

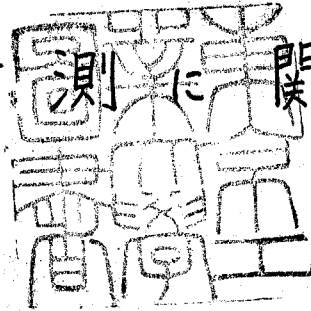
論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	希薄高分子溶液の流動計測に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	持丸義弘
Author(English)	YOSHIHIRO MOCHIMARU
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第760号, 授与年月日:1975年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第760号, Conferred date:1975/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

昭和49年度工学博士論文

希薄高分子溶液の

流動計測に関する研究



指導教官 富田幸雄教授

東京工業大学 大学院

機械工学専攻

持 丸 義 弘

東京工
大 号 357357

目 次

第 1 章	緒言	
1.1	本研究の目的	1
1.2	従来の研究	4
1.3	本論文概要	18
1.4	記号表	21
第 2 章	希薄高分子溶液の法線応力差測定法	
2.1	緒言	27
2.2	法線応力差の測定原理および理論解析	28
2.2.1	測定理論	28
2.2.2	供試管幾何形状の測定に及ぼす影響	36
2.2.3	ぬれ縁の影響	47
2.3	実験方法および実験結果	48
2.4	実験結果の考察	65

2.4.1	管内流動状況一般について	65
2.4.2	同一径の供試管の測定結果 が高ずり速度側で系統的に ずれる理由	69
2.4.3	ぬれ縁の影響について	75
2.4.4	法線応力差測定範囲等につ いて	75
2.5	結論	84
第3章	円柱周りの速度場および温度場	
3.1	緒言	85
3.2	基礎式	88
3.3	解析(速度場)	97
3.3.1	低レイノルズ数の場合	97
3.3.2	中程度のレイノルズ数の場 合	101
3.3.3	高レイノルズ数の場合	104
3.4	解析(温度場)	110
3.4.1	極低レイノルズ数の場合	110

3.4.2	低レイノルズ数の場合	111
3.4.3	中程度のレイノルズ数の場合	114
3.4.4	高レイノルズ数の場合	115
3.4.5	高プラントル数の場合	118
3.5	解析結果および考察	120
3.5.1	抵抗係数	120
3.5.2	流線, 等温度線	121
3.5.3	円柱表面の温度分布等	121
3.5.4	温度分布	122
3.5.5	局所ヌセルト数	123
3.5.6	平均ヌセルト数およびその他	125
3.6	結論	168
第4章	ピトー管法による流速測定	
4.1	緒言	169
4.2	ピトー管法による速度測定の問題点について	170

4.2.1	概説	170
4.2.2	ピト - 管壁の厚さ無限小, 主流の流れが遅い場合	172
4.2.3	主流が速い場合	174
4.3	ピト - 管法による希薄高分子溶 液の流速測定について	175
4.3.1	概説	175
4.3.2	遅い流れ	178
4.3.3	速い流れ	181
4.4	実験装置および実験方法	190
4.5	実験結果および考察	198
4.5.1	予備実験結果	198
4.5.2	ピト - 管係数を1とみなせ るか否かの検定	198
4.5.3	ピト - 管係数について	206
4.6	結論	217
第5章	結論	219
付録	レオロジ方程式概説	222

A 1	レオロジ方程式	222
A 2	粘弾性流体に対するレオロジ方 程式	225
付 記		236
文 献		237

第1章 緒言

1.1 本研究の目的

高分子溶液などの粘弾性流体は、純粘性流体の流れでは見られない種々の特異な現象を呈することが知られている。とくにある種の希薄高分子溶液は溶媒に比して乱流摩擦抵抗が著しく減少する、いわゆるトムズ効果を呈する。このような摩擦抵抗の著しい減少は、現象それ自体の学問的興味に加えて、流体輸送、各種流路、油井掘削、流体機械などにおける摩擦損失の減少、船体などの摩擦抵抗の減少などその実用上の見地から工業的にも注目されている。このような希薄高分子溶液をその一部として含む粘弾性流体は、化学工業の発達に伴ない、最近では各工業分野で数多く使用され、その応用面も広範多岐にわたっている。しかしながら粘弾性流体の流動現象の内部機構はいまだ不明の点が多い。とくに希薄高分子溶液の流動に関する研究全般に限って言えば、上述の抵抗減少効果と関連して、各種高分子溶液中

における抵抗減少効果の実験的研究，あるいは乱流境界層，遷移過程の実験的研究などが行なわれている。他方，非等方粘性理論，粘性底層肥厚化理論，粘弾性理論などによる抵抗減少効果の解析的研究もかなり行なわれている。さらに最近では，トムズ効果の原因，機構を調べるため，ひいては一般に各種の流れの内部機構を調べるために，流れの可視化，流速，乱れ，応力の測定などがなされるようになってきている。その際，単純ずり流動をはじめとする各種の層流流動場における測定諸量は，かなり理論とよい一致を得ると考えられていた。そのため一般的に層流における流動様相は分子粘性に起因する粘度変化の影響を除けば，ニュートン流体の場合とほとんど差異は生じないものと考えられてきた。しかし，レーザ光による流速測定など探子を使用しない場合以外，すなわち熱線流速計あるいはピトー管などの微細な探子を使用する場合，あるいは壁面に小孔を設けていわゆる垂直応力（あるいは圧力）を計

測する場合などでは、流体が局所的に加速されるため、粘弾性効果が強く現われることが予測され、その結果従来の測定処理方法を使用したのではかなりの誤差を生じることが予期され、そのような実験的検討も多少行なわれてきている。これらの問題点のうち、いわゆる圧力計測において実用上最も重要となる円管内定常流差圧計測においては粘弾性効果の影響が相殺されるため、希薄高分子溶液を対象とする場合には問題の生じる機会は余り多くはないものと考えられる。

以上にかんがみ本論文では、希薄高分子溶液の流動計測の問題点のうち熱線流速計およびピトー管法による速度測定の問題を解析的、実験的に明らかにすることを主目的としている。そのためまず希薄高分子溶液の挙動を定量的に捉えるために必要となる法線応力差の新測定法を詳述し、ついで円柱周りの速度場および熱伝達を解析的に解明し、溶液物性の熱線使用時等における影響を明らかにし、ついでピ

ト-管法による速度測定時の問題点を解析的, 実験的に説明する.

1.2 従来の研究

1948年オランダで開催された国際レオロジー会議においてトムズはポリメチルメタクリレートモノクロルベンゼン溶液の円管内流に関する研究結果を発表し, 溶媒のみの場合に比して, この溶液では摩擦抵抗が減少することを報告した⁽⁹⁸⁾. これが希薄高分子溶液において乱流摩擦抵抗が減少する現象の初めての研究報告と言われており, その後この現象はトムズ効果と呼ばれている. その後, 1959年 Shaver と Merrill⁽⁸⁶⁾ および Dodge と Metzner⁽¹⁹⁾ により非ニュートン流体(CMC, アルギン酸, ポリイソブチレン等)速度依存性の粘度を有する流体)の管内流実験が詳細に行なわれ, これらの流体が異常な摩擦抵抗減少効果を呈することが示された. 同じころ, Ousterhout⁽⁷¹⁾, Dever⁽¹⁸⁾ らは油井技術で高圧の砂水混合物中に砂

を浮遊させるのにある種の樹液を用いると著しく摩擦が減少することを見い出した。これらの樹液のうち Guar Gum を用いた場合摩擦減少効果が最も顕著であり、Guar Gum は今日知られる限り摩擦抵抗減少を呈する天然物としては最良のものである。これらの油井技術の経験⁽⁸⁰⁾に基づいて各種の応用が試みられた。これらに関して当時の研究業績のうち最も顕著なものが Fabula による報告⁽²⁸⁾であり、この研究により数 ppm オーダーのポリエチレンオキシドの希薄高分子溶液においてもかなりの摩擦抵抗減少効果を呈することが明らかにされた。この当時までの抵抗減少効果に関する研究論文はレオロジー、化学工学あるいは油工学などに発表されていたが、1963年および1964年になって Hoyt らにより流体の分野で発表されてから⁽⁴⁶⁾⁽⁴⁷⁾、以前の研究の確証あるいはさらに拡張を試みる研究が広く行なわれるようになった。

ある種の希薄高分子溶液はこのように乱流摩擦抵抗の著しい減少効果を呈するため、流体輸送、油井

掘削などにおける摩擦損失の減少など実用上の見地をその背景として、希薄高分子溶液の流動に関する研究は抵抗減少効果の評価ならびにその機構の解明を主流として発展してきた。そこで以下本研究の背景となっている希薄高分子溶液の流動に関する研究全般について概説する。

乱流摩擦抵抗減少効果を呈する高分子物質は現在までに種々知られており、これらのポリマーに共通な性質として、直鎖状高分子であること、分子量が大であること、溶解性が良好であることの3点をあげることができる。抵抗減少効果に有効なポリマーは Guar Gum, Polyethylene oxide, Polyacrylamide, Sodium Carboxymethylcellulose, Hydroxyethylcellulose 等である。

これらの数 ppm オーダの希薄溶液においても顕著な乱流摩擦抵抗減少効果を呈することが報告されてから多数の実験的研究がなされるようになったが、装置の容易さ等の観点から円管内流に関する実験結果が最も多い。円管内流の実験結果により種々のト

ムズ効果の特徴が見い出されている。その第1は管径効果と呼ばれるもの、すなわち同一溶液、同一レイノルズ数においても抵抗減少は使用した管径が小なるほど著しいという現象で、初めて Savins⁽⁸⁰⁾ により指適され、後に富田により理論的に示された⁽⁹⁶⁾。これは定性的にはレイノルズ数が一定であっても、管径が異なることにより弾性力と粘性力との比を示す無次元数（ワイゼンベルク数）が異なるためと解釈される。第2が最大抵抗減少効果と呼ばれるもので、同一溶液一定レイノルズ数において、溶液濃度を増加させた場合でも、管径を減少させた場合でも摩擦抵抗係数は減少するがその減少率は一定値で飽和してしまうという現象であり、Hoytらにより報告された⁽⁴⁷⁾。またその最大抵抗減少を示す曲線が高分子溶液とは無関係に表わせることが Virkらにより示された⁽¹⁰¹⁾。第3に抵抗減少効果は壁面せん断応力がある一定値以上になって初めて生じるということが、Elataら⁽²³⁾、Meyer⁽⁶⁸⁾ により示され、この臨界せん断応

力と高分子の特質との関係が Virk 氏⁽¹⁰⁰⁾ また Fabula 氏⁽²⁹⁾ により検討され論じられているが、まだすべての現象をとらえるほど定式化されてはいないようである。第4は遷移の遅延と称される現象で、細管内流動において観察されるもので、ニュートン流体の場合では乱流へと遷移を起すようなレイノルズ数 (≈ 2300) の時壁面せん断応力がすでに抵抗減少効果を生じさせるのに十分な値に達しているため、レイノルズ数をそれ以上に増加させてもニュートン流体のような明白な遷移曲線を描かずに、摩擦抵抗係数は減少して行く。この現象は White 氏⁽¹⁰⁷⁾ により詳細に研究された。円管内流動については以上のような特徴が見い出されているほか、工学上重要となる壁面粗さの抵抗減少効果に及ぼす影響についても研究されている。すなわち 1964 年 Hoyt 氏により粗壁を有する場合でも高分子を添加することにより効果的な結果の得られることが示されて以来⁽⁴⁷⁾、多くの研究者により研究され、中でも Virk⁽¹⁰³⁾ による報告が代表的で、

それによるとかなり高いレイノルズ数まではなめらかな壁面を有する場合と同じ抵抗減少が得られることが示された。

以上が管内流の摩擦抵抗に関する主な研究結果で、管内流に関してはさらに速度分布測定、全圧測定、変動（乱れ）測定、流れの可視化等の実験的研究がなされている。

速度分布：円管内乱流速分布測定結果に関して言えば、抵抗減少を生じない非ニュートン流体の乱流核における速度分布は Bogue 氏⁽⁹⁾によるとニュートン流体に対する結果と同じで

$$u^+ = A \ln y^+ + B \quad (A=2.5, B=5.5)$$

で表わされる。他方抵抗減少効果を生じる希薄高分子溶液に対しては同様に

$$u^+ = A \ln y^+ + B + \Delta B \quad (\Delta B > 0)$$

なる関係が成立するとされ、この係数 A が不変なことすなわちいわゆる Prandtl の混合長が不変なことが初めて Meyer⁽⁶⁸⁾ により示され、Elata 氏⁽²⁴⁾ により確め

られた。この速度分布および層流底層の肥厚化は、Goren⁽⁴⁰⁾、Giles⁽³⁸⁾、Kozicki⁽⁵⁷⁾により報告されているがその多くはピト-管法により測定されているため、本論文で検討するようにその計測には多少の誤差が含まれているものと推定される。しかしこの速度分布および層流底層の肥厚化については探子を使用しない方法、すなわち高速度カメラによる方法によりNadolink⁽⁶⁹⁾によって、またレーザー流速計によりRudd⁽⁷⁸⁾によって確認された。

全圧測定：Astarita⁽⁶⁾によりピト-管法に基く全圧測定により速度計測を行なうとかなりの誤差（場合によっては30%程度）を伴なうことが示され、その原因の因子として円管内に発達している応力分布との関係が検討された。後にMetzner⁽⁶⁷⁾により各種形状の全圧管に及ぼす、計測誤差の原因となりうる因子として定性的に、(i)探子未挿入時に既に存在する応力に起因するもの、(ii)変動速度に起因するもの、(iii)探子近傍に比較的厚い境界層が発達することの3

点が示された。速度測定に対して従来の方法による全圧測定値処理により大きな誤差が生じたこと及びピトー管径を変化させたことによる測定結果により前記原因(iii)を推定させる実験結果をSmithら⁽⁸⁹⁾が報告している。全圧管の寸法および被測定溶液の濃度の変化に対する全圧の較正值について、ポリエチレンオキサイドWSR-301を使用した場合の実験結果を、Wetzelら⁽¹⁰⁶⁾が報告している。これによると比較的濃い800ppm水溶液では指示圧が動圧の40%程度に減少する場合も有り得ることが示されている。

熱線およびhot-film法：高分子溶液の円柱周りの流れおよび熱伝達は溶媒のみの場合に比してかなり変化することが予測され、特に乱れを測定する場合には非常に大きな誤差を伴なうものと考えられているが、熱線の較正法等が十分に知られていないため、従来の方法で熱線により計測された乱れスペクトル等も報告されている⁽¹¹⁶⁾。これらの希薄高分子溶液中における熱線等の応答の異常性についてはMetznerら

(67)によつて初めて定性的に指適され、後に James ら (52)によつて実験的に調べられた。hot-film のセンサを使用した場合については Lindgren ら⁽⁶¹⁾により低速領域で、Fabula⁽³⁰⁾により高速領域で行なつた実験結果が報告されており、くさび形 hot-film センサでは熱線の場合と同様な異常な現象が出現することが示された。

乱れ測定：ピエゾ変換器を使用して（探子部分は全圧管型のため測定結果にかなりの問題が残るが）、Wells ら⁽¹⁰⁵⁾は希薄な粘弾性流体の乱れの強さの測定を行なっている。また Seyer ら⁽⁸⁴⁾は気泡法により、Rudd (77)(78)および Chung ら⁽¹¹⁾はレーザドップラ流速計により変動測定を行なっている。

流れの可視化：染料を管中心および壁面に注入することにより Shaver ら⁽⁸⁶⁾は管内流を観測し、Gadd⁽³⁷⁾は染料の流脈線を撮影することにより水道水と高分子溶液の乱流状態を比較している。

希薄高分子溶液に関する実験的研究は前述のよう

な円管内乱流に関するものが多いが、その他回転円板に沿う流れ、回転円柱に沿う流れ、平板に沿う流れ等が研究されている。

回転円板に沿う流れ：広い液中の回転円板の摩擦抵抗に関する初期のデータは Hoyt ら⁽²⁸⁾⁽⁴⁶⁾⁽⁴⁷⁾により報告され、円管乱流摩擦抵抗の場合と同様に摩擦抵抗が著しく減少することが示された。 Bilgen⁽⁸⁾により回転円板面上の流脈線が報告され、さらに回転円板の摩擦抵抗に関する実験的研究は Gadd⁽³⁵⁾, Smallman ら⁽⁸⁸⁾, Whitsitt ら⁽¹⁰⁸⁾, 加藤 ら⁽¹¹²⁾により閉じた容器中の場合を含めて広範になされた。同じく解析的研究は Giles⁽³⁸⁾, Poreh ら⁽⁷³⁾, 富田 ら⁽¹¹⁷⁾により行なわれた。

回転円筒に沿う流れ：テイラー渦の安定性に関する研究が多く、Rubin ら⁽⁷⁶⁾, Denn ら⁽¹⁶⁾, Merrill ら⁽⁶⁵⁾により報告され、乱流域におけるトルクの減少効果については Elata ら⁽²⁴⁾により報告されている。

平板に沿う流れ：解析的研究は管内流との相似性に基いているものも多く、Granville⁽⁴¹⁾, Elata⁽²⁵⁾により行

なわれ、実験的研究は Levy 氏⁽⁵⁹⁾, Fruman 氏⁽³⁴⁾, Tagori 氏⁽⁹²⁾を始め数多く報告され、摩擦抵抗減少が見い出されている。

摩擦減少に関する理論：

(a) 非等方粘性理論：多くの高分子溶液は濃度が増すと非ニュートン粘性を示し、そのため円管内流では擬塑性流体と同等である結果、渦の発生が抑えられるものと考えられたが、非常に希薄でほぼニュートン粘性を示す高分子溶液中でも著しい抵抗減少効果を呈すため、余り適切な理論とは考えられていない。

(b) 粘性底層の肥厚化による理論：Wells⁽¹⁰⁴⁾は溶液の弾性的挙動のために乱流運動量輸送が減少するものと考え、Prandtl の混合長理論を修正しベキ乗則を使用し、普遍速度分布および管摩擦係数を算出したが、実験結果と一部矛盾する点がある。そこで Meyer 氏⁽⁶⁸⁾は混合長および Karman 定数を不変とし、弾性的挙動の結果、粘性底層および遷移層が肥厚化している

として、管摩擦係数を誘導した。

(c)粘弾性理論：トムズ効果はポリマー溶液の粘弾性的挙動の結果、乱れが抑制されて生じるものと広く考えられている。この原因として溶液の法線応力差による微小渦の減衰作用を考える立場および高分子自身の伸張のために運動量交換が阻害されると考える立場がある。前者の法線応力差が主要な原因であるとする立場により Metzner⁽⁶⁶⁾ は摩擦減少と法線応力差を関連づけ、また富田⁽¹¹⁴⁾、長谷川⁽¹¹¹⁾ は法線応力差のため混合長が減少するとして管摩擦係数を算出した。他方 Gadd⁽³⁶⁾ は、着色水注入の観測により微小渦の抑制はある程度濃い溶液では認められるが、10 ppm 以下の濃度のポリエチレンオキサイド水溶液では認められないにもかかわらず著しい抵抗減少を呈するので、トムズ効果はせん断力によるポリマーの伸張配向に依るとした。

(d)その他：エネルギー散逸の立場で、Astarita⁽⁵⁾ は流体の速い変動時間に対しては溶液の弾性的性質が粘

性的性質より支配的になり散逸エネルギーが減少することを示した。同様に散逸エネルギーの計算により芦立ら⁽¹¹⁰⁾は管摩擦係数を求めた。

希薄高分子溶液の実際的応用例：

guar が摩擦抵抗減少剤として用いられたのは油井掘削の時であり，その後高分子の摩擦抵抗減少剤としての流体輸送における利用が考えられているが，まだ余り実用化されていない。船舶の模型実験では一般にフルード数とレイノルズ数を同時に規定できないため，高分子溶液中で実験を行ない，摩擦抵抗減少効果を利用して粘性の効果を実際に近づけようという試み⁽²⁶⁾がある。また船舶に高分子溶液の吹出しを行ない，摩擦抵抗を減少させ，動力の節減等をはかることが考えられ，Dove⁽²⁰⁾，Canhamら⁽¹⁰⁾により実験も行なわれたが，現在のところでは高分子経費が動力費の低減を上まわるため実用化には至っていない。現在完全に実用化されているのは New York 市における消防の場合⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁸³⁾で，流量増加，圧力損失減少，

放水射程増加などが報告されている。

希薄高分子溶液に関する研究はほぼ以上のような状況で、主として抵抗減少という工学上の願望を追求してきたが、最近では高分子物質の油系統への添加によるみかけの粘度変化の利用あるいは摩擦損失の減少の利用等をはかるという立場もあり、広く一般に、高分子の微小量の添加による抵抗減少効果利用の応用分野が広がりつつある。そのため最近さかんに国際会議が開催されるようになって、1974年だけでも5月フランスにてCENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE(CNRS)主催のCOLLOQUE INTERNATIONAL POLYMERES et LUBRIFICATION, 9月イギリスにてBHRA 主催のInternational Conference on Drag Reduction, また西ドイツAachen工科大学, イギリスSalford 大学共催のInternational Conferenceなどの国際会議が開催された。

1.3 本論文概要

本論文は、希薄高分子溶液の流動計測上の問題点のうち、主として熱線流速計およびピトー管法による速度測定の際に生じる問題点を、解析的ならびに実験的に評価、検討、解明し、さらにそれに関連して希薄高分子溶液の挙動を定量的に捉えるために必要となる法線応力差の新測定法を詳述、検討するものであり、本文5章および付録から成っている。

第1章「緒言」においては、本研究の目的、従来の研究ならびに本論文概要について述べる。

第2章「希薄高分子溶液の法線応力差測定法」においては、希薄高分子溶液の法線応力差の新測定法を詳述し、法線応力差測定に及ぼす供試管形状、表面張力等各種の影響因子を解析的ならびに実験的に検討する。

第3章「円柱周りの速度場および温度場」においては、希薄高分子溶液中における熱線流速計の使用の可否に関連する基本的問題として、円柱周りの非

圧縮，二次元流の流れ場，温度場を取り上げ，解析的，数値的に速度場，温度場を求めて，希薄高分子溶液の粘弾性挙動に起因する結果としての熱伝達等の異常性を明らかにし，既存の実験結果等と比較検討して，熱線を使用する際に異常性に注意を喚起すべきことを指摘する。

第4章「ピトー管法による流速測定」においては，ピトー管法による希薄高分子溶液の速度測定に際して，従来の立場では処理し得ない異常性を呈するという問題を，流れ場の局所的な変化を考慮した新たな観点により解析し，速度測定の実験結果と比較検討して，溶液の粘弾性挙動に起因するピトー管特性への影響を明確にする。

第5章「結論」においては，本研究で得られた結論を総括して述べる。

付録「レオロジ方程式概説」においては，一般のレオロジ方程式の具備すべき性質等を述べ，さらに今までに提起された粘弾性流体に対するレオロジ方

程式の特徴を一部表記する。

1.4 記号表

(本記号表中, 並記された無次元量は第3章に限る使用法である. また本文中明記あるいは定義されたものは必ずしも以下によらない.)

- a : 円柱半径, 供試管内半径
- B_0 : 式 (2.68) で定義
- B_1 : 式 (2.69) で定義
- $B_{(1)}^{ij}$: 第1種の Rivlin-Ericksen 加速度テンソル
- $B_{(2)}^{ij}$: 第2種の Rivlin-Ericksen 加速度テンソル
- c : 定圧比熱
- c_D : 抵抗係数
- c_{Df} : 摩擦抗力係数
- c_{Dp} : 圧力抗力係数
- D : 管径, 直径
- D_e : 有効径
- D_i : 供試管内径
- D_o : 供試管外径
- e_{ij} : 変形速度テンソル $\equiv \frac{1}{2}(v_{i;j} + v_{j;i})$

- f : 供試管出口に作用する表面張力の合力
- g : 重力加速度定数
- g_{ij} : 計量テンソル
- h : 差分間隔
- l : 供試管とピアノ線との距離 (図 2-2), 静止渦の長さ
- L : 供試管長
- m : 微小攪乱を与える定数 (複素数)
- n : 非ニュートン粘性を示す指数
- N : 装置上の供試管数 (=2)
- Nu : 局所ヌセルト数
- \bar{Nu} : 平均ヌセルト数
- p : 圧力または無次元圧力 $= P/\rho U_0^2$
- P : 圧力
- p_a : 大気圧
- Pr : プラントル数
- q : 熱流束ベクトル
- Q : 体積流量

- r : 円柱座標または無次元円柱座標
 Re : 直径基準レイノルズ数 $= 2aV/\nu$ または $2aU_{\infty}/\nu$ または DV/ν
 Re_c : 図 2-22 で定義される点に対応する Re 数
 s : 溶液の弾性的挙動を示す指数
 S : 管断面積
 t : 時間
 T : ピアノ線等による反力モーメント
 T^{ij} : 偏差応力テンソル
 T^{xx} 等: 偏差応力テンソルの物理成分
 T_{xx} 等: 偏差応力テンソルの物理成分
 u : 速度の x 成分または無次元速度 $= U/U_{\infty}$
 U : 速度の x 成分
 U_{∞} : 一様流速度, 局所速度
 u^+ : $\equiv U_{\infty}(\text{局所速度})/u^*$
 u^* : 摩擦速度 $= \sqrt{\tau_w/\rho}$
 u_a^+ : \equiv みかけ速度 $/u^*$
 v : 速度の y 成分または無次元速度 $= V(\text{速度の}$

Y 成分) $/U_\infty$

- V : 平均流速, 速度の Y 成分
 v_i : 速度ベクトル
 w : 速度の z 成分
 x : 直交デカルト座標または無次元座標 $= X/a$
 X : 直交デカルト座標
 y : 直交デカルト座標または無次元座標 $= Y/a$
 Y : 直交デカルト座標
 y_0 : 壁面からの距離
 y^+ : 壁面からの無次元距離 $= y_0 u^*/\nu$
 z : 直交デカルト座標 (流れの向き)
 γ : オイラー定数
 Γ : ざり速度
 δ : 速度境界層厚さ
 δ_T : 温度境界層厚さ
 ε : 無次元量 $= \lambda/(\rho a^2)$
 ζ : 無次元渦度 $= aZ/U_\infty$
 Z : 渦度

- η : 無次元座標 = r/a , 無次元極座標(偏角座標)
 $[\eta]$: 固有粘度
 θ : 円柱座標(偏角)または無次元温度 = $(\Theta - \Theta_{\infty}) / (\Theta_w - \Theta_{\infty})$
 Θ : 温度
 κ : 熱伝導率
 λ : 溶液の弾性的挙動を示す係数
 λ_0 : 管摩擦係数
 μ : 溶液の粘性的挙動を示す係数
 ν : 動粘性係数
 ξ : 無次元極座標(動径座標)の自然対数
 ρ : 密度
 σ : 表面張力
 τ : せん断応力
 τ^{ij} : 偏差応力テンソル
 τ_w : 壁面せん断応力の絶対値
 ψ : 無次元流関数 = $\Psi / (aU_{\infty})$
 Ψ : 流関数

ω : 攪乱を与えろ角振動数, 加速係数

添字 (上付)

* : 変動分

添字 (下付)

w : 壁面, 円柱表面

∞ : 無限遠

演算子

Δ : ラプラス演算子または無次元ラプラス演算子

Δ^* : ラプラス演算子

$\frac{\delta}{\delta t}$: 対流微分演算子

; δ : 共変微分演算子

その他

II : テンソル $B_{(1)}^{ij}$ の第 2 不変量 = $B_{(1)}^{mn} B_{(1)mn}$

第2章 希薄高分子溶液の

法線応力差測定法

2.1 緒言

希薄高分子溶液などのある種の粘弾性流体は、円管内乱流流動状態などで溶媒だけの場合に比して著しく摩擦抵抗が低下する、という現象が見い出されている⁽⁹⁸⁾。そのため工学上また工業上も注目され、かなり研究されているが、まだ完全には解明されつくしてはいないようである⁽⁴⁸⁾。

このような現象をはじめとして各種の流動状況を定量的にとらえるためには、希薄高分子溶液の流動特性を明らかにする必要がある。定常状態下の流動特性としては粘度および法線応力差のずり速度依存性をまずあげることができる。このうち粘度のずり速度依存性は、希薄高分子溶液に限らずほぼ一般的に確立されており、円管内定常層流時の圧力降下、円錐平板型レオゴニオメータの回転トルクの測定などにより求めることができる。しかしながら法線応

力差の場合は、濃厚溶液についてはレオゴニオメータ法による測定あるいは流動複屈折法による測定などが可能であるが、希薄高分子溶液の場合については溶液の粘弾性的挙動が弱いためその検出精度などの点で上述の方法による測定は不可能に近い状況であると言えよう。そこで従来、希薄高分子溶液の法線応力差の測定は、円管より流出するジェットを利用するジェットスラスト法⁽⁶⁴⁾⁽⁷⁰⁾などにより行なわれていたが、その解析に当って、流出ジェット全体の応力緩和、スラスト測定に際しての表面張力の評価など、より多くの仮定が必要となるなどのためか本りの問題点を含んでいる。そこで本章では、この希薄高分子溶液の法線応力差測定に関する新たな一方法を示し、その際に生ずる問題点などを検討することにする。

2.2 法線応力差の測定原理および理論解析

2.2.1 測定理論

本法による測定原理は、円管内定常層流流動下に

おける管断面に作用する法線応力の合力を以下に述べる測定量より求め、それにより流動特性（円管壁面ずり速度と円管壁面における第1法線応力差の関係）を算出することである。図2-1に測定装置概略を示す。管断面に作用する合力は、供試管出口の流出ジェット運動量、ピアノ線等によるトルクおよび出口に作用する表面張力の差として求める。すなわち角運動量則適用の検査面を図2-2のようにとると角運動量則より

$$\iint w^2 dS = \frac{T}{lN} + f + \iint (T^{zz} - p + p_a) dS \quad (2.1)$$

を得る。ただし $l \gg a$ を仮定し、座標は管軸を z 軸（流れの向きを正）とする円柱座標を使用する。（本報では $l = 0.326 \text{ m}$ 。）流体は非圧縮性とし、物性（粘性係数等）は温度変化の影響を受けないものとする。また円管内流は定常層流であり、流れは軸対称とする。さらに管出口における端末効果の影響は省略できるものとし、速度分布は管軸方向に変化しないも

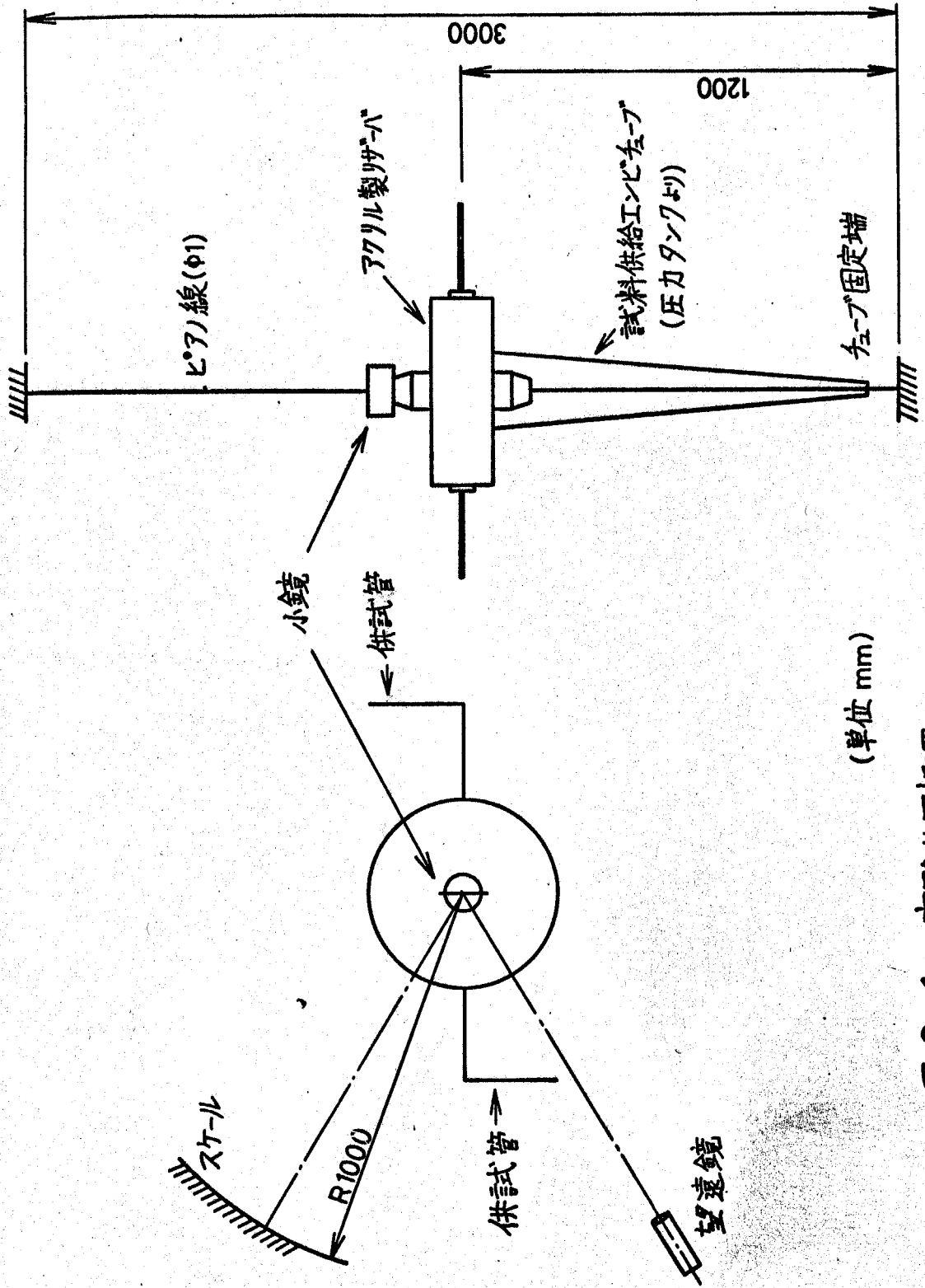


図 2-1 実験装置概要

(単位 mm)

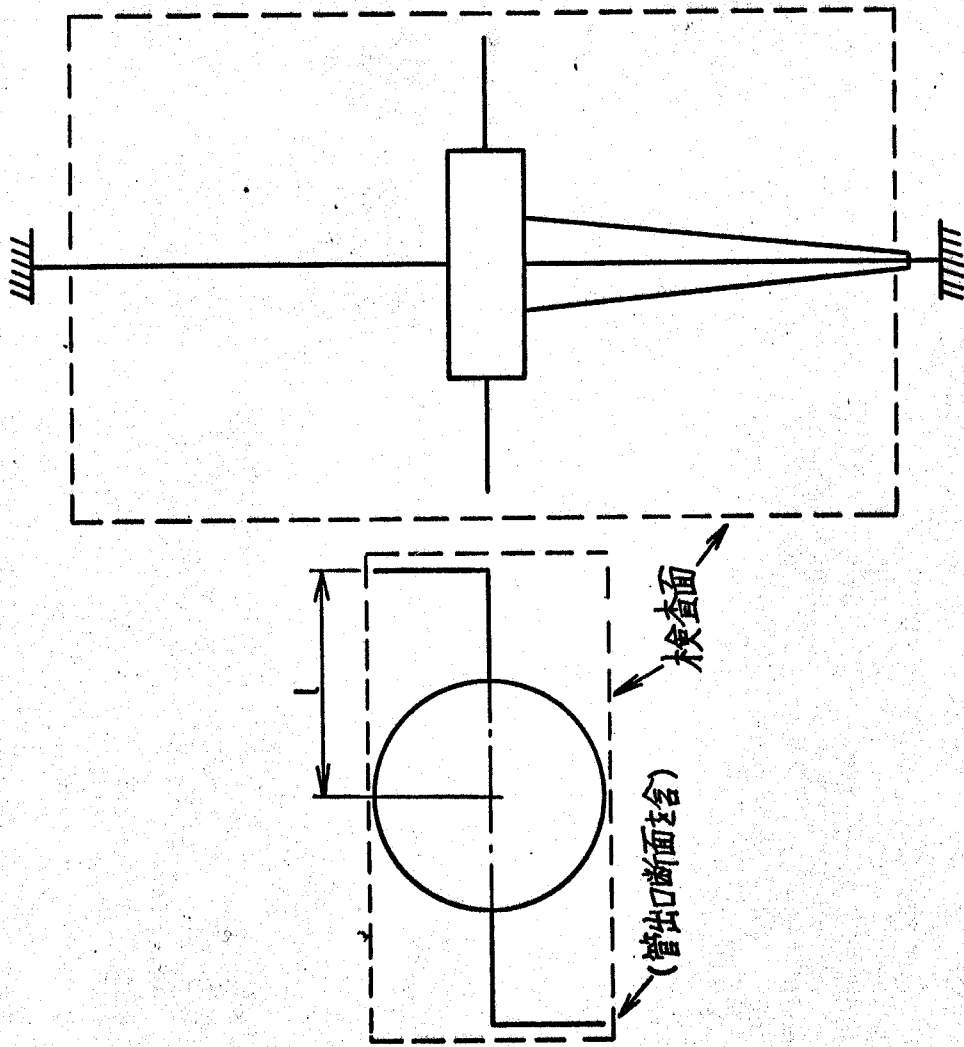


图 2-2 检查面概要

のとする。(本節で取扱う

管出口のジェット形状は,

図2-3に示すように理想的

な場合とする。)以上の仮定 図2-3 ジェット形状

下において応力運動方程式は r -, θ -, z -方向について

それぞれ

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} T^{rr} + \frac{1}{r}(T^{rr} - T^{\theta\theta}) \quad (2.2)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} T^{r\theta} + \frac{2}{r} T^{r\theta} \quad (2.3)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} T^{rz} + \frac{1}{r} T^{rz} \quad (2.4)$$

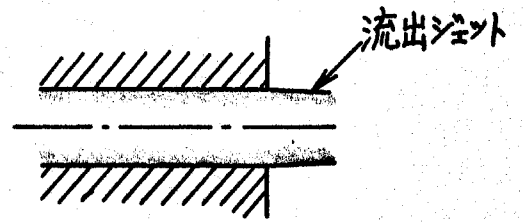
となる。仮定により、偏差応力成分 T^{rr} , $T^{\theta\theta}$, T^{rz} は z の関数とはなり得ないので式(2.2), (2.4)より

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const.} \quad (2.5)$$

を得る。これより式(2.4)を用いて

$$-T^{rz} = \frac{r}{a} \tau_w \geq 0 \quad (2.6)$$

を得る。ただし



$$\tau_w = -\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a \quad (>0) \quad (2.7)$$

であり，壁面せん断応力は $(-\tau_w)$ となる。さて

$$I_1 \equiv \iint T^{zz} dS = 2\pi \int_0^a r T^{zz} dr \quad (2.8)$$

$$I_2 \equiv \iint p dS = 2\pi \int_0^a r p dr \quad (2.9)$$

$$I_3 \equiv \iint p_a dS = \pi a^2 p_a \quad (2.10)$$

とおく。また式(2.6)を考慮すれば積分(2.8),(2.9)の独立変数を r より τ ($\equiv \tau_w r/a$)に変換可能である。しかる後，偏差応力 T^{rr} 等が，単純ずり流動下ではずり速度のみの関数であること，すなわち τ のみの関数となることを利用すれば式(2.8)より

$$I_1 + \frac{\tau_w}{2} \frac{dI_1}{d\tau_w} = \pi a^2 T_w^{zz} \quad (2.11)$$

を得，式(2.2),(2.9)より

$$I_2 + \frac{\tau_w}{2} \frac{dI_2}{d\tau_w} = \pi a^2 \{p(a) - T_w^{rr}\} + \frac{\pi a^2 \tau_w}{2} \frac{d}{d\tau_w} \{p(a) - T_w^{rr}\} + \frac{\pi a^2}{2} (T_w^{rr} + T_w^{\theta\theta}) \quad (2.12)$$

を得る。したがって式(2.10)(2.11)(2.12)より

$$(I_1 - I_2 + I_3) + \frac{\tau_w}{2} \frac{d}{d\tau_w} (I_1 - I_2 + I_3) = \pi a^2 (T_w^{zz} - T_w^{rr}) + \frac{\pi a^2}{2} (T_w^{rr} - T_w^{\theta\theta})$$

$$-(1 + \frac{\tau_w}{2} \frac{d}{d\tau_w}) \{p(a) - T_w^{rr} - p_a\} \pi a^2$$

(2.13)

なる関係が得られる。よって

$$I \equiv \iint (T^{zz} - p + p_a) dS + \pi a^2 \{p(a) - T_w^{rr} - p_a\} \quad (2.14)$$

とおけば、式(2.13)より壁面における第1法線応力差 $(T^{zz} - T^{rr})_w$ として

$$(T^{zz} - T^{rr})_w = \frac{I}{\pi a^2} (1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln I}{d \ln \tau_w}) - \frac{1}{2} (T^{rr} - T^{\theta\theta})_w \quad (2.15)$$

を得る。式(2.1)を用いると式(2.14)は

$$I = \iint w^2 dS - \frac{T}{IN} - f + \pi a^2 \{p(a) - T_w^{rr} - p_a\} \quad (2.16)$$

となる。表面張力による力 f は

$$f \approx 2\pi a \sigma$$

であり、希薄高分子溶液においてはバラス効果（噴流のふくらみ現象）が顕著ではないので、管出口近傍で静的な場合に成立するラプラスの表面張力の関係式が同様に成立するものとするならば

$$p(a) - T_w^{rr} - p_a \approx \frac{\sigma}{a}$$

である。したがって式(2.16)は

$$I = \rho \iint w^2 dS - \frac{T}{lN} - \pi a \sigma \quad (2.17)$$

となる。以上により管出口における運動量と壁面 ($r=a$) における法線応力差の関係が式(2.15),(2.17)により知れたことになる。さてずり速度 Γ とせん断応力 τ との関係をも $\Gamma = f_0(\tau)$ と記せば、流量 Q は

$$Q = 2\pi \frac{a^3}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \tau \int_{\tau}^{\tau_w} f_0(\tau) d\tau d\tau$$

であり、壁面ずり速度 Γ_w は平均流速 V を用いると、

$$\Gamma_w = f_0(\tau_w) = \frac{V}{a} \left(3 + \frac{d \ln V}{d \ln \tau_w} \right) \quad (2.18)$$

となる。関数 f_0 を使用すれば運動量に対しては

$$\iint w^2 dS = 2\pi \frac{a^4}{\tau_w^4} \int_0^{\tau_w} \tau \left\{ \int_{\tau}^{\tau_w} f_0(\tau) d\tau \right\}^2 d\tau \quad (2.19)$$

を得る。ところで適当なずり速度の範囲内では式(

2.18) において

$$\frac{d \ln V}{d \ln \tau_w} = \text{const.} = \frac{1}{n}$$

が成立する場合が多い。このときは式(2.18)より

$$f_0(\tau) = \left(\frac{\tau}{\mu}\right)^{1/n} \quad (2.20)$$

となり，これはいわゆるベキ乗則流体を示す．ニュートン流体では $n=1$ となる．式(2.20)に従う場合，式(2.18),(2.19)はそれぞれ

$$\Gamma_w = \frac{3n+1}{n} \frac{V}{a} \quad (2.21)$$

$$\iint w^2 dS = \frac{3n+1}{2n+1} \pi a^2 V^2 \quad (2.22)$$

となり，また

$$\frac{d}{d \ln \tau_w} = \frac{1}{n} \frac{d}{d \ln \Gamma_w} \quad (2.23)$$

である．

2.2.2 供試管幾何形状の測定に及ぼす影響

前節では完全な軸対称の円管内流について考察した．しかし実際の供試管では真円度および円筒度が必ずしも十分に良好であるとは言えないことも考えられる．そこで以下この点を検討する．

2.2.2 (i) 円筒度良好の場合

完全な円形管の場合は前節(2.2.1)で述べたような 2

次流れのない層流状態が存在しうるが、一般形状の柱状管内流では2次流れの存在も予測されている⁽⁴²⁾。しかしまだ2次流れの存在の確認もされていないようであり、もし存在したとしても希薄高分子溶液ではその影響があまり大きくないものと考えても大略さしつかえないであろう。

さて一般にはレオロジ方程式を仮定せずに応力運動方程式が直接解ける場合は非常に少なく、円管内層流、単純ずり流動などに限られている。そこで本節ではレオロジ方程式を仮定し、流れ場を求めて、幾何形状の測定に及ぼす影響を大略評価することにする。まず第一にレオロジ方程式として、ニュートン粘性($n=1$)を示し、かつ希薄高分子溶液のレオロジ的挙動を比較的よく表わす次のモデルを使用する。

$$\tau^{ij} = \mu B_{(1)}^{ij} - \lambda \frac{\delta}{\delta t} B_{(1)}^{ij} \quad (2.24)$$

式(2.24)において $\lambda=0$ の場合は(非圧縮性)ニュートン流体を示す。式(2.24)に従う流体では、任意断面形

状の管路において2次流れの存在しない流れが可能で、その速度場を支配する方程式は $\lambda=0$ のニュートン流体に相当する場合と同形となり、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w = \text{const.} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \tag{2.25}$$

$$u = v = 0 \tag{2.26}$$

で与えられる。ここで境界が (図2-4)

$$\frac{r}{a} = 1 + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\theta + \theta_k) \tag{2.27}$$

$$(\varepsilon \ll 1, C_k \sim O(1))$$

で与えられるものとするれば、

速度 w は

$$\begin{aligned} \frac{w}{w_0} = & 1 - \eta^2 + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} C_k \eta^k \cos(k\theta + \theta_k) \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_m C_k (1-2m) \left[\eta^{m+k} \cos\{(m+k)\theta + \theta_m + \theta_k\} \right. \\ & \left. + \eta^{|m-k|} \cos\{(m-k)\theta + \theta_m - \theta_k\} \right] + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{2.28}$$

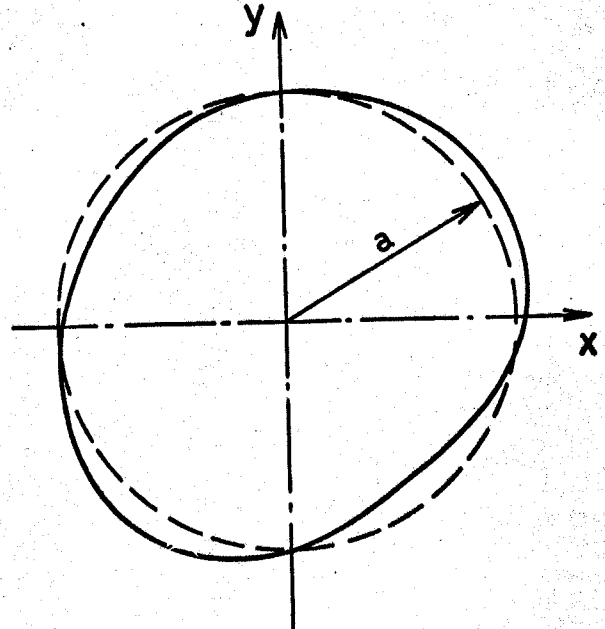


図2-4 境界(断面)形状

$$w_0 = -\frac{a^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z}$$

となる。ただし ε は境界形状の真円からの変位を与える無次元パラメータである。境界上のずり速度は位置により異なるので、真円の場合に真値を与えるように公称ずり速度 Γ を次のように定義する。

$$\Gamma \equiv \frac{4Q}{S} \sqrt{\frac{\pi}{S}} \quad (2.29)$$

この公称ずり速度 Γ に対する法線応力差 $(T^{zz} - T^{rr})_r$ は式(2.24)によれば

$$(T^{zz} - T^{rr})_r = 2\lambda\Gamma^2 \quad (2.30)$$

であり、他方測定値は式(2.15)の右辺第1項で与えられる(式(2.24)を用いると $T^{rr} - T^{\theta\theta} = 0$) ので、その関係として

$$(T^{zz} - T^{rr})_r = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{I}{S} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln I}{d \ln \tau_w} \right) \quad (2.31)$$

と置くことができる。 ε_2 値は式(2.14)を用い式(2.31)の右辺を計算することにより定まる。式(2.22)により、運動量相当量の公称値は $4Q^2/(3S)$ で与えられるので、

真値との比として ε_1 を

$$\iint w^2 dS = \varepsilon_1 \frac{4Q^2}{3S} \quad (2.32)$$

のように定義する。速度分布式(2.28)を用いると ε_1 , ε_2 はそれぞれ

$$\varepsilon_1 = 1 + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)(k-2)}{k+1} C_k^2 + O(\varepsilon^3) \quad (2.33)$$

$$\varepsilon_2 = 1 + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} 2(k-1) C_k^2 + O(\varepsilon^3) \quad (2.34)$$

となる。ちなみに楕円管(長径 $2a$, 短径 $2b$) の場合には

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= 1 \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) \end{aligned} \right\} (2.35)$$

長方形管(2辺 a, b) の場合には

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{27}{20} \left[1 - \frac{1920a}{\pi^7 b} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} \right)^7 \tanh \frac{(2k-1)\pi b}{2a} \right. \\ &\quad \left. - \frac{320}{\pi^6} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} \right)^6 \tanh^2 \frac{(2k-1)\pi b}{2a} \right] \\ &\quad \times \left[1 - \frac{192a}{\pi^5 b} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} \right)^5 \tanh \frac{(2k-1)\pi b}{2a} \right]^{-2} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{3}{2\pi} \frac{b}{a} \left[1 - \frac{192a}{\pi^5 b} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} \right)^5 \tanh \frac{(2k-1)\pi b}{2a} \right]^{-1} \quad (2.36)$$

正三角形管の場合には

$$\varepsilon_1 = 15/14$$

$$\varepsilon_2 = 15/(2\sqrt{3}\pi)$$

となる。次に非ニュートン粘性 ($n \neq 1$) を生じる場合について検討する。この場合レオロジ方程式として

$$\tau^{ij} = \mu \left(\frac{1}{2} \Pi \right)^{(n-1)/2} B_{(1)}^{ij} - \lambda \frac{\delta}{\delta t} B_{(1)}^{ij} \quad (2.37)$$

を用いる。この場合でも2次流れの生じない流れが可能で、式(2.27)の境界形状に対して速度 w は

$$w = a \frac{n}{n+1} \left(-\frac{a}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/n} \left[1 - \eta^{1+\frac{1}{n}} + \varepsilon f_1(\eta, \theta) + \varepsilon^2 f_2(\eta, \theta) + O(\varepsilon^3) \right] \quad (2.38)$$

$$f_1(\eta, \theta) = \frac{n+1}{n} \sum_{m=1}^{\infty} C_m \eta^{\beta_m} \cos(m\theta + \theta_m)$$

$$f_2(\eta, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[E_{mk} \eta^{\beta_k + \beta_m - 1 - n^{-1}} C_m C_k \cos\{(k+m)\theta + \theta_k + \theta_m\} \right.$$

$$\left. + F_{mk} \eta^{\beta_k + \beta_m - 1 - n^{-1}} C_m C_k \cos\{(k-m)\theta + \theta_k - \theta_m\} \right]$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{n+1}{2n} \left(\frac{1}{2n} - \beta_m \right) - E_{mk} \right\} \eta^{\beta_{k+m}}$$

$$\times C_m C_k \cos\{(k+m)\theta + \theta_k + \theta_m\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{n+1}{2n} \left(\frac{1}{2n} - \beta_m \right) - F_{mk} \right\} \eta^{\beta_{|k-m|}}$$

$$\times C_m C_k \cos\{(k-m)\theta + \theta_k - \theta_m\}$$

ただし

$$\beta_m = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n} - 1 + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{4m^2}{n}} \right\}$$

$$E_{mk} = \frac{n^2 - 1}{4n^2} \frac{k m n^{-1} - n \beta_k \beta_m - 2 k m \beta_k}{(\beta_k - 1 - n^{-1})(\beta_m - 1 - n^{-1}) - (1 + n^{-1}) - k m n^{-1}}$$

$$F_{mk} = \frac{n^2 - 1}{4n^2} \frac{2 k m \beta_k - k m n^{-1} - n \beta_k \beta_m}{(\beta_k - 1 - n^{-1})(\beta_m - 1 - n^{-1}) - (1 + n^{-1}) + k m n^{-1}}$$

(とくに $F_{11} \equiv 0$ とする.)

である. 前と同様に公称ざり速度 Γ を

$$\Gamma \equiv \frac{3n+1}{n} \frac{Q}{S} \sqrt{\frac{\pi}{S}} \quad (2.39)$$

で定義し,

$$\iint w^2 dS = \varepsilon_1 \frac{3n+1}{2n+1} \frac{Q^2}{S} \quad (2.40)$$

$$(T^{zz} - T^{rr})_{\Gamma} = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{1}{S} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln I}{d \ln \tau_w} \right) \quad (2.41)$$

とあけば

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = 1 + \varepsilon^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1+3n}{(n+1)^2} \beta_m + \frac{(1+3n)(1+2n)}{2n^2(\beta_m+1)} - \frac{5n^3+12n^2+12n+3}{2n(n+1)^2} \right. \\ \left. + F_{mm} \frac{2(1+3n)}{(n+1)^2} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{1+2n}{\beta_m+1} + \frac{2n}{2\beta_m+1-n^{-1}} \right) \right\} C_m^2 + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = 1 + \varepsilon^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[-\frac{2n^3+7n^2-1}{2n^2(n+1)} - \frac{2n^3-7n^2+1}{2n(n+1)} \beta_m + \frac{n+1}{2n} \frac{m^2}{\beta_m} \right. \\ \left. + \left\{ -\frac{2(n^3-3n^2+n+1)}{(n+1)^2} + \frac{2(n+1)}{n\beta_m} - \frac{4(1+3n)}{(n+1)(2\beta_m+1-n^{-1})} \right\} F_{mm} \right] C_m^2 \\ + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (2.43)$$

となる。式(2.42),(2.43)中の C_m^2 の係数を指数 n に対して
 図 2-5, 2-6 に示す。これらの図によつて示されるよ
 うに、境界の真円からのずれを大きく見積つて εC_m
 ~ 0.1 程度と仮定しても 1 からのずれは ε_1 では高々 1
 % 程度、 ε_2 では高々 5 % 程度しかずれないことが推
 定される。以上はレオロジ方程式の特定の場合であ
 り、たが非ニュートン粘性が強くない場合、すなわち
 n の値が 1 に近いような希薄高分子溶液の場合には、
 他のレオロジ方程式を用いてもほぼ同程度の値を示

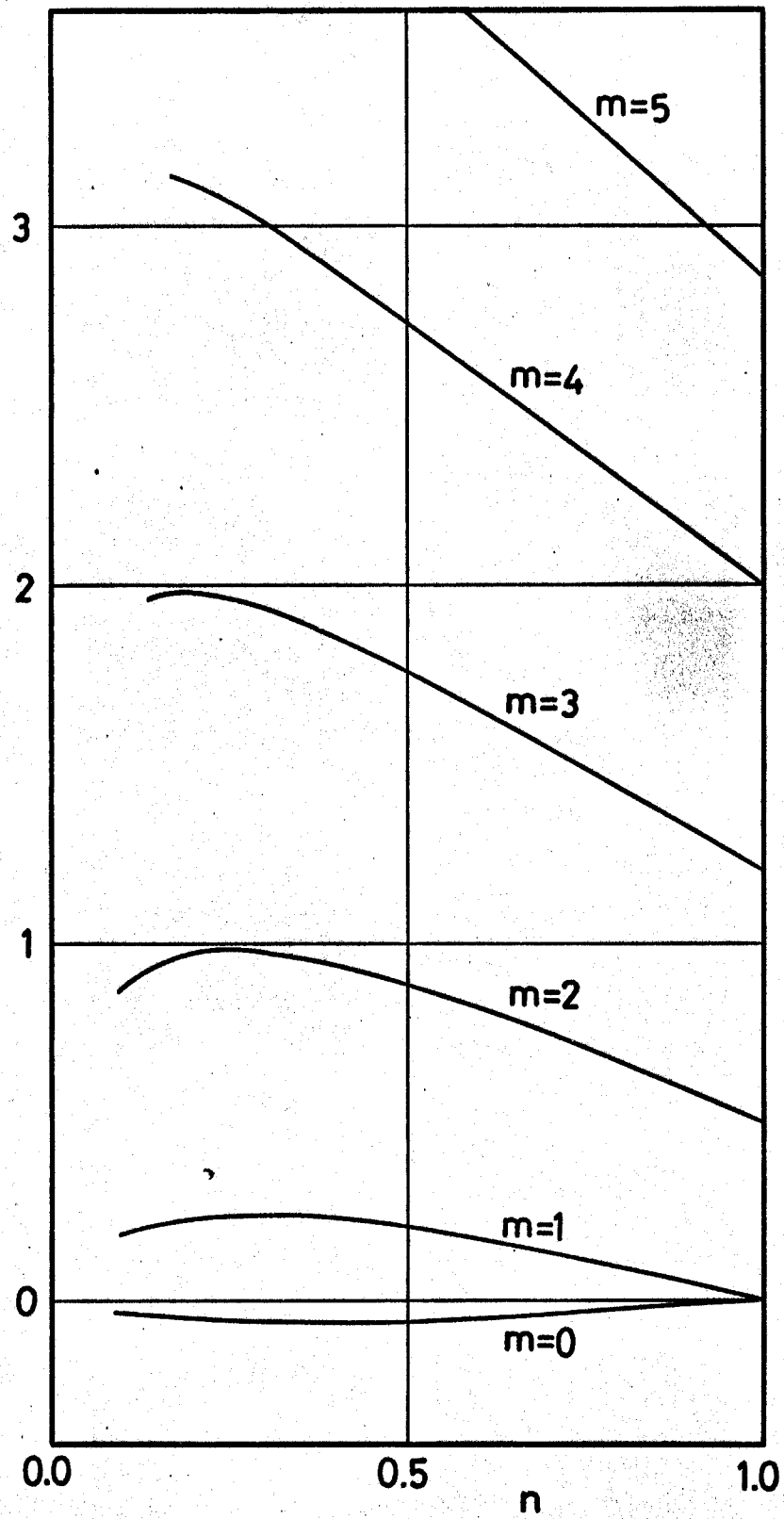
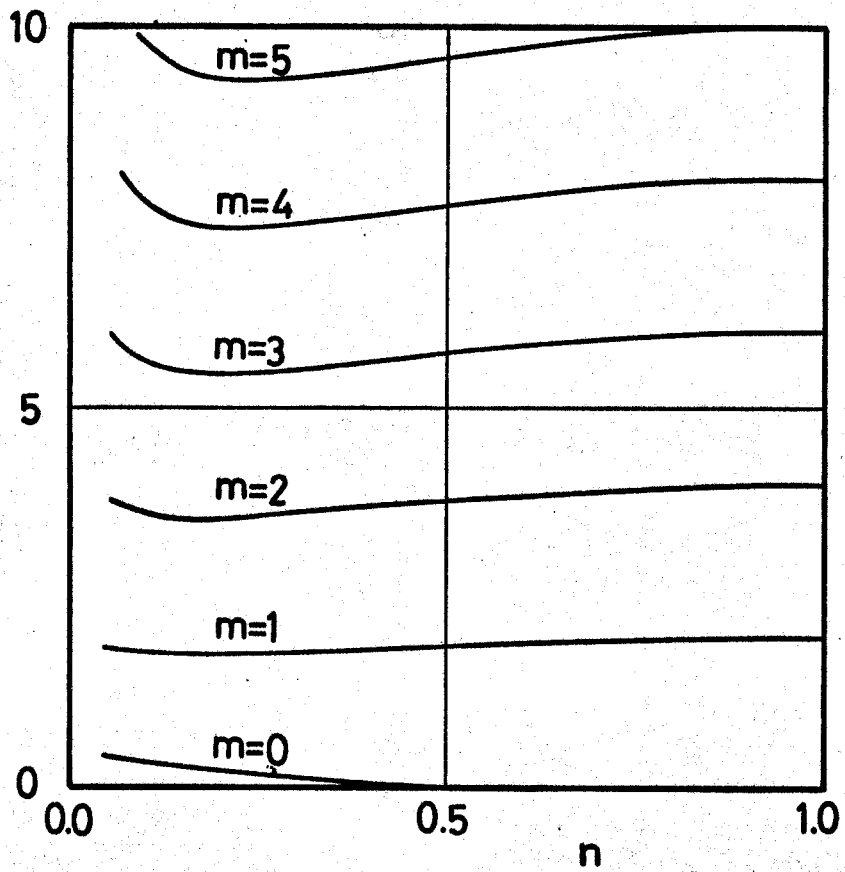


图 2-5



☒ 2-6

すものと考えてよいであろう。

2.2.2 (ii) 真円度良好の場合

この場合には因子として表面のなめらかさおよびテーパに基づく影響の2つが考えられる。前者については良好なガラス管等を使用すればほぼ問題は生じないと考えてよいであろう。後者の場合、内径2mm以下の細管を使用する場合には多少のテーパが存在する可能性が残されている。このように供試管をテーパ管であるとして、管内の流れを解析することも可能ではあるが、慣性項が省略できるような遅い流れ以外、とくに本法のように管径に対するレイノルズ数が1000前後と高い場合には解析的にはきわめて困難となる。そこで前節(2.2.2(i))で示した係数 ϵ_1 については、レイノルズ数範囲が大幅に変化しない際にはほぼ一定値を取るものと考えられるので、水などのニュートン流体を使用することにより実験的に検証することが可能であり、本法でも実験的に(真円度の影響をも含めて)決定している。

2.2.3 ぬれ縁の影響について

円管の肉厚が0に近いような場合を除いて，管出口のジェットは必ず多少とも出口の外側の壁に付着する。これを

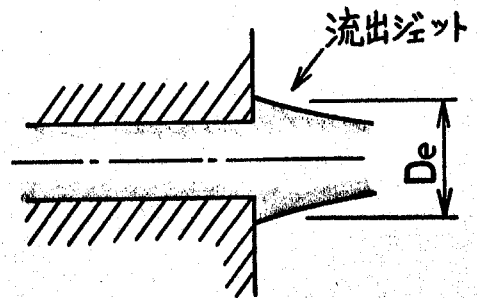


図2-7

を図2-7に模式的に描く。いま管内径に相当する部分の断面積を S ，ぬれ縁を含めた部分のそれを S' と記す。さて角運動量則式(2.1)において，左辺の流体の運動量を表わす項は S にわたって積分を行なえばほぼ十分であるが，右辺の応力積分項は明らかに S' にわたって行なうべきであると考えられる。ところで S 上の応力 T^{zz} などは管内流からの情報で一応既知とみなすことができるが， $(S'-S)$ 上の応力分布についてはほとんど情報は与えられていない。そこで $r \geq a$ の部分については $r=a$ のものと応力が同一であるとみなして積分を実行して，大略その値を評価すると以下のようなになる。ただし大気に接する方では応力 T^{zz} は緩和しているはずなので，このような評価

は過大に評価する傾向となる。そのために補正係数 ε_0 を乗じて記してある。この補正係数 ε_0 はぬれ縁上の応力分布を詳細に評価しない限り、実験的に定めるべきものである。結果は次の通り

$$(T^{zz}-T^{rr})_w = \frac{1}{1+\varepsilon_0(S'-S)S^{-1}(1+0.5sn^{-1})} \times \left[\frac{I}{S} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln I}{d \ln r_w} \right) - \frac{1}{2} (T_w^{rr} - T_w^{\theta\theta}) \right] \quad (2.44)$$

ただし

$$S = \pi a^2, \quad S' = \pi D_e^2 / 4$$

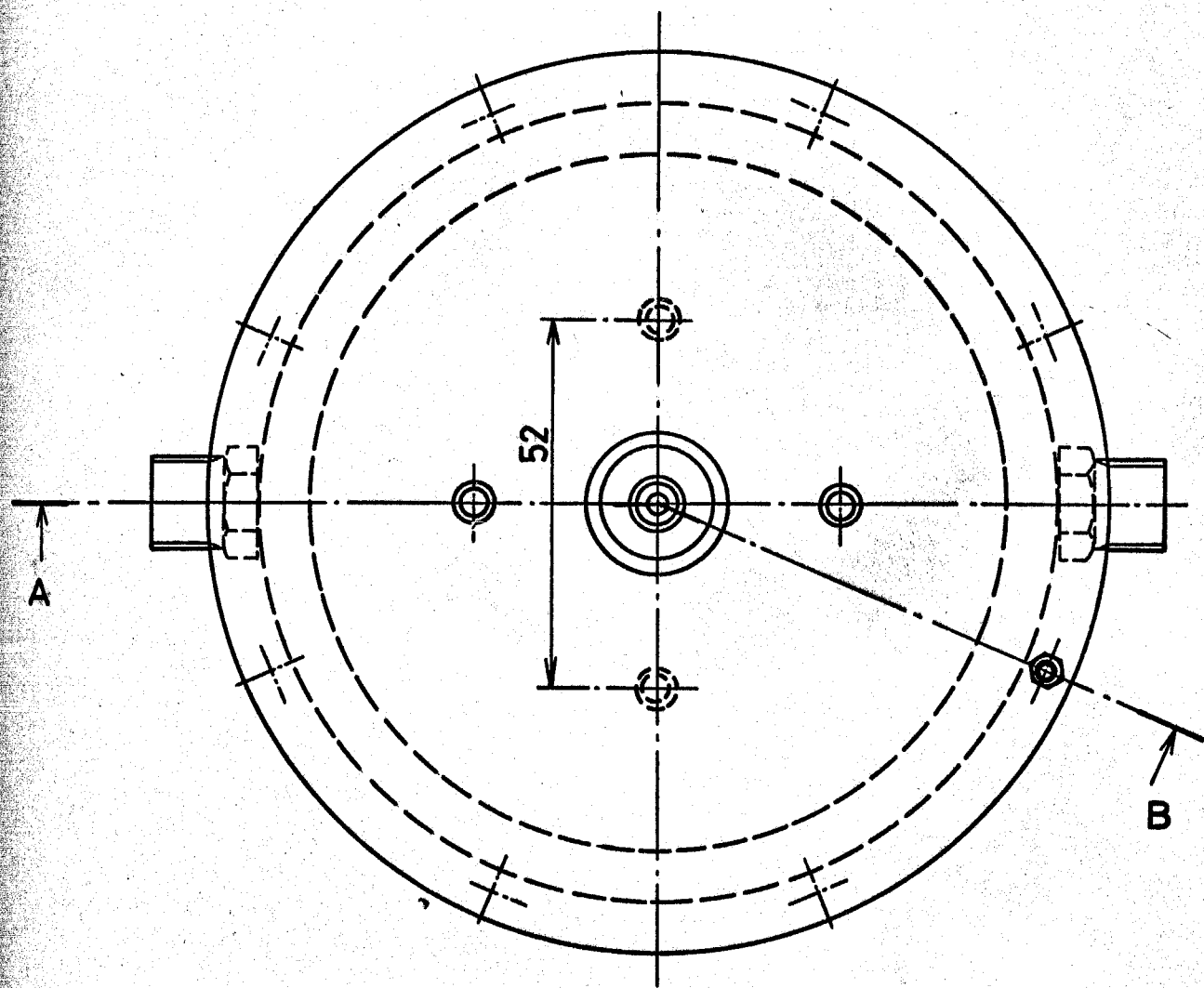
$$I = \int \int w^2 dS - T/(IN) - \pi D_e \sigma / 2$$

$$s = \frac{d \ln (T^{zz} - T^{rr})_w}{d \ln r_w}$$

である。

2.3 実験方法および実験結果

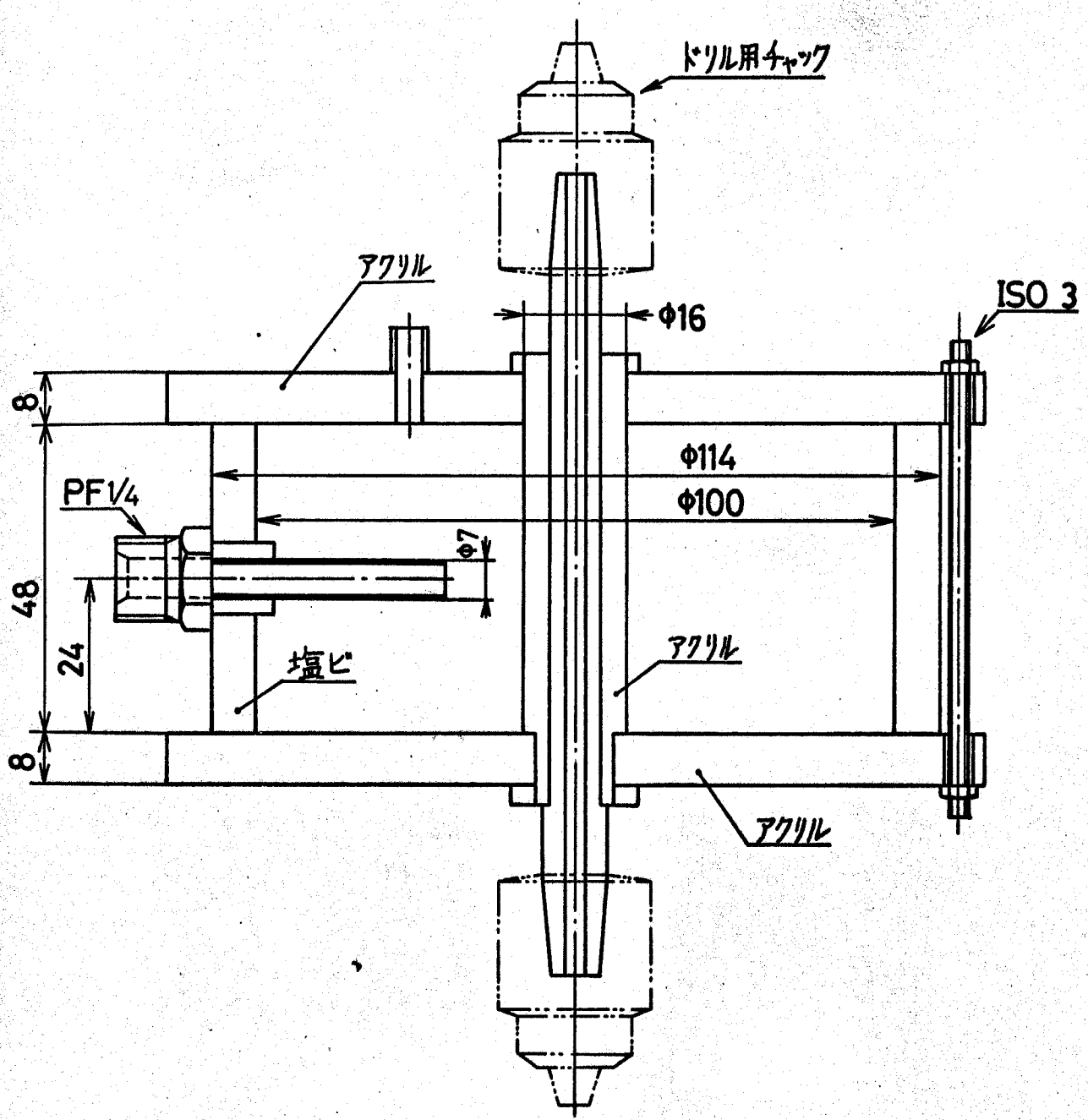
実験装置（リザーバ部等）詳細を図2-8(a),(b),(c)に、実験装置（図2-1参照）全体写真を図2-9(a),(b)に、供試管写真を図2-10に示す。供試管は市販の石英ガラス管、パイレックスガラス管ならびに自家製のパ



平面図

(単位 mm)

図2-8(a) 実験装置詳細図



断面AB
図2-8(b)正面図

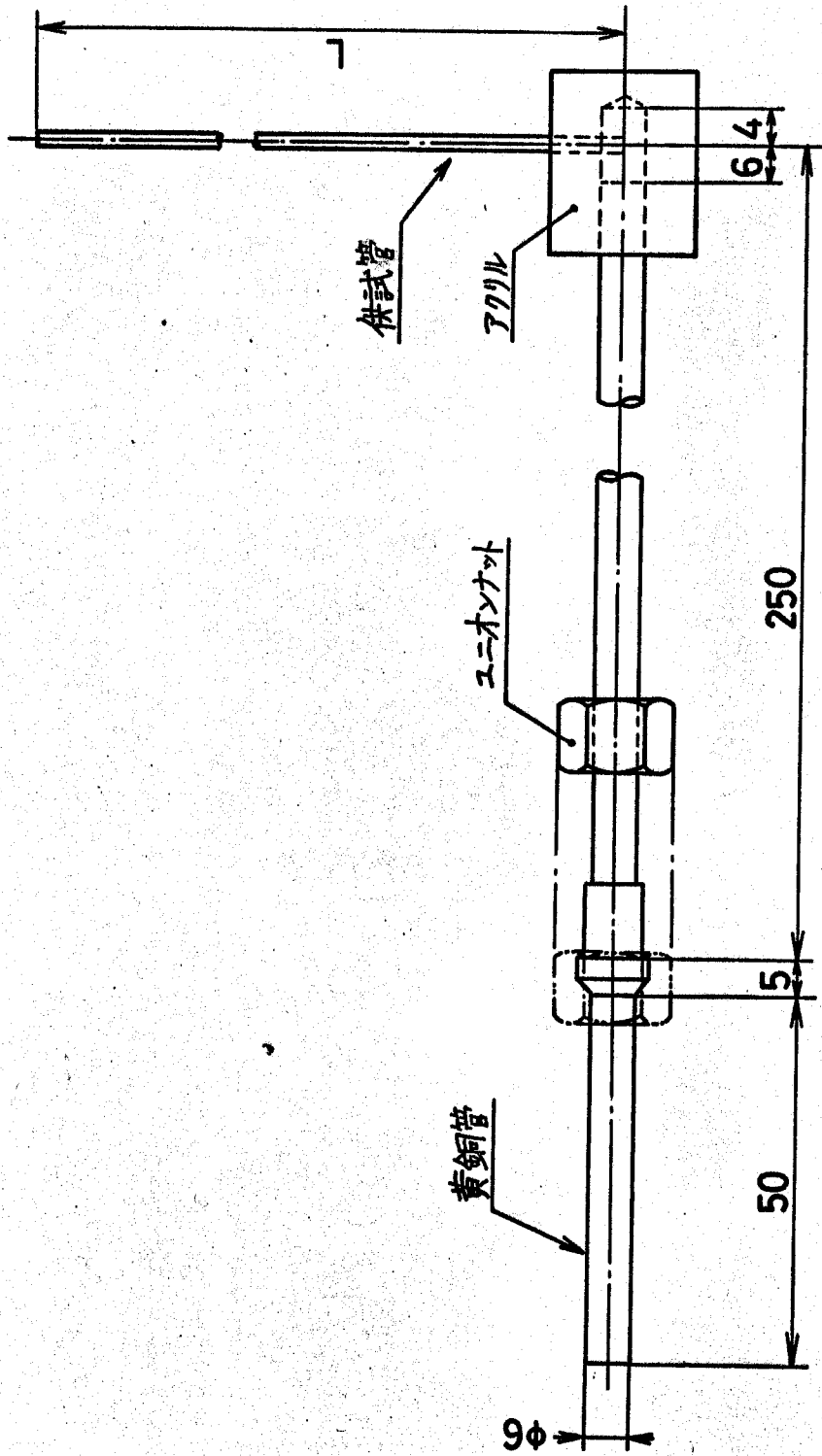


図2-8(c) 供試管部概略図

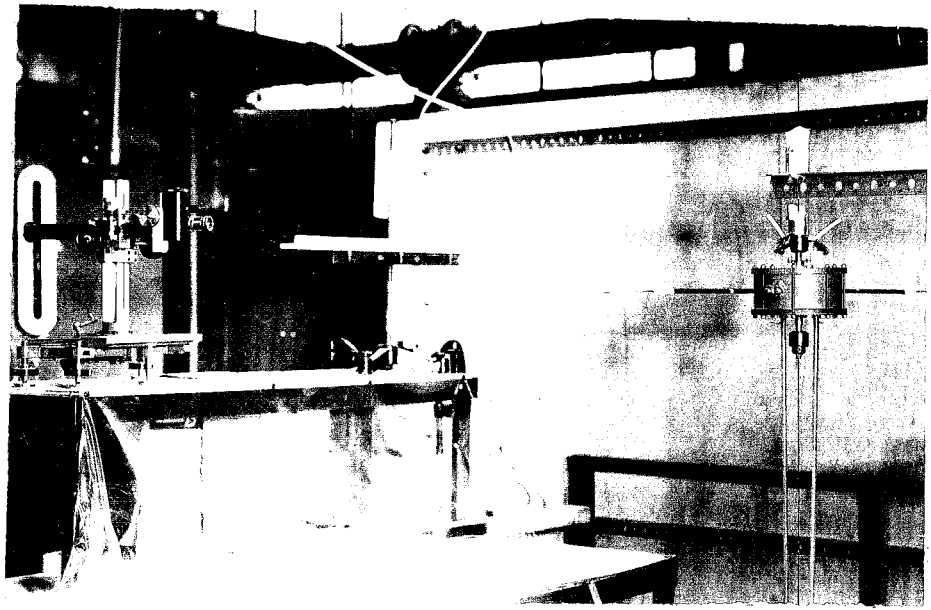


図2-9(a) 実験装置全体図
(リザーバ, スケール, 望遠鏡, 圧カタンク)

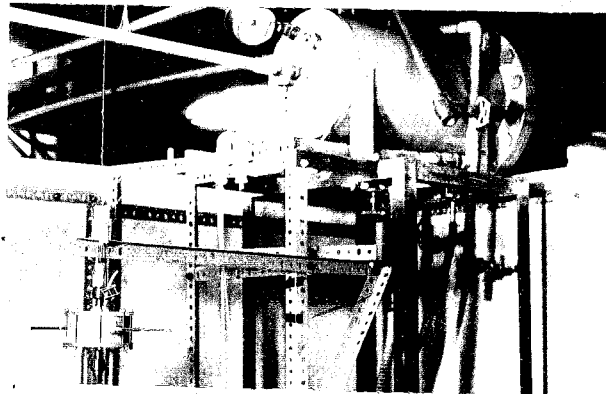


図2-9(b) 実験装置全体図
(リザーバ, 圧カタンク)

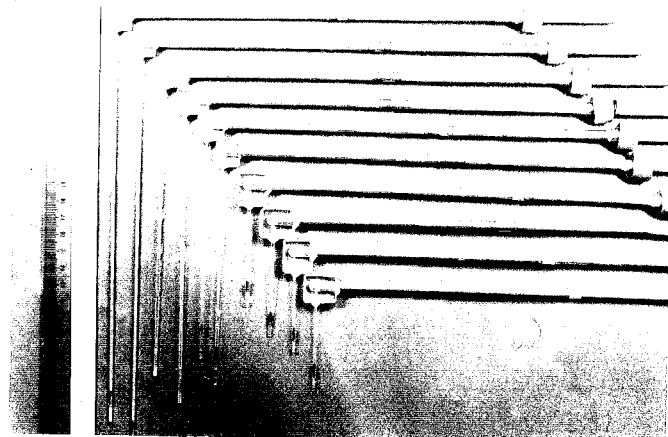


図2-10 供試管

イレックスガラス管であり，内径および管長等を表
 2.1 に示す．使用した溶液はポリエチレンオキサイ
 ド（製鉄化学製，商品名 PEO 18N，公称平均分子量
 400～500 万，水溶性熱可塑性樹脂）の 10～100 ppm 水
 溶液およびセパラン AP-30（ダウ・ケミカル社製，
 高分子量ポリアクリルアミド，公称分子量 200～300
 万）の 20～150ppm 水溶液である．これらの希薄高分
 子溶液はほぼニュートン粘性 ($n=1$) を示すものと考え
 られる．各溶液の相対粘度および表面張力等を表 2.2
 に示す．測定値は 2.2 節の事情を考慮し，次式 (2.45)
 によりみかけの法線応力差 $(T^{zz}-T^{rr})_{ap.w}$ として表示す
 る．ただし第 2 法線応力差 $(T^{rr}-T^{\theta\theta})$ は第 1 法線応力
 差 $(T^{zz}-T^{rr})$ に比して小さいものと考えられているの
 で省略した．また液温の差異による法線応力差に対
 する補正は行なっていない．

$$(T^{zz}-T^{rr})_{ap.w} = \frac{1}{\epsilon_2'} \frac{I}{S} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln I}{d \ln \Gamma_w} \right) \quad (2.45)$$

$$\Gamma_w = \frac{4Q}{S} \sqrt{\frac{\pi}{S}} \quad (2.46)$$

表 2.1

供試管	材質	D_i (m)	D_o (m)	L(m)	L/ D_i	記号
No. 1	パイレックス	0.437×10^{-3}	1.0×10^{-3}	0.100	229	■
No. 2	パイレックス	0.474	1.1	0.100	211	□
No. 3	パイレックス	0.736	1.3	0.140	190	▲
No. 4	パイレックス	0.736	1.3	0.060	82	⊕
No. 5	パイレックス	0.892	2.0	0.180	202	△
No. 6	パイレックス	0.892	2.0	0.070	78	▼
No. 7	石英	1.092	2.8	0.215	197	●
No. 8	石英	1.092	2.8	0.160	147	▽
No. 9	石英	1.305	1.8	0.245	188	○
No.10	石英	1.543	2.0	0.250	162	+

表 2.2

溶液	濃度 (w ppm)	安定剤 (サンデックス) 濃度(w ppm)	液温 (°C)	相対粘度	表面張力 σ (N/m)
PEO18N	10	50	13.5	1.01	0.061
	20	50	19.0	1.02	0.060
	50	50	12.0	1.08	0.063
	100	100	15.5	1.16	0.050
SEPARAN	20	—	15.0	1.05	0.072
	50	—	16.0	1.11	0.070
	100	—	11.5	1.42	0.072
	150	—	17.5	1.61	0.070

$$I \equiv \iint w^2 dS - T/(IN) - \pi D_e \sigma / 2$$

$$= \varepsilon_1 \iint \frac{4Q^2}{3S} - \frac{T}{IN} - \frac{\pi}{2} D_e \sigma \quad (2.47)$$

$$\varepsilon_2' = 1$$

ただし ε_2' はぬれ縁の影響などを含めた因子であるが、予めわかる値ではないので $\varepsilon_2' = 1$ に対する値をもってみかけの値と公称する。ピアノ線等の反力としてのトルク T の比例定数 ($T \propto$ ぬれ角), 係数 ε_1 および有効径 D_e はあらかじめ水 (ニュートン流体) を使用した測定結果より算出した。(すなわちニュートン流体では $I = 0$ となる事実を用いて決定した。) なお表面張力に寄与する有効径 D_e は水の場合と溶液の場合とで同一であると仮定した。有効径 D_e と内径との比を供試管の外径, 内径比に対して図 2-11 に示す。法線応力差測定結果を図 2-12 ~ 図 2-19 に示す。図中実線が, 溶液の物性を代表する値であるものと考えられる。実線より系統的にずれる理由は次節以降で言及するが, この領域は明らかに真の法線応力差を

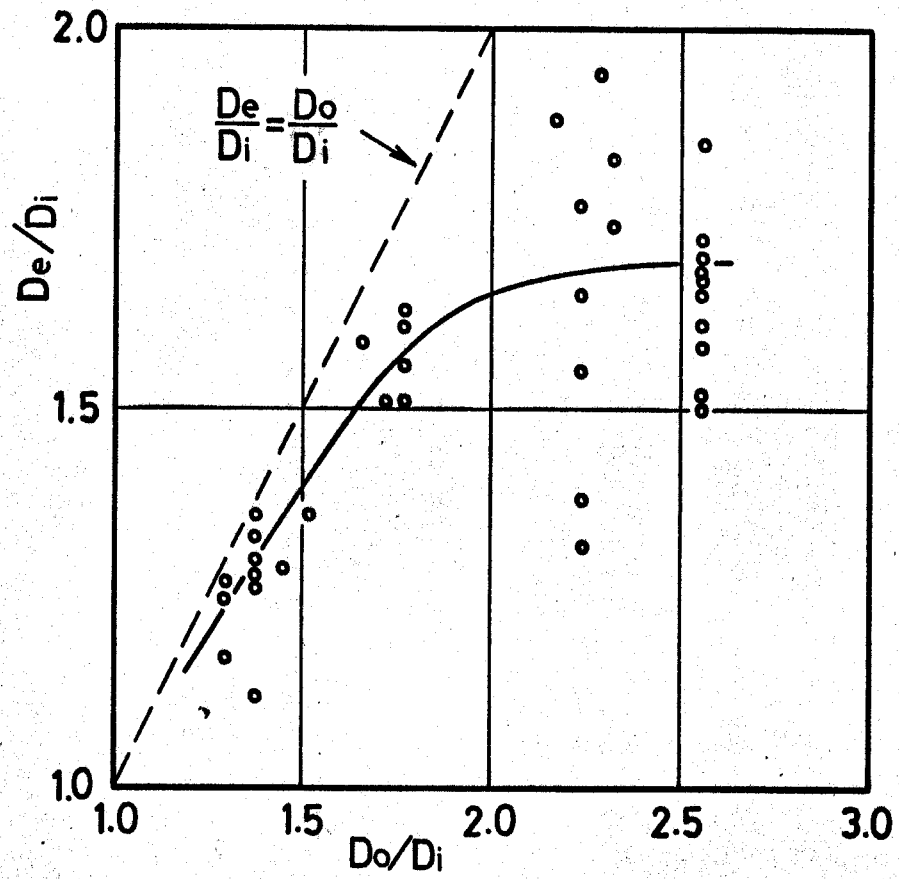
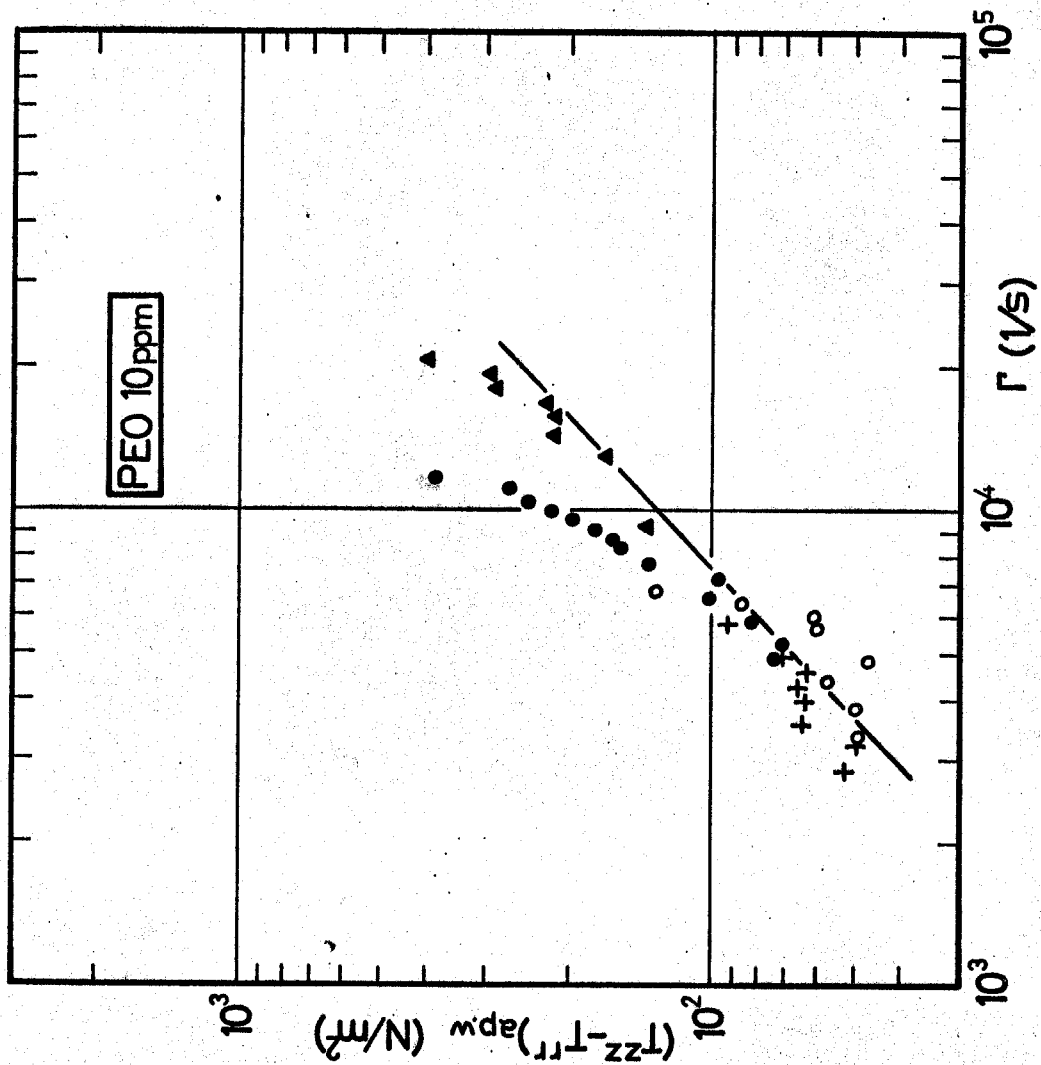


图2-11 有效径测定结果



2-12

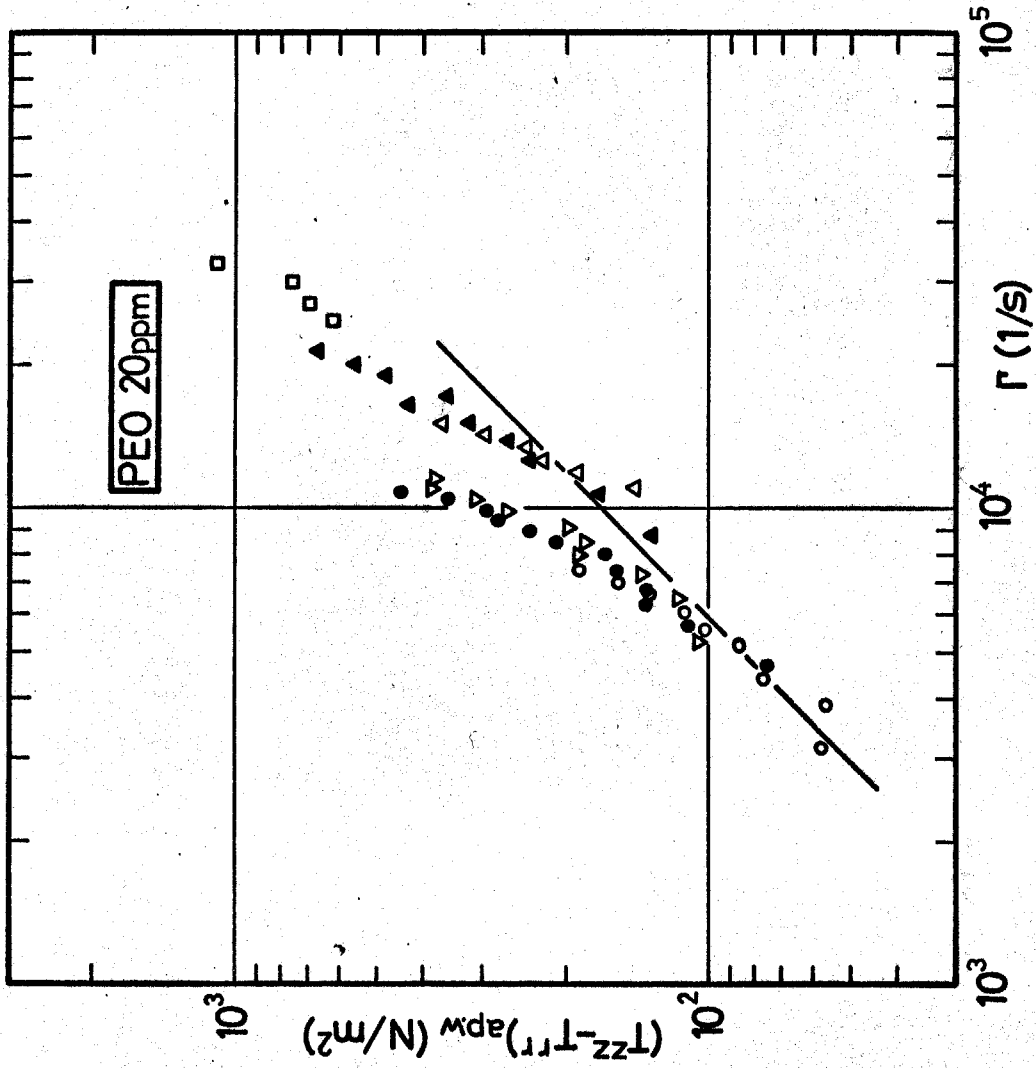
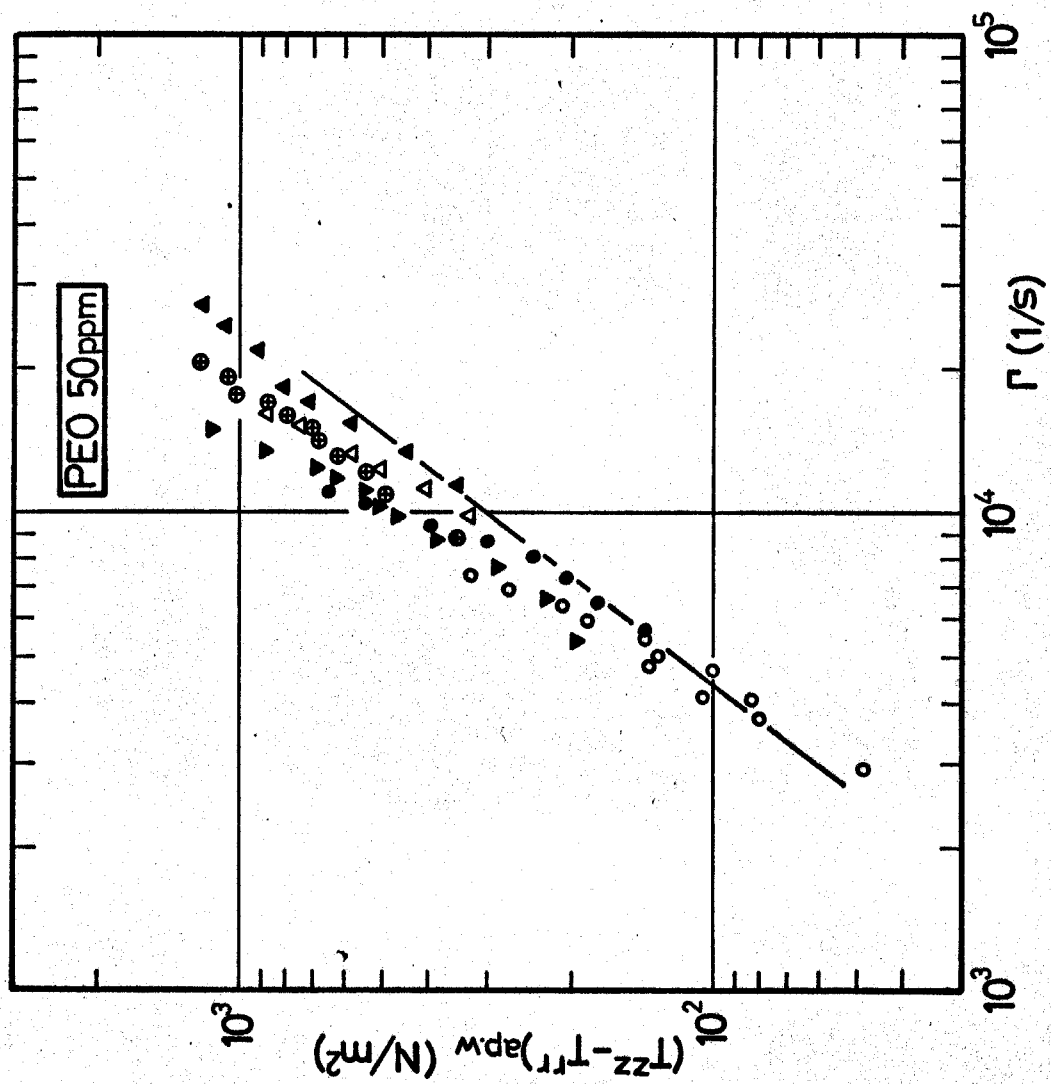
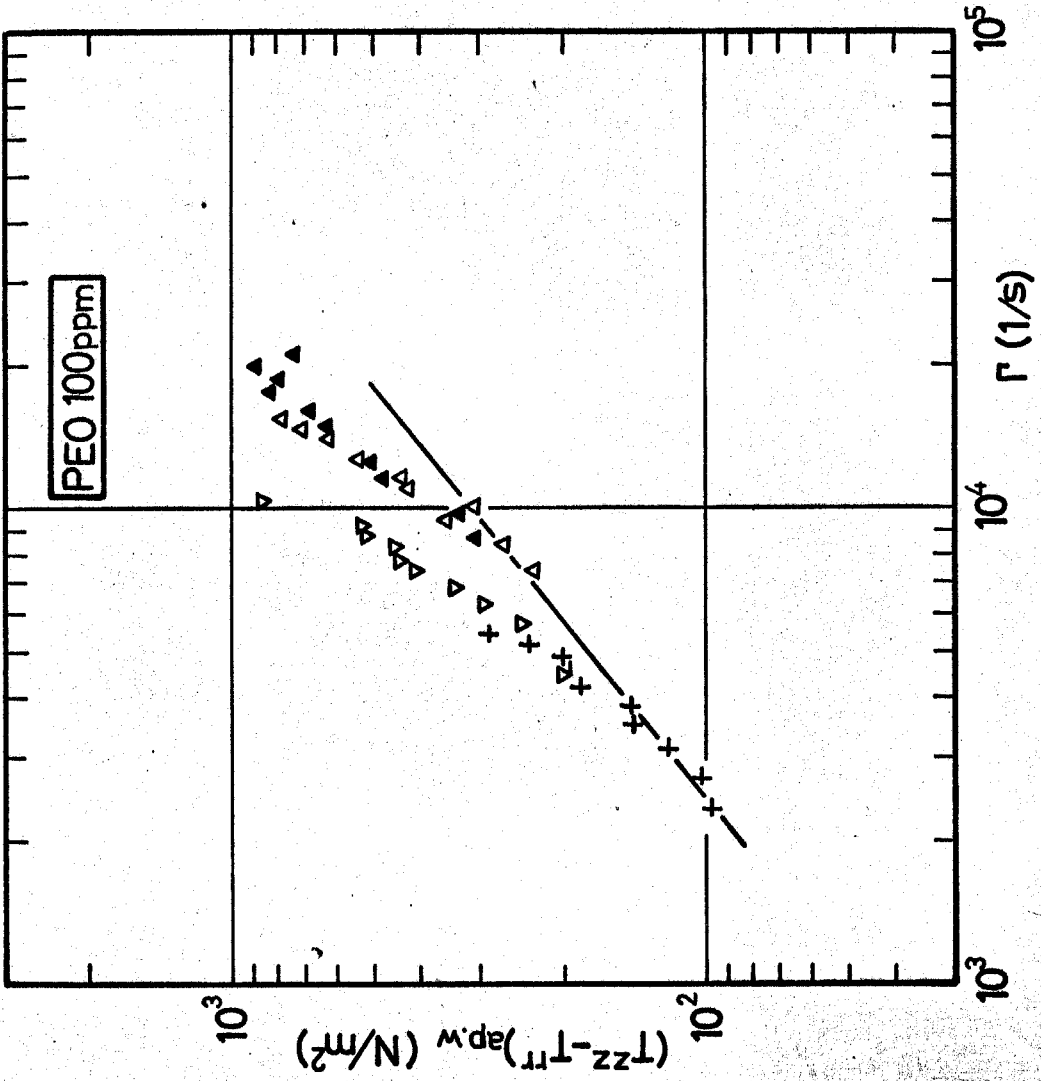


图 2-13



2-14



2-15

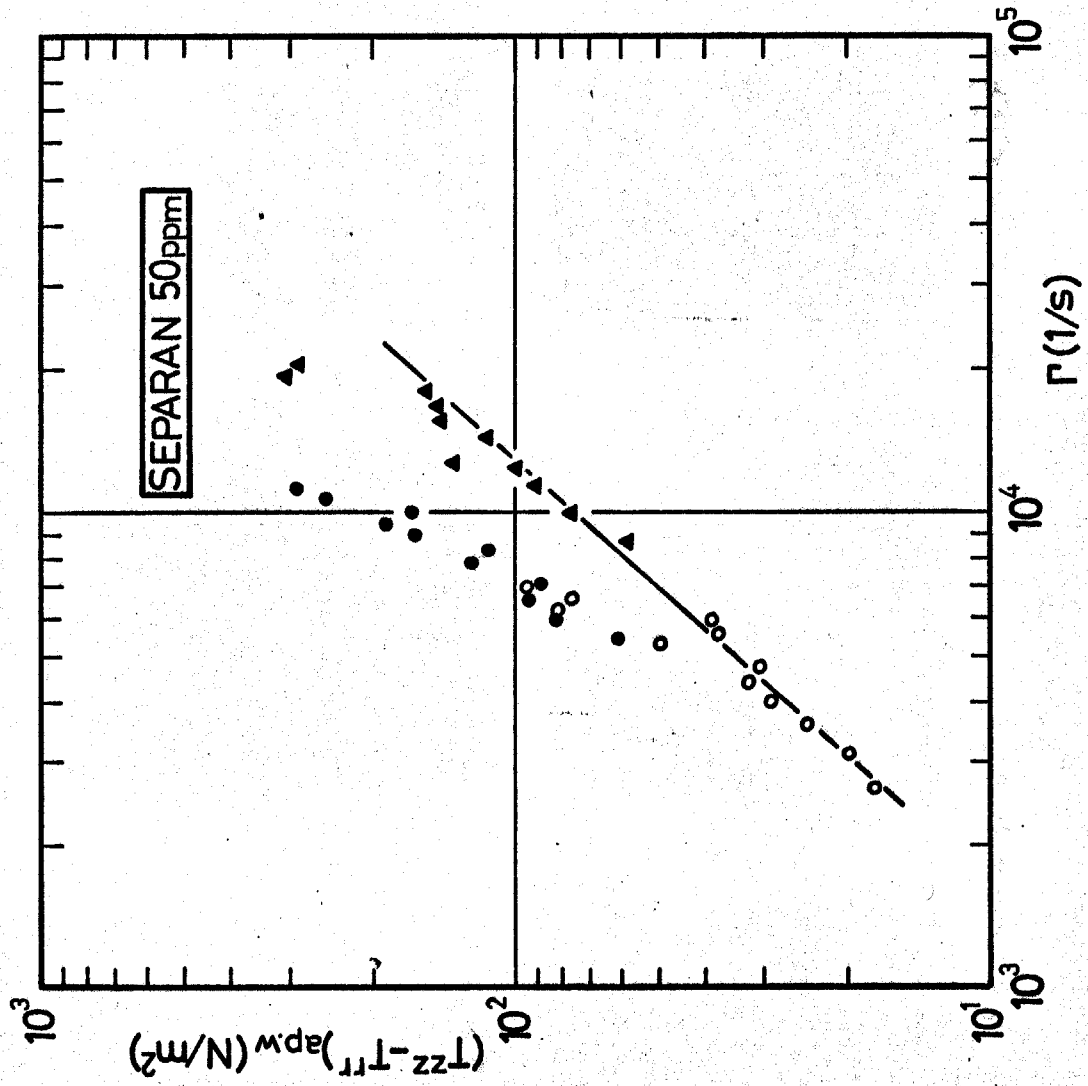


图 2-17

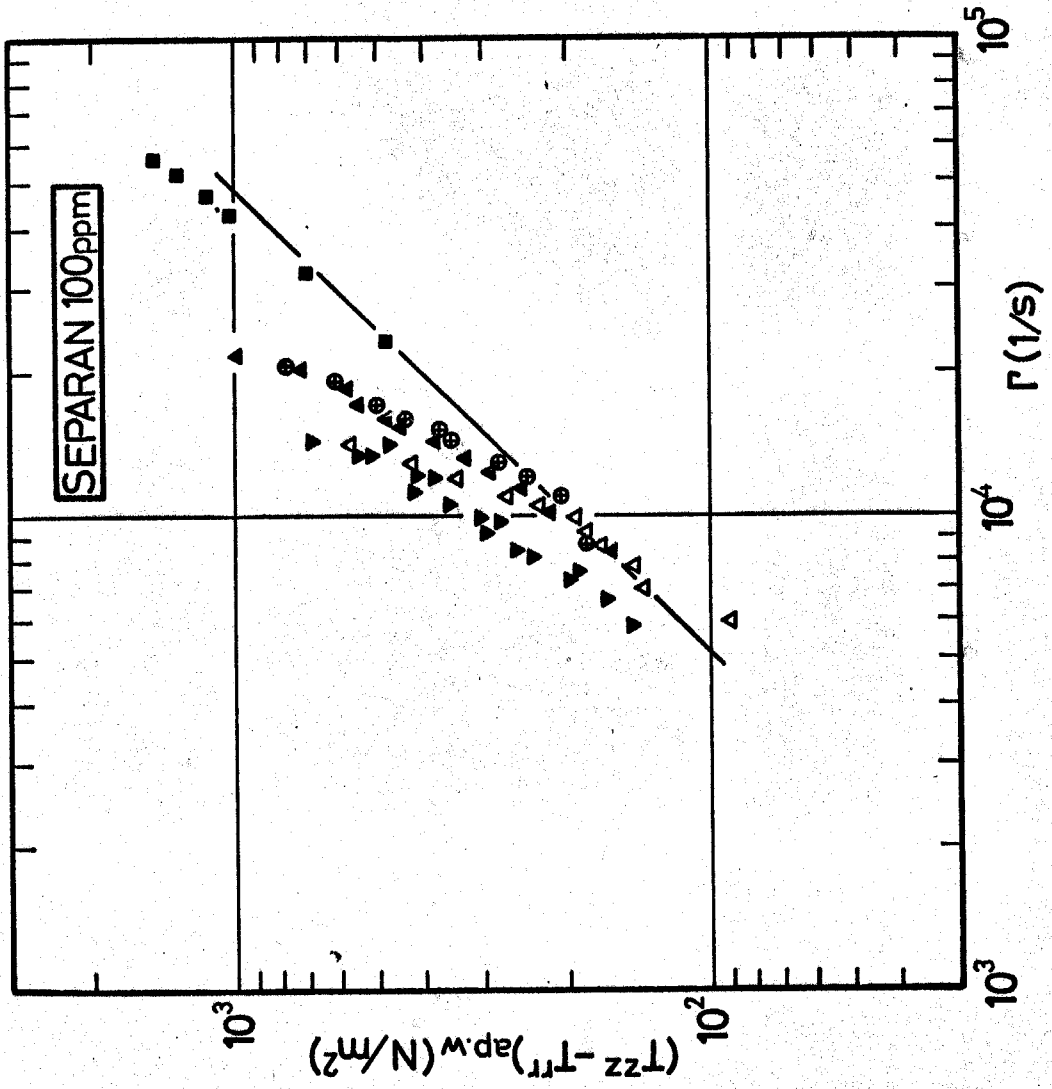
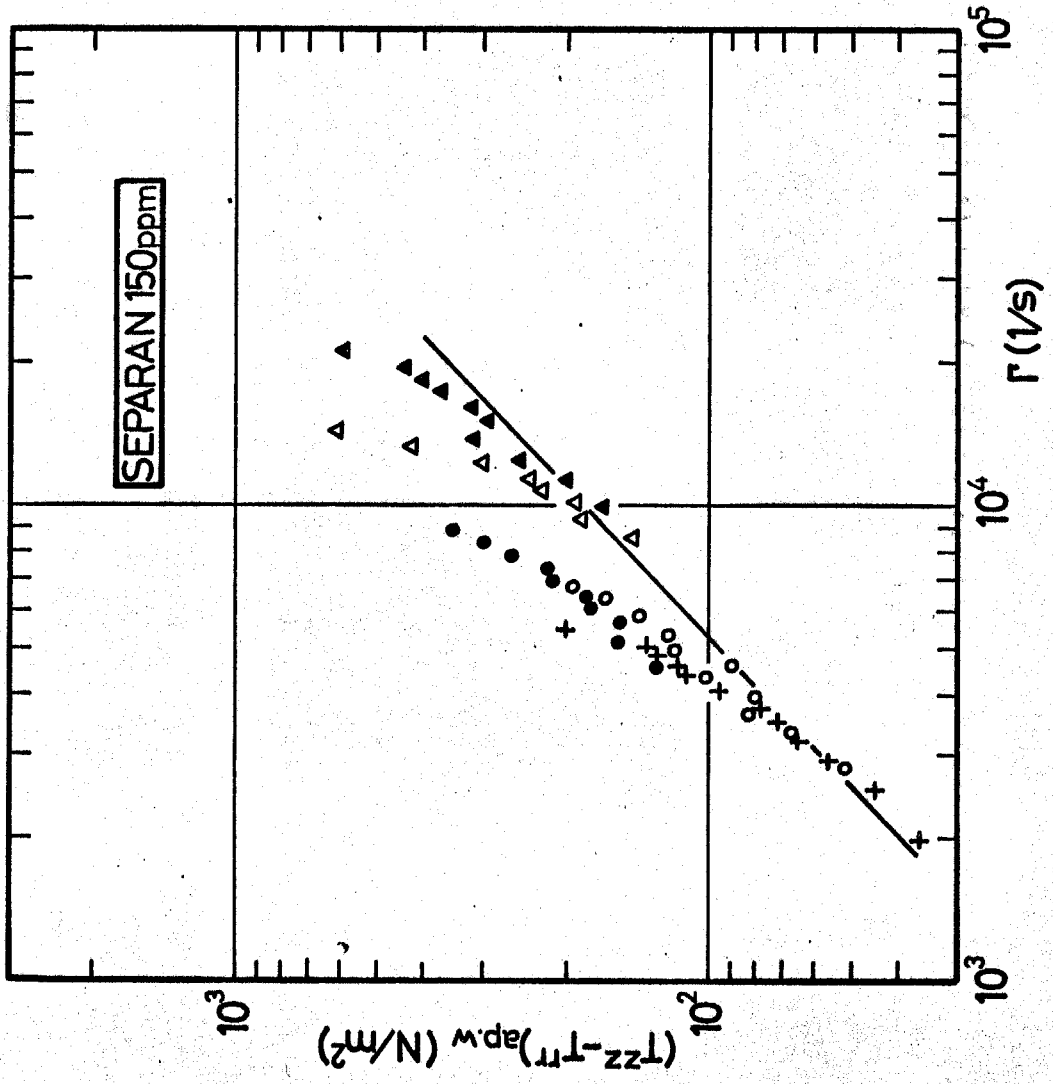


图 2-18



2-19

表わしていない領域である。

2.4 実験結果の考察

2.4.1 管内流動状況一般について

希薄高分子溶液の細管流動の場合、White⁽¹⁰⁷⁾によって示されているように(図2-20参照, λ_0 :管摩擦係数), 層流から乱流への明白な遷移は通常の場合に比して遅れることになり, 本測定実行域である $Re \leq 1000$ においては一応層流が保たれているものと考えられる。他方遷移レイノルズ数は管の表面状態(吸着状態等)で異なることが Felsen⁽³¹⁾(図2-21(a),(b)参照)により示されているが, 層流領域における管摩擦係数 λ_0 に関する限りほぼ $Re \leq 2000$ である限り表面状態によらずニュートン流体とほぼ同一の結果が得られることが判明する。これらの事実により本測定法において供試管の材質の影響を特に考慮に入れる必要はないものと考えられる。すなわち本法程度の細管流動においては溶液は連続体として挙い, 壁面におけるすべり等を考慮しない通常のマクロ的な

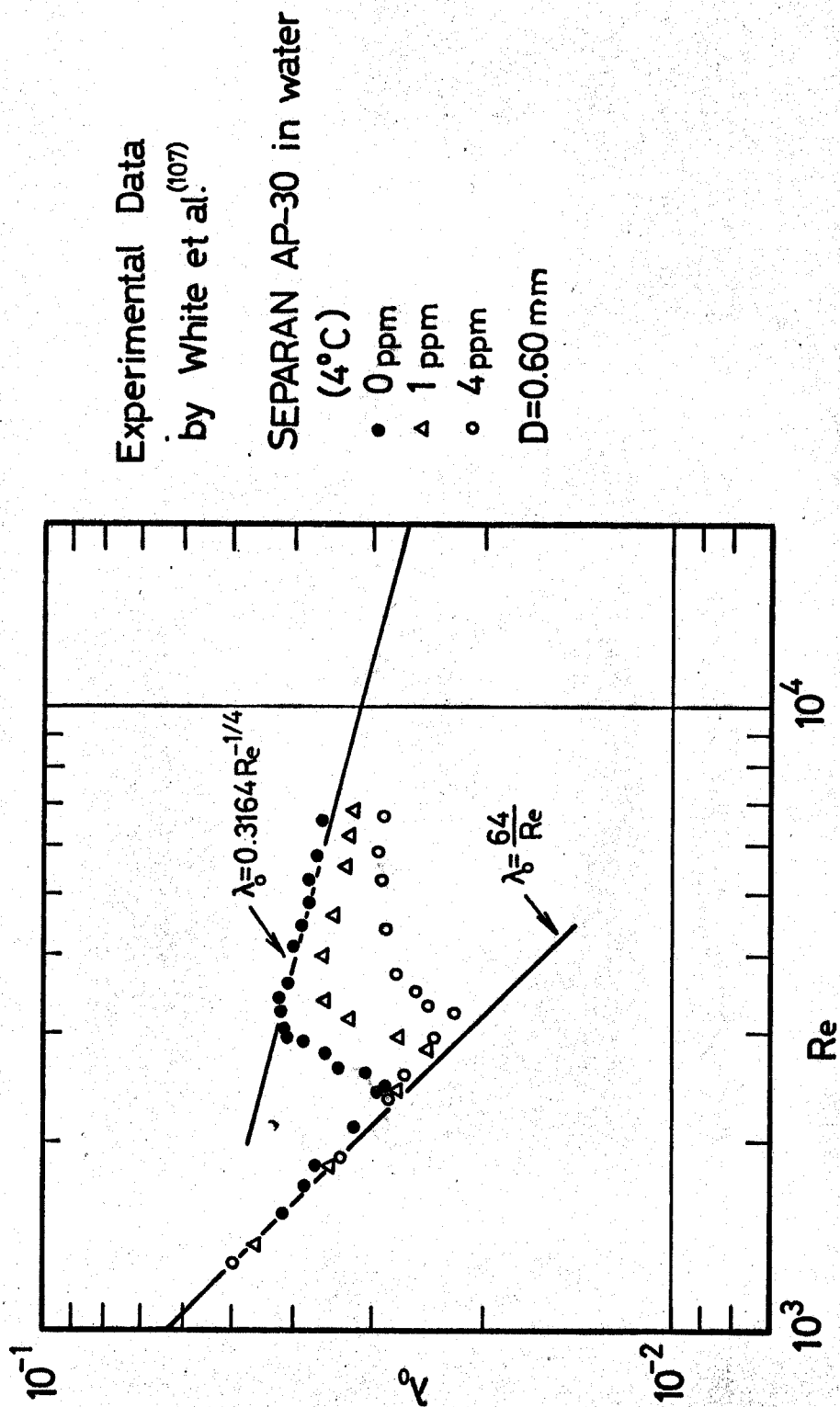


图2-20 管摩擦系数

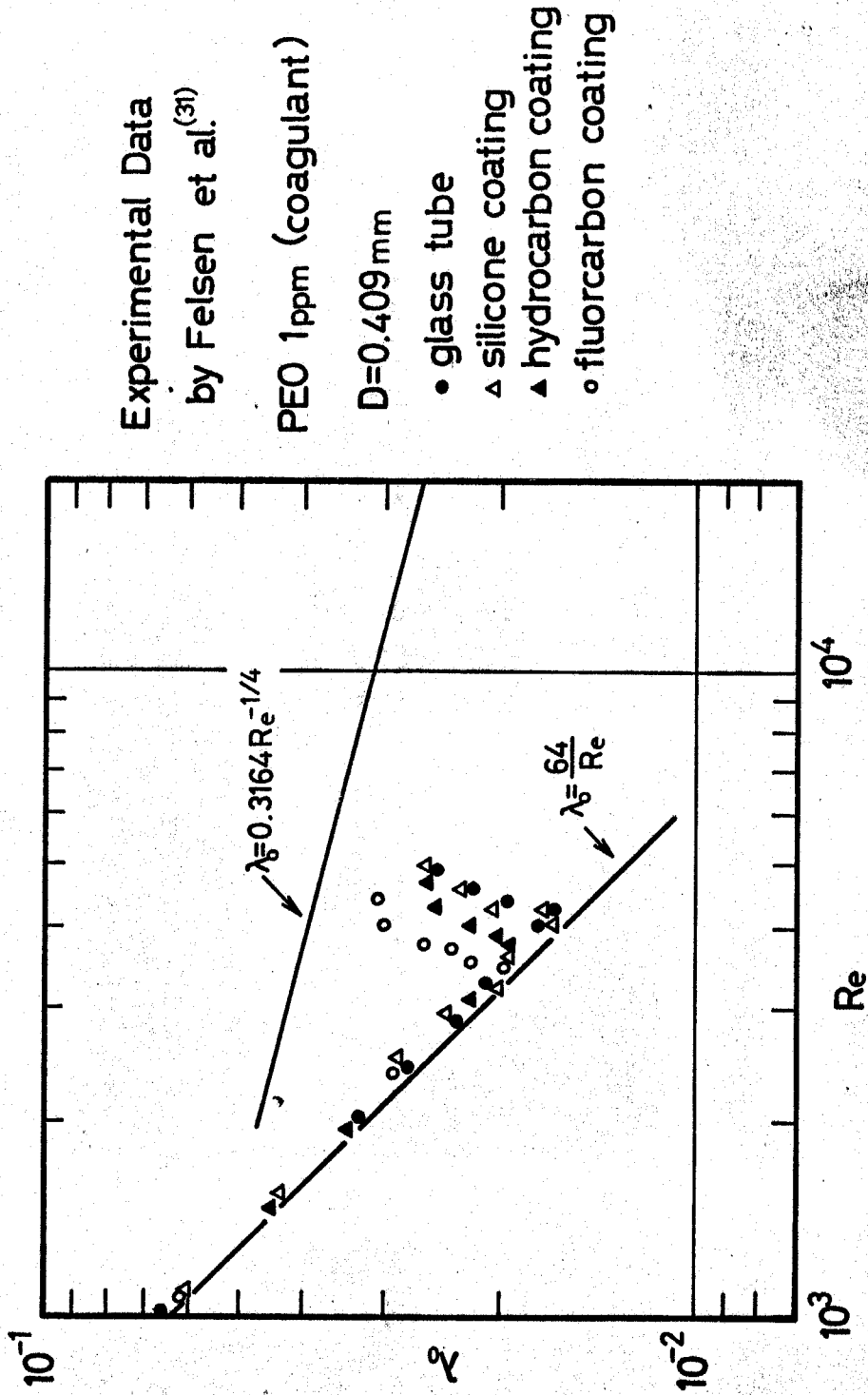


图2-21(a) 管摩擦系数

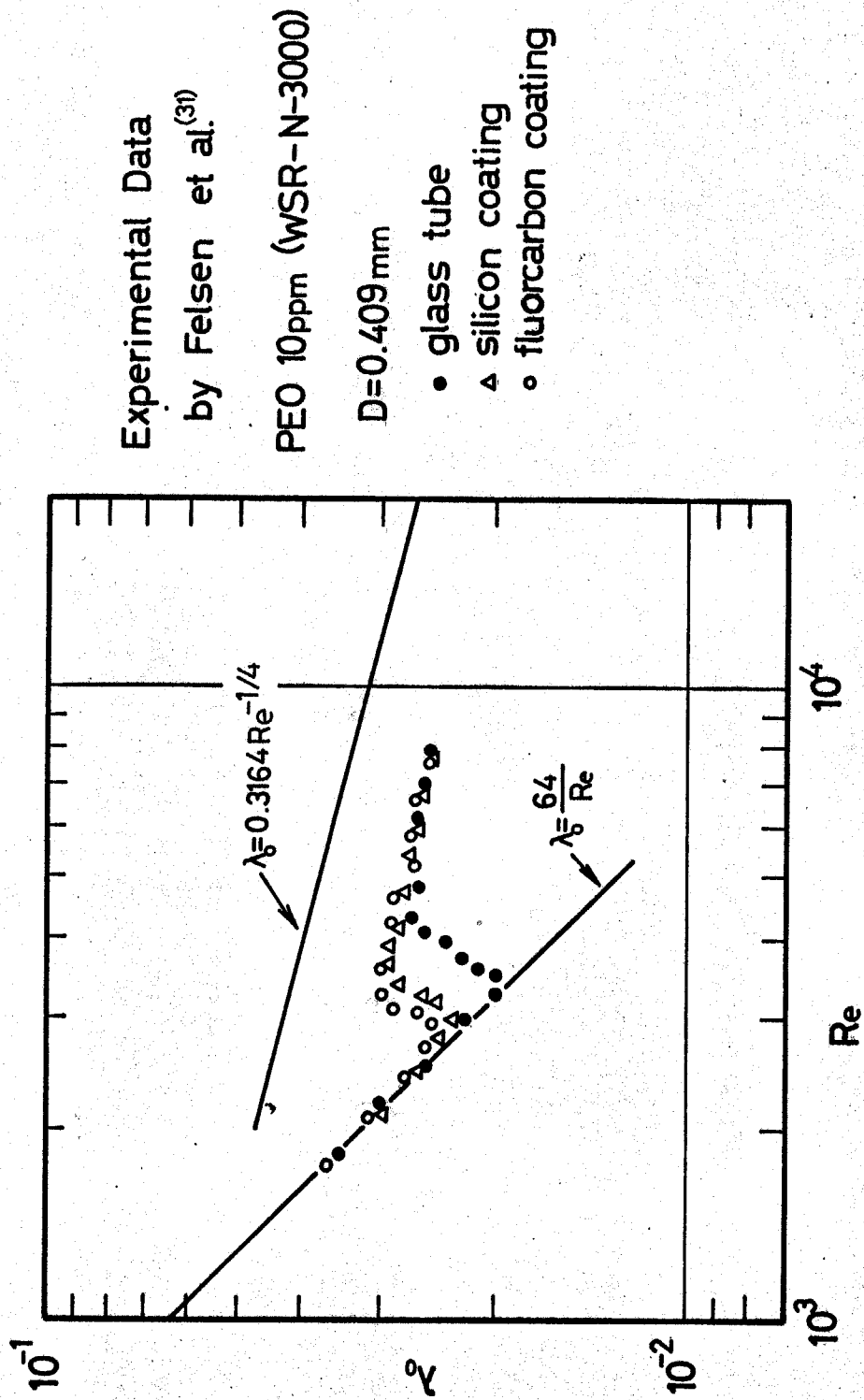


图2-21(b) 管摩擦系数

取り扱いが十分に可能である。

2.4.2 同一径の供試管の測定結果が高ずり速度側で系統的にずれる理由

同一管径の供試管による測定結果は一般的に図2-22に示すようになる。すでに文献(43)で指摘されているように、希薄高分子溶液の円管内流においてレイノルズ数がある程度以上に大きくなると、レイノルズ数が2000以下であ

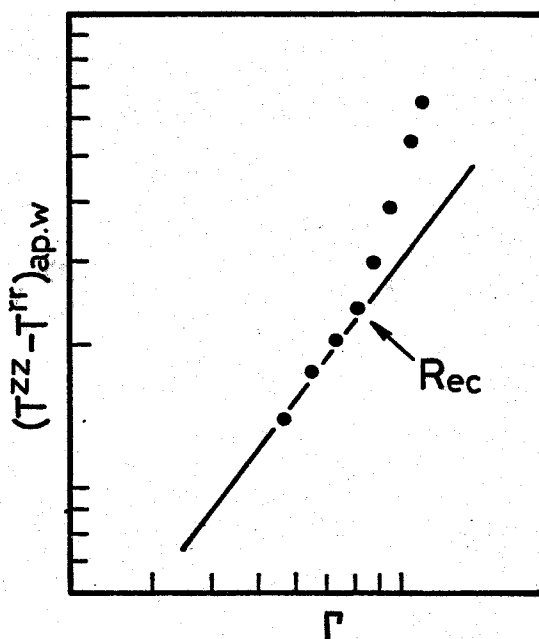


図2-22

ってもある種の微小攪乱が存在しうようになる。本法による測定でもレイノルズ数が約600~1000程度以上になると微小攪乱が存在するようで、流出ジェットの様相からもそのことが推察される。そこで以上のことを考慮して公称値 $(T^{zz} - T^{rr})_{ap.w}$ を定性的、定量的に評価してみよう。希薄高分子溶液のせん断流の挙動を比較的よく表わすレオロジ方程式

$$\tau^{ij} = \mu B_{(1)}^{ij} - \lambda \frac{\delta}{\delta t} B_{(1)}^{ij} \quad (2.48)$$

からの類推により主要項を考慮して，第1法線応力差 $T^{zz} - T^{rr}$ を $T^{zz} - T^{rr} \approx -\lambda \frac{\delta}{\delta t} B_{(1)}^{zz}$ ((2.48') 式) のように仮定し評価する．そして流れ場の定常流速 $w(x, y)$ にさらに非定常成分 $w^*(x, y, z, t)$ が加わっているものとする．しかるときは

$$\begin{aligned} \iint \frac{\delta}{\delta t} B_{(1)}^{zz} dS &= 2 \iint \frac{\partial^2 w^*}{\partial t \partial z} dS \\ &\quad - 2 \iint \{ (w_x + w_x^*)^2 + (w_y + w_y^*)^2 + w_z^{*2} \} dS \end{aligned} \quad (2.49)$$

となり，微小攪乱によるレイノルズ応力が無視できるときには， w_x^* などは時間に対して0次以外のフーリエ成分からなるものと考えられるから，式(2.49)の時間平均をとると

$$\iint \overline{\frac{\delta}{\delta t} B_{(1)}^{zz}} dS = -2 \iint \overline{(w_x^2 + w_y^2)} dS - 2 \iint \overline{(w_x^{*2} + w_y^{*2} + w_z^{*2})} dS \quad (2.50)$$

となる．また同様に

$$\iint \overline{(w + w^*)^2} dS = \iint \overline{w^2} dS + \iint \overline{w^{*2}} dS \quad (2.51)$$

である。さて時間平均を考えれば、式(2.1)について形式的に時間平均をとった式が成立する。したがって式(2.47)で与えられる I は (第2法線応力差 $T^{rr}-T^{\theta\theta}$ の影響は小さいものとして省略すると)

$$\begin{aligned}
 I &= \iint (\overline{T^{zz} - p + p_a}) dS + \pi a^2 \{ \overline{p(a) - T_w^{rr} - p_a} \} - \rho \iint \overline{w^{*2}} dS \\
 &= \iint \left\{ \overline{T^{zz} - T^{rr} + \frac{1}{2}(T^{rr} - T^{\theta\theta})} \right\} dS - \rho \iint \overline{w^{*2}} dS \\
 &\approx I_{\text{steady}} + 2\lambda \iint (\overline{w_x^{*2} + w_y^{*2} + w_z^{*2}}) dS - \rho \iint \overline{w^{*2}} dS \quad (2.52)
 \end{aligned}$$

となる。ただし I_{steady} は攪乱の存在しない理想的本場合の値を意味する。したがって $(I - I_{\text{steady}})$ が正であるならば式(2.45)で算出されるみかけの法線応力差は過大評価されて表わされることになる。(一般に可能な任意の攪乱 w^* に対して

$$2\lambda \iint (\overline{w_x^{*2} + w_y^{*2}}) dS / \rho \iint \overline{w^{*2}} dS > \pi^2 \frac{\lambda}{\rho a^2}$$

が成立するので、弾性力と慣性力との比を示す無次元数 $\lambda/\rho a^2$ が約0.1より大きければ無条件に $(I - I_{\text{steady}}) > 0$ が成立する。) そこで攪乱の形を以下概略的に式(2.48)

を使用して求めてみる。攪乱の2乗，積などを省略し，さらに非対称項などを平均ないし省略して運動方程式を線形化すれば，

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial z} \right) u^* = - \frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \Delta u^* - \lambda \left(\frac{\partial}{\partial t} \Delta u^* + V \frac{\partial}{\partial z} \Delta u^* + \frac{8V}{a^2} \frac{\partial}{\partial z} u^* \right) \quad (2.53)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial z} \right) v^* = - \frac{\partial p^*}{\partial y} + \mu \Delta v^* - \lambda \left(\frac{\partial}{\partial t} \Delta v^* + V \frac{\partial}{\partial z} \Delta v^* + \frac{8V}{a^2} \frac{\partial}{\partial z} v^* \right) \quad (2.54)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial z} \right) w^* = - \frac{\partial p^*}{\partial z} + \mu \Delta w^* - \lambda \left(\frac{\partial}{\partial t} \Delta w^* + V \frac{\partial}{\partial z} \Delta w^* + \frac{8V}{a^2} \frac{\partial}{\partial z} w^* \right) \quad (2.55)$$

を得る。連続の式は

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \quad (2.56)$$

である。そこで連続の式を満足するように

$$u^* = \frac{\partial}{\partial y} \psi_3 - \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 + \frac{\partial}{\partial x} \psi_0 \quad (2.57)$$

$$v^* = \frac{\partial}{\partial z} \psi_1 - \frac{\partial}{\partial x} \psi_3 + \frac{\partial}{\partial y} \psi_0 \quad (2.58)$$

$$w^* = \frac{\partial}{\partial x} \psi_2 - \frac{\partial}{\partial y} \psi_1 + \frac{\partial}{\partial z} \psi_0 \quad (2.59)$$

とおく。ただし

$$\Delta \psi_0 = 0 \quad (2.60)$$

である。運動方程式より

$$L\Delta\psi_1 = L\Delta\psi_2 = L\Delta\psi_3 = 0 \quad L\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi_3}{\partial z}\right) = 0 \quad (2.61)$$

$$L = \Delta - \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Delta + V\frac{\partial}{\partial z}\Delta + \frac{gV}{a^2}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

を得る。そこで式(2.61)を満足する次のような3次元攪乱を考える。

$$\psi_1 = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi, \quad \psi_2 = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi, \quad \psi_3 = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\psi \quad (2.62)$$

$$\psi_0 = 0$$

ただし

$$L\Delta\psi = 0 \quad (2.63)$$

である。式(2.63)の解として

$$\begin{aligned} \psi = \sum_k \left[A_{1k} J_k(\varphi r) + A_{2k} J_k(\xi r) + A_{3k} N_k(\varphi r) G_k(r) \right] \\ \times \cos(k\theta + \theta_k) e^{imz + i\omega t} \end{aligned} \quad (2.64)$$

を得る。ただし $J_k()$, $N_k()$ はベッセル関数であり、

$$\left. \begin{aligned} \varphi^2 &= -m^2 - i \frac{(\omega + Vm)\nu^{-1} + 8\lambda Vm\mu^{-1}a^{-2}}{1 - i\lambda(\omega + Vm)\mu^{-1}} \\ \xi^2 &= -m^2 \quad (m: \text{複素数}) \end{aligned} \right\} (2.65)$$

である。 $G_k(r)$ に対する微分方程式は

$$G_k''(r) + \left\{ \frac{1}{r} + 2\varphi \frac{N_k'(\varphi r)}{N_k(\varphi r)} \right\} G_k'(r) + (\xi^2 - \varphi^2) G_k(r) = 0 \quad (2.66)$$

である。境界条件 $\psi(a, \theta) = \psi_r(a, \theta) = \psi_{rr}(a, \theta) = 0$ より固有値は

$$J_k(\varphi a) \left[\xi \frac{J_k'(\xi a)}{J_k(\xi a)} - \varphi \frac{N_k'(\varphi a)}{N_k(\varphi a)} - \frac{G_k'(a)}{G_k(a)} \right] = 0 \quad (2.67)$$

により定まる。以下の表2.3に、 $J_k(\varphi a) = 0$ を満足する単独の攪乱が流れに加わり、速度エネルギーが1%変化したとき、すなわち $\iint \overline{w^{*2}} dS = 0.01 \iint w^2 dS$ と仮定した場合の

$$\frac{2\lambda \iint \overline{w_x^{*2} + w_y^{*2} + w_z^{*2}} dS}{\iint w^2 dS} \quad (\equiv B_0) \quad (2.68)$$

および

$$\frac{1}{I_{\text{steady}}} \left[2\lambda \iint \overline{w_x^{*2} + w_y^{*2} + w_z^{*2}} dS \right] \quad (\equiv B_1) \quad (2.69)$$

のそれぞれの数値を記す。なお $I_{\text{steady}} = 16\pi\lambda V^2$ である。

攪乱の分布例（最大振幅に近い時刻における値）を
 図 2-23(a),(b),(c)（例#9より z, θ, r 成分）および図 2-24(a),
 (b)（例#7より z, θ 成分）に示す。軸対称攪乱も可能
 であるが、詳細は略し、結果のみを表 2.3 中に記す。
 表 2.3 中より $B_0 > 1$ の場合に $I > I_{steady}$ となることが判明
 し、 B_1 値より法線応力差のみかけの増加が予測され、
 速度エネルギーの 1% の差により数% 増加することが
 予測される。本解釈は一部式(2.48),(2.48)のモデルを使
 用し、しかも微小攪乱として解析を行なったもので
 あるが、実際の現象を大略評価していると言えよう。

2.4.3 ぬれ縁の影響について

供試管の肉厚が 0 に近づけば理論的には理想的な
 図 2-3 に示すような形状になることが予測される。
 しかしガラス管をはじめステンレスパイプ等を使用
 しても本件のような細管では内外径比を 1.1 以下にす
 ることはきわめて困難であり、そのため本実験範囲
 では ε_2 または ε_0 の決定は不可能に近い。

2.4.4 法線応力差測定範囲等について

表 2.3

番号	k (注1)	l (注1)	Re	$\lambda/\rho a^2$	$\omega a^2/\nu$	B_0	B_1 (%)	例(注2)			
								a (m)	ω (1/s)	λ (kg/m)	V (m/s)
# 1	0	1	1000	0.04	2.5	4.29	8.9	0.5×10^{-3}	10	1×10^{-5}	1.0
# 2	0	1	1000	0.4	2.5	7.38	1.5	0.5	10	10	1.0
# 3	0	1	1000	0.4	12.5	7.27	1.5	0.5	50	10	1.0
# 4	0	1	2000	0.1	10.0	4.79	4.0	1.0	10	10	1.0
# 5	0	2	1000	0.4	2.5	36.3	7.6	0.5	10	10	1.0
# 6	0	3	1000	0.2	12.5	42.1	17.5	0.5	50	5	1.0
# 7	1	1	600	5/9	4.5	26.1	3.9	0.3	50	5	1.0
# 8	1	1	2000	0.1	10.0	3.85	3.2	1.0	10	10	1.0
# 9	1	2	1000	0.2	12.5	45.8	19.1	0.5	50	5	1.0
# 10	2	1	600	1/9	4.5	5.21	3.9	0.3	50	1	1.0
# 11	2	1	1000	0.4	2.5	25.3	5.3	0.5	10	10	1.0
# 12	3	1	600	5/9	9.0	66.9	10.0	0.3	100	5	1.0
# 13	軸対称		—	0.0533	$\ll 10^3$	2.89	4.5	0.5	—	1.33	1.0

(注1) 固有値が $J_k(x)$ の正の l 番目の零点に対応することを意味する。

(注2) $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ とする。

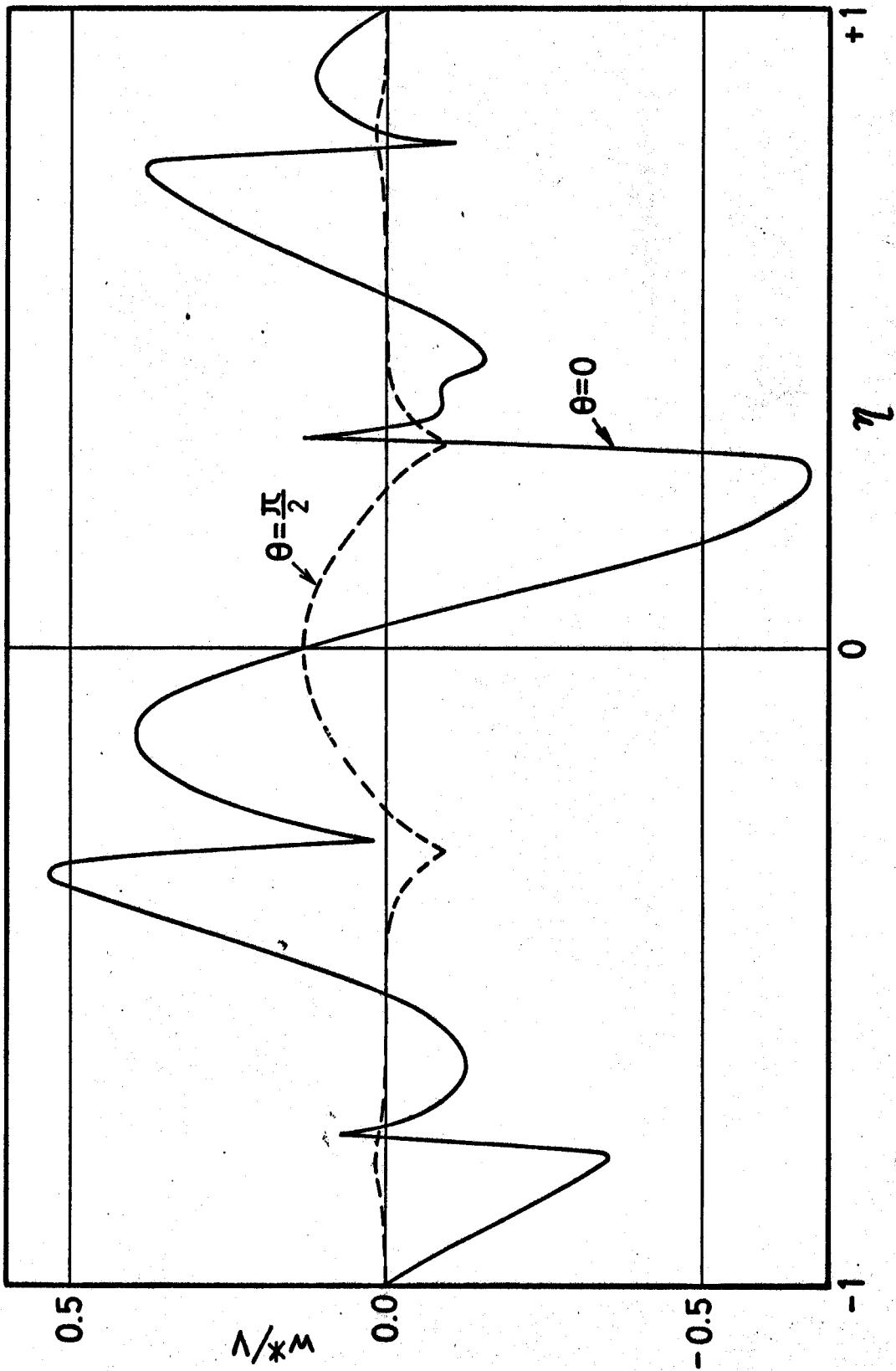


図2-23(a) 攪乱のZ成分分佈(#9より)

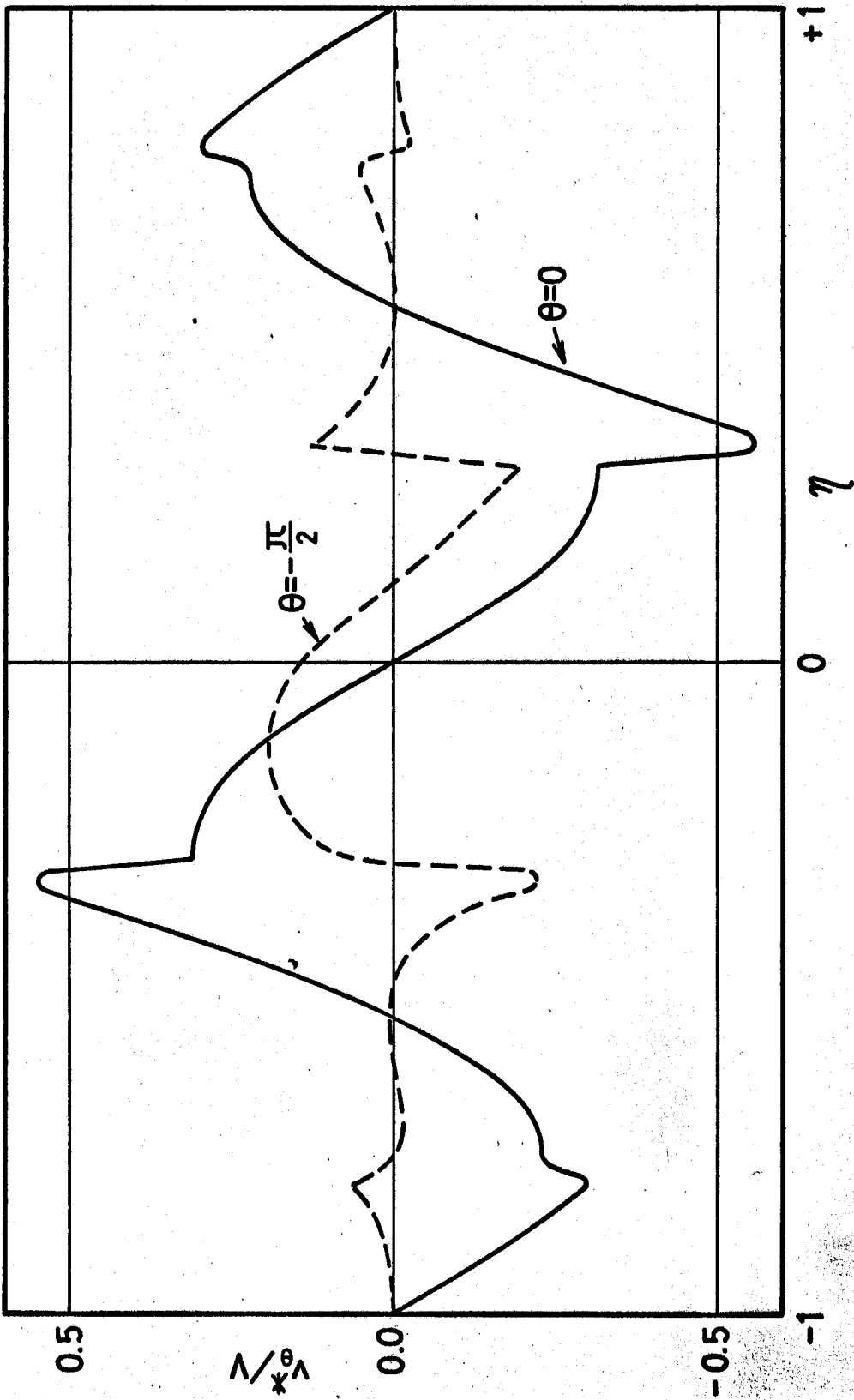


图 2-23(b) 搅乱の θ 成分分布(#9f)

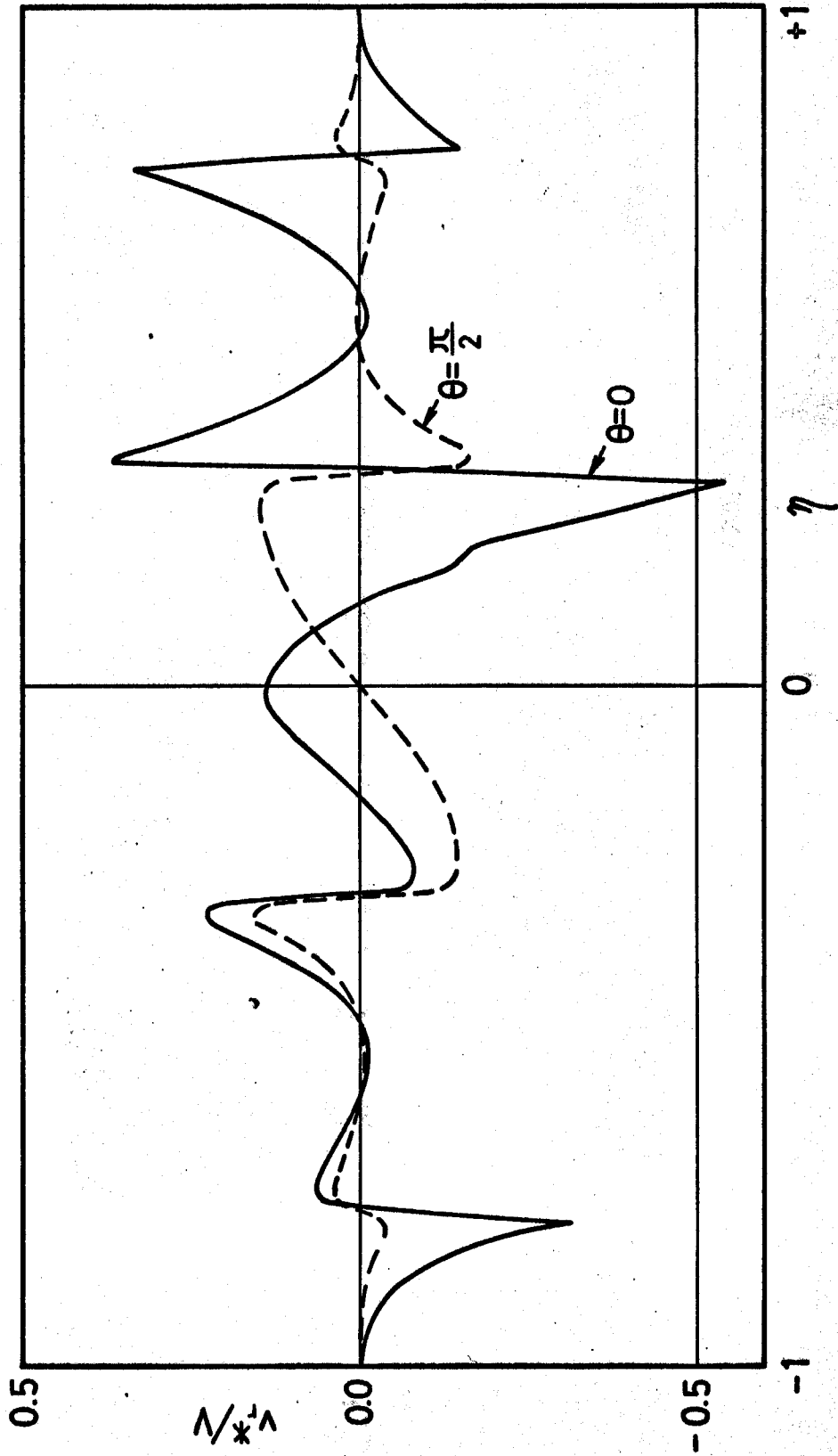


图 2-23(c) 攪乱の r 成分分布 (#9 切)

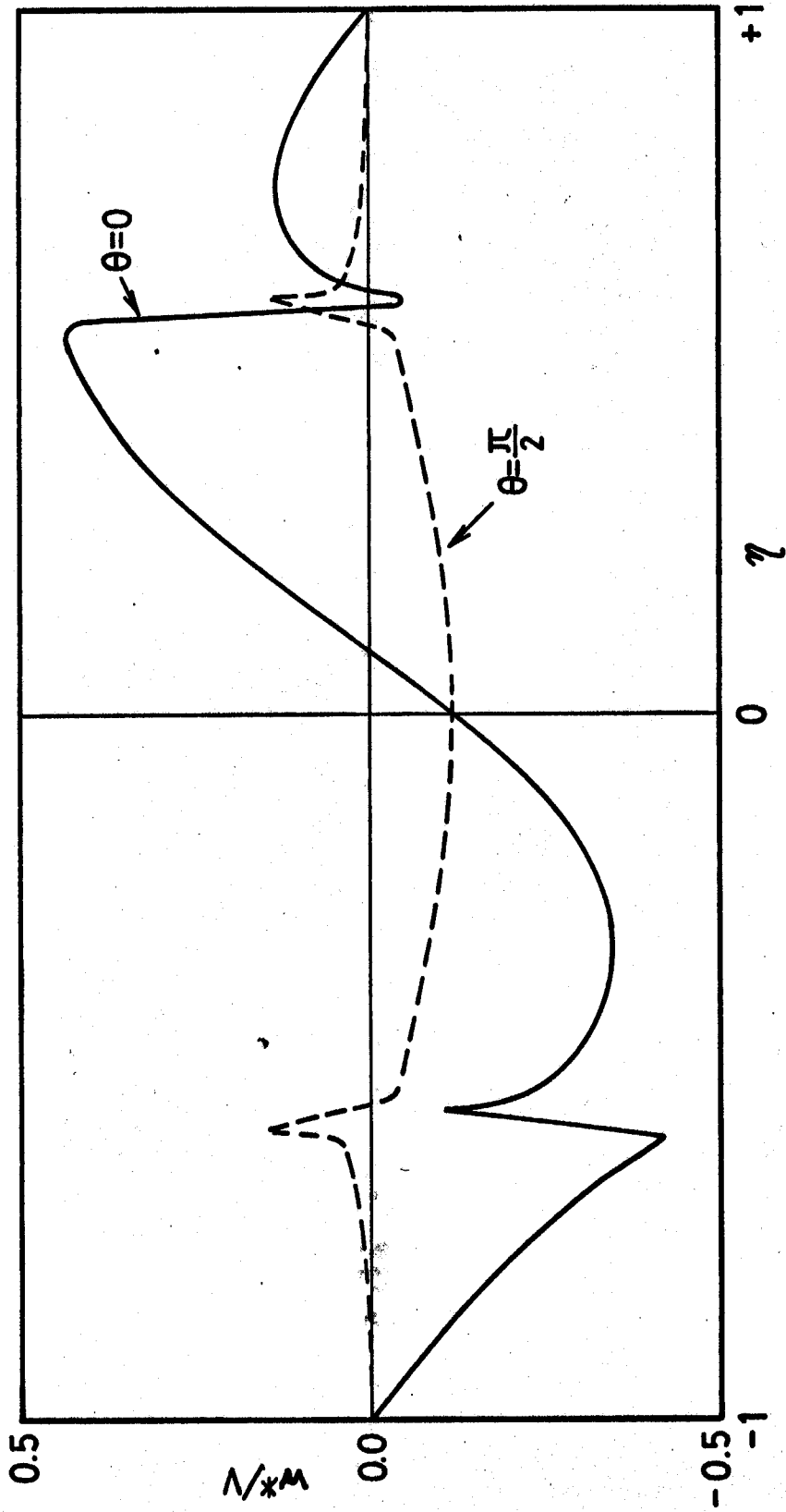


図2-24(a) 擾乱の成分分布(#7切)

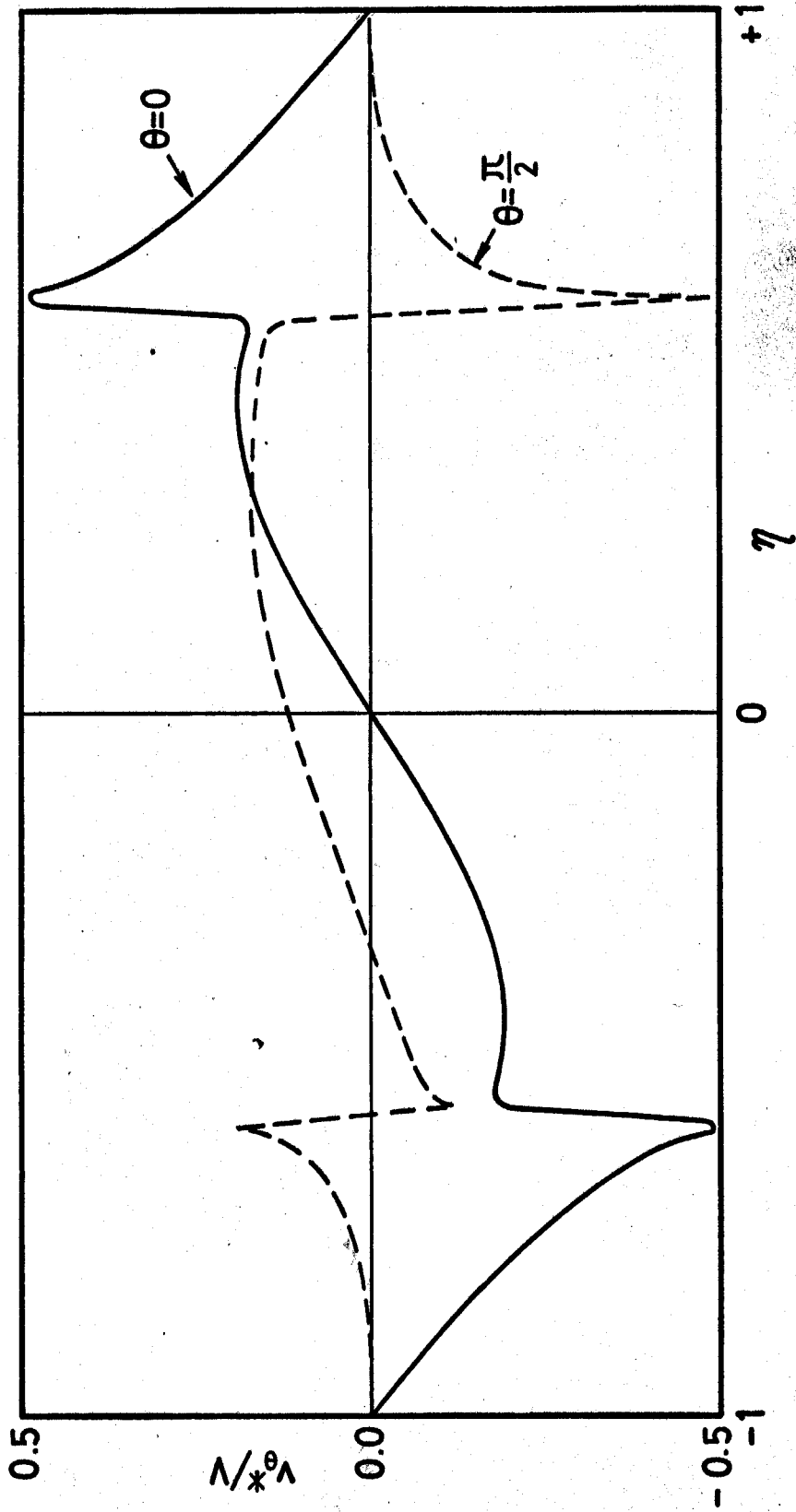


图2-24(b) 搅乱の θ 成分分布(#7切)

供試管内径 2mm 以下の場合には $\rho g a^2 / \sigma \leq 0.14$ であるので、重力の影響は表面張力の影響に比べれば十分に小さい。(液温の差異による法線応力差の差異については明確な関係が不明につき、本論文では特に補正を行なうことはない。) 測定ずり速度範囲は、 $10^3 \sim 10^5$ 1/s 程度であるが、供試管によりずり速度の上限が制限される。それは 2.4.2 節で述べた現象によっている。本実験範囲における上限のレイノルズ数すなわち図 2-22 中に示すように直線からずれはじめる点のレイノルズ数 Re_c を表 2.4 に示す。本実験で使用した管の管長比 L/D_i は No.4, No.6 の供試管を除き、140 以上に設定してあるので、 $Re \leq 2000$ ならば水などのニュートン流体では速度場は十分に発達しているものと考えられる。No.4, No.6 の供試管は溶液の安定限界レイノルズ数 Re_c に及ぼす効果をみるためのもので(ニュートン流体を使用するならば $Re \leq 1000$ で発達した速度場が得られるものと考えられる)、表 2.4 より判断する限り、No.4, No.6 の管に対する Re_c 数は同径

表 2.4 Rec 值

溶 液	濃 度 (ppm)	管 試													
		No. 1	No. 2	No. 3	No. 4	No. 5	No. 6	No. 7	No. 8	No. 9	No. 10				
PEO	10					1020		890							
	20		760					1120	1220	1170					
	50			870	540	1050	570	1130		850					
	100			530		800			640					880	
SEPARAN	20			820				970		940					
	50			800				940		960					
	100	660		430	410	560	420								
	150			630		660		520		570				650	

の長い管に比して低下していることが推定される。これは2.4.2節で述べたような微小攪乱の存在に管長も影響することを示しているものと推察される。これらの L/D_i 比が小さい供試管を含めて、ほぼ安定した層流が得られて、かつ信頼できる法線応力差の測定可能な限界レイノルズ数 Re_c は400~1000程度となる。これらの値より小さなレイノルズ数範囲において(重力の影響により流出ジェット形状が不規則あるいは非対称とならない限り)、法線応力差は測定可能であると言えよう。

2.5 結論

以上本章で示した方法により希薄高分子溶液の第1法線応力差(第2法線応力差が小さい場合)を測定することが可能なことを明らかにした。すなわち供試管の管径基準のレイノルズ数 Re が約400~1000程度以下の場合に信頼できる測定結果の得られることが判明した。

第3章 円柱周りの速度場および温度場

3.1 緒言

さまざまな流動場の中において特に円柱周りの二次元流は、各種の熱伝達あるいは速度測定に対する熱線流速計の使用の可否などに関連する基本的問題であるために、その流動状況ならびに熱伝達を説明する必要が生じている。しかし現在のところ希薄高分子溶液をはじめ非ニュートン流体を対象としたこの種の問題に関しては、実験的にも解析的にもあまり研究されていないようである。

一方ニュートン流体についての速度場や抗力などに対する実験的ならびに解析的研究はかなり以前から行なわれており⁽⁸¹⁾、一様流中に置かれた円柱についての抗力係数などについては、Wieselsberger⁽¹⁰⁹⁾により実験的に広範囲 ($1 \leq Re \leq 10^6$) にわたって抗力係数が求められ、遅い流れ ($Re \leq 1$) の抗力係数は Finn⁽³²⁾ により実験的に、中間の速度 ($1 \leq Re \leq 10^2$) についての抗力係数は Tritton⁽⁹⁹⁾ により実験的に詳細に求められた。

同じく円柱周りの流れのはく離点などについては実験的に, Acrivosら⁽²⁾, 種田⁽⁹⁴⁾により求められている。流線などの実験的研究は Homan⁽⁴⁵⁾により行なわれた。

これに対して一様流中に置かれた円柱の周りの速度場などについての解析的研究には, 遅い流れに対する Lamb⁽⁵⁸⁾; 友近ら⁽⁹⁷⁾の研究, 遅い流れおよびやや速い流れに対する今井^{(50),(51)}の研究があり, 一方速い流れに対しては境界層近似による理論など⁽⁸¹⁾がある。近年中間的な速度に対して数値解析がほどこされ, 電子計算機使用による解析が盛んに行なわれている^{(53),(54),(55),(93),(95)}。

一方, 一様流中に置かれた円柱の周りにおける熱伝達については, 空気流を使用した実験的研究が数多く^{(22),(56),(113)}, 平均ヌセルト数については低レイノルズ数領域において Collisら⁽¹³⁾により, また $1 \leq Re \leq 10^6$ 領域については Hilpert⁽⁴⁴⁾により報告されている。円柱表面に沿う局所熱伝達の変化については, 比較的遅い流れの場合については Eckertら⁽²¹⁾などにより, 速

い流れの場合については Schmidt⁽⁸²⁾ などにより報告されている。しかしながら水、油などに対する実験結果は比較的少なく、針線に対しての実験的研究が Davis⁽¹⁴⁾、Piret⁽⁷²⁾ により報告されている程度である。温度場などの解析的研究は、低レイノルズ数領域でオセーン近似が適用できる場合について Cole⁽¹²⁾ により報告されている。

そのほか解析的研究として回転体の前方よどみ点近傍における熱伝達を Sibulkin⁽⁸⁷⁾ が求め、温度場が境界層的様相を呈する高レイノルズ数あるいは高プラントル数域の強制対流層流熱伝達については、局所ヌセルト数と壁面摩擦応力の関係あるいは温度場などを Lighthill⁽⁶⁰⁾、Acrivos⁽¹⁾ が求めている⁽³⁹⁾。

二次元物体周りの流れ場、温度場などの非ニュートン流体に対する研究はきわめて少なく、よどみ点近傍の流れについて Rajeswari⁽⁷⁴⁾、Srivastava⁽⁹¹⁾ が特定の流体について解析し、また強制対流熱伝達の問題ではよどみ点付近の熱伝達を、事実上ほとんど平

均熱伝達率に寄与しない散逸項（よどみ点に限り対流項と同程度となる）を含めて Sharma ら⁽⁸⁵⁾が解析している程度であり，おまけに James ら⁽⁵²⁾により希薄高分子溶液の一樣流中の円柱の抗力および平均ヌセルト数が層流域について実験的に求められ，ニュートン流体中の場合と異なり各種の異常な現象を呈することが報告されているにすぎない。

そこで本章では，希薄高分子溶液の一樣流中に置かれた円柱周りの二次元定常層流について，速度場，温度場，強制対流熱伝達を解析的に調べることにする。

3.2 基礎式

本章では，希薄高分子溶液の一樣流中に置かれた円柱周りの二次元定常層流を取扱う。流体は非圧縮性であると仮定し，また流体の物性値は温度の影響を受けないものと仮定する。

座標軸の原点を円柱の中心に， X 軸を一樣流の向きに， Y 軸を X 軸に垂直に図 3-1 のように取ると，

運動方程式は X-, Y-
方向についてそれぞれ
それぞれ

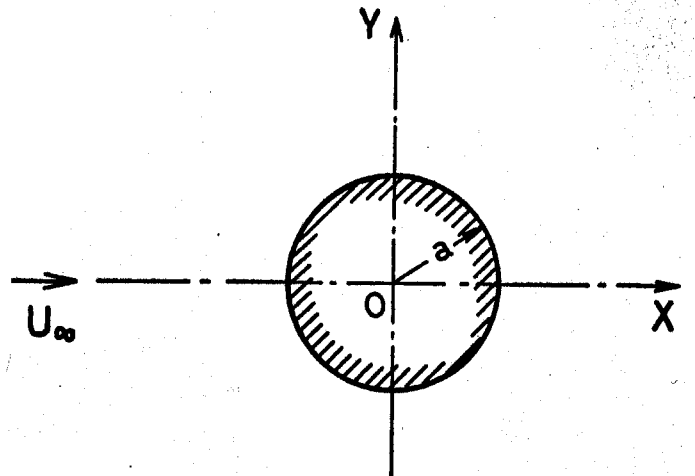


図 3-1

$$\rho \left(U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial T_{XX}}{\partial X} + \frac{\partial T_{XY}}{\partial Y} \quad (3.1)$$

$$\rho \left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial T_{XY}}{\partial X} + \frac{\partial T_{YY}}{\partial Y} \quad (3.2)$$

となる。なお外力は省略する。レオロジ方程式として粘弾性流体のレオロジ的挙動を比較的よく表わすと考えられている Denn モデル⁽¹⁵⁾を使用する。Denn モデルでは偏差応力テンソルの成分 T^{ij} は

$$T^{ij} = \bar{\mu}(\text{II}) B_{(1)}^{ij} - \bar{\lambda}(\text{II}) B_{(2)}^{ij} \quad (3.3)$$

となる。ただし、 $B_{(1)}^{ij}, B_{(2)}^{ij}$ はそれぞれ第 1 種、第 2 種の Rivlin-Ericksen 加速度テンソルで、非圧縮性流体に対しては

$$B_{(1)}^{ij} = g^{im} v^j{}_{;m} + g^{jm} v^i{}_{;m} \quad (3.4)$$

である。また $B_{(2)}^{ij}$ は

$$B_{(2)}^{ij} = \frac{\partial}{\partial t} B_{(1)}^{ij} + v^m B_{(1);m}^{ij} - v^i_{;m} B_{(1)}^{mj} - v^j_{;m} B_{(1)}^{im} \quad (3.5)$$

である。そして Π はテンソル $B_{(1)}^{ij}$ の第 2 不変量で

$$\Pi = g_{im} g_{jn} B_{(1)}^{ij} B_{(1)}^{mn} \quad (3.6)$$

である。また $\bar{\mu}(\Pi), \bar{\lambda}(\Pi)$ は次のような Π の関数である。

$$\bar{\mu}(\Pi) = \mu \cdot (0.5\Pi)^{(n-1)/2} \quad (3.7)$$

$$\bar{\lambda}(\Pi) = \lambda (0.5\Pi)^{(s-2)/2} \quad (3.8)$$

式(3.7),(3.8), したがって Denn モデル式(3.3)は四個の物質定数 μ, λ, n, s を含んでいる。このうち指数に現れる n, s は一般的にそれぞれ

$$0 < n \leq 1, \quad 0 < s \leq 2$$

の範囲の値を取るのが普通である。しかし希薄高分子溶液においては $n=1$ (かつ $\lambda=0$ なら Denn モデルはニュートン流体を表す), $s \cong 2$ (適当な速度範囲内で) と考えてよいであろう。なお本章にては電子計算機の容量および演算時間の関係で s の値につ

いては $s=2$ に限定した。したがって式(3.3)は $n=1$,
 $s=2$ の場合には

$$T^{ij} = \mu B_{(1)}^{ij} - \lambda B_{(2)}^{ij} \quad (3.9)$$

となる。また連続の式は

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (3.10)$$

である。一方エネルギー方程式は定常流の場合

$$\rho c (U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y}) = -\text{div } q + \frac{1}{2} B_{(1)ij} T^{ij} \quad (3.11)$$

である。熱線流速計の場合のように、流体と表面温度にある程度の温度差があり、流速が比較的速くない場合（水の場合で 5 m/s 以下）にはエッケルト数 $= U_{\infty}^2 / c(\theta_w - \theta_{\infty}) \ll 1$ であり、かつ希薄高分子溶液のように弾性的挙動が弱い場合には、その結果として

$$B_{(1)ij} T^{ij} \ll \rho c U_{\infty} (\theta_w - \theta_{\infty}) / a$$

であるので式(3.11)の右辺第2項を省略する。熱流束に対してはフーリエの法則

$$q = -\kappa \text{grad } \theta \quad (3.12)$$

を用い，前述のように x の温度依存性を省略して近似すると式(3.11)は

$$\rho c(U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y}) = \kappa (\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}) \Theta \quad (3.13)$$

となる．ここで式(3.1),(3.2)より圧力 P を消去し，式(3.9),(3.10)を用いると運動方程式として

$$\rho (U \frac{\partial}{\partial X} + V \frac{\partial}{\partial Y}) (Z + \frac{\lambda}{\rho} \Delta^* Z) = \mu \Delta^* Z \quad (3.14)$$

$$Z = -(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}) \Psi \quad (3.15)$$

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (3.16)$$

を得る．式(3.14)~(3.16)を無次元化すると

$$(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y})(\zeta + \varepsilon \Delta \zeta) = \frac{2}{Re} \Delta \zeta \quad (3.17)$$

$$\zeta = -\Delta \psi \quad (3.18)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.19)$$

となる．ただし ε は弾性力と慣性力の比を示す無次元数で， $\varepsilon = \lambda / \rho a^2$ であり，また $Re = 2U_\infty a / \nu$ ， $\nu = \mu / \rho$ である．同様に式(3.13)を無次元化すると（表面温度が

一定でない場合には Θ_w の代わりに適当な値を用いる)

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{2}{Re Pr} \Delta \theta \quad (3.20)$$

となる。以下低レイノルズ数の場合、中程度のレイノルズ数の場合、高レイノルズ数の場合にかけて解析する。そのためにまず円柱から十分離れた場所における挙動を知ることが必要である。いま座標変換

$$x+iy = \exp(\xi+i\eta) \quad , \quad r = \exp \xi \quad (3.21)$$

を行うものとする。しかるときは半径 r に対する漸近展開として

$$\begin{aligned} \psi = y + \frac{c_D}{2} \left(\frac{\eta}{\pi} - \text{erf} Q \right) - \frac{c_D^2 Re}{16\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{P_0} \left[\sqrt{2} \{ \text{erf}(\sqrt{2}Q) - 1 \} \right. \right. \\ \left. \left. - e^{-Q^2} \text{erf} Q \right] + \frac{\sqrt{2}Q}{P_0^2 + Q^2} \right) \quad (3.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta = -\frac{c_D Re}{4\sqrt{\pi}} \frac{Q}{r} e^{-Q^2} + \frac{c_D^2 Re^2}{64\sqrt{\pi} r} \left(-\frac{1}{P_0} e^{-Q^2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} Q e^{-Q^2} + (2Q^2 - 1) \text{erf} Q \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{P_0^3} \left[\sqrt{2} \{ \text{erf}(\sqrt{2}Q) - 1 \} - e^{-Q^2} \text{erf} Q \right] \right) \quad (3.23) \end{aligned}$$

を得る。ただし

$$P_0 = \sqrt{0.5 Re r} \cos(0.5\eta) \quad , \quad Q = \sqrt{0.5 Re r} \sin(0.5\eta)$$

である⁽⁵⁰⁾ この式は本来 $\varepsilon=0$ のニュートン流体に対するものであるが、 $\varepsilon \neq 0$ の場合においても式(3.22)の右辺第2項まで、式(3.23)の右辺第1項までは少なくとも同形となる。そのため、希薄高分子溶液の場合にも、 ε の存在による影響が余り大きくないものとして、式(3.22),(3.23)を用いることとする (ε の影響は c_0 の中に陰に含まれている)。

温度境界条件としては、熱線流速計などで表面温度一定の場合が多いことを考え、ここでも表面温度を一定 ($\theta_w = \text{一定}$) と仮定する。その場合、無限遠の挙動を求めするため、第一近似として $u \rightarrow 1, v \rightarrow 0$ と置いた解を採用し、第二近似を摂動法により求めて、無限級数の一部を誤差関数、双曲正接関数で代用すると、温度場に対する漸近展開として

$$\begin{aligned} \theta = & A_0 \frac{1}{\sqrt{r}} \cos \frac{\eta}{2} \exp \left\{ -\frac{Pr Re}{4} r (1 - \cos \eta) \right\} \\ & + c_0 A_0 \frac{1}{\sqrt{r}} \sqrt{\frac{Re}{8\pi}} \left[\left(R^2 + \frac{5\delta_0 - 4}{6} R^4 \right) e^{-\delta_0 R^2} \right. \\ & \left. + \frac{(11\delta_0^2 - 18\delta_0 + 8)}{10(4 - \pi)} \left(\frac{\pi}{\delta_0} \right)^{3/2} R^3 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \operatorname{erf}(\sqrt{\delta_0} R) - \tanh\left(\frac{2\sqrt{\delta_0}}{\sqrt{\pi}} R\right) \right\} \\
& + c_0 A_0 \frac{1}{r\sqrt{r}} \left[\left(-\frac{R^2}{2\pi} - \frac{R^4}{6\pi}\right) e^{-R^2} - \frac{\sqrt{\pi}}{30(4-\pi)} R^3 \right. \\
& \quad \left. \times \left\{ \operatorname{erf}(R) - \tanh\left(\frac{2R}{\sqrt{\pi}}\right) \right\} \right] \quad (3.24)
\end{aligned}$$

を得る。ただし

$$R = \sqrt{0.5 \operatorname{Pr} \operatorname{Re} r} \sin(0.5 \eta)$$

$$\delta_0 = 1 + \operatorname{Pr}^{-1}$$

$$A_0 = (2\pi)^{0.5} (\operatorname{Pr} \operatorname{Re})^{-1.5} \bar{N}_u$$

である。ここに \bar{N}_u は平均ヌセルト数で、半径 a を基準としたヌセルト数 N_u は

$$N_u = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)_{r=1}$$

より得られる。一方速度境界条件は

$$u = v = 0 \quad (r=1) ; \quad u=1, v=0 \quad (r=\infty)$$

であり、温度境界条件は

$$\theta = 1 \quad (r=1) ; \quad \theta = 0 \quad (r=\infty)$$

である。つぎに円柱の抗力を求めるため、円柱表面における応力などを評価すると、

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)_{r=1} = 0, \quad (\zeta)_{r=1} = \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial r}\right)_{r=1}$$

$$(Tr_\theta)_{r=1} = \frac{2}{Re} \cdot \rho U_\infty^2 (\zeta)_{r=1}$$

$$\left(\frac{1}{\rho U_\infty^2} \frac{\partial P}{\partial \eta}\right)_{r=1} = \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_\eta}{\partial r^2} + \frac{\partial u_\eta}{\partial r}\right)_{r=1} + \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial r}\right)^2\right]_{r=1}$$

であるから

$$(Tr_r)_{r=1} = 0$$

である。ただし u_r 等は r 方向速度成分等を示す。し

たが、て圧力抗力係数 c_{dp} および摩擦抗力係数 c_{df} は

$$\begin{aligned} c_{dp} &\equiv \frac{-2}{\rho U_\infty^2} \int_0^\pi \cos \eta (P)_{r=1} d\eta \\ &= \frac{4}{Re} \int_0^\pi \sin \eta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right)_{r=1} d\eta - \varepsilon \int_0^\pi \cos \eta (\zeta^2)_{r=1} d\eta \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} c_{df} &\equiv \frac{-2}{\rho U_\infty^2} \int_0^\pi \sin \eta (Tr_\eta)_{r=1} d\eta \\ &= -\frac{4}{Re} \int_0^\pi \sin \eta (\zeta)_{r=1} d\eta \end{aligned} \quad (3.26)$$

より得られる。よって抵抗係数（抗力係数） c_D は

$$\begin{aligned} c_D &\equiv c_{dp} + c_{df} \\ &= \frac{4}{Re} \int_0^\pi \sin \eta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r} - \zeta\right)_{r=1} d\eta - \varepsilon \int_0^\pi \cos \eta (\zeta^2)_{r=1} d\eta \end{aligned} \quad (3.27)$$

となる。

3.3 解析 (速度場)

3.3.1 低レイノルズ数の場合

この場合、式(3.17)を直接数値計算することにより解を求めることも可能ではあるが、ここではオセー
ン近似により解を求めることにする。そこで u を $1+u$ と置きなおす。すなわち一様流との差を u と置き、運動方程式にて u と v の積などを高次の微小項とみなして省略すると、運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{Re} \Delta u - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \Delta u \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{2}{Re} \Delta v - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \Delta v \quad (3.29)$$

となる。連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.30)$$

である。連立方程式(3.28)~(3.30)の解は

$$u = -\chi - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \chi + \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \chi + \frac{\partial}{\partial x} \phi \quad (3.31)$$

$$v = -\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \chi + \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \chi + \frac{\partial}{\partial y} \phi \quad (3.32)$$

$$p = -\frac{\partial}{\partial x} \phi \quad (3.33)$$

である。ただし

$$\Delta \phi = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \Delta \chi + \frac{2}{Re} \Delta \chi \quad (3.35)$$

である。さらに $\chi = e^{\alpha x} f$ と変換すれば式(3.35)は

$$\begin{aligned} &(\alpha - 2\alpha^2 Re^{-1} + \varepsilon \alpha^3) f + (2\varepsilon \alpha - 2Re^{-1}) \Delta f \\ &+ (1 + 3\varepsilon \alpha^2 - 4\alpha Re^{-1}) f_x + \varepsilon \Delta f_x + \alpha \varepsilon (2f_{xx} - \Delta f) = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

となる。式(3.36)で添字 x は偏微分を示す。式(3.36)の解析関数表示は得にくいので、近似として $f_{xx} \approx 0.5 \Delta f$ とみなす。これは関数 f が r のみの関数の場合には角度平均で近似していることを意味する。またこのことは $\varepsilon \lesssim 1$ の場合にも差しつかえないであろう。よって式(3.36)は

$$\begin{aligned} &(\alpha - 2\alpha^2 Re^{-1} + \varepsilon \alpha^3) f + (2\varepsilon \alpha - 2Re^{-1}) \Delta f \\ &+ (1 + 3\varepsilon \alpha^2 - 4\alpha Re^{-1}) f_x + \varepsilon \Delta f_x = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

と置ける。ここで α を

$$\left(\alpha - \frac{2}{Re} \alpha^2 + \varepsilon \alpha^3\right) \left(1 - \frac{4\alpha}{Re} + 3\varepsilon \alpha^2\right)^{-1} = \left(2\varepsilon \alpha - \frac{2}{Re}\right) \varepsilon^{-1}$$

と置けば

$$\Delta f - \beta^2 f = 0 \quad (3.38)$$

となる。ただし

$$\beta = (\alpha - 2\alpha^2 Re^{-1} + \varepsilon \alpha^3)^{0.5} (2Re^{-1} - 2\varepsilon \alpha)^{-0.5} \quad (3.39)$$

$$\alpha \left(\varepsilon + \frac{8}{Re^2} \right) - \frac{2}{Re} - 12\varepsilon \frac{\alpha^2}{Re} + 5\varepsilon^2 \alpha^3 = 0 \quad (3.40)$$

である。 $r \rightarrow \infty$ にて $f \rightarrow 0$ であることを考慮すると式 (3.38) の解として

$$f = CK_0(\beta r)$$

を得る。 K_0 は 0 次の変形ベッセル関数である。 $\alpha \sim O(Re)$, $\beta \sim O(Re)$ であるので u, v を Re の昇べき形でローラン展開すると、 Re の 0 次までで

$$\begin{aligned} \frac{u}{C} = & -\frac{\alpha}{Re} + \left(1 - \frac{2\alpha}{Re}\right) \left(\gamma + \ln \frac{\beta r}{2}\right) - \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \ln r \\ & + \frac{\alpha r^2}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln r + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln r + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\phi}{C}\right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{v}{C} = & -\frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \ln r + \frac{\alpha r^2}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln r \\ & + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln r + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\phi}{C}\right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

となる。よって境界条件 ($r=1$ にて $u=-1, v=0$) を満足するためには上記の範囲内で

$$\frac{\phi}{C} = \frac{2}{Re} \ln r - \left(\frac{\alpha}{Re} + \varepsilon \right) \frac{\partial}{\partial x} \ln r \quad (3.43)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{\alpha}{Re} - \left(1 - \frac{2\alpha}{Re} \right) \left(\gamma + \ln \frac{\beta}{2} \right) \quad (3.44)$$

であればよい。円柱近傍では

$$\frac{u}{C} = -\frac{\alpha}{Re} + \left(1 - \frac{2\alpha}{Re} \right) \left(\gamma + \ln \frac{\beta r}{2} \right) + \frac{\alpha}{Re} (r^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln r \quad (3.45)$$

$$\frac{v}{C} = \frac{\alpha}{Re} (r^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln r \quad (3.46)$$

となる。渦度 ζ は

$$\zeta = \frac{\partial}{\partial y} \chi = C e^{\alpha x} \frac{\partial}{\partial y} K_0(\beta r) \quad (3.47)$$

となり、抗力係数 c_D は

$$c_D = \frac{4}{Re} C \beta K_1(\beta) \int_0^\pi \sin^2 \eta e^{\alpha \cos \eta} \left\{ 1 - \alpha \cos \eta - \beta \frac{K_1'(\beta)}{K_1(\beta)} \right\} d\eta \\ - \varepsilon C^2 \beta^2 K_1^2(\beta) \int_0^\pi \cos \eta \sin^2 \eta e^{2\alpha \cos \eta} d\eta \quad (3.48)$$

となる。式(3.48)において Re に対しては $Re \rightarrow 0$ の漸近展開、 ε に対しては ε の一次までべき級数展開する

と

$$c_D \approx \frac{8\pi}{Re} \frac{1}{0.5 - \gamma + \ln 8 - \ln Re} \left(1 + \varepsilon \frac{Re^2}{4} \frac{0.125 - \gamma + \ln 8 - \ln Re}{0.5 - \gamma + \ln 8 - \ln Re} \right) \quad (3.49)$$

となる。

3.3.2 中程度のレイノルズ数の場合

レイノルズ数 Re が $1 \lesssim Re \lesssim 100$ 程度のときには前節の
 ようなオセーン近似は妥当でなく、また逆に円柱表
 面近傍に限っても、境界層近似が可能であるとの保
 証はない。そこで速度場に関しては式(3.17)~(3.19)の
 差分近似に基づいた数値解法によった。式(3.17),(3.18)
 より

$$\Delta \zeta = \frac{Re}{2} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \zeta + \frac{Re \varepsilon}{2} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \Delta \zeta \quad (3.50)$$

$$\Delta \psi_0 = -\zeta, \quad \psi_0 = \psi - \gamma \quad (3.51)$$

である。境界条件は

$$r=1: \quad \psi_0 = -\sin \eta, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta} = -\sin \eta$$

$$r=r_\infty: \quad \psi = \psi_\infty \text{ (式(3.22))}, \quad \zeta = \zeta_\infty \text{ (式(3.23))}$$

$$\eta=0 : \psi_0 = \zeta = 0 \quad (\text{逆対称性})$$

$$\eta=\pi : \psi_0 = \zeta = 0 \quad (\text{逆対称性})$$

である。微分の近似は差分（主として中間差分）によるものとし，差分化の間隔を h とすれば，網目点 $(i, j) \{ \xi_i = (i-1)h, \eta_j = (j-1)h \}$ において，打ち切り誤差を $O(h^2)$ として，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \zeta \approx \frac{1}{h^2} \left\{ \zeta(i+1, j) + \zeta(i-1, j) + \zeta(i, j+1) \right. \\ \left. + \zeta(i, j-1) - 4\zeta(i, j) \right\}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \approx \frac{1}{2h} \left\{ \zeta(i+1, j) - \zeta(i-1, j) \right\}$$

などである。数値計算は式(3.50),(3.51)を (ξ, η) 座標に変換した後， (ξ, η) に基くラプラス演算子側（左辺）を未知（一部既知），右辺を既知とみなし，加速リーマン法により解く。すなわち式(3.50),(3.51)に対応して

$$\bar{\zeta}(i, j+1) - 4\bar{\zeta}(i, j) + \bar{\zeta}(i, j-1) \\ = F_1(i, j) - \zeta(i+1, j) - \zeta(i-1, j) \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}_0(i, j+1) - 4\bar{\psi}_0(i, j) + \bar{\psi}_0(i, j-1) \\ & = F_2(i, j) - \psi_0(i+1, j) - \psi_0(i-1, j) \end{aligned} \quad (3.53)$$

なる式を考える。($3 \leq i \leq 36, 2 \leq j \leq 40$) ただし関数 F_1 , F_2 は式(3.50), (3.51) の右辺に相当 (因数, 係数の差異有) する部分を意味する。また $j=1, j=41$ の項は境界条件を適用する。本節速度場においては $h=\pi/40, \xi_\infty=36h$ である。数値解法はまず抗力係数 c_0 に対して適当な値を仮定し, 式(3.22), (3.23) に従い $r=r_\infty(\xi=\xi_\infty)$ における ψ_∞, ξ_∞ を設定し, さらに各細目点における ψ, ξ の値を仮定する。つぎに i の値を固定し, 式(3.52), (3.53) の右辺の値を求め, 式(3.52), (3.53) を連立方程式とみたとて

$$\bar{\xi}(i, j) \quad (j=2, \sim, 40) \quad , \quad \bar{\psi}_0(i, j) \quad (j=2, \sim, 40)$$

を求め。その後 $[\xi(i, j) + \omega_\xi \{ \bar{\xi}(i, j) - \xi(i, j) \}]$, $[\psi_0(i, j) + \omega_\psi \times \{ \bar{\psi}_0(i, j) - \psi_0(i, j) \}]$ の値をもつて新たな $\xi(i, j), \psi_0(i, j)$ の値とする。ただし ω_ξ, ω_ψ は ξ, ψ_0 に対する加速係数である。これを $i=36, \dots, 4, 3$ の順に実行し, $i=3$ 終了後境界条件を用いて $\psi_0(2, j)$ を算出し, ついで $i=4, \dots, 36$ の順

に行つて1周期とする。この一順後円柱表面の渦度を式(3.50)より求め、抗力係数を算出し、 $\gamma_{\infty}, \zeta_{\infty}$ を修正する形式を採用し、 γ_0, ζ_0 の値が収束した際に打切るものとする。この境界条件の入力方などは高見らによるもの⁽⁹³⁾と異なっている。 ζ, γ_0 に対する加速係数 $\omega_{\zeta}, \omega_{\gamma}$ はそれぞれ

$$0 < \omega_{\zeta} < 0.5, \quad 1.0 \leq \omega_{\gamma} \leq 1.5$$

の間の値を使用した。数値解の収束判定は

必要条件：

$$|\bar{\zeta} - \zeta| < 0.01, \quad |\bar{\gamma}_0 - \gamma_0| < 0.005 \quad (\text{各網目点})$$

および

収束条件：

連続20周期の c_0 の相対変化 < 0.002

または |連続5周期の c_0 の変化| < 0.0011

を用いた。ただしこの値は $Re = 20$ の場合についてのものである。

3.3.3 高レイノルズ数の場合

この場合には速度場解析に際して運動方程式を直

接差分化するにせよ，後流に対する考慮にかなりの困難を伴うため，速度場は境界層近似により求めることにする．本節においては前方よどみ点を原点，円柱の周に沿って x 軸，それに垂直方向を y 軸とする座標系（有次元）を使用する．しからは境界層方程式は， x - y -方向速度の物理成分を u, v とし，曲率の影響を省略すると

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (T_{xx} - T_{yy}) + \frac{\partial}{\partial y} T_{xy} - \frac{d}{dx} P_{\infty} \quad (3.54)$$

となる．式(3.54)にて $y = \infty$ と置くことにより

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (T_{xx} - T_{yy}) + \frac{\partial}{\partial y} T_{xy} + \rho U_0 \frac{dU_0}{dx} \quad (3.55)$$

を得る．ここで $U_0(x)$ は境界層外の流速である．さて二次元流では連続の式を用いると

$$B_{(1)}^{xx} - B_{(1)}^{yy} = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 4 \frac{\partial u}{\partial x} = -4 \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.56)$$

を得る． $B_{(2)}$ に対して境界層近似をほどこすと

$$B_{(2)}^{xx} - B_{(2)}^{yy} \approx -2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.57)$$

を得る．よって層流境界層近似において

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = -4\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2\lambda \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \int U_0 \frac{dU_0}{dx} \quad (3.58)$$

を得る。ここで式(3.58)の両辺を $y=0$ から境界層外の点 $y=h$ ($dh/dx=0$) まで積分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^h u(U_0 - u) dy + \frac{dU_0}{dx} \int_0^h (U_0 - u) dy \\ = \frac{\tau_0}{\rho} - \frac{2\lambda}{\rho} \frac{d}{dx} \int_0^h (\frac{\partial u}{\partial y})^2 dy \end{aligned} \quad (3.59)$$

を得る。ただし τ_0 は壁面せん断応力

$$\tau_0 = \mu (\frac{\partial u}{\partial y})_{y=0} \quad (3.60)$$

である。希薄高分子溶液のように、溶液の弾性的挙動があまり大きくない場合には式(3.59)の右辺第2項の積分は、ニュートン流体の場合の結果から類推してもさほど大きな差異を生じないであろう。したがって

$$\int_0^h (\frac{\partial u}{\partial y})^2 dy \approx \frac{1}{2\nu} \frac{d}{dx} \int_0^h u(U_0^2 - u^2) dy \quad (3.61)$$

と置ける⁽⁸¹⁾。よってこの近似のもとに(後述の数値

例の場合で $\varepsilon^* \approx 0.01$ 程度の際)

$$\begin{aligned} \frac{\tau_0}{\rho} = & \frac{d}{dx} \int_0^h u(U_0 - u) dy + \frac{dU_0}{dx} \int_0^h (U_0 - u) dy \\ & + \frac{\lambda}{\mu} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^h u(U_0^2 - u^2) dy \end{aligned} \quad (3.62)$$

を得る。さらに u および速度境界層厚さ δ に対しては

$$u = U_0 f(y/\delta, x) \equiv U_0 f(\eta, x), \quad \delta = \delta(x) \quad (3.63)$$

を仮定する。境界条件として

$$f(0, x) = 0, \quad f(1, x) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} f(1, x) = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} f(1, x) = 0 \quad (3.64)$$

を採用する。さらに希薄高分子溶液の場合には弾性的挙動が比較的弱いので

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} \approx -\rho U_0 \frac{dU_0}{dx} \quad (3.65)$$

を仮定すると

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} f(0, x) = -\frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_0}{dx} \equiv -\varphi \quad (3.66)$$

であり、 τ_0 は

$$\tau_0 = \mu U_0 \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} f(0, x) \quad (3.67)$$

となる。よって境界条件を考慮すれば

$$f(\eta, x) = F(\eta) + \varphi G(\eta) \quad (3.68)$$

$$F(0) = G(0) = 0, \quad F''(0) = 0, \quad G''(0) = -1$$

$$F(1) = 1$$

$$F'(1) = F''(1) = G(1) = G'(1) = G''(1) = 0$$

と置ける。これより式(3.62)は

$$\begin{aligned} & \varphi'(0.5A_3 + 1.5A_4\varphi + 2.5A_5\varphi^2) \\ & + \{-F'(0) - \varphi G'(0) + \varphi(A_1 + \varphi A_2) \\ & \quad + 2\varphi(A_3 + A_4\varphi + A_5\varphi^2)\} U_0' U_0^{-1} \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{U_0''}{U_0'} \delta^2 \right) (A_3 + A_4\varphi + A_5\varphi^2) \\ & + \frac{\rho\lambda}{\mu^2} \cdot \frac{\delta U_0'}{U_0'^2} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \{ U_0^3 \delta (A_6 + \varphi A_7 + \varphi^2 A_8 + \varphi^3 A_9) \} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

となる。 $x=0$ において $\varphi'=0$ かつ

$$\begin{aligned} & -F'(0) - \varphi G'(0) + \varphi(A_1 + \varphi A_2) \\ & + 2\varphi(A_3 + \varphi A_4 + \varphi^2 A_5) \\ & + 6\lambda U_0' \mu^{-1} \varphi(A_6 + \varphi A_7 + \varphi^2 A_8 + \varphi^3 A_9) = 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

である。ただし

$$A_1 = \int_0^1 (1-F)d\eta, \quad A_2 = -\int_0^1 Gd\eta, \quad A_3 = \int_0^1 F(1-F)d\eta$$

$$A_4 = \int_0^1 G(1-2F)d\eta, \quad A_5 = -\int_0^1 G^2d\eta, \quad A_6 = \int_0^1 F(1-F^2)d\eta$$

$$A_7 = \int_0^1 G(1-3F^2)d\eta, \quad A_8 = -3\int_0^1 FG^2d\eta, \quad A_9 = -\int_0^1 G^3d\eta$$

である。さらに式(3.69)中で、 λ を含む項のうち比較的微小と考えられる項を略すと式(3.69)は

$$\begin{aligned} & \varphi'(0.5A_3 + 1.5A_4\varphi + 2.5A_5\varphi^2) \\ & + \{-F'(0) - \varphi G'(0) + \varphi(A_1 + \varphi A_2) \\ & \quad + 2\varphi(A_3 + A_4\varphi + A_5\varphi^2)\} U_0' U_0^{-1} \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{U_0''}{\nu} \delta^2 \right) (A_3 + A_4\varphi + A_5\varphi^2) \\ & + \frac{6\lambda U_0'}{\mu} \frac{U_0'}{U_0} \varphi (A_6 + \varphi A_7 + \varphi^2 A_8 + \varphi^3 A_9) = 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

となる。数値計算例は

$$U_0 = 2U_\infty \sin(x/a), \quad \varepsilon^* \equiv 6\varepsilon Re$$

$$F = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4, \quad G = \eta(1-\eta)^3/6$$

の場合について行なう。

3.4 解析 (温度場)

本章においては流体の物性は温度の影響を受けない場合を想定しているので、速度場とは独立に取り扱うことが可能である。

3.4.1 極低レイノルズ数の場合 ($Re \cdot Pr \lesssim 1$ の場合)

自然対流が無視できる場合には、すなわち非圧縮の仮定が有効な領域においては、温度場に対してもオセーン近似をほどこすことが可能で、無次元温度 θ は

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{2}{Pr Re} \Delta \theta \quad (3.72)$$

となる。 $r \rightarrow \infty$ で $\theta \rightarrow 0$ となることより、温度 θ は

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \{ K_0(\alpha r) e^{\alpha x} \} \quad (3.73)$$

となる。ただし B_n : 任意定数, K_0 : 0 次の変形ベッセル関数, $\alpha = Pr \cdot Re / 4$ である。境界条件 ($r=1: \theta=1$) により、 α のべき級数展開にて α^2 までの精度で、係数 $B_n (n=0, 1, \dots)$ を定めると

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \frac{1}{K_0(\alpha)} \left\{ 1 + \frac{\alpha K_1(\alpha)}{2K_2(\alpha)} \right\} - \frac{\alpha}{K_1(\alpha)} + \frac{\alpha^2}{2K_2(\alpha)} \\
 B_1 &= \frac{1}{K_1(\alpha)} - \frac{\alpha}{K_2(\alpha)} \\
 B_2 &= \frac{1}{2K_2(\alpha)} \\
 B_n &= 0 \quad (n \geq 3)
 \end{aligned}
 \tag{3.74}$$

を得る。ただし K_n は n 次の変形ベッセル関数である。
したがって平均ヌセルト数 \bar{Nu} は

$$\begin{aligned}
 \bar{Nu} &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=1} d\eta \\
 &\approx B_0 \alpha K_1(\alpha) \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \right) - B_1 \left\{ \frac{\alpha^3}{2} K_0(\alpha) - K_1(\alpha) \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{3}{16} \alpha^4 \right) \right\} \\
 &\quad + B_2 K_1(\alpha) \frac{3\alpha^3}{4} \\
 &\approx -\frac{1 + \alpha^2 \{ \gamma + \ln(\alpha/2) \}}{\gamma + \ln(\alpha/2) - (\alpha^2/4)}
 \end{aligned}
 \tag{3.75}$$

となる。

3.4.2 低レイノルズ数の場合

温度場について考えるため、式(3.20)を (ξ, η) 座標に変換すると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\theta = \frac{Re \cdot Pr}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right) \quad (3.76)$$

となる。この θ に関する線形偏微分方程式を解析的に解くことはきわめて困難なので、本節では数値解法によって行なう。微分の近似は差分（主として中間差分）によるものとし、差分化の間隔を h とする。境界条件は

$$\xi=0 (r=1) : \theta=1 ; \xi=\xi_{\infty} (r=r_{\infty}) : \theta=\theta_{\infty} \quad (\text{式(3.24)})$$

$$\eta=0 : \frac{\partial \theta}{\partial \eta}=0 \text{ (対称性)} ; \eta=\pi : \frac{\partial \theta}{\partial \eta}=0 \text{ (対称性)}$$

である。本節では $h=\pi/40$, $\xi_{\infty}=29h$ とした。しかしながら式(3.76)を差分化し θ に関する線形連立方程式として解くことは電子計算機容量および演算時間の関係で不可能に近いので、数値計算は式(3.76)に対応して、網目点 $(i,j) \{ \xi_i=(i-1)h, \eta_j=(j-1)h \}$ において

$$\begin{aligned} & \bar{\theta}(i,j+1) - 4\bar{\theta}(i,j) + \bar{\theta}(i,j-1) \\ & = \frac{Pr \cdot Re}{4} h \left[\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \{ \theta(i+1,j) - \theta(i-1,j) \} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \{ \theta(i,j+1) - \theta(i,j-1) \} \right] \\ & \quad - \theta(i+1,j) - \theta(i-1,j) \end{aligned} \quad (3.77)$$

なる式を考える ($2 \leq i \leq 29, 2 \leq j \leq 40$). $j=1, j=41$ に対しては境界条件を考慮して同様な式を用いる. 解法は加速リーフマン法を用いる. すなわちまず適当な \bar{N}_u を仮定して式(3.24)に従い θ_∞ を設定する. ついで各網目点にかたり θ の値を仮定する. つぎに i の値を固定し, 式(3.77)の右辺の値を求め, 式(3.77)を連立方程式とみたとて $\bar{\theta}(i, j)$ ($j=1, \dots, 41$) を求める. その後

$$[\theta(i, j) + \omega \{\bar{\theta}(i, j) - \theta(i, j)\}]$$

の値をもって新たな $\theta(i, j)$ の値とする. ただし ω は加速係数であり, 本節では1.0とした. これを $i=2, 3, \dots, 28, 29, 28, \dots, 2$ と1周期くり返した後に平均ヌセルト数を算出し, 式(3.24)により θ_∞ を修正する. 以下 $i=2 \sim 2$ の周期をくり返すものとし, θ の値が収束した際に打ち切るものとする. 温度計算の収束判定条件は次の通り.

必要条件: 各網目点にて $|\bar{\theta}(i, j) - \theta(i, j)| < 0.01$

収束条件: 平均ヌセルト数計算値の相対変化 < 0.02

なお局所ヌセルト数 N_u は前進差分式により, 次のよ

うである。

$$\begin{aligned} Nu &= -\frac{1}{2h} \{4\theta(2,j) - \theta(3,j) - 3\theta(1,j)\} \\ &= -\frac{1}{2h} \{4\theta(2,j) - \theta(3,j) - 3\} \end{aligned} \quad (3.78)$$

3.4.3 中程度のレイノルズ数の場合

この場合、空気あるいは水の場合の熱伝達の実験結果⁽¹⁴⁾⁽⁷²⁾からの推定によれば、 $Re \geq 10$ である限り、水などの流体中では $\bar{Nu} \geq 2$ であることが予期される。これは一様流中に円柱が置かれたための速度場の変化が、円柱半径の10倍以上に及ぶのに比べ、温度場は円柱のごく近傍にて急激に変化するにすぎないことを意味している。そのため温度場に対して式(3.24)のような漸近式が成立する範囲、すなわち対流熱移動が主流を占め、伝導による熱移動が少ないような円柱から離れた領域においては温度はほとんど一様流の温度と等しくなっていることが予測される。その結果、数値計算の打ち切り誤差（または残差）を考えれば、温度場解析の領域を広くとることはあま

り有益とはならないであろう。他方円柱近傍での温度変化が激しいため、速度場の解析以上に網目区分を細かくしないと、そのために誤差が生ずるおそれがある。そこで $Re = 20$ の場合については $\delta_{\infty} = 14\pi/40$, $h = \pi/80$ とし、多少の誤差が生じることは犠牲にしても $\theta_{\infty} = 0$ と仮定した。以下温度場の数値計算は低レイノルズ数の場合とほぼ同様である。収束条件として（平均ヌセルト数の相対変化 < 0.01 ）を用いた。

3.4.4 高レイノルズ数の場合

この場合、温度場についても境界層の様相を呈することが予測されるので、境界層近似を用いると、無次元温度 θ に対して

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (3.79)$$

を得る。ただし座標系は 3.3.3 節と同様、前方よどみ点を原点、円柱の周に沿って x 軸、それに垂直方向を y 軸とする。式(3.79)を y について 0 から ∞ まで積分すると

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} (u\theta) dy = -\frac{\kappa}{\rho c} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (3.80)$$

となる。ここで流れ関数 ψ は $\xi=0$ の近傍で

$$\psi = \xi^2 F_{20}(\eta) + \xi^3 F_{30}(\eta) + \dots$$

と展開され、 θ は

$$\theta = 1 + \xi T(\eta) - \frac{1}{6} \xi^3 T''(\eta) + \frac{1}{24} Pr Re \xi^4 \{ T(\eta) F_{20}'(\eta) - 2T''(\eta) F_{20}(\eta) \} + \dots$$

なる形をとる（前2式のみ式(3.21)の座標表示によっている）。よって平板上の温度境界層との類推を考慮すれば

$$\theta = 1 - 2\eta_T + 2\eta_T^3 - \eta_T^4 \quad (0 \leq \eta_T \leq 1, \eta_T = y/\delta_T) \quad (3.81)$$

と置くことができる。式(3.81)を用いると式(3.80)は

$$\left(\varphi + \frac{\varphi' U_0}{2 U_0'} - \frac{\varphi U_0 U_0''}{2 U_0'^2} \right) \{ P_1(\chi) + \varphi P_2(\chi) \} + \frac{U_0 \varphi}{U_0'} \frac{d}{dx} \{ P_1(\chi) + \varphi P_2(\chi) \} = \frac{2}{Pr} \frac{1}{\chi} \quad (3.82)$$

となる。ただし

$$\chi = \delta_T / \delta$$

$$P_1(\chi) = \chi \int_0^\infty F(\eta) \theta(\eta_T) d\eta_T$$

$$P_2(\chi) = \chi \int_0^\infty G(\eta) \theta(\eta_T) d\eta_T$$

である。また関数 U_0, F, G は速度場を与えるもので、3.3.3 節中のものと同義である。初期条件は $x=0$ における値を $\chi = \chi_0, \varphi = \varphi_0$ とすれば

$$\varphi_0 \{P_1(\chi_0) + \varphi_0 P_2(\chi_0)\} P_r \chi_0 = 2 \quad (3.83)$$

$$\left(\frac{d\chi}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad (3.84)$$

である。半径 a を基準とした局所ヌセルト数は

$$Nu = \frac{2a}{\chi \delta} = \frac{2}{\chi} \sqrt{\frac{U_0 a^2}{\nu \varphi}} \quad (3.85)$$

で与えられる。数値計算例は 3.3.3 節と同じ場合について行なう。この場合 $P_1(\chi), P_2(\chi)$ はそれぞれ

$$P_1(\chi) = \begin{cases} \frac{2}{15}\chi^2 - \frac{3}{140}\chi^4 + \frac{1}{180}\chi^5 & (0 < \chi \leq 1) \\ \frac{3}{10}\chi - \frac{3}{10} + \frac{2}{15}\chi^{-1} - \frac{3}{140}\chi^{-3} + \frac{1}{180}\chi^{-4} & (1 \leq \chi) \end{cases}$$

$$P_2(\chi) = \begin{cases} \frac{1}{90}\chi^2 - \frac{1}{84}\chi^3 + \frac{3}{560}\chi^4 - \frac{1}{1080}\chi^5 & (0 < \chi \leq 1) \end{cases}$$

$$\left[\frac{1}{120} - \frac{1}{180} \chi^{-1} + \frac{1}{840} \chi^{-3} - \frac{1}{3024} \chi^{-4} \right] \quad (1 \leq \chi)$$

となり，式(3.85)は

$$Nu \cdot Re^{-0.5} = 2 \chi^{-1} \{ \varphi^{-1} \cos(x/a) \}^{0.5} \quad (3.86)$$

となる。

3.4.5 高プラントル数の場合（温度場が境界層的様相を呈する場合）

無次元温度 θ は境界層近似により（前方よどみ点を原点，円周に沿って x 軸， x 軸に垂直に y 軸を取る。 x, y 共に円柱半径 a で， u, v 共に U_∞ で無次元化されているものとする），

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{2}{Pr Re} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (3.87)$$

となる。高プラントル数の場合には速度境界層に比して温度境界層が薄いものと考えられるので，円柱表面における無次元温度の絶対値を ζ とすると，

Acrivos⁽¹⁾ と同様，速度 u, v は十分良い近似で

$$u = \zeta y, \quad v = -\frac{y^2}{2} \zeta'(x) \quad (3.88)$$

とみなすことができる。そこで無次元変数 z を

$$z \equiv y \left(\frac{Pr}{9} \right)^{1/3} \sqrt{\zeta(x)} \left(\int_0^x \sqrt{\zeta(x)} dx \right)^{-1/3} \quad (3.89)$$

のように定義し、 $\theta = \theta(z)$ とみなすと式(3.87)は

$$\theta'' + \frac{3}{2} Re z^2 \theta' = 0 \quad (3.90)$$

となる。 $x=0$ で $\zeta=0$, $\zeta' > 0$ であるので、境界条件として

$$\theta(0) = 1, \quad \theta(\infty) = 0 \quad (3.91)$$

を課せば十分である。よって式(3.90)の解として

$$\begin{aligned} \theta &= 1 - \frac{\int_0^z \exp(-Re z^3/2) dz}{\int_0^\infty \exp(-Re z^3/2) dz} \\ &= 1 - \frac{1}{\Gamma(4/3)} \frac{3\sqrt{Re}}{2} \int_0^z \exp\left(-\frac{Re}{2} z^3\right) dz \end{aligned} \quad (3.92)$$

を得る。したがって局所ヌセルト数 Nu は

$$\begin{aligned} Nu &= -\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} \\ &= \frac{1}{\Gamma(4/3)} \left(\frac{Pr Re}{18} \right)^{1/3} \sqrt{\zeta} \left(\int_0^x \sqrt{\zeta} dx \right)^{-1/3} \end{aligned} \quad (3.93)$$

となる。

3.5 解析結果および考察

3.5.1 抵抗係数(抗力係数)

ニュートン流体($\varepsilon=0$)に対する抵抗係数の解析結果をレイノルズ数の広範囲にわたる場合について、図3-2に示す。式(3.48),(3.49)の間にはほとんど差異はみられない。一部の詳細な結果を図3-3に示す。つぎに希薄高分子溶液($\varepsilon \neq 0$)について、 $Re \leq 1$ の場合抵抗係数のニュートン流体(溶媒)のそれに対する比率を図3-4に、 $Re = 20$ の場合の抵抗係数の結果を図3-5に示す。抵抗係数等の数値解析結果を表3.1に示す。これらにより溶液の弾性的挙動によつて抵抗(抗力)が増加することが示され、これはJamesら⁽⁵²⁾の実験結果(図3-6)と同じ傾向にある。(なお実験値に対する ε 値は、法線応力差に対する流動特性が記されていないため他の文献や本報の測定値から本文で使用したレオロジ方程式にて推定して算出すると、本数値計算例よりもかなり大きい。これらに対する数値計算は演算時間の関係で省略した。) また圧力

抗力係数の解析結果等を図 3-7 に示す。

3.5.2 流線, 等温度線

$Re=15, 20, 30$ の場合 ($\varepsilon=0$) における流線および等温度線をそれぞれ図 3-8, 3-9, 3-10 に示す。 $Re=15, 20, 30$ の場合 ($\varepsilon=0$) における相対流線を図 3-11, 3-12, 3-13 に, $Re=15, 30$ ($\varepsilon=0$) の場合における静止双子渦中およびその付近の流線を図 3-14, 3-15 に示す。 ちなみに $\varepsilon=0.005$ 程度の場合, 流線, 等温度線は $\varepsilon=0$ の場合と大差なく, 概略同じである。

3.5.3 円柱表面の温度分布等

円柱表面の温度分布について, $Re \leq 1$ の場合の結果を図 3-16 に, $Re=15, 20, 30$ の場合の結果をそれぞれ図 3-17, 3-18, 3-19 に示す。 溶液の粘弾性的挙動が本数値計算例の程度の場合には, 前方よどみ点側で温度の絶対値が溶媒のみの場合に比して増加するようである。

静止渦の長さ l (図 3-20 参照) のニュートン流体 ($\varepsilon=0$) の場合の結果を図 3-21 に, また $Re=20$ の場

合における半径方向断面における速度分布を図 3-22 に示す。

3.5.4 温度分布

図 3-23, 3-24, 3-25, 3-26 に $\varepsilon=0$ としたニュートン流体の場合 ($Re=0.5, 1, 15, 20$) についての温度分布を示す。また図 3-27, 3-28 に空気流の場合 ($Re=23, Re=1260$) に Eckert ら⁽²¹⁾ により撮影された温度分布曲線を示す。図 3-25, 3-26 のはく離を伴なう流れでは、解析と測定結果は (プラントル数は異なるが) 同様な傾向を示していると考えてよいであろう。はく離の流線より外側では対流による熱移動が激しく、円柱前方よどみ点側では伝導による熱移動量が大いことが示されている。(ここで対流による熱移動量を V を速度ベクトルとして $\rho c(\theta - \theta_\infty)|V|$ で、同じく伝導による熱移動量を $\kappa|\text{grad}\theta|$ で代表すれば、両者が等しくなるような円柱表面からの距離 Y は $Y \sim 2Nu / (Pr \cdot Re \cdot |\zeta_w|)$ で示される。この Y 値はよどみ点からの距離が等しい円柱表面上の点では前方よどみ点側が、後方よどみ点

側の点におけるものより小さく，そのため両者の占める割合で考えるならば，円柱前方側では相対的に対流熱移動が激しく，後方側では相対的に伝導熱移動が激しいものと考えられる。（ただしこれらははく離を伴う流れの場合である。）

3.5.5 局所ヌセルト数

図 3-29 に $Re = 20, \varepsilon = 0$ の場合における局所ヌセルト数を示す。3.4.3 節による直接の数値計算によるものおよび境界層近似による式 (3.93) に表面温度分布を適用して求めたヌセルト数の両者はかなり良い一致を示す。さらに Eckert ら⁽²¹⁾ による空気流中の測定値 ($Re = 23$) を，ヌセルト数が $(Pr \cdot Re)^{1/3}$ に比例するものとして等価的に換算して求めた値も前二者とかなり良く一致する。図 3-30 に $Re = 15, \varepsilon = 0$ の場合における局所ヌセルト数を，図 3-31 に $Re = 30, \varepsilon = 0$ の場合における局所ヌセルト数を示す。

次に溶液の粘弾性的挙動の熱伝達に及ぼす影響をみるために，局所ヌセルト数を $Pr = 7$ として， $Re \leq 1$ ，

$Re=15, Re=20, Re \gg 1$ の場合についてそれぞれ図 3-32, 3-33, 3-34, 3-35 に示す。図 3-32 などからわかるように溶液の粘弾性的挙動により、熱伝達が若干減少することが示された。これは James ら⁽⁵²⁾の実験結果(図 3-36, 3-37)と同じ傾向を示していると考えてよいであろう。しかし $Re=20$ 等の場合はパラメータ ε が小さい場合しか求めていないので、熱伝達については必ずしも明確ではない。が ε が増加した場合には熱伝達はある程度変化することが予測される。(James らの実験に対する ε 値は本報の値よりかなり大きい。)逆に $Re \gg 1$ の状況は $a \gg \sqrt{\lambda/\rho}$ の場合に出現し、熱伝達はニュートン流体の場合とあまり変わらない結果となっている。これは Metzner ら⁽⁶⁷⁾の熱伝達などに関する予測と一致している。

つぎに溶液の物性値の変化の熱伝達に及ぼす影響をみるため、 $\varepsilon=0$ としてプラントル数の変化に対する様相を、 $Re=1, Re=20, Re \gg 1$ の場合にそれぞれ図 3-38, 3-39, 3-40 に示す。これは溶液の弾性的挙動の影響と

同程度であると考えられる。なお希薄高分子溶液についてのプラントル数の測定結果は見当たらないが、非常に希薄な場合は水の場合と、すなわち溶媒のみの場合とあまり変わらないと推定されている。

3.5.6 平均ヌセルト数およびその他

前節(3.5.5)の理由により解析における物性値算出は、速度場、温度場の広がりを見ながら、 $Re \lesssim 1$ の場合には $\theta_0 = 0.5(\theta_\infty + \theta_w)$ の温度に対するものを用い、 $10 \lesssim Re$ の場合速度場に対しては $\nu = \nu_\infty$ を、温度場に対しては $Pr = \nu_\infty / a_{\theta_0}$ (a_{θ_0} : 温度伝導度) とすべきであろう。さらに $Re \gg 1$ の場合には θ_0 の温度に対する値を用いるべきであろう。この観点のもとに水等に対する実験値ならびに本報の結果 ($\varepsilon = 0$) を図3-41に示す。(なお James ら⁽⁵²⁾の結果はすべて θ_0 の温度に対する結果である。) さらに平均ヌセルト数の数値計算結果を溶液の場合 ($\varepsilon \neq 0$) を含めて表3.2に示す。

なお $Re \gg 1$ の場合の境界層厚さおよび前方よどみ点における特性をそれぞれ図3-42, 3-43に示す。

表3.1 抵抗係數等解析結果

Re	ϵ	C_D	$\theta_{sep.}(deg)$	l/a
15	0.0	2.495	33.0	1.11
	0.005	2.521	33.0	1.10
	0.01	2.547	33.0	1.10
	0.025	2.633	32.9	1.10
	0.05	2.708	36.3	1.27
		2.775	32.8	1.09
20	0.0	2.001	40.7	2.88
	0.0025	2.050	38.6	2.51
	0.005	2.156	36.6	1.49
30	0.0	1.614	42.3	3.09
	0.005	1.681	42.3	3.02
		1.683	42.5	3.01

表 3.2 平均ヌセルト数

Re	ε	Pr	\bar{Nu}
0.5	0.0	7.01	0.794
		5.0	0.772
		3.0	0.731
	0.1	7.01	0.789
1	0.0	7.01	0.830
		5.0	0.797
		3.0	0.780
	0.1	7.01	0.794
15	0.0	7.0	2.48
	0.05	7.0	2.45
20	0.0	8.0	2.88
		7.01	2.75
			2.78
	6.0	2.66	
	0.005	7.01	2.74

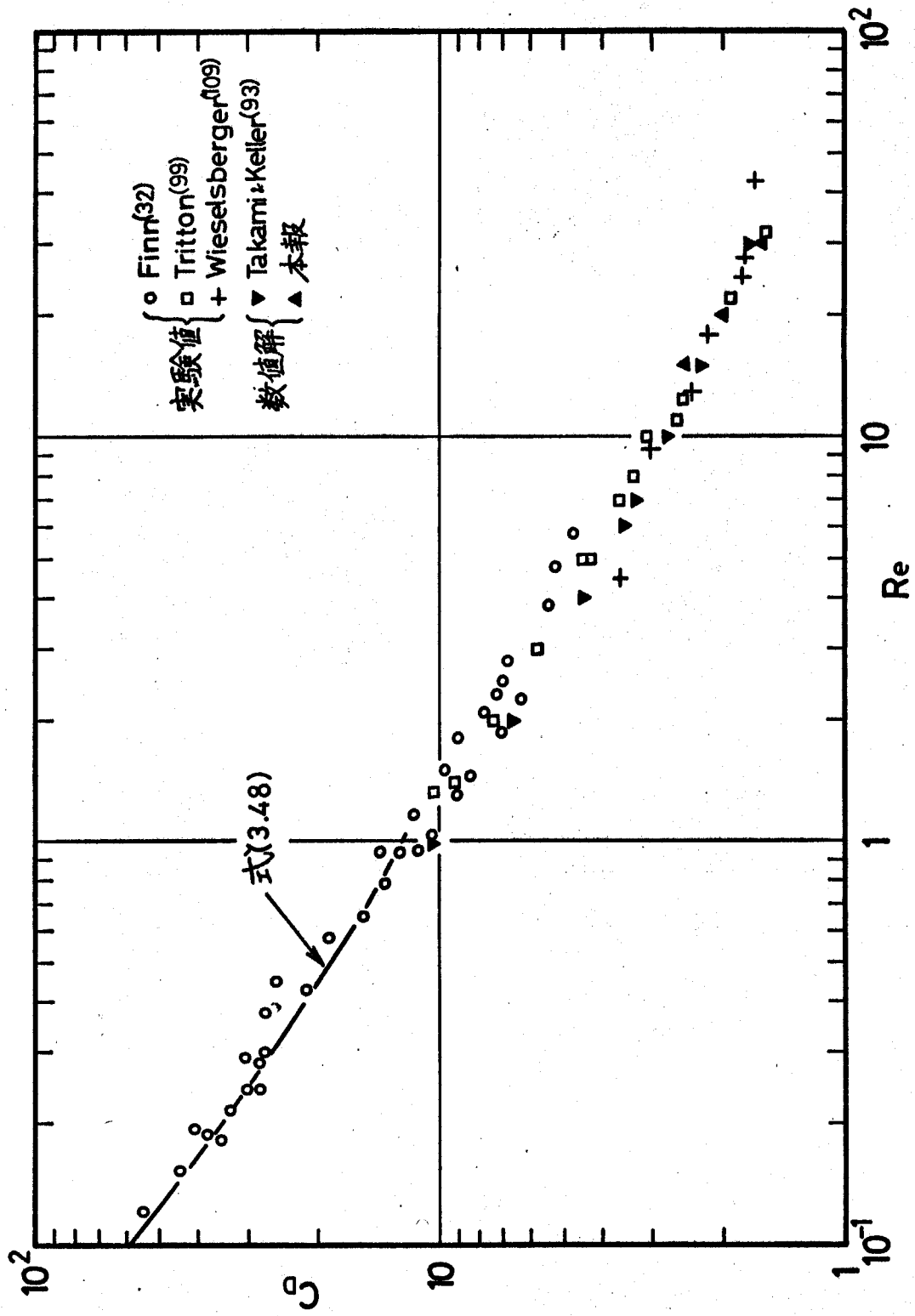


图 3-2 抵抗系数($\epsilon=0$)

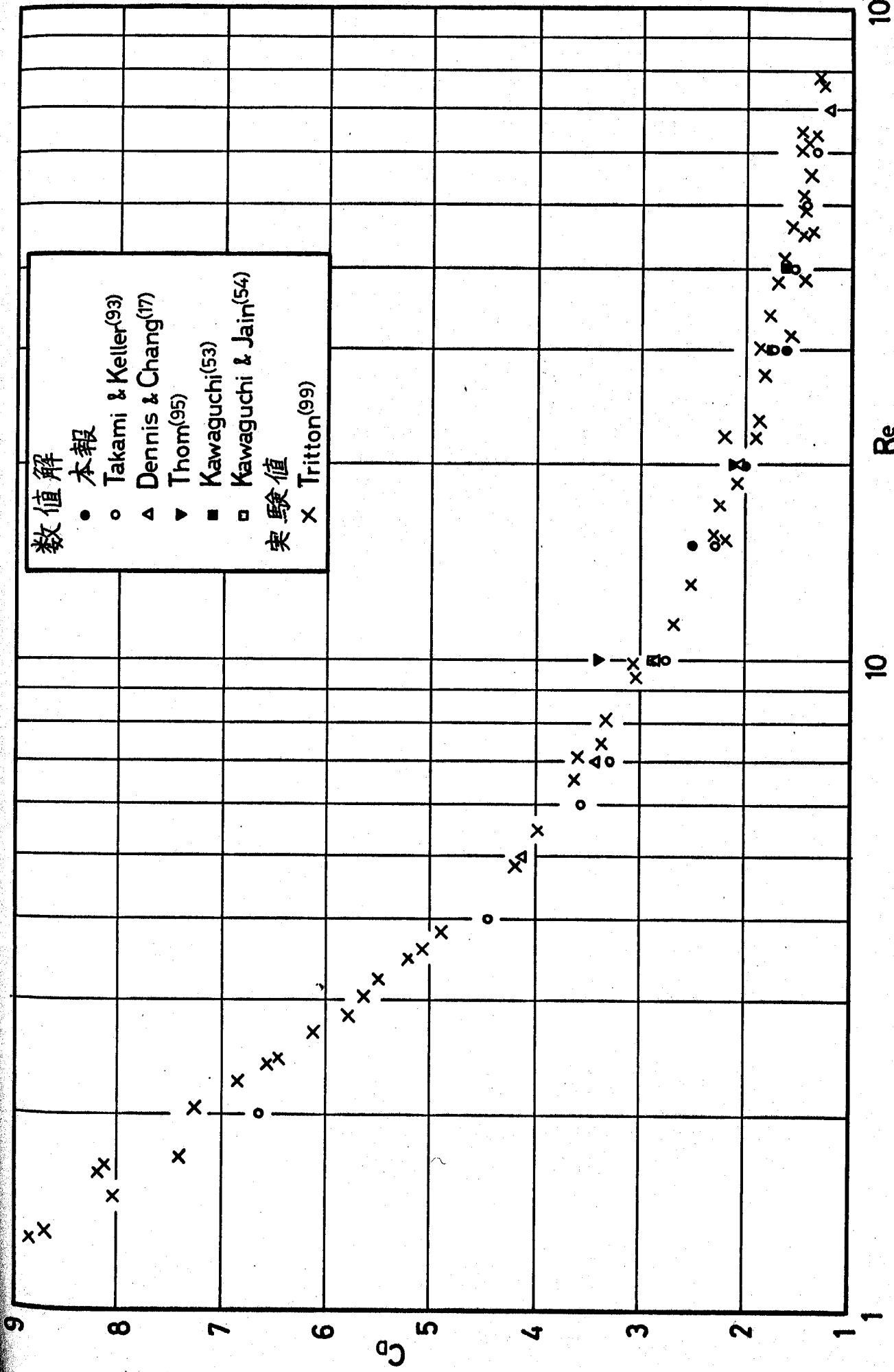


图 3-3 抵抗係数($\varepsilon=0$)

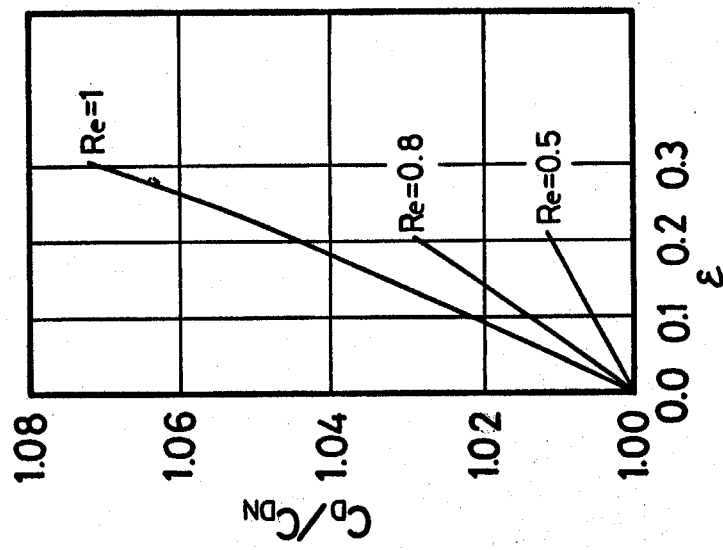


图3-4 抵抗系数($Re \leq 1$)

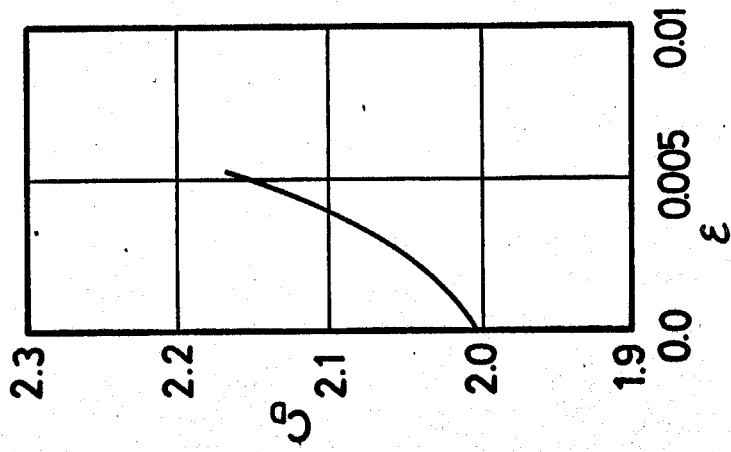


图3-5 抵抗系数($Re=20$)

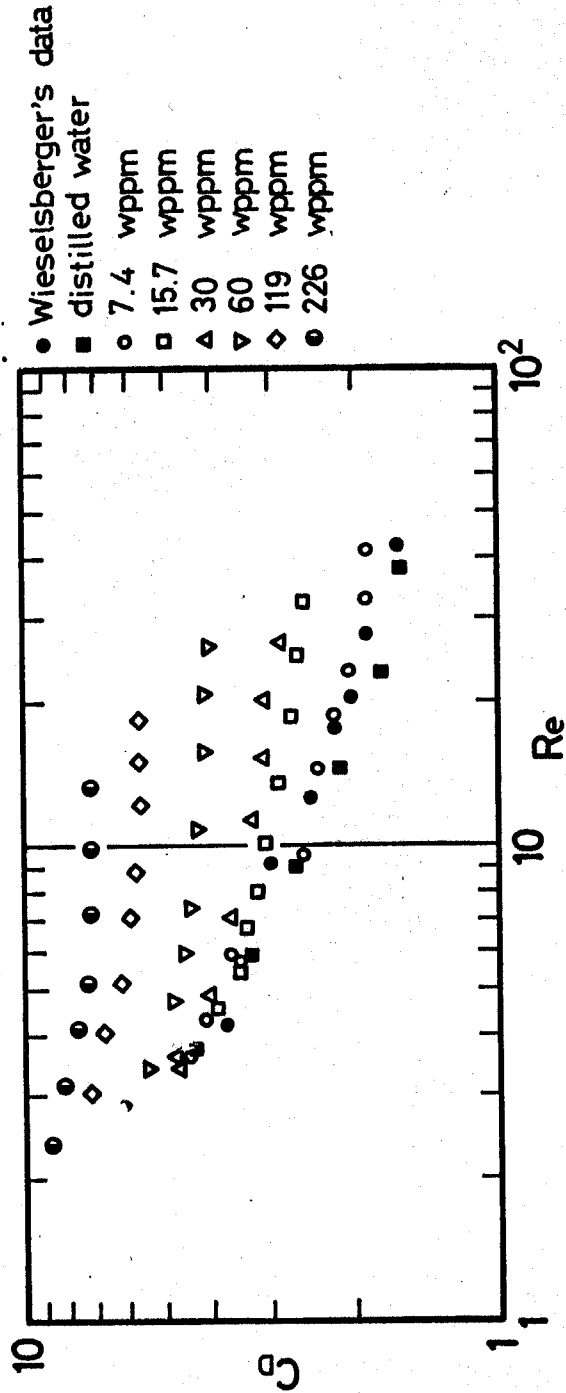


图 3-6 抵抗系数 (0.005 in. wire in water and in solutions of WSR-301. By James et al.⁽⁵²⁾)

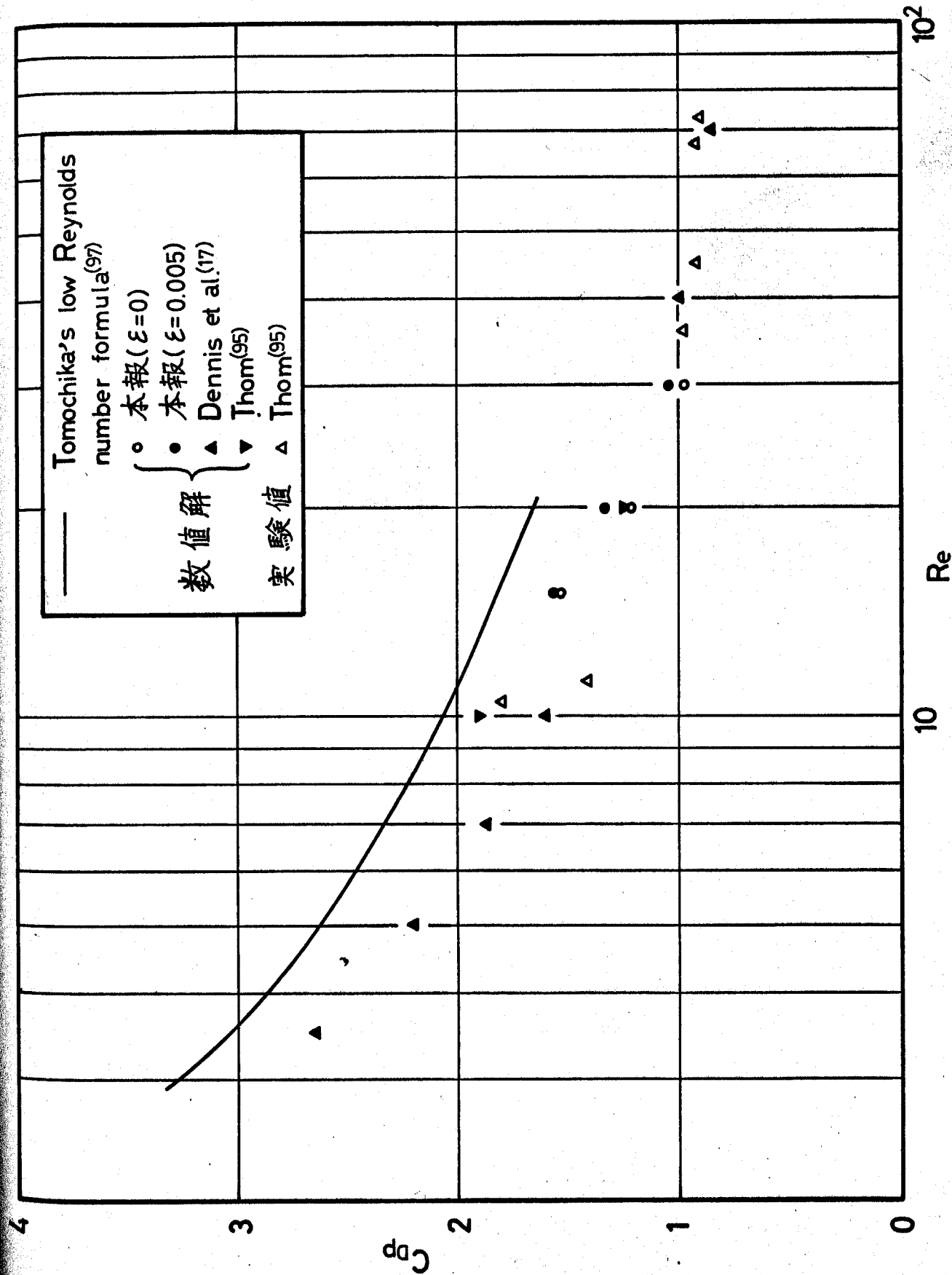


图3-7 压力抗力系数

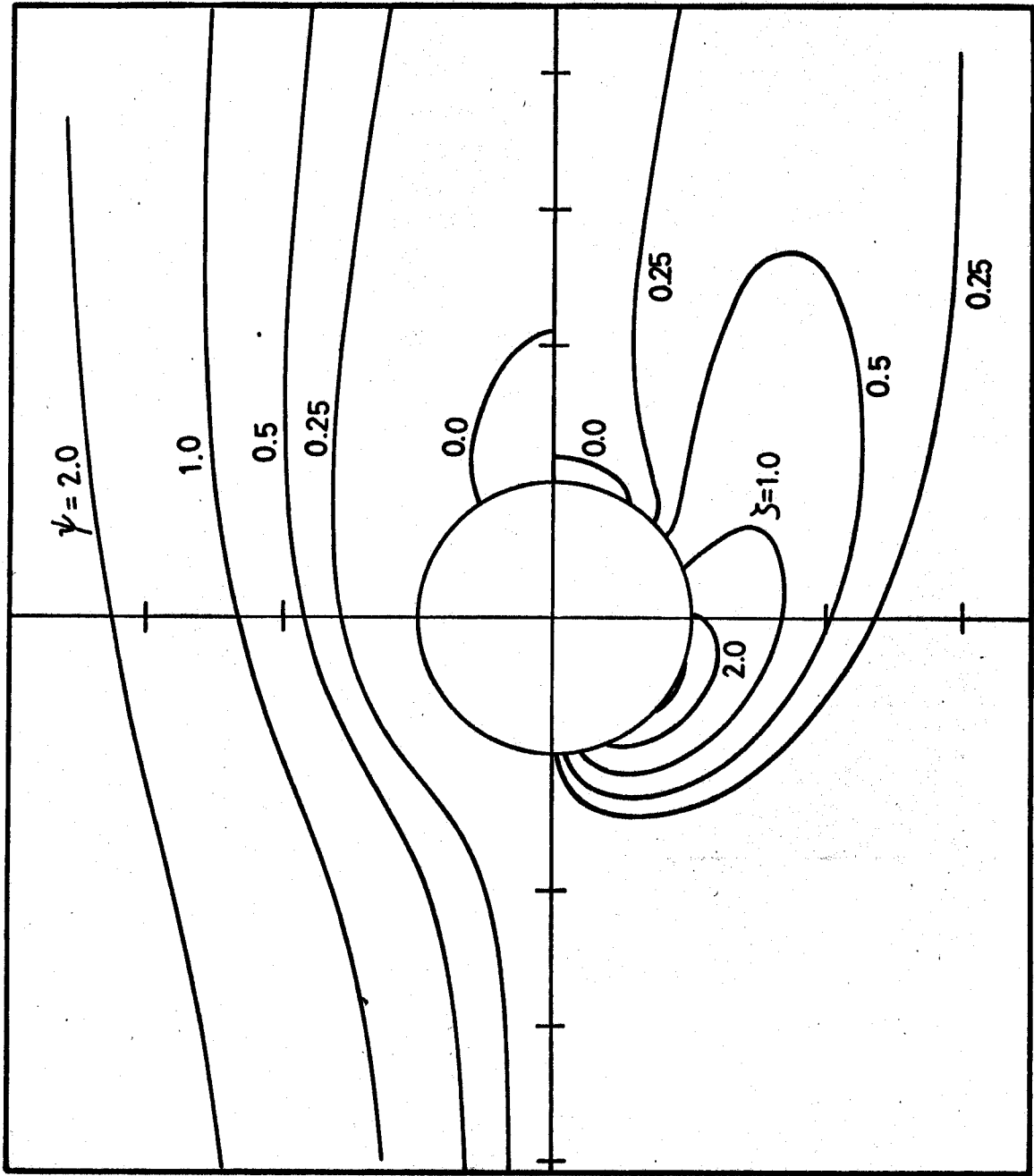


図3-8 流線および等ポテンシャル線($Re=15, \epsilon=0$)

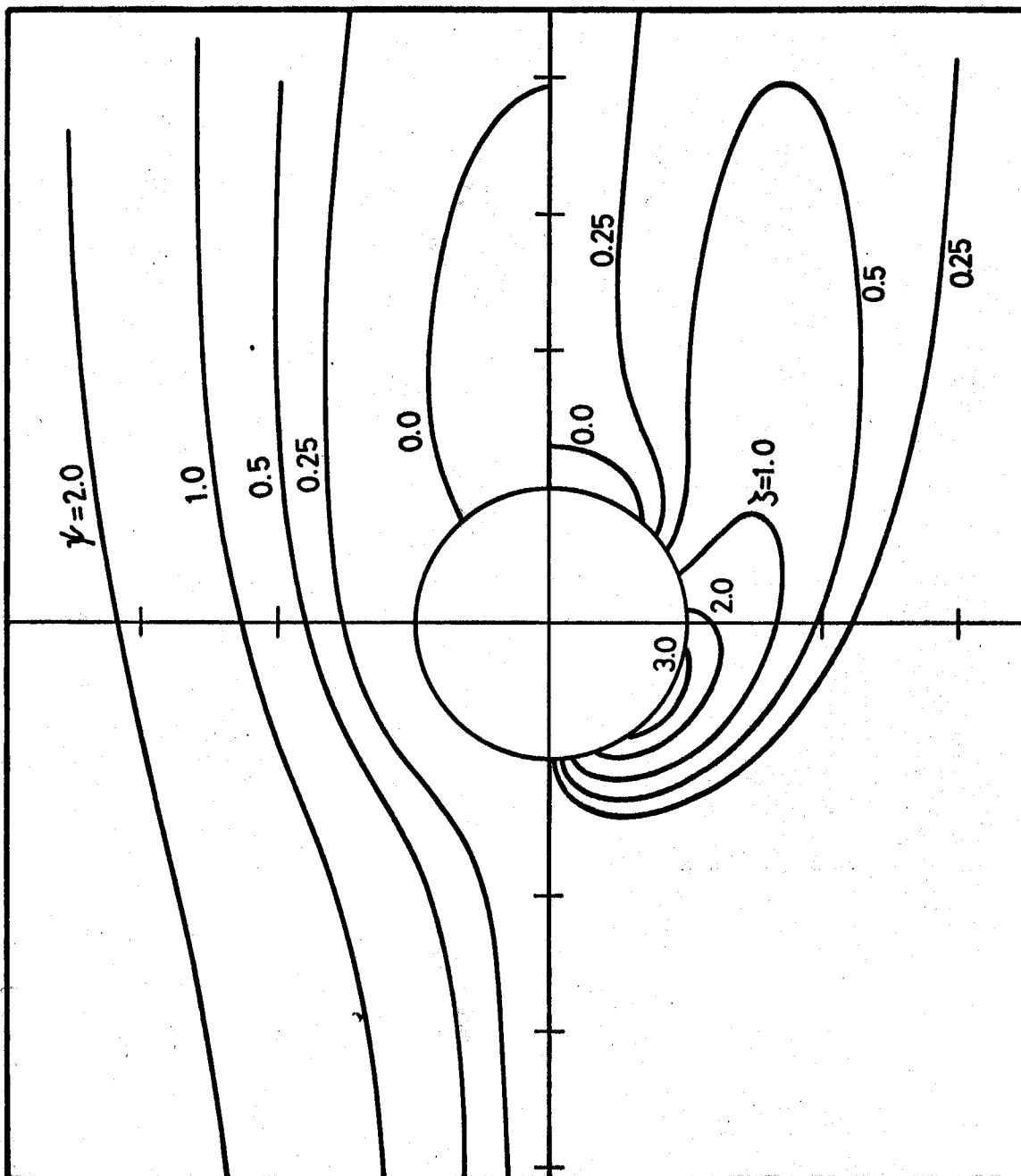


図3-9 流線および等温度線($Re=20, \epsilon=0$)

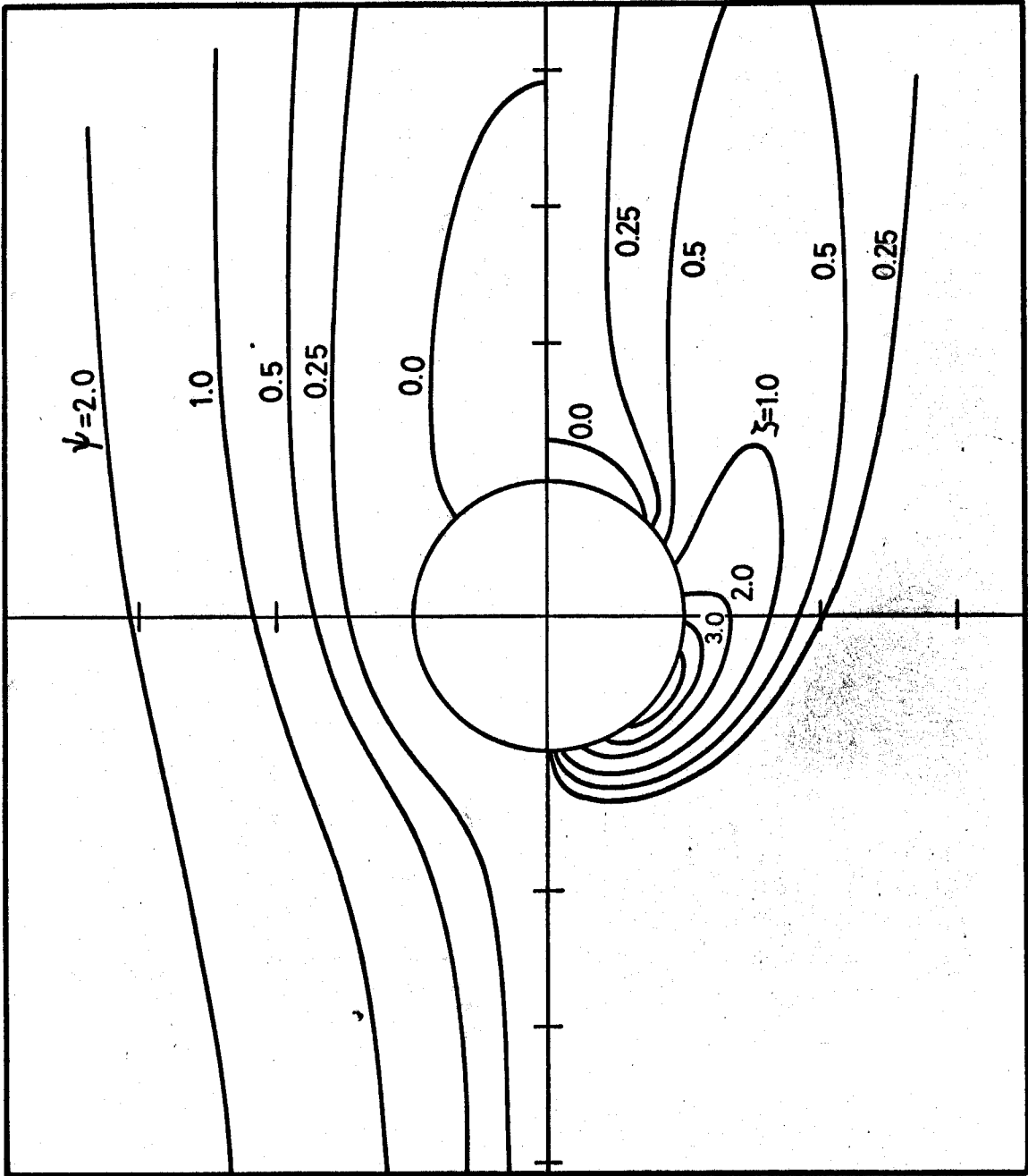


図3-10 流線および等渦度線($Re=30, \epsilon=0$)

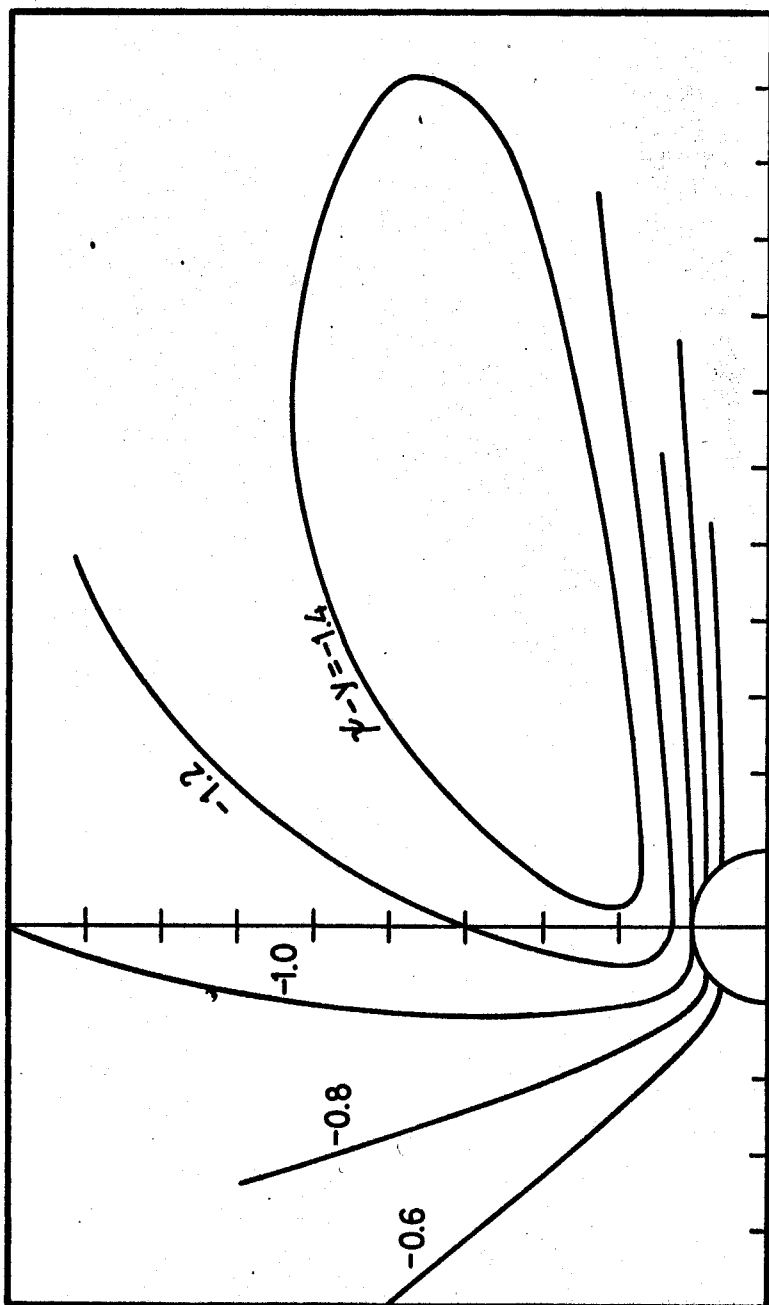


图3-11 相对流线($Re=15, \epsilon=0$)

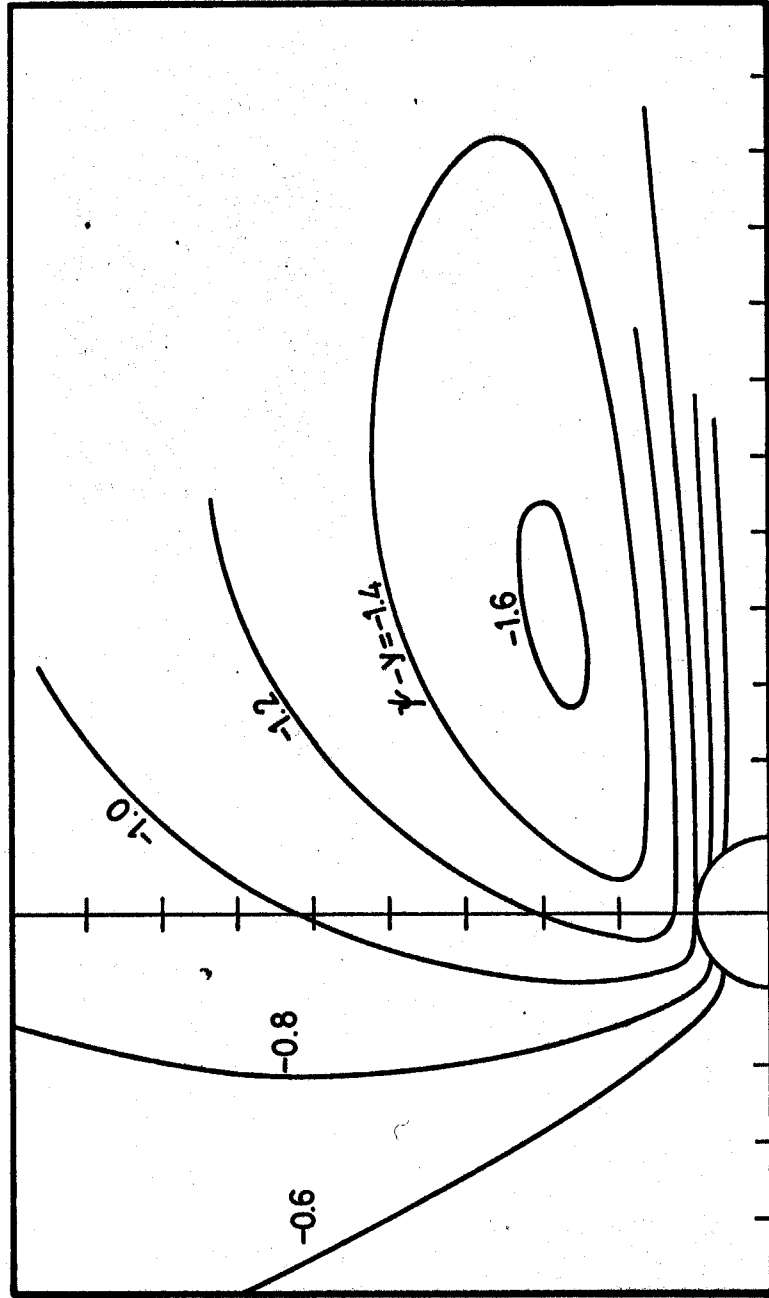


图3-12 相对流線($Re=20, \epsilon=0$)

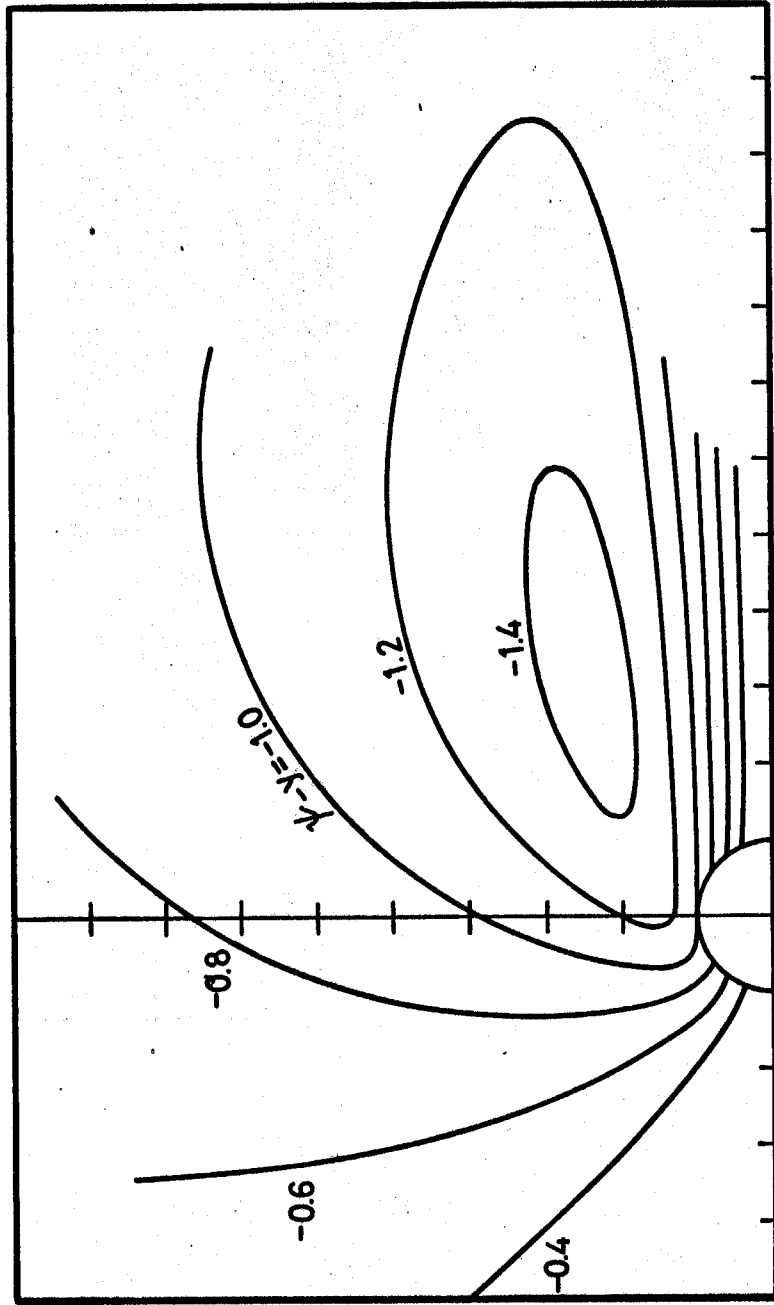


图3-13 相对流线($Re=30, \epsilon=0$)



图 3-14 定常涡 ($Re=15, \varepsilon=0$) ($\psi=0.001, 0.0, -0.001, -0.002$)

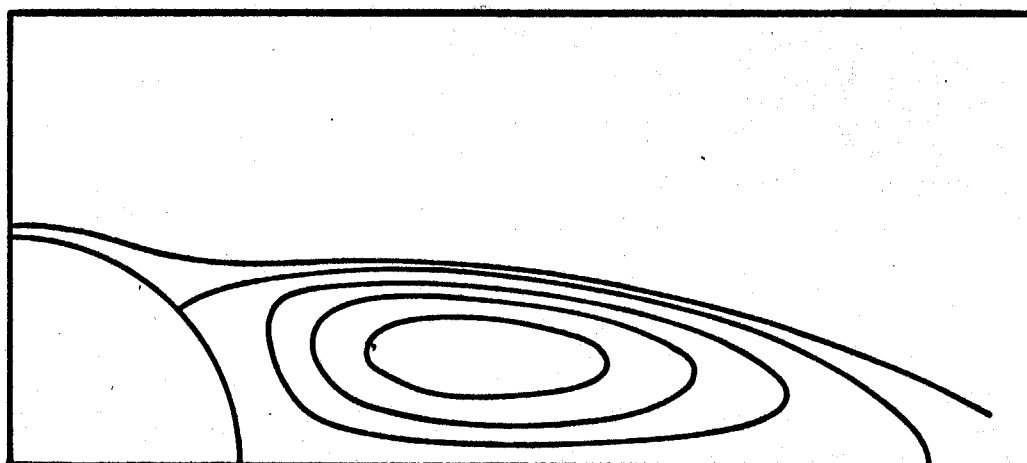
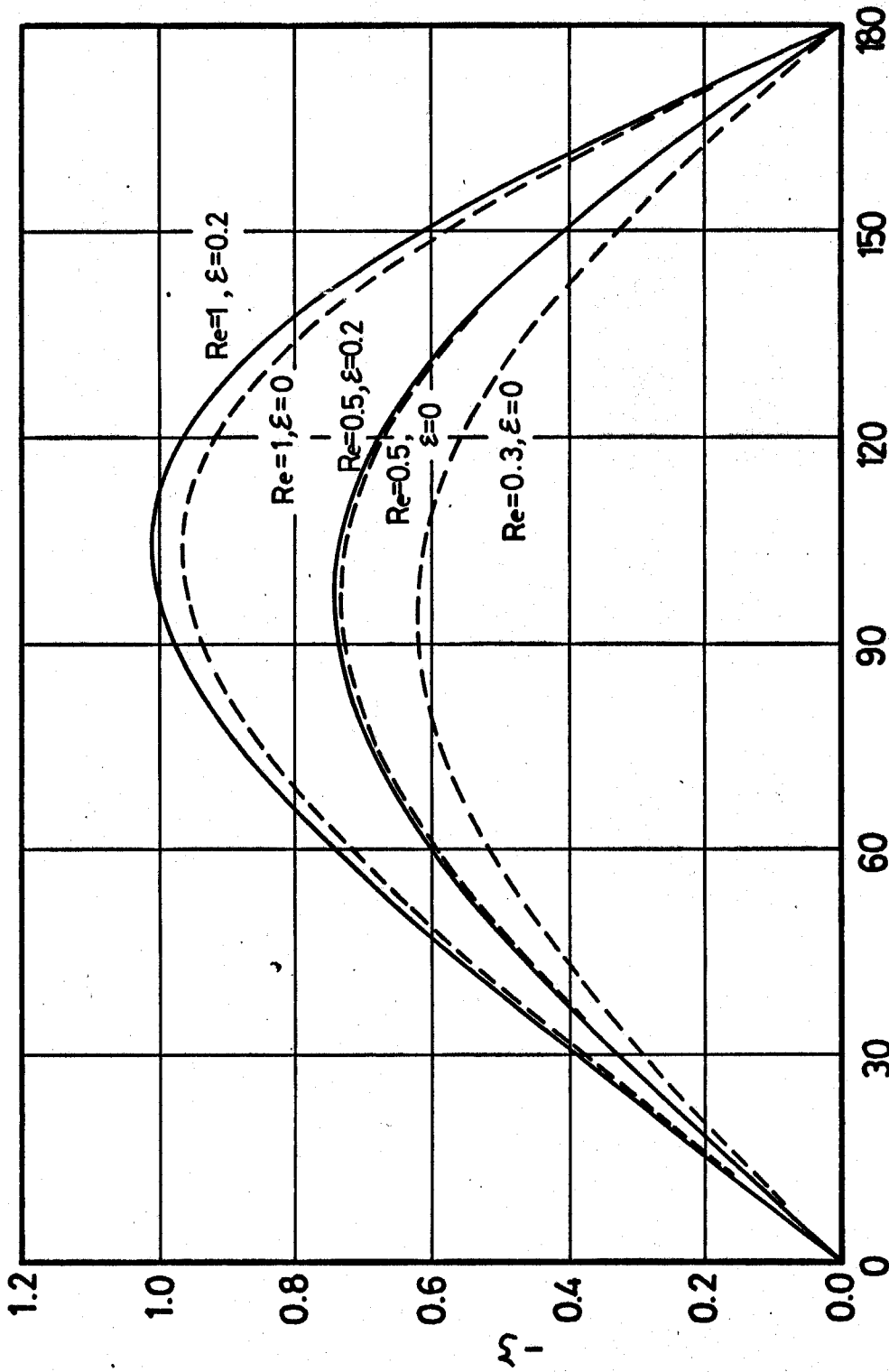


图 3-15 定常涡 ($Re=30, \varepsilon=0$) ($\psi=0.005, 0.0, -0.005, -0.010, -0.015$)



前方よどみ点からの角度(deg)

図3-16 円柱表面における温度分布($Re \leq 1$)

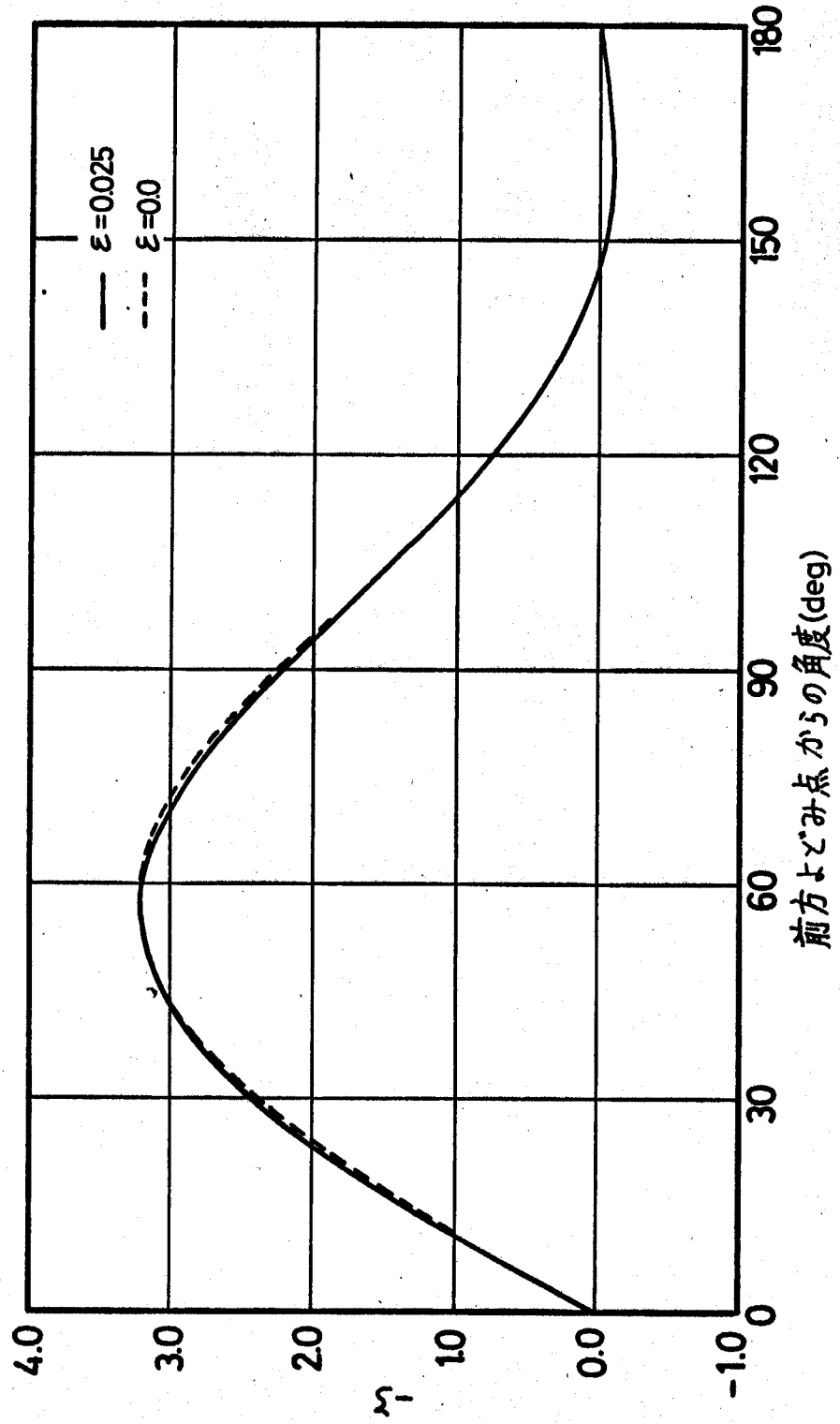


図3-17 円柱表面における温度分布($Re=15$)

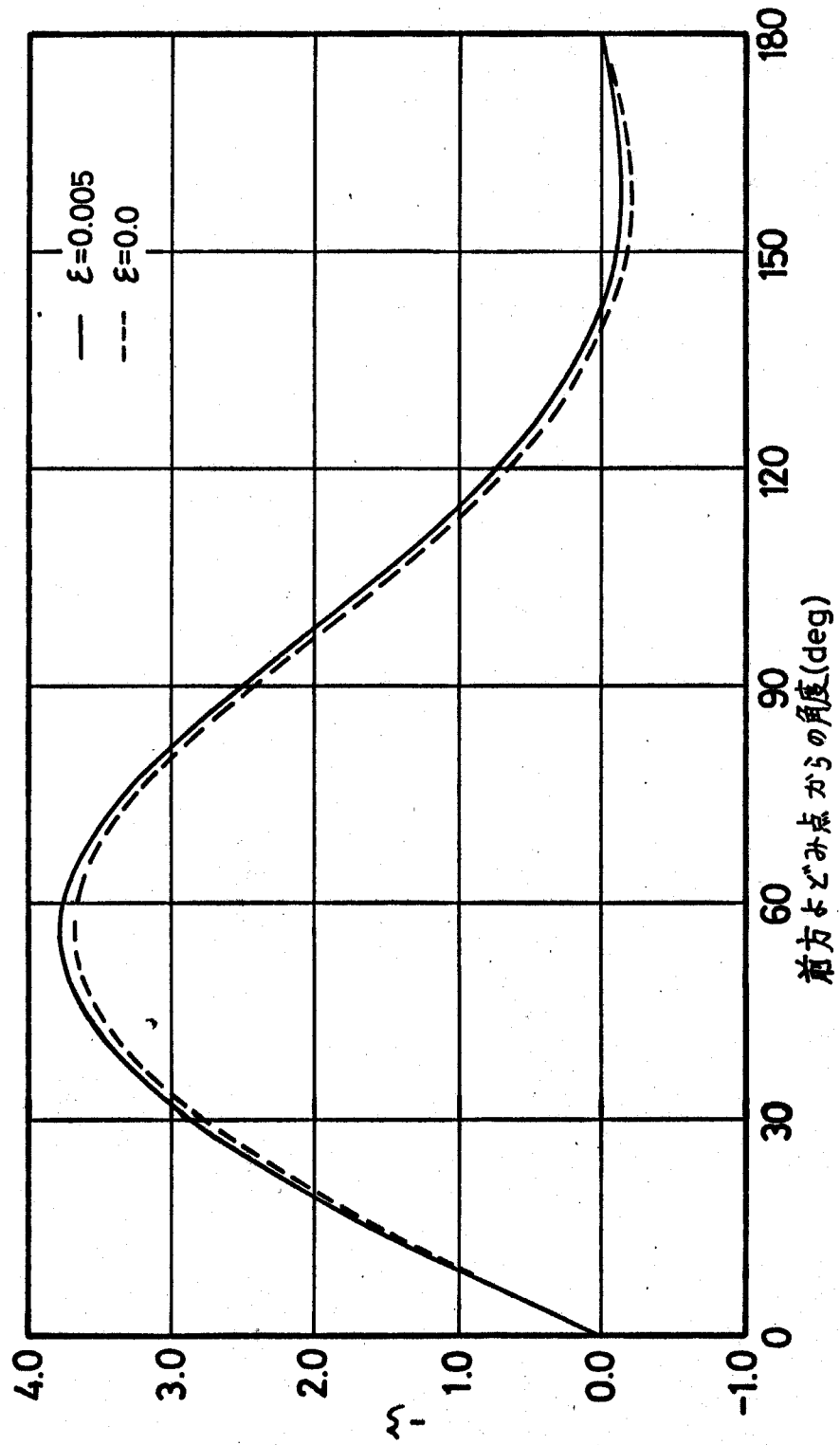
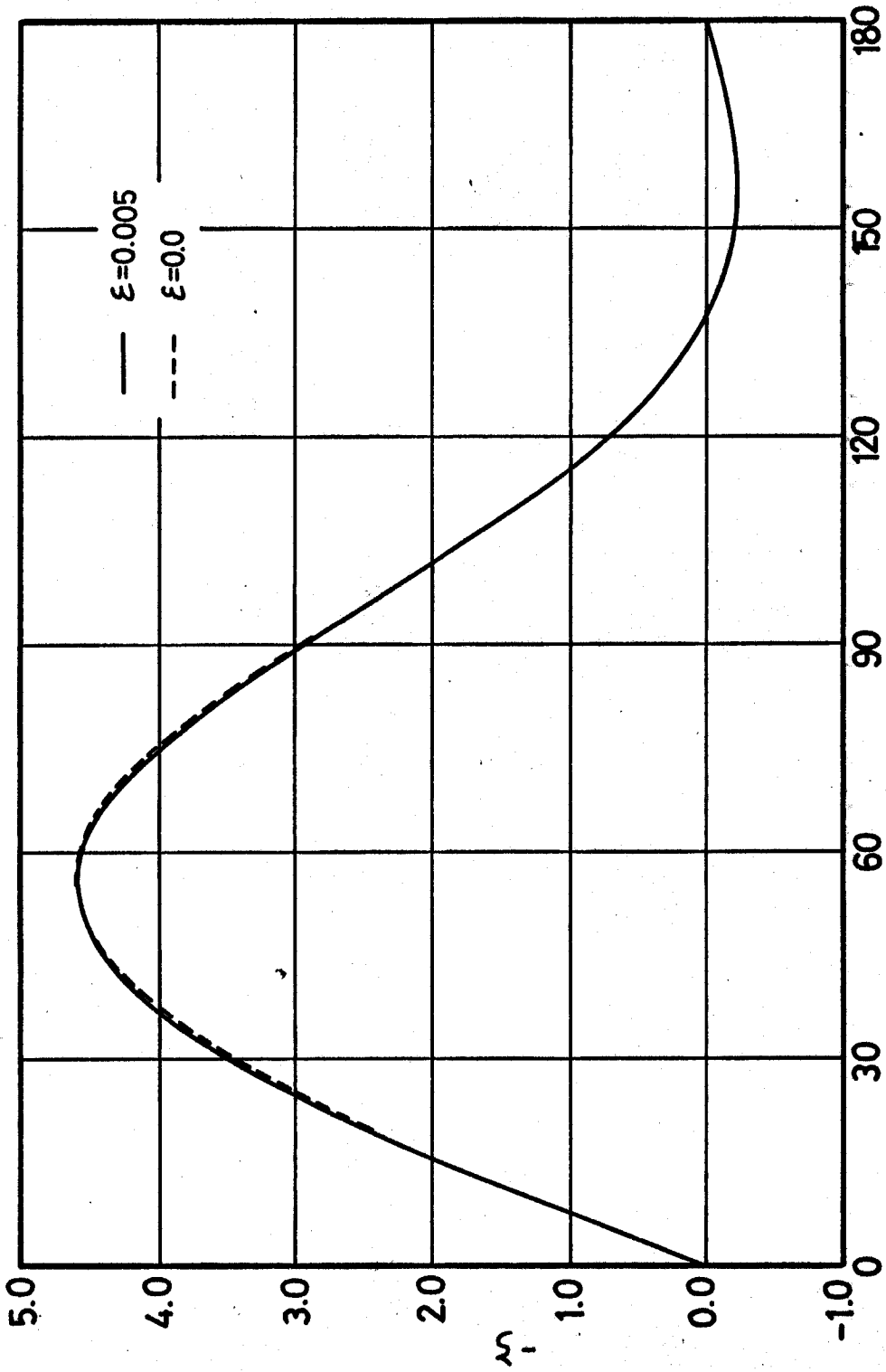


図3-18 円柱表面における温度分布($Re=20$)



前方よどみ点からの角度(deg)

図3-19 円柱表面における温度分布($Re=30$)

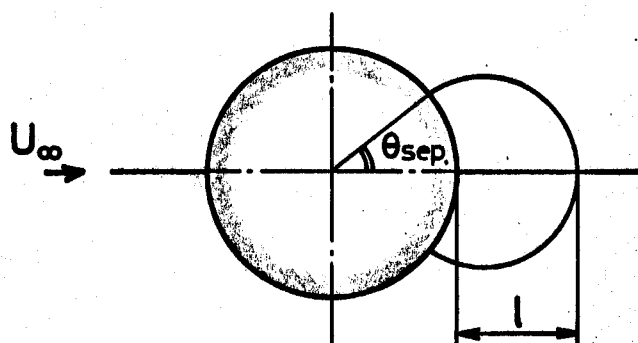


图3-20 静止渦

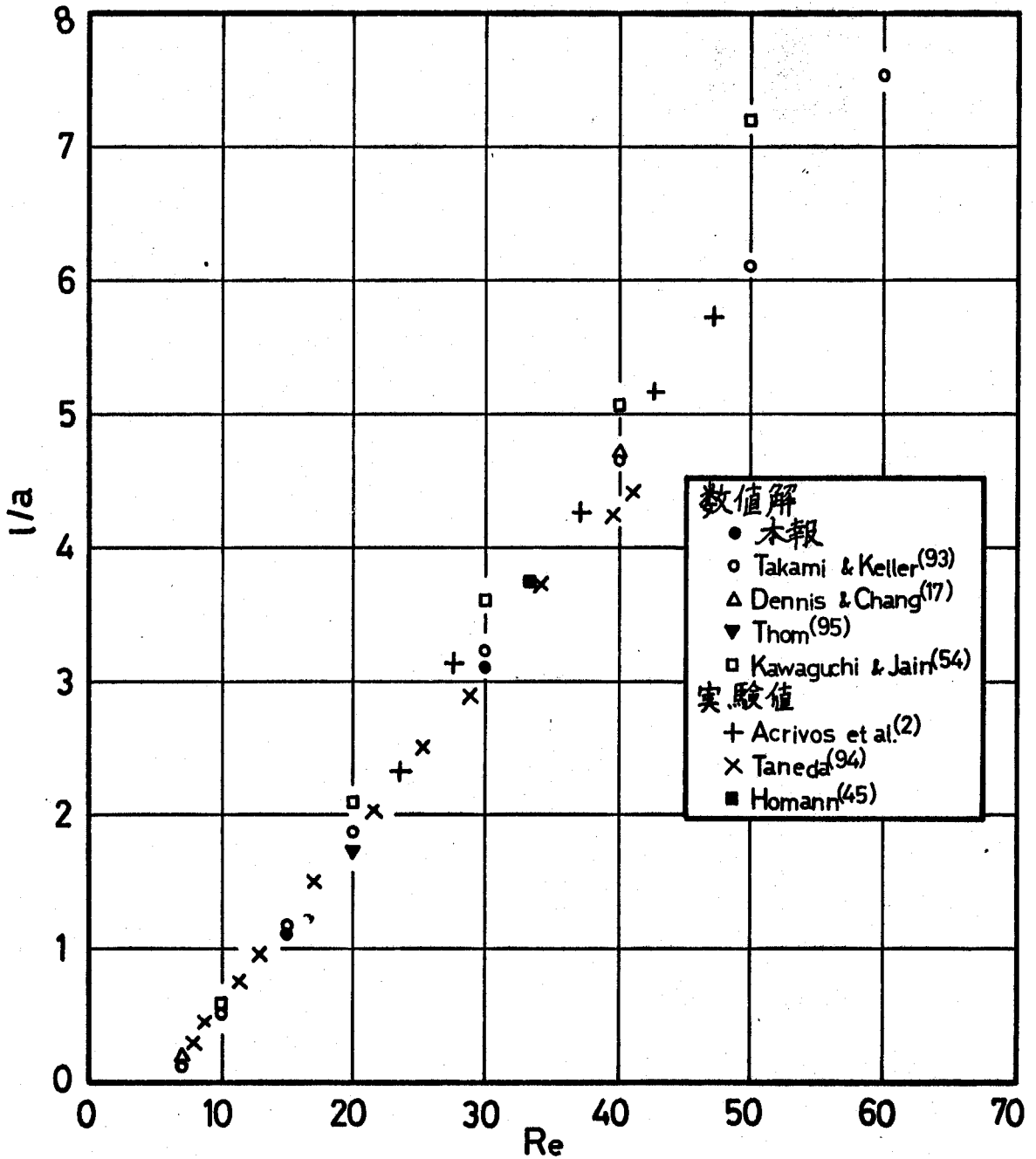


図3-21 静止渦の長さ(ニュートン流体中)

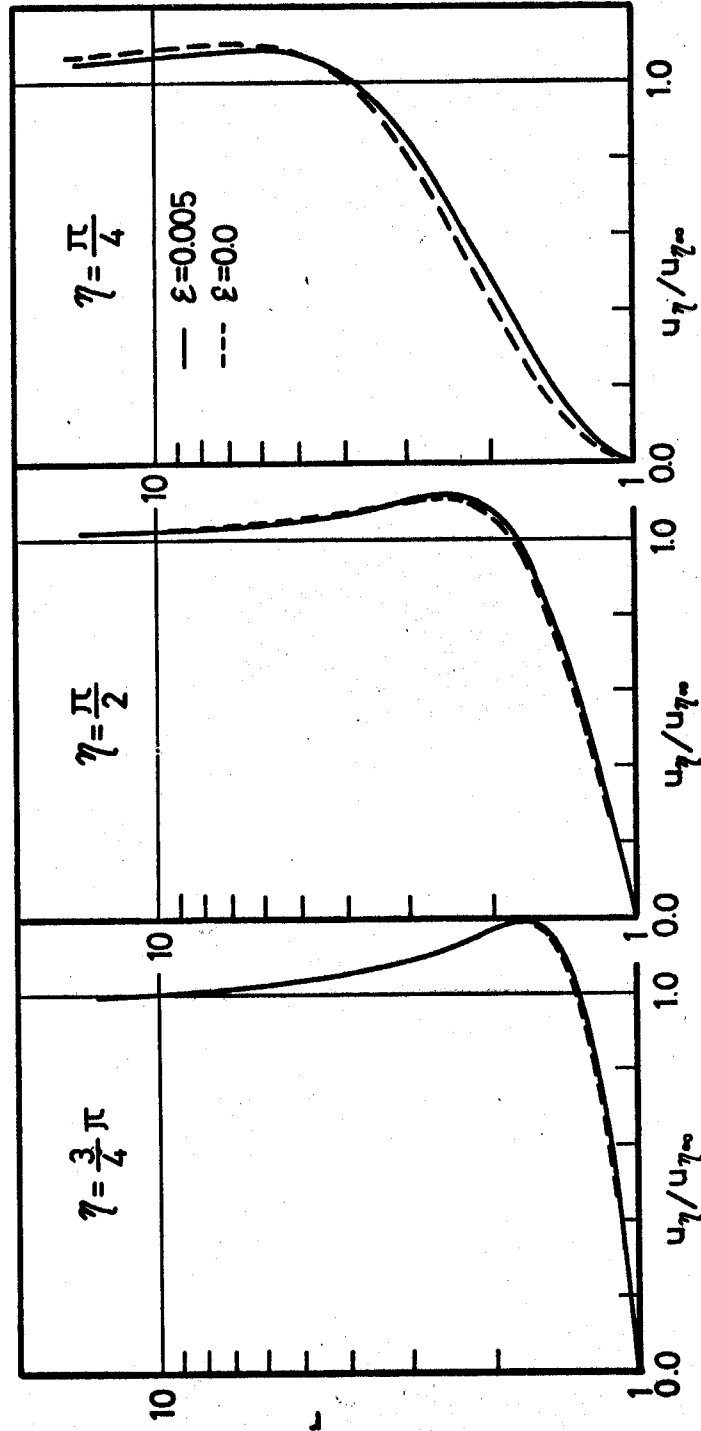


图3-22 速度分布 (Re=20)

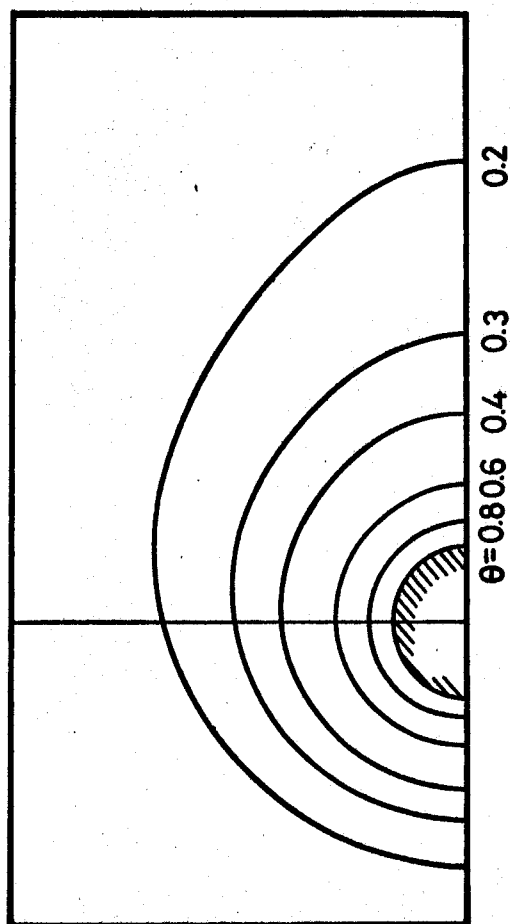


图 3-23 等温线($Re=0.5, \varepsilon=0, Pr=7.01$)

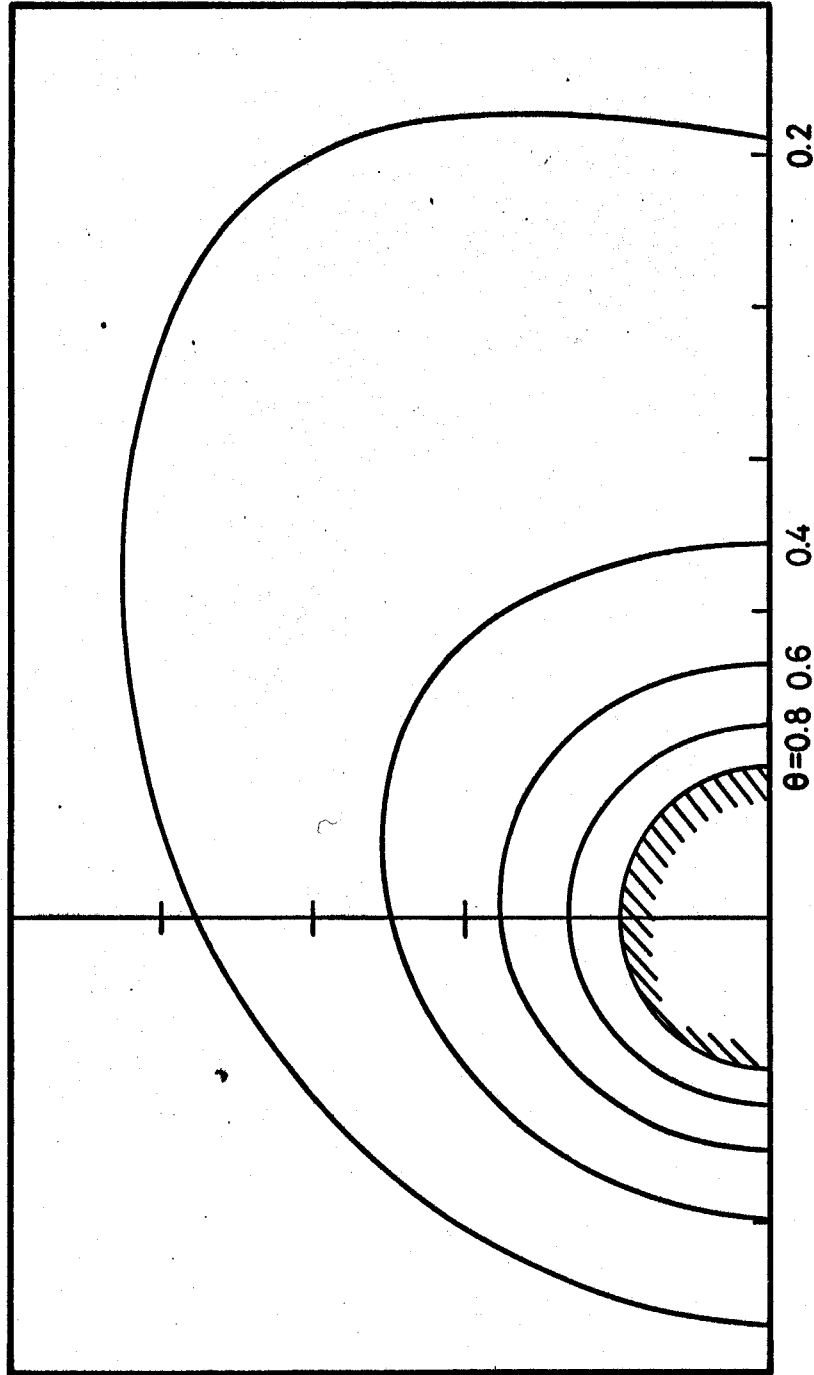


图 3-24 等温线 ($Re=1, \epsilon=0, Pr=7.01$)

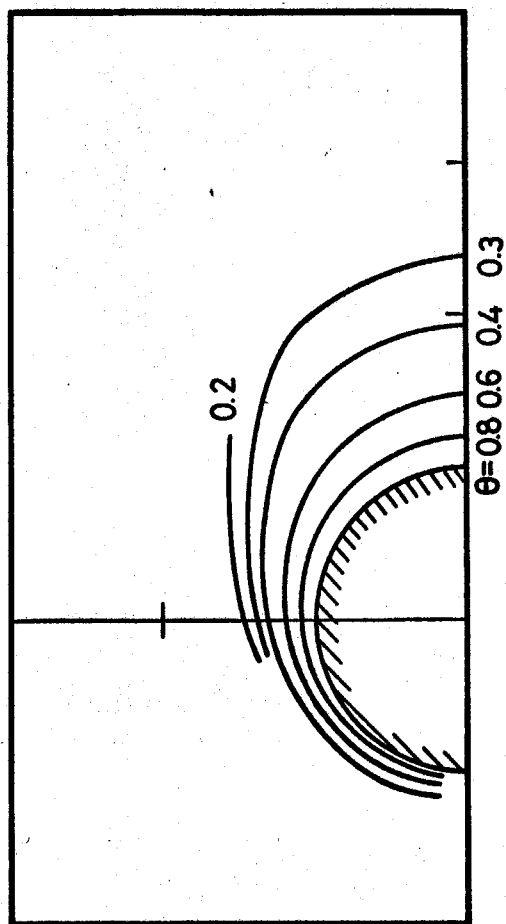


圖 3-25 等溫線 ($Re=15, \varepsilon=0, Pr=7$)

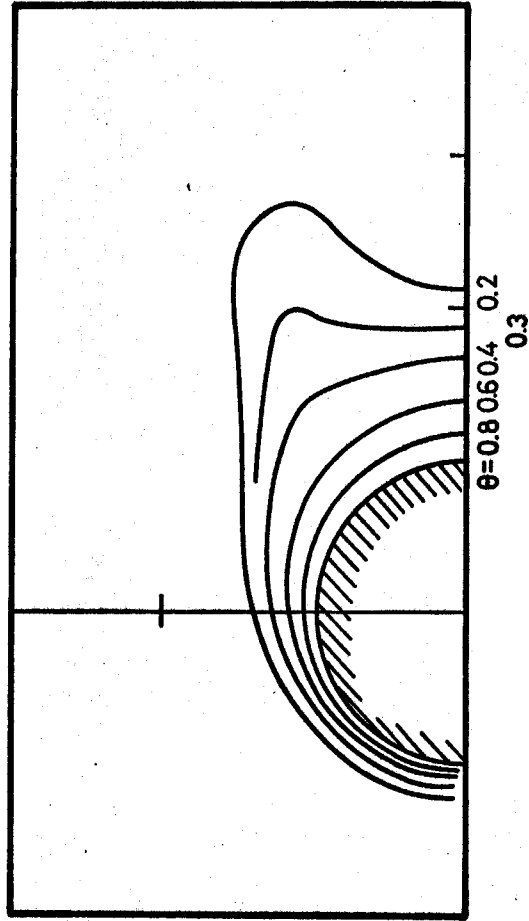


图3-26 等温线 ($Re=20, \epsilon=0, Pr=7.01$)

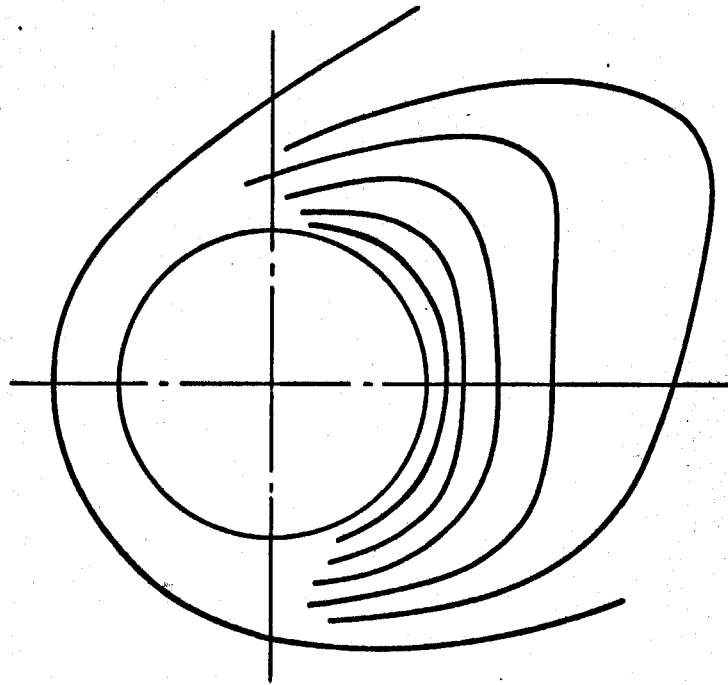


圖3-27 等溫線 (in Air, $Re=23$)
(From the interference photograph
by Eckert and Soehngen⁽²¹⁾)

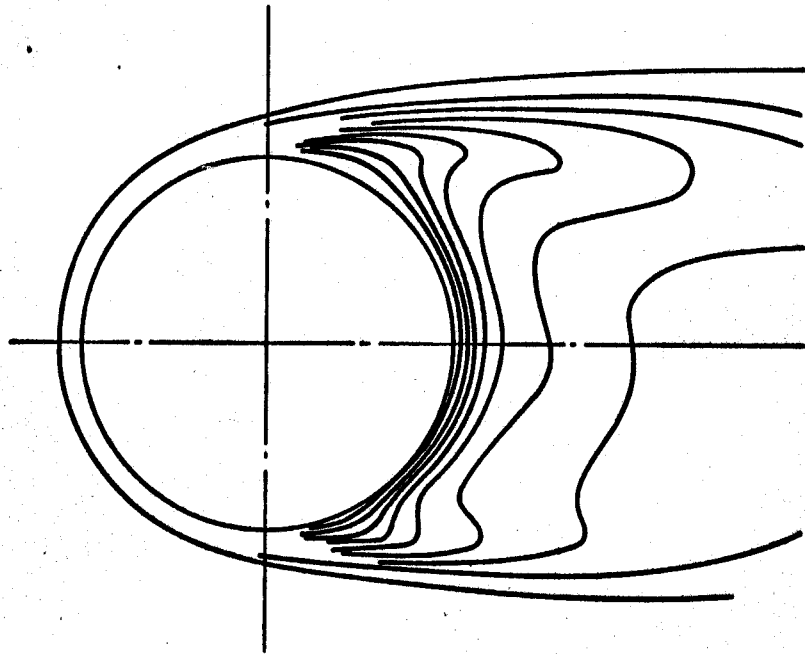


图3-28 等温线

(Forced convection in separated flow.

Isotherms by an interference photograph.

$Re=1260$ in air by E.Eckert & E.Soehngen⁽²¹⁾)

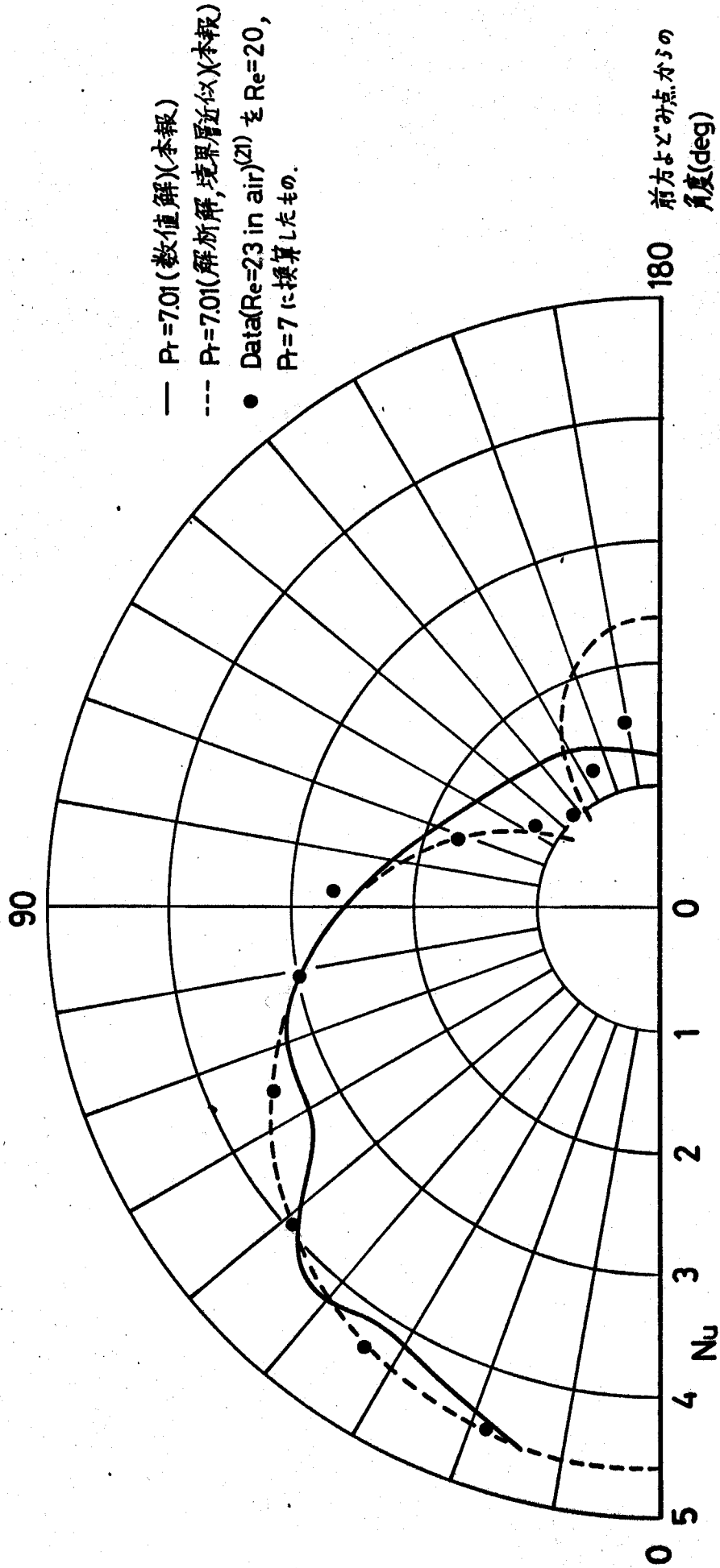


図3-29 層流局所ヌセルト数($Re=20, \epsilon=0$)

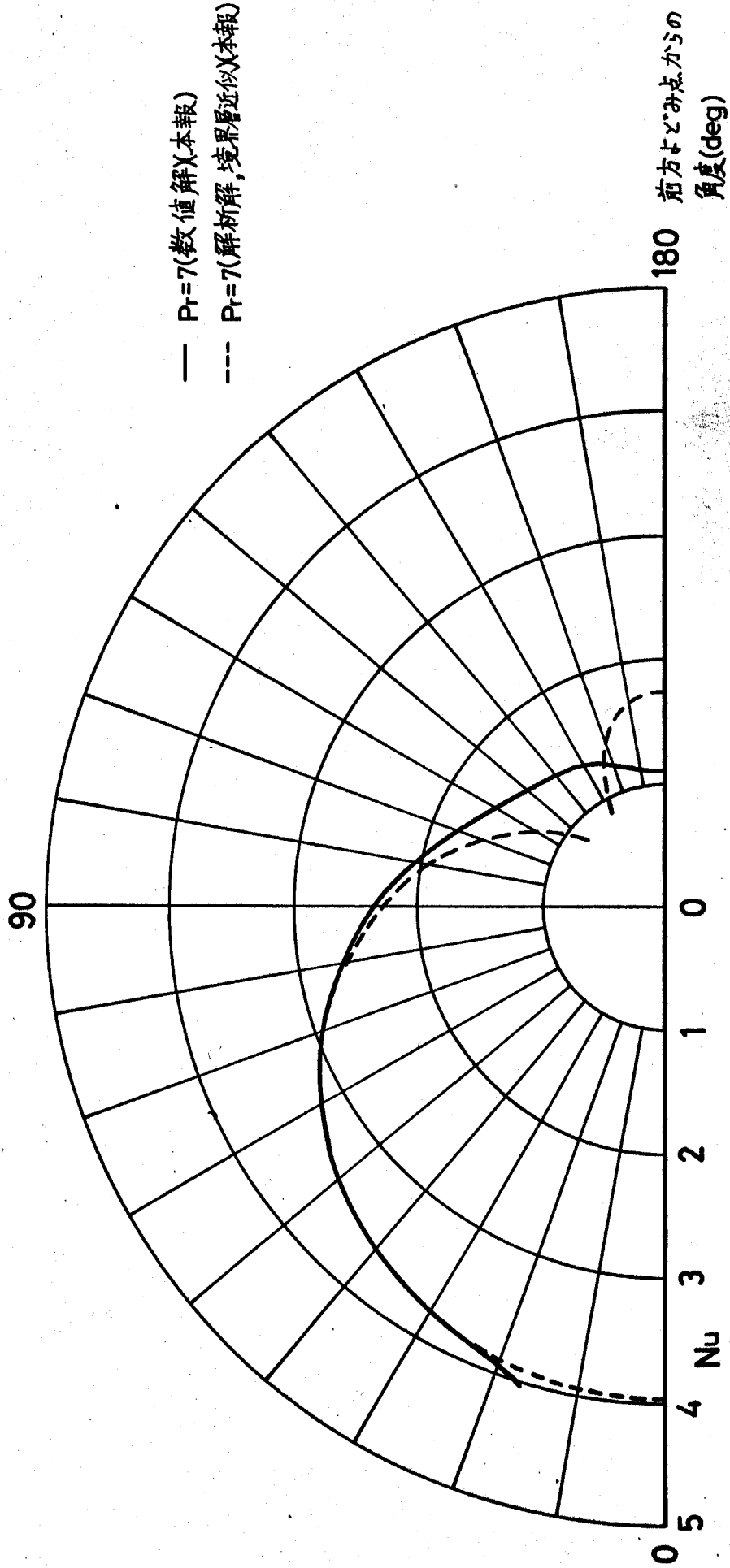


図3-30 層流局所ヌセルト数($Re=15, \epsilon=0$)

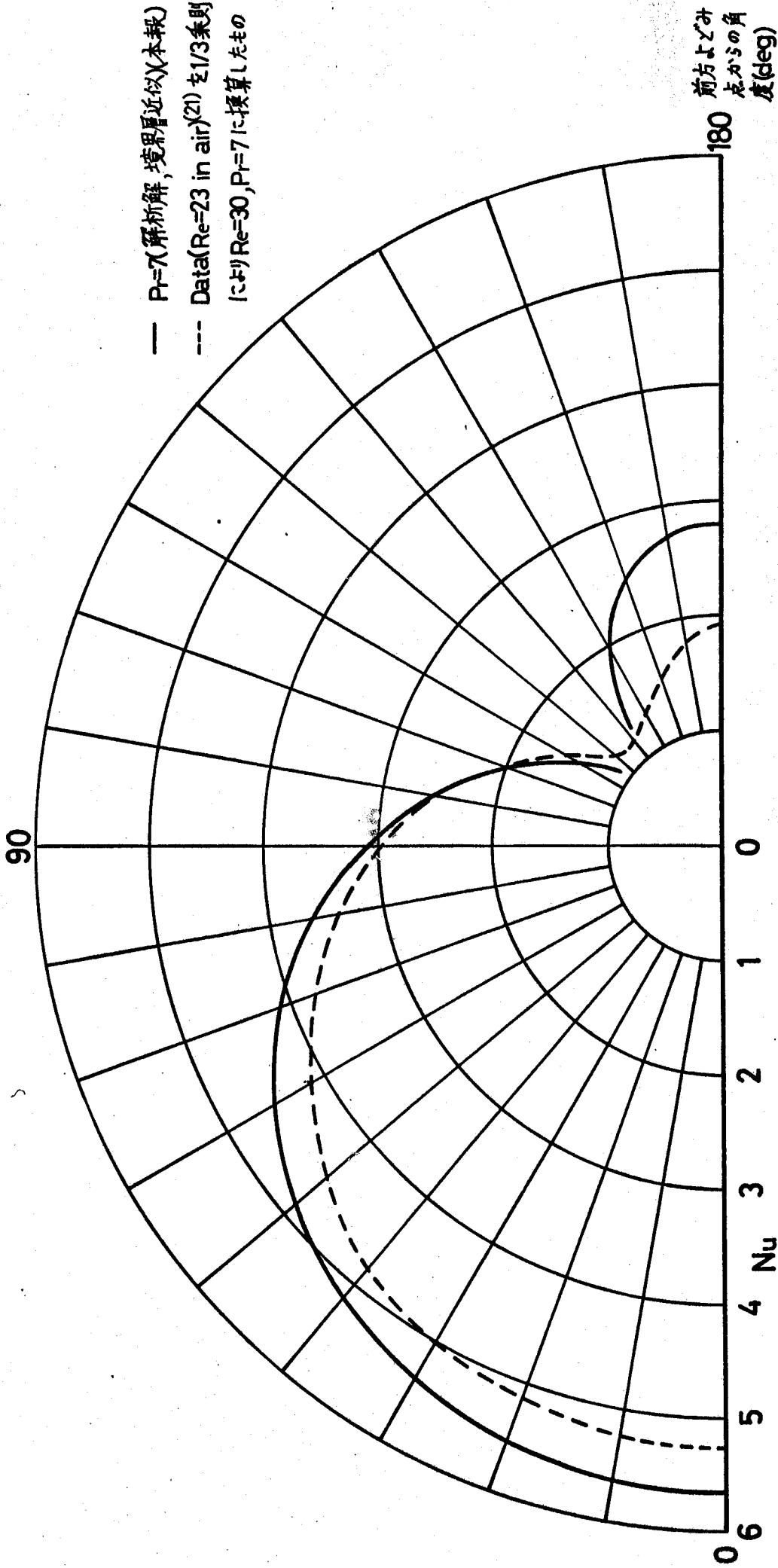
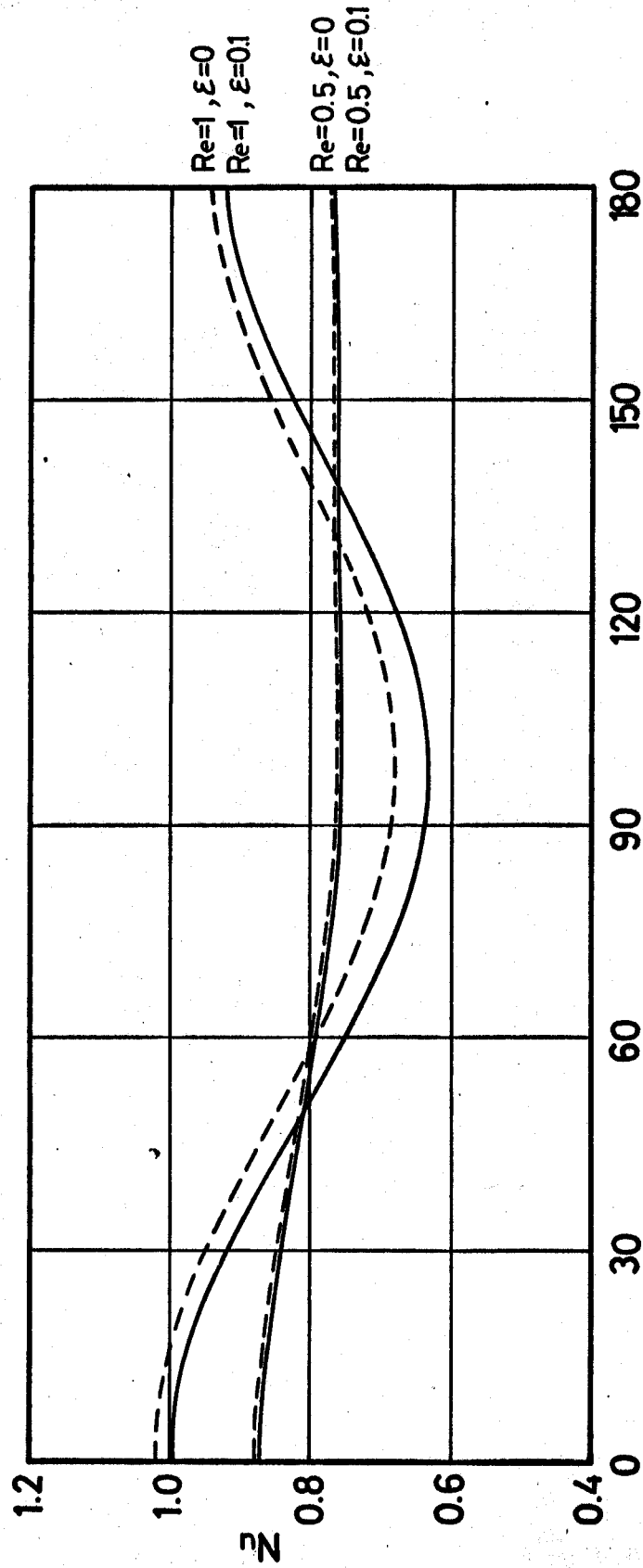


図3-31 層流局所ヌセルト数($Re=30, \epsilon=0$)



前方よどみ点からの角度(deg)

図3-32 局所ヌセル数($Pr=7.01$)

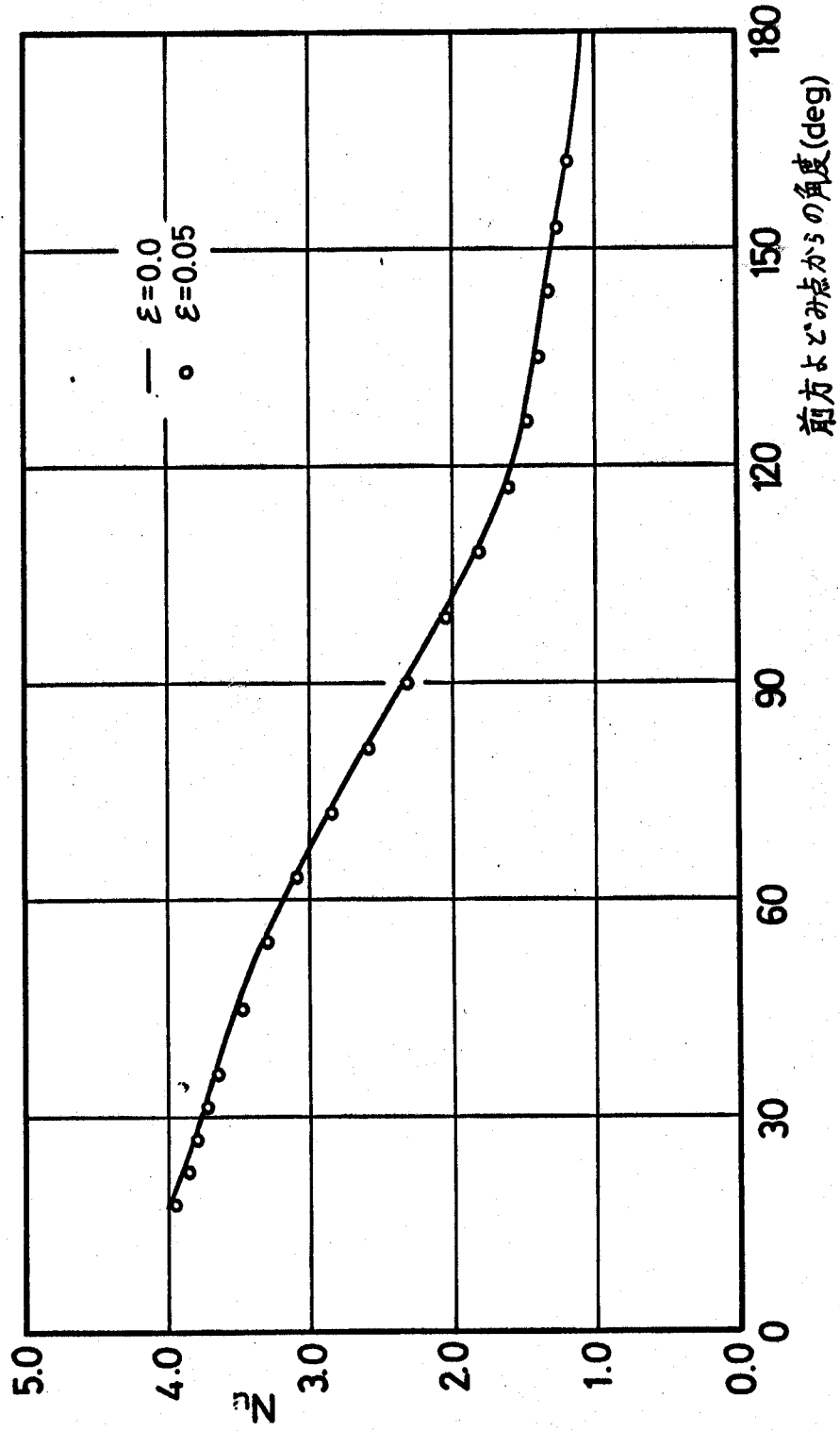


図3-33 局所ヌセルト数($Re=15, Pr=7$)

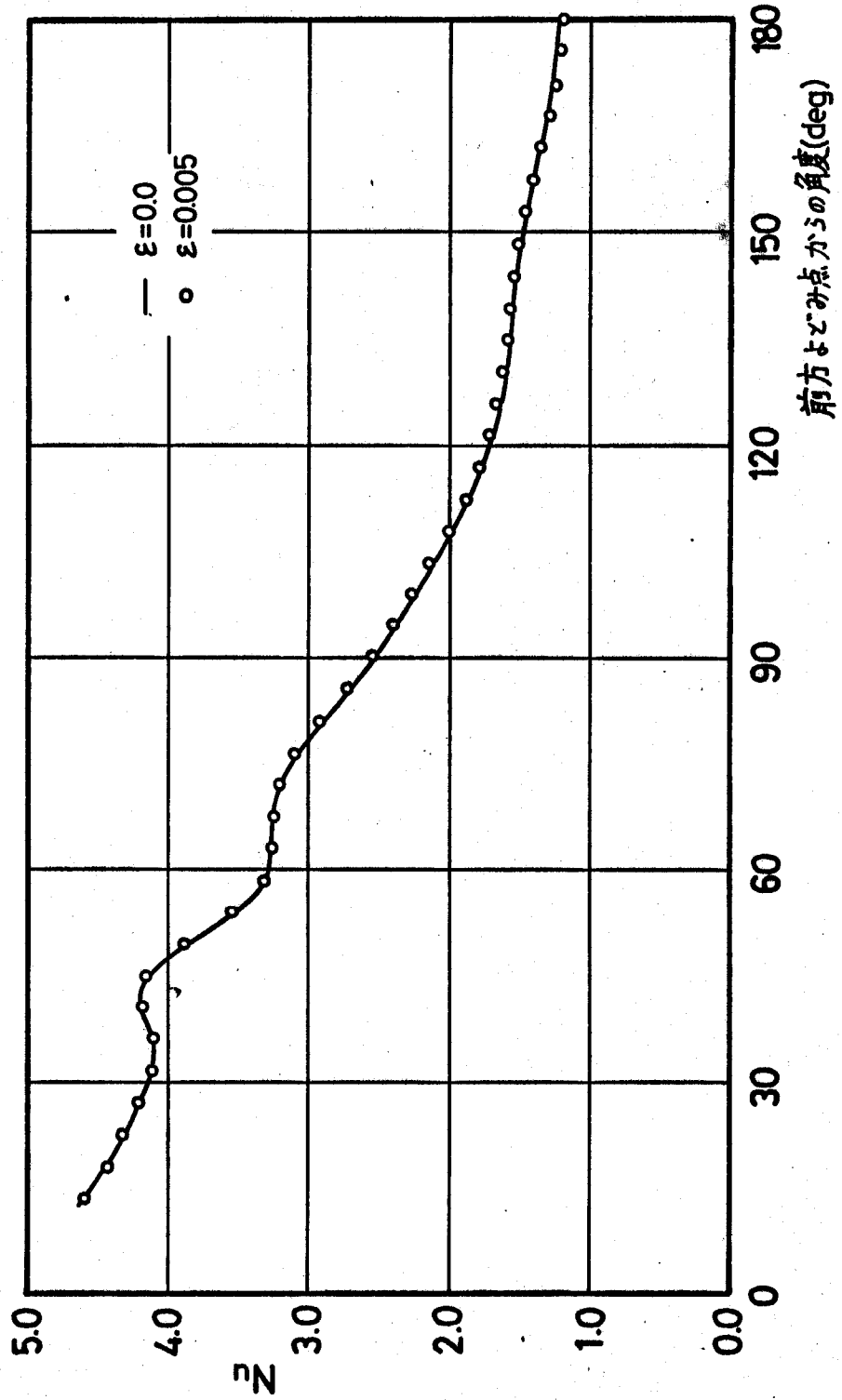


図3-34 局所ヌセルト数($Re=20, Pr=7.01$) 前方よどみ点からの角度(deg)

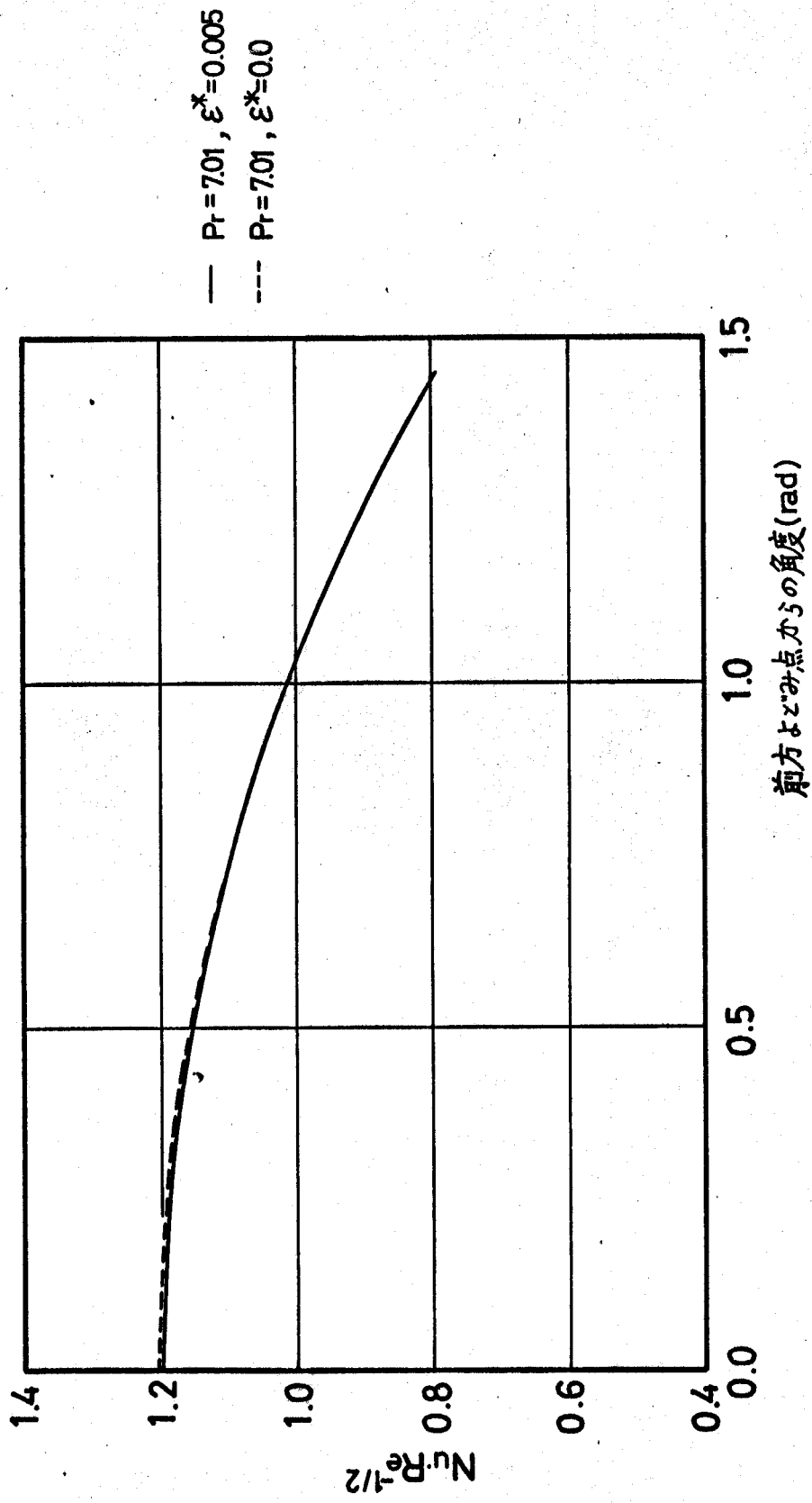


図3-35 局所ヌセル数($Re \gg 1$)

前方よどみ点からの角度(rad)

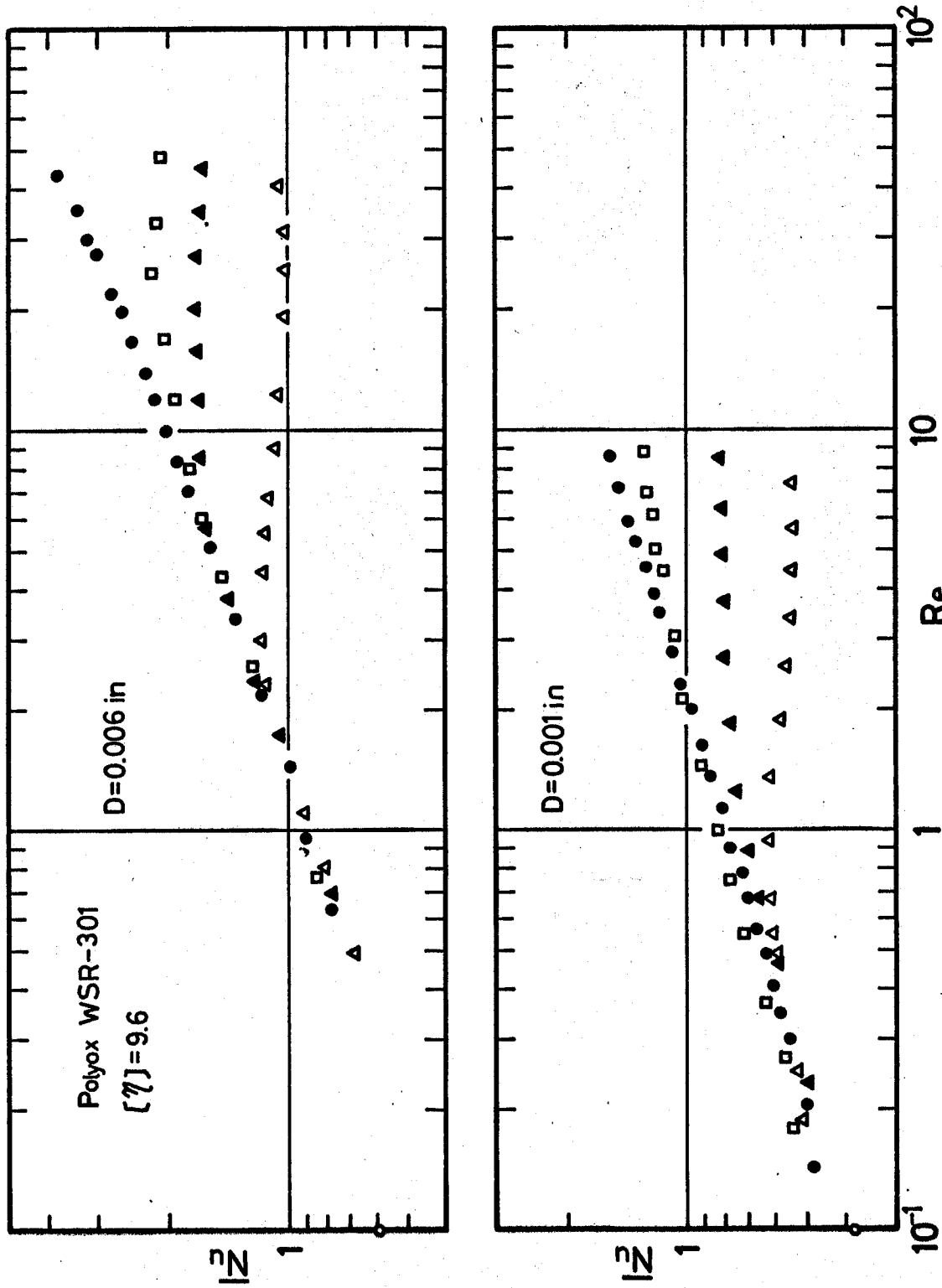
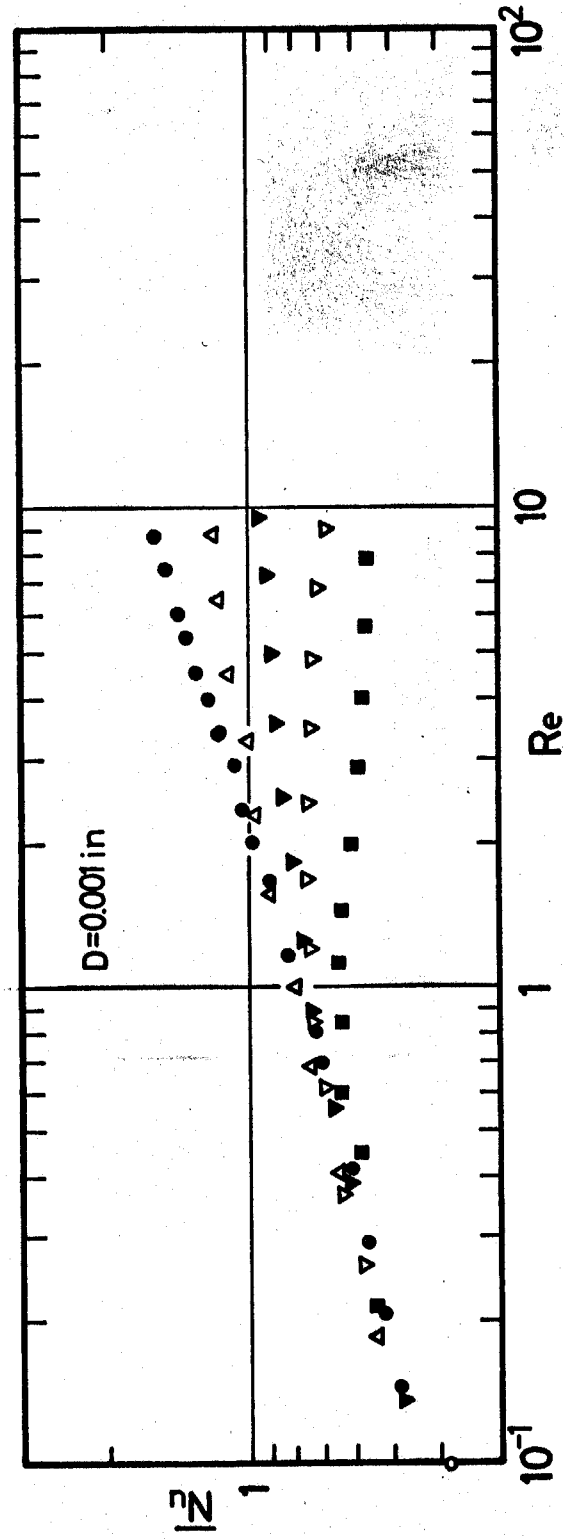
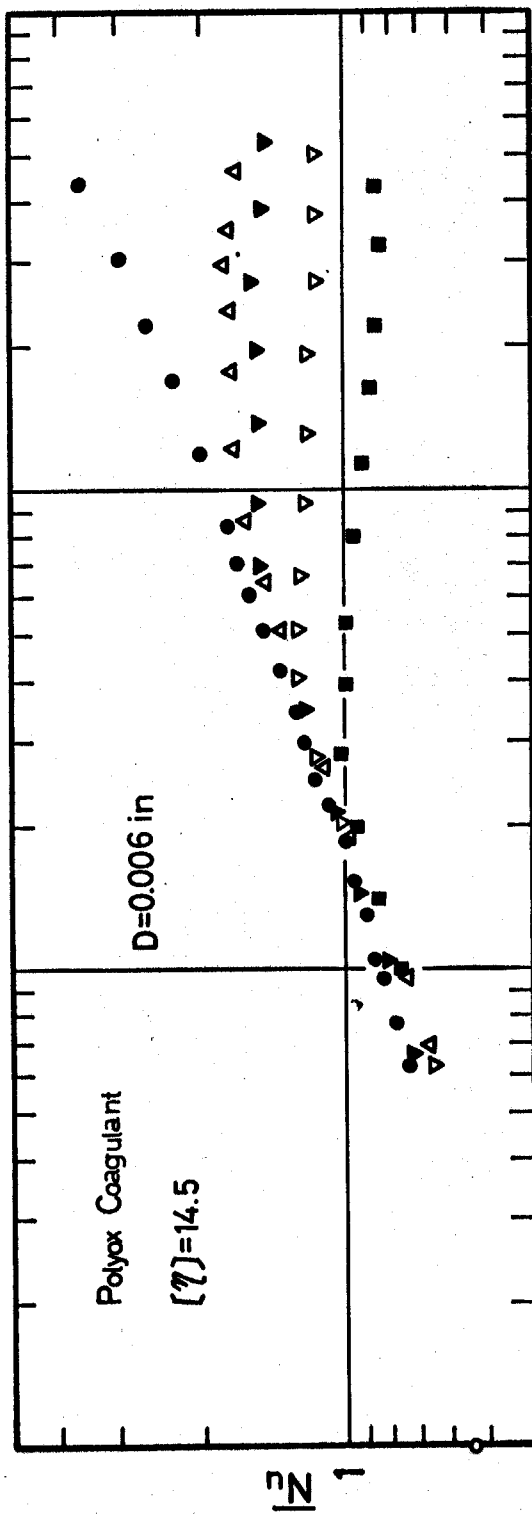


図3-36 平均ヌセルト数(Heat transfer by combined free and forced convection from small cylinders in solutions of WSR-301)⁽⁵²⁾



- distilled water
- △ 6.68 wppm
- ▽ 11.3 wppm
- ▽ 20.3 wppm
- 38.4 wppm
- free convection data

図3-37 平均ヌセルト数(Heat transfer by combined free and forced convection from small cylinders in solutions of Coagulant)⁽⁵²⁾

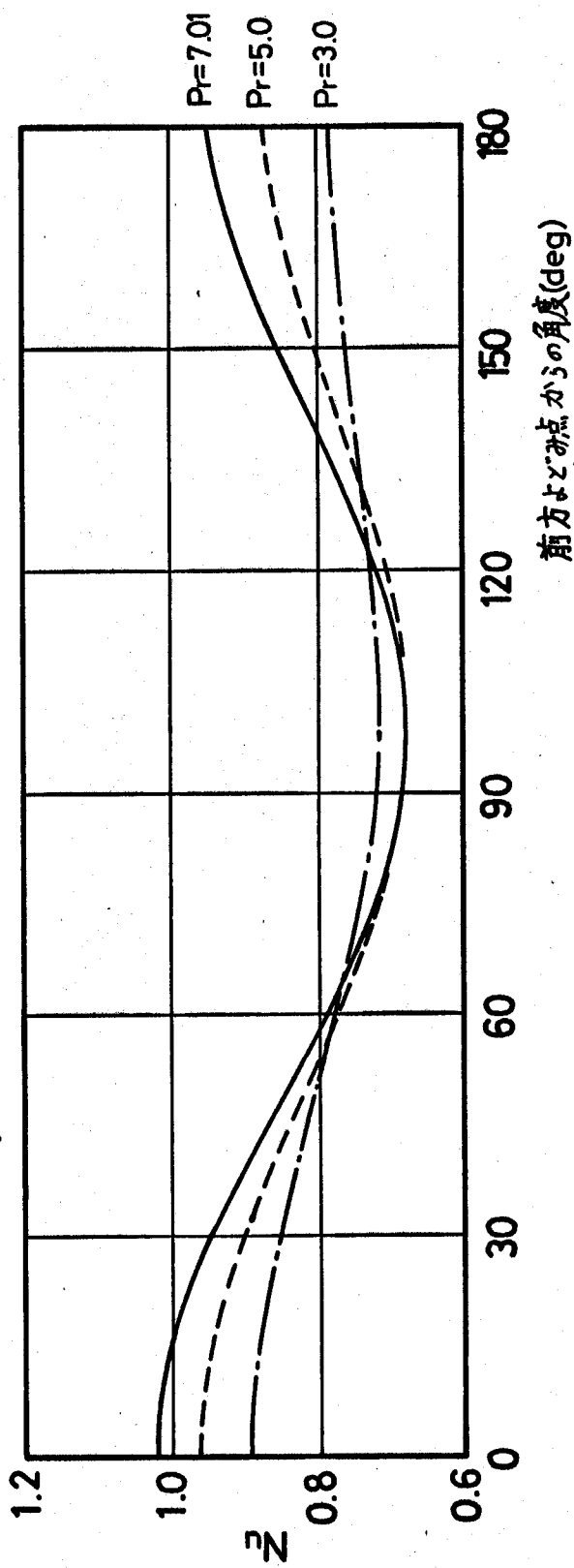
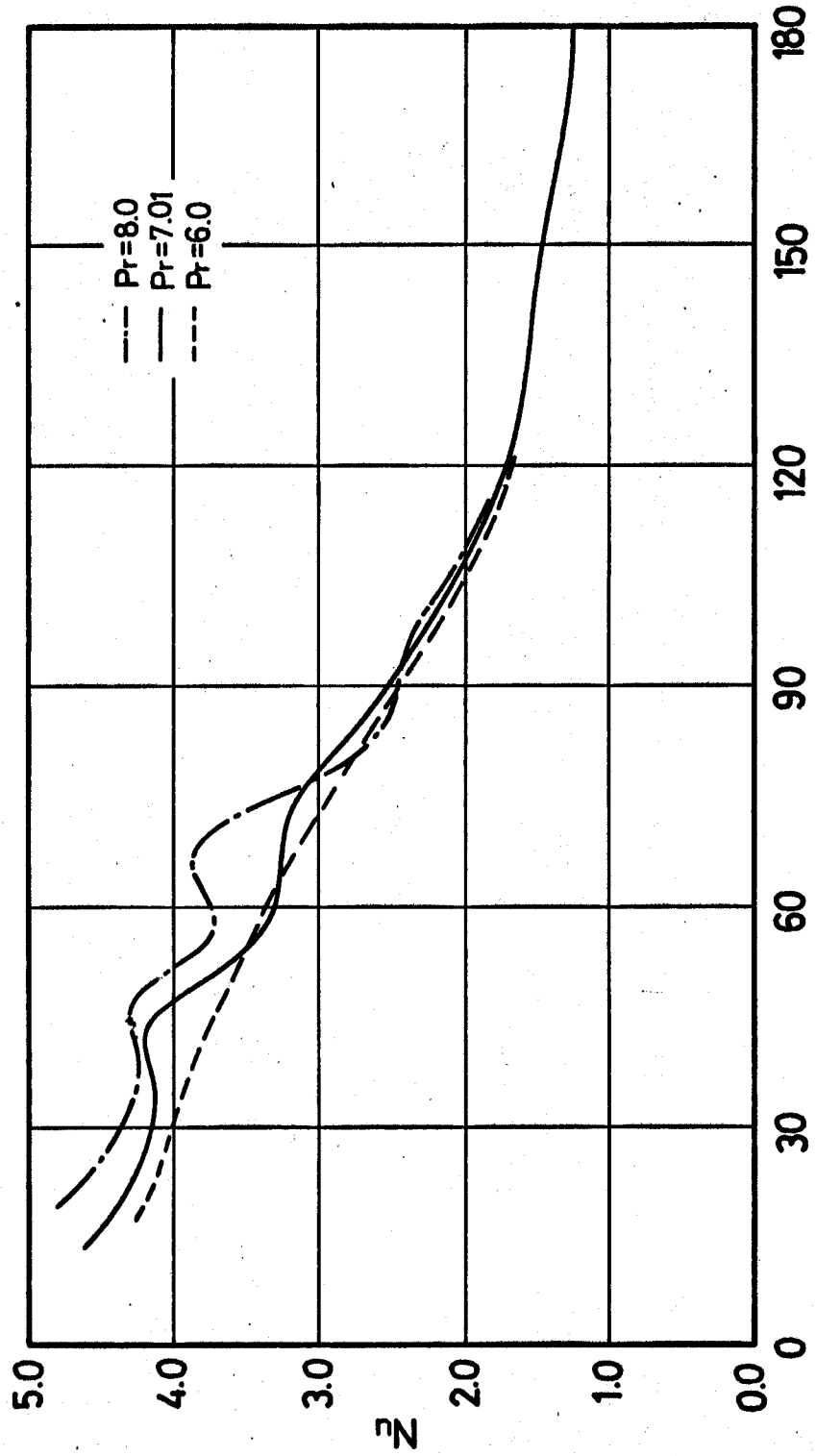


図3-38 局所ヌセルト数 ($Re=1, \epsilon=0$)



前方よどみ点からの角度(deg)

図3-39 局所ヌセルト数($Re=20, \epsilon=0$)

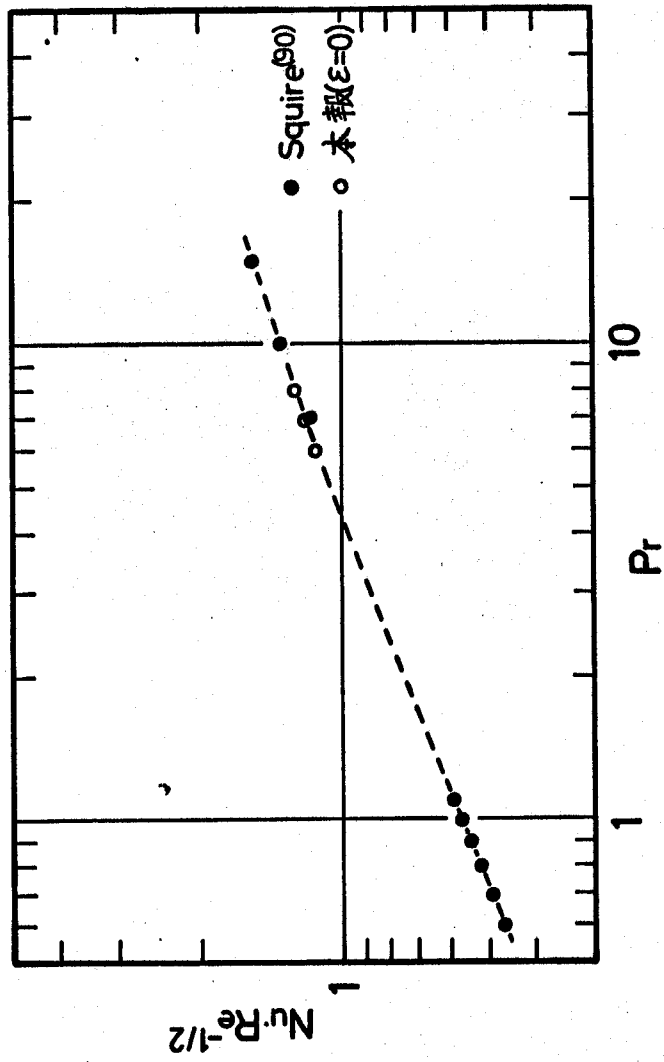


図3-40 前方よどみ点のNu数に及ぼすPr数の影響(Re>1)

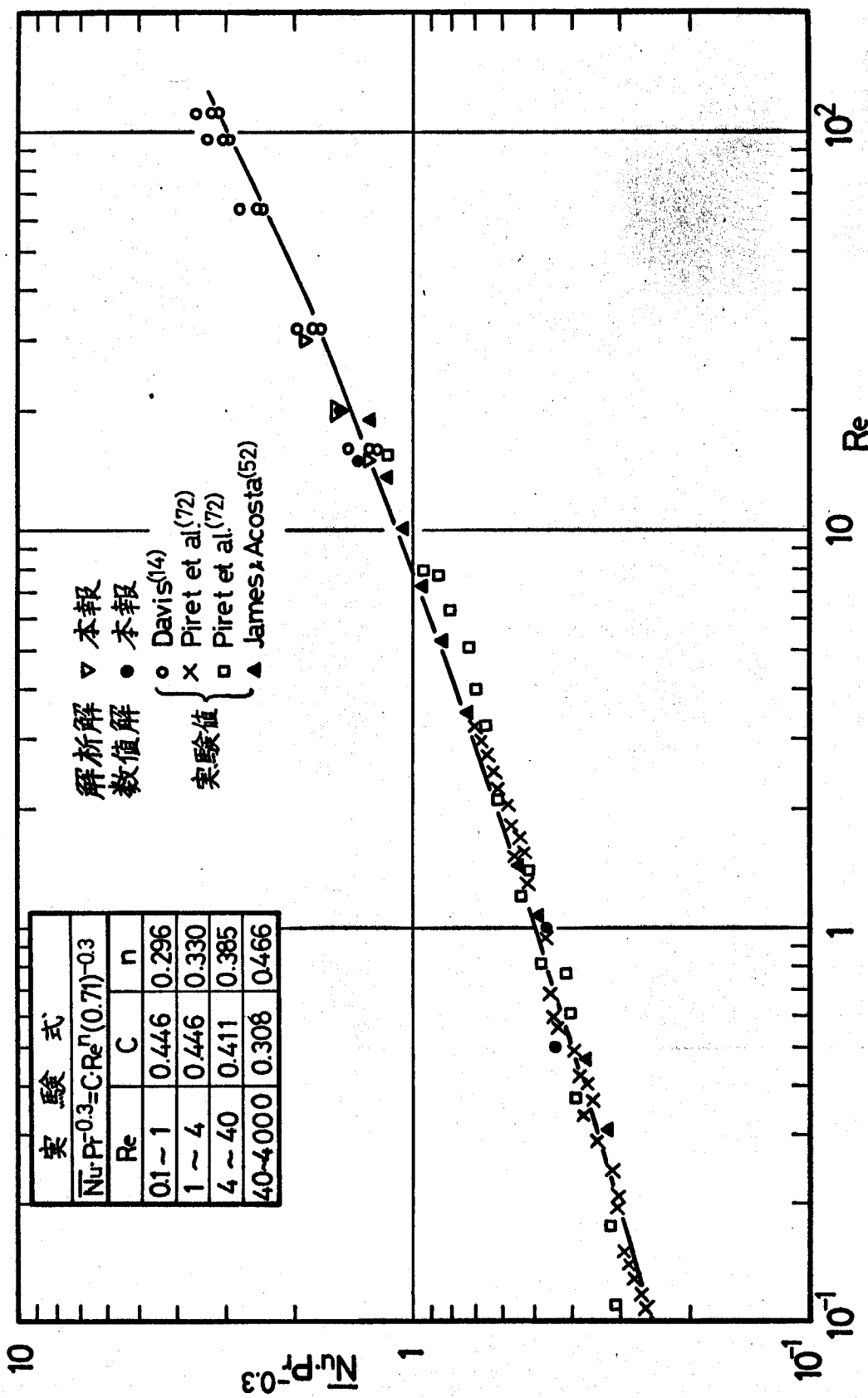


図3-41 平均ヌセルト数

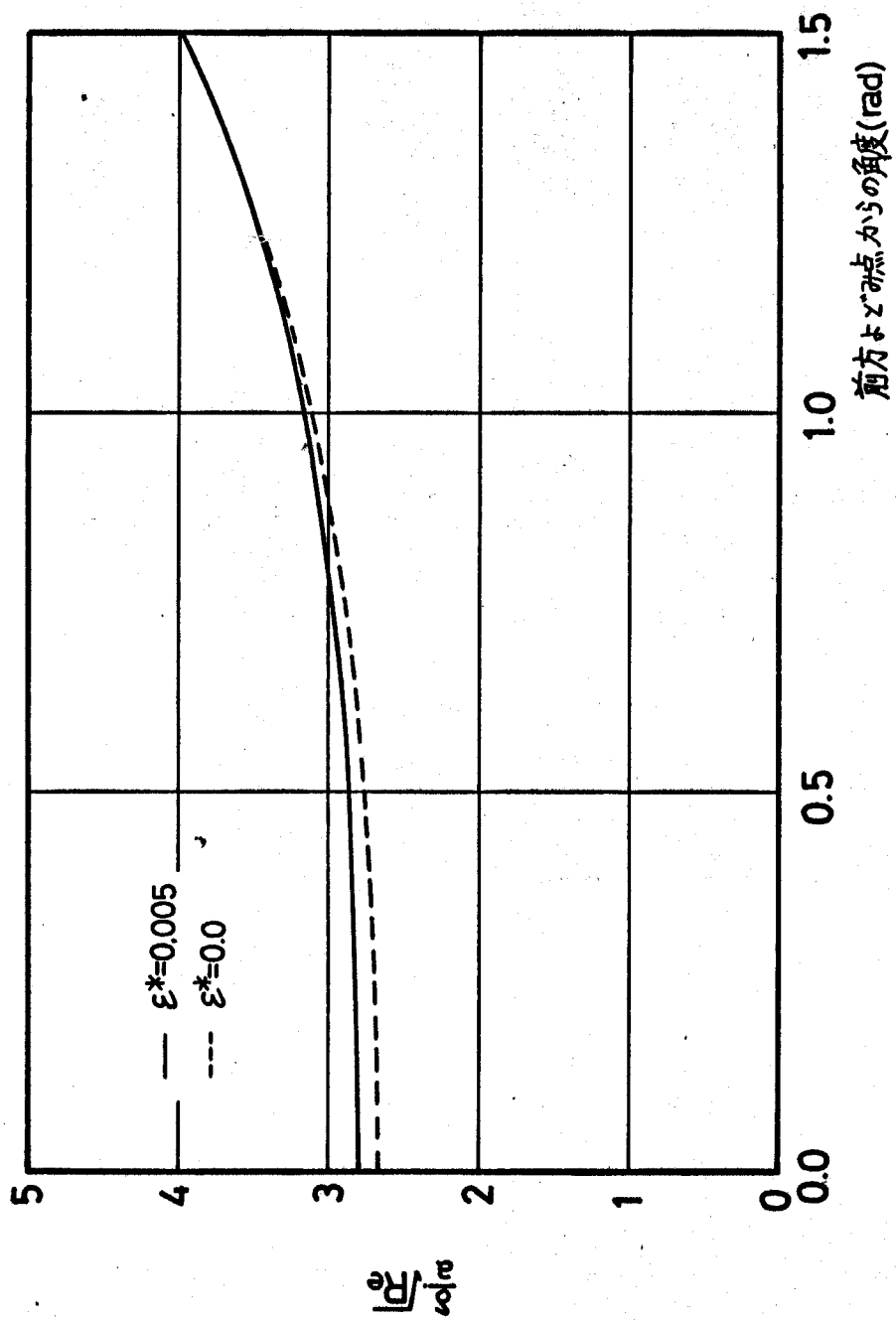


図3-42 境界層厚さ ($Re \gg 1$)

前方よどみ点からの角度(rad)

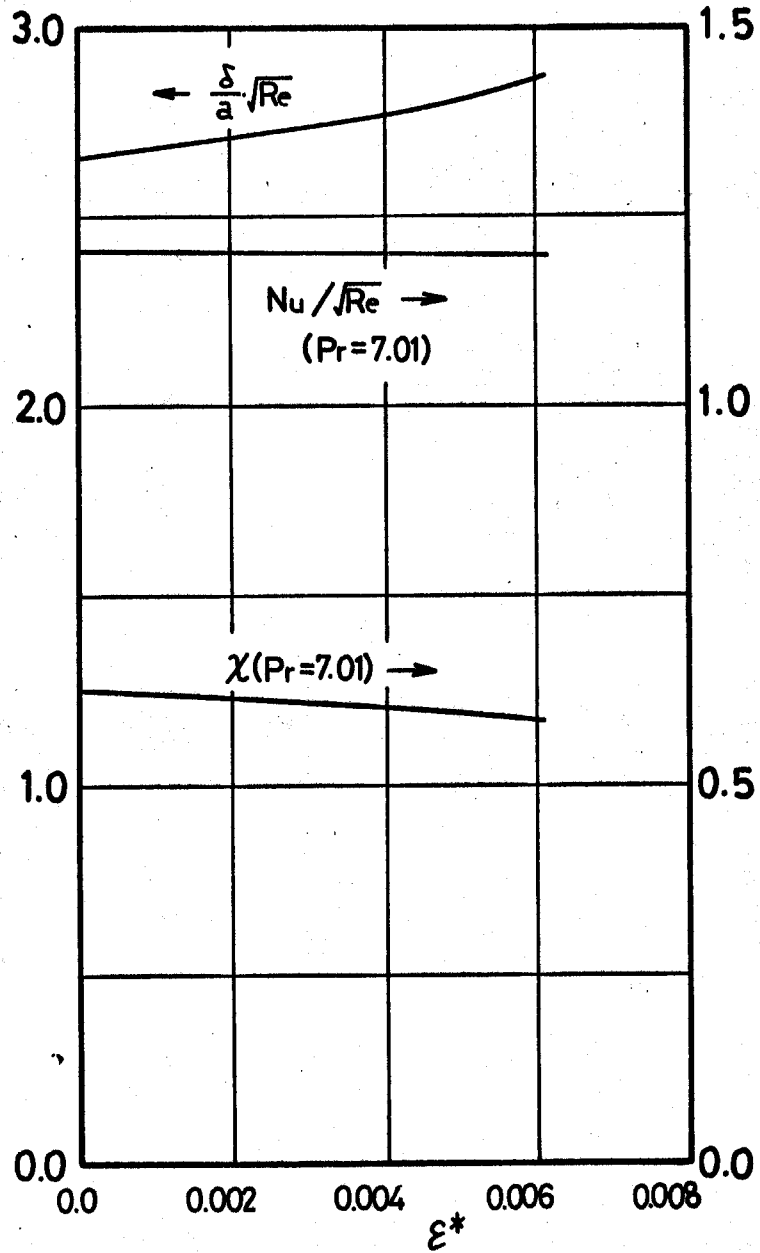


図3-43 前方よどみ点における諸特性($Re \gg 1$)

3.6 結論

希薄高分子溶液の一樣流に直角に置かれた円柱周りの二次元定常層流の流動場ならびに熱伝達の問題を解析的に取扱った。その結果、溶液の弾性的挙動により抵抗力係数が溶媒のそれに比して増加することが判明した。また弾性的挙動のため、熱線流速計の場合のように比較的依レイノルズ数の際には、熱伝達が減少するような異常現象を呈することが示された。レイノルズ数が高い場合には、前方よどみ点付近の熱伝達にあまり大きな変化は現れないことが判明した。

また希薄高分子溶液中の熱伝達は、粘弾性的挙動を示す溶液の種類、濃度などにより、溶媒である水に対する変化の度合がレイノルズ数などにより異なるので、流速測定に熱線流速計を使用する場合には個々の溶液において基準速度に対する出力の校正を多点で行うことが必要となる。

第4章 ピト-管法による流速測定

4.1 緒言

希薄高分子溶液をはじめとする粘弾性流体の流動現象の内部機構はいまだ不明の点が多く、そのため最近では流れの内部機構を調べるために、流れの可視化、流速測定、速度変動の測定などが行われている。これらのうち流れの可視化あるいはレーザ光による流速測定などは別として、熱線流速計あるいはピト-管などの探子を使用する場合には、ニュートン流体の場合とは異なり探子挿入の影響が大きいことが、Metznerら⁽⁶⁷⁾、Savins⁽⁷⁹⁾によって定性的に予測されている。しかしこれらの人々の考え方をピト-管使用の場合についていえば、多くは、ピト-管を流れ場に挿入しない際の応力場と速度場の関係がピト-管圧により計測されるものとし、したがって速度決定には圧力場以外に応力場を知る必要がある、としているにすぎず、実験的にはAstaritaら⁽⁶⁾、Smithら⁽⁸⁹⁾によりピト-管法による全圧測定の結果が報告

され、かなりの誤差を伴なうこと（みかけ上動圧が小さく計測されること）が示された。

現状では探子使用による計測についてこのような解釈が多いにもかかわらず、ピトー管挿入による影響については粘性の影響に関して Hurd⁽⁴⁹⁾, Barker⁽⁷⁾により検討されている程度であり、粘弾性の影響については各種形状の全圧管に影響する因子として、変動速度に起因するもの、探子近傍の境界層の2つが考えられているが、そのような場合は非常に稀れで、定量的評価はほとんど検討されていないようである。そこで本章では希薄高分子溶液の場合を対象とし、ピトー管法による速度測定に関し二、三の考察を行ってみる。

4.2 ピトー管法による速度測定の問題点について

4.2.1 概説

いわゆる全圧管に対する原理は通常、ピトー管開口部を岐点とみたてて完全流体に対するベルヌーイ

の定理により

$$P_m - P_\infty = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \quad (P_m : \text{測定圧力}, P_\infty : \text{静圧}) \quad (4.1)$$

が成立するというように説明されているが、この点については二つの問題点が残されている。その1はピト-管開口部を岐点とみなし得るかどうかという点、その2は岐点とみなし得る場合であっても、岐点圧力をもって測定圧力と等置しうるか否かという点である。一般に測定圧力はピト-管孔内の底部における圧力の平均値を与えるが、完全流体を考慮する限り、流れはピト-管孔の奥まで入り込むため、ピト-管開口部を岐点と考えるのは不適当である。その結果十分に長いピト-管の場合に式(4.1)が成立するものと考えられる。しかし粘性流体の場合においては、ピト-管内の流体の流速は比較的小さく、そのため粘性の影響を無視できなくなる。その際前述のようにピト-管孔内の底部における圧力を評価するには、かなりの困難を伴い、他方実験的には岐点

圧またはその平均値を測定圧とみたてた場合と大差のない結果が得られているので、ここではピト-管開口部を岐点とみたてた場合につき以下のように検討してみる。

4.2.2 ピト-管壁の厚さ無限小，主流の流れが遅い場合

主流の流れは一様であるとし，流れの方向にピト-管軸に一致させてz軸を，それに垂直にx, y軸を取り，x, y, z方向の速度成分をu, v, wとすると，z方向の運動方程式は

$$\rho(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \quad (4.2)$$

となる。今ピト-管開口部前面付近に静止壁を仮定し，この静止壁面とピト-管自身の形状とで，穴なしの探子形状をなしている，と近似する。式(4.2)を $z=-\infty$ から $z=z$ (静止壁) まで積分すると

$$\begin{aligned} p - p_\infty = & \frac{\rho}{2} U_\infty^2 - \rho \int_{-\infty}^z (u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y}) dz \\ & + \int_{-\infty}^z (\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}) dz \end{aligned} \quad (4.3)$$

を得る。さて圧力 p およびせん断応力の静止壁面上の合力の平均値をもって、いわゆるピトー管による測定圧 \bar{p}_0 とするためには、静止壁面形状および速度分布を知る必要がある。いまピトー管径を $2a$ とし、流れは便宜的に半径 κ の球の周りの流れに近いものとみなし（ただし $\kappa \geq a$ ）、速度場に対してストークス近似を採用すると

$$u = U_\infty \frac{3}{4} \cdot \frac{\kappa z x}{r^3} \left(\frac{\kappa^2}{r^2} - 1 \right)$$

$$v = U_\infty \frac{3}{4} \cdot \frac{\kappa z y}{r^3} \left(\frac{\kappa^2}{r^2} - 1 \right)$$

$$w = U_\infty \left\{ \frac{3}{4} \cdot \frac{\kappa z^2}{r^3} \left(\frac{\kappa^2}{r^2} - 1 \right) - \frac{1}{4} \cdot \frac{\kappa}{r} \left(3 + \frac{\kappa^2}{r^2} \right) + 1 \right\}$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

を得る。これを用いて \bar{p}_0 を求めると

$$\bar{p}_0 - p_\infty = \frac{\rho}{2} U_\infty^2 \left(1 - \frac{3}{32} r^{*2} + \frac{2\nu}{aU_\infty} r^* \varphi \right) \quad (4.4)$$

となる。ただし

$$\varphi = 3r^{*2} (1 - \sqrt{1 - r^{*2}})$$

$$r^* = a / \kappa$$

である。ここで φ を含む項は粘性による寄与を示す。式(4.4)において粘性項を省略すると、式(4.1)による場合に比して、 $r^*=1$ の場合 \bar{p}_0 には対動圧比で10%程度の影響が見込まれる。一方ピット-管壁の厚さが有限の場合には $r^*=$ 内半径/ κ とすべきであり、 $\kappa \geq$ 外半径と考えるとよさそうであるから、 $r^* < 1$ と考えられ、とくに $0.6 \leq r^* \leq 0.8$ 程度のときには5%程度の影響しか見込まれない。

4.2.3 主流が速い場合

前述(4.2.2節)のような平均圧力の立場よりピット-管圧 \bar{p}_0 を求めると

$$\frac{\bar{p}_0 - p_\infty}{\rho U_\infty^2 / 2} = 1 - \left\{ \frac{8}{9} \left(\frac{r}{\kappa} \right)^2 - \frac{16}{81} \left(\frac{r}{\kappa} \right)^4 \right\} \quad (4.5)$$

となる。ただしいわゆるピット-管流れのポテンシャル流(分岐点曲率半径 κ)を仮定し、粘性の影響を省略した。上式で $2r$ は開口部内直径を示す。式(4.5)によると、 \bar{p}_0 に対しては $r/\kappa=0.5$ の場合で対動圧比21%減、0.3の場合で8%減、0.2の場合で4

%減の値を示す。実際のピト-管係数の値を考慮すると、以上のような平均圧力の立場からでは、 $r/x \leq 0.2$ が推察されるにすぎず、実際的な観点からは、ピト-管開口部に比して流れの曲率半径が大きいような場合には、いわゆるよどみ点圧力（一般には応力の逆符号）をもつてピト-管圧とみなす近似でほぼ妥当であり、平均圧力の立場を取る必然性は余らないと考えてよいであろう。

4.3 ピト-管法による希薄高分子溶液の流速測定について

4.3.1 概説

つぎに希薄高分子溶液の流動場について考察する。この場合前述の結果を考慮して平均応力（圧力）の立場にはよらず、いわゆる岐点応力の立場から解析を行うことにする。

流れ場を局所的に層流とみなし、主流の速度こう配がピト-管近傍の流動場に余り大きな影響を与えないものとみなす。すなわちピト-管を挿入しない

ときの流動場を局所的に
 一様であるものとみなし、
 カット管周りの流動
 場がカット管軸に関し、
 軸対称であるものとする。

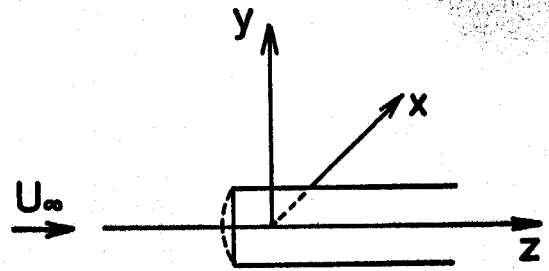


図4-1

そこでカット管軸をz軸とし、それに垂直にx,y
 軸をとる(図4-1)と、運動方程式はx-,y-,z-軸方向
 についてそれぞれ

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (4.6)$$

$$\rho(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad (4.7)$$

$$\rho(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (4.8)$$

となる。前5.2節の場合と同様に、カット管開口部に
 静止壁を仮定し、流体を2分割する。仮定によりカ
 ット管軸上すなわちz軸上では $u, v \sim 0$ と考えられる
 ので、z軸上で式(4.8)を $z = -\infty$ より $z = Z$ (静止点)
 まで積分すると

$$-\frac{1}{2} \int U_{\infty}^2 = -[p - T_{zz}]_{z=-\infty}^z + \int_{-\infty}^z \left(\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} \right) dz$$

となる。したがって

$$\frac{p_0 - p_{\infty} + T_{zz\infty}}{\int U_{\infty}^2 / 2} = 1 + \frac{2}{\int U_{\infty}^2} \int_{-\infty}^z \left(\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} \right) dz \quad (4.9)$$

となる。ただし

$$p_0 \equiv (p - T_{zz})_{z=z}$$

である。式(4.9)において p_0 はいわゆるピット-管圧であり、 p_{∞} は $z = -\infty$ における圧力を、 $T_{zz\infty}$ は $z = -\infty$ における偏差応力成分を意味する。式(4.9)の右辺の積分項はピット-管挿入の特性を示すものであり、ピット-管寸法、溶液のレオロジ的挙動によって支配される。そこで以下のようにこの項を近似的に評価してみる。

レオロジ方程式：

$$T^{ij} = \mu B_{(1)}^{ij} - \lambda \left(\frac{1}{2} \text{II} \right)^{(s-2)/2} B_{(2)}^{ij} \quad (4.10)$$

ただし

$$B_{(1)}^{ij} = g^{im} v^j_{;m} + g^{jm} v^i_{;m}$$

$$B_{(2)}^{ij} = \frac{\partial}{\partial t} B_{(1)}^{ij} + v^m B_{(1);m}^{ij} - v^i{}_{;m} B_{(1)}^{mj} - v^j{}_{;m} B_{(1)}^{im}$$

$$\Pi = B_{(1)}^{mn} B_{(1)mn}$$

であり，直交座標系 (x, y, z) においては $T_{xx} = \tau^{xx}$ などである．式(4.10)のべき指数 s は一般的に $0 < s \leq 2$ である．とくに希薄高分子溶液においては適当なずり速度下において $s \cong 2$ と考えてよい．

4.3.2 遅い流れ

(i) $s=2$ の場合

運動方程式(4.6)~(4.8)において慣性項はストークス近似として省略し，溶液の弾性的挙動を示す ($\lambda \cdot B_{(2)}^{ij}$) の各成分に対してはオセーン近似を適用する．すなわち $u \rightarrow u, v \rightarrow v, w \rightarrow U_\infty + w$ と置き， u, v, w の相乗積などの項を省略すると運動方程式より

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u - \lambda U_\infty \frac{\partial}{\partial z} \Delta u$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v - \lambda U_\infty \frac{\partial}{\partial z} \Delta v$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w - \lambda U_\infty \frac{\partial}{\partial z} \Delta w$$

を得る。一方連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

である。これより $\Delta P = 0$ を得る。そこで P_n を n 次の調和関数として

$$P = \sum \left(1 - \frac{\lambda U_\infty}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \right) P_n$$

$$u = \sum u_n, \quad v = \sum v_n, \quad w = \sum w_n$$

と置けば

$$\frac{\partial P_n}{\partial x} = \mu \Delta u_n, \quad \frac{\partial P_n}{\partial y} = \mu \Delta v_n, \quad \frac{\partial P_n}{\partial z} = \mu \Delta w_n$$

となり、一般解として

$$u = \frac{1}{\mu} \sum \left\{ \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial P_n}{\partial x} + \frac{n r^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P_n}{r^{2n+1}} \right) \right\} \\ + \sum \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x} + z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right)$$

$$v = \frac{1}{\mu} \sum \left\{ \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial P_n}{\partial y} + \frac{n r^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P_n}{r^{2n+1}} \right) \right\} \\ + \sum \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial y} + x \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right)$$

$$w = \frac{1}{\mu} \sum \left\{ \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial P_n}{\partial z} + \frac{n r^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{P_n}{r^{2n+1}} \right) \right\}$$

$$+\sum\left(\frac{\partial\phi_n}{\partial z}+y\frac{\partial\chi_n}{\partial x}-x\frac{\partial\chi_n}{\partial y}\right)$$

$$p=\sum\left(1-\frac{\lambda U_\infty}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\right)p_n$$

$$\Delta\chi_n=\Delta\phi_n=0, \quad r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

(4.11)

を得る。静止壁を半径 κ の球で近似した場合、関数 p_n, ϕ_n, χ_n の中で0でないものは

$$p_{-2}=Azr^{-3}, \quad \phi_{-2}=Bzr^{-3}$$

であり、境界条件($r=\kappa: u=v=0, w=-U_\infty$)により

$$A=-1.5\mu\kappa U_\infty, \quad B=-0.25U_\infty\kappa^3$$

を得る。この速度分布を用いて式(4.9)を評価すると

$$\frac{p_0-p_\infty+T_{zz\infty}}{\rho U_\infty^2/2}=1+\frac{3}{R}-\frac{3}{4}\frac{\lambda}{\rho\kappa^2} \quad (4.12)$$

となる。ただし $R=U_\infty\kappa/\nu$ である。

(ii) $s < 2$ の場合

この場合には前項(4.3.2(i))の場合ほど合理的に扱うにはかなりの困難を伴うため、近似的に前項(4.3.2(i))の場合と同じ速度分布により式(4.9)を評価

すると

$$\frac{P_0 - P_\infty + T_{zz\infty}}{\rho U_\infty^2 / 2} = 1 + \frac{3}{R} - \frac{3^{1.5s-1}}{2^{s-2}} \cdot \frac{\Gamma(s)\Gamma(s+1)}{\Gamma(2s+1)} \cdot \frac{\lambda}{\rho \kappa^s} \left(\frac{\nu}{\kappa}\right)^{s-2} R^{s-2} \quad (4.13)$$

となる。ただし $\Gamma(\)$ はガンマ関数であり、

$$R = U_\infty \kappa / \nu$$

である。

式(4.12), (4.13)の右辺第2項は粘性の効果を示し、第3項は弾性的挙動の効果を示す。この結果、遅い流れの場合、希薄高分子溶液のように $1 < s \leq 2$ ならば、ピット管特性に対しては粘性的挙動の占める割合が大きいことが判明する。なお図4-2にニュートン流体 ($\lambda = 0$) の場合における Hurd⁽⁴⁹⁾, Barker⁽⁷⁾ によるピット管圧の測定結果を示す。これによると $R \lesssim 50$ の場合に粘性の影響が強く現われることが判明する。

4.3.3 速い流れ

ピット管開口部に仮定した静止壁の中心部の曲率半径を κ とした場合 (通常の代表寸法 (管径等) が

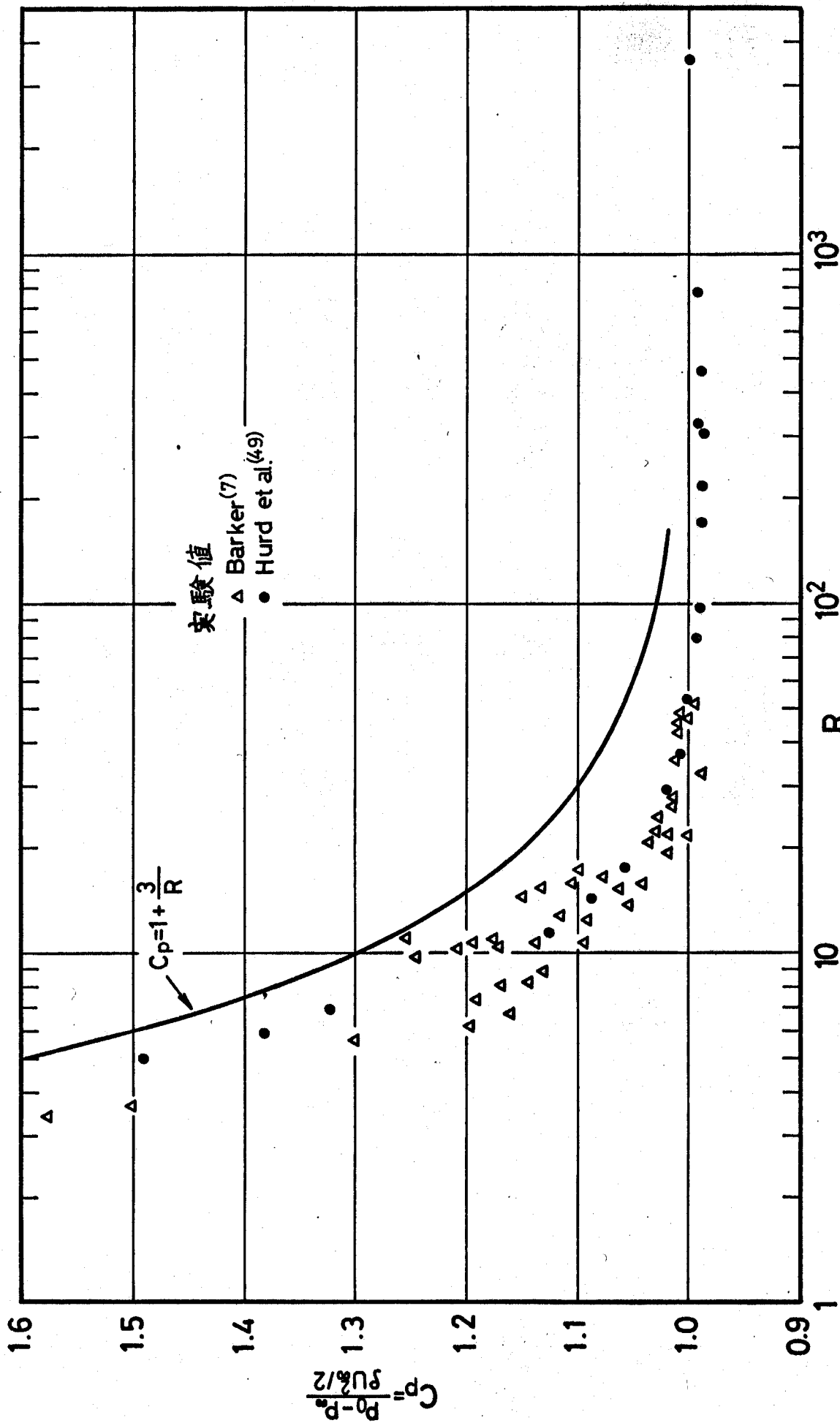


図4-2 ヒト-管係数

1mm 程度のピト - 管を想定する), レイノルズ数 $R = U_{\infty} \kappa / \nu (\geq 100)$ に対して, 希薄高分子溶液の場合に際しては

$$\frac{\lambda}{\rho \kappa^2} \left(\frac{\kappa^2}{\nu R} \right)^{2-s} = \frac{\lambda}{\rho \kappa^2} \left(\frac{\kappa}{U_{\infty}} \right)^{2-s} \ll 1$$

であると考えられるので, 速度場に関する限り, ピト - 管外部の流れがポテンシャル流れであるとみなしてもさほど大きな差異は生じないであろう。さらに静止壁の近傍では境界層的流動の様相を呈することが推察される。そこで速度測定に関し, 式(4.9)で示されるようなピト - 管特性を支配する流動要因を, ポテンシャル流れによるものと境界層内の流れに帰因するものの二つに分けて考えることができる。希薄高分子溶液のように比較的弾性的挙動が弱い流体では, ニュートン流体の場合との類推により, ポテンシャル流れに帰因する影響は境界層流動による影響の \sqrt{R} 倍程度になるものと推定される。そこで式(4.9)の評価の際には境界層内の速度分布として $\lambda=0$

のニュートン流体に対するものを用いることとする。
 さてポテンシャル流として、半径 κ の球の周りの流れ、
 およびいわゆるピトー管流れの二つの場合について
 考える（両者ともよどみ点流線のよどみ点にお
 ける曲率半径を κ とする）。流れ関数 ψ は

前者に対して

$$\psi = 0.5U_{\infty}r^2(1 - \kappa^3l^{-3})$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad l = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

後者に対して

$$\psi = \frac{1}{2}U_{\infty}r^2 - \frac{9}{16}\kappa^2U_{\infty}\left(\frac{z}{l} - 1\right)$$

である。境界層内の速度分布としては、回転体周
 の流れに対する Frössling による解⁽³³⁾を採用する。こ
 の結果式(4.9)の評価として

球の周りの流れの近似による場合：

$$\frac{P_0 - P_{\infty} + T_{zz\infty}}{\rho U_{\infty}^2/2} = 1 + \frac{6}{R(1 + \sqrt{3}/R)^4} + \frac{22.8}{R\sqrt{R}} - \frac{22.6}{R^2}$$

$$- \frac{\lambda}{\rho \kappa^2} \left(\frac{\nu}{\kappa^2}\right)^{s-2} R^{s-2} \left[\frac{2 \cdot 3^{1.5s-1}}{s} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{3}/R}\right)^{4s} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2 \cdot 3^{1.5s-0.5}}{\sqrt{R}} \int_0^3 \{f_1'(\eta)\}^s d\eta \\
& - \frac{16 \cdot 3^{1.5s-3}}{R} \int_0^3 \{f_1'(\eta)\}^{s-1} \{g_3(\eta) + h_3(\eta) + f_1(\eta)\} d\eta
\end{aligned}$$

(4.14)

ピット - 管流れの近似による場合 :

$$\frac{P_0 - P_\infty + T_{zz\infty}}{\rho U_\infty^2 / 2} = 1 + \frac{16}{3R(1 + \sqrt{6/R})^3} + \frac{21.5}{R\sqrt{R}} - \frac{36.0}{R^2}$$

$$- \frac{\lambda}{\rho \chi^2} \left(\frac{\nu}{\chi^2}\right)^{s-2} R^{s-2} \left[\frac{2^{3s+1}}{s^{30.5s+1}} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{6/R}}\right)^{3s} \right.$$

$$\left. + \frac{2^{3s-0.5}}{3^{0.5s-0.5}} \frac{1}{\sqrt{R}} \int_0^3 \{f_1'(\eta)\}^s d\eta \right.$$

$$\left. - \frac{2^{3s+1}}{3^{0.5s+1}} \frac{1}{R} \int_0^3 \{f_1'(\eta)\}^{s-1} \{2g_3(\eta) + h_3(\eta) + f_1(\eta)\} d\eta \right]$$

(4.15)

を得る。ただし関数 $f_1(\eta), h_3(\eta), g_3(\eta)$ は Frössling による関数を意味する(図4-3)。 $R \geq 100$ の場合, 式(4.14), (4.15)の両者の間には大差は見られない。これを

$$\frac{P_0 - P_\infty + T_{zz\infty}}{\rho U_\infty^2 / 2} \equiv 1 + \varepsilon_1(R) - \frac{\lambda}{\rho \chi^2} \left(\frac{\nu}{\chi^2}\right)^{s-2} R^{s-2} \varepsilon_2(R; s) \quad (4.16)$$

として, $\varepsilon_1-R, \varepsilon_2-R$ の線図を 図4-4, 図4-5, 4-6 に示

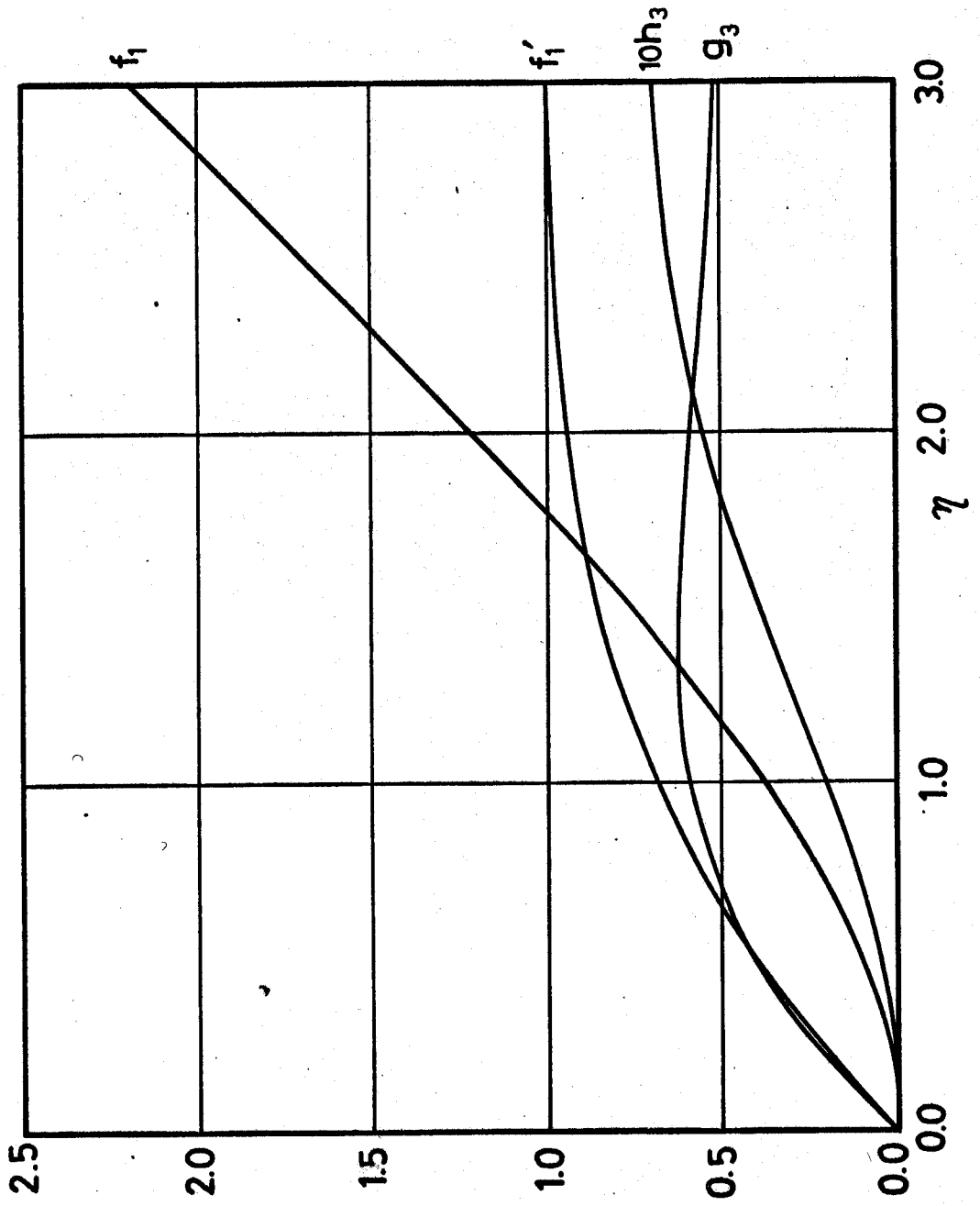


图4-3 $f_1, f_1', h_3, g_3 \sim \eta$ 线图

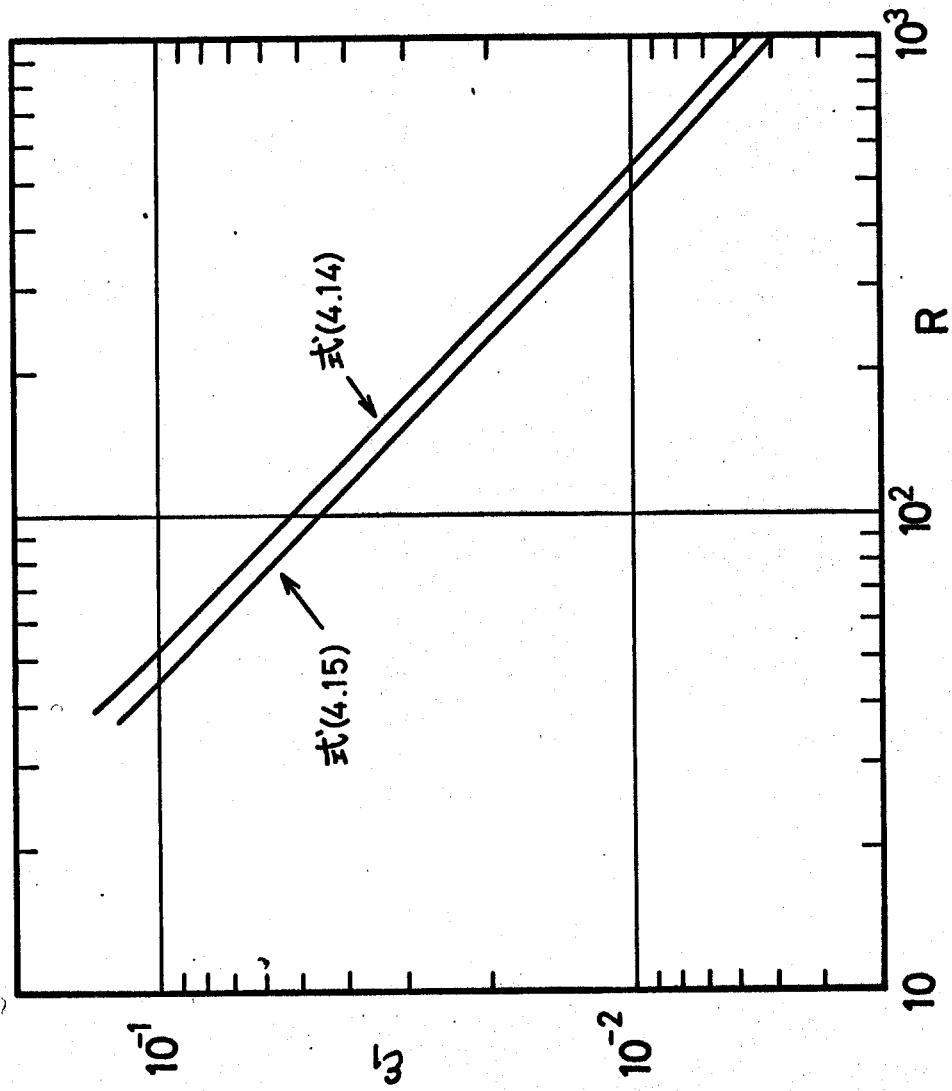


图 4-4 $\varepsilon_1 \sim R$

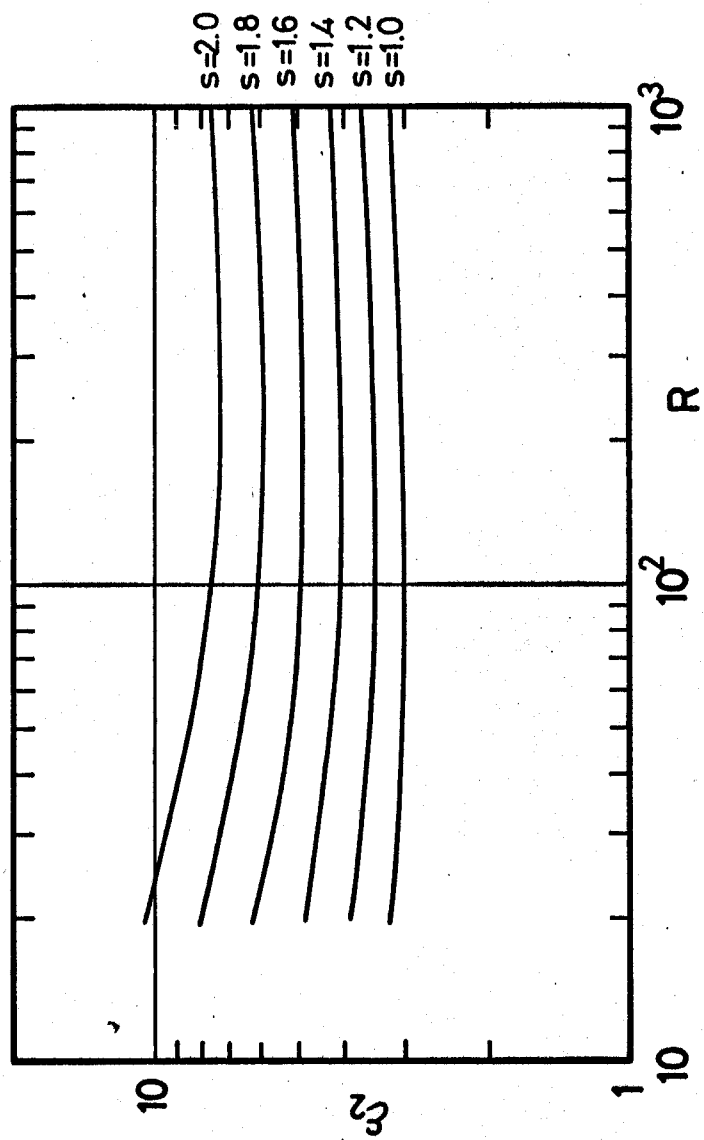


図4-5 $\epsilon_2 \sim R$ (式(4.14)による)

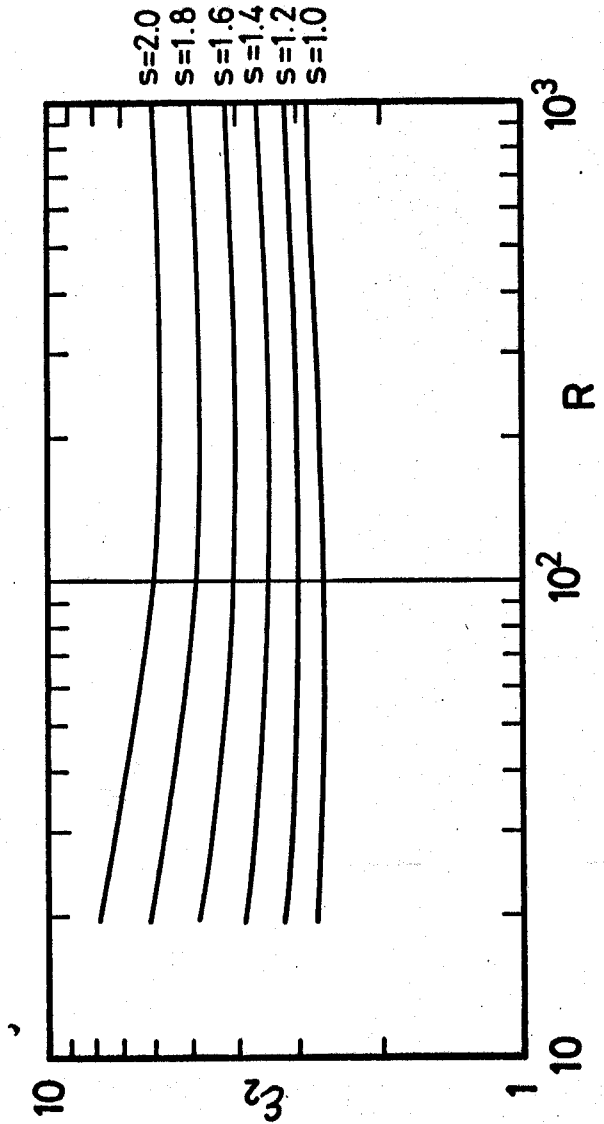


図4-6 ε₂~R(式(4.15)による)

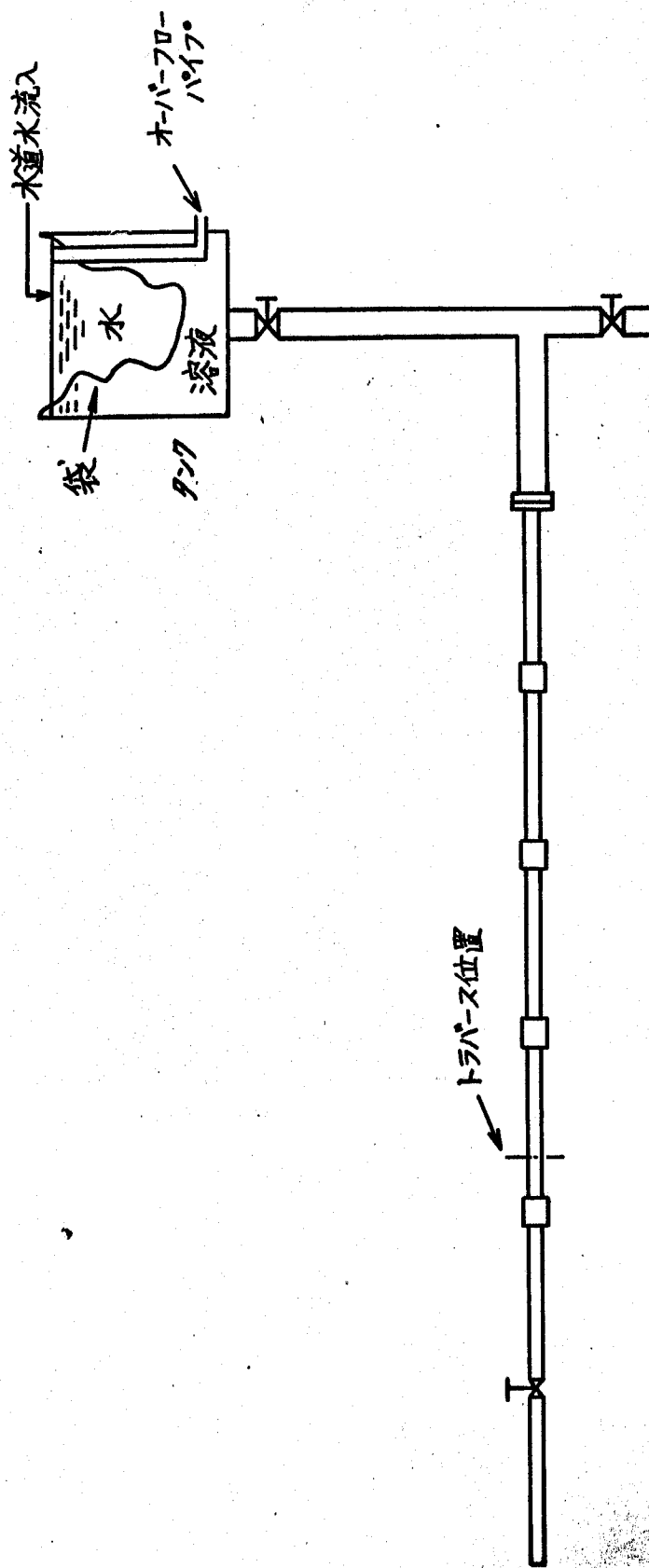
す。式(4.14),(4.15)の結果として

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \varepsilon_1(R) = \text{一定}, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon_2(R; s) = \text{一定}$$

であるから、希薄高分子溶液のように、 $1 < s \leq 2$ ならば、速い流れに対するピト管特性には粘性的挙動よりも弾性的挙動の占める割合が大きいことが判明する。

4.4 実験装置および実験方法

一様流の設定はかなり困難であったため、円管内の乱流領域で測定した。使用した管は内径 $D=16.15\text{mm}$ および $D=8.62\text{mm}$ のアクリル製円管であり、ピト管はステンレス製の外径 $0.8, 0.7, 0.6\text{mm}$ の3種の管を用いた。実験に供した試料はポリエチレンオキサイド (PEO 18) の $5 \sim 30\text{ppm}$ 水溶液およびセパラン AP-30 の $2 \sim 30\text{ppm}$ 水溶液である。この濃度範囲では試料溶液はニュートン粘性を示すものと考えられる。実験装置の概略を図4-7に示す。また管路系の詳細を図4-8, 図4-9に、トラバース装置 ($1/100\text{mm}$ マ



実験装置概略図

図4-7

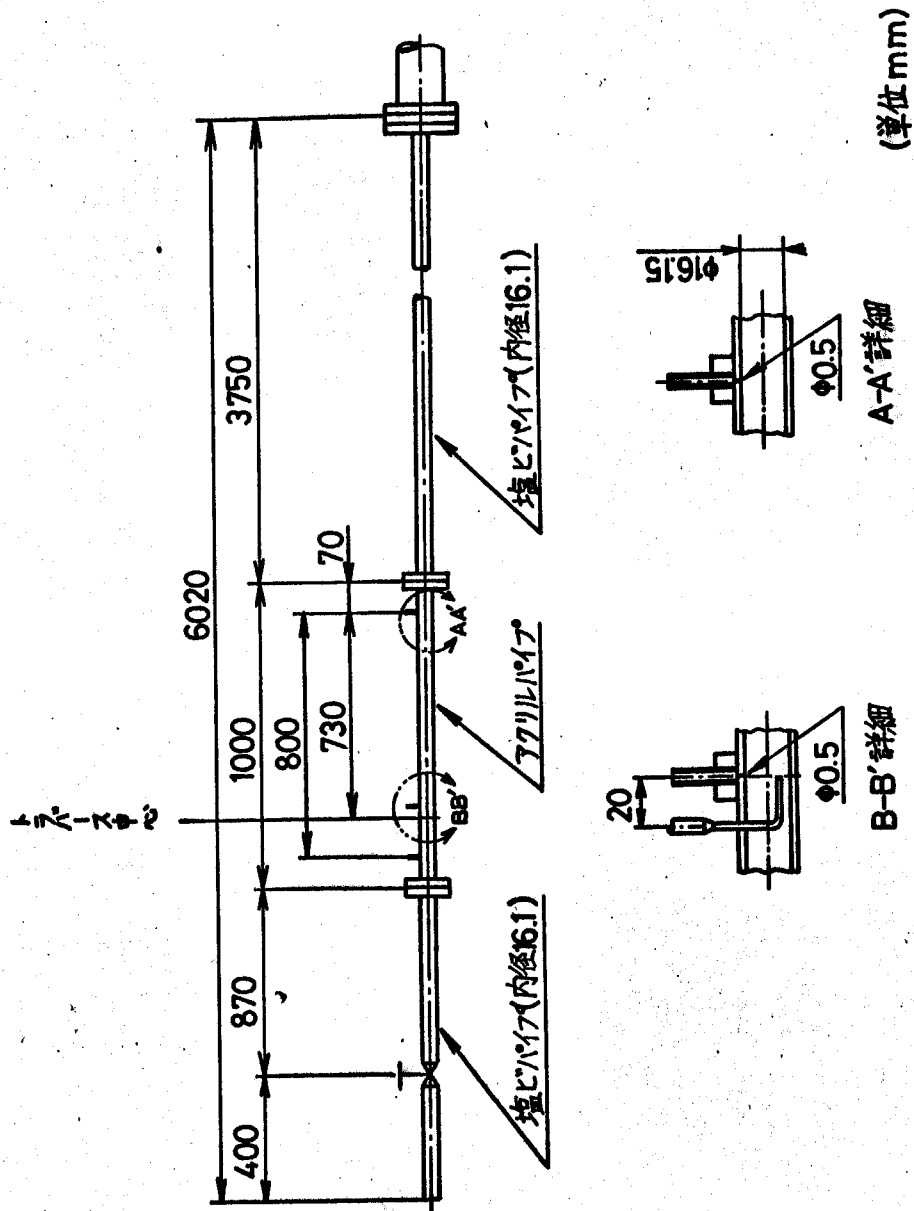
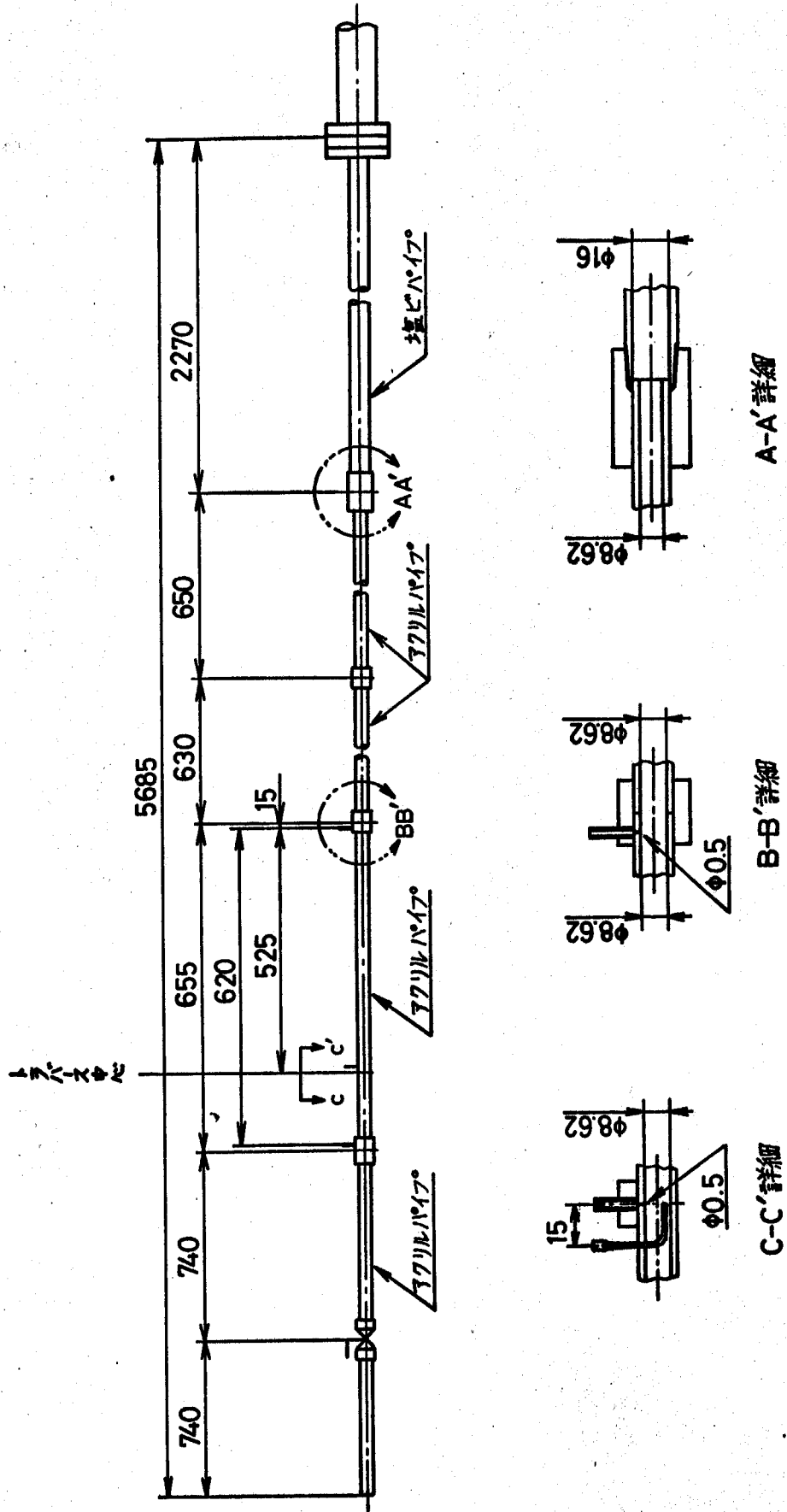


図4-8 管路系詳細(D=16.15mm)



(單位 mm)

圖 4-9 管路系詳細(D=8.62 mm)

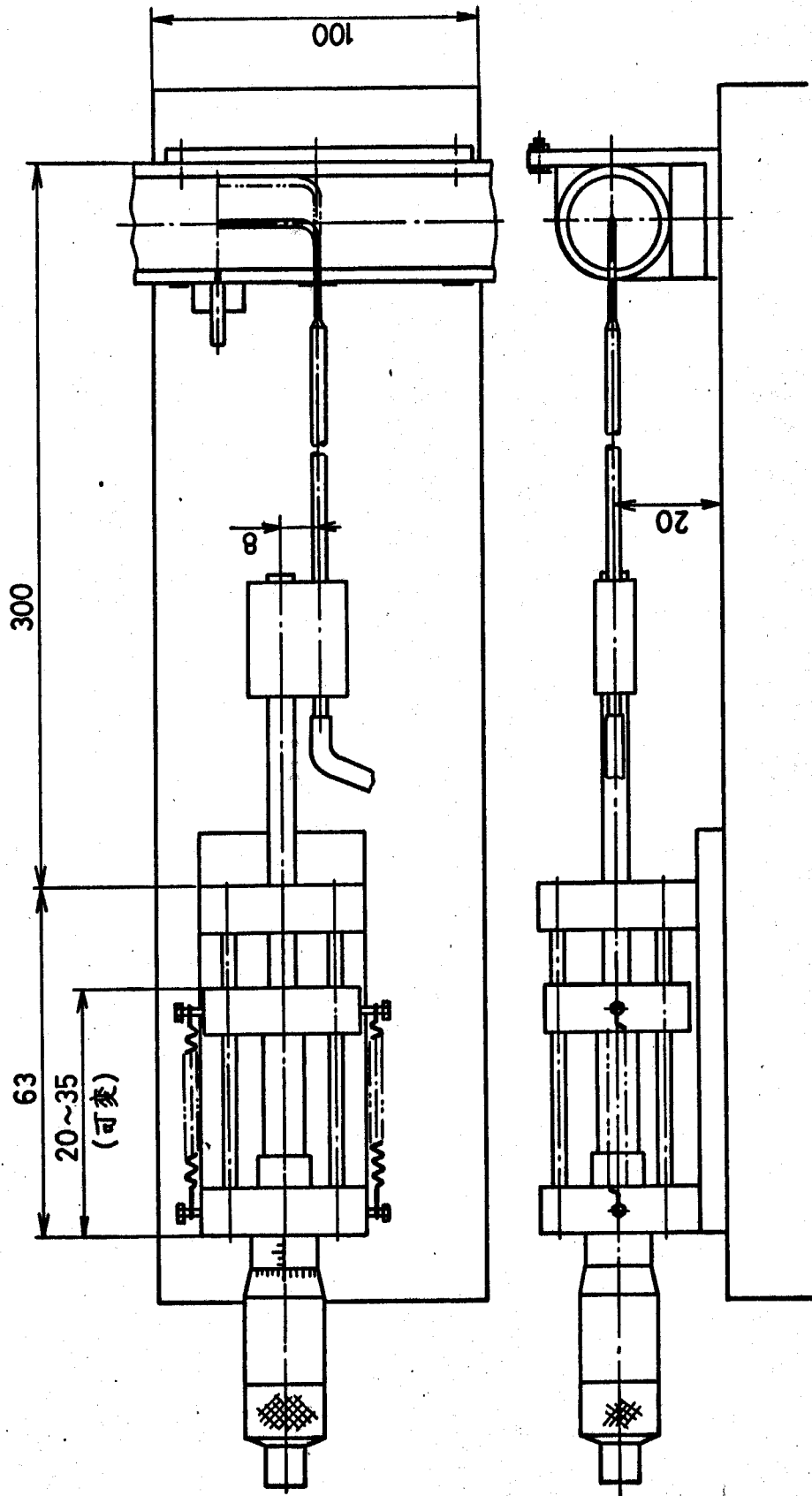


図4-10 トラバース装置略図

(単位 mm)

イクロメータ装置)を図4-10に示す。

測定はいわゆる全圧管形のピトー管および壁面に設けたいわゆる静圧孔(0.5mmφ)を使用して行い、その差圧をニ液式差圧マノメータ(水-モノクロルベンゼン(試薬特級, 20°Cにおける密度1.1063g/ml)^{*})により計測した。非圧縮性流体の場合、圧力は一般には互いに垂直な3方向の応力の平均値の逆符号に一致するとは限らない。(ニュートン流体ではかならず一致する。)これは溶液のレオロジ的挙動に依存する。しかし希薄高分子溶液のレオロジ的挙動を比較的よく表すと考えられているレオロジ方程式(4.10)によれば、単純すり流動下ではずりの方向(面

* t°Cにおける密度d(g/ml)は

$$d = 1.12782 - 1.0664 \times 10^{-3}t - 0.2463 \times 10^{-6}t^2 \\ - 0.53 \times 10^{-9}t^3 \pm 0.0001 \quad (0 < t < 40)$$

International Critical Tables of numerical data,

Physics, chemistry and technology による。

)と垂直な方向に偏差応力は出現しないことがわかる。また一般に静止壁面付近の流れは局所的に単純な流動場を形成していると考えてよい。さらに実験的に管内流において、合応力 T_{rr} は半径方向でほとんど変化しないことが判明したので、管内流の場合のように流れ場が静止壁とほぼ平行でそれに垂直方向の運動が微小の際には、静止壁の穴により圧力が計測されるものと考えてもおおよそさしつかえないであろう。(孔を介しての測定自身に起因する影響、誤差も若干存在するが、いわゆる圧力測定に及ぼすその誤差は一般には T_{zzw} (あるいは $T_{zzw} - T_{rrw}$) の値よりかなり小さいものと考えられ、しかも多くはみかけ上動圧を大きく指示する傾向にあるものと推定されているので、以下本論文ではこの影響については省略して取り扱う。) したがって上述の測定される差圧は $(p_0 - p_\infty)$ を意味している。(なお壁面における r 方向垂直応力の逆符号の値を p_w^* (いわゆる圧力) と記せば

$$\begin{aligned}
 P_0 - P_\infty + T_{zz\infty} \\
 = P_0 - P_w^* + (T_{zz} - T_{rr})_\infty + \int_{D/2}^r \frac{\partial(T_{rr} - P)}{\partial r} dr \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

となるので(ただし r は円管の中心からの距離で、積分範囲は壁面よりピット - 管軸相当位置を意味する)、せん断流や境界層内の流れのように $\partial(T_{rr} - P)/\partial r \approx 0$ とみなせて、式(4.17)の右辺の積分項を省略できる場合には、 $P_0 - P_w^*$ を測定圧、 $(T_{zz} - T_{rr})_\infty$ を第1法線応力差の寄与とみなすことができる。他方式(4.10)によれば $T_{rr\infty} \approx 0$ であり、 $T_{zz\infty}$ が第1法線応力差を与えるので、本文の通り $(P_0 - P_\infty)$ を測定圧、 $T_{zz\infty}$ を第1法線応力差の寄与とみなすこともできる。そのため、いずれの立場を採っても測定値処理課程は全く同一となる。(現在のところいずれの解釈が適切であるかは不明である。) 乱流場における変動速度の影響はニュートン流体の場合と大差がないと考えられるので、後述の検討では省略する。

4.5 実験結果および考察

4.5.1 予備実験結果

使用した円管に対する管摩擦係数測定結果 (Re : 管径基準レイノルズ数) を水道水の場合について図 4-11 ($D=16.15\text{mm}$), 図 4-12 ($D=8.62\text{mm}$) に, セパラン水溶液の場合について図 4-13 ($D=8.62\text{mm}; 5\text{ppm}, 10\text{ppm}$) に示す。乱流域でセパラン水溶液の場合抵抗減少効果の生じていることが判明する。

4.5.2 ピト-管係数を 1 とみなせるか否かの検定

式(4.16)の左辺は測定場所の応力, 測定圧と動圧との比を示しているので, 右辺がピト-管特性を与える係数(以下ピト-管係数と称す)を意味している。水の場合には $\lambda=0, T_{zz\infty}=0$ であるので, ピト-管特性は主として粘性だけに帰因する。なお主流の速度こう配の影響は応力 $T_{zz\infty}$ で大略評価しうるもの(一様流中ならば $T_{zz\infty}=0$ である), および慣性項の効果の 2つが主であり, このうち後者は測定位置のみかけ

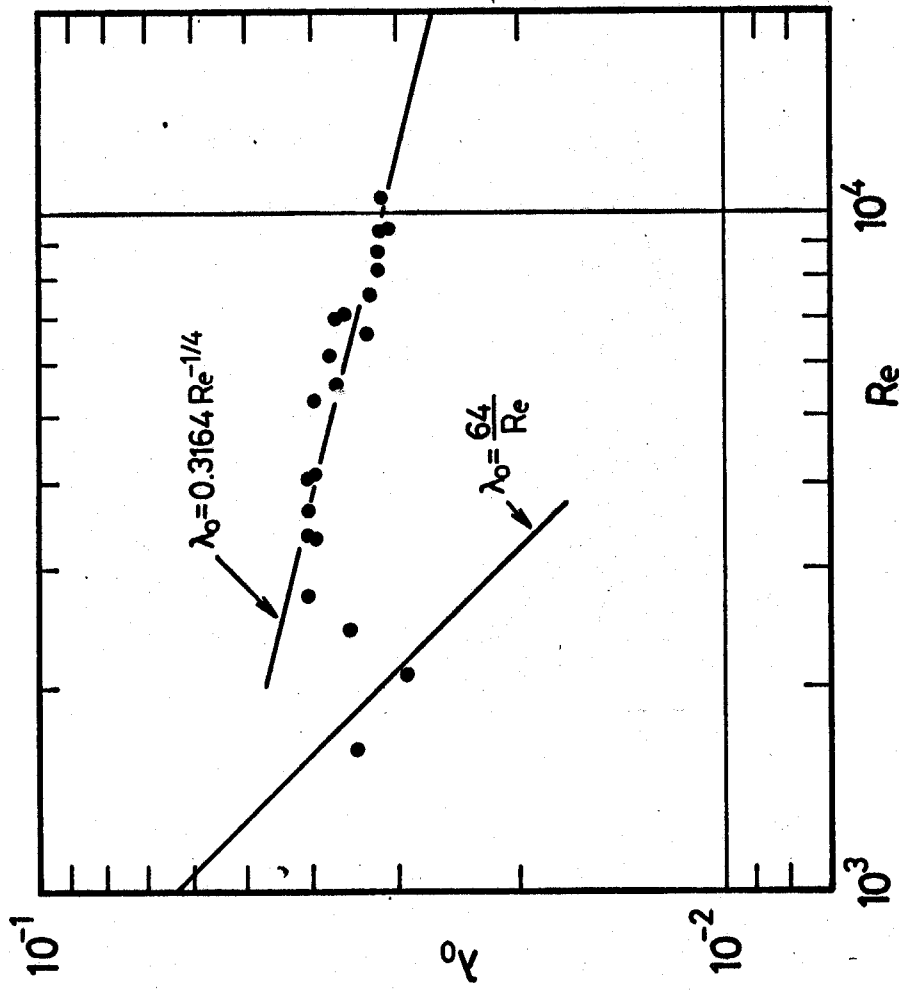


图4-11 管摩擦系数(D=1.615 cm, 水道水)

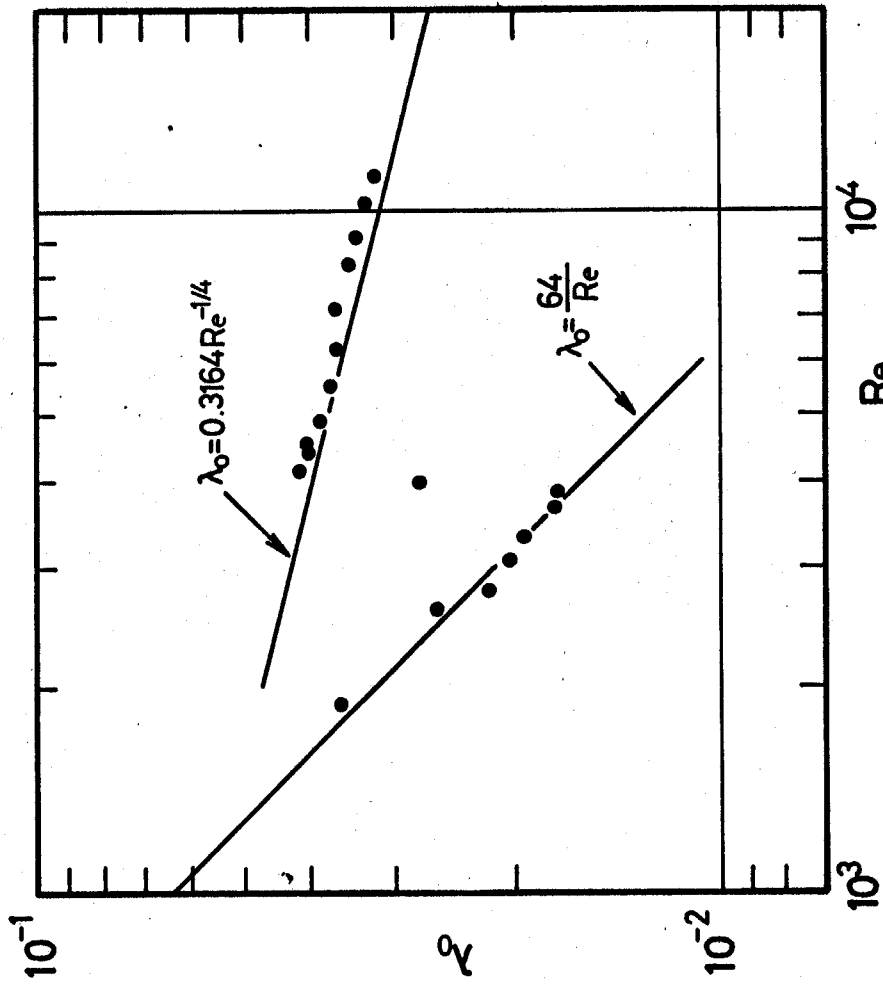


图4-12 管摩擦系数(D=0.862 cm, 水)

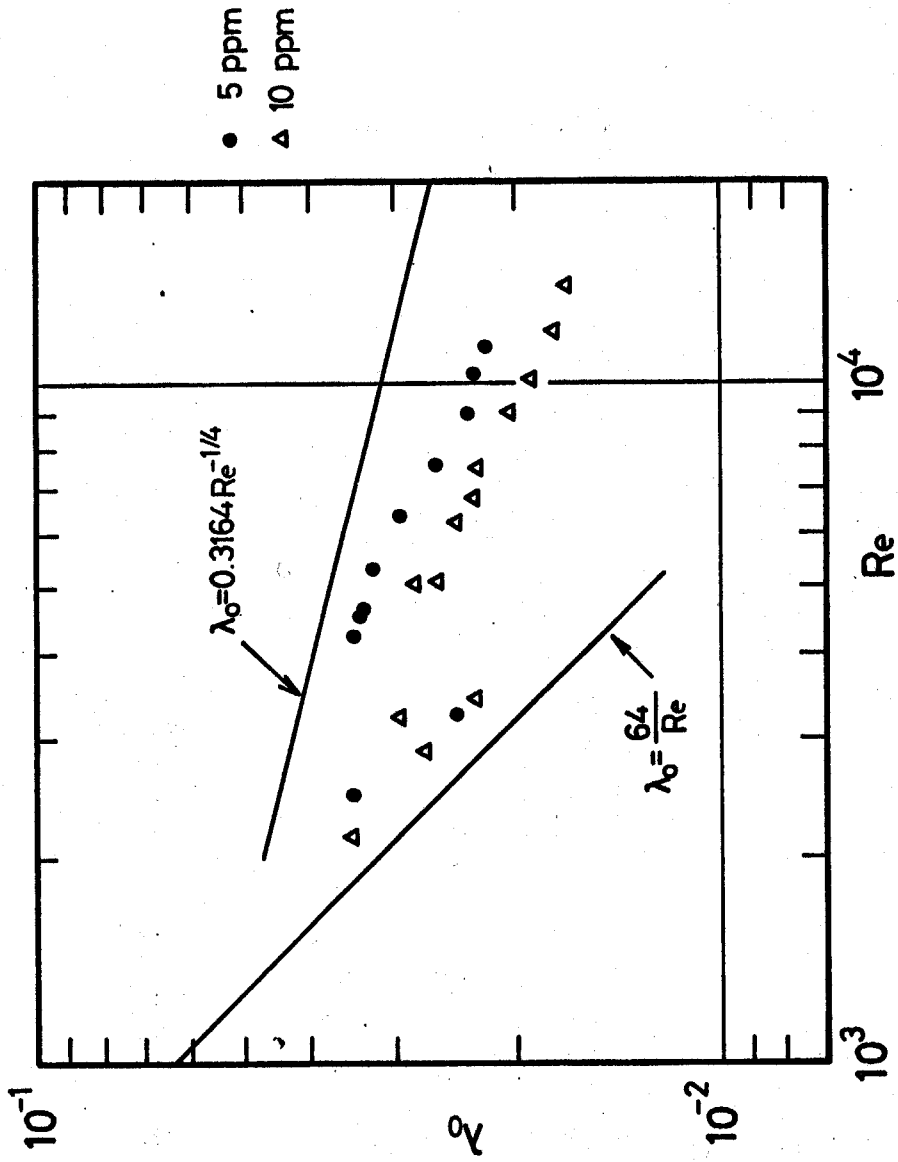


图4-13 管摩擦系数(D=0.862 cm, SEPARAN 水溶液)

上の移動を意味するものと解釈できるが，式(4.16)を導くに当っては，この後者の効果に関する限り溶液の場合とニュートン流体の場合とで大差がないと推定されるので，本文中の仮定の通り後者の効果については省略した。そこで式(4.16)において $\varepsilon_1=0$ と仮定した結果の水道水に対する無次元速度分布（無次元速度 u^+ vs. 無次元距離 y^+ (\equiv 壁からの距離 $\cdot u^*/\nu$)) を図4-14に示す。ただし u^* は摩擦速度であり， $u^+ =$ 局所速度 $/ u^*$ である。この速度分布により積分して得た流量は重量法により計測した流量より若干大きく，その値は +3% 以内である。

つぎに溶液の場合について， $T_{zz\infty}=0$ かつ式(4.16)の右辺を1とみなした場合に得られるみかけの速度分布を図4-15, 4-16に示す。この図において遷移層におけるみかけ速度はニュートン流体の場合（近似的に $u_a^+ = -3.05 + 5.0 \ln y^+$ で示される）に比して小さく，かつ層流底層付近で $u_a^+ \approx y^+$ は成立しておらず（単純すり流動に近ければ $u^+ \approx y^+$ であり，レーザによる測定

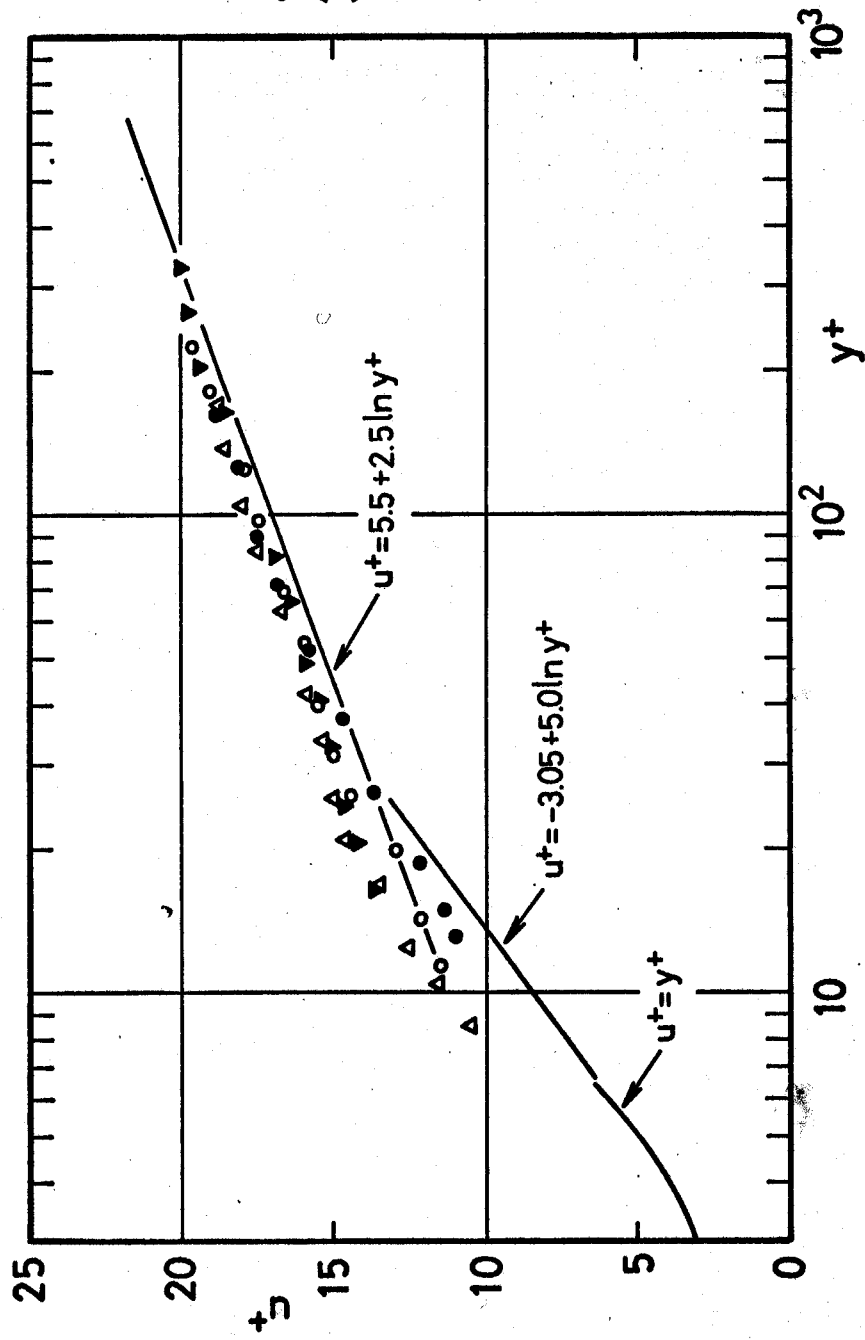


图4-14 乱流无次元速度分布(水道水)

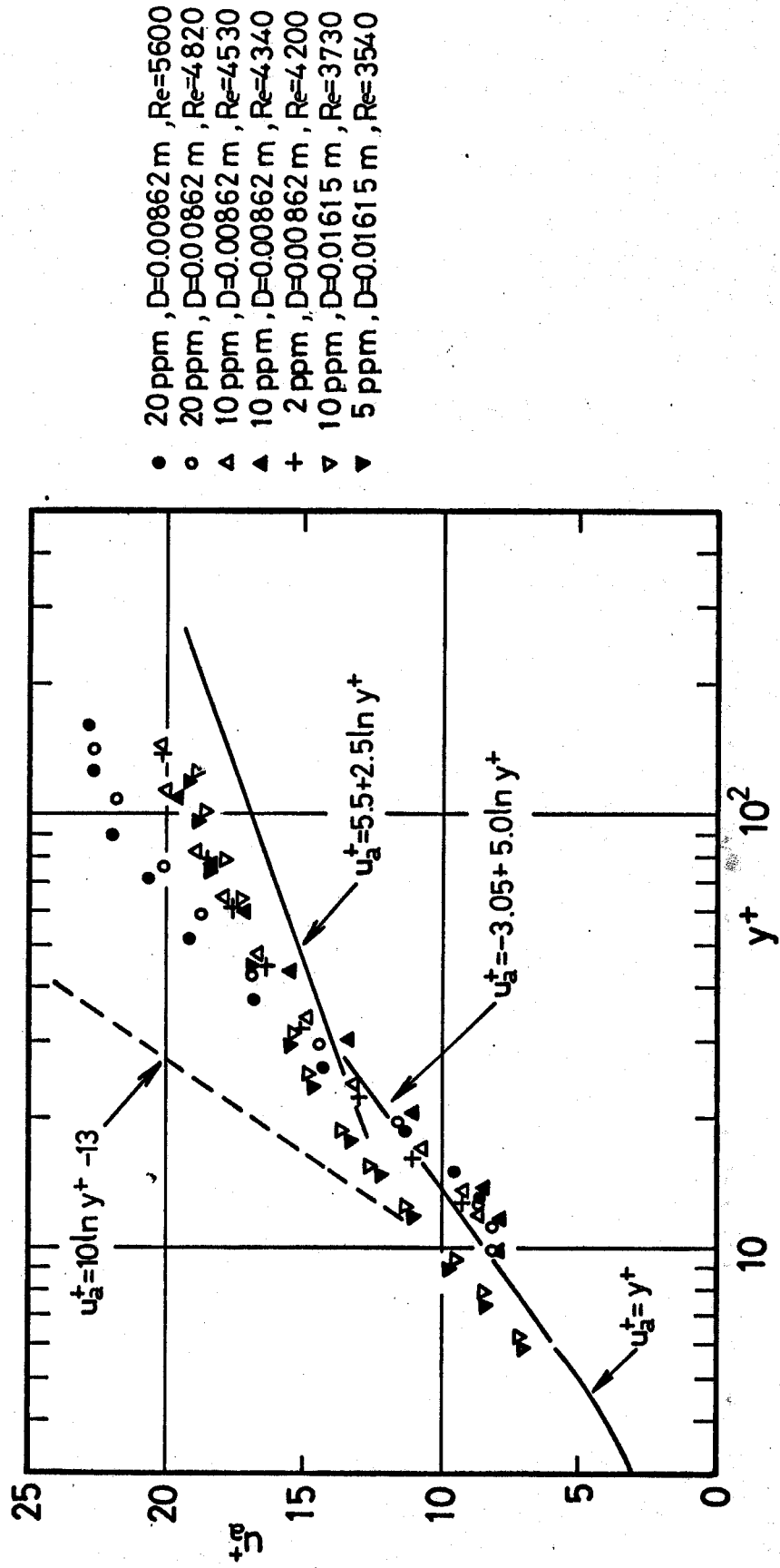
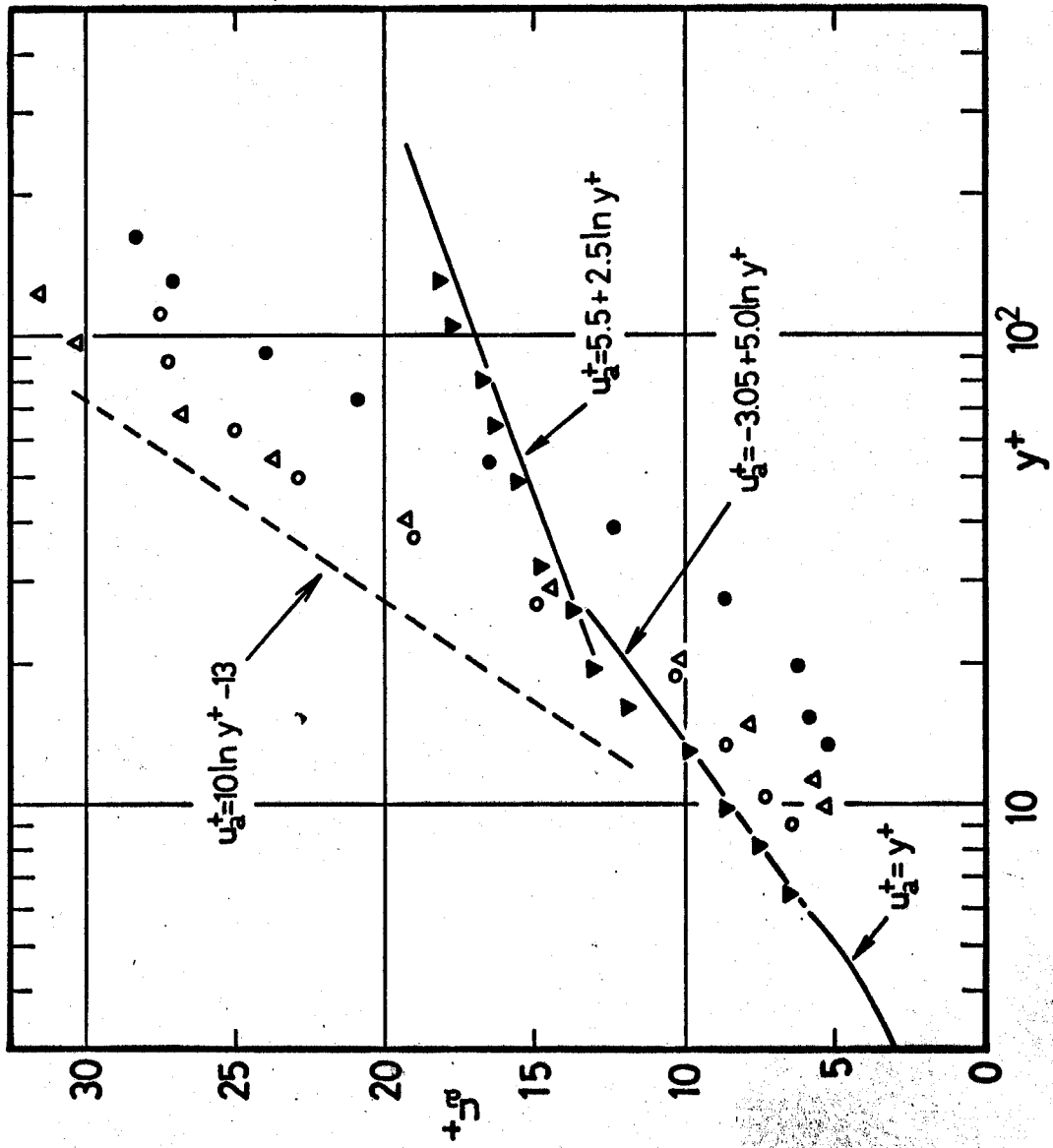


図4-15 みかけの無次元速度分布(SEPARAN水溶液)



- 20ppm , D=0.00862m , Re=7250
- 10 ppm , D=0.00862m , Re=4200
- △ 5 ppm , D=0.00862m , Re=5140
- ▼ 5 ppm , D=0.01615 m , Re=4080

図4-16 みがけの無次元速度分布(PEO 18水溶液)

(78) などにより検証されている), このことは少なくとも $T_{zz\infty}$ を省略できないことを意味している. そこで法線応力 $T_{zz\infty}$ を $T_{zz\infty} \approx 2\lambda |dU_{\infty}/dr|^s$, ($s=2.0, \lambda=2 \times 10^{-6} \text{ kg/m}$) として補正した 1 例を図 4-17 に示す. この例のように応力 $T_{zz\infty}$ の補正だけでは一般には $u^+ \approx y^+$ の層流底層における関係を得ることはほとんど期待できず, 他方みかけの速度分布による流量は真の流量より 10% 程低くでているが, 応力 $T_{zz\infty}$ の補正だけでは流量は 1% 程しか校正されない. このことは溶液の粘弾性的挙動の結果, すでに存在する応力 $T_{zz\infty}$ の影響よりも, ポットー管特性すなわち式(4.16)の右辺の効果か, 速度決定に大きな影響を与えていることを予測させる. すなわち希薄高分子溶液ではポットー管係数を 1 と仮定することには無理が感じられる.

4.5.3 ポットー管係数について

前述の 4.5.2 節の結果として生じている, みかけの平均流速すなわちみかけの速度より積分して得られた平均流速と真の平均流速との差の, 真の値に対す

る比を表 4.1 に示す。この表に示す通り，溶液の粘弾性的挙動の結果，みかけの平均流速が小さくなることが判明する。なお溶液の相対粘度測定結果を図 4-18 に示す。そこで式(4.16)により，速度を求めた結果を数例の場合について以下に示す。この場合，物性を示す s, λ を測定により決定する必要がある。しかし本実験結果のように壁面すり速度 ≤ 1500 (1/s)，平均流速 1 ポト - 管半径 ≤ 2000 (1/s) であるような比較的低すり速度範囲における希薄高分子溶液の物性値測定はかなり困難なため，それよりも高いすり速度下における物性値測定結果（第 2 章等）からの推定値を用いた。なお s 値はかならずしも明確でないため，これを若干変化させて表示した。ただし $2\lambda \approx$ ポト - 管外径とみなし， $\tau_0 \equiv 2\lambda 10^{35}$ とし， $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ としては式(4.14), (4.15) による値の平均値を使用した。この結果の無次元速度分布を図 4-19 ~ 4-23 に示す。

これらの図によると，第 1 に壁面近傍におけるみかけ速度の過小評価が改良されている。第 2 に Rollin

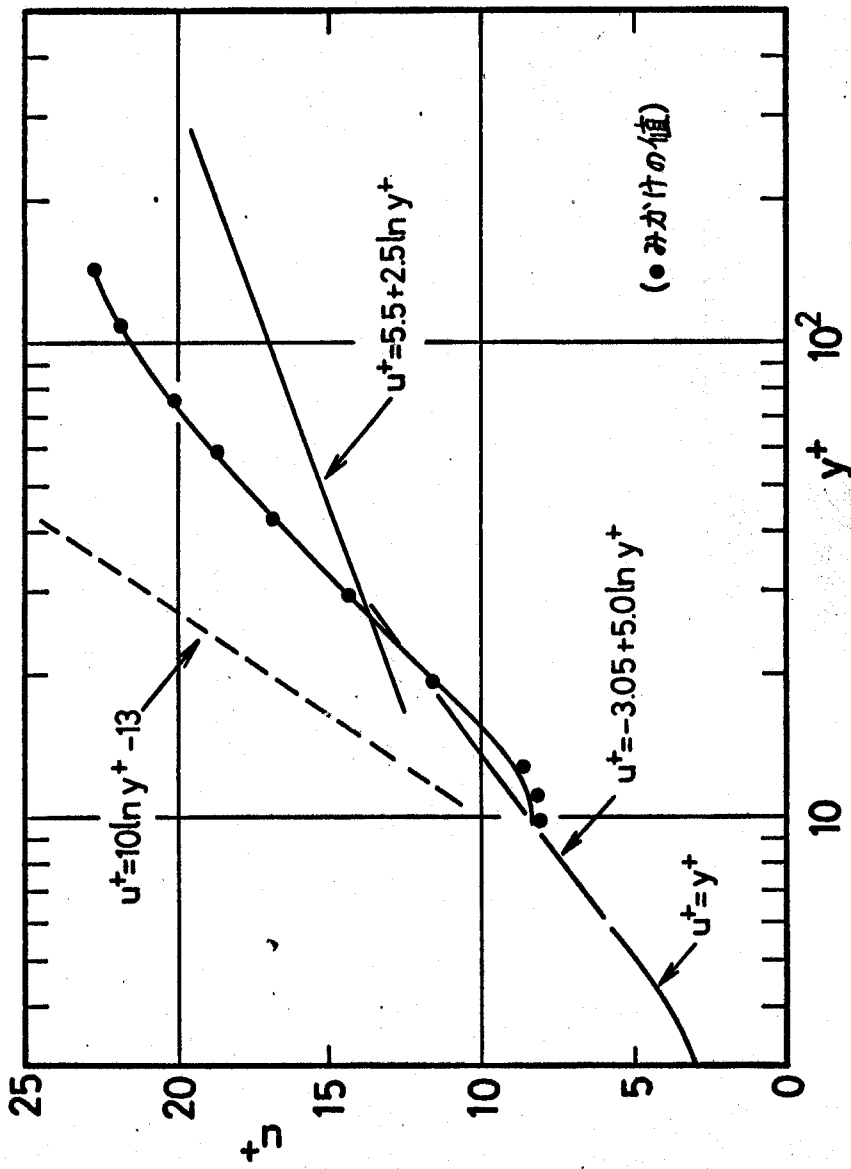


図4-17 SEPARAN 20ppm溶液の速度分布(Re=5600)

表 4.1 (a)

試料	水道				PEO18 水溶液				
	濃度 ppm	安定剤	レイルス数 Re	管径 D m	ピト管径 mm	液温 °C	摩擦速度 u^* m/s	$(V_a - V)/V$ %	
i	5	10	20	5	10	20	5	5	
	サンボックス								
	4960	7030	10600	4560	5140	4210	7250	4080	
	0.01615				0.00862	0.00862			0.01615
	0.8				0.7	0.7			0.8
	239	200	21.3	150	12.0	132	14.3	25.5	
	0.0194	0.0285	0.0403	0.0430	0.0356	0.0314	0.0446	0.0143	
	1.1	1.2	1.7	1.7	-19.6	-128	-338	-130	
	τ_0	N/m ²							20
	S								20
ii	$(V_a' - V)/V$ %								
	τ_0	N/m ²							-1.7
	S								30
	$(V_a' - V)/V$ %								15
	$(V_a' - V)/V$ %								1.5
$(V_a' - V)/V$ %								-18.2	
$(V_a' - V)/V$ %								-21	

V_a : みかけの速度より求めた平均速度

V : 平均速度

V_a' : 補正值より求めた平均速度

表 4.1 (b)

試料		SEPARAN 水溶液									
濃度 ppm	2	10	10	20	20	5	10	20	5	10	10
安定剤	本										
レイノルズ数 Re	4200	4530	4820	5140	5600	4570	4340	4820	3540	3730	
管径 D mm	0.00862										
ピット-管径 mm	0.7										
液温 °C	14.0	15.3	14.7	14.6	13.5	11.7	12.0	11.8	19.1	20.0	0.8
摩擦速度 u^* m/s	0.0380	0.0386	0.0380	0.0428	0.0446	0.0430	0.0410	0.0412	0.0152	0.0159	
$(V_a - V)/V$ %	-5.5	-7.3	-8.2	-6.6	-6.3	-10.0	-10.5	-11.2	-3.5	-2.4	
i	τ_0 N/m ²				6			6		4	
	S				20			20		20	
	$(V'_a - V)/V$ %				1.3			-1.0		-0.7	
ii	τ_0 N/m ²				8			8		4	
	S				1.6			1.6		1.6	
	$(V'_a - V)/V$ %				-2.1			-5.6		-1.8	

V_a : みかけの速度より求めた平均速度

V : 平均速度

V'_a : 補正值より求めた平均速度

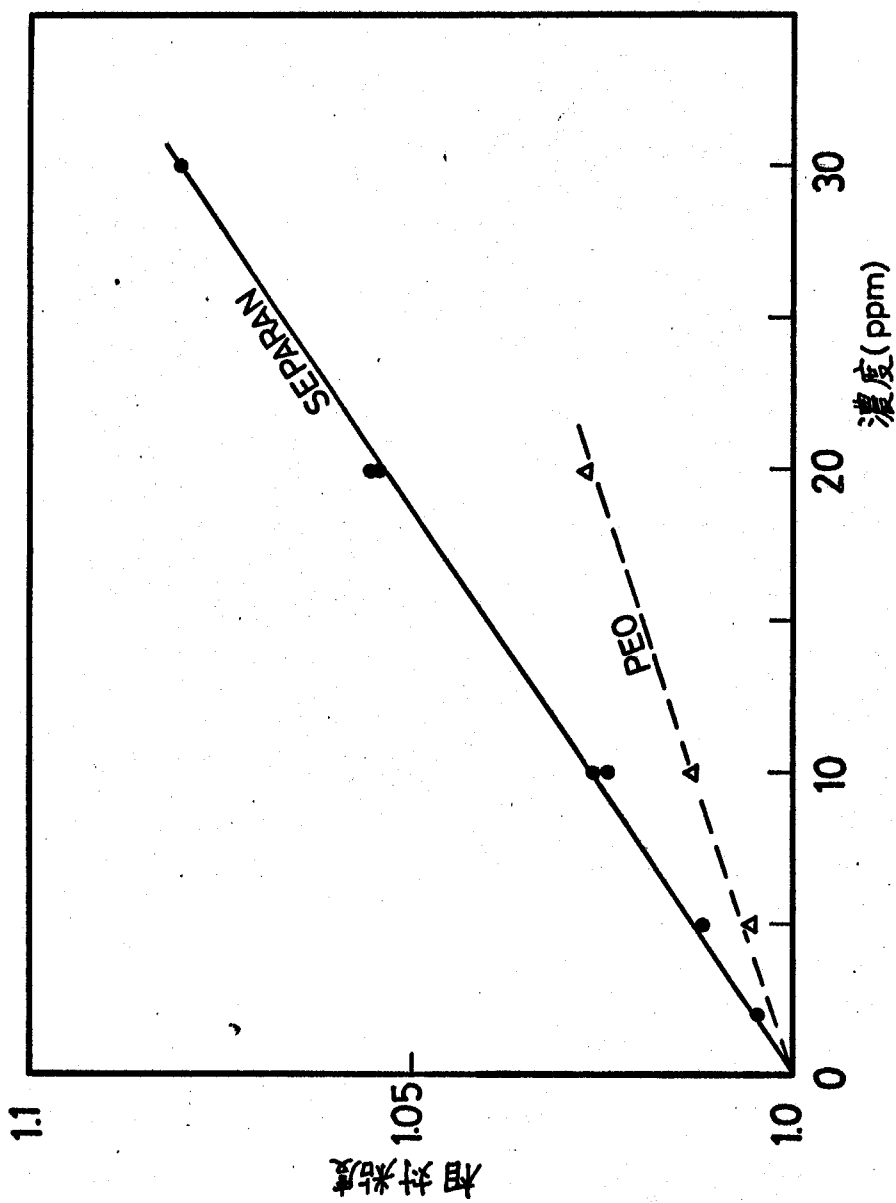


图4-18 相对粘度

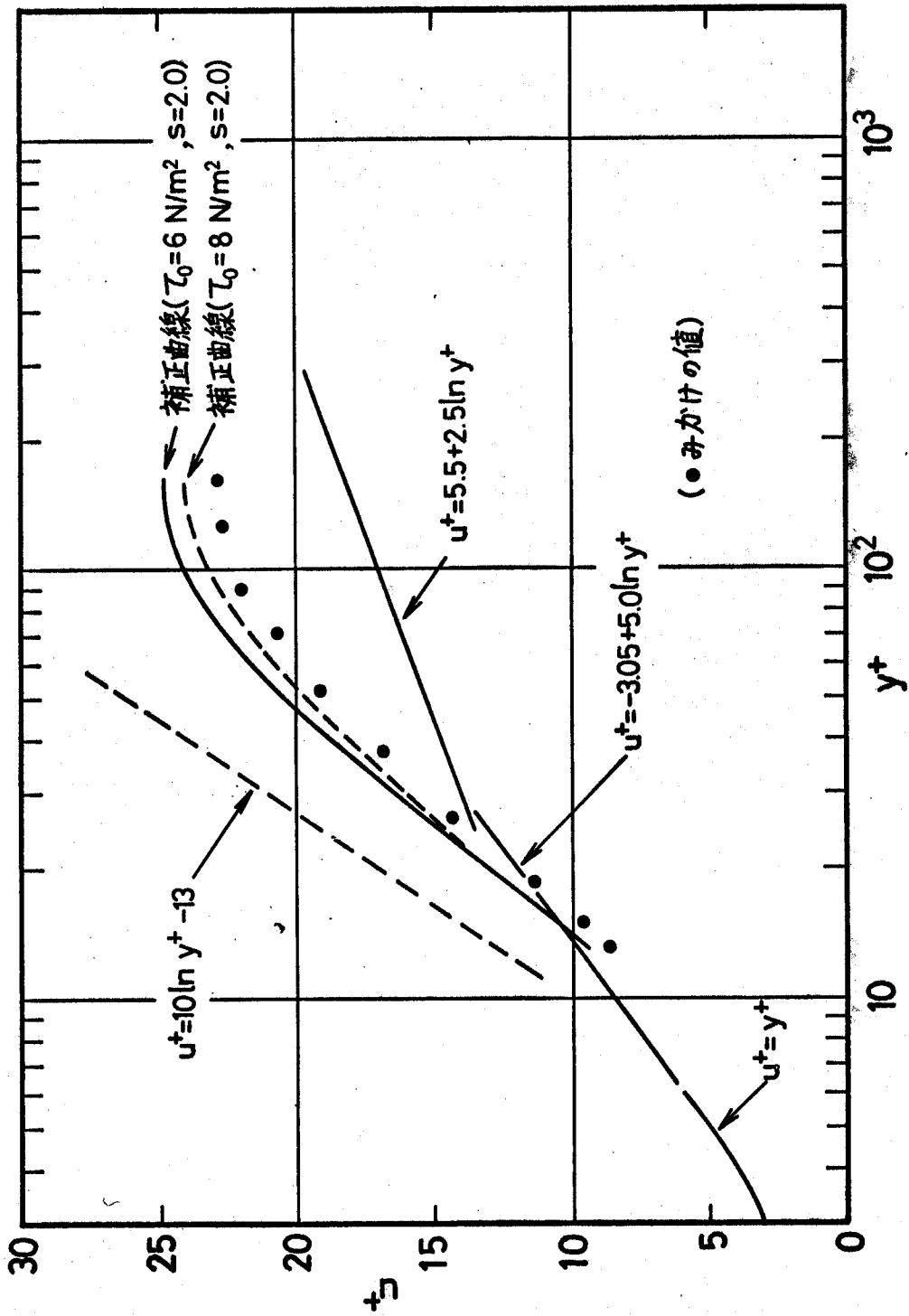


図4-19 SEPARAN 20ppm 溶液の速度分布 ($Re = 5600$, ピット管径 = 0.7mm)

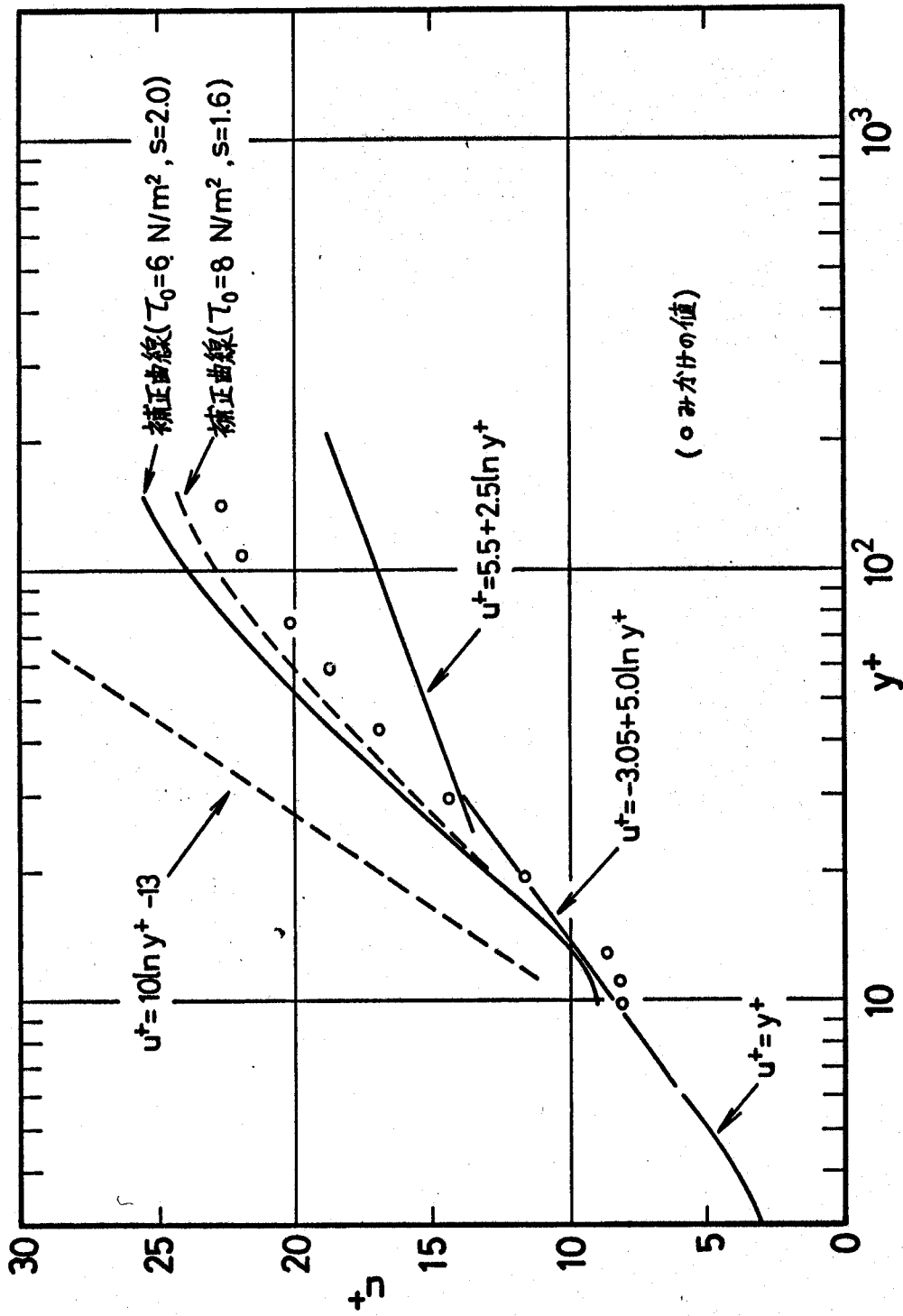


図4-20 SEPARAN 20ppm 溶液の速度分布 ($Re=4820$, ピット-管径=0.6mm)

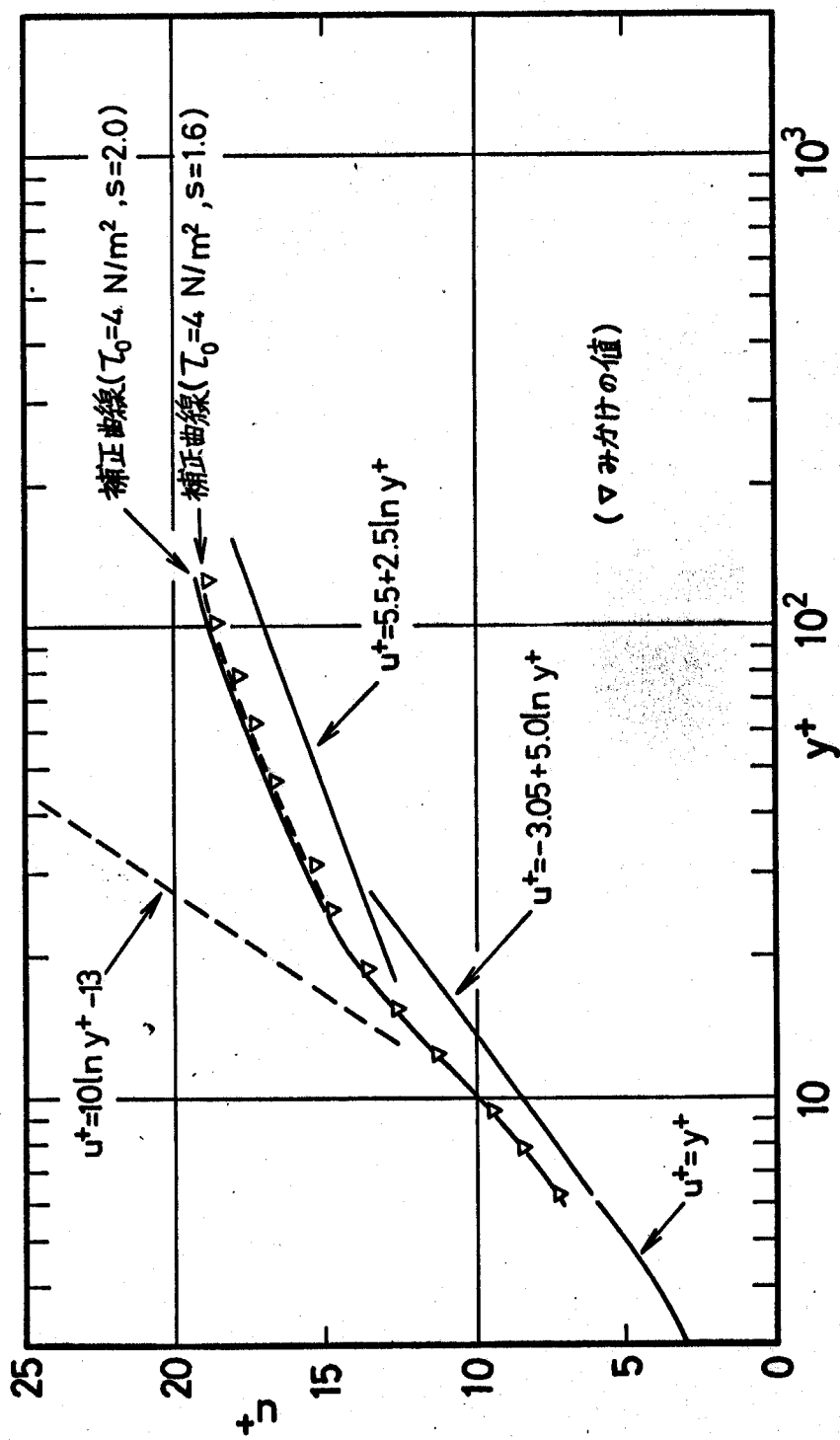


図4-21 SEPARAN 10ppm 溶液の速度分布 ($Re = 3730$)

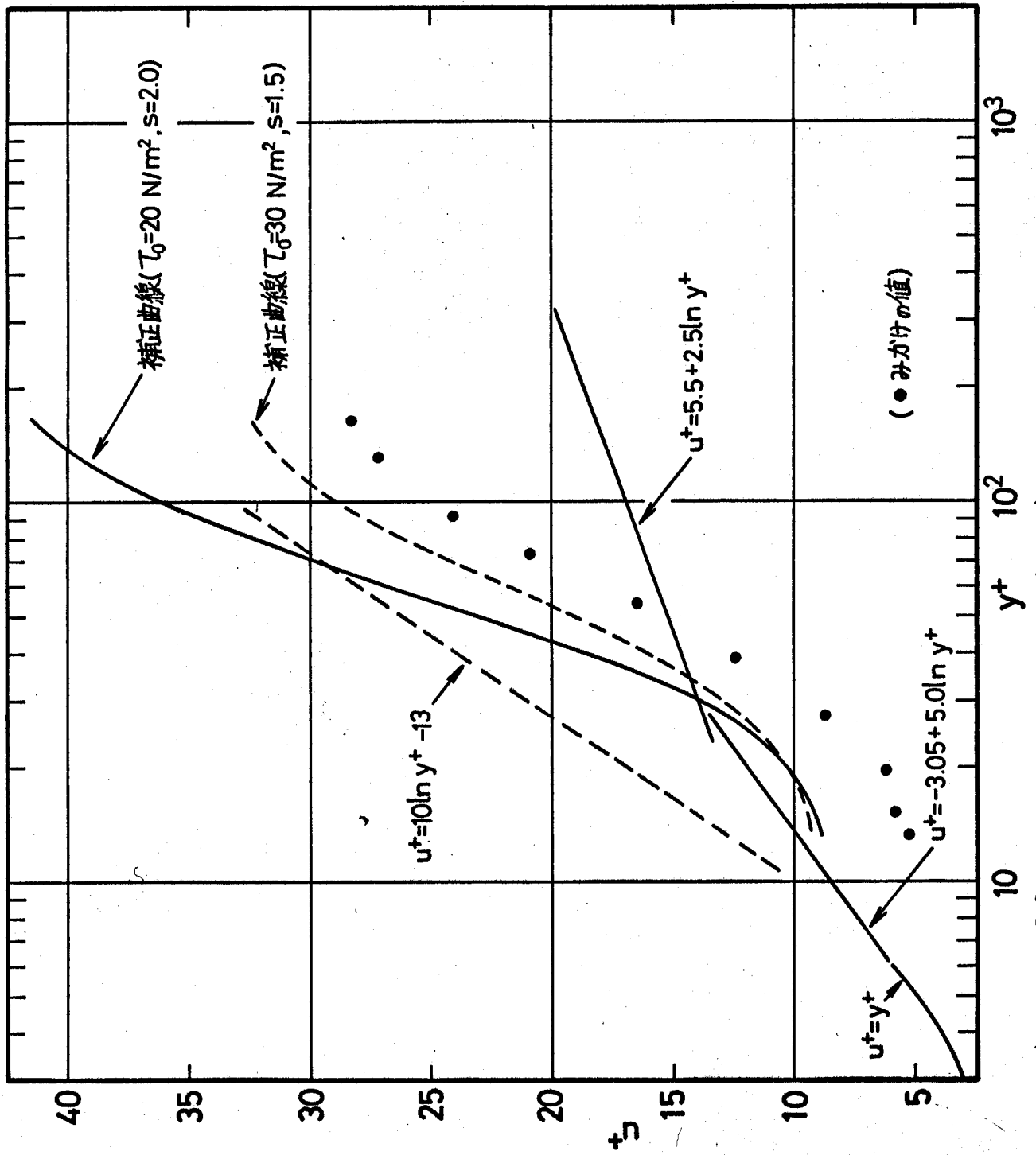


図4-22 PEO18 20ppm溶液の速度分布 ($Re=7250$)

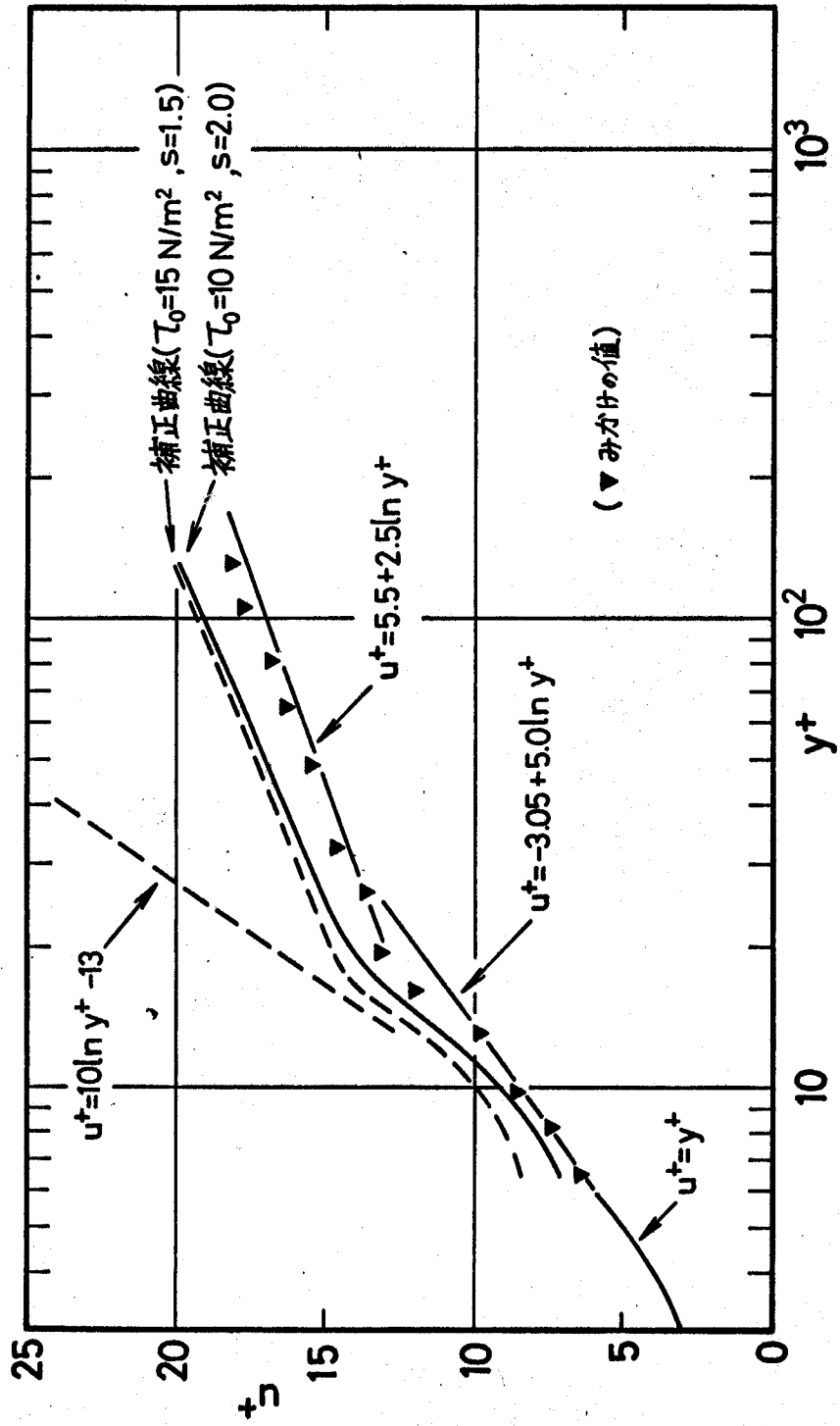


図4-23 PE018 5ppm 溶液の速度分布(Re=4080)

ら（光学的測定に基づいている）によって報告⁽⁷⁵⁾されているように乱流核において $u^+ = 2.5 \ln y^+ + \text{定数}$ の関係が成り立つことが、ほぼ明確な乱流核が存在する図4-21, 4-23の場合において確かめられる。第3に遷移層下端における一般則 $u^+ = A_0 \ln y^+ - B_0$ ⁽¹⁰²⁾⁽¹¹⁵⁾ が成立することが図4-19 ~ 4-23より予測される。（ A_0, B_0 値は文献により異なり、文献(115)によれば $A_0 = 10, B_0 = 13$ 、文献(102)によれば $A_0 = 11.7, B_0 = 17.0$ である。）さらにこの速度分布によって定まる平均流速を求めて、重量法による値と比較した結果を表4.1中に示す。これによるとみかけ速度による場合に比してその一致はかなりよいものと考えられる。

以上によりピト-管係数として式(4.16)を用いるとかなりよい結果が得られることが判明した。

4.6 結論

ピト-管法により、希薄高分子溶液の速度測定を行う場合、溶液の粘弾性的挙動が、ピト-管特性に大きな影響を与えるということが判明した。

この影響は本文中の式(4.16)のような近似式でおおよそ表示できると思われる。

第5章 結論

希薄高分子溶液は著しい乱流摩擦抵抗減少効果を呈するため学問的興味に加えて、摩擦損失の減少など実用上の見地から工業的にも注目されている。しかしながら希薄高分子溶液の流動現象の内部機構はいまだ不明の点が多く、そのため流れの可視化等各種の計測が行なわれているが、それに伴って計測上種々の問題点が生じている。

そこで本研究では、希薄高分子溶液を対象とし、その流動の内部機構の解明等の際の流動計測上の問題点のうち、熱線流速計およびピトー管法による速度測定上の問題点の明確化、解明に主眼を置き、あわせてその定量的評価の際に必要な法線応力差の、新測定法を提起、確立しようとしたものである。

第1章「緒言」においては本研究の目的ならびに従来の研究について概観し、さらに本研究の概要を述べた。

第2章「希薄高分子溶液の法線応力差測定法」に

おいては、希薄高分子溶液の法線応力差の新測定法を述べ、法線応力差測定に及ぼす表面張力、幾何学形状の影響等を解析的に検討し、実験的検討により法線応力差測定範囲等を示した。

第3章「円柱周りの速度場および温度場」においては、希薄高分子溶液中における熱線流速計の使用の可否に関連する基本的問題として、円柱周りの非圧縮性二次元定常層流の速度場、温度場を取り上げ、解析的、数値的に水および希薄高分子溶液の速度場、温度場を求めて、溶液の層流域における抗力増加、熱伝達減少等の異常現象を既存の実験結果とあわせて解析的に明確にし、熱線を使用する際に応答特性の異常性に十分注意を喚起すべきことを指摘した。

第4章「ピトー管法による流速測定」においては、希薄高分子溶液のピトー管法による速度測定に際して、従来の立場では処理し得ないような異常性を呈することを実験的に指摘し、ピトー管特性を探子挿入による流れ場の局所的な変化を考慮した新しい観

点により解析し，速度測定の実験結果と比較検討して，ピトー管挿入による流れ場の局所変化に起因する溶液の粘弾性挙動のピトー管特性に与える影響を明確にした。

第5章「結論」においては，本研究で得られた結論を総括して述べた。

付録 レオロジ方程式概説

A1 レオロジ方程式

一般のレオロジ方程式に対しては、物理的および数学的な観点から次のような性質が要求される⁽²⁷⁾。

(1) 排除原理 (Principles of exclusion)

1.1 履歴の原理 Principle of Heredity

時刻 t における物質の挙動は時刻 t までの物質の履歴によって規定される。

1.2 近傍の原理 Principle of Neighborhood

時刻 t において空間の点 X を占める物質の点 X の挙動は X の任意の近傍の点の挙動により規定される。

決定の原理 Principle of Determinism

時刻 t において空間の点 X を占める物質の点 X の挙動は X の任意の小さい近傍の点の履歴により決定される。

1.3 電磁構成の原理 Principle of Electromagnetic

Constitution

時刻 t において空間の点 x を占める物質の点 X の挙動は時刻 t 以前の電磁場の履歴に影響される。

1.4 均等出現の原理 Principle of Equipresence

特定の物質に対するある 1 つのレオロジ方程式に出現する変数は、その物質に対するすべてのレオロジ方程式中に出現すべきである。

1.5 統合の原理 Principle of Unification

特定の物質を特徴づけるレオロジ変数はすべての物質に対するレオロジ方程式中に出現すべきである。

1.6 散逸レオロジ変数 Dissipative Constitutive Variables

エントロピ生成式中に出現する場の量は単一散逸系の基本散逸レオロジ変数を構成する。

(2) 座標不変性 Coordinate Invariance

レオロジ関数はその変数の空間の点に関する絶対テンソル関数である。(63)

(3) 空間不変性 (物質客観性) Spatial Invariance

(Material Objectivity)

レオロジ方程式は空間座標の剛体運動に対し不変である。

(4) 物質不変性 Material Invariance (Material Isomorphism)

完全直交系をなす，物質座標のある変換に対して不変なレオロジ方程式は，その変換系に関して物質対称性を有する。

(5) 次元不変性 Dimensional Invariance

レオロジ方程式は無次元係数および物質定数の数に依存する。

(6) 一致の要求 Requirements of Consistency

レオロジ方程式は質量，運動量，エネルギー，電磁性の基本原理（熱力学法則等）と一致しなければならない。

さて一般のレオロジ方程式に対しては前記のような不変性等が要求されるわけであるが，まず条件(2)によりレオロジ方程式はテンソル形であることが必要となり，そのテンソルの形式は条件(3)により拘束

されることになる。ここで対象とする物質が等方性であることを仮定すると、変形に関する量で条件(3)を満足するようなテンソル量および演算子は、過去の時刻における値を含む量としては (i) Cauchy の変形テンソル c_{ij} , (ii) Finger の変形テンソル c^{-1ij} , (iii) c_{ij}, c^{-1ij} の不変量の関数および c_{ij}, c^{-1ij} や Green の変形テンソル等より導れる各種のテンソル量等がある。それに対して現時刻の関数として出現するものは (iv) 計量テンソル g_{ij} , (v) 変形速度テンソル e_{ij} , (vi) 対流微分演算子⁽⁶²⁾ $\frac{\delta}{\delta t}$, (vii) 応力テンソル T^{ij} , (viii) (iv) ~ (viii) の混合演算およびその不変量等がある。(テンソル形は反変, 共変, 混合とも可.)

A2 粘弾性流体に対するレオロジ方程式

粘弾性流体のレオロジ方程式として、現在までに提唱されているものを取り上げてみると、大々く分けて2つの型に分類できる。その1は積分形と称されるものであり、粘弾性流体の記憶効果等を考慮に入れたもので、表A2.1に示す。その2は微分形と称

されるもので，代表的なものを表 A2.2 に示す。ただし 2 階の任意のテンソル a^{ij}, a_{ij} に対して Jauman 微分 $\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}t}$ と対流微分 $\frac{\delta}{\delta t}$ の間に，

$$\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}t} a^{ij} = \frac{\delta}{\delta t} a^{ij} + e^i m_a m^j + e^j m_a m^i$$

$$\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}t} a_{ij} = \frac{\delta}{\delta t} a_{ij} - a_{im} e^m_j - a_{mj} e^m_i$$

の関係があるので，表 A2.2 中の表現は必ずしも原論文中の表現にはよってない。したがって物質定数等の表現が原論文と異なる場合がある。これらのレオロジ方程式についてはすでに多くの人により検討され，実際の流れに対して適用解析された場合も数多くに上っている。しかし実際に測定されている流動特性は単純ずり流動をはじめとする viscometric flow で測定されたものが主であり，そのために参考として単純ずり流動下における応力状態を，各レオロジ方程式について表 A2.3 に示す。表中添字 1 は流動方向を，2 はそれに垂直な方向を，3 は中立方向を示す。

モデル名	方程式	式	関数	物質定数
Lodge	$\tau^{ij} = \int_{-\infty}^t \mu_1 [t-t', \text{II}(t')] \{g^{im}(x)g^{jn}(x)c_{mn}(x, t, t') - g^{ij}(x)\} dt'$ $+ \int_{-\infty}^t \mu_2 [t-t', \text{II}(t')] \{c^{ij}(x, t, t') - g^{ij}(x)\} dt'$		μ_1, μ_2	
Walters	$\tau^{ij} - \mu_1 (e^{im} \tau_m^j + e^{jm} \tau_m^i) + \nu_1 e_{mn} \tau^{mng^{ij}} + \mu_0 \tau_m^{m e^{ij}}$ $= - \int_{-\infty}^t \psi(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} c^{ij}(x, t, t') dt' + 2\eta_0 (-2\mu_2 e^m e^m + \nu_2 e^m e^n m g^{ij})$		ψ	$\mu_1, \nu_1, \mu_0,$ η_0, μ_2, ν_2
Oldroyd-Walter -Fredrickson	$\tau^{ij} = - \int_{-\infty}^t \psi(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} c^{ij}(x, t, t') dt'$		ψ	
WJFLMB	$\tau^{ij} = \int_{-\infty}^t \mu [t-t', \text{II}(t')] \left[\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \{c^{ij}(x, t, t') - g^{ij}(x)\} + \left(\frac{\epsilon}{2}\right) \{g^{im}(x)g^{jn}(x)\} \right. \\ \left. \times c_{mn}(x, t, t') - g^{ij}(x) \right] dt'$ $\text{II}(t') = e^m n(t') e_m^n(t')$ $\mu(t-t', \text{II}) = \eta_0 (\sum \lambda_n)^{-1} \left(\sum \frac{1}{\lambda_n} \cdot \frac{1}{1 + 2\text{II}c^2 \lambda_n^2} e^{-(t-t')/\lambda_n} \right)$			$\epsilon, \eta_0, c, \lambda_n$
BKZ	$\tau^{ij} = 2 \int_{-\infty}^t \left[\mu(t-t', \text{I}, \text{II}) \{c^{ij}(x, t, t') - g^{ij}(x)\} - \mu_2(t-t', \text{I}, \text{II}) \right. \\ \left. \times \{g^{im}(x)g^{jn}(x) c_{mn}(x, t, t') - g^{ij}(x)\} \right] dt'$ $\mu_1 = \frac{3}{4} (\text{I} + \text{II} - 3)^{-1} \psi(t-t') + \frac{21}{4} (\text{I} + 6)^{-1} \psi(t-t') \quad \text{I} = c^{im} m$ $\mu_2 = \frac{3}{4} (\text{I} + \text{II} - 3)^{-1} \psi(t-t') - \frac{21}{4} (\text{I} + 6)^{-1} \psi(t-t') \quad \text{II} = \frac{1}{2} (\text{I}^2 - c^{im} n c^{in} m)$		ψ	

表 A 2.2 (a)

モデル名	方程式	式	関数	物質定数
Oldroyd	$\tau^{ij} + \lambda_1 \frac{\delta}{\delta t} \tau^{ij} + \mu_0 \tau^{mn} e^{ij} - \mu_1 (e^i_m \tau^{mj} + e^j_m \tau^{im}) + \nu_1 \tau^{mn} e^m g^{ij}$			$\lambda_1, \mu_0, \mu_1, \nu_1,$
8-const.	$= 2\eta_0 (e^{ij} + \lambda_2 \frac{\delta}{\delta t} e^{ij}) - \mu_2 e^i m e^{mj} + \nu_2 e^m n e^n g^{ij}$			$\eta_0, \lambda_2, \mu_2, \nu_2, \nu_2$
Sprigs	$\tau^{(n)ij} + \lambda n^{-\alpha} \left\{ \frac{\delta}{\delta t} \tau^{(n)ij} - \varepsilon (e^i_m \tau^{(n)mj} + e^j_m \tau^{(n)im}) + \frac{2}{3} (1 + \varepsilon) e_m l \tau^{(n)lm g^{ij}} \right\}$			$\lambda, \alpha, \varepsilon,$
4-const.	$= \frac{2\eta}{Z(\alpha)} n^{-\alpha} e^{ij}$ $\tau^{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{(n)ij}$			η
Sprigs	$\tau^{(n)ij} + \lambda_1 n^{-\alpha} \left\{ \frac{\delta}{\delta t} \tau^{(n)ij} - \varepsilon (e^i_m \tau^{(n)mj} + e^j_m \tau^{(n)im}) + \frac{2}{3} (1 + \varepsilon) e_m l \tau^{(n)lm g^{ij}} \right\}$			$\lambda_1, \alpha, \varepsilon_1,$
6-const.	$= \frac{2\eta n^{-\alpha}}{Z(\alpha)} \left[e^{ij} + \lambda_2 \left\{ \frac{\delta}{\delta t} e^{ij} - 2\varepsilon_2 e^i m e^{mj} + \frac{2}{3} (1 + \varepsilon_2) e^m n e^n g^{ij} \right\} \right]$ $\tau^{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{(n)ij}$			$\eta, \lambda_2, \varepsilon_2$
Tanner	$\tau^{ij} + \lambda \frac{\delta}{\delta t} \tau^{ij} = 2\mu(\Pi) e^{ij}$ $\Pi = e^m n e^n m$		μ	λ
Coleman-Noll 2nd order fluid	$\tau^{ij} = 2\eta e^{ij} - 4\beta e^i m e^{mj} - 2\gamma \frac{\delta}{\delta t} e^{ij}$			η, β, γ

表 A2.2 (b)

モデル名	方程式	関係数	物質定数
Reiner-Rivlin	$\tau^{ij} = 2\alpha(\text{II}, \text{III})e^{ij} + 4\beta(\text{II}, \text{III})e^i_m e^{mj}$ $\text{II} = e^m_n e^n_m$ $\text{III} = e^l_m e^m_n e^n_l$	α, β	
Bird -Williams -Sprigs	$\tau^{ij} = 2\eta(\text{II}, \text{III})e^{ij} + 2\left\{ \lambda(\text{II}, \text{III}) - 2\beta(\text{II}, \text{III}) \right\} (e^i_m e^{mj} - \frac{1}{3} e^m_n e^n_m g^{ij})$ $- 2\lambda(\text{II}, \text{III}) \left(\frac{\delta}{\delta t} e^{ij} + 2e^i_m e^{mj} \right)$ $\text{II} = e^m_n e^n_m$ $\text{III} = e^l_m e^m_n e^n_l$	η, β, λ	
Dewitt	$\tau_{ij} + \lambda \left(\frac{\delta}{\delta t} \tau_{ij} - \tau_{ime}{}^m{}_j - \tau_{jme}{}^m{}_i \right) = 2\eta e_{ij}$		λ, η
Denn (A)	$\tau^{ij} + \lambda \left(\frac{1}{2} \text{II} \right)^{(s-n-1)/2} \frac{\delta}{\delta t} \tau^{ij} = \mu \left(\frac{1}{2} \text{II} \right)^{(n-1)/2} B_{(1)}^{ij}$ $\text{II} = B_{(1)}^{mn} B_{(1)mn}$		λ, μ, n, s
Denn (B)	$\tau^{ij} = \mu \left(\frac{1}{2} \text{II} \right)^{(n-1)/2} B_{(1)}^{ij} - \lambda \left(\frac{1}{2} \text{II} \right)^{(s-2)/2} \frac{\delta}{\delta t} B_{(1)}^{ij}$ $\text{II} = B_{(1)}^{mn} B_{(1)mn}$		λ, μ, n, s

表 A2.2 (c)

モデル名	方程式	関数	物質定数
White	$\begin{aligned} \tau^{ij} = & \omega_1 B_{(1)}^{ij} + \omega_2 B_{(1)m}^i B_{(1)}^{mj} + \omega_3 \frac{\delta}{\delta t} B_{(1)}^{ij} + \omega_4 B_{(1)}^{mn} B_{(1)mn} B_{(1)}^{ij} \\ & + \omega_5 \frac{\delta^2}{\delta t^2} B_{(1)}^{ij} + \omega_6 (B_{(1)m}^i \frac{\delta}{\delta t} B_{(1)}^{mj} + B_{(1)m}^j \frac{\delta}{\delta t} B_{(1)}^{im}) \end{aligned}$		$\omega_1, \omega_2, \omega_3,$ $\omega_4, \omega_5, \omega_6$
White-Metzner	$\begin{aligned} \tau^{ij} + \frac{1}{3} \tau^m g^{ij} + \frac{\mu(\Pi)}{G} \frac{\delta}{\delta t} (\tau^{ij} + \frac{1}{3} \tau^m g^{ij}) = 2\mu(\Pi) e^{ij} \\ \Pi = e^m n e^m \end{aligned}$	μ	G

表 A2.3 (a)

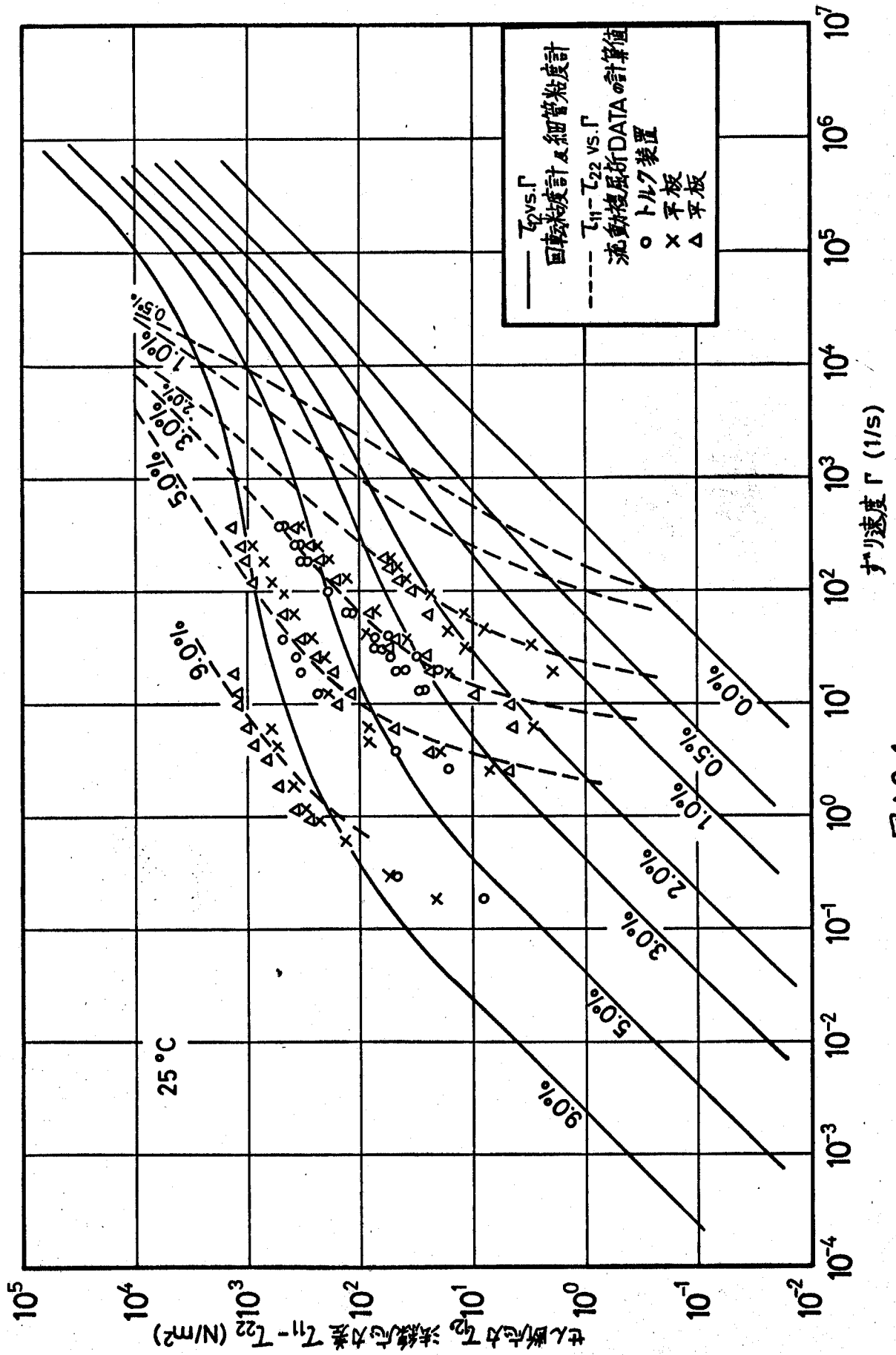
モデル名	
Lodge	$\begin{aligned} T^{12} &= \Gamma \int_0^s \{ \mu_2(s, \Gamma^2/2) - \mu_1(s, \Gamma^2/2) \} ds \\ T^{11} - T^{22} &= \Gamma^2 \int_0^s s^2 \{ \mu_2(s, \Gamma^2/2) - \mu_1(s, \Gamma^2/2) \} ds \\ T^{22} - T^{33} &= \Gamma^2 \int_0^s s^2 \mu_1(s, \Gamma^2/2) ds \end{aligned}$
Walters	$\begin{aligned} T^{12} &= \Gamma (1 - \sigma_1 \Gamma^2)^{-1} (\sigma_2 + \sigma_3 \Gamma^2) \\ T^{11} - T^{22} &= \sigma_4 \Gamma^2 \\ T^{22} - T^{33} &= \mu_1 \Gamma^2 (1 - \sigma_1 \Gamma^2)^{-1} (\sigma_2 + \sigma_3 \Gamma^2) - \eta_0 \mu_2 \Gamma^2 \end{aligned}$ $\begin{aligned} \sigma_1 &= (\mu_1 - \mu_0)(\mu_1 - \nu_1) + 0.5 \mu_0 \nu_1, \quad \sigma_2 = \int_0^s \nu(s) ds \\ \sigma_3 &= (\mu_1 - \mu_0) \int_0^s \nu(s) ds + \eta_0 (\mu_1 - \mu_0)(\nu_1 - \nu_2) - 0.5 \mu_0 \nu_1 \\ \sigma_4 &= 2 \int_0^s \nu(s) ds \end{aligned}$
Oldroyd -Walter -Fredrickson	$\begin{aligned} T^{12} &= \sigma_1 \Gamma \\ T^{11} - T^{22} &= \sigma_2 \Gamma^2 \\ T^{22} - T^{33} &= 0 \end{aligned}$
WJFLMB	$\begin{aligned} T^{12} &= \eta_0 (\sum \lambda_n)^{-1} \Gamma \sum \{ \lambda_n (1 + \Gamma^2 c^2 \lambda_n^2)^{-1} \} \\ T^{11} - T^{22} &= \eta_0 (\sum \lambda_n)^{-1} \Gamma^2 \sum \{ 2 \lambda_n^2 (1 + \Gamma^2 c^2 \lambda_n^2)^{-1} \} \\ T^{22} - T^{33} &= \eta_0 (\sum \lambda_n)^{-1} \Gamma^2 \sum \{ \varepsilon \lambda_n^2 (1 + \Gamma^2 c^2 \lambda_n^2)^{-1} \} \end{aligned}$
BKZ	$\begin{aligned} T^{12} &= \Gamma \int_0^s \nu(s) (1 + \frac{2}{3} \Gamma^2 s^2)^{-1} ds \\ T^{11} - T^{22} &= \Gamma^2 \int_0^s s^2 \nu(s) (1 + \frac{2}{3} \Gamma^2 s^2)^{-1} ds \\ T^{22} - T^{33} &= \Gamma^2 \int_0^s 1.5 s^2 \nu(s) (13 \Gamma^2 s^2 + 12)(2 \Gamma^2 s^2 + 3)^{-1} (\Gamma^2 s^2 + 9)^{-1} ds \end{aligned}$
Oldroyd 8-const.	$\begin{aligned} T^{12} &= \eta_0 \Gamma (1 + \sigma_1 \Gamma^2)^{-1} (1 + \sigma_2 \Gamma^2) \\ T^{11} - T^{22} &= 2 \lambda_1 \eta_0 \Gamma^2 (1 + \sigma_1 \Gamma^2)^{-1} (1 + \sigma_2 \Gamma^2) - 2 \eta_0 \lambda_2 \Gamma^2 \\ T^{22} - T^{33} &= \eta_0 \mu_1 \Gamma^2 (1 + \sigma_1 \Gamma^2)^{-1} (1 + \sigma_2 \Gamma^2) - 0.5 \eta_0 \mu_2 \Gamma^2 \end{aligned}$ $\begin{aligned} \sigma_1 &= \mu_0 (\lambda_1 + \mu_1 - \frac{2}{3} \nu_1) - \mu_1 (\lambda_1 + \mu_1 - \nu_1) - \lambda_1 (\mu_1 - \nu_1) \\ \sigma_2 &= \mu_0 (\lambda_2 + \frac{1}{2} \mu_2 - \frac{2}{3} \nu_2) - \mu_1 (\lambda_2 + \frac{1}{2} \mu_2 - \nu_2) - \lambda_1 (\frac{1}{2} \mu_2 - \nu_2) \end{aligned}$
Sprigs 4-const.	$\begin{aligned} T^{12} &= \eta \{ Z(\alpha) \}^{-1} \Gamma \sum n^\alpha \{ n^{2\alpha} + \frac{1}{3} \lambda^2 \Gamma^2 (2 - 2\varepsilon - \varepsilon^2) \}^{-1} \\ T^{11} - T^{22} &= 2 \lambda \eta \{ Z(\alpha) \}^{-1} \Gamma^2 \sum \{ n^{2\alpha} + \frac{1}{3} \lambda^2 \Gamma^2 (2 - 2\varepsilon - \varepsilon^2) \}^{-1} \\ T^{22} - T^{33} &= \varepsilon \lambda \eta \{ Z(\alpha) \}^{-1} \Gamma^2 \sum \{ n^{2\alpha} + \frac{1}{3} \lambda^2 \Gamma^2 (2 - 2\varepsilon - \varepsilon^2) \}^{-1} \end{aligned}$

表 A 2.3 (b)

モデル名	
Spriggs 6-const.	$\tau^{12} = \eta \{Z(\alpha)\}^{-1} \Gamma \Sigma \{n^\alpha + \frac{1}{3} \lambda_2 \lambda_2 \Gamma^2 (2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_2) (n^{2\alpha} + \sigma \Gamma^2)\}^{-1}$ $\tau^{11} - \tau^{22} = 2 \eta \{Z(\alpha)\}^{-1} \Gamma^2 \Sigma \{ \lambda_1 - \lambda_2 n^\alpha + \frac{1}{3} \lambda_2 \lambda_2 n^\alpha \Gamma^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (1 + \varepsilon_1) (n^{2\alpha} + \sigma \Gamma^2) \}^{-1}$ $\tau^{22} - \tau^{33} = \eta \{Z(\alpha)\}^{-1} \Gamma^2 \Sigma \{ \frac{1}{3} \lambda_1 (-1 + 2\varepsilon_1) - \varepsilon_2 \lambda_2 n^\alpha + \lambda_2 \lambda_2 n^\alpha \sigma \Gamma^2 (n^{2\alpha} + \sigma \Gamma^2) \}^{-1}$ $\tau^{12} = \mu (\frac{1}{2} \Gamma^2) \Gamma$ $\tau^{11} - \tau^{22} = 2 \lambda \mu (\frac{1}{2} \Gamma^2) \Gamma^2$ $\tau^{22} - \tau^{33} = 0$
Tanner	$\tau^{12} = \eta \Gamma$ $\tau^{11} - \tau^{22} = 2 \eta \Gamma^2$ $\tau^{22} - \tau^{33} = -\beta \Gamma^2$
Coleman-Noll 2nd order fluid	$\tau^{12} = \eta \Gamma$ $\tau^{11} - \tau^{22} = 2 \eta \Gamma^2$ $\tau^{22} - \tau^{33} = -\beta \Gamma^2$
Reiner-Rivlin	$\tau^{12} = \alpha (\frac{1}{2} \Gamma^2, 0) \Gamma$ $\tau^{11} - \tau^{22} = 0$ $\tau^{22} - \tau^{33} = \beta (\frac{1}{2} \Gamma^2, 0) \Gamma^2$
Bird -Williams -Spriggs	$\tau^{12} = \eta (\frac{1}{2} \Gamma^2, 0) \Gamma$ $\tau^{11} - \tau^{22} = 2 \chi (\frac{1}{2} \Gamma^2, 0) \Gamma^2$ $\tau^{22} - \tau^{33} = -(\frac{1}{2} \chi (\frac{1}{2} \Gamma^2, 0) + \beta (\frac{1}{2} \Gamma^2, 0)) \Gamma^2$
Dewitt	$\tau^{12} = \eta \Gamma (1 + \lambda \Gamma^2)^{-1}$ $\tau^{11} - \tau^{22} = 2 \eta \lambda \Gamma^2 (1 + \lambda \Gamma^2)^{-1}$ $\tau^{22} - \tau^{33} = -\eta \lambda \Gamma^2 (1 + \lambda \Gamma^2)^{-1}$
Denn (A)	$\tau^{12} = \mu \Gamma^n$ $\tau^{11} - \tau^{22} = 2 \lambda \mu \Gamma^n$ $\tau^{22} - \tau^{33} = 0$

表A2.3 (c)

モデル名	
Denn (B)	$\begin{aligned} \tau^{12} &= \mu\Gamma^n \\ \tau^{11} - \tau^{22} &= 2\lambda\Gamma^s \\ \tau^{22} - \tau^{33} &= 0 \end{aligned}$
White	$\begin{aligned} \tau^{12} &= \Gamma\{\omega_1 + 2(\omega_4 - \omega_6)\Gamma^2\} \\ \tau^{11} - \tau^{22} &= -2\omega_3\Gamma^2 \\ \tau^{22} - \tau^{33} &= \omega_2\Gamma^2 \end{aligned}$
White-Metzner	$\begin{aligned} \tau^{12} &= \mu(\frac{1}{2}\Gamma^2)\Gamma \\ \tau^{11} - \tau^{22} &= 2G^{-1}\mu^2(\frac{1}{2}\Gamma^2)\Gamma^2 \\ \tau^{22} - \tau^{33} &= 0 \end{aligned}$



図A2-1

ここで広範な、溶液濃度およびずり速度下における物性値の測定結果の代表的な1例(ポリイソブチレンのデカリン溶液, by Brodnyan, J.G. et al., Trans. Soc. Rheol., 1(1957), 109)を図A2-1に示す。この例が示すように、通常の粘弾性流体は単純ずり流動下の場合、適当なずり速度の範囲内において、

$$\log \tau_{12} \sim \log \dot{\Gamma}, \quad \log(\tau_{11} - \tau_{22}) \sim \log \dot{\Gamma}$$

が直線で近似できることが多い。ただし $\dot{\Gamma}$ はずり速度を示す。

付 記

本論文の数値計算に当っては

東京工業大学情報処理センタ

HITAC 8500/8400 および HITAC 8700/8400 を使用

した。

文 献

- (1) Acrivos, A., "Solution of the Laminar Boundary Layer Energy Equation at High Prandtl Numbers", Phys. Fluids, Vol.3(1960), 657.
- (2) Acrivos, A. et al., "Further experiments on steady separated flows past bluff objects", J. Fluid Mech., Vol.34(1968), 25.
- (3) Anon, "Slippery Water Cuts Friction Loss", Fire Engng., Sept.(1969), 48.
- (4) Anon, "Rapid Water-Friction Nemesis", Fire Engng., Jan.(1971), 33.
- (5) Astarita, G., "Possible Interpretation of the Mechanism of Drag Reduction in Viscoelastic Liquids", I&EC Fund., Vol.4(1965), 354.
- (6) Astarita, G. & Nicodemo, L., "Velocity Distributions and Normal Stresses in Viscoelastic Turbulent Pipe Flow", A.I.Ch.J., Vol.12(1966), 478.
- (7) Barker, M., "On the Use of Very Small Pitot-Tubes for Measuring Wind Velocity", Proc. Roy. Soc. London, Ser.A, Vol.101(1922), 435.
- (8) Bilgen, E., "Stability of Three-Dimensional Boundary Layer of Dilute Polymer Solutions", Trans. ASME, Ser.D, Vol.93(1971), 85.
- (9) Bogue, D.C. & Metzner, A.B., "Velocity Profiles in Turbulent Pipe Flow, Newtonian and Non-Newtonian Fluids", I&EC Fund, Vol.2(1963), 143.
- (10) Canham, H.J.S. et al., "Boundary Layer Additives to Reduce Ship Resistance", The Naval Architect, J. Rina, No.2(1971), 187.
- (11) Chung, J.S. & Graebel, W.P., "Laser Anemometer Measurements of Turbulence in Non-Newtonian Pipe Flows", University of Michigan, College of Engineering Technical Report, ONR Contract No.NOM-224(49), 1969.
- (12) Cole, J. & Roshko, A., "Heat transfer from wires at Reynolds numbers in the Oseen range", Proc. Heat Transfer and Fluid Mechanics Inst. Univ. of Calif. Berkeley, Calif., (1954).
- (13) Collis, D.C. & Williams, M.J., "Two-dimensional convection from heated wires at low Reynolds numbers", J. Fluid Mech., Vol.6(1959), 357.
- (14) Davis, A.H., "Convective Cooling of Wires in Streams of Viscous Liquids", Phil. Mag., Vol.47(1924), 1057.
- (15) Denn, M.M., "Boundary layer flows for a class of elastic fluids", Chem. Engng. Sci., Vol.22(1967), 395.
- (16) Denn, M.M. & Roisman, J.J., "Rotational Stability and Measurement of Normal Stress Functions in Dilute Polymer Solutions", A.I.Ch.E. J., Vol.15(1969), 454.
- (17) Dennis, S.C.R. & Chang, G., "Numerical solutions for steady flow past

- a circular cylinder at Reynolds number up to 100", J. Fluid Mech., Vol.42(1970), 471.
- (18) Dever, C.D. et al., "Method of Decreasing Friction Loss in Flowing Fluids", U.S. Patent No.3023760(1962).
 - (19) Dodge, D.W. & Metzner, A.B., "Turbulent Flow of Non-Newtonian Systems", A.I.Ch.E.J., Vol.5(1959), 189.
 - (20) Dove, H.L., "The Effect on Resistance of Polymer Additives Injected into a Boundary Layer of a Frigate Model", Proc. 11th Internat. Towing Tank Conference, Tokyo, 1966.
 - (21) Eckert, E.R.G. & Soehngen, E., "Distribution of Heat-Transfer Coefficients Around Circular Cylinders in Crossflow at Reynolds Numbers From 20 to 500", Trans. ASME, Vol.74(1952), 343.
 - (22) Eckert & Drake, Heat & Mass Transfer, McGraw-Hill.
 - (23) Elata, C. & Tirosh, J., "Frictional Drag Reduction", Israel J. Technology, Vol.3(1965), 1.
 - (24) Elata, C. et al., "Turbulent Shear Flow of Polymer Solutions", Israel J. Technology, Vol.4(1966), 87.
 - (25) Elata, C., "Reduction of Friction on Submerged Bodies by Polymer Additives", Proc. 11th Internat. Towing Tank Conference, Tokyo, (1966), 81.
 - (26) Emerson, A., "Model Experiments Using Dilute Polymer Solutions Instead of Water", Trans. N.E.Coast Inst. of Engineers and Shipbuilders, Vol.81(1965), 201.
 - (27) Eringen, A.C., Nonlinear Theory of Continuous Media, (1962), McGraw-Hill.
 - (28) Fabula, A.G. et al., "Turbulent-Flow Characteristics of Dilute Aqueous Solutions of High Polymers", Bull. American Phys. Soc., Vol.8 (1963).
 - (29) Fabula, A.G. et al., "Some Interpretations of the Toms' Effect", in Modern Developments in the Mechanics of Continua, Academic Press Inc., N.Y., (1966).
 - (30) Fabula, A.G., "Operating Characteristics of Some Hot Film Velocity Sensors in Water", in Advances in Hot-Wire Anemometry, Proc. Internat. Symp. on Hot-Wire Anemometry, 1967.
 - (31) Felsen, I.M. & Smith, T.G., "Turbulent Flow Drag Reduction by Dilute Polyethylene Oxide Solutions in Capillary Tubes", A.I.Ch.E. Symposium ser., No.130, Vol.69(1973), 58.
 - (32) Finn, R.K., "Determination of the Drag on a Cylinder at Low Reynolds Numbers", J. Appl. Phys., Vol.24(1953), 771.
 - (33) Frösling, N., cited from the Boundary Layer Theory.

- (34) Fruman, D. & Sulmont, P., "Réduction de la résistance de frottement d'une plaque dans les solutions de polymères", C.R. Acad. Sc. Paris, Vol.268, Ser.A(1969), 1493.
- (35) Gadd, G.E., "The Effect on the Turbulent Boundary Layer of Adding Guar Gum to the Water in Which a Disk Rotates", National Physical Laboratory, Ship T.M.42, (1963).
- (36) Gadd, G., "Differences in Normal Stress in Aqueous Solutions of Turbulent Drag Reducing Additives", Nature, Vol.212(1966), 1348.
- (37) Gadd, G.E., "Effects of Drag-Reducing Additives on Vortex Stretching", Nature, Vol.217(1968), 1040.
- (38) Giles, W.B., "Similarity Laws of Friction-Reduction Flows", J. Hydronautics, Vol.2(1968), 34.
- (39) Goldstein, S., Modern developments in fluid dynamics, (1938), Oxford Univ. Press.
- (40) Goren, Y. & Norbury, J.F., "Turbulent Flow of Dilute Aqueous Polymer Solutions", Trans. ASME, Ser.D, Vol.89(1967), 814.
- (41) Granville, P.S., "The Frictional Resistance and Velocity Similarity Laws of Drag-Reducing Dilute Polymer Solutions", NSRDC Report 2502, (1967).
- (42) Green, A.E. & Rivlin, R.S., "Steady Flow of Non-Newtonian Fluids Through Tubes", Quart. Appl. Math., Vol.14(1956), 299.
- (43) Hasegawa, T. et al., "A Study on Anomalous Turbulent Flows of Non-Newtonian Fluids", Bull. JSME, Vol.15(1972), 1093.
- (44) Hilpert, R., "Wärmeabgabe von geheizten Drähten und Rohren im Luftstrom", Forsch. Ing-wes., Vol.4(1933), 215.
- (45) Homan, F., Forsch. Ing-wes., Vol.7(1936), 1.
- (46) Hoyt, J.W. & Fabula, A.G., "Frictional Resistance in Towing Tanks", Proc. 10th Internat. Towing Tank Conference, Teddington, (1963).
- (47) Hoyt, J.W. & Fabula, A.G., "The Effect of Additives on Fluid Friction", Proc. 5th Symposium on Naval Hydrodynamics, Bergen, Norway, Office of Naval Research ACR-112(1964), 947.
- (48) Hoyt, J.W., "The Effect of Additives on Fluid Friction", Trans. ASME, Ser.D., Vol.94(1972), 258.
- (49) Hurd, C.W. et al., "Influence of Viscous Effects on Impact Tubes", J. Appl. Mech., Vol.20(1953), 253.
- (50) Imai, I., "On the asymptotic behaviour of viscous fluid flow at a great distance from a cylindrical body, with special reference to Filon's paradox", Proc. Roy. Soc., London, Ser.A, Vol.208(1951), 487.

- (51) Imai, I., Univ. Maryland Tech. Note, BN-104(1957).
- (52) James, D.F. & Acosta, A.J., "The laminar flow of dilute polymer solutions around circular cylinders", J. Fluid Mech., Vol.42(1970), 269.
- (53) Kawaguchi, M., "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations for the Flow around a Circular Cylinder at Reynolds Number 40", J. Phys. Soc. Japan, Vol.8(1953), 747.
- (54) Kawaguchi, M. & Jain, P., "Numerical Study of a Viscous Fluid Flow past a Circular Cylinder", J. Phys. Soc. Japan, Vol.21(1966), 2055.
- (55) Keller, H.B. & Takami, H., in Numerical Solutions of Nonlinear Differential Equations, Greenspan, D., Ed., (1966), John Wiley & Sons.
- (56) Knudsen & Katz, Fluid Dynamics and Heat Transfer, McGraw-Hill.
- (57) Kozicki, W. & Tiu, C., "Anomalous Wall Effects and Associated Drag : Reduction in Turbulent Pipe Flow", Chem. Engng. Sci., Vol.23 (1968), 231.
- (58) Lamb, H., Hydrodynamics, (1932), Cambridge Univ. Press.
- (59) Levy, J. & Davis, S., "Drag Measurements on a Thin Plate in Dilute Polymer Solutions", Internat. Shipbuilding Progress, Vol.14(1967), 166.
- (60) Lighthill, M.J., "Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer", Proc. Roy. Soc. London, A202(1950), 359.
- (61) Lindgren, E.R. & Chao, J.L., "Application of the Hot Film Technique on Flow of High-Polymer Solutions", Phys. Fluid, Vol.10(1967), 667.
- (62) Lodge, A.S., Elastic Liquids, (1964), Academic Press.
- (63) McConnell, A.J., Applications of Tensor Analysis, (1931), Dover Pub.
- (64) Meister, B.J. & Biggs, R.D., "Prediction of the First Normal Stress Difference in Polymer Solutions", A.I.Ch.E.J., Vol.15(1969), 643.
- (65) Merrill, E.W. et al., "Instability in Couette Flow of Solutions of Macromolecules", J. Fluid Mech., Vol.13(1962), 86.
- (66) Metzner, A.B. & Park, M.G., "Turbulent flow characteristics of viscoelastic fluids", J. Fluid Mech., Vol.20(1964), 291.
- (67) Metzner, A.B. & Astarita, G., "External Flows of Viscoelastic Materials: Fluid Property Restrictions on the Use of Velocity-Sensitive Probes", A.I.Ch.E.J., Vol.13(1967), 550.
- (68) Meyer, W.A., "A Correlation of the Frictional Characteristics for Turbulent Flow of Dilute Viscoelastic Non-Newtonian Fluids in Pipes", A.I.Ch.E.J., Vol.12(1966), 522.
- (69) Nadolink, R.H., "Determination of Turbulent Velocity Distributions with

- Non-Newtonian Additives Using High-Speed Photomicroscopy", MS thesis, University of Massachusetts, (1968).
- (70) Oliver, D.R., "The Expansion/Contraction Behaviour of Laminar Liquid Jets", *Canad. J. Chem. Engng.*, Vol.44(1966), 100.
- (71) Ousterhout, R.S. & Hall, C.D., "Reduction of Friction Loss in Fracturing Operations", *J. Petroleum Technology*, Vol.13(1960), 217.
- (72) Piret, E.L. et al., "Heat Transmission from Fine Wires to Water", *Indust. Engng. Chem.*, Vol.39(1947), 1098.
- (73) Poreh, M. & Miloh, T., "Rotation of a Disk in Dilute Polymer Solutions", *J. Hydronautics*, Vol.5(1971), 61.
- (74) Rajeswari, G.K. & Rathna, S.W., "Flow of a Particular Class of Non-Newtonian Visco-Elastic and Visco-Inelastic Fluids near a Stagnation Point", *ZAMP*, Vol.13(1962), 43.
- (75) Rollin, A. & Seyer, F.A., "Velocity Measurements in Turbulent Flow of Viscoelastic Solutions", *Canad. J. Chem. Engng.*, Vol.50(1972), 714.
- (76) Rubin, H. & Elata, C., "Stability of Couette Flow of Dilute Polymer Solutions", *Phys. Fluids*, Vol.9(1966), 1929.
- (77) Rudd, M.J., "Measurements made on a Drag Reducing Solution With a Laser Velocimeter", *Nature*, Vol.224(1969), 587.
- (78) Rudd, M.J., "Velocity measurements made with a laser dopplermeter on the turbulent pipe flow of a dilute polymer solution", *J. Fluid Mech.*, Vol.51(1972), 673.
- (79) Savins, J.G., "A Pitot Tube Method for Measuring the First Normal Stress Difference and Its Influence on Laminar Velocity Profile Determinations", *A.I.Ch.E.J.*, Vol.11(1965), 673.
- (80) Savins, J.G., "Drag Reduction Characteristics of Solutions of Macromolecules in Turbulent Pipe Flow", *Society of Petroleum Engng. J.*, Vol.4(1964), 203.
- (81) Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, (1955), McGraw-Hill.
- (82) Schmidt, E. & Wenner, K., "Wärmeabgabe über den Umfang eines angeblasenen geheizten Zylinders", *Forschung*, Vol.12(1941), 65.
- (83) Scott, D., "Slippery Water in Fire Hoses", *Science*, Vol.164(1969), 1466.
- (84) Seyer, F.A. & Metzner, A.B., "Turbulence Phenomena in Drag Reducing Systems", *A.I.Ch.E.J.*, Vol.15(1969), 426.
- (85) Sharma, S.K. & Agarwal, R.S., "Stagnation Point Heat Transfer in a Second Order Fluid", *J. Phys. Soc. Japan*, Vol.21(1966), 2049.
- (86) Shaver, R.G. & Merrill, E.W., "Turbulent Flow of Pseudoplastic Polymer Solutions in Straight Cylindrical Tubes", *A.I.Ch.E.J.*, Vol.5

- (1959), 181.
- (87) Sibulkin, M., "Heat Transfer Near the Forward Stagnation Point of a Body of Revolution", *J. Aero. Sci.*, Vol.19(1952), 570.
- (88) Smallman, J.R. & Wade, J.H.T., "The Influence on Hydrodynamic Drag of High Molecular Weight Compounds", *Canad. Aero-Space Institute Trans.*, Vol.2(1969), 37.
- (89) Smith, K.A. et al., "Anomalous Pitot Tube and Hot Film Measurements in Dilute Polymer Solutions", *Chem. Engng. Sci.*, Vol.22(1967), 619.
- (90) Squire, H.B., in the section of "Modern Developments in Fluid Dynamics", ed. by Goldstein, Oxford, (1938).
- (91) Srivastava, A.C., "The Flow of a Non-Newtonian Liquid Near a Stagnation Point", *ZAMP*, Vol.9(1958), 80.
- (92) Tagori, T. & Ashidate, I. "Some Experiments on Friction Reduction on Flat Plate by Polymer Solutions", *Proc. 12th Internat. Towing Tank Conference, Rome, (1969)*.
- (93) Takami, H. & Keller, H.B., "Steady Two-Dimensional Viscous Flow of an Incompressible Fluid past a Circular Cylinder", *Phys. Fluids Supplement II(1969)*, 51.
- (94) Taneda, S., "Experimental investigation of the wakes behind cylinders and plates at low Reynolds numbers", *J. Phys. Soc. Japan*, Vol.11 (1956), 302.
- (95) Thom, A., "The Flow Past Circular Cylinders at Low Speeds", *Proc. Roy. Soc. London*, A141(1933), 651.
- (96) Tomita, Y., "A Study of Viscoelastic Fluid Flow", *Bull. JSME*, Vol.9 (1966), 730.
- (97) Tomochika, S. & Aoi, T., "The steady flow of viscous fluid past a sphere and circular cylinder at small Reynolds numbers", *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, Vol.3(1950), 140.
- (98) Toms, A.B., "Some Observations on the Flow of Linear Polymer Solutions Through Straight Tubes at Large Reynolds Numbers", *Proc. 1st Internat. Rheol. Congr.*, Vol.2(1949), 135.
- (99) Tritton, D.J., "Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds Number", *J. Fluid Mech.*, Vol.6(1959), 547.
- (100) Virk, P.S. et al., "The Critical Wall Shear Stress for Reduction of Turbulent Drag in Pipe Flows by Polyethylene Oxide in Dilute Solution", in *Modern Developments in the Mechanics of Continua*, Academic Press Inc., N.Y., (1966).
- (101) Virk, P.S. et al., "The Toms phenomenon: turbulent pipe flow of dilute polymer solutions", *J. Fluid Mech.*, Vol.30(1967), 305.

- (102) Virk, P.S., "An elastic sublayer model for drag reduction by dilute solutions of linear macromolecules", J. Fluid Mech., Vol.45 (1971), 417.
- (103) Virk, P.S., "Drag Reduction in Rough Pipes", J. Fluid Mech., Vol.45 (1971), 225.
- (104) Wells, C., "Anomalous Flow of Non-Newtonian Fluids", AIAA J., Vol.3 (1965), 1800.
- (105) Wells, C.S. et al., "Turbulence Measurements in Pipe Flow of a Drag-Reducing Non-Newtonian Fluid", AIAA J., Vol.6(1968), 250.
- (106) Wetzel, J.M. & Tsai, F.Y., "Impact Tube Measurements in Dilute Polymer Solutions", A.I.Ch.E.J., Vol.14(1968), 663.
- (107) White, W.D. & McEligot, D.M., "Transition of Mixtures of Polymers in a Dilute Aqueous Solution", Trans. ASME, Ser.D, Vol.92(1970), 411.
- (108) Whitsitt, N.F. & Crawford, H.R., "Frictional Drag Loss Characteristics of Enclosed Rotating Disks Operating in a Viscoelastic Fluid Media", The Western Co., Report on Contract No.N60530-12741, (1967).
- (109) Wieselsberger, C., Ergeb. Aerodyn. Versuchanstalt Göttingen, Vol.2 (1923), 22.

- (110) 芦立勲, 田古里哲夫, 希薄ポリマー溶液の研究, 日本機械学会論文集, Vol.37(1971), 334.
- (111) 長谷川富市, 富田幸雄, 非ニュートン流体の乱流異常現象に関する研究, 日本機械学会論文集, Vol.35(1969), 1277.
- (112) 加藤宏, 渡辺敬三, 上田耕一, 希薄高分子溶液中の円板摩擦, 日本機械学会論文集, Vol.38(1972), 310.
- (113) 甲藤好郎, 伝熱概論, 養賢堂(1964).
- (114) 富田幸雄, 粘弾性流動に関する研究, 日本機械学会論文集, Vol.32(1966), 242.
- (115) 富田侑嗣, 希薄高分子溶液の管内流, 日本機械学会論文集, Vol.35(1969), 2251.
- (116) 富田侑嗣, 希薄高分子溶液の管内流, 日本機械学会論文集, Vol.38(1972), 566.
- (117) 富田幸雄, 持丸義弘, 希薄高分子溶液の流動に関する研究, 日本機械学会論文集, Vol.38(1972), 1416.

謝 辞

本研究の遂行に当り、たえず指導、助言いただいた富田幸雄教授に対し心から深く感謝の意を表します。

また本研究の遂行に当り、実験面等で御協力いただいた東レ株式会社小谷宣義氏、東工大大学院五島修一氏、東工大大学院松井邦雄氏の諸氏に深く感謝の意を表します。

その他全般にわたり御協力いただいた山根隆一郎助教授、須藤浩三助手、石橋幸男技官、新潟大助教授長谷川富市氏をはじめ、水力実験室各位、ならびに東京工業大学情報処理センタ関係各位に対し感謝の意を表します。

1975年 1月