図5. 18 (10) Model-Aの変形状態 no.10

$F_x=78.50\text{ton}$ $U=0.445\text{cm}$ $F_x/P_y=0.4293$ $U/U_y=2.5400$



unit=cm

図 5. 18 (11) Model-A の変形状態 no.11

$F_x = 60.65 \text{ ton}$ $U = 0.745 \text{ cm}$ $F_x/F_y = 0.3317$ $U/U_y = 4.2523$

(3) Model-B の変形状態の変化 図 5.19(1~11)

141 段階の解析結果の中から 11 の変形状態を選び、(2)に述べた方法と同様に各々 4 種の図法によって図化して示す。

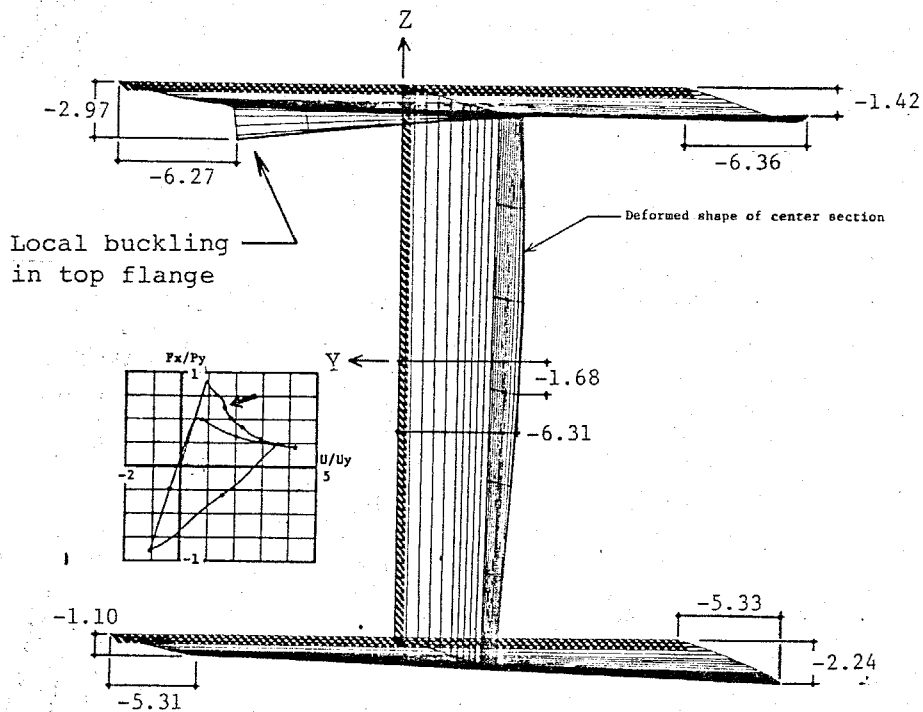
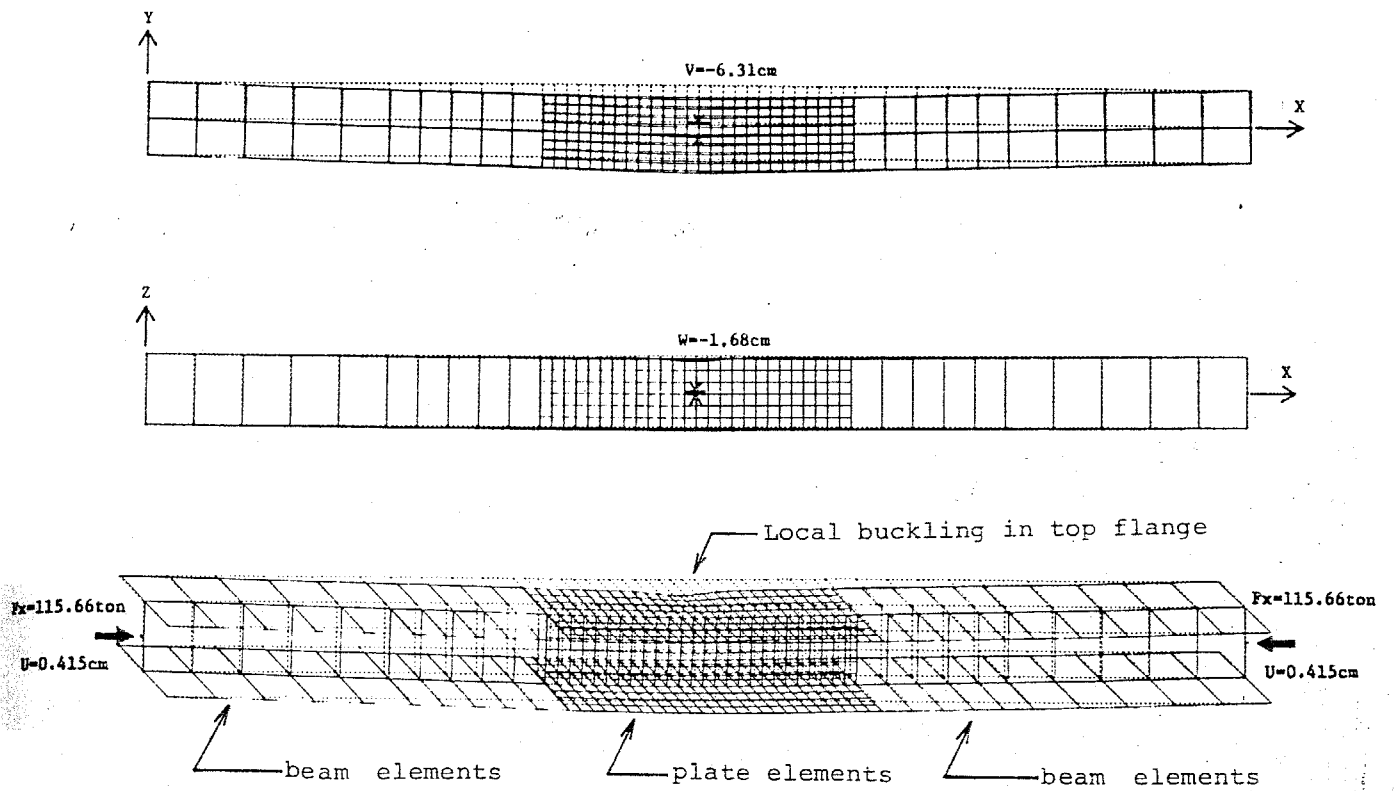
図 5.19(1)は部材座屈を起こして、荷重が低下し、変形が増加してゆく過程で圧縮力をうけ塑性化している左側フランジの内、上側のフランジが局部座屈し、荷重がさらに低下している時点の変形の様子を示している。(2)はこのフランジの変形がさらに増加し、ウェブにも変形の影響が及んでいることがわかる。(3),(4)には、下側左のフランジにも局部座屈が発生していることが表われている。(5)は $u/u_{yield} = 3.5$ であり、上側、下側のフランジウェブが大きく変形し、局部座屈の発生しなかった Model-A とは異った性状を示している。

(6),(7)は引張方向の強制変位を与えた過程を示しているが、全体の曲がりに戻り部材が直線状になると同時に、局部座屈を起し曲がっていた板が徐々に平面状に戻って行く様子がよく表われている。しかし、 $u/u_{yield} = -1$ の時点では部分的に局部変形が残っており、耐荷力 (P/P_{yield}) は約 0.9 にまでしか達していない。

(8),(9)の過程は再度、圧縮方向の強制変位を与えた経過である。(9)において極大荷重を示した後、(10),(11)へと進むに従い、局部変形はさらに明確になり、荷重の低下も激しい。XZ 平面投影図には上下フランジの局部座屈の曲面が数本の曲線の集合によって表わされている。この曲線の形状によると、部材中央に発生した局部座屈によって板の曲げ変形の影響の表われているのは中央断面から 6 要素だけ端部によったところまでと考えられ、本解析において長さ方向に 13 ($1/2$ モデルについて)の板要素分割を行ったのは十分であったと考える。

図 5.18(11)に示されている Model-A の最終状態と、図 5-19(11)に示している Model-B の最終状態における、XY 平面投影図を比較すると、Model-B の方が部材の中央だけで折れているように座屈しているのに反して Model-A では中央付近が徐々に大きく曲げられているようになっている。この相違は、局部座屈を起こしたか、起こさなかったかの相違によるのである。

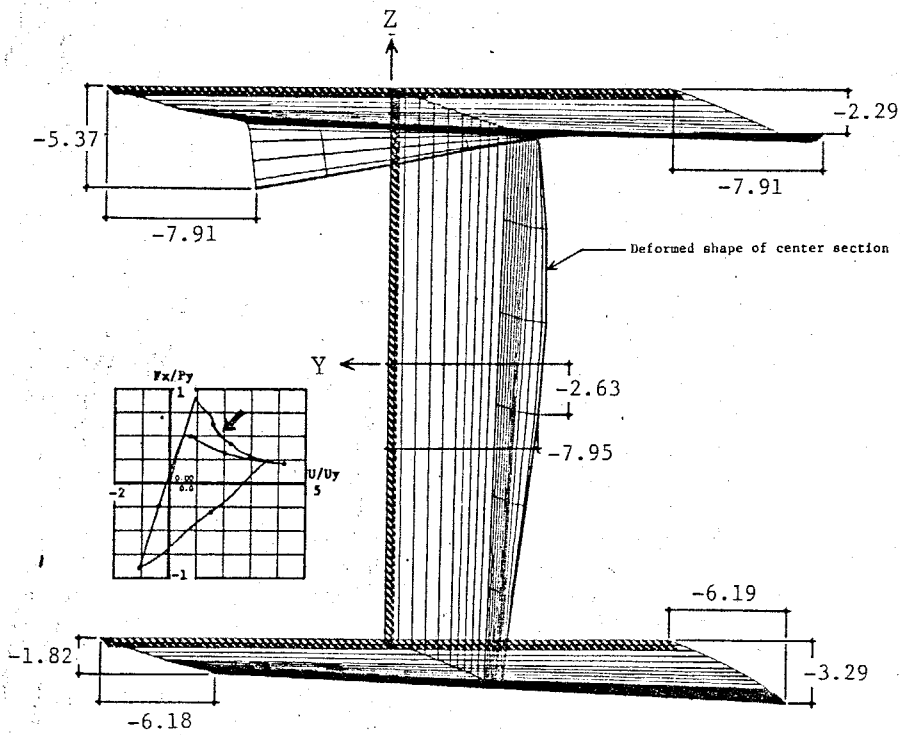
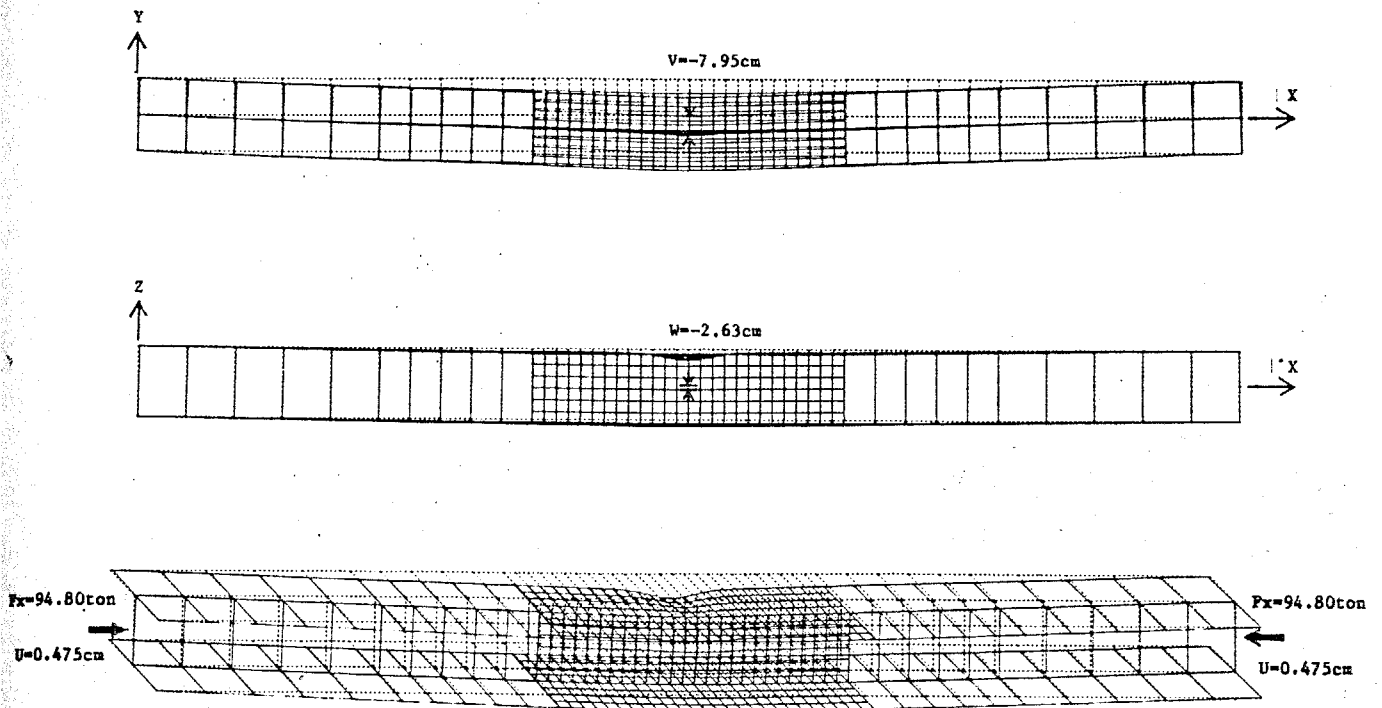
るが、実際に部材が座屈する際に局部座屈を併発している場合の変形状態を、よく再現していると考える。



unit=cm

図5.19(1) Model-Bの変形状態 no.1

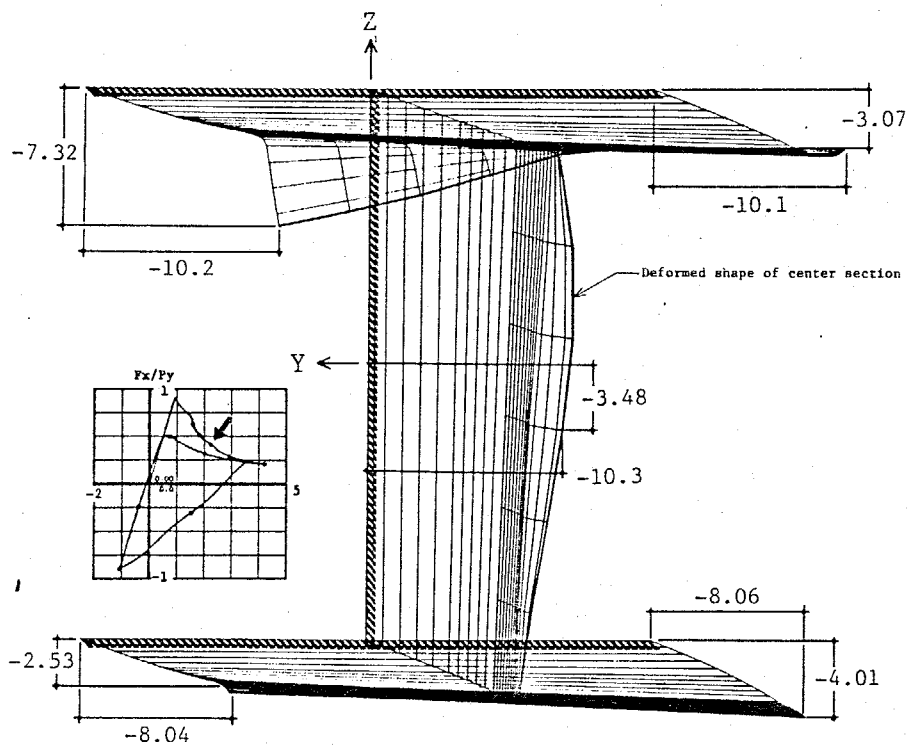
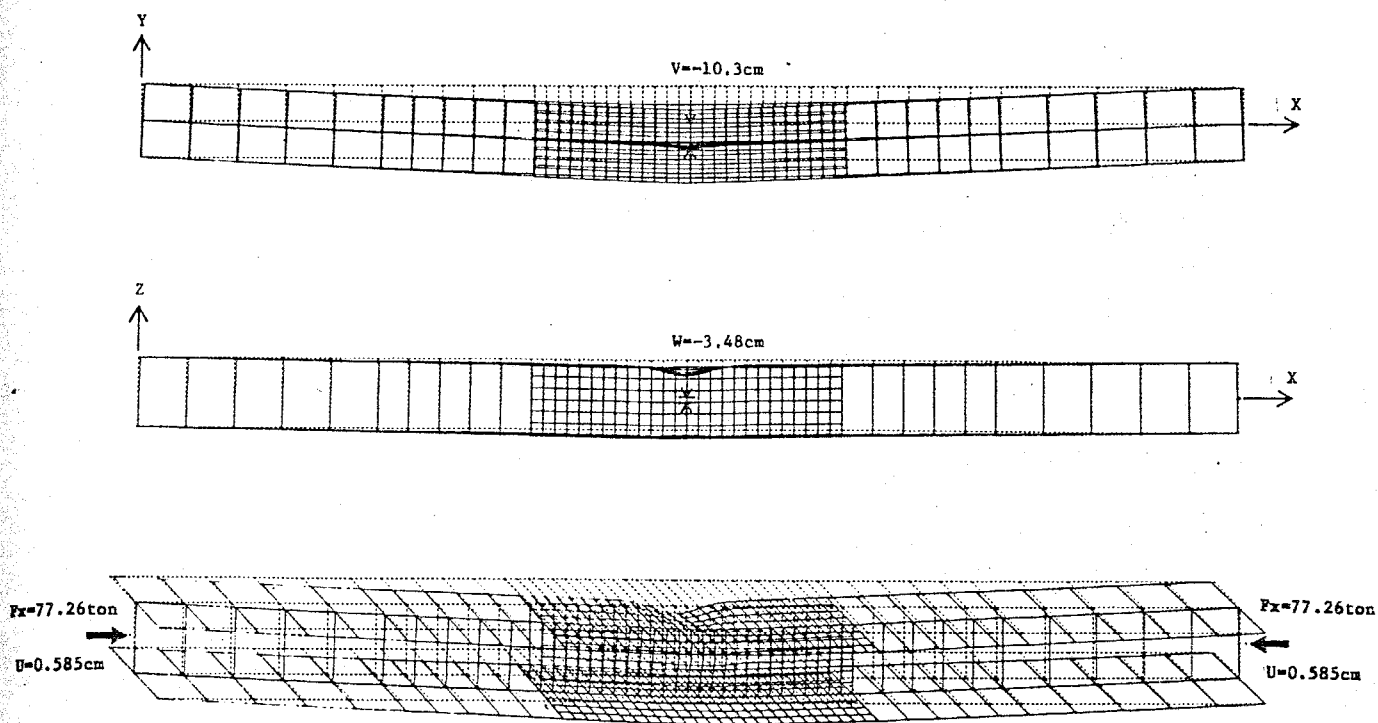
$F_x = 115.66\text{ton}$ $U = 0.415\text{cm}$ $F_x/P_y = 0.6275$ $U/U_y = 1.5870$



unit=cm

図5. 19 (2) Model-Bの変形状態 no.2

$F_x=94.80\text{ton}$ $U=0.475\text{cm}$ $F_x/P_y=0.5143$ $U/U_y=1.8164$



unit=cm

図5. 19 (3) Model-Bの変形状態 no.3

$F_x=77.26\text{ton}$ $U=0.585\text{cm}$ $F_x/P_y=0.4192$ $U/U_y=2.2371$

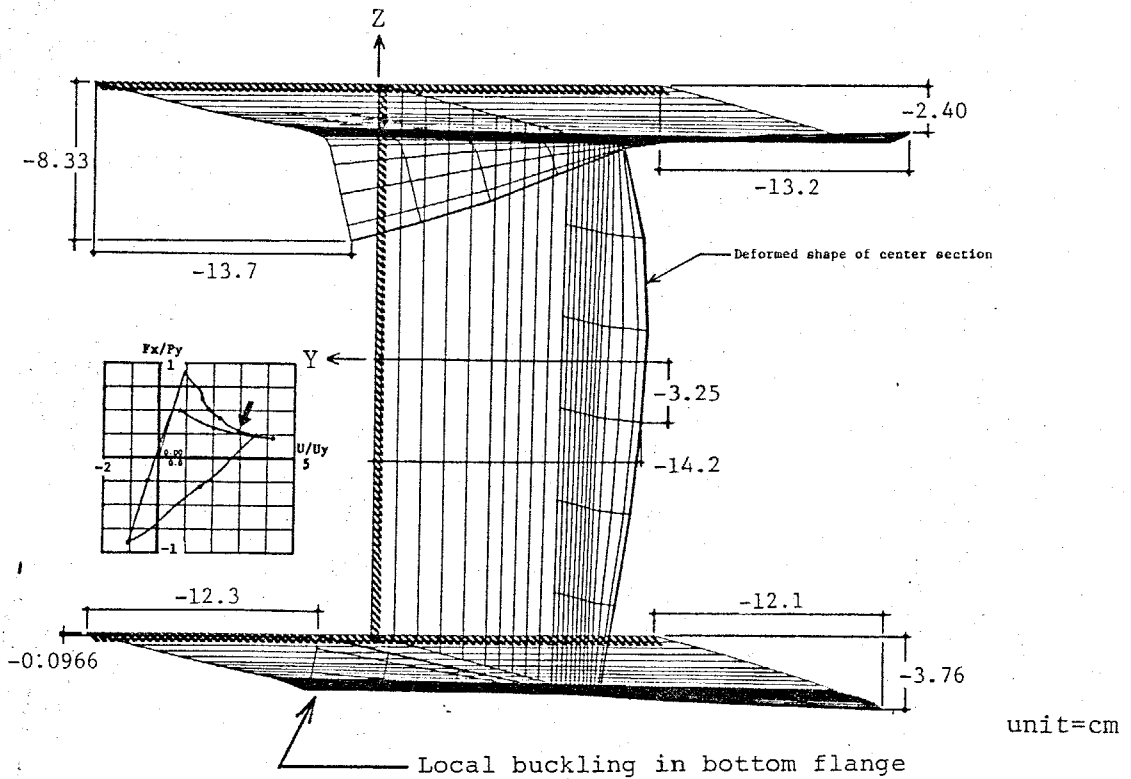
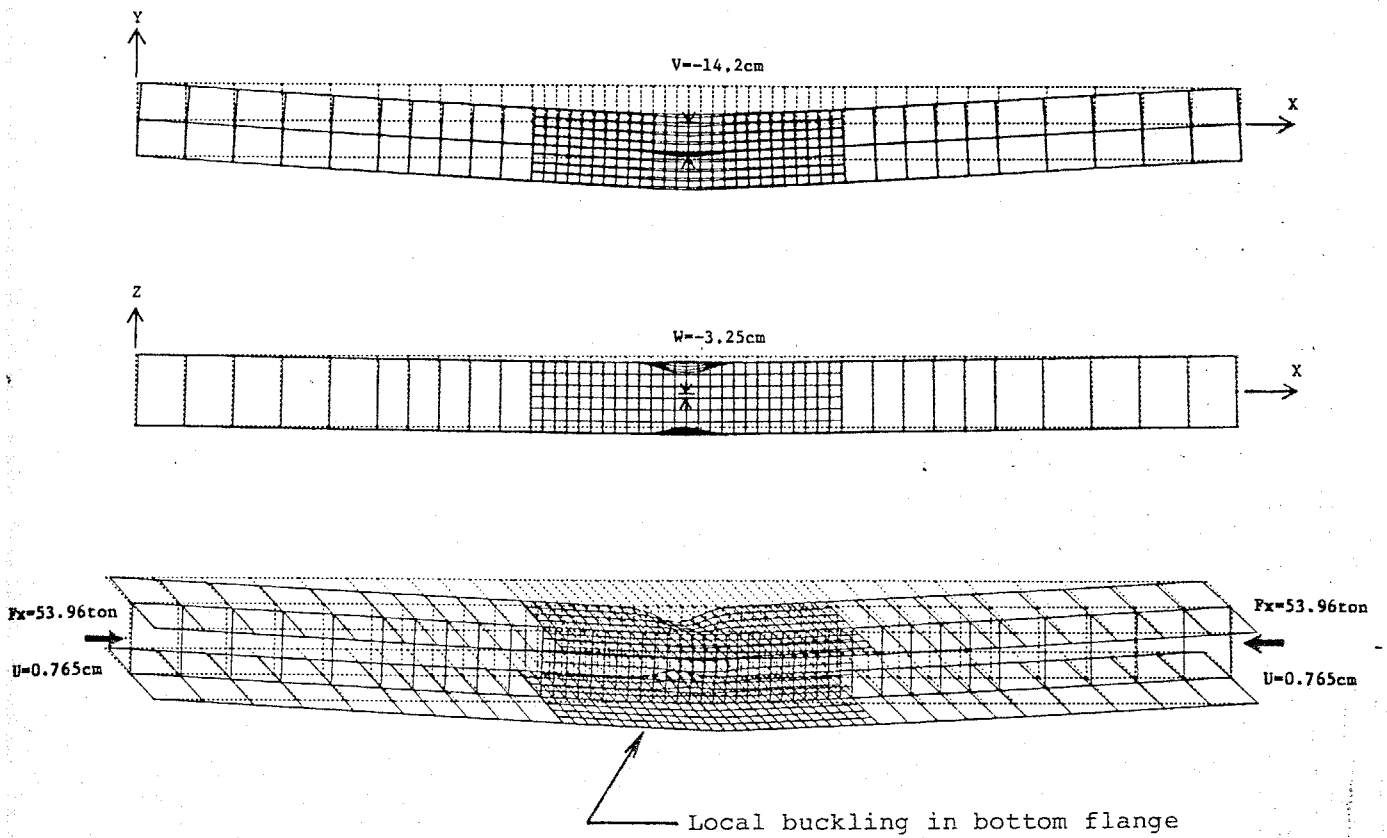
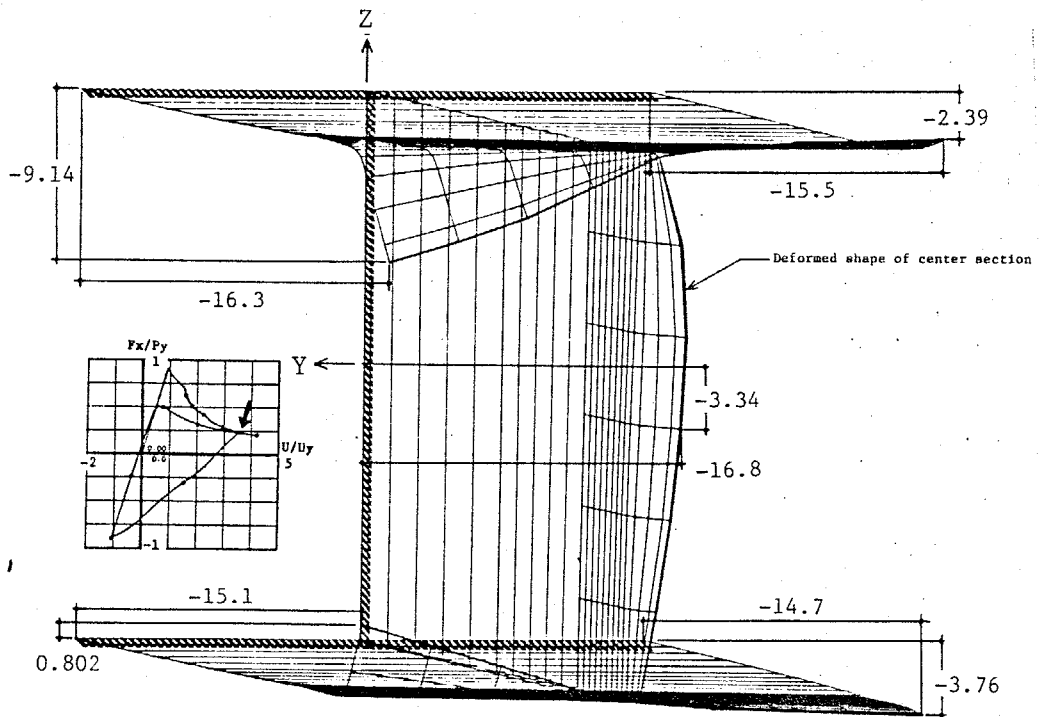
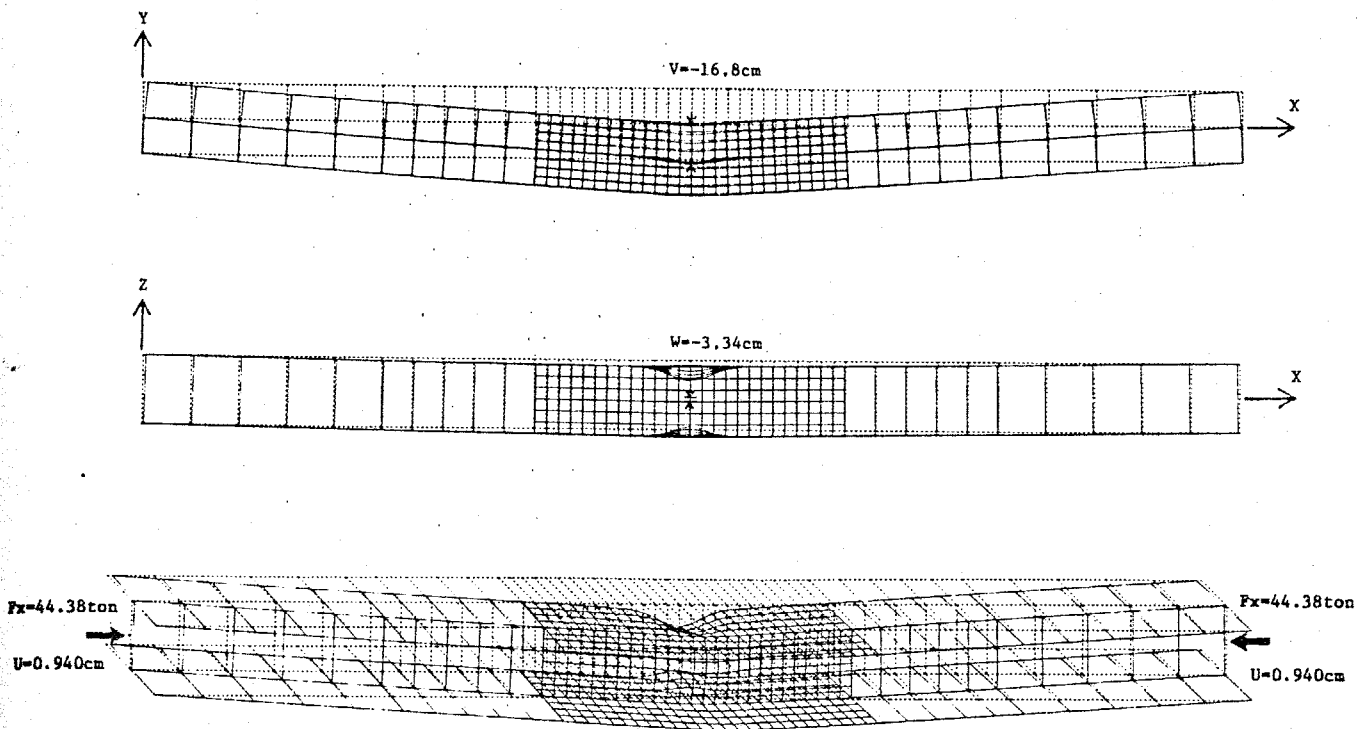


図5. 19 (4) Model-Bの変形状態 no.4

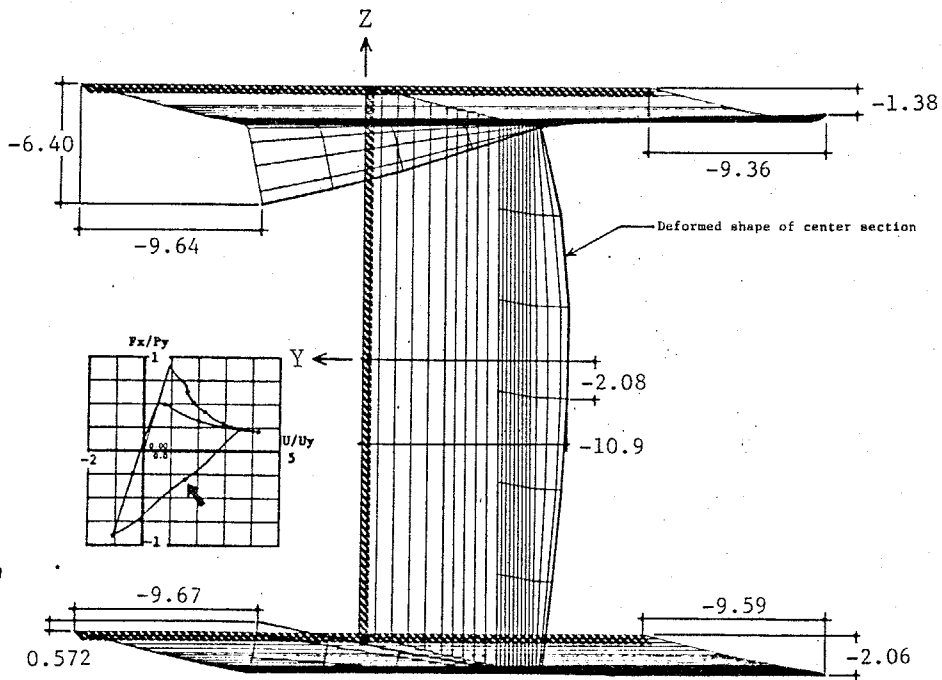
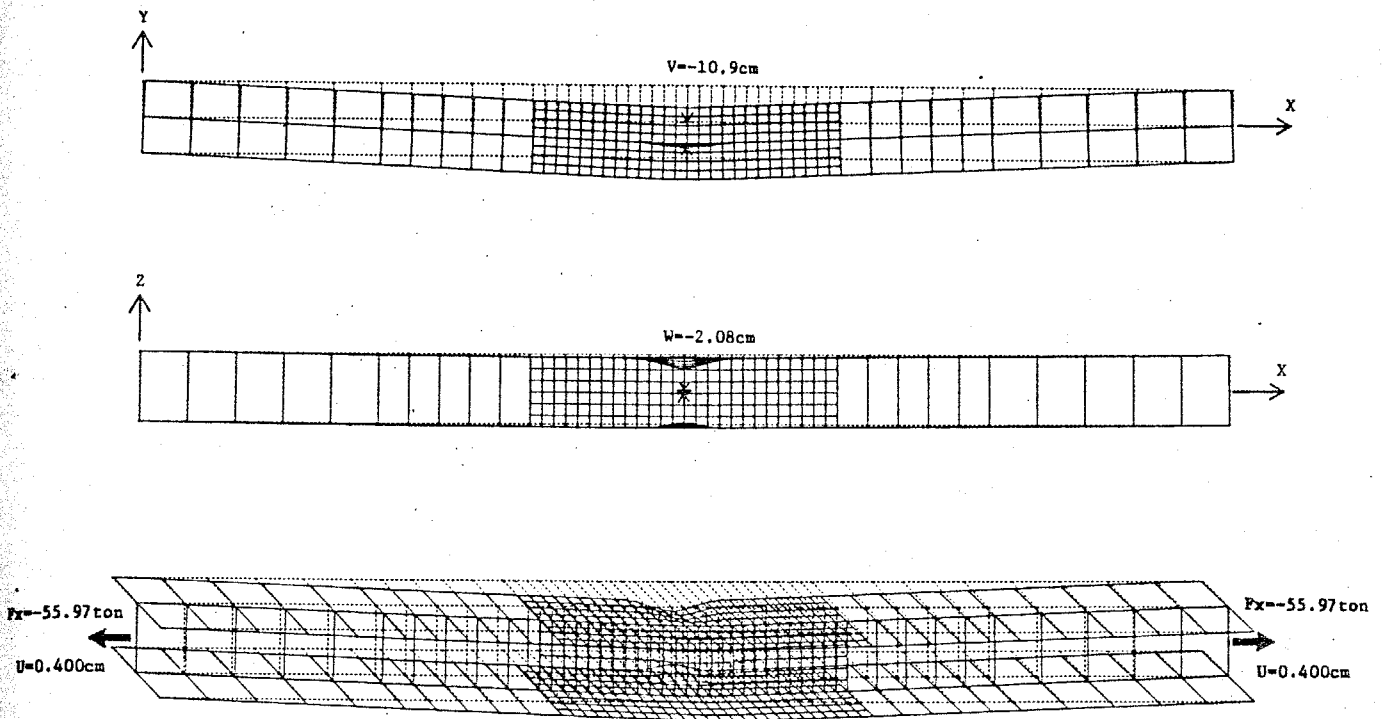
$F_x = 53.96 \text{ ton}$ $U = 0.765 \text{ cm}$ $F_x/P_y = 0.2928$ $U/u_y = 2.9254$



unit=cm

図5. 19 (5) Model-Bの変形状態 no.5

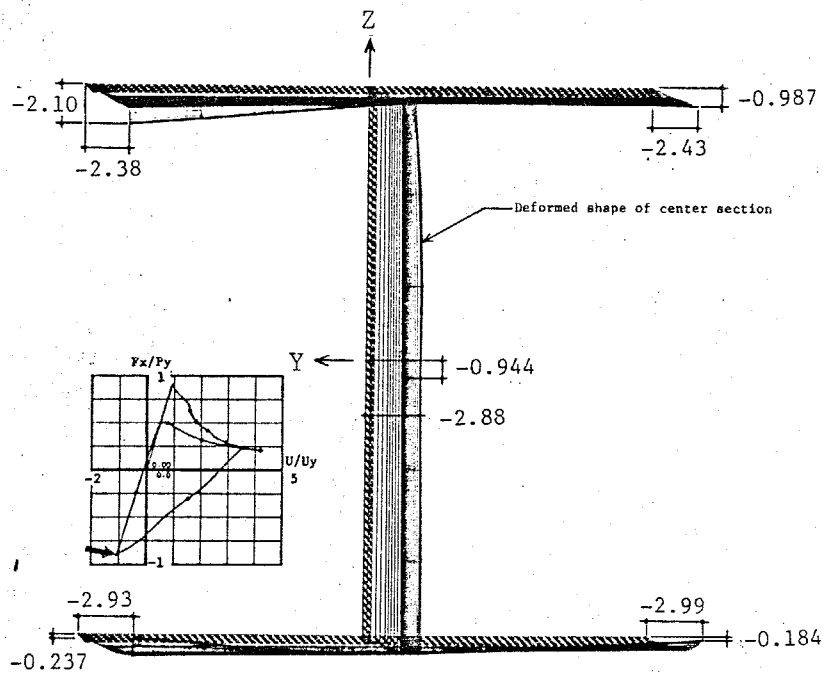
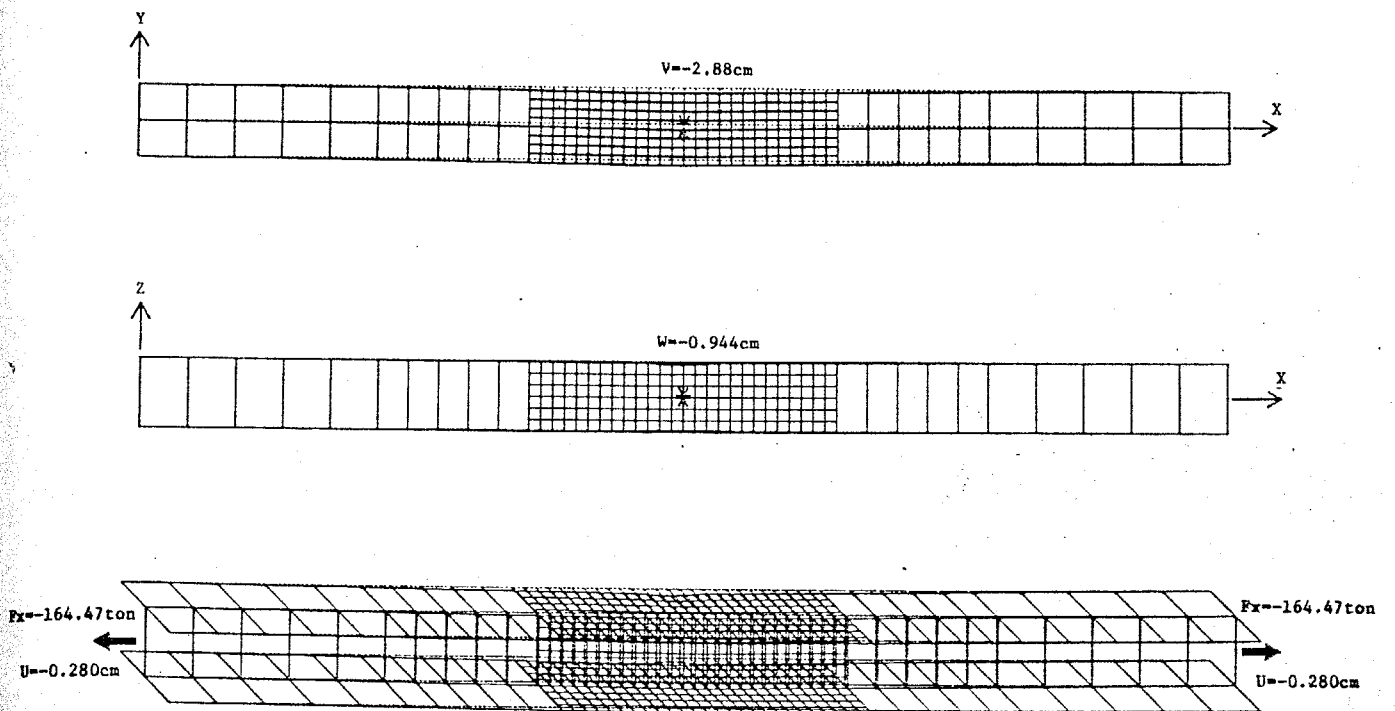
$F_x=44.38\text{ton}$ $U=0.940\text{cm}$ $F_x/P_y=0.2408$ $U/U_y=3.5946$



unit=cm

図5. 19 (6) Model-Bの変形状態 no.6

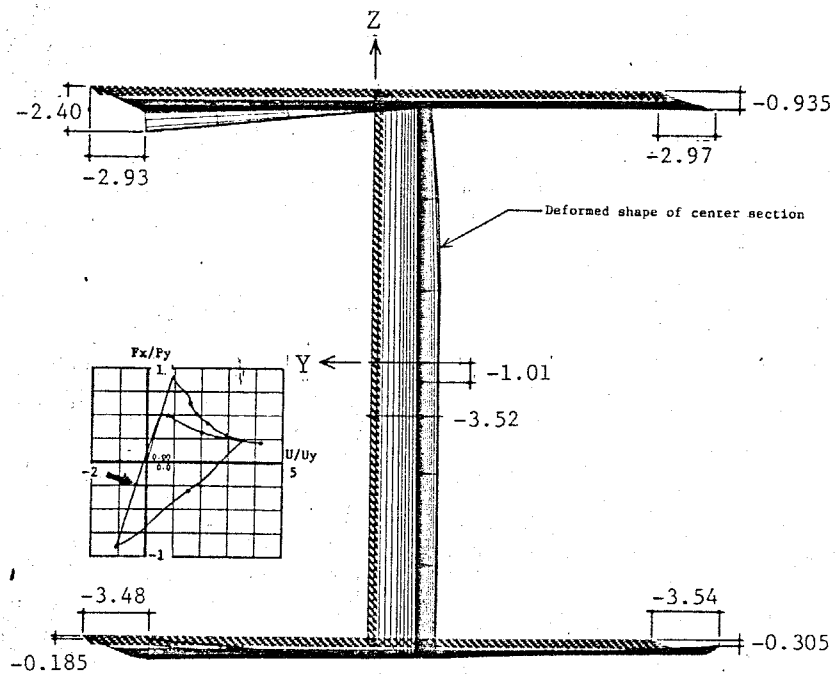
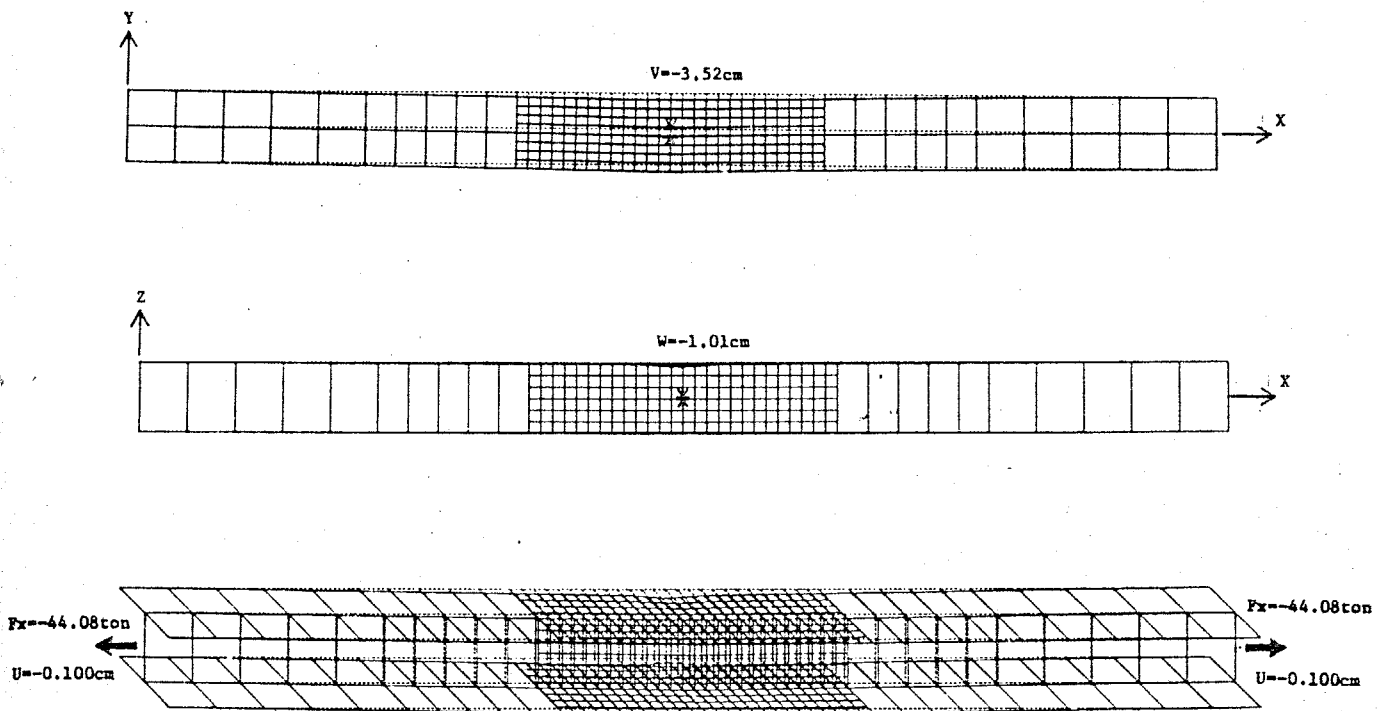
$F_x = -55.97 \text{ ton}$ $U = 0.400 \text{ cm}$ $F_x/P_y = -0.3037$ $U/B_y = 1.5296$



unit=cm

図5. 19 (7) Model-Bの変形状態 no.7

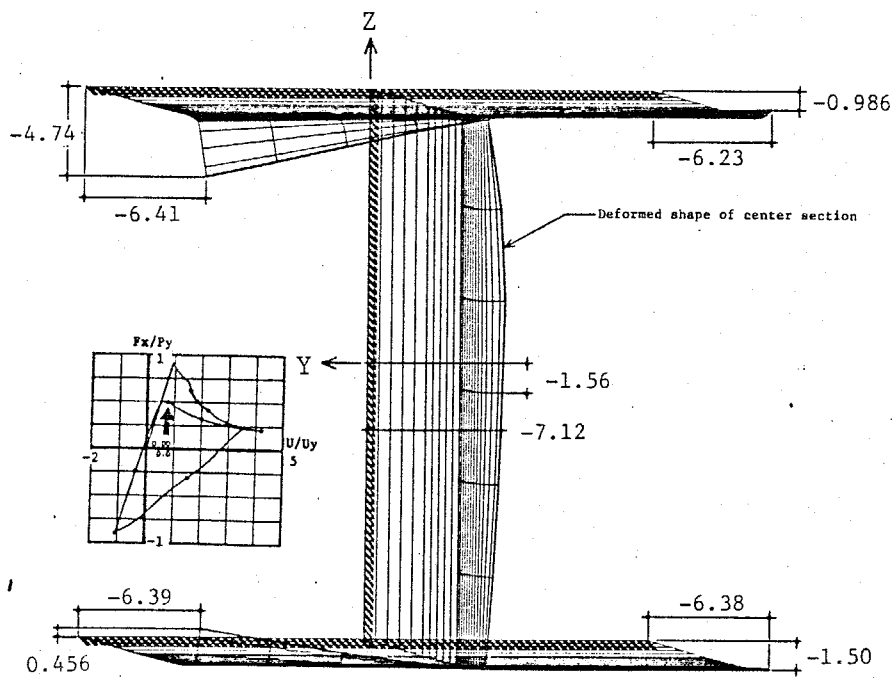
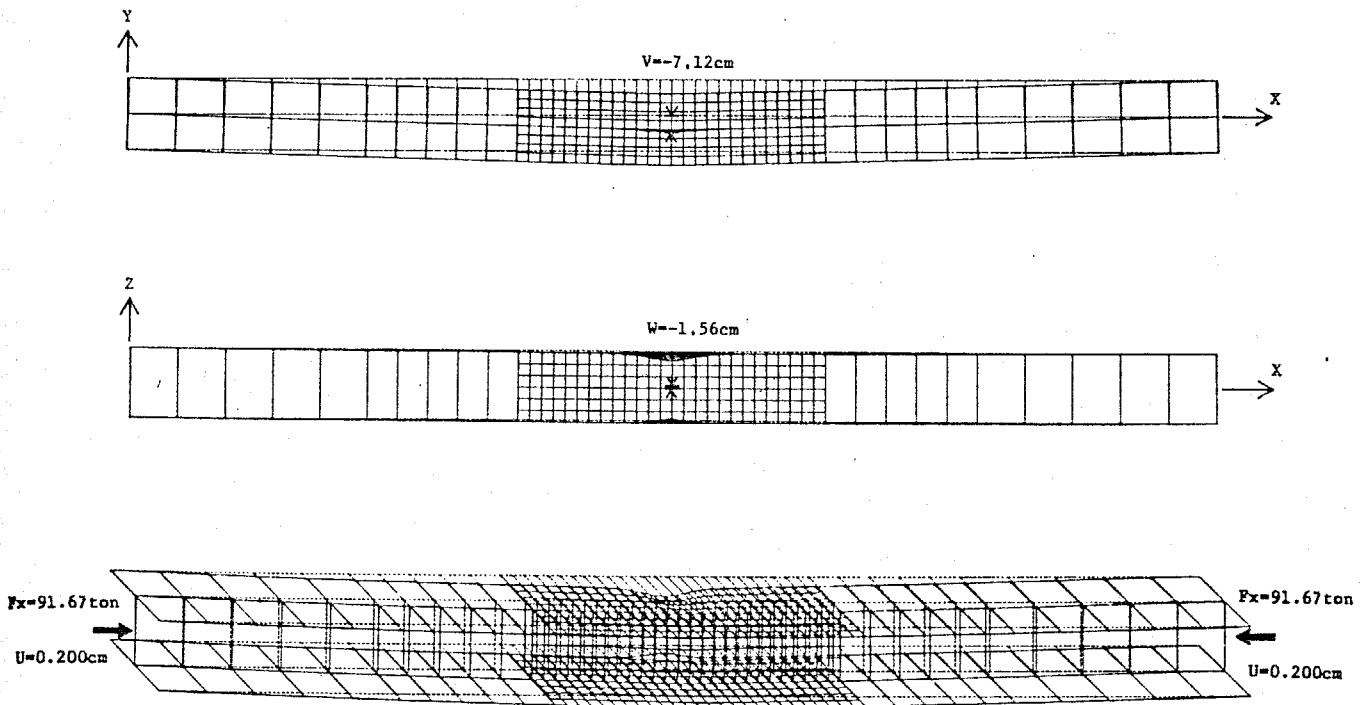
$F_x = -164.47 \text{ ton}$ $U = -0.280 \text{ cm}$ $F_x/P_y = -0.8923$ $U/U_y = -1.0707$



unit=cm

図5. 19 (8) Model-Bの変形状態 no.8

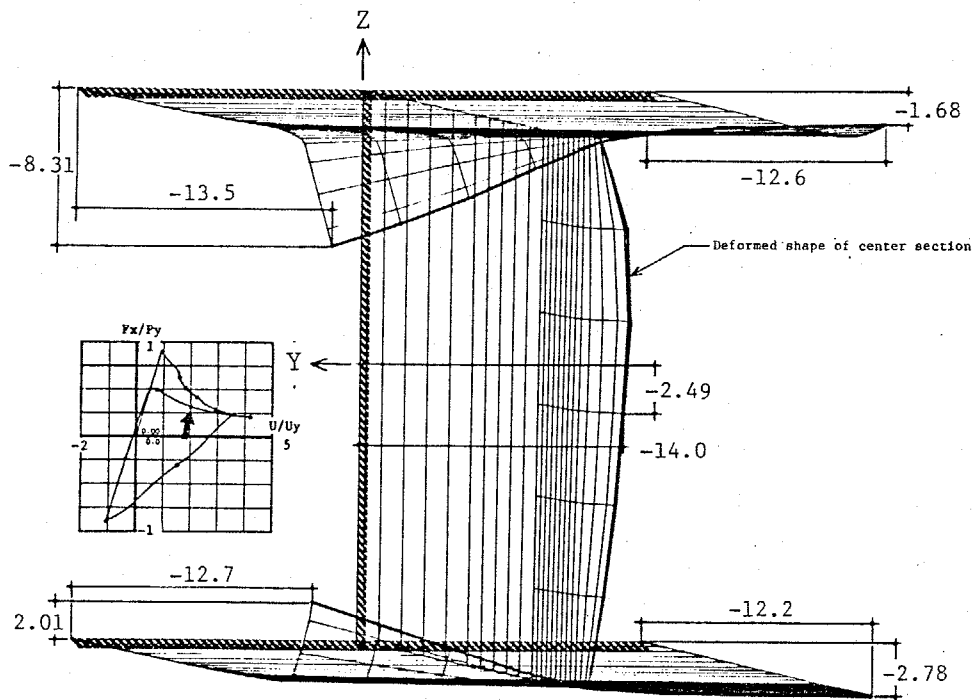
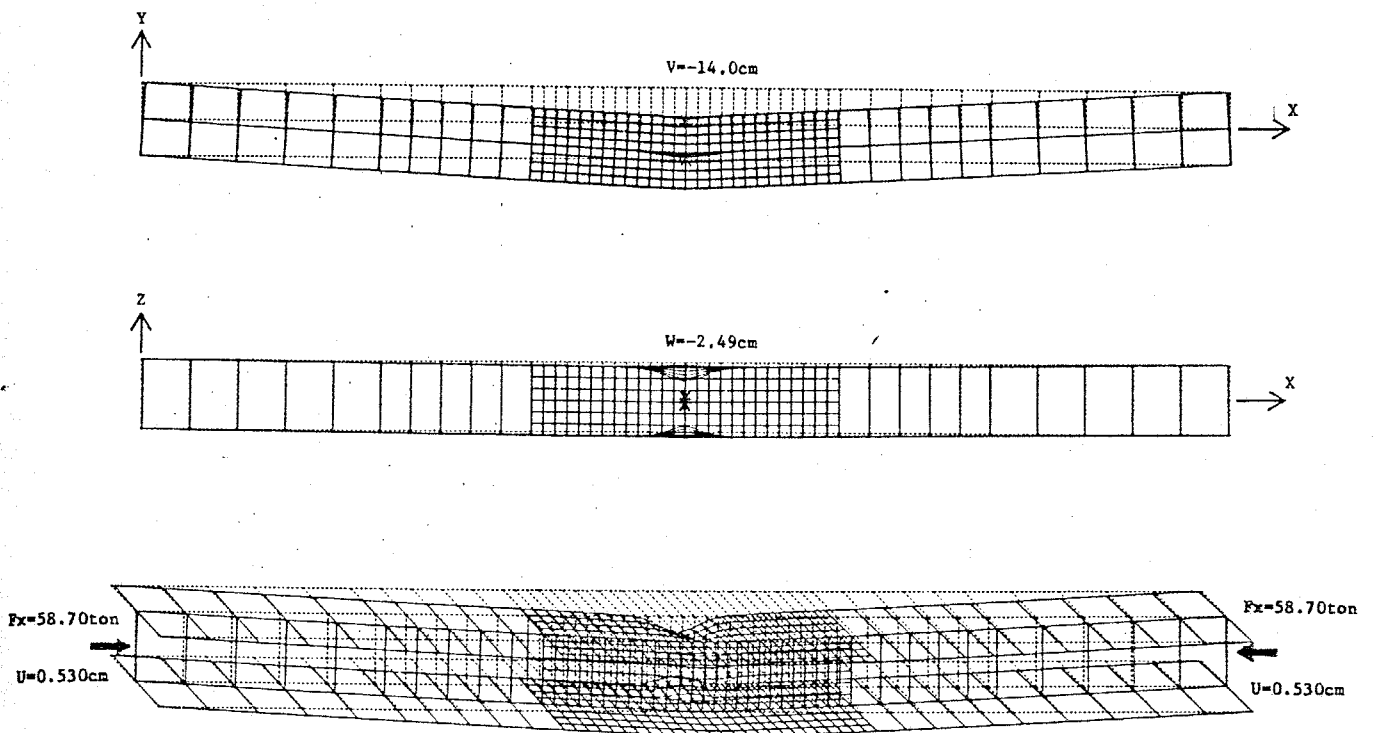
$F_x = -44.08\text{ton}$ $U = -0.100\text{cm}$ $F_x/F_y = -0.2392$ $U/U_y = -0.3824$



unit=cm

図5. 19 (9) Model-Bの変形状態 no.9

$F_x = 91.67 \text{ ton}$ $U = 0.200 \text{ cm}$ $F_x/P_y = 0.4974$ $U/u_y = 0.7648$



unit=cm

図5. 19 (10) Model-Bの変形状態 no.10

$F_x = 58.70\text{ton}$ $U = 0.530\text{cm}$ $F_x/P_y = 0.3158$ $U/U_y = 2.0268$

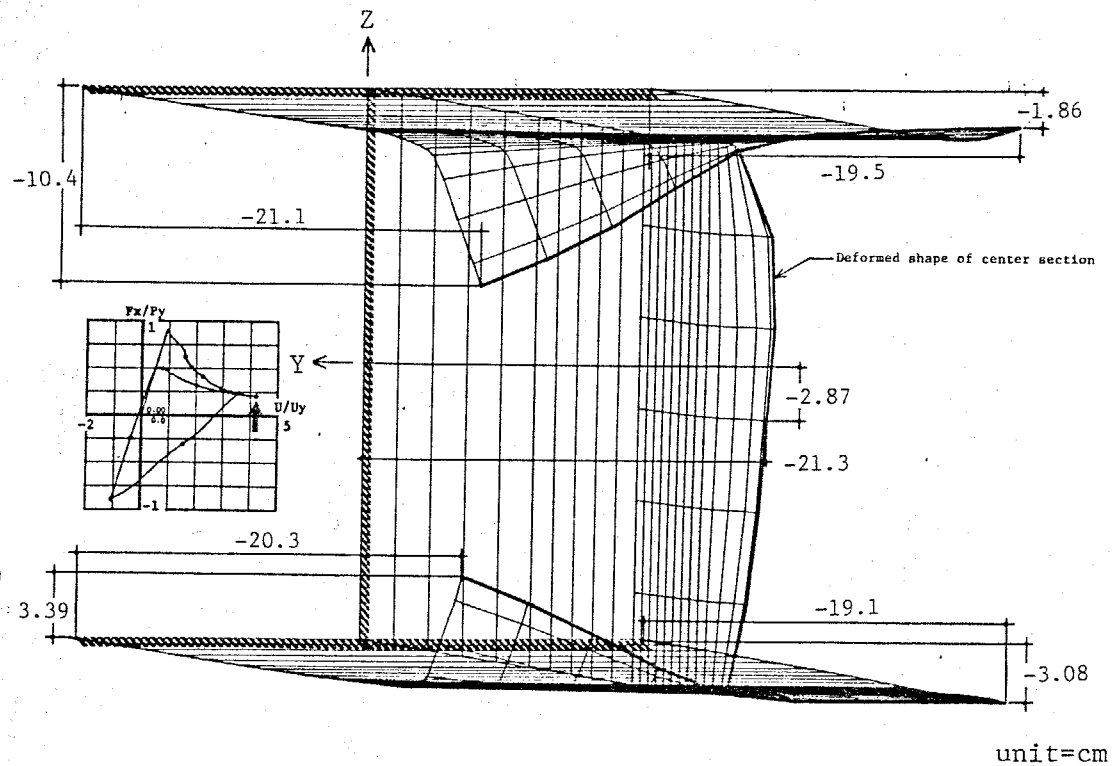
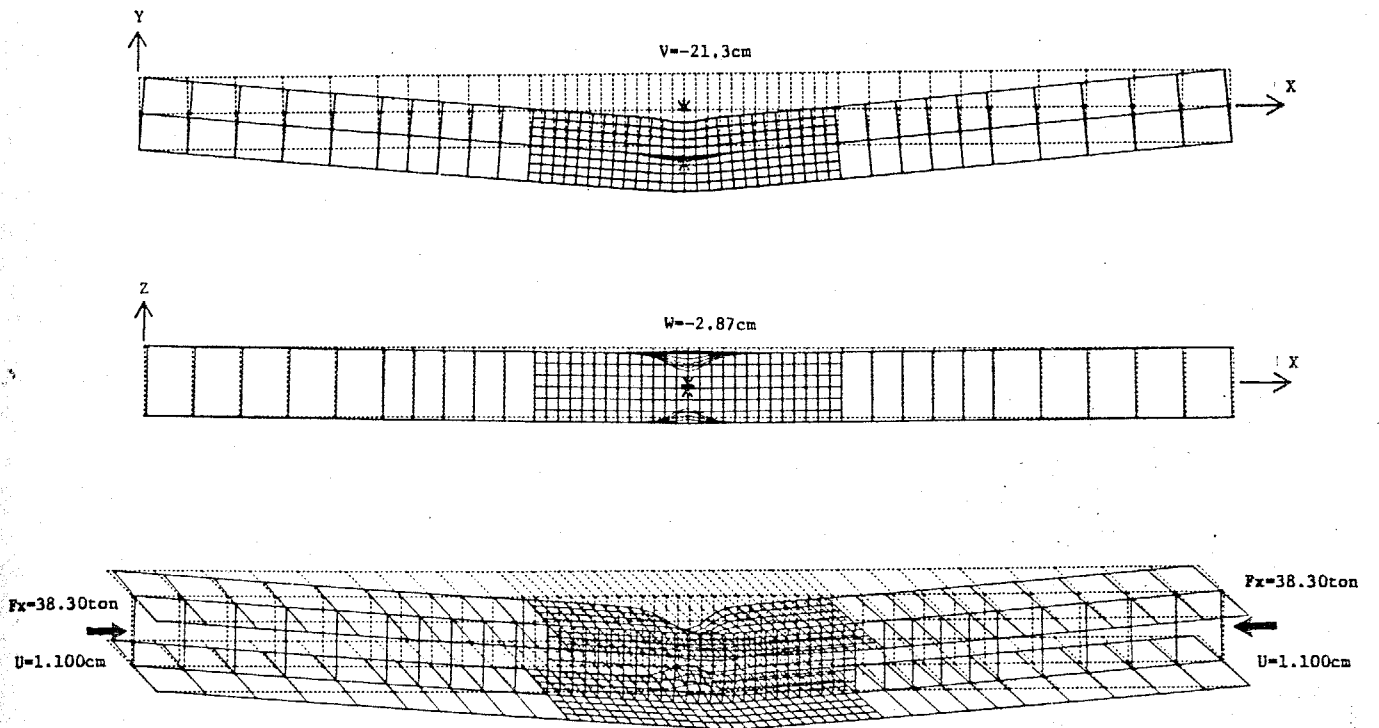


図5. 19 (11) Model-Bの変形状態 no.11

$F_x = 38.30\text{ton}$ $U = 1.100\text{cm}$ $F_x/P_y = 0.2078$ $U/U_y = 4.2065$

(4) 軸力と軸方向変位, 中央断面上の各点の変形との関係
(Model-AとModel-Bを対照) …………… 図 5.20 ~ 5.23

図 5.20 は軸力と軸方向変位の関係を Model-A と Model-B を対照させて示す。 図 5.17 に示したものと同じであるが, 図 5.18, 19 に変形図を示した荷重段階の位置に対応する番号を記してある。

図 5.21 は軸力と中央断面上の 7 点の弱軸方向変位 (v/L) の関係を示している。(a)は Model-A について表わしているが, 7 点とも, ほとんど同一の変位軌跡を示しており, 断面のゆがみが発生していないことが分る。(b)は Model-B について表わしているが, 初期の座屈時にねじれ変形を起し上フランジ (14, 18, 22) の各点の方が下フランジ (0, 4, 8) の各点より大きな横変位を生じている。 以後, 荷重が低下し P/P_{yield} が 0.7 に達するまでは, Model-A と同様の傾向を示しているが, 局部座屈の発生によって, 急激な耐力低下を生じているため, この方向の変位の増加の度合は少なくなっている。

図 5.22 は軸力と中央断面上の 7 点について強軸方向変位 (w/L) の関係を示す。(a)は Model-A について表わしているが, 部材としての座屈は弱軸方向への変位によって発生しているため, この方向の変位量は少ない。(b)は Model-B について表わしている。 部材としての座屈を生じた後, 荷重が低下し P/P_{yield} が 0.7 に達し局部座屈の発生により 上側左フランジの先 (22) が大きく変位し, その後 P/P_{yield} が 0.42 付近にて下側フランジも局部座屈を生じ, 急激に上向きの変位に転じていることが示されている。 逆方向の引張力をうけ P/P_{yield} が -0.9 に達すると, この変位はすべてもとの平面位置へ戻ろうとする方向へ進み, 最高 9 cm まで変位していたフランジ先端は 1.5 cm まで戻ってきている。 再度の圧縮力によって, この板としての変形は急激には増加せず一度極大荷重 ($P/P_{yield}=0.5$) に達した後 2 度目の局

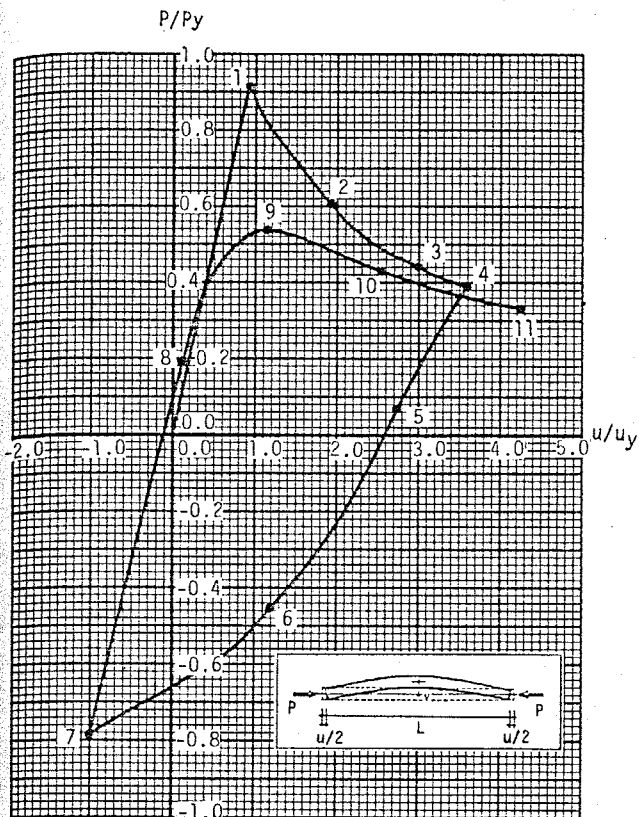
部座屈現象を起こし、変形が急激に増加することが示されている。

図 5.23 は中央断面上の 7 点について、軸力と軸回りの回転角の関係を示す。(a)は Model-A について表わしたものであるが、図 5.22 と同様に局部座屈を生じていないため回転角はほとんどゼロである。この図は(b)に比較して横軸のスケールを 10 倍にして表わしている。(b)は Model-B について表わしたものである。図 5.22 (b)と同様に部材としての座屈の発生時

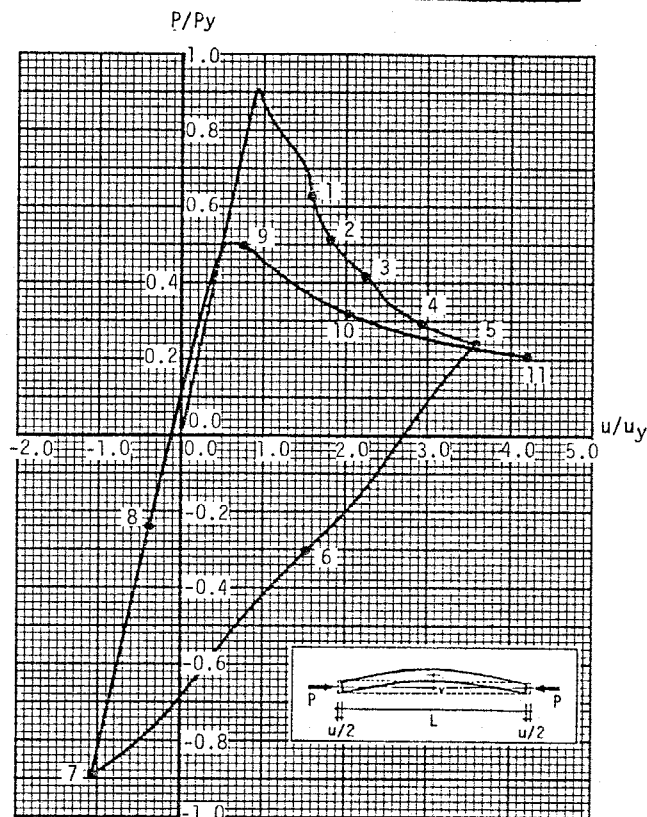
($P/P_{yield} = 0.91$)には、ほとんど回転角を生じていないが、局部座屈の発生とともに大きな回転を生じている。上フランジの端部(22)、ウェブとの接合点(18)が左回りの回転、下フランジの端部(8)、ウェブとの接合点(4)が右回りの回転を生じ、ウェブにも曲げ変形が発生していることが分る。これに反して、部材としての座屈によって凸側の変形をうけている右側のフランジ端部(14,0)は回軸量が少ないことが示されている。この現象は図 5.19(11)図にはっきり表われており、局部座屈時にフランジはウェブとの接合線上で大きく曲げ変形を生じていることになる。

$$P_y = \text{Area} \times \text{Yield-stress}$$

$$u_y = \frac{\text{Yield-stress} \times \text{Length}}{\text{Young's modulus}}$$

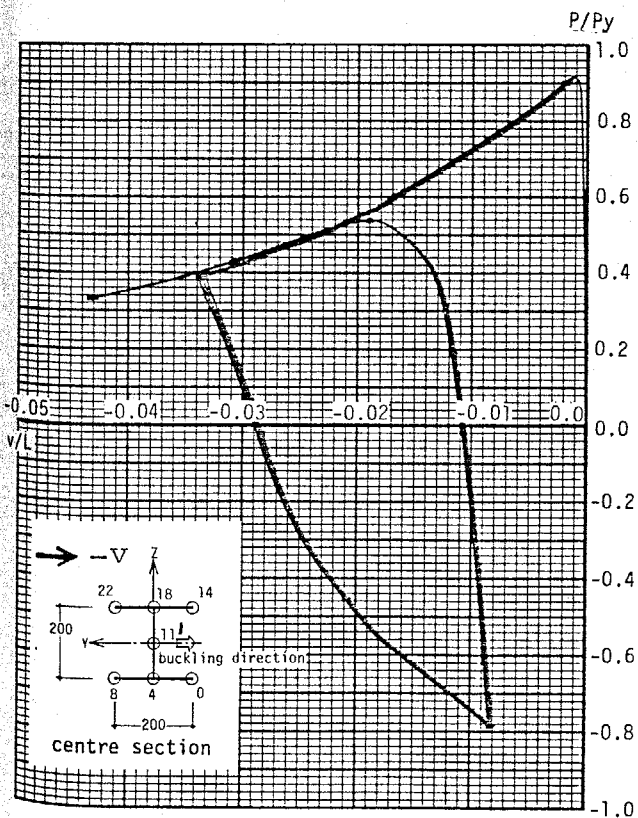


Model-A (200x200x9x15 L=306.6cm)

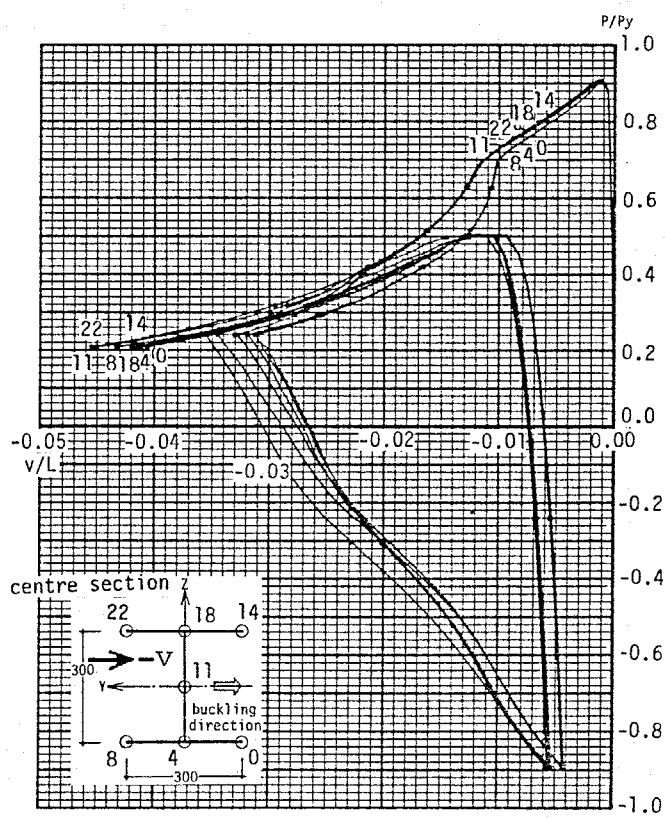


Model-B (300x300x6x10 L=457.6cm)

図5. 20 軸力-軸方向変位の関係

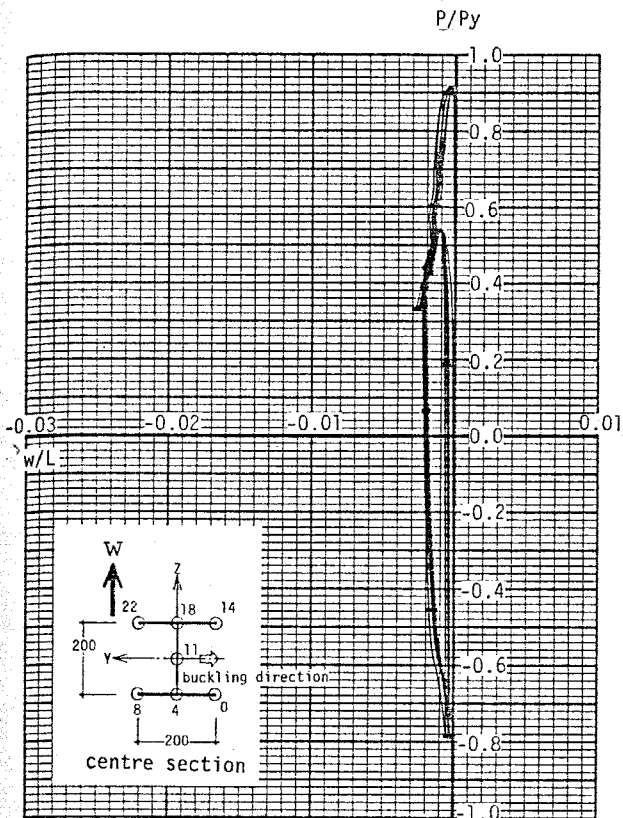


Model-A (200x200x9x15 L=306.6cm)

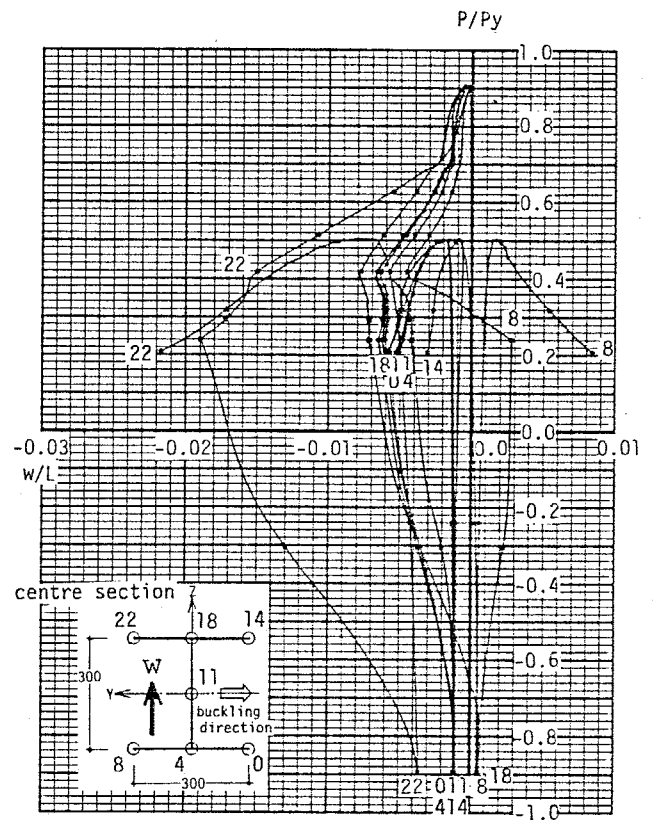


Model-B (300x300x6x10 L=457.6cm)

図5. 21 軸力-弱軸方向横変位の関係 (中央断面上の7節点について示す)

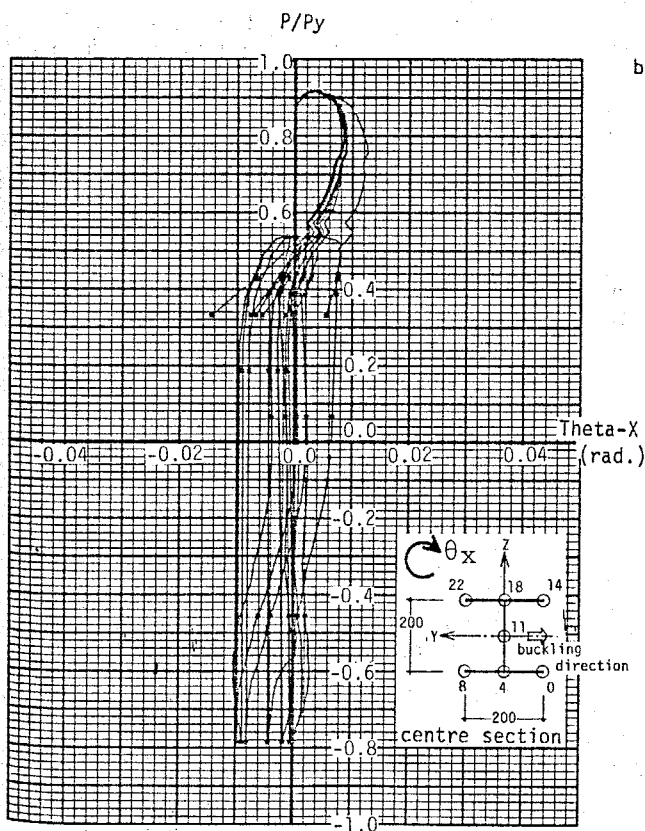


Model-A (200x200x9x15 L=306.6cm)

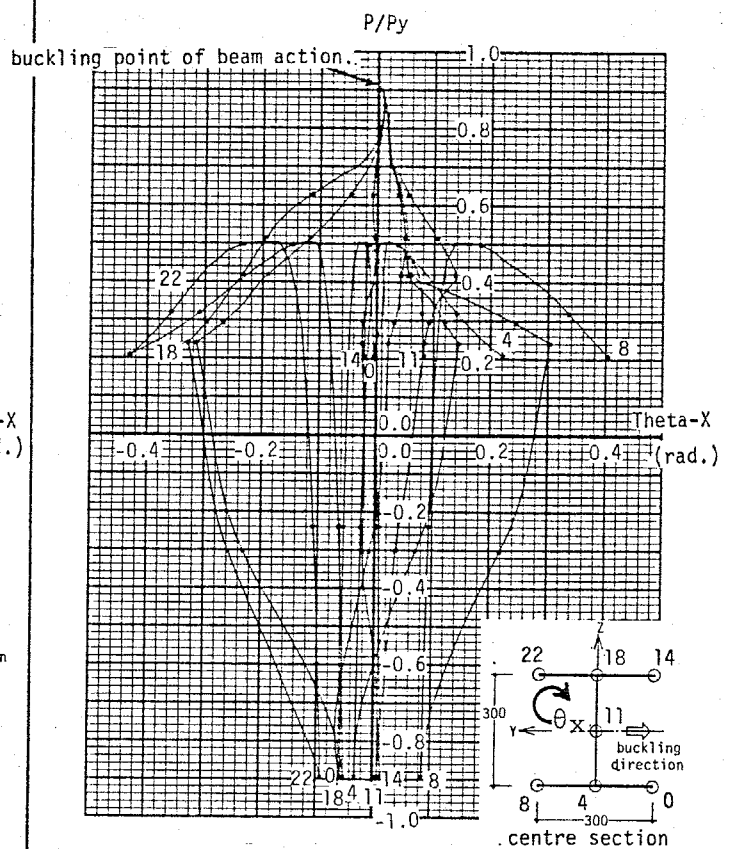


Model-B (300x300x6x10 L=457.6cm)

図5. 22 軸力-強軸方向横変位の関係 (中央断面上の7節点について示す)



Model-A (200x200x9x15 L=306.6cm)



Model-B (300x300x6x10 L=457.6cm)

図5. 23 軸力-軸方向回転角の関係 (中央断面上の7節点について示す)

- (5) 中央断面上の7点について、荷重段階と平均軸歪、軸回りの回転角、強軸方向の横変位の関係 (Model-A) ... 図 5.24(a, b, c)

中央断面上の7点について、荷重段階 ($\Sigma |\Delta u| / u_{yield}$) と軸方向歪の変化を(a)図に示す。 Model-A は塑性設計のための幅厚比の制限を十分に満足しているため、最大歪は 4.6 % に達しているにもかかわらず局部座屈は発生していないことが分る。(b), (c)図は、図 5.22(a), 図 5.23(a) と本質的には同じものを示しているが、中央断面上の7点について、軸回りの回転と強軸方向の変位ともに、Model-B に示す(次図)ものに比較してほとんど変化がないのが特徴である。

- (6) 中央断面上の7点について、荷重段階と平均軸歪、軸回りの回転角、強軸方向の横変位の関係 (Model-B) ... 図 5.25(a, b, c)

Model-B について(5)と同様のグラフを示す。(a)は中央断面上の7点における軸方向の歪を示しているが、上側左フランジが局部座屈を起したときの歪は 1.5 %、下側左フランジが局部座屈を起したときの歪は 1.7 % であることが分る。

(b), (c)図には軸回りの回転角と強軸方向の横変位の変化を示すが、図 5.24(b), (c)に示した Model-A の場合と非常に異なり、局部座屈の発生にともなって急激に変形が進む方向が変化していることがよく表わされている。

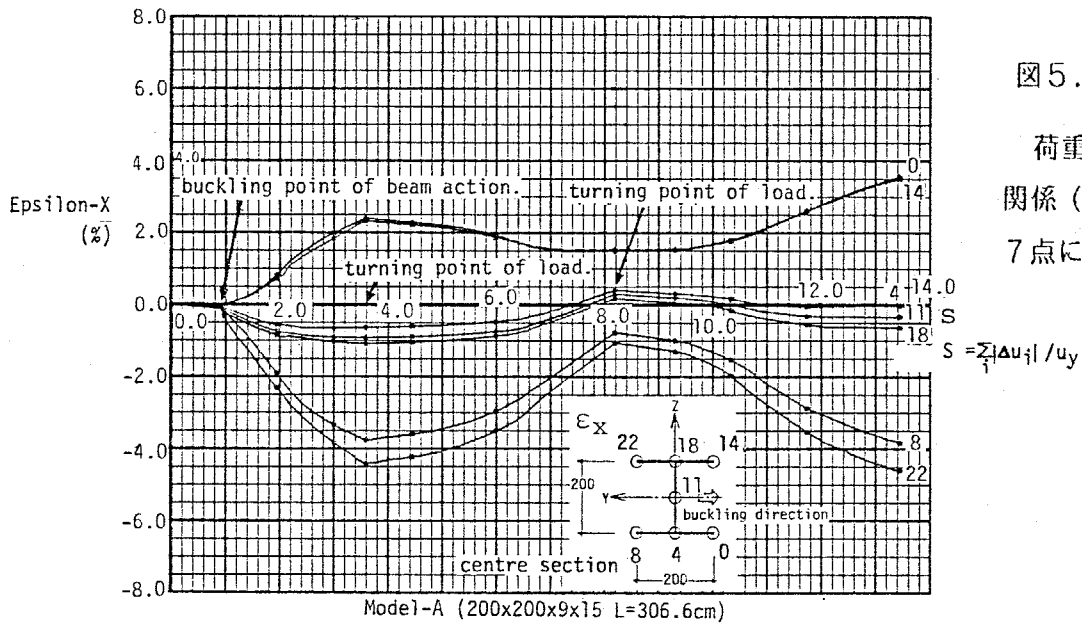


図5.24(a)

荷重段階-軸歪の
関係(中央断面上の
7点について示す)

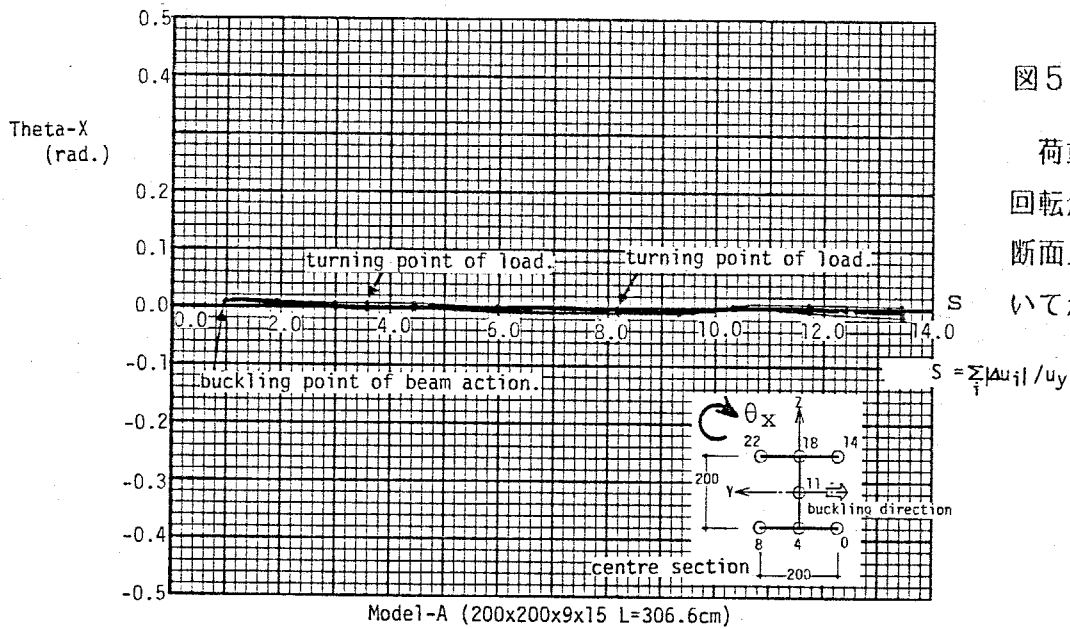


図5.24(b)

荷重段階-軸方向
回転角の関係(中央
断面上の7節点につ
いて示す)

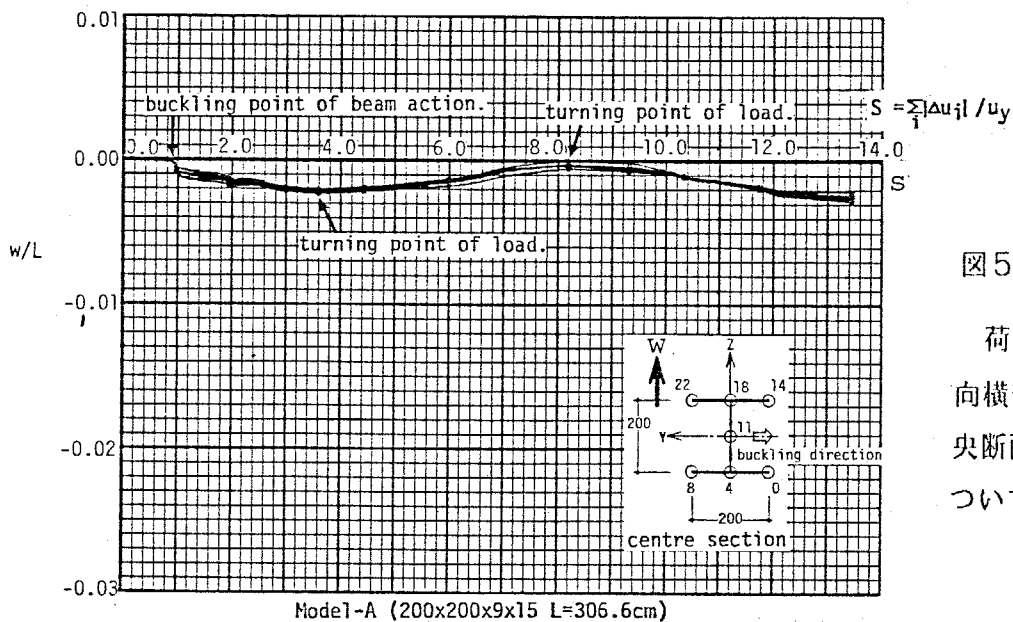


図5.24(c)

荷重段階-強軸方
向横変位の関係(中
央断面上の7節点に
ついて示す)

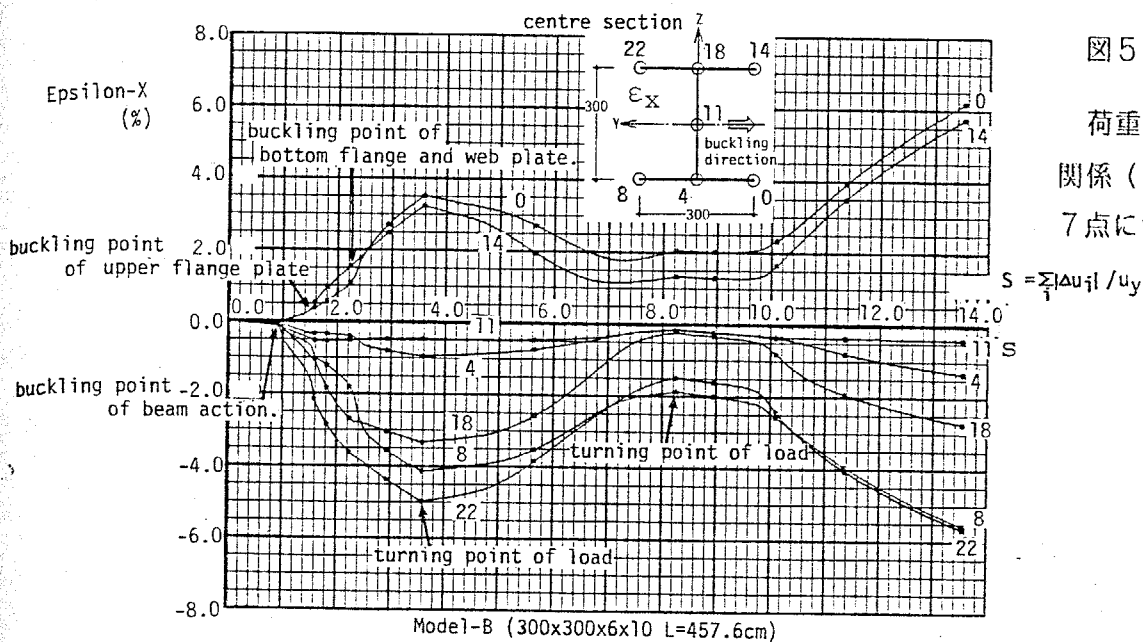


図5.25 (a)

荷重段階一軸歪の関係 (中央断面上の7点について示す)

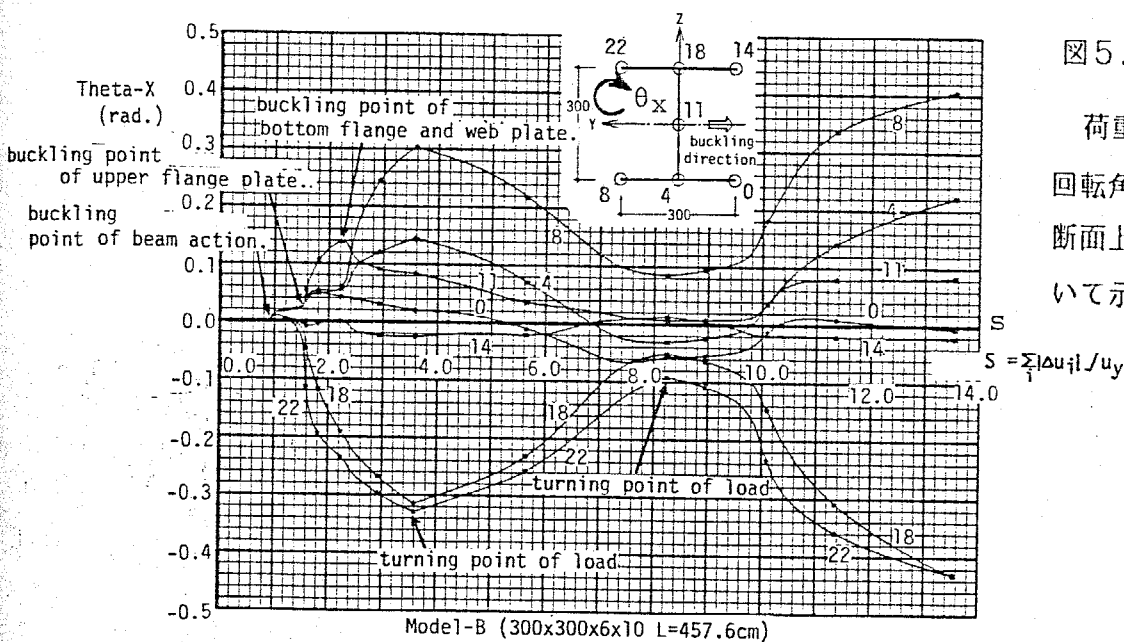


図5.25 (b)

荷重段階一軸方向回転角の関係 (中央断面上の7節点について示す)

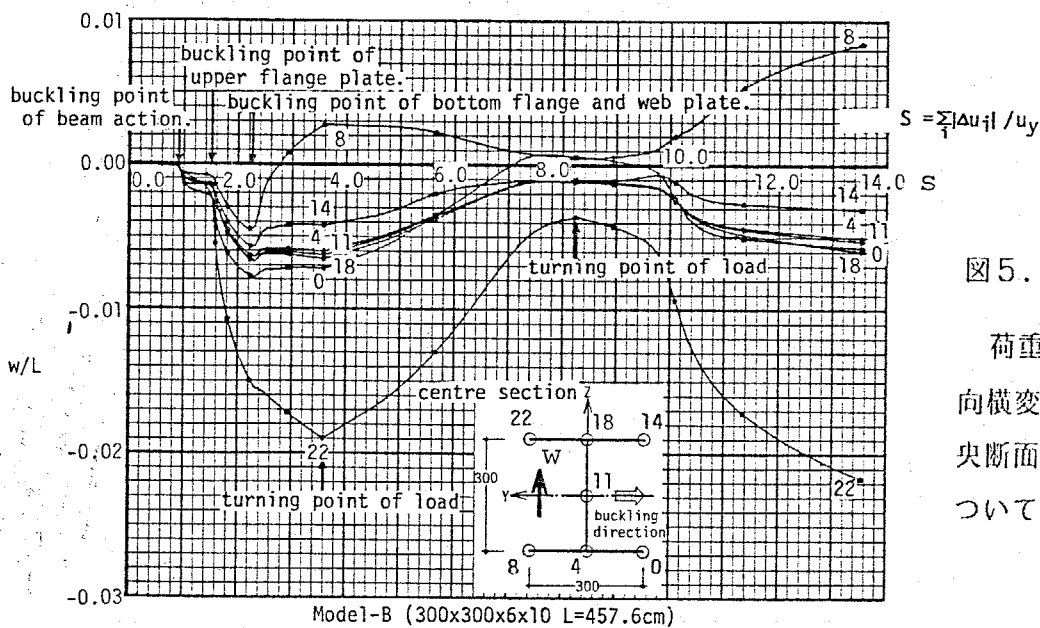


図5.25 (c)

荷重段階一強軸方向横変位の関係 (中央断面上の7節点について示す)

(7) 中央断面における軸方向応力分布の変化 Model-A ... 図 5.26

図 5.26 に、Model-A に

ついて部材の中央断面における材軸方向の応力分布を右図に示すように板厚方向に平均し、降伏応力で除した $\bar{\sigma}_x$ の分布によって、13 段階の荷重段階に応じて示す。

(a) は弾性挙動域を示し、初期曲がりによる偏心曲げモーメントが働いているため、断面内の応力分布は均等ではない。

(b) は最高荷重時を示し、

(c) はその直後に座屈した時の

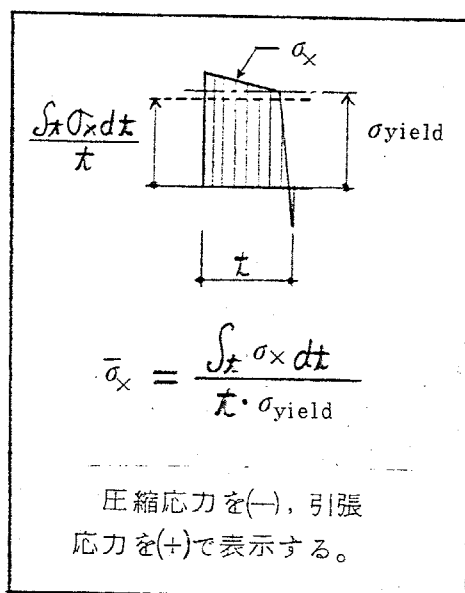
応力状態を示す。上下フランジの左側が圧縮降伏していることが分る。

(b), (e), (f) は、さらに座屈が進行し、フランジの右側も引張降伏して耐力低下を生じている。(g), (h), (i) は引張変位を与えた過程における応力分布の変化を示している。

(f) において最も大きな圧縮応力をうけていた部材の凹側の部材の部分が引張応力状態に転じ、引張応力をうけていた部材の凸側の部分が圧縮応力状態に転じ、徐々に引張応力によって降伏する領域が増してゆくことが示されている。

再度、圧縮変位を与えた過程を(j), (k), (l), (m) に示す。

(k) が 2 度目の座屈時の応力分布を示し、最終的に(f) と類似した分布となって荷重耐力はさらに低下している。



板内部の応力分布と $\bar{\sigma}_x$

distribution of $\bar{\sigma}_x$

$$\bar{\sigma}_x = \int_t \sigma_x dt / \int_t \sigma_{yield} dt$$

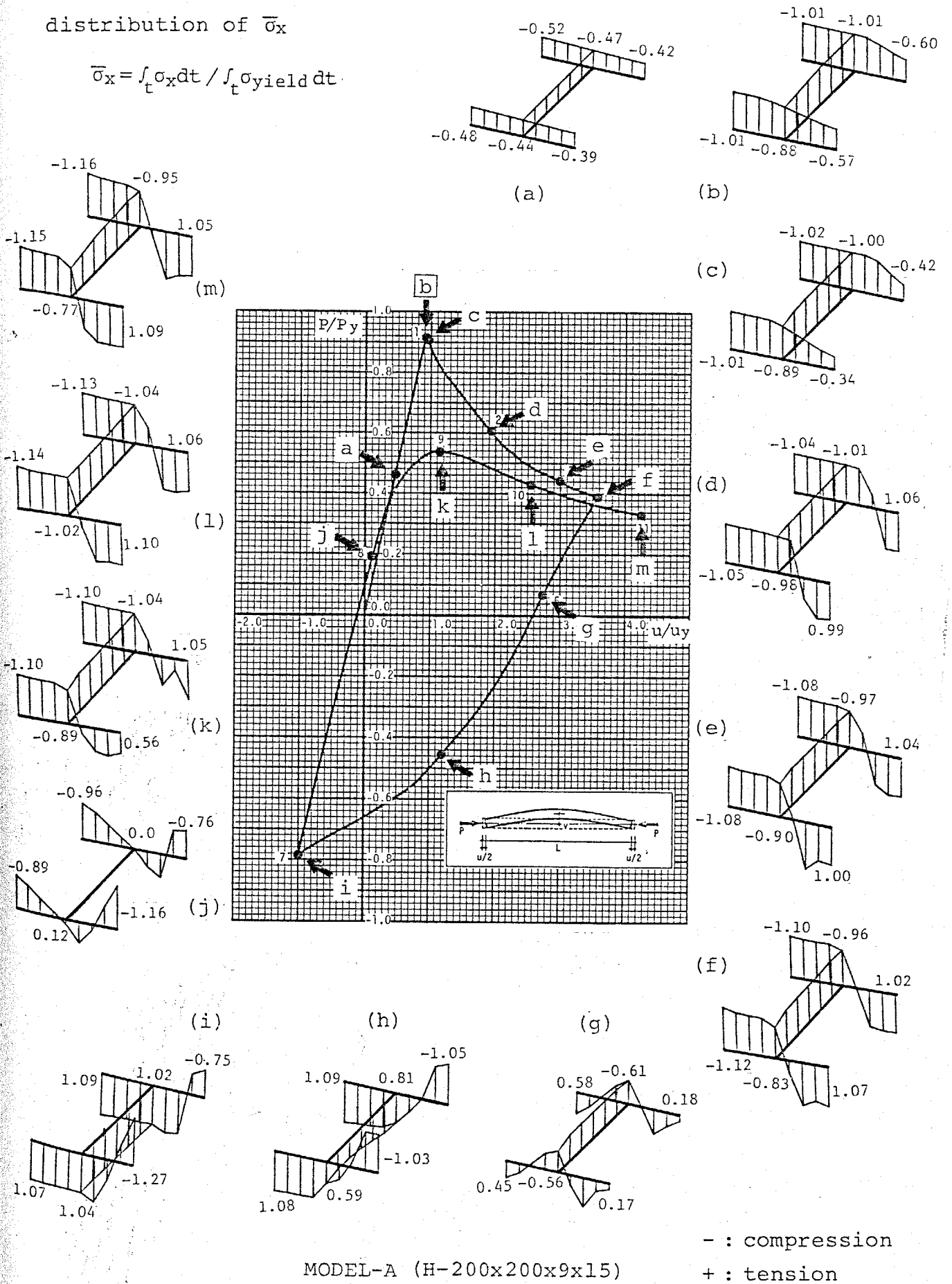


図5. 26 中央断面における軸方向応力分布の変化 (Model-A)

(8) 中央断面における軸方向応力分布の変化 Model-B ... 図5-27

図5-27はModel-Bについて部材の中央断面における材軸方向の応力分布を図5-26と同様に板厚方向に平均し、降伏応力度で除した $\bar{\sigma}_x$ の分布によって15段階の荷重に対応させて示す。この図においても、(-)は圧縮応力を示し、(+)は引張り応力を示している。

(a)は弾性挙動域の応力分布であり、図5-26(a)と同様に初期曲がりによる偏心により、分布形は均等ではない。(b),(c)の過程において部材としての座屈が発生している。ここまでの挙動はModel-Aと酷似である。(d)まで変形が進み軸力が低下した後、(e),(f),(g)の過程において左側上フランジが局部座屈を起こし、(d)では-1.02の圧縮力を負担していたものが-0.43, 0.07, 0.02とほとんど抵抗力をうしなっていることが表わされている。これと同時にウェブの中心部分の耐荷力もウェブの曲がりによってうしなわれていることが分かる。(g)においては-0.99の圧縮力を負担している左側下フランジについても(h),(i)へ進む過程において局部座屈が発生し、-0.23, -0.10と抵抗力を消えていくことが表されている。(j),(k)は引張方向へ荷重の方向を変えた後の応力分布を示している。Model-Aの場合と同様に応力の分布形が反転しているが、局部座屈を生じたフランジの端部は面外に変形してしまっているため、引張力への抵抗能力がなく応力を負担していないことが分る。(l),(m),(n),(o)は再度圧縮変形を与えた過程における分布を示している。すでに1度、局部座屈を生じた両フランジの左側とウェブの中心部分がほとんど耐圧縮力を持っていないことが示されている。

distribution of $\bar{\sigma}_x$

$$\bar{\sigma}_x = \int_t \sigma_x dt / \int_t \sigma_{yield} dt$$

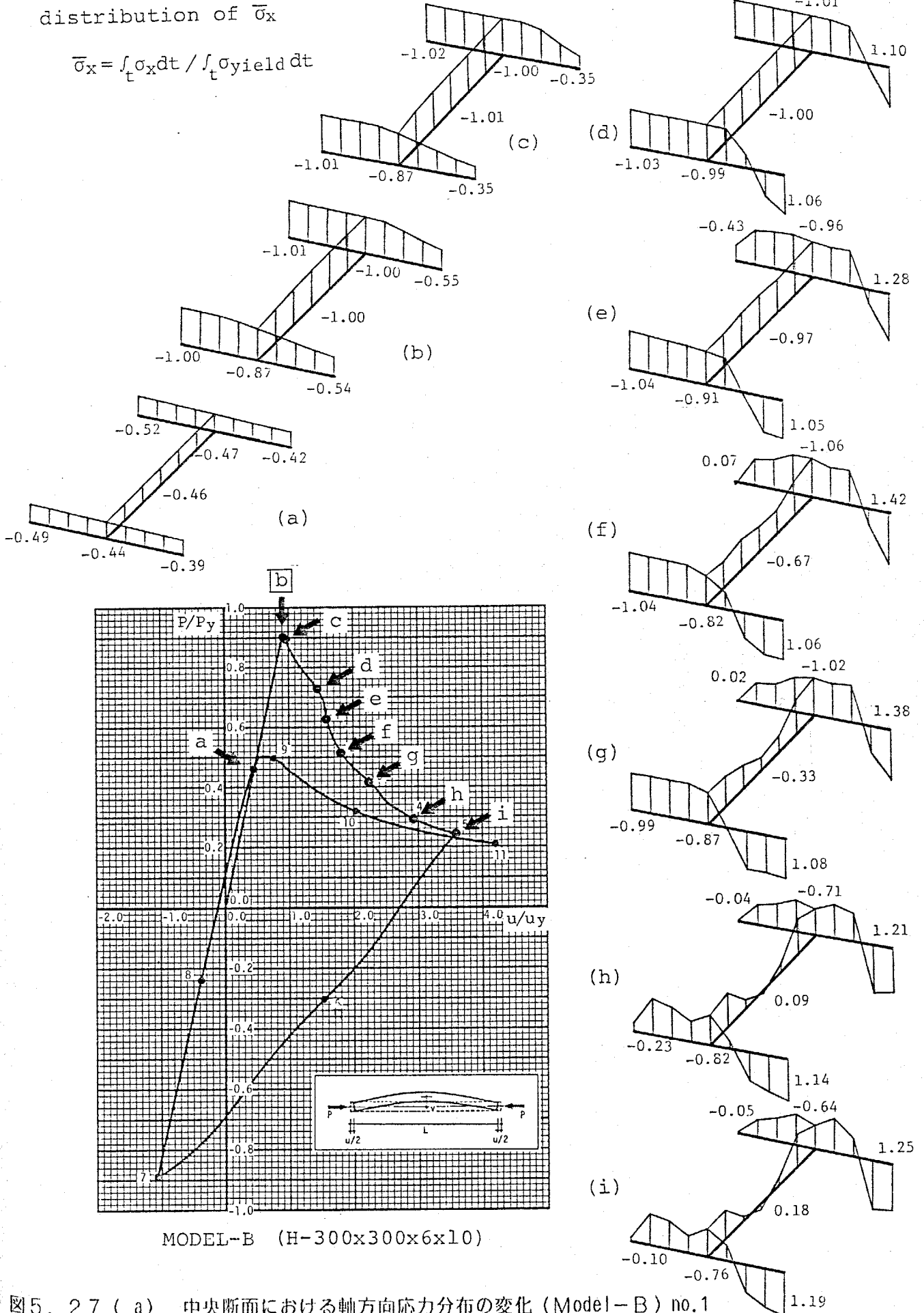
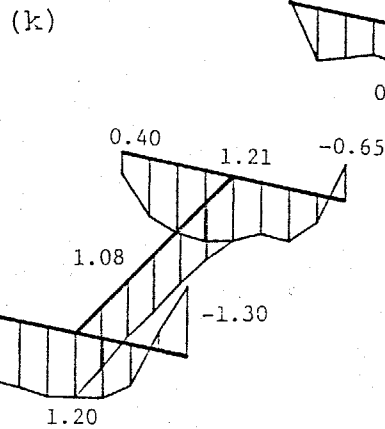
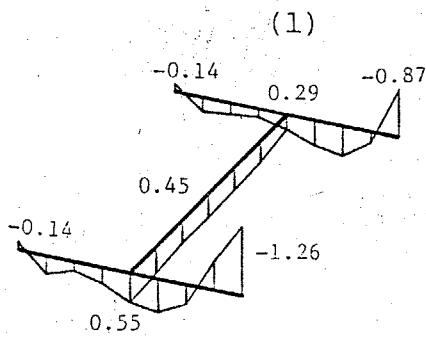
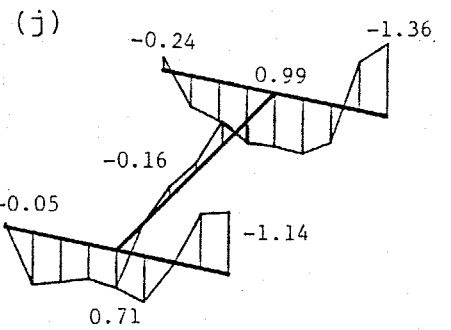
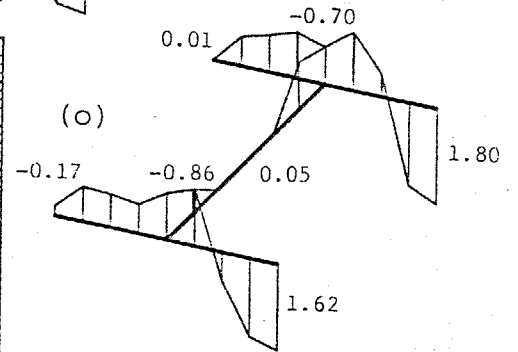
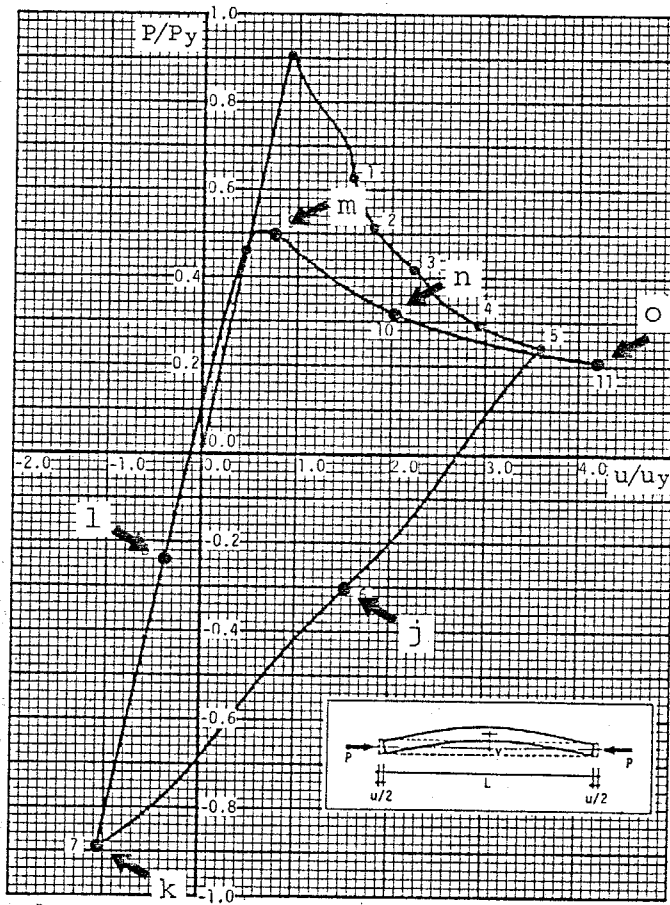
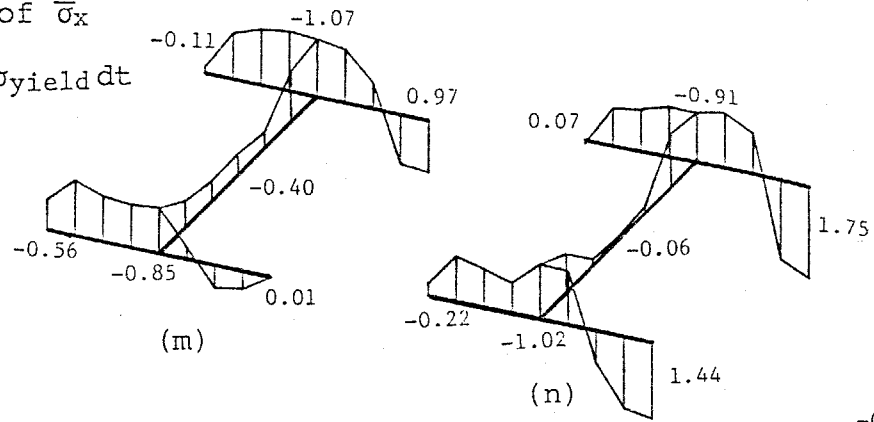


図5. 27 (a) 中央断面における軸方向応力分布の変化 (Model-B) no.1

distribution of $\bar{\sigma}_x$

$$\bar{\sigma}_x = \int_t \sigma_x dt / \int_t \sigma_{yield} dt$$



MODEL-B (H-300x300x6x10)

図5. 27 (b) 中央断面における軸方向応力分布の変化 (Model-B) no.2

4. 断面のゆがみを無視した線材解析との比較

本論文の3章において述べた線材要素を用いた解析法を用いて、断面のゆがみを無視した数値解析をModel-AとModel-Bについて行ない、ここに得られている断面のゆがみを考慮した数値解析の結果と比較する。

(1) 軸力一軸方向変位、弱軸方向横変位の関係 … 図5-28(a, b) 図5-29(a, b)

図5.28に軸力一軸方向変位の関係を示す。(a)はModel-Aについて表わしたものであり、局部座屈を生じていないため、両者の数値解析結果は完全に一致している。(b)はModel-Bについて表わしたものである。

局部座屈の発生によって $u/u_{yield} = 1.5$ 以降の挙動が異なり、断面のゆがみを考慮した解析結果の方が急激な荷重低下を生じていることが分かる。

図5.29は軸力一部材中央の弱軸方向横変位の関係を示す。(a)はModel-Aについて表わしたものであり両解析法による結果は同様の傾向を示し、部材としての座屈の発生とともに急激に横変位が発生し、繰返し荷重によって増減するが同一の曲線を示すことが分かる。(b)はModel-Bについて表わしたものである。図5.28(b)と同様に局部座屈の発生によって $v/L = 0.011$ をこえたところから、断面のゆがみを考慮した解析の結果の方が耐力低下が激しく、繰返し荷重によって2度目の圧縮力をうけた際の曲線も各々1度目と同一の曲線に一致するような関係を示すことが分かる。

$$P_y = \text{Area} \times \text{Yield-stress}$$

$$u_y = \frac{\text{Yield-stress} \times \text{Length}}{\text{Young's modulus}}$$

$$P/P_y \quad u_y = \frac{\text{Yield-stress} \times \text{Length}}{\text{Young's modulus}}$$

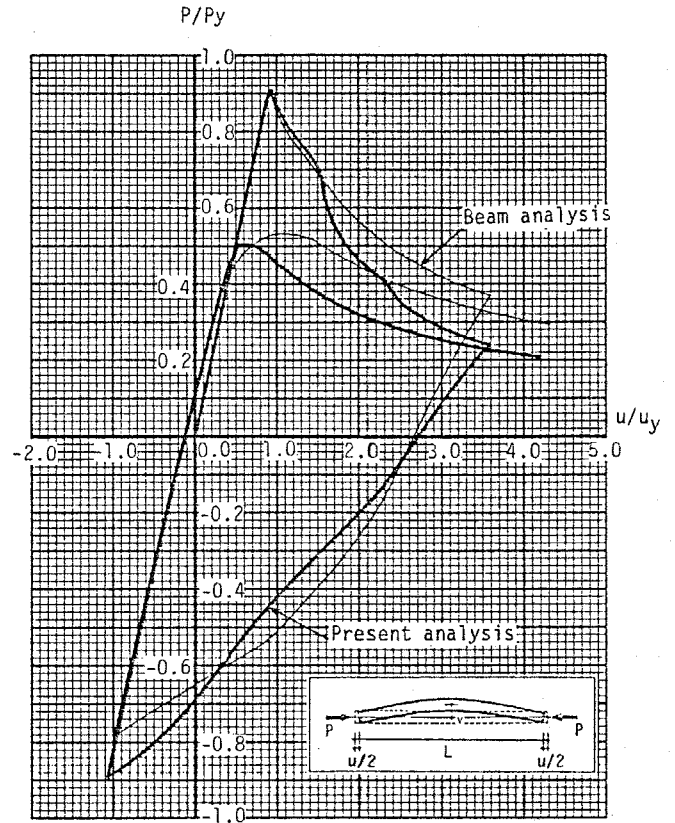
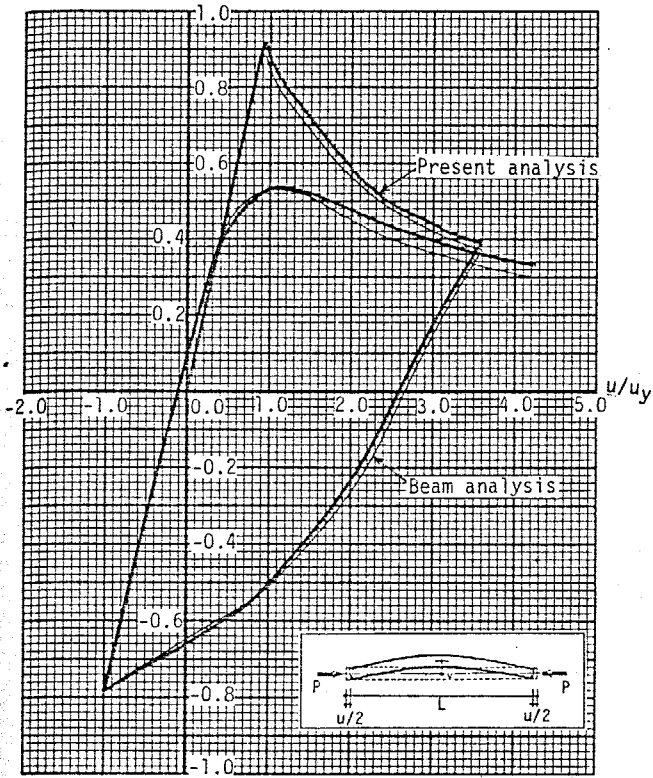


図5. 28 軸力-軸方向変位の関係 (断面のゆがみを無視した解析結果と比較)

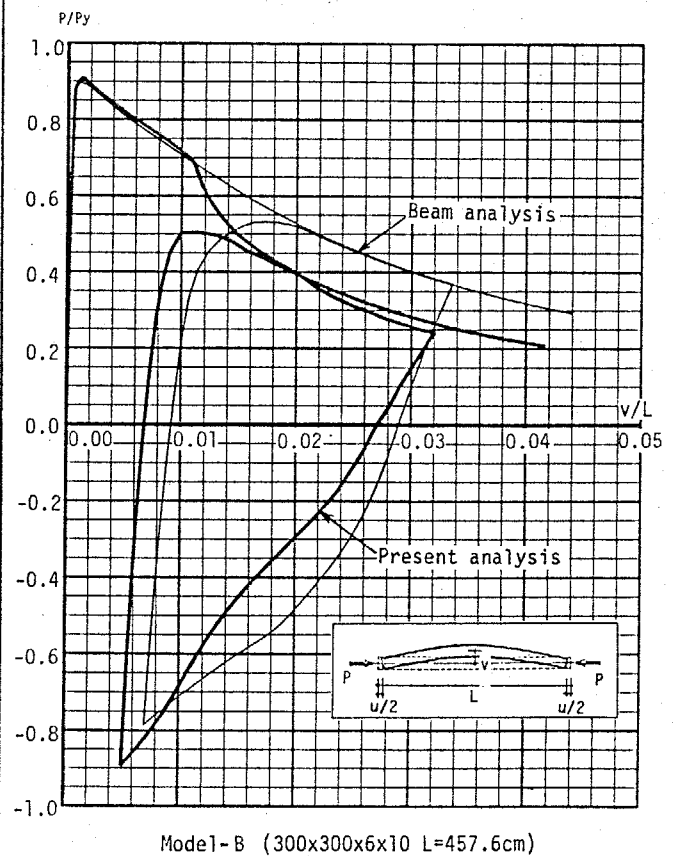
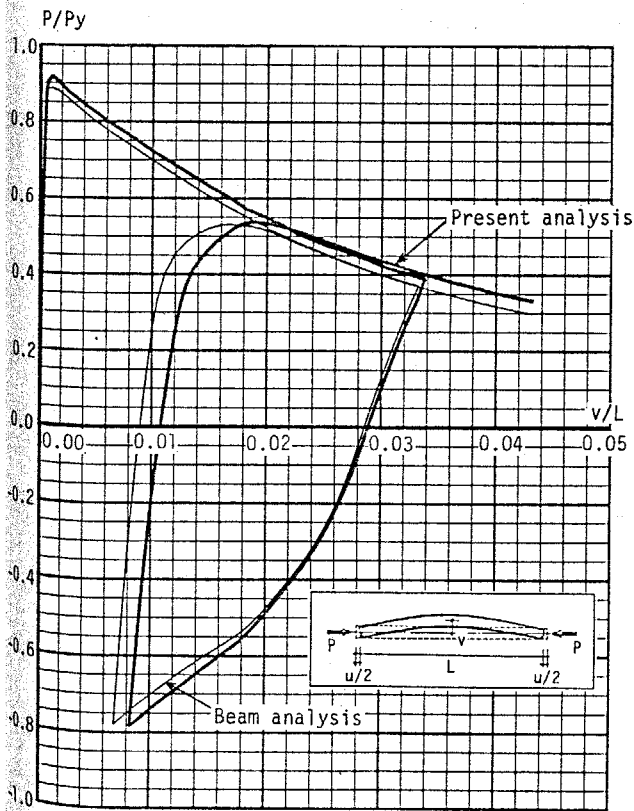


図5. 29 軸力-弱軸方向横変位の関係 (断面のゆがみを無視した解析結果と比較)

(2) 中央断面における、軸力-弱軸回り曲げモーメントの関係

…… 図 5.30 (a, b)

図 5.30 は 部材の中央断面における軸方向応力を (5.41) 式によって積分して得られる軸力-弱軸回り曲げモーメントの関係を示す。

$$\begin{cases} P &= \int_A \sigma_x dA \\ M &= \int_A \sigma_x y dA \end{cases} \quad \dots\dots\dots (5.41)$$

(5.41) において、中央断面は解析上の対称位置であるから g_x 軸に関して法面になっているため P は外力としての軸力に一致し、この位置の弱軸方向の変位を v として M は $P \cdot v$ と一致する。

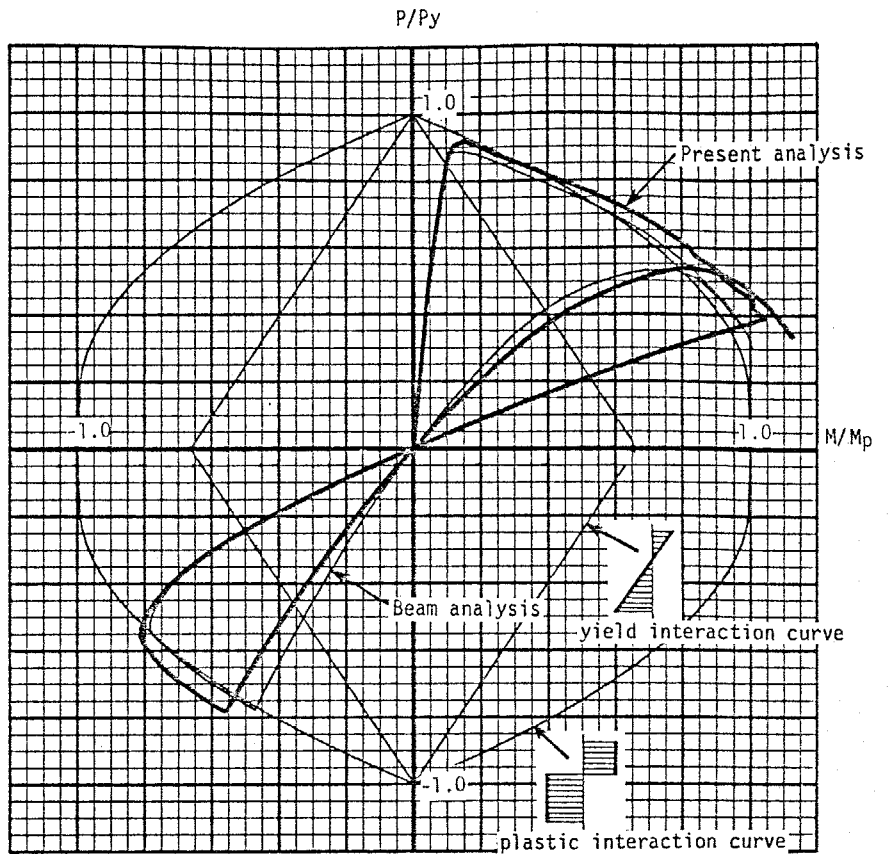
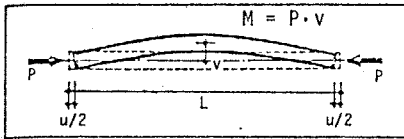
(a) は Model - A について表わしたグラフであり、線材解析と断面のゆがみを考慮した解析の両結果は一致している。初期曲がりによって偏心モーメントが働き、弾性限界を示す相関直線を起えるところから、この関係は曲線を絵画き、完全塑性の相関曲線に接するところで部材としての座屈を生じている。その後、この相関曲線に沿って軸力低下を起こしている。逆方向の引張力を受ける場合については等 3 象限の完全塑性相関曲線に接するまでは直線的に進み、接した後は引張力の上昇する方向へこの相関曲線上を進んでいることが分かる。再度の圧縮力につきとも弾性限界を示す相関直線までは 45° 方向に直線状に進んだ後、完全塑性相関曲線にゆるやかに接して荷重の低下を生じている。

(b) は Model - B について表わしたものである。断面のゆがみを無視した線材解析による結果は (a) に示した Model - A の両解析結果と完全に同一の軌跡を示している。断面のゆがみを考慮した解析結果についても、局部座屈が発する前の関係は前者と完全に一致しているが、 $P/P_y = 0.7, M/M_p = 0.65$ に達した時点において急激に完全塑性相関曲線を離れ耐力劣下を生じていることが表われている。1 度目のくぼんだ曲線は左側上フランジの局部座屈によるものであり、2 度目のくぼみは左側下フランジの局部座屈による耐力劣化を示している。

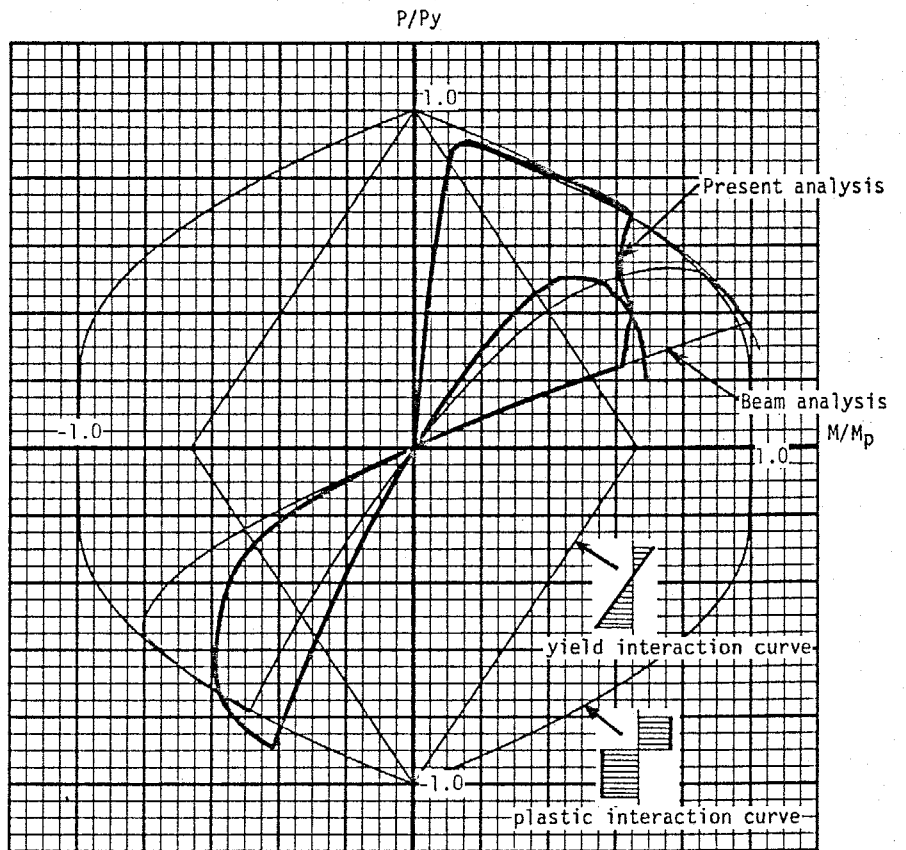
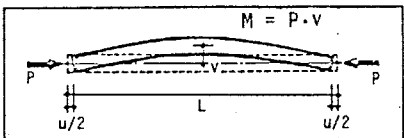
この後の引張力をうける場合の過程については、線材解析と大きな相異はない。しかし再度の圧縮力をうけてゆく過程は線材解析のように完全塑性相関曲線に達することはできず、1度目の同部座屈によって劣化した相関関係に沿うようにして耐荷力を失なっていることが示されている。

以上の結果より、次に示すような現象説明を行うことができる。

部材としての座屈は、断面内の応力が降伏域に進入した直後に発生するため、応力が塑性域に大きく進入した後に発生する局部座屈は、初期の部材全体としての座屈挙動へは影響を与えない。しかし、局部座屈は部材としての座屈変形が進んだ後に発生するので、座屈後の挙動へ大きな影響を与え、さらに座屈後に繰返し荷重をうける場合に、重要な影響を与える。



Model-A (200x200x9x15 L=306.6cm)



Model-B (300x300x6x10 L=457.6cm)

図5. 30 中央断面上における、軸力-弱軸回り曲げモーメントの関係

第6章

結 論

6・1	結論	166
6・2	今後の研究課題	169

6・1 結 論

本論文では、増分ポテンシャルエネルギーの停留原理にもとづき、歪エネルギーをすべて数値積分によって計算する方法を用いて、繰返し荷重をうける鋼構造骨組の弾塑性大変形解析の理論を展開し、この解析法により、今まで難解とされていた柱、梁などのねじれ変形も考慮した3次元非線形挙動、これらを立体的に組立てた立体骨組の非線形挙動及び部材を構成する板の変形による断面のゆがみを考慮した鋼構造部材の非線形挙動などについて、統一的な考え方のもとで数値解析を行うことができることを示した。

〔第1章〕は序論であり、数値解析によって鋼構造骨組の3次元弾塑性大変形挙動を解明するために行った本研究の背景、既往の研究との対比について論じた。

〔第2章〕は繰返し荷重をうける鋼構造骨組の3次元弾塑性大変形解析法に関して、以下の章において論じる各種のモデル化の方法に共通な一般論を論じた。3章において線材構造、4章において板構造、5章において両者を一体化して解析する場合に、この一般論を用いて理論展開を行っている。この一般論に従い、応力-歪関係のモデル化及び増分歪を増分変位の2次の項以下の多項式によって表わすことができれば、他の構造材料、構造についても3次元弾塑性大変形解析を行うことが可能である。

〔第3章〕は2章の一般論に従い、繰返し荷重をうける線材構造の3次元弾塑性大変形解析理論について論じた。本文では、弾性大変形問題として

「ELASTICA」を数値解析し、楕円積分解を用いて得られている解析解と比較して完全に両者が一致することを確認した。さらに、弾塑性問題として解析解の得られている、中央集中荷重をうける単純支持された弾完全塑性梁について数値解析を行い両者の結果が完全に一致することを示した。付録には繰返し軸力をうける部材の弾塑性座屈挙動、圧縮力と2軸曲げをうける柱の3次元弾塑性大変形挙動、梁の弾塑性横座屈挙動、構面内座屈を起すK形筋違をもつラーメンが繰返し水平力をうける場合の挙動、構面外座屈を起し梁にねじれ変形を生じさせるようなK形筋違をもつラーメンが繰返し水平力をうける場合の

挙動等について数値解析を行い、実験結果と比較検討を行い本理論の有効性を示した。

〔第4章〕は2章の一般論に従い、繰返し荷重をうける板構造の3次元弾塑性大変形解析理論について論じた。ここで導いた理論の特徴は、板の面外変位についてだけでなく面内変位についても大変形項を考慮していることにある。これによって5章でこの理論を組立てて鋼構造部材の解析を行う際に、部材としての弾塑性座屈挙動を追跡することが可能となっている。本文では、弾塑性大たわみの代表的問題である、等分布荷重をうける周辺完全固定正方形板について数値解析を行い、1942年、NACA(National Advisory Committee for Aeronautics)に S. Levy が "Square Plate with Clamped Edges under Normal Pressure Producing Large Deflections" の表題で発表している解析解と比較し本理論の検証を行った。付録には、片持長方形板について面外座屈挙動、面内座屈挙動を数値解析した例について示している。

〔第5章〕は3章に述べた線材理論と4章に述べた板構造に関する理論を集大成し、鋼構造部材の構成要素である板の変形を考慮しつつ部材の解析を行なう解析理論について論じた。この章において繰返し軸力をうけるH形鋼部材について、断面のゆがみを考慮しつつ部材としての弾塑性座屈挙動を数値解析によって追跡した。本解析理論は一般的に展開してあるため、上記の問題以外に軸力と繰返し2軸曲げをうける柱の柱脚または柱頭に発生する局部座屈の挙動、曲げモーメントとせん断力をうける梁が横座屈する際にしばしば発生する局部座屈の挙動とその後の繰返し力に対応する挙動等についても応用できる。これらの問題の中で最も急激に荷重低下を生じ、断面内の応力状態が急変するのは、ここで扱った繰返し軸力下における問題であるから、その他の問題について十分に適用性の高い理論であると考えられる。この数値解析により、いくつか興味のある結果が得られているが、特に部材の中央付近の板の変形状態の変化および中央断面における応力を積分して得られた軸力と曲げモーメントの相関曲線を示した図において、局部座屈発生後には明らかに耐力の劣下を生じ、フランジ

の先端及びウェブの中央が耐力上ほとんど無効になってしまう挙動を具体的に表わせたことが、大きな特徴である。

以上、1章から5章までをまとめたが、本研究において展開した理論は、これまで比較的困難とされてきた繰返し荷重をうける鋼構造骨組の不安定現象ともなり弾塑性挙動を解析できる点、および実験では得ることのできない部材内部の応力分布などの把握が可能である点から、今後十分に活用できる解析法であると考えられる。

さらに本研究における大きな特徴は荷重除荷時および座屈の発生時等に生じる歪のもどりを正しく扱うことに重点をおき、繰返し荷重を対象としている点にある。建築構造以外の研究分野では、死荷重による鉛直荷重時の応力状態が支配的である場合または繰返し数が非常に多く疲労問題となってしまう弾塑性大変形の問題にはならない場合等が多く、大きな繰返し荷重をうける場合の挙動についての研究はほとんど行われていない。しかし我国の建築構造では、重力に対する抵抗より、水平方向の繰返し力を大きく問題としなくてはならないため、本論文で扱ったような繰返し荷重をうける鋼構造骨組の弾塑性大変形挙動について解析的な研究は重要である。

6・2 今後の研究課題

本論中および付録の中に、採用した数値解析例を考察した結果、本理論の妥当性が十分に裏付けられ、本解析法が非常に有効な手段であることが分ったので、さらに多くの数値解析を行い鋼構造骨組の弾塑性大変形挙動を明らかにしてゆくと同時に、今後、別の種類の構造形式の構造に関する解析へと理論を拡張し、研究を進めてゆきたいと考える。

序論においても述べたように、実験との対比が、このような研究を進めてゆく場合には最も重要であるから、本論文の5章5節において示した2つのH形鋼について繰返し軸力による座屈実験を行う機会を得るよう努力するとともに、さらに他の問題についても、実験による研究と解析による研究を平行して進め鋼構造骨組の弾塑性大変形挙動のメカニズムを明らかにしてゆきたいと考えている。

将来は、電子計算機の大型化、高速化がさらに進むと考えられるので、3章において述べた線材解析の方法により動的解析を行うことおよび5章において述べた断面のゆがみを考慮した鋼構造部材の解析法によって立体骨組の静的、動的解析を行うことも可能になるであろう。このように解析対象の規模を大きくするのも一つの希望であるが、本論文中に扱ったような部材の数値解析を多くの断面形状、細長比について行い、座屈後の挙動を一般的に説明できるようなまとめを行うことも必要であると考えている。

参考文献	172
------------	-----

筆者の発表した論文	192
-----------------	-----

付 録

付録-A 本研究が紹介されている「骨組構造解析法要覧」 からの抜粋	199
付録-B 2次形式で表わされた関数に関する変分原理	200
付録-C <i>Elastica</i> の理論を Theory of Elastic Stability より抜粋	202
付録-D 1942年NACAに発表された等分布荷重をうける 大たわみ板の解析解の抜粋	205
別冊付録 本研究に関連して筆者が発表した論文集録	

参考文献

本研究を行うにあたって参考とした文献を12の分類に分け、次頁より表にして示す。

分類	内容
1	一般, 歴史
2	エネルギー理論, 変分原理
3	有限要素法
4	大変形問題 - 線材理論 -
5	大変形問題 - 板曲げ理論 -
6	大変形問題 - 局部座屈, 板座屈と線材座屈
7	弾塑性解析 - 線材理論 -
8	弾塑性解析 - 板曲げ理論, 平面応力理論 -
9	弾塑性大変形解析 - 線材理論 -
10	弾塑性大変形解析 - 板曲げ問題 -
11	弾塑性大変形解析 - 局部座屈, 全体座屈 -
12	実験的研究

参考文献 1 (一般, 歴史)

番 号	著 者	文 献 名	発 行
1.1	藤本盛久編著	鉄骨の構造設計	技報堂 1972.10
1.2	中原 一郎	材料力学の歴史(上, 下)	材料力学・養賢堂 1965
1.3	高橋 慶夫	「鉄骨構造は木造にかわって登場した」(近代構造史の概要) むずかしくない鉄骨構造	鋼材倶楽部 1968
1.4	LAMBERT TALL	1.3 Historical Notes "STRUCTURAL STEEL DESIGN"	RONALD, 1974 RONALD
1.5	仲 威雄 横尾義貫 田中 尚 坪井善勝 石崎潑雄 小堀鐸二 山田 稔 梅村 魁 多田英之	建築構造物の安全性と信頼性	建築雑誌 昭和50年8月号
1.6	Bogdan O. Kuzmanovic	HISTORY of THE THEORY of BRIDGE STRUCTURES	ASCE. ST 5 1977.5
1.7	柴田 碧 高梨晃一 伊藤 学 山口勇男	鋼構造物における安全性, 信頼性	日本鋼構造協会 1977.6
1.8	鋼構造協会安全性信 頼性総合研究班 (小西一郎委員長)	鋼構造物の安全性・信頼性	JSSC 1977.12

参考文献 2 (エネルギー理論, 変分原理)

番号	著者	文献名	発行
2.1	寺沢 寛一	数学概論	岩波書店 1931
2.2	寺沢 寛一 編	数学概論(応用編)	岩波書店 1960
2.3	O. C. Zienkiewicz	the Finite Element Method (Third Edition)	McGraw-Hill 1977
2.4	J. T. Oden	Mechanics of Elastic Structures	McGraw-Hill 1967
2.5	林 毅, 村 外志夫	変分法(応用数学講座)	コロナ社 1958
2.6	P. G. Bergan T. Soreide	A Comparative Study of Different Numerical Solution Techniques as Applied to a Nonlinear Structural Problem	Computer Method in Applied Mechanics and Engineering 2 1973
2.7	吉田 裕	有限要素法の基礎としての変分原理 に関する一考察	土木学会論文報 告集 1974.12

参考文献 3 (有限要素法)

番 号	著 名	文 献 名	発 行
3. 1	O. C. Zienkiewicz G. S. Holister	Stress Analysis	John Wiley & Sons Ltd 1965
3. 2	O. C. Zienkiewicz	the Finite Element Method (third edition)	McGraw-Hill 1977
3. 3	J. T. Oden	Finite Elements of Nonlinear Continua	McGraw-Hill 1972
3. 4	Richard H. Gallagher	Techniques for the Derivation of Element Stiffness Matrices	AIAA JOURNAL 1963.6
3. 5	Leonard R. Herrmann	Finite-Element Bending Analysis for Plates	ASCE.EM5 1967.10
3. 6	Jerome J. Conner & Carlos Brebbia	Stiffness Matrix for Shallow Rectangular shell Element	ASCE.EM5 1967.10
3. 7	Michael A. Crisfield	Finite-Element Bending Analysis for Plates	ASCE.EM2 1968.4
3. 8	Robert D. Cook	Finite-Element Bending Analysis for Plates	ASCE.EM3 1968.6
3. 9	G.R.Cowper, E.Kosko, G.M.Lindberg M.D.Olson	Static and Dynamic Application of a High- Precision Triangular Plate Bending Element	AIAA JOURNAL 1969.10
3.10	G.von Fuchs, E.Schrem	ASKA-A Computer System for Structural Engineers	Stuttgart Univ. I.S.D. 1969
3.11	Y. R. Rashid, P. D. Smith, N. Prince	On Further Application of the Finite Element Method to Three-Dimensional Elastic Analysis	A Colloquium of IUTAM 1970.8

番 号	著 者	文 献 名	発 行
3.12	山田 嘉昭	解析解と数値計算	日本機械学会誌 1971.6
3.13	Yoshiyuki Yamamoto	Convergence Rate of the Initial Strain Technique	JSSC-STAN 例会資料 1972
3.14	吉田 裕 雨宮栄一郎 増田 陳紀	立体構造解析のための薄板有限要素 法	JSSC-STAN 例会 1972
3.15	James A. Stricklin, Joe R.Tillerson,	Curved Finite Elements by the Method of Initial Strains	AIAA JOURNAL 1972.2
3.16	吉田 裕 雨宮栄一郎 増田 陳紀	立体構造解析のための薄板有限要素 A Flat Finite Element for Thin Shell Analysis Derived by Assumed Stress Approach	土木学会論文報 告集 1973.3
3.17	河田 幸三 西田 正孝 山田 嘉昭 吉村 信敏 山本 善之 宮本 博	有限要素法と実験力学の分担領域に ついて	日本航空宇宙学 会誌 1973.12
3.18	菊地 文雄	アーチのビームによる折れ線近似の 妥当性について	JSSC-STAN 例会 1973
3.19	菊地 文雄	平板, かくの有限要素解析で用い得 るある近似の妥当性について	JSSC-STAN 例会 1974.1

参考文献 4 (大変形問題—線材理論)

番 号	著 者	文 献 名	発 行
4. 1	M.J. TURNER E. H. DILL H. C. MARTIN R. J. MELOSH	Large Deflection of Structures Subjected to Heating and External Loads	Journal of the Aero/ Space Sciences 1960.2
4. 2	William P. Rodden, John P. Jones, Pravin G. Bhuta	A Matrix Formulation of the Transverse Structural Influence Coefficients of an Axially Loaded Timoshenko Beam	AIAA Journal 1963.1 (Technical notes)
4. 3	Richard H Gallagher Joseph Padlog	Discrete Element Approach to Structural Instability Analysis	AIAA Journal 1963.6 (Technical notes)
4. 4	John S. Archer	Consistent Matrix Formulations for Structural Analysis Using Finite-Element Techniques	AIAA Journal 1965.10
4. 5	J.T. Oden	Calculation of Geometric Stiffness Matrices for Complex Structures	AIAA Journal 1966.8 (Technical notes)
4. 6	D. Johnson, D.M. Brotton	A Finite deflection analysis for Space Structures	International Conference on Space Structures
4. 7	S.S. Tezcan, B. Ovunc	An Iteration Method for the Non-linear Buckling of Framed Structures	International Conference on Space Structures
4. 8	A.C. Walker, D.G. Hall	An Analysis of the Large Deflections of Beam Using the Rayleigh-Ritz Finite Element Method	The Aeronautical Quarterly 1967.11

番 号	著 者	文 献 名	発 行
4. 9	三本木茂夫	大変形問題に対する一考察	JSSC STAN 例会 1971.3
4.10	半谷 裕彦 川服 重也	立体トラスの非線形解析	JSSC STAN 例会 1971.6
4.11	後藤 茂夫 大西 隼紀 大槻 護 新村 祐南	非線形有限変位法(大変形法)によるトラスの大変形解析とその応用プログラム	土木学会論文報告集 1971.10
4.12	川服 重也 半谷 裕彦	文岐座屈後の釣合曲線	JSSC STAN 例会 1972
4.13	DANA YOUNG	Stiffness Matrix for a Beam with an Axial Force	AIAA Journal 1973.2 (Technical notes)
4.14	半谷 裕彦 川服 重也	座屈点におよぼす初期不整の影響	日本鋼構造協会 第7回大会研究 集会マトリックス 構造解析法研 究発表論文集 1973.6
4.15	結城 皓曠	薄肉梁の幾何学的非線形解析	同 上 1973.6
4.16	Zdenk P. Bazant Mahjoub El Nimeiri	Large-Deflection Spatial Buckling of Thin-Walled Beams and Frames	ASCE EM6 1973.10
4.17	結城 皓曠 前田 幸雄	薄肉断面構造の三次元挙動の解析	土木学会論文報告集 1974.4
4.18	前田 幸雄 林 正	立体骨組構造物の有限変位解析	土木学会論文報告集 1976.9

参考文献 (大変形問題—板曲げ理論)

番号	著者	文献名	発行
5.1	J.S. PRZEMIENIECKI	Discrete-Element Methods for Stability Analysis of Complex Structures	The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society 1968.10
5.2	David W. Murray Edward L. Wilson	Finite-Element Large Deflection Analysis of Plates	ASCE EM1 1969.2
5.3	D.W. Murray E.L. Wilson	Finite-Element Postbuckling Analysis of Thin Elastic Plates	AIAA Journal 1969.10
5.4	Georges A. Dupuis, Dieter D. Pfaffinger Pedro V. Marcal	Effective Use of the Incremental Stiffness Matrices In Nonlinear Geometric Analysis	IUTAM Symposium on High Speed Computing of Elastic Structures 1970.8
5.5	Theodore H. Pian, Pin Tong	Variational Formulation of Finite-Displacement Analysis	IUTAM Symposium on High Speed Computing of Elastic Structures 1970.8
5.6	山本 善之 小久保邦雄	外圧を受ける球殻の座屈	JSSC STAN 例会 1972
5.7	横内 康人 山田 嘉昭	有限要素法による円筒殻軸対称大変 形問題の解析	第23回塑性加 工連合講演会 1972.11

番 号	著 者	文 献 名	発 行
5 . 8	山田 嘉昭 岩田 耕司	はりおよび殻構造物の非線形解析	日本鋼構造協会 第 7 回大会研究 集会マトリック ス構造解析法研 究発表論文集 1973.6
5 . 9	山田 嘉昭 岩田 耕司	有限要素法による不安定現象の解 析	日本鋼構造協会 第 9 回大会研究 集会マトリック ス構造解析法研 究発表論文集 1975.6

参考文献 (大変形問題—局部座屈, 板座屈と線材座屈)

番号	著者	文献名	発行
6.1	J.S. PRZEMIENIECKI	Finite Element Structural Analysis of Local Instability	AIAA Journal 1973.1
6.2	Sundaramoorthy Rajasekaran David W.Murray	Coupled Local Buckling in Wide-Flange Beam-Columns	ASCE ST6 1973.6
6.3	Sundaramoorthy Rajasekaran David W.Murray	Finite Element Solution of Inelastic Beam Equations	ASCE ST6 1973.6
6.4	C. Philip Jonson, Kenneth M. Will	Beam Buckling by Finite Element Procedure	ASCE ST3 1974.3

参考文献 (弾塑性解析 - 線材理論)

番 号	著 者	文 献 名	発 行
7 . 1	Movses J. Kaldjian	Moment-Curvature of Beams As Ramberg-Osgood Functions	ASCE ST5 1967.10
7 . 2	K.E. Bruiniette S.J. Fenves	A General Formulation of the Elastic-Plastic Analysis of Space Frameworks	International Conference on Space Structures
7 . 3	H.B. Harrison	The Application of the Principles of Plastic Analysis to three- dimensional Steel Structures	International Conference on Space Structures
7 . 4	Ronald J. Alvarez, Charles Birnstiel	Inelastic Analysis of Multistory Multibay Frames	ASCE ST11 1969.11
7 . 5	Yukio Ueda Sherif M.H. Rashed	Elastic-Plastic Analysis of Framed Structures Using the Matrix Method (3rd Report)	日本造般学会論 文集 131号

参考文献 (弾塑性解析—板曲げ理論, 平面応力理論)

番号	著者	文献名	発行
8.1	山田 嘉昭 桜井 達美 吉村 信敏	有限要素法による弾塑性問題の解析	JSSC.1969 マトリックス構造解析法講座
8.2	山田 嘉昭	マトリックス構造解析法講習会資料	JSSC.STAN 例会 1971.7
8.3	伊東 正久 戸田 靖行	残留応力の計算と, その結果の航空機構造疲れ寿命解析への応用について	JSSC STAN 例会 1972
8.4	横内 康人	有限要素法による弾塑性解析	日本機械学会第 392回講習会 教材 1974.2 (材料力学における応用解析)
8.5	西岡 俊久 矢川 元基 安藤 良夫	重ね合わせ法を用いた弾塑性問題の有限要素解析	日本機械学会講 演論文集 1974.6
8.6	J.H. Argyris, D.W. Scharpf, J.B. Spooner,	Die elastoplastische Berechnung von allgemeinen Tragwerken und Kontinua	Ingenieur- Archiv 1969
8.7	藤田 護 野本 敏治 長谷川寿男	熱弾塑性問題に関する研究(その3) —初期歪法による熱応力解析—	日本造船学会論 文集 144号
8.8	山田 嘉昭 田辺 誠	塑性不安定について	生産研究 1975.8
8.9	H. Armen	Assumptions, Models, and Computational Methods for Plasticity	Computers & Structures Vol. IC 1979 Pergaman Press Ltd

参考文献 (弾塑性大変形解析—線材理論)

番 号	著 者	文 献 名	発 行
9. 1	藤本 盛久	鉄骨剛節骨組の弾性安定ならびに弾塑性安定について	東京工業大学・ 学位論文 1959
9. 2	E. Whitman Wright, Edwin H. Gaylord	Analysis of Unbraced Multistory Steel Rigid Frames	ASCE ST5 1968.5
9. 3	藤田 護 川井 忠彦 大坪 英臣 湯原 哲夫	高軸力をうけるフレーム構造の大た わみ弾塑性問題の一解法	日本鋼構造協会 第3回大会研究 集会マトリッ クス構造解析講演 論文集 1969.5
9. 4	森野 捷輔	立体骨組の弾塑性解体	JSSC STAN 例会 1972
9. 5	Allan Pifko Gabriel Isakson	A Finite-Element Method for the Plastic Buckling Analysis of Plates	AIAA Journal 1969.10
9. 6	藤本 盛久 岩田 衛	鋼圧縮材の座屈強度の確率論的方法 による研究—ランダムな初期たわみ を有する圧縮材—	日本建築学会論 文報告集 1974.4
9. 7	三本木茂夫	板・梁の非線形解析例の比較	JSSC STAN 例会 1974
9. 8	Sadao komatsu Tatsuro Sakimoto	Nonlinear Analysis of Spatial Frames Consisting of Members with Closed Cross-Sections	Proc of JSCE 1976.8
9. 9	川井 忠彦 都井 裕	エネルギー法による梁柱の塑性強度 解析(その1)	日本造船学会論 文集 1976.11
9. 10	前田 幸雄 林 正	骨組構造の複合非線形解析	JSSC STAN 例会 1977
9. 11	山田 嘉昭 平川 智之	弾塑性体の大変形とそれに伴う不安 定問題の研究	生産研究 1977.4

番 号	著 者	文 献 名	発 行
9.12	Marcelo Epstein Donald Nixon David W. Murray	Large Displacement Inelastic Analysis of Beam-Columns	ASCE Structural Division 1978.5

参考文献 (弾塑性大変形解析—板曲げ問題)

番号	著者	文献名	発行
10.1	寺沢 一雄 上田 幸雄 松石 正克	有限要素法による平板の弾塑性座屈— 矩形板の弾塑性圧縮座屈—	造船協会論集 1967.11
10.2	横内 康人 山田 嘉昭	軸対称円筒殻の大変形問題	第2回宇宙航空 材料シンポジウ ム 1972.3
10.3	矢川 元基	有限要素法による特殊応力解析	日本機械学会第 3.9.2回講習会 教材 1974.2
10.4	横内 康人	有限要素法による弾塑性解析	同上
10.5	山田 嘉昭 高塚 公郎	平面変形モデルによるはりおよび柱 の弾塑性解析	日本鋼構造協会 第7回大会研究 集会マトリック ス構造解析法研 究発表論文集
10.6	矢川 元基 西岡 俊久 安藤 良夫	重ね合せ法を用いた弾塑性問題の有 限要素解析	日本機械学会論 文集 1974.4
10.7	山田 嘉昭 田辺 誠	塑性不安定について	生産研究 1975.8
10.8	矢川 元基	非線形構造解析のための効率的な有 限要素法	日本機械学会講 演論文集 1975.10
10.9	小松 定夫 北田 俊行 宮崎 清司	残留応力および初期たわみを有する 圧縮板の弾塑性解析	土木学会論文報 告集 1975.12
10.10	矢川 元基 宮崎 則幸	非線形構造解析のための効率的な有 限要素法	日本機械学会論 文集 1976.7

番 号	著 者	文 献 名	発 行
10.11	T.E.Lang B.J.Hartz	Finite Element Matrix Formulation of Post- Buckling Stability and Imperfection Sensitivity	生研山田教授よ り Montana state Univ. Washington Univ.
10.12	安藤 良夫, 飯田 国広, 川井 忠彦, 矢川 元基, 菊地 文雄	有限要素法による軸対称かくの弾塑 性大たわみ解析	日本機械学会論 文集 303号 1971.11
10.13	Yoshio ANDO Kunihiro IIDA Tadahiko KAWAI Genki YAGAWA Fumio KIKUCHI	Finite Element Large Deflection Analysis of Elastic-Plastic Shells of Revolution Subjected to Axisymmetric Loading	Bulletin of JSME vol15, No.85, 1972
10.14	Kuo-Kuang CHen	A Triangular Plate Finite Element for Large- Displacement Elastic- Plastic Analysis of Automobile Structural Components	Computers & Structures Vol.10, 1979 Pergamon Press
10.15	Pal, G. Bergan Ray W. Clough	Large Deflection Analysis of Plates and Shallow Shells Using the Finite Element Method	Internatinal Journal for Numerical Methods in Engineering vol.5 1973

参考文献 (弾塑性大変形解析—局部座屈, 全体座屈)

番号	著者	文献名	発行
11. 1	田中 尙 高梨 晃一	プラスチックヒンジにおけるウェブ 巾フランジ巾の制限に関する研究(1)	日本建築学会論 文報告集 1964.3
11. 2	同 上	同 上 (2)	同 上 1964.6
11. 3	同 上	同 上 (3)	同 上 1965.1
11. 4	同 上	同 上 (4)	同 上 1965号外
11. 5	同 上	同 上 (5)	同 上 1967.3
11. 6	同 上	同 上 (6)	同 上 1967.6
11. 7	加藤 勉	面内圧縮をうける板の塑性崩壊につ いて	日本建築学会論 文報告集 1965.1
11. 8	加藤 勉 福知 保長	板要素の変形能力について	同 上 1968.5
11. 9	津下 一英	繰り返し応力を受ける平板の弾塑性 安定に関する研究〔I〕	日本建築学会論 文報告集 1967.8
11.10	荒井 宏範	板構造物の大変形解析(その1)	日本造船学会論 文集 1973.12
11.11	上田 幸雄	薄板構造の最終強度解析(その1) —有限要素法および有限帯板法によ る弾塑性大たわみ解析—	日本造船学会誌 1975.9
11.12	同 上	薄板構造の最終強度解析(その2) —理想化構造要素法—	日本造船学会誌 1975.10
11.13	上田 幸雄 Rashed, Sherif	船体最終構強度解析に関する基礎的 研究	日本造船学会論 文集 1974.12

番 号	著 者	文 献 名	発 行
11.14	上田 幸雄 Sherif M.H. Rashed 片山 正孝	理想化構造要素法による二重底構造 の最終強度解析	日本造船学会論 文集 1976.1
11.15	Tore H. Soreide Torgeir Moaw	Non-Linear Material and Geometric Behaviour of Stiffened Plates	Division of Ship Structures, The University of Trondheim 1975
11.16	A. Pifko H. S. Levine H. Armen, Jr.	PLANS - A Finite Element Program for Nonlinear Analysis of Structures	Grumman Aerospace Corporation 1975.11
11.17	吉田宏一郎	薄肉構造の崩壊強度解析	JSSC STAN 例会 1976.9
11.18	Hasan U. Akay C. Philip Johnson Kenneth M. Will	Lateral and Local Buckling of Beams and Frames	ASCE . Structural Division 1977.9
11.19		Interaction Between General Buckling and Local Buckling	IABSE
11.20	金子 洋文	鉄骨H形断面部材の弾塑性大たわみ 解析	東京工業大学修 士論文 1977.3
11.21	李 雅栄 大坪 英臣 山本 善之	防撓板の圧縮強度の研究(その2)	日本造船学会論 文集 144号
11.22	藤田 讓 野本 敏治 仁保 治	防撓板の圧縮強度について(第2報) -溶接にともなり初期不正を有する 防撓板-	日本造船学会論 文集 144号

番 号	著 者	文 献 名	発 行
11.23	Niels C. Lind	Numerical Buckling Analysis of Plate Assemblies	ASCE Structural Division 1978.2
11.24	Gregory J. Hancock	Local, Distortional, and Lateral Buckling of I- Beams	ASCE. Structural Division 1978.11
11.25	吉田 裕 増田 陳紀 松田 隆	薄板で構成される立体構造の弾塑性・ 大変位離散化要素解析法	土木学会論文報 告集 1979.8

参考文献 12 (実験的研究)

番号	著者	文献名	発行
12.1	Egor P. Popov, R. Bruce Pinkney	CYCLIC YIELD REVERSAL IN STEEL BUILDING CONNECTIONS	ASCE ST3 1969.3
12.2	Vitelmo V. Bertero Egor P. Popov Helmut Krawinkler	BEAM-COLUMN SUBASSEMBLAGES UNDER REPEATED LOADING	ASCE ST5 1972.5
12.3	J. Jay Climenhaga, R. Paul Johnson	MOMENT-ROTATION CURVES FOR LOCALLY BUCKLING BEAMS	ASCE ST6 1972.6
12.4	若林 実 松井 千秋 三谷 勲 久島 昭久	鉄骨筋違の繰返し弾塑性性状に関する実験的研究 (その2)材端回転拘束および断面形の影響	日本建築学会大会学術講演梗概集 昭和50年10月
12.5	Lawrence E. kahn, Robert D. Hanson	INELASTIC CYCLES OF AXIALLY LOADED STEEL MEMBERS	ASCE ST5 1976.5
12.6	Addison B. Higginbotham, Robert D. Hanson	AXIAL HYSTERETIC BEHAVIOR OF STEEL MEMBERS	ASCE ST7 1976.7

筆者の発表した論文

筆者が昭和43年(1968年)から昭和55年(1980年)にわたって発表した論文名を以下に列記する。特に、この中で本研究に関係の深い論文については○印をつけて示し、これらの論文集録を別冊付録として添える。〈〉内に書かれている人名は共著者名を示している。

1. 論文

- | | | | |
|-----|---|--|-----------|
| ○1. | 塑性履歴をうけた鋼材ならびに部材の力学的性状に関する研究
その1. 鋼材の引張ならびに圧縮に対する機械的性質
<藤本、守谷> | 日本建築学会論文報告集
第167号 | 1970. 1. |
| ○2. | 任意形平面骨組の非線形応力解析
<藤本、須藤> | 日本建築学会論文報告集
第189号 | 1971. 11. |
| ○3. | 偏心K型ブレース架橋の特性に関する研究
<藤本、青柳、鶴飼、斉藤> | 日本建築学会論文報告集
第195号 | 1972. 5. |
| ○4. | 筋違付鉄骨ラーメンの弾塑性解析に関する研究
<藤本、白方、小杉> | 日本建築学会論文報告集
第209号 | 1973. 7. |
| ○5. | Non-Linear Analysis for K-Type Braced Steel Frames.
<Fujimoto, Suto> | IABSE Symposium
at Lisboa, Portugal
"Resistance and Ultimate Deformability
of Structures Acted on by
Well Defined Repeated Loads." | 1973. 9. |
| ○6. | 鋼構造骨組の三次元非線形解析
<藤本、岩田、中谷> | 日本建築学会論文報告集
第227号 | 1975. 1. |
| ○7. | Nonlinear Three-Dimensional Analysis of Steel Frame Structure.
<Fujimoto, Iwata, Nakatani> | 2nd International
Conference on Space Structures,
University of Surrey, Guildford,
England. | 1975. 9. |
| 8. | Improved Design Philosophy for the Structural System of Oil Storage Tanks
<Tada, Suto> | IABSE 10th
Congress Tokyo, Japan | 1976. 9. |

- | | | | |
|-----|---|---|----------|
| 9. | ビル建築構造設計におけるコンピューターの利用
(BUILDINGの場合)
<青柳, 堀井, 小山, 彦根> | 第1回電子計算機利用
シンポジウム論文集
<日本建築学会> | 1979. 3. |
| 10. | ビル建築構造の三次元的形状認識方法
(BUILDINGの場合)
<青柳, 堀井, 小山, 彦根> | 第1回電子計算機利用
シンポジウム論文集
<日本建築学会> | 1979. 3. |
| 11. | ビル建築構造の応力計算手法とその利用法
(BUILDINGの場合)
<青柳, 堀井, 小山, 彦根> | 第1回電子計算機利用
シンポジウム論文集
<日本建築学会> | 1979. 3. |
| 12. | ビル建築構造における保有耐力の自動計算
(BUILDINGの場合)
<青柳, 堀井, 小山, 彦根> | 第1回電子計算機利用
シンポジウム論文集
<日本建築学会> | 1979. 3. |
| 13. | 立体トラスの設計・製作における電子計算機の利用
<岩田> | 第2回電子計算機利用
シンポジウム論文集
<日本建築学会> | 1980. 3. |
| 14. | 建築・土木構造物の動的解析システム
“DYNAMICS”について
<寺本, 谷, 浅野, 北村> | 第2回電子計算機利用
シンポジウム論文集
<日本建築学会> | 1980. 3. |
| 15. | Computer Application in Design and Construction
of Space Frames .
<Fujimoto , Nakano , Iwata> | IABSE 11th
Congress Vienna , Austria | 1980. 9. |
| 16. | Study of Reinforced Concrete Buildings Damaged due
to the Miyagiken-oki , Japan, Earthquake of
June 12, 1978
<Kokusho, Hayashi, Morishima> | 7th WCEE at
Istanbul , Turkey | 1980. 9. |

1. 口頭発表論文

- | | | | |
|-----|---|--|-----------|
| ○1. | 塑性履歴を受けた鋼材の力学的性状に関する研究
<藤本> | 日本建築学会関東支部
第39回学術研究発表梗概集 | 1968. 6. |
| 2. | 塑性履歴を受けた鋼材の力学的性状に関する研究
<藤本, 大熊> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1968. 10. |
| ○3. | 変化歪要素を用いた有限要素法による二次元応力解析
<寺本> | 日本鋼構造協会第3回大会
研究集会マトリックス
構造解析法発表論文集 | 1969. 6. |
| 4. | 高力ボルト引張り接合に関する研究
(その2) 有孔無限板の孔縁に環状荷重が作用する場合の
三次元数値計算と有限要素法に依る数値計算
<藤本, 橋本> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1969. 8. |
| 5. | 有限要素法による二次元応力解析における要素および
分割数の精度に与える影響
<寺本> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1969. 8. |
| 6. | 任意形平面骨組の非線形解析
<藤本, 須藤> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1970. 9. |
| 7. | 三次元有限要素法における変化歪要素と一定歪要素の比較
<青柳, 岩田> | 日本鋼構造協会第5回大会
研究集会マトリックス
構造解析法研究発表論文集 | 1971. 6. |
| ○8. | 変化歪要素を用いた弾塑性平面応力解析
<小杉> | 日本鋼構造協会第5回大会
研究集会マトリックス
構造解析法研究発表論文集 | 1971. 6. |
| 9. | 横に長い圧密沈下構造物の二次元有限要素法による構造地盤の
一体解析
<須藤> | 日本鋼構造協会第5回大会
研究集会マトリックス
構造解析法研究発表論文集 | 1971. 6. |
| 10. | 変化歪要素を用いた弾塑性平面応力解析
<小杉> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1971. 11. |
| 11. | 軟弱地盤上に建てられた建物の圧密沈下に関する実測研究
(その4. 理論解誘導と実測3例の構造の諸係数)
<須藤, 高矢> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1972. 10. |
| 12. | 軟弱地盤上に建てられた建物の圧密沈下に関する実測研究
(その5. 実測と理論解対比による結論的考察)
<須藤, 高矢> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1972. 10. |
| 13. | 繰返し水平荷重をうける筋違付鉄骨ラーメンの弾塑性性状に | 日本建築学会大会 | 1972. 10. |

	関する研究(その5) - 歪硬化モデルを用いた理論解析-1- <藤本, 白方>	学術講演梗概集	
14.	繰返し水平荷重をうける筋違付鉄骨ラーメンの弾塑性性状に関する研究(その6) - 歪硬化モデルを用いた理論解析-2- <藤本, 白方, 小杉>	日本建築学会大会 学術講演梗概集	1972. 10.
15.	繰返し水平荷重をうける筋違付鉄骨ラーメンの弾塑性性状に関する研究(その7) - 歪硬化モデルを用いた理論解析-3- <藤本, 白方, 岡田>	日本建築学会大会 学術講演梗概集	1972. 10.
16.	Non-Linear Analysis of T-stub Connection by Two Dimensional Finite Element Method <Suto >	日本建築学会大会 学術講演梗概集	1972. 10.
○17.	新宿住友ビルの構造に関する研究(その7) 部材の弾塑性解析 <矢野, 阿部>	日本建築学会大会 学術講演梗概集	1972. 10.
18.	合成ばりの実大試験(その1. 実験計画, 押し抜き試験) <青柳, 内田, 武田, 江戸>	日本建築学会関東支部 第43回学術研究発表梗概集	1973. 3.
19.	合成ばりの実大試験(その2. 合成ばり試験) <青柳, 内田, 武田, 江戸>	日本建築学会関東支部 第43回学術研究発表梗概集	1973. 3.
20.	合成ばりの実大試験(その3. 合成ばり試験, 解析) <青柳, 内田, 武田, 江戸>	日本建築学会関東支部 第43回学術研究発表梗概集	1973. 3.
21.	Transfer Matrix による円筒殻の曲げ解法 - 単一円筒殻の地震水平力時の解 - <須藤>	日本建築学会関東支部 第43回学術研究発表梗概集	1973. 3.
22.	三次元有限要素法の実用的応用 <岩田>	日本鋼構造協会第7回大会 研究集会マトリックス 構造解析法発表論文集	1973. 6.
23.	平面架構を組み建てた立体架構の面置換による解析 <寺本>	日本鋼構造協会第7回大会 研究集会マトリックス 構造解析法発表論文集	1973. 6.
24.	面置換による平面架構を組み建てた立体架構解析 <寺本, 住井>	日本建築学会大会 学術講演梗概集	1973. 10.
25.	B製鋼工場, 転炉棟の振動実験(その1. 振動実験) <川村, 内田>	日本建築学会大会 学術講演梗概集	1973. 10.
26.	B製鋼工場, 転炉棟の振動実験(その2. 理論解析) <川村, 内田>	日本建築学会大会 学術講演梗概集	1973. 10.

- 27. H形断面部材の局部座屈解析
 <藤本, 彦根> 日本建築学会大会 1974. 10.
 学術講演梗概集
28. 鋼構造骨組の三次元非線形解析(1. 解析法)
 <藤本, 岩田, 中谷> 日本建築学会大会 1974. 10.
 学術講演梗概集
29. 鋼構造骨組の三次元非線形解析(2. 解析例)
 <藤本, 岩田, 中谷> 日本建築学会大会 1974. 10.
 学術講演梗概集
30. パネルブレースの水平加力実験(その1)
 <堀井, 谷, 鈴木, 遠山, 石川> 日本建築学会大会 1974. 10.
 学術講演梗概集
31. パネルブレースの水平加力実験(その2)
 <堀井, 谷, 鈴木, 遠山, 石川> 日本建築学会大会 1974. 10.
 学術講演梗概集
32. 軟弱圧密地盤上の構造物と地盤の一体解析
 (剛性マトリックス法による一解法)
 <須藤> 日本建築学会大会 1974. 10.
 学術講演梗概集
33. 三次元鉄骨骨組の非線形解析
 <藤本, 岩田, 中谷> 第24回応用力学 1974. 11.
 連合講演会講演論文抄録集
- 34. 板の弾塑性解析 - 形鋼の局部座屈解析 -
 <藤本, 彦根> 日本鋼構造協会第9回大会 1975. 6.
 研究集会マトリックス構造
 解析法研究発表論文集
35. 円筒形石油タンクに関する研究
 (その2. 満タンク時液圧による構造系一体解析)
 <多田, 須藤> 日本建築学会大会 1975. 10.
 学術講演梗概集
36. 円筒形石油タンクに関する研究
 (その3. 液面動揺時液圧による筒体の静的解析)
 <多田, 須藤> 日本建築学会大会 1975. 10.
 学術講演梗概集
37. 断面変形を考慮したH形鋼部材の弾塑性解析
 <藤本, 彦根> 日本建築学会大会 1975. 10.
 学術講演梗概集
38. ビル建築構造自動計算処理システム
 "BUILDING RC/SRC/S"
 その1, システムの概要
 <須藤, 青柳, 堀井, 小山> 日本建築学会大会 1976. 10.
 学術講演梗概集
39. ビル建築構造自動計算処理システム
 "BUILDING RC/SRC/S"
 その2. Matrix Method を用いた水平荷重時応力解析と
 耐震壁のモデル化
 <須藤, 青柳, 堀井, 小山> 日本建築学会大会 1976. 10.
 学術講演梗概集

- | | | | |
|------|--|---|-----------|
| 40. | ビル建築構造自動計算処理システム
“BUILDING RC/SRC/S”
その3. 斜め架構適用時、簡略サブストラクチャ法の解析精度考察
<須藤, 青柳, 堀井, 小山> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1976. 10. |
| 41. | ビル建築構造自動計算処理システム
“BUILDING RC/SRC/S”
その4. 武藤式略算法における反曲高比計算方法の現代化と精度の考察 (Y値法)
<須藤, 青柳, 堀井, 小山> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1976. 10. |
| 42. | 開口部を有するスラブについての一考察
<川村, 須藤> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1976. 10. |
| ○43. | 鋼構造柱一はり接合部の弾塑性性状に関する解析的研究
<藤本, 中谷> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1976. 10. |
| ○44. | ビル構造の崩壊解析と設計上の問題点
<須藤> | 第23回構造工学シンポジウム論文集 | 1977. 2. |
| ○45. | 複数の荷重を受ける構造物の不安定領域を含んだ非線形解析法について
<須藤> | 日本鋼構造協会第11回大会
研究集会マトリックス解析法
研究発表論文集 | 1977. 6. |
| 46. | 円筒型石油タンクに関する研究
(その5. 側板一底板隅角部における底板変形・応力性状の考察)
<多田, 須藤> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1977. 10. |
| 47. | 円筒型石油タンクに関する研究
(その6. 静的水平震度加力時地盤一容器構造一体解析)
<多田, 須藤> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1977. 10. |
| ○48. | 局部座屈を考慮したH形鋼部材の座屈解析
<藤本, 須藤> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1977. 10. |
| 49. | 20,000kl 円筒形石油タンクの実物実験
(水圧による静水圧実験)
<須藤> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1978. 9. |
| ○50. | 繰り返し荷重をうける鋼構造骨組の三次元弾塑性有限変位解析に関する研究
<藤本, 須藤> | 日本鋼構造協会第13回大会
研究集会マトリックス解析法
研究発表論文集 | 1979. 6. |
| 51. | ビル建築構造の耐震設計におけるラーメンの層間変位の略算法
(その1. 成分別層間変位略算法の提案)
<堀井, 小山> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1979. 9. |

- | | | |
|---|---|----------|
| 52. ビル建築構造の耐震設計におけるラーメンの層間変位の略算法
(その2. 低層鉄骨ビルへの適用と剛性確保への提言)
<堀井, 小山> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1979. 9. |
| 53. 1978年宮城県沖地震により被害を受けた
鉄筋コンクリート建物に関する一考察
<黒正, 林, 森島> | 第4回地震工学・応用地学に
関するシンポジウム
昭和54年度三大学院シンポジウム
(慶応義塾大学・東京工業大学・
早稲田大学) | 1980. 3. |
| 54. 1978年宮城県沖地震により被害を受けた
低層鉄筋コンクリート建物に対する一考察
(その3. 静的及び動的三次元弾塑性解析)
<黒正, 林, 森島> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1980. 9. |
| 55. 杭と周辺地盤の離間を考慮した動的解析による杭の
水平力分担率の考察
(その1 建物-杭-地盤連成系解析モデルの設定)
<阿部, 堀井, 木原, 北村> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1980. 9. |
| 56. 杭と周辺地盤の離間を考慮した動的解析による杭の
水平力分担率の考察
(その2. スリップ型復元力特性を用いた応答解析)
<阿部, 堀井, 木原, 北村> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1980. 9. |
| 57. 杭と周辺地盤の離間を考慮した動的解析による杭の
水平力分担率の考察
(その3. 復元力特性の違いによる応答結果の比較)
<阿部, 堀井, 木原, 北村> | 日本建築学会大会
学術講演梗概集 | 1980. 9. |

付録-A 本研究が紹介されている「骨組構造解析法要覧」からの抜粋

ここに載せる資料は1976年に成岡昌夫(当時名古屋大学教授), 中村恒善(現在京都大学教授)によって共編された「骨組構造解析法要覧」にまとめられている(複合非線形有限要素法による単純骨組の解析法の流れ)から抜粋したものである。表の中にある73, 74の文献は本論文の2章, 3章に関連して1971年, 1973年に日本建築学会論文報告集に発表したものである。3次元骨組, 板構造についての研究はこの本が発刊されてから行ったもので, この表には引用されていない。

- 73. 藤本盛久, 須藤福三, 和田章, 任意平面骨組の非線形応力解析, 建論集, 189, 59-70, 1971.
- 74. 藤本盛久, 和田章, 白方和彦, 小杉立, 筋違付鉄骨ラーメンの弾塑性解析に関する研究, 建論集, 209, 41-51, 1973.

表 9.3 複合非線形有限要素法による単純骨組の解析法の流れ

	流	れ	図	注		
一般化力	曲げ [69]	→	曲げ・軸力 [70-75]	→	組合せ応力一般 (2軸曲げ, ねじり等)	
成法則	弾完全塑性型 [69] (73)	→	bilinear型 [70, 71] パウシンガー型 (74)	→	非線形(たとえばR.O型) [72]	構成法則の数学的形式と物理的内容の調和が必要
標	固定座標 [69][72]	→	移動座標 I (incremental Lagrangian) [70, 71, 72, (73), (74), 75]	→	移動座標 II	剛体変位の効果的処理法を工夫する必要あり。 (たとえば片持梁型要素座標等[9.4節参照])
変位変位係式	coupling 項なし [69, (74)]	→	coupling 項あり [70, 71, 72, (73), 75]			Coupling項を省略する場合は要素分割を細かくする必要がある
位関数	$u; x$ の 2 次以上の多項式 $w; x$ の 4 次以上の多項式 (73)	→	$u; x$ の 2 次式 $w; x$ の 3 次式 [69, 70, 71, (74), 75]			高次の多項式を使わない場合は要素分割を細かくしなければならないが Transfer Matrix を用いることにより手間は相殺されよう
塑性境界	要素内で連続的に変化 [69, 70, 71, (73)]	→	要素内で離散的に変化 (i) 一樣ひずみ場におけるひずみで降伏・復活を判定 (74) (ii) 代表点ひずみまたは平均ひずみで降伏・復活を判定 [9.4節参照]			(ii) の場合, 同時降伏の仮定を成立させるためにはまず要素を細かくすること, エネルギーとの対応関係をつけることが必要であろう
分原理	カスチラノの定理 [69] 全ポテンシャルエネルギー停留の原理 [70, (73), (74)] → (不釣り合い力の修正あり)	→	増分型変分原理 I → 増分型変分原理 II (不釣り合い力の修正 (不釣り合い力の修正あり) なし) [71] [75, 77]			I の方法で精度をあげるためには要素を細かくする必要あり, 大規模な架構や動的解析の場合には不釣り合いの修正は実際上困難であるが, 時間増分上の制約から I の形式で十分な場合も多いことに注意されたい
析法	初期ひずみ法 [69]	→	接線係数法 → 摂動法 [70, 71, (73), (74), 75] [第8章参照]			初期ひずみ法は塑性変形の大きい場合は誤差が大きくなり, また不安定近傍では収束が悪い
置条件	単調 [69, 70]	→	繰返し, 動的 [71, (74)]			

付録-B 2次形式で表わされた関数に関する変分原理

vector u に関して2次形式の関数が次のように与えられたとき、

$$J(u) = u^T A u + 2u^T a + a$$

この関数を停留させるような vector \bar{u} を変分原理を用いることによって求めることができる。

u に比較して、十分小さく「任意」に選んだ vector δu を u の変分といい、また $J(u + \delta u)$ と $J(u)$ との差を $J(u)$ の変分とよび $\delta J(u)$ と表わす。

$u = \bar{u}$ において $J(u)$ が停留しているということは、任意の無限小変分 δu に関して $\delta J(\bar{u}) = 0$ であることを意味する。

このことにより、

$$J(\bar{u}) = \bar{u}^T A \bar{u} + 2\bar{u}^T a + a$$

$$J(\bar{u} + \delta u) = (\bar{u} + \delta u)^T A (\bar{u} + \delta u) + 2(\bar{u} + \delta u)^T a + a$$

とおき、 $\delta J(\bar{u})$ を計算すると、

$$\delta J(\bar{u}) = \bar{u}^T A \delta u + \delta u^T A \bar{u} + \delta u^T A \delta u + 2\delta u^T a$$

となる。 A が対称 matrix であることを考慮すると、この式は

$$\delta J(\bar{u}) = 2\delta u^T (A\bar{u} + a) + \delta u^T A \delta u$$

と簡単に整理できる。

ここで、2次以上の項を微小項として省略し、任意の無限小変分 δu に対して $\delta J(\bar{u}) = 0$ が $J(\bar{u})$ の停留を意味するから、vector \bar{u} は

$$A\bar{u} + a = 0$$

を満足していなければならないことが分る。このことにより、この一次連立方程式を解くことによって \bar{u} を求めることができる。

また、その停留点が極小値であるためには、2次の変分

$$\delta^2 J(\bar{u}) = \delta u^T A \delta u$$

が「任意」の無限小変分 δu に対して常に正である必要がある。

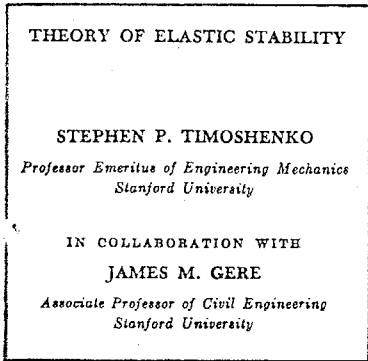
$$S u^T A \delta u > 0 \quad \text{for any } \delta u$$

つまり A が positive definite matrix でなければならないということであり、

$$|A| > 0$$

が満足されていれば $J(\bar{u})$ は極小値であることになる。

Elastica の理論を



より抜粋

2.7. Large Deflections of Buckled Bars (The Elastica). In the discussions of the preceding articles of this chapter it was found that the deflection of a bar was indeterminate at the critical load. This indicated that at the critical load the bar could have any value of deflection, provided the deflection remained small. This conclusion is reached because of the nature of the differential equations which were used for calculating the critical loads. These equations were based upon the approximate expression d^2y/dx^2 for the curvature of the buckled bar. If the exact expression for curvature is used, there will be no indefiniteness in the value of the deflection. The shape of the elastic curve, when found from the exact differential equation, is called the *elastica*.¹

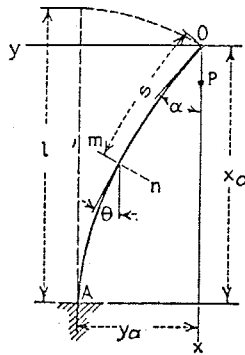


FIG. 2-28

Let us begin by considering the slender rod shown in Fig. 2-28, fixed at the base and free at the upper end. If the load P is taken somewhat larger than the critical value [Eq. (2-4)], a large deflection of the bar is produced. Taking the coordinate axes as shown in the figure and measuring the distance s along the axis of the bar from the origin O , we find that the exact expression for the curvature of the bar is $d\theta/ds$. Since the bending moment in the bar is equal to the flexural rigidity times the curvature, the exact differential equation of the deflection curve is

$$EI \frac{d\theta}{ds} = -Py \tag{a}$$

As in our previous discussions, the change in length of the column due to compression will be neglected.¹

Differentiating Eq. (a) with respect to s and using the relation

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta$$

we obtain

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} = -P \sin \theta \tag{b}$$

Thus the differential equation of the deflection curve is of the same form as the differential equation for the oscillations of a pendulum. In the equation for the pendulum the quantity EI is replaced by the moment of inertia of the pendulum with respect to the axis of rotation, s is replaced by the time, and P by the weight of the pendulum multiplied by the distance of the center of gravity from the axis of rotation. This analogy between the deformation of a slender rod loaded only at its ends and the rotation of a rigid body about a fixed point was discovered by Kirchhoff² and is known as *Kirchhoff's dynamical analogy*.

In solving Eq. (b), we begin by multiplying both sides by $d\theta$ and integrating, so that

$$\int \frac{d^2\theta}{ds^2} \frac{d\theta}{ds} ds = -k^2 \int \sin \theta d\theta$$

where $k^2 = P/EI$. This equation can be expressed in the form

$$\frac{1}{2} \int \frac{d}{ds} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 ds = -k^2 \int \sin \theta d\theta$$

and upon integrating we obtain

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = k^2 \cos \theta + C$$

where C is a constant of integration which is determined from the conditions at the upper end of the bar. At the upper end we have $d\theta/ds = 0$, since the bending moment is zero, and also $\theta = \alpha$. These conditions give

$$C = -k^2 \cos \alpha$$

and therefore
$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 2k^2(\cos \theta - \cos \alpha)$$

or
$$\frac{d\theta}{ds} = \pm k \sqrt{2} \sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}$$

Since $d\theta/ds$ is always negative, as seen from Fig. 2-28, the positive sign will be dropped from this equation. Solving for ds gives

$$ds = -\frac{d\theta}{k \sqrt{2} \sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}$$

and the total length of the bar, after the limits of integration are interchanged, is

$$l = \int ds = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{k \sqrt{2} \sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} = \frac{1}{2k} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (c)$$

This integral can be simplified by using the notation $p = \sin(\alpha/2)$ and by introducing a new variable ϕ in such a manner that

$$\sin \frac{\theta}{2} = p \sin \phi = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \phi \quad (d)$$

It is seen from these relations that when θ varies from 0 to α , the quantity $\sin \phi$ varies from 0 to 1; hence ϕ varies from 0 to $\pi/2$. We also find from Eq. (d), by differentiation, that

$$d\theta = \frac{2p \cos \phi d\phi}{\cos(\theta/2)} = \frac{2p \cos \phi d\phi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \phi}} \quad (e)$$

Substituting in Eq. (c) and noting that

$$\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = p \cos \phi \quad (f)$$

we obtain

$$l = \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \phi}} = \frac{1}{k} K(p) \quad (g)$$

The integral appearing in Eq. (g) is known as a *complete elliptic integral of the first kind* and is designated by $K(p)$. The value of the integral K depends only on p and is tabulated numerically, for various values of $p = \sin \alpha/2$, in many engineering handbooks. With such a table available, the value of p (and hence the value of the angle α at the top of the bar) can be found readily for any value of the load P .

In Table 2-4 are given values of the ratio P/P_{cr} for various values of the angle α .

TABLE 2-4. LOAD-DEFLECTION DATA FOR A BUCKLED BAR (FIG. 2-28)

α	0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	176°
P/P_{cr}	1	1.015	1.063	1.152	1.293	1.518	1.884	2.541	4.029	9.116
x_0/l	1	0.970	0.881	0.741	0.560	0.349	0.123	-0.107	-0.340	-0.577
y_0/l	0	0.220	0.422	0.593	0.719	0.792	0.803	0.750	0.625	0.421

In calculating deflections of the bar we note that

$$dy = \sin \theta ds = -\frac{\sin \theta d\theta}{k \sqrt{2} \sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}$$

Then the total deflection of the top of the bar in the horizontal direction (Fig. 2-28) is

$$y_0 = \frac{1}{2k} \int_0^\alpha \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 \alpha/2 - \sin^2 \theta/2}} \quad (h)$$

From Eq. (d) we have $\sin \theta/2 = p \sin \phi$ and therefore

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \phi}$$

Using the relation $\sin \theta = 2(\sin \theta/2)(\cos \theta/2)$, we now find that

$$\sin \theta = 2p \sin \phi \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \phi} \quad (i)$$

Substituting expressions (e), (f), and (i) into Eq. (h) and changing the limits accordingly, we obtain

$$y_a = \frac{2p}{k} \int_0^{\pi/2} \sin \phi \, d\phi = \frac{2p}{k} \quad (j)$$

Thus the deflection of the bar can be calculated by first selecting a value of α (or p), then determining k (and hence P) from Eq. (g), and finally finding y_a from Eq. (j). For example, again taking $\alpha = 60^\circ$ and $p = \frac{1}{2}$, we have $kl = K(\frac{1}{2}) = 1.686$ and

$$y_a = \frac{l}{1.686} = 0.593l$$

Numerical results obtained in this way for various values of α are given in the last line of Table 2-4.

The relation between the deflection y_a and the load P is shown graphically in Fig. 2-29 by the curve AB . The curve is tangent to the horizontal line $P = P_{cr}$ at point A where the deflection is zero. Thus the increase in the load P , corresponding to a small increment of deflection, is a small quantity of second order. This explains why the deflection was found to be indefinite in magnitude when the approximate expression for curvature was used. It should be noted that the curve AB can be used only up to the proportional limit of the material.

Beyond this limit the resistance of the bar to bending diminishes and a curve similar to that indicated by the dotted line BC is obtained.

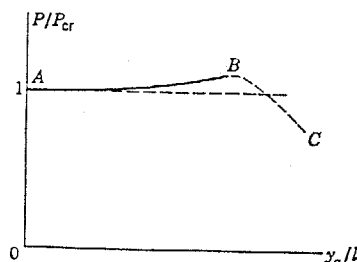


FIG. 2-29

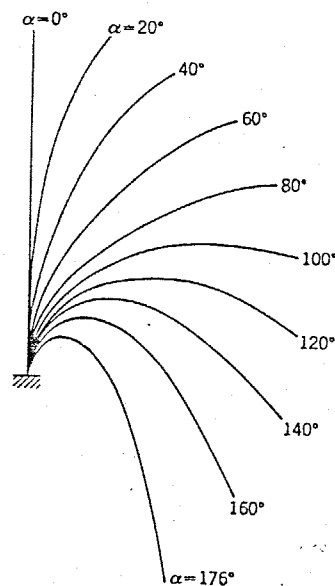


FIG. 2-30

The coordinate distance x_a (Fig. 2-28) can be calculated in a similar way, and the result is

$$\begin{aligned} x_a &= \frac{2}{k} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \phi} \, d\phi - l \\ &= \frac{2}{k} E(p) - l \end{aligned} \quad (k)$$

where $E(p)$ is the *complete elliptic integral of the second kind*. Numerical results obtained from this equation are given in Table 2-4.

The coordinates of intermediate points along the deflection curve can be calculated also, using elliptic integrals. The shapes of the deflection curves for various values of α are given in Fig. 2-30. It is apparent that a slight increase of the load above the critical value is sufficient to produce a large deflection of the bar.¹

SQUARE PLATE WITH CLAMPED EDGES UNDER NORMAL PRESSURE PRODUCING LARGE DEFLECTIONS

By SAMUEL LEVY

SUMMARY

A theoretical analysis is given for the stresses and deflections of a square plate with clamped edges under normal pressure producing large deflections. Values of the bending stress and membrane stress at the center of the plate and at the midpoint of the edge are given for center deflections up to 1.9 times the plate thickness. The shape of the deflected surface is given for low pressures and for the highest pressure considered. Convergence of the solution is considered and it is estimated that the possible error is less than 2 percent. The results are compared with the only previous approximate analysis known to the author and agree within 5 percent. They are also shown to compare favorably with the known exact solutions for the long rectangular plate and the circular plate.

INTRODUCTION

An exact solution for the small deflections of a plate with clamped edges was given by Hencky in reference 1 and an approximate solution for large deflections was presented by Way in reference 2. In a previous paper (reference 3) there is presented a solution of the fundamental von Kármán large-deflection equations for a simply supported rectangular plate under combined edge compression and lateral loading.

In the present paper a theoretical analysis is given for the stresses and deflections of a square plate under normal pressure producing large deflections. The edge supports are assumed to clamp the plate rigidly against rotations and displacements normal to the edge but to permit displacements parallel to the edge. The analysis replaces the edge bending moments by an equivalent pressure distribution and then applies the general solution for the simply supported rectangular plate. The results for small deflections obtained by the analysis agree exactly with those of Hencky and for large deflections differ by less than 5 percent from the approximate solution of Way.

The work was carried on with the financial assistance of the National Advisory Committee for Aeronautics. Acknowledgement is made to the Bureau of Aeronautics, Navy Department, for its cooperation in a program of tests of rectangular plates under normal pressure that furnished the background for the preparation of this paper. The author is grateful for the assistance of members of the Engineering Mechanics Section of the National Bureau of Standards, particularly that of Dr. Walter Ramberg and Mr. Samuel Greenman.

FUNDAMENTAL EQUATIONS

SYMBOLS

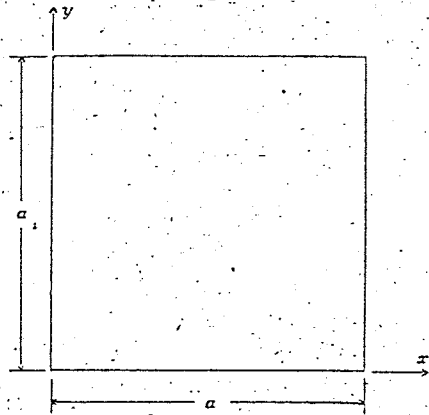
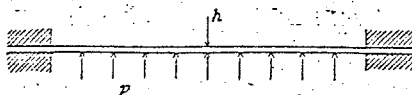


FIGURE 1.—Uniform normal pressure on a clamped square plate.

Consider an initially flat square plate of uniform thickness (fig. 1) and let

- a length of sides.
- h thickness.
- p normal pressure, assumed uniform.
- w normal displacement of points of middle surface.
- E Young's modulus.
- μ Poisson's ratio.
- $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ flexural rigidity of plate.
- x, y coordinate axes lying along edges of plate with their origin at one corner.

RELATION BETWEEN STRESS FUNCTION F , DEFLECTION w , AND PRESSURE COEFFICIENTS p_{11}

Since the edge moments m_x and m_y have been replaced by the auxiliary pressure distribution $p_a(x, y)$ (equation (7)), the general solution for the simply supported rectangular plate given in reference 1 may be applied. This solution was derived in terms of Fourier series from the von Kármán equations (reference 6). The form of von Kármán's equations used is that given on page 343 of reference 4.

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} + \quad (11)$$

$$\frac{h}{D} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

For the square plate the general solution describes the deflection by the Fourier series,

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} w_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} \quad (12)$$

the pressure by the Fourier series previously given in equation (9).

$$p_c(x,y) = \sum_{r=1,2,3,\dots} \sum_{s=1,3,5,\dots} p_{r,s} \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{a} \quad (13)$$

and the stress function F by the Fourier series and polynomials,

$$F = \frac{\bar{\sigma}_x x^2}{2} + \frac{\bar{\sigma}_y y^2}{2} + \sum_{m=0,2,4,\dots} \sum_{n=0,2,4,\dots} b_{m,n} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a} \quad (14)$$

SOLUTION OF EQUATIONS

VALUES OF DEFLECTION COEFFICIENTS $w_{m,n}$ AND EDGE MOMENT COEFFICIENTS k .

The method of obtaining the required values of the deflection coefficients $w_{m,n}$ and the edge moment coefficients k , consists of assuming values for $\frac{w_{1,1}}{h}$ and then solving for $\frac{pa^4}{Eh^3}$, $\frac{w_{1,3}}{h}$, $\frac{w_{3,3}}{h}$, ..., k_1 , k_3 , k_5 , ... by

successive approximation from the simultaneous equations in table 1 and equations (10) and (21). These calculations have been made for 10 values of $\frac{w_{1,1}}{h}$

The corresponding values of the first 36 deflection coefficients $\frac{w_{m,n}}{h}$ and of the first five moment coefficients

k , are given in table 3 and table 4, respectively. The error arising from the use of only the first 22 terms in the equations in table 1 will be considered in a later section.

CENTER DEFLECTION

From equation (12) the center deflection is

$$w_{center} = \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{m+n}{2}} w_{m,n} \quad (23)$$

The center deflection was obtained by substituting the values of $w_{m,n}$ from table 3 in equation (23) with the results given in table 5 and figure 3. Figure 3 shows that the deflection pressure curve deviates increasingly from a straight line with increasing deflection. The deviation exceeds 10 percent for deflections exceeding about one-half of the plate thickness.

SHAPE OF DEFLECTED SURFACE

The lateral deflection of the plate is obtained by substituting the deflection coefficients $w_{m,n}$ (table 3)

in equation (12). This calculation has been made along the center line $x=a/2$ for very small deflections

$\frac{w_{center}}{h} \ll 1$ and for the highest deflection calculated

$\frac{w_{center}}{h} = 1.902$ with the results given in figure 4. It is

apparent that, as the center deflection increases under increasing normal pressure, catenary tensions become appreciable and the inflection point is shifted toward the edges of the plate.

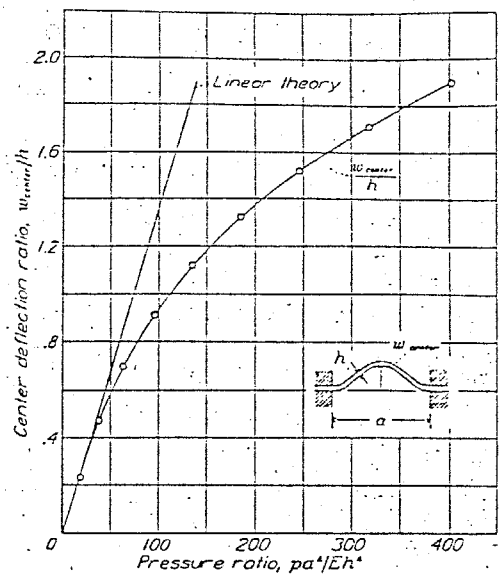


FIGURE 3.—Center deflection of square plate with clamped edges. $\mu = 0.316$.

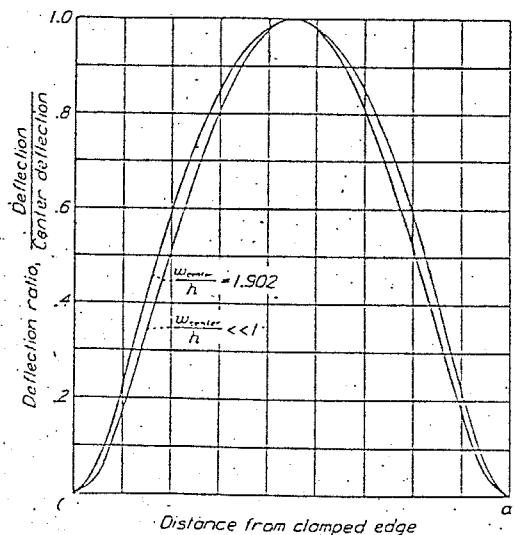


FIGURE 4.—Shape of deflected surface along center line $x=a/2$ for very small deflection $w_{center}/h \ll 1$ and for the largest deflection calculated $w_{center}/h = 1.902$.