

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	液体と接する薄肉構造の連成衝撃応答に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	足立忠晴
Author(English)	TADAHARU ADACHI
出典(和文)	学位:工学博士, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:乙第2397号, 授与年月日:1992年10月31日, 学位の種別:論文博士, 審査員:
Citation(English)	Degree:Doctor of Engineering, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:乙第2397号, Conferred date:1992/10/31, Degree Type:Thesis doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

液体と接する薄肉構造の連成衝撃応答
に関する研究

東京工業大学 工学部

足立 忠晴

目 次

第 1 章 緒論	1-17
1.1 流体・構造連成問題	1
1.2 従来の研究	5
1.3 本研究の目的	8
1.4 本論文の概要	11
参考文献	12
第 2 章 数値ラプラス変換	18-53
2.1 緒言	18
2.2 Krings-Wallerの方法	20
2.2.1 基礎理論	20
2.2.2 数値計算例	23
2.2.3 考察	32
2.3 細野の方法	35
2.3.1 基礎理論	35
2.3.2 数値計算例	39
2.3.3 考察	47
2.4 結言	49
参考文献	50
第 3 章 水撃をうける円筒殻の衝撃応答	54-78
3.1 緒言	54
3.2 解析解の導出	56
3.2.1 半無限長円筒殻の解析	58
(a)連成理論による解析	58
(b)非連成理論による解析	59
3.2.3. 有限長円筒殻の解析	60
(a)連成理論による解析	60
(b)非連成理論による解析	63
3.3 数値計算結果	63
3.3.1 半無限長円筒殻に対する数値結果	64
3.3.2 有限長円筒殻に対する数値結果	71

3.4 結言	75
参考文献	76
第4章 液体で満たされた円筒殻の衝撃応答	79-115
4.1 緒言	79
4.2 一様外圧をうける無限長円筒殻の衝撃応答	80
4.2.1 解析モデル	80
4.2.2 解析的方法による結果	80
(a) 解析解の導出	80
(b) 数値計算結果	82
4.2.3 ばね-質点系による近似モデル	84
(a) 液体-円筒系を近似した力学モデル (モデル S)	84
(b) 液体を近似した力学モデル (モデル F)	85
(c) 近似モデルのパラメータの決定	85
4.2.4 液体と円筒との連成効果の考察	87
(a) 無次元パラメータの設定	87
(b) 固有振動数による考察	87
(c) モデル S および F による考察	87
4.3 非軸対称衝撃荷重をうける無限長円筒殻の衝撃応答	90
4.3.1 問題の設定	90
4.3.2 解析	92
(a) 連成応答の解析	92
(b) 非連成応答の解析	93
4.3.3 数値計算結果	93
(a) 円筒殻の形状の影響	93
(b) 荷重の分布領域の影響	98
(c) 無次元パラメータ α 、 β の影響	98
4.4 軸対称線荷重をうける有限長円筒殻の衝撃応答	102
4.4.1 問題の設定	102
4.4.2 解析	104
(a) 連成応答の解析	104
(b) 非連成応答の解析	105
4.4.3 数値計算結果	105
(a) 円筒殻の形状の影響	105

(b)無次元パラメータ α 、 β の影響	111
(c)液体圧力の時間変動	111
4.5 結言	114
参考文献	115
第5章 飛翔体の衝突による液体と接する平板の衝撃応答	116-142
5.1 緒言	116
5.2 液体と接する平板の衝撃応答の解析	117
5.2.1 平板のステップ応答	117
5.2.2 飛翔体のステップ応答	121
5.2.3 衝撃荷重の解析	121
5.2.4 飛翔体の衝突による平板の応答の解析	124
5.3 実験方法	124
5.4 理論解析結果と実験結果との比較	128
5.4.1 衝撃荷重領域の決定	128
5.4.2 鋼球の衝突による衝撃荷重および平板のひずみ変動	130
5.4.3 軟鋼棒の衝突による衝撃荷重および平板のひずみ変動	135
5.5 結言	139
参考文献	140
第6章 圧電素子による薄板に作用する衝撃圧力の測定	143-155
6.1 緒言	143
6.2 測定原理	145
6.3 圧電素子の検定	145
6.4 衝撃圧力発生装置	149
6.5 実験結果と考察	152
6.6 結言	155
参考文献	155
第7章 結論	156-163
7.1 各章の総括	156
7.2 今後の課題	160
参考文献	161

付録 A 完全流体に関する基礎方程式の導出	164-167
A.1 緒言	164
A.2 連続の方程式	164
A.3 運動方程式	166
A.4 速度ポテンシャルによる波動方程式	166
参考文献	167
付録 B 平板に関する基礎方程式の導出	168-175
B.1 緒言	168
B.2 平衡方程式	168
B.3 構成方程式	172
B.4 変位の方程式	173
B.5 境界条件式	174
参考文献	174
付録 C 円筒殻に関する基礎方程式の導出	176-185
C.1 緒言	176
C.2 平衡方程式	176
C.3 構成方程式	180
C.4 変位の方程式	182
C.5 境界条件式	184
参考文献	185
付録 D 液体と固体の境界面における平面波の反射特性	186-189
D.1 緒言	186
D.2 解析モデル	186
D.3 反射係数および透過係数の導出	186
参考文献	189
略歴および研究業績	190-197
謝辞	198

第1章 緒論

1.1 流体・構造連成問題

宇宙航空工業を始めとする分野では構造がますます軽量化され、薄肉構造が数多く用いられるようになってきている。特に薄肉構造は液体の容器として使用され、船体、液体貯槽、原子炉などのプラントの配管などに数多く見られる。これらの構造は比較的大規模なものであり、構造の破壊あるいは破損が生じたとき大きな事故となることがある。構造が薄肉であることから、その応答には液体の影響が強く現れることが予想される。このため液体との連成効果を考慮した構造の応答を解析し明らかにすることは重要な課題であると考えられる。

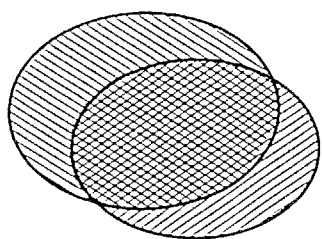
ところで構造物（固体）は常に周囲の環境と接した状態にあり、外力だけでなく異物の衝突や液体、熱あるいは電磁場による影響を受ける。これらの2つ以上の異なる系が干渉する問題は連成問題（相関問題）と呼ばれ、構造の変形および応答に関する代表的なものには、物体の接触問題[1.1]、流体連成問題、連成熱応力問題[1.2]および電磁連成問題[1.3]などがある。解析するにあたって連成問題[1.4]はFig.1.1.1のように次の2つに分類することができる。

Problem 1 平衡条件および適合条件を同時に考慮して異なる系を連成させる
(例えば連成熱応力、電磁連成問題など)

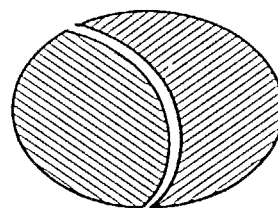
Problem 2 平衡条件および適合条件を別々に解き、境界条件により異なる系を連成させる
(例えば接触問題、流体連成問題など)

Problem 1 に分類される連成問題では、熱応力あるいは電磁力などの仮想的な物体力が構造に作用するものとして連成効果を考えることができる。これに対しProblem 2 に分類される問題では、異なる系の境界における変位および表面力の相互作用が連成効果となる。いずれにしても2つ以上の系の方程式を連立させて解かなければならず解析はかなり複雑になり、連成効果が強く現れる場合は構造単体の応答とは大きく異なり、予想しえないの特異な現象が見られることがある。

液体・構造問題では、前述のように液体と構造との境界における条件がそれぞれの



(a) Problem 1



(b) Problem 2

Figure 1.1.1 Category of Coupling Problems for Structures



: System A



: System B

系の連成運動に対して重要となる。構造には液体との境界面において圧力、液体の粘性による摩擦力などの流体力が作用し、液体と接する部分の構造の表面力と等しくなることから、次式のような力学的な連続条件が成立すると仮定される。

$$\begin{cases} P_t = F_t \\ P = -F_n \end{cases} \quad (1.1.1)$$

ここで P_t および P はそれぞれ構造に作用する液体の粘性による摩擦力および圧力であり、 F_t および F_n はそれぞれ構造に作用する接線方向および法線方向の表面力である。完全流体の場合は粘性がないことから境界上では摩擦力が生じず、力学的連成条件は式(1.1.1)の第2式のみとなる。

また液体は常に構造と接した状態で運動し剥離しないのものと仮定すれば、境界上において次の運動学的な連続条件が成立する。

$$v_{fi} = \frac{\partial U_i}{\partial t} \quad (1.1.2)$$

ここで v_{fi} および U_i は座標 i 方向の液体の速度および構造の変位を示す。完全流体の場合、接線方向の連続条件は考慮されない。

一般的には式(1.1.1)および(1.1.2)を連成条件と呼ぶ。解析において運動学的連成条件によって構造と液体は連成するので、式(1.1.1)を狭義の連成条件といえることができ、単に連成条件と呼ぶことがある。式(1.1.1)および(1.1.2)は広義の連成条件といえることができる。これらの連成条件の下に構造および液体の基礎方程式を解くことにより液体と構造の連成問題を解析することができる。

このように液体と構造の境界における相対的な運動が流体・構造連成問題で支配的な要因となる。これに基づいて流体構造連成問題がZienkiewiczとBettess[1.5]により次のように3つに分類されている。(Fig.1.1.2 参照)

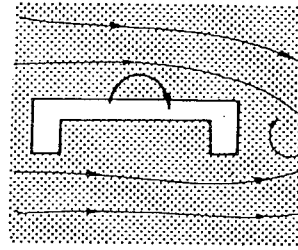
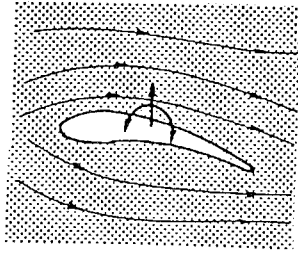
Category A : 長時間現象で構造物と流体の相対運動が大きい問題

Category B : 短時間現象で構造物と流体の相対運動が小さい問題

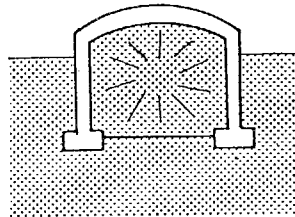
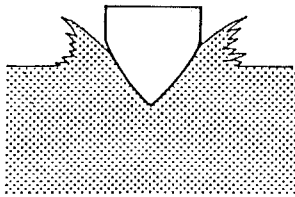
Category C : 長時間現象で構造物と流体の相対運動が小さい問題

ここで「短時間現象で構造物と流体の相対運動が大きい場合」が考えられるが物理的にありえないことから削除している。

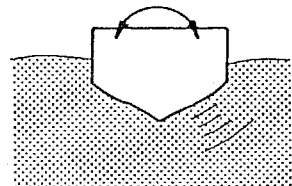
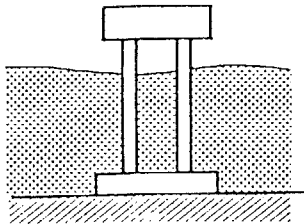
Category A は構造物の挙動に流体の流れが大きく支配している場合である。主に飛行機の翼のフラッター、風による構造の振動がその代表的な例である。これに関し



(a) Category A



(b) Category B



(c) Category C

Figure 1.1.2 Category of Fluid-Structure Interaction[1.5]

ては、従来より流力弾性問題あるいは空力弾性問題として取り扱われてきた。解析においては流体の流れが支配的要因であることから流体の圧縮性は無視することが一般的である。

Category Bはタンク内の爆発、配管の水撃、宇宙船の着水あるいは自動車の車室内の音響問題などが代表的な例である。これらの現象は動的あるいは衝撃問題に属するものである。流体の圧縮性、音波を考慮する必要があり流体内部の圧力波動の伝播が現象の支配的要因である。

さらにCategory Cは船や海洋構造物と波との衝突問題、液体貯槽や原子炉の地震動問題あるいはロケットの燃料タンクの推進器による振動問題が代表的な例である。またこの場合は液体の自由表面の揺動あるいは液体の流動が支配的な要因となり、通常は流体の圧縮性を考慮しないことが多い。

なお実際には現象を明確に分類することが困難であり、分類される現象が複合的に生じることが多く見られる。

1.2 従来の研究

現在までの研究はCategory Cに属する問題が主になされている。特に地震による液体貯槽[1.6]の破損事故が問題になり重要な課題になった。また原子炉における燃料棒および制御棒の振動、すなわち液体中の管あるいは棒群の振動問題、内部液体の流動による配管の振動問題が中心となり研究の対象となり数多くの論文、研究[1.7]-[1.10]が見られる。さらに大型海洋構造[1.11]に関しても研究が行われている。これらの現象は一般的に液体を付加質量と考えて解析されることが多く、ほぼ妥当な結果が得られている[1.12]。Category Aでは航空機の翼に関連するフラッター問題が従来から多くの研究が行われている。また管内流による振動現象についても様々な研究がなされている。Category Bの分野においては音響放射問題は超音波探傷あるいは水中レーダに関係するものであり、様々な条件下における問題が解析されている[1.13]。これらの研究では低周波数領域の応答が重要であり、周波数特性あるいは固有振動数を求めることにより現象の把握が可能となる。これに対してCategory Bに分類される音響問題を除く衝撃問題では、高周波領域の特性が現象にかなり影響し、単に周波数応答のみで現象を論じることは適切でないと考えられる。このため構造に発生

する変形および応力の時間履歴を明らかにすることが重要である。しかし実際に構造がどのような応力、変形の時間応答を示すかを明らかにした研究は以前からなされているにも関わらず限られている。以下において流体・構造連成問題に関連する衝撃問題において変形あるいは応力を明らかにした研究を概観する。

送水管などの配管などの円筒と液体の連成問題が代表的なものであり、水撃問題は配管の破損などかなり以前から問題とされており研究が行われている。円筒の慣性力にはほとんど注意が払われず、円筒の静的な変形のみが考慮されていた[1.14]-[1.16]。これに対してSkalak[1.17]により、円筒と液体の連成効果を考慮した水撃をうける円筒の衝撃応答が解析され、流体連成効果の重要性が指摘された。単に液体と円筒の波動が独立して伝播することではなく、静的な円筒の変形効果を考慮したJoukowsky理論による速度で大部分の波動が伝播し、大きさが小さいがそれより速い速度で伝わる先行波(Precursor Wave)が存在することが明らかにされた。しかし解析および数値計算がかなり複雑となることから、円筒の形状、液体と円筒の材質の関係などについては論じられていない。ForrestalとHerrmann[1.18]およびRussellとHerrmann[1.19]により液体に沈められた円筒の表面を伝播する波動の解析がされている。これは円筒の軸方向の運動を無視した連成条件下において解析が行われている。また波動速度に関する詳細な研究が浦田[1.20]-[1.28]に行われ、液体の粘性効果および円筒の材質の影響、波動速度に関する近似式の提案などがなされている。また鈴木[1.29][1.30]により円筒内の流体圧力波の伝播による円筒の衝撃応答を連成効果を無視した解析が試みられている。しかしSkalakの結果とはかなり異なった応答が求められている。このことから液体との連成効果を考慮することの重要性があることを示している。WalkerとPhillips[1.31]は水撃の問題を摂動法による近似解法を考察している。Goldsmithらのグループ[1.32]-[1.36]は液体で満たされた円筒の縦衝撃および横衝撃問題を解析して波動速度および応答を求め、液体および円筒の粘性効果が及ぼす影響を考察するとともに実験により結果の妥当性を考察している。またResimannとMayers[1.37]は液体中に沈められた初期応力をうけた円筒殻の動的応答を解析した。さらにTomskiとKukla[1.38]らは軸方向の慣性効果を無視した円筒の基礎方程式を用いて液体・円筒および棒からなる系の応答を解析している。浦田[1.39]により連成を考慮するために解析が困難となることから弾性管内の気体の波動に対する近似方程式を提案している。宇治橋ら[1.40]は無限長円筒殻に軸対称衝撃荷重が作用する問題を解析して、液体の

影響により円筒のたわみが小さくなり固有振動数が低下することを明らかにしている。また液体の影響を等価質量にて近似することを試みているが現象を良好な精度で評価することは困難なようである。Suzuki[1.41]は液体で満たされた円輪に軸対称衝撃荷重が作用する問題を解析し、円輪の応力が静的に荷重が作用する場合の約2倍にも達することがあることを指摘している。

円筒以外にも、液体と接する平板構造の衝撃応答についても研究がなされている。YenとChou[1.42]は高速で移動する分布荷重が作用する液体に浮かぶ平板の応答の解析した。平板の縦波および横波よりも速く移動する場合(Case a)、その2つの波の中間的な速度で移動する場合(Case b)およびいずれよりも遅い場合(Case c)について、古典板理論および面外せん断変形を考慮したMindlinの板理論による結果の比較を行っている。いずれの荷重速度とも移動荷重端よりも後方の平板のたわみは2つの板理論はほぼ一致するが、荷重に先行する応力波が生じるCase a および bでは板理論の結果に差が見られることを明らかにしている。円筒上の領域に存在する液体の一端を閉じる弾性円板の問題をBerglund[1.43]が検討している。円板の形状および周辺の境界条件が応答に及ぼす影響を考察している。またGolovanovら[1.44]は液体に浮かぶ無限領域の等方性および横等方性板が集中荷重をうける問題の解析を行っている。Hui[1.45]は水上に浮かぶ氷が荷重をうける場合を解析し、氷を粘弾性体とし水を弾性ばねとして近似している。長屋と永井ら[1.46]は液体貯蔵タンクの底板が液体を介して圧力をうける問題を解析している。液体には粘性を考慮し、作用する圧力が任意に変動する場合の解析法について提案している。

また球形の構造に関する問題についてEngin[1.47]およびKennerとGoldsmith[1.48]は異物が衝突した場合の頭部の障害を明らかにするための解析を行っている。Kennerらはモデル実験も行い解析結果の妥当なことを確認している。GlennとKidder[1.49]らは無限媒質中の球形容器が衝撃圧力をうける問題の解析を行い閉じた形の解を導出している。Akkas[1.50]は剛体のリングで周辺を支持された球殻が液体中を運動する場合の過渡応答の解析を行っている。球殻が移動する場合には液体の存在により応答の最大値が大きく振動周期が長くなり、球殻が静止している場合には最大値が小さくなることを明らかにしている。

また液体に接する半無限体の衝撃応答に関して、次のような研究成果が見られる。BennettとHermann[1.51]らは液体との境界面に荷重が作用する問題を解析し、液体の

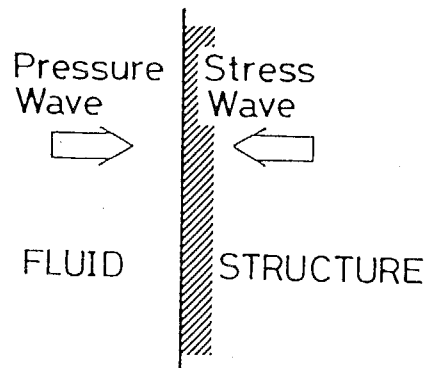
存在により境界面付近の変位の絶対値が小さくなり、境界面の応力波はRayleigh波よりも遅い速度で伝播することを指摘している。超音波顕微鏡は液体を媒質として資料に超音波を入射させることを想定してRoberts[1.52]により液体と固体の境界面の波動伝播について考察されている。境界面の表面波は液体との連成効果の影響を受けるが、圧縮波あるいはせん断波は比較的影響を受けないことを明らかにした。またNagaya[1.53][1.54]により海洋構造物が波力あるいは地震をうける場合の応答の解析的に取り扱っている。

1.3 本研究の目的

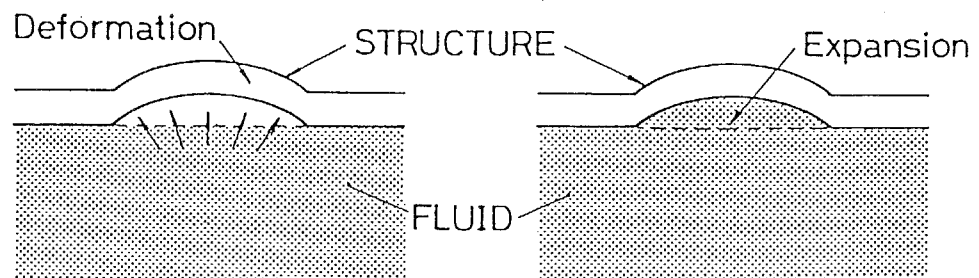
以上のように理論解析を簡便にするために、構造のある方向の慣性力などを無視するなどの近似を行っているものが大部分である。液体と構造の連成効果を明確にするためには、できれば近似を行わないで解析することが望ましい。理論解析がかなり煩雑であること、あるいは実際の構造物の評価のために、汎用コードなどに代表される有限要素法、境界要素法あるいは差分法などの数値解法によって解析されることが多く、数値計算上の特有の問題があるものの数多くの研究成果が報告されている[1.55][1.56]。液体と構造が連成する衝撃問題では液体と構造の波動あるいは連成効果による未知の波動が混合した応答を示すため、応答結果に見られる振動が数値的な誤差として生じたものか、現象として生じたものかを数値解析結果のみからは判定が困難である。時折、現象として生じた波動を無視した結果を示している場合が見受けられる。前節のように構造と液体との連成を考慮した衝撃問題に対して解析がなされているが、基本的な現象を理論的に解析した結果が少なく、物理的な考察が不十分なまま放置されていることに原因があるものと考えられる。衝撃問題における液体と構造との連成効果は次のような二つの観点の物理的な説明をすることが可能であると考えられる (Fig.1.3.1 参照)。

a) 固体と液体との境界面における波動の反射と透過

固体の音響インピーダンスが液体のインピーダンスに対して大きいことから、固体と液体の境界面において固体側からの応力波のかなりの部分は透過し、液体からの圧力波の大部分が反射する (付録D参照)。このため構造と液体との系に波動が伝播し境界で反射するごとに液体の圧力が上昇し、構造の応



(a) Refraction and Reflection of Waves



(b) Pressure Reduction by Deformation of Structure

Figure 1.3.1 Governing Effect on Responses of Liquid-Structure System

力が低下する。

b) 構造の変形による境界面付近の液体の体積膨張

液体との連成効果が大きいと考えられる薄肉構造では流体圧力が作用すると構造が変形する。このため構造の変形により液体は体積膨張することになり圧力が低下することになる。

これらの観点からは流体の現象として互いに背反する結果が得られることになる。したがって実際の構造として問題となる薄肉構造に対して、いずれの物理的な説明が適切であるかを明らかにしておくことは、現象の理解および数値解析結果、実験解析結果の妥当性を確認するためにも重要であると思われる。また、どのような物理的なパラメータが構造の応答に及ぼす流体連成効果を明確に示し、構造の動的挙動を予測することが可能かという一般的な観点で結果を整理する必要があるように思われる。

衝撃問題に関するCategory Bでは高次の振動も影響するために単に固有振動数のみで評価することが困難であり、解析的方法により時間応答を明らかにしておく必要があると思われる。しかし精度の保証されている理論解析が行われていない理由は、連成効果を考慮するために理論解析が著しく複雑になり、閉じた解が得られることは極めてまれである。たとえ解析結果を得ることができたとしても無限級数などの収束性などの問題で数値結果を得ることが困難な場合が多い。このため連成問題に対する比較的簡便に数値結果を得ることの可能な解析方法を検討する必要がある。

そこで本研究では液体と接して使用される実際の構造の基本的なモデルに対して理論的に衝撃応答を解析する。様々な外力が作用する液体で満たされた円筒殻および液体と接する平板を解析対象とする。すでに述べたように連成問題に対する理論解析法および数値結果を得るための方法を確認しておく必要がある。本研究では衝撃問題の解析方法として有効なラプラス変換法に基づいて解析を行い、容易に数値結果を得るためにラプラス逆変換を数値的に行うこととする。数値逆変換法は数多く提案されているが、それぞれに特徴があり、いずれの方法が実際に精度が保証され汎用性が高いものであるかを明らかにする。このような解析方法にしたがって液体と構造の衝撃応答を求め、得られた結果をまとめることにより薄肉構造の応答に及ぼす連成効果を明らかにするとともに、どのようなパラメータにより衝撃応答を整理すれば現象の特徴を示すかを明らかにすることを目的とする。

さらに解析結果の妥当性を確認するために液体と連成運動する薄肉構造の衝撃ひず

み応答を計測する。通常のひずみゲージがエポキシ樹脂に埋め込まれた防水型のひずみゲージを使用することにより、液体と接する構造のひずみ計測が問題なく行われている。本研究でもこの防水型のひずみゲージを使用して実験を行う。

ひずみの計測とは異なり、連成振動するような薄肉構造に作用する衝撃圧力の測定方法はまだ見当たらず検討されていない。一般の衝撃圧力計測には半導体ゲージ型あるいは圧電気型の圧力変換器[1.57]などが使用されている。これらの変換器は構造物の測圧孔をあけて外部より取りつけられる。薄肉構造に孔をあけることから、構造の剛性を変化させ圧力を正確に測定することができなかつたり、薄肉のため変換器を取りつけることができない場合がある。これに対処するために超小型の圧力変換器[1.58]が開発されており、構造に直接、接着して使用される。しかし、この変換器は大きな曲げ変形しないような部分に取り付けることが前提となっている。このため構造が薄く液体と連成振動する場合には測定が困難となる。そこで本研究では圧電素子を用いて薄板に作用する衝撃圧力を測定する方法を考察する。

1.4 本論文の概要

本論文は以上のような目的に沿って行われた研究をまとめたものであり、全7章で構成されており、各章を要約すると次のようになる。

第2章「数値ラプラス変換」では、液体と構造連成問題を理論的に解析する際に有効な手法となる数値ラプラス変換法について検討を行った。数多く提案されている手法のうちで汎用性が高く、結果の信頼性があるものとして離散型フーリエ変換に基づく方法および細野の方法を検討の対象とした。これらの方法により数種の基本的な関数に対して数値計算を行い、それぞれの特徴を示すとともに最適な使用方法およびその数学的意味について考察を行う。

第3章「水撃をうける円筒殻の衝撃応答」では液体と構造連成問題において基本的でかつ重要である、水撃をうける円筒殻の衝撃応答を解析する。長い配管のモデルとして一端が固定された半無限長円筒殻を、また短い配管のモデルとして両端が固定された有限長円筒殻を解析対象とする。それぞれの円筒殻は液体で満たされており、一端よりステップ状に時間変化する圧力が液体に作用するものとする。得られる解析結果から配管の衝撃応答に及ぼす液体との連成効果の影響について考察する。さらに水

撃の伝播速度に関して、円筒の慣性力を無視して求められたJoukowsky理論の有効性について検討する。

第4章「液体で満たされた円筒殻の衝撃応答」では液体で満たされた円筒殻に外力が作用した場合の衝撃応答について考察を行う。波動の伝播における液体と円筒の連成効果が顕著に現れる場合を考え、円筒の軸線が移動しない、すなわち液体が付加質量として円筒の挙動に作用しないような外力条件に対して解析を行った。まず連成効果を表わすパラメータを得るためにできるだけ単純なモデルとして一様な衝撃圧力が作用する問題を解析する。解析解から導出されるパラメータを用いて円筒の変形挙動に及ぼす連成効果を定性的に表わすことを試みる。次に非軸対称荷重が作用する二次元問題および有限長円筒殻の中央に軸対称線荷重が作用する問題を解析し、その衝撃応答を明らかにするとともに先に得られたパラメータの妥当性の確認を行う。

第5章「飛翔体の衝突による液体と接する平板の衝撃応答」では液体と構造との連成問題における衝突問題を対象とする。飛翔体が衝突する液体と接する平板の衝撃応答に及ぼす連成効果について考察する。衝撃荷重の短い場合として質点を、また長い場合として無限長の棒を飛翔体とし、飛翔体と平板の衝突はHertzの接触理論に従うものとして解析する。実験により平板のひずみ応答を求め、解析の妥当性を確認する。これらの結果より、飛翔体の衝突による平板のひずみ応答に及ぼす液体との連成効果について検討する。

第6章「圧電素子による薄板の作用する衝撃圧力の測定」では液体と連成振動する薄肉平板に作用する衝撃圧力の計測法について考察を行う。薄板の剛性をできるだけ変化させないように動的応答性の高い圧電素子を板に直接、接着して衝撃圧力を測定することを試みた。このとき薄板の曲げ変形の影響が圧電素子の出力に含まれることから、これを除去する方法を考察する。衝撃圧力発生装置を製作して実験を行い、本測定方法の妥当性を確認する。

第7章「結論」では各章で得られた結果を総括し、今後の展望を述べる。

参考文献

[1.1] 例えば 大坪英臣、久保田晃弘：相関問題、(1990), 培風館。

[1.2] 例えば 竹内洋一郎：熱応力、(1981), 日新出版, p.306-320。

- [1.3] 例えば 池田拓郎：圧電材料学の基礎，(1984)，オーム社。
- [1.4] Brebbia C. : Chapter 5 Coupled Systems, Finite Element Handbook (Ed. by Kardestuncer H. and Norrie D.H.), (1989), McGraw-Hill, p.3.285-3.319.
- [1.5] Zienkiewicz O.C. and Bettess P. : Fluid-Structure Dynamic Interaction and Wave Forces An Introduction to Numerical Treatment, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.13(1978), p.1-16.
- [1.6] 清水信行：貯そうの耐震設計の研究動向、日本機械学会論文集（C編），Vol. 49, No.438(1983), p.145-153.
- [1.7] Brown S.J. : A Survey of Studies into the Hydrodynamic Response of Fluid-Coupled Circular Cylinders, Journal of Pressure Vessel Technology, Vol.104(1982), p.1-19.
- [1.8] Chen S.-S. : Flow-Induced Vibration of Circular Cylindrical Structures (1987), Hemisphere Publishing Corporation.
- [1.9] Proceedings of the International Conference on Flow Induced Vibrations (1982), BHRA Fluid Engineering Centre.
- [1.10] Proceedings of the International Conference on Flow Induced Vibrations (1987), BHRA Fluid Engineering Centre.
- [1.11] 吉田宏一郎：海洋構造物の設計の考え方、圧力技術, vol.18, No.1(1980), p.35-38.
- [1.12] 日本機械学会編：機械工学便覧 第12章 流体・熱を含む振動, (1987), p.A3·121-A3·141, 日本機械学会.
- [1.13] 例えば Junger M.C., Feit D. : Sound, Structures and Their Interaction (Second Edition), (1986), The MIT Press.
- [1.14] Bergeron L. : Water Hammer in Hydraulics and Wave Surges in Electricity, (1961), John Wiley & Sons.
- [1.15] Parmakian J. : Waterhammer Analysis, (1963), Dover Publications
(小堀威、横山重吉訳：水撃解析法、(1969), コロナ社)
- [1.16] Streeter V.L., Wylie E.B. : Hydraulic Transients, (1976), McGraw-Hill
(竹中俊夫監訳：流体過渡現象、(1973), 日本工業新聞社)
- [1.17] Skalak S. : An Extension of the Theory of Water Hammer, Transactions

of the ASME, Vol. 78(1956), p. 105-116.

- [1.18]Forrestal M.J., Herrmann G. : Response of a Submerged Cylindrical Shell to an Axially Propagating Step Wave, Journal of Applied Mechanics Vol.32, No.4(1965), p. 788-792.
- [1.19]Russell J.E., Herrmann G. : A Modified Cylindrical Wave Approximation, Journal of Applied Mechanics, Vol.35, No.4(1968), p. 819-822.
- [1.20]浦田喜彦：弾性円管と流体の連成波動（第1報 流体が非粘性の場合の基礎的解析）、日本機械学会論文集, Vol.41, No.351(1975), p. 3114-3125.
- [1.21]浦田喜彦：弾性円管と流体の連成波動（第2報 流体の粘性を考慮した場合の基礎的解析）、日本機械学会論文集, Vol.42, No.357(1976), p. 1389-1398.
- [1.22]浦田喜彦：弾性円管と流体の連成波動（第3報 管外壁に接する物質の力学的効果）、日本機械学会論文集, Vol.43, No.375(1977), p. 4139-4149.
- [1.23]浦田喜彦：弾性円管と流体の連成波動（第4報 粘性流体を含む直管系の振動数特性の近似計算式）、日本機械学会論文集, Vol.44, No.387(1978), p. 3788-3748.
- [1.24]浦田喜彦：弾性円管と流体の連成波動（第5報 伝ば速度の周波数依存性に関する実験）、日本機械学会論文集（C編）、Vol.45, No.396(1979), p. 869-875.
- [1.25]浦田喜彦：弾性円管と流体の連成波動（第6報 境界条件に関する考察）、日本機械学会論文集（C編）、Vol.47, No.415(1981), p. 274-282.
- [1.26]浦田喜彦：弾性円管と流体の連成波動（第7報 非軸対称現象に関する検討）、日本機械学会論文集（C編）、Vol.47, No.420(1981), p. 1125-1129.
- [1.27]浦田喜彦：弾性円管と流体の連成波動（第8報 流体粘性による減衰に関する実験）、日本機械学会論文集（C編）、Vol.48, No.435(1982), p. 1713-1721.
- [1.28]浦田喜彦：弾性円管と流体の連成波動（第9報 水撃の解析）、日本機械学会論文集（C編）、Vol.53, No.487(1987), p. 527-533.
- [1.29]鈴木真一：高速移動内圧をうける薄肉円筒の動的挙動、日本機械学会論文集（C編）、Vol.38, No.309(1972), p. 940-947.
- [1.30]鈴木真一：水撃作用による薄肉円筒の動的挙動、日本機械学会論文集（C編）Vol.41, No.346(1975), p. 1695-1701.
- [1.31]Walker J.S., Phillips J.W. : Pulse Propagation in Fluid-Filled Tubes,

- Journal of Applied Mechanics, Vol. 44, No. 1 (1972) p. 940-947.
- [1.32] Krause N., Goldsmith W., Sackman J.L. : Transients in Tubes Containing Liquids, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 19, No. 1 (1977) p. 53-68.
- [1.33] Barez F., Goldsmith W., Sackman J.L. : Longitudinal Waves in Liquid-Filled Tubes - 1. Theory, International Journal of Mechanical Sciences Vol. 21, No. 4 (1979), p. 213-221.
- [1.34] Barez F., Goldsmith W., Sackman J.L. : Longitudinal Waves in Liquid-Filled Tubes - 2. Experiments, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 21, No. 4 (1979), p. 223-236.
- [1.35] Katamanis F., Goldsmith W. : Fluid Effects and Response in Transverse Impact on Liquid-Filled Tubes, Experimental Mechanics, Vol. 22, No. 7 (1982), p. 245-255.
- [1.36] Katamanis F., Goldsmith W. : Transverse Impact on Fluid-Filled Cylindrical Tubes, Journal of Applied Mechanics, Vol. 49 (1982), p. 149-156.
- [1.37] Reismann H., Meyers G.J. : Dynamics of an Initially Stressed Fluid-Immersed Cylindrical Shell, Journal of Hydronautics, Vol. 12, No. 2 (1978) p. 118-121.
- [1.38] Tomski L., Kukla S. : Dynamical Response of Bar-Fluid-Shell System Simulating Hydraulic Cylinder Subjected to Arbitrary Axial Excitation, Journal of Sound and Vibration, Vol. 2, No. 2 (1984), p. 273-284.
- [1.39] 浦田喜彦 : 任意断面管内の気体の過渡的波動の近似解析、日本機械学会論文集 (C編), Vol. 52, No. 479 (1986), p. 2037-2038.
- [1.40] 宇治橋貞幸、松本浩之、中原一郎、重田正之 : 流体で満たされた無限長円筒殻の軸対称衝撃応答、日本機械学会論文集 (A編), Vol. 52, No. 477, (1986), p. 1417-1422.
- [1.41] Suzuki S. : Dynamic Behaviour of a Ring Filled with a Fluid, Ingenieur-Archiv, Vol. 59, (1989), p. 304-309.
- [1.42] Yen D.H.Y., Chou C.C. : Response of a Plate Supported by a Fluid Half Space to a Moving Pressure, Journal of Applied Mechanics, Vol. 37 (1970),

p.1050-1054.

- [1.43]Berglund J.W. : Transient Interaction of a Circular Plate and a Fluid Medium, Journal of Applied Mechancis, Vol.46(1979),p.26-30.
- [1.44]Golovanov V.A., Popov A.L., Chernyshev G.N. : Osillations of Plates under the Action of Concentrated Loads in an Acoustic Medium, PMM U.S.S.R, Vol.46(1983), p.231-236.
- [1.45]Hui D. : Viscoelastic Response of Floating Ice Plates under Distributed or Concentrated Loads, Journal of Strain Analysis, Vol.21, No.3(1986), p.135-143.
- [1.46]長屋幸助、永井克巳 : 流体を介して任意変動圧力を受ける接水円板の衝撃応答、日本機械学会論文集 (C編) , Vol.51, No.471(1986), p.2988-2996.
- [1.47]Engin A.E. : The Axisymmetric Response of a Fluid-Filled Shperical Shell to a Local Radial Impulse - a Model for Head Injury, Journal of Biomechanics, Vol.2(1969), p.325-341.
- [1.48]Kenner V.H., Goldsmith W. : Dynamic Loading of a Fluid-Filled Shperical Shell, International Journal of Mechanical Sciences, Vol.14(1972), p.557-568.
- [1.49]Akkas N. : Transient Response of a Moving Shperical Shell in an Acoustic Medium, International Journal of Solids and Structures, Vol.13, No.3 (1977), p.211-220.
- [1.50]Glenn L.A., Kidder R.E., : Blast Loading of a Spherical Container Surrounded by an Infinite Elastic Medium, Journal of Applied Mechanics, Vol.50(1983), p.723-726.
- [1.51]Bennett B.E., Herrmann G. : The Dynamic Response of an Elastic Half Space with an Overlaying Acoustic Fluid, Journal of Applied Mechanics, Vol.43(1976), p.39-42.
- [1.52]Roberts R.A. : Elastodynamic Response of Contacting Fluid and Solid Half-Spaces to a Three-Dimensional Point Load, Wave Motion, Vol.12(1990), p.583-593.
- [1.53]Nagaya K. : Transient Response in Flexure to General Uni-Directional

Loads of Variable Cross-Section Beam with Concentrated Tip Inertias
Immersed in a Fluid, Journal of Sound and Vibration, Vol. 99, No. 3 (1985),
p. 361-378.

[1.54] Nagaya K., Hai Y. : Seismic Response of Underwater Members of Variable
Cross Section, Journal of Sound and Vibration, Vol. 103, No. 3 (1985), p. 119
-138.

[1.55] 大坪英臣 : 流体－構造相関問題(1)、数理解析, No. 282 (1986), p. 36-42.

[1.56] 大坪英臣 : 流体－構造相関問題(2)、数理解析, No. 283 (1986), p. 65-70.

[1.57] 日本機械学会編 : 技術資料 流体計測法、(1985), 日本機械学会, p. 49-66.

[1.58] 文献[1.57]の p. 15-16.

第2章 数値ラプラス変換

2.1 緒言

線形衝撃問題において時間変数に対してラプラス変換が多く用いられる。ラプラス変換によれば、基礎方程式に含まれる時間変数に関する微分および積分をラプラス変換パラメータに置き換え代数方程式化することができ、また同時に初期条件を容易に満足することができる[2.1][2.2]。このように初期値問題に対する有力な解析手法の1つである。また対応原理[2.3]により動弾性問題の解から動粘弾性問題のラプラス変換解を容易に導出することができる。ラプラス変換領域における解析解を容易に導出することができる反面、この解を逆変換することはしばしば困難を伴う。このため種々の関数に対する順変換および逆変換の対応表が数多く作成されている。その中でも特に有名なものにErdelyiの編集したラプラス変換の表[2.4]がある。しかし様々な条件下で得られるラプラス変換解の関数形が表に掲載されていることが少なく、むしろ見いだせないことが一般的である。そのため、逆変換はCauchyの積分公式による分岐積分や留数定理などの関数解析の手法によって行われることが多い。この方法によって必ずしも逆変換解が得られるとは限らず、得られたとしても解析あるいは数値計算が煩雑になることや分岐積分の計算精度、留数和の収束性などの問題が生じ数値結果を求めることが困難になる場合がある。このようなことから数値的にラプラス逆変換を行う方法が考えられ、数多くの方法が提案されている。ここでラプラス数値逆変換法に関する過去の研究を概説する。

関数 $f(t)$ のラプラス順変換および逆変換は次の式(2.1.1)および(2.1.2)で定義される。

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt \quad (2.1.1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}(s) \exp(st) ds \quad (2.1.2)$$

ここで $\gamma > \gamma_0$ であり γ_0 は収束座標であり、 t および s は時間およびラプラス変換パラメータである。また $i = \sqrt{-1}$ である。

解析的手法を含めてラプラス逆変換法の代表的なものについて分類すると次のようになる。

[A] 式(2.1.1)を積分方程式として逆変換解を求める方法

(式(2.1.1)の $\bar{f}(s)$ を既知関数として $f(t)$ を未知関数とする)

A.1 積分の変数変換と Legendre-Gauss の積分公式を適用する Bellman の方法 [2.5]

A.2 積分の変数変換と直交関数展開による方法

A.2.1 Legendre の直交多項式を用いる方法 [2.6] - [2.10]

A.2.2 Jacobi の直交多項式を用いる方法 [2.11]

A.2.3 Gegenbauer の直交多項式を用いる方法 [2.12] [2.13]

A.3 Parseval の定理と直交関数展開を適用する Weeks の方法 [2.14]

A.4 誤差の 2 乗和が最小となるように関数近似する方法 [2.15]

A.5 統計分布を利用する方法 [2.16]

[B] 式(2.1.2)の複素反転積分を実行する方法

B.1 Cauchy の積分定理に基づく方法

(Bromwich 積分路などによる分岐積分、留数定理などによる解析的方法)

B.2 式(2.1.2)を式(2.1.1)に変形する Cagniard 法 [2.17]

B.3 式(2.1.2)を数値積分する方法

B.3.1 複素線積分する方法

B.3.2 複素積分を実数積分に変換する Schmittroth の方法 [2.18]

B.4 式(2.1.2)の指数関数を近似して複素積分を行う方法 [2.19] [2.20]

[C] 式(2.1.1)および(2.1.2)を離散フーリエ変換型に変換する方法 [2.21] - [2.25]

数値ラプラス逆変換について考察された当初は [A] に分類される方法が主に研究されてきた。式(2.1.1)において $\bar{f}(s)$ を既知、時系列の関数 $f(t)$ を解とする積分方程式として考え、種々の級数展開法などを用いて数値逆変換法の定式化が試みられている。これらの方法を比較検討した Davies と Martin ら [2.26] により報告がある。また松本 [2.27] によっても数種の方法を比較した結果および方法の有効性が示されている。[A] の方法は結果を得るための数値計算がかなり短くてすみ、大部分の方法が実数の計算で行うことができる。しかし、これらの方法では関数の時間変動によって計算精

度が大きく影響される。そのため、あらかじめ得られる結果を予想した上でなければ精度のよい数値結果を得ることが困難であることが知られている。

ラプラス逆変換法として[B]のB.1~B.3の方法は解析的手法に近いものであり従来の理論計算に通常用いられているものであり良好な精度の結果が得られ信頼性が高い。しかし、これらの方法はかなり煩雑な数学的手法を用いる必要がある。わずかの例を除いて、それぞれの解くべき問題ごとに固有値（例えば固有振動数など）を試行錯誤法に基づいて求めなければならない場合が多く、数値計算においても煩雑な手続きを経た後に数値結果が得られる。したがって、これらの手法に基づいて汎用的なプログラムを作成することが困難であると思われる。

そこで汎用的なでかつ計算精度が良好であり結果の信頼性のよい手法が検討された。そのうち細野の方法[2.19]および離散型フーリエ変換に基づく方法[2.21]~[2.25]が代表的なものである。特に実験解析に数値ラプラス変換を適用するものとして井上ら[2.28]により離散型フーリエ変換に基づく方法の有効性が示されている。そこで本章では、後の解析に使用することを目的として細野の方法と計算式の導出が簡単なKrings-Wallerの方法[2.21]を取りあげ数種の基本的な関数に対して適用し、それぞれの方法の有効性と最適な使用法について考察する。

2.2 Krings-Wallerの方法

2.2.1 基礎理論

式(2.1.2)はFig. 2.2.1のような積分路に沿って積分が行われることから、ラプラス変換パラメータ s を次のように変数変換する。

$$s = \gamma + i\omega \quad (2.2.1)$$

ここで γ は一定値であり、 $\bar{f}(s)$ が s 平面内において $\text{Re}[s] = \gamma$ の左半平面に存在する極以外では解析的であるように選ばれる。

式(2.2.1)を式(2.1.1)および(2.1.2)に代入する。

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} [f(t) \exp(-\gamma t)] \exp(-i\omega t) dt \quad (2.2.2)$$

$$f(t) = \frac{\exp(\gamma t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\gamma + i\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (2.2.3)$$

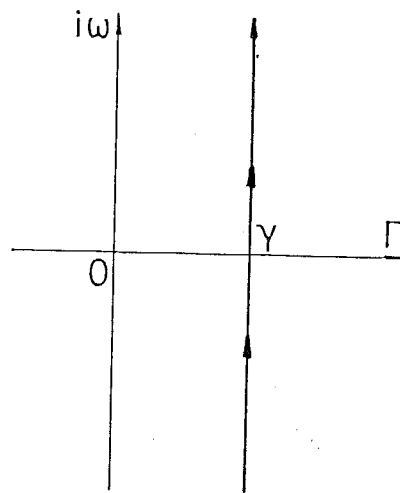


Figure 2.2.1 Integral Path for Inverse Laplace Transform
 $(s = \Gamma + i\omega)$

このように変数変換によりラプラス変換式をフーリエ変換型の積分に書き換えることができる。

さて式(2.2.2)の右辺を実数部と虚数部に分離すると次のようになる。

$$f(t) = \frac{\exp(\gamma t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re}[\bar{f}(\gamma+i\omega)] \cos(\omega t) - \operatorname{Im}[\bar{f}(\gamma+i\omega)] \sin(\omega t)] d\omega \\ + i \frac{\exp(\gamma t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re}[\bar{f}(\gamma+i\omega)] \sin(\omega t) + \operatorname{Im}[\bar{f}(\gamma+i\omega)] \cos(\omega t)] d\omega \quad (2.2.4)$$

関数 $f(t)$ は実関数であることから式(2.2.4)の第2項は零でなければならない。このためラプラス変換領域の関数 $\bar{f}(s)$ の実数部および虚数部はそれぞれ偶関数および奇関数でなければならないことになる。よって関数 $\bar{f}(s)$ は次式を満足しなければならない。

$$\operatorname{Re}[\bar{f}(s)] = \operatorname{Re}[\bar{f}(-s)] \quad (2.2.5)$$

$$\operatorname{Im}[\bar{f}(s)] = -\operatorname{Im}[\bar{f}(-s)]$$

式(2.2.2)および(2.2.3)を解析的に解くことは極めて困難であることから、次式のようにそれぞれの積分変数を離散化する。

$$\omega = n\Delta\omega, \quad t = k\Delta t, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (2.2.6)$$

式(2.2.6)を式(2.2.2)および(2.2.3)に代入すれば次のように離散フーリエ変換型に書き換えることができる。

$$\bar{f}(\gamma + ni\Delta\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} [f(k\Delta t) \exp(-\gamma k\Delta t)] \exp(in\Delta\omega k\Delta t) \Delta\omega \quad (2.2.7)$$

$$f(k\Delta t) = \frac{\exp(\gamma t)}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{f}(\gamma + ni\Delta\omega) \exp(in\Delta\omega k\Delta t) \Delta\omega \quad (2.2.8)$$

時間 $0 \leq t \leq T$ の範囲を解析の対象として、 $t \geq T$ において $f(t)$ が零と仮定すればサンプリング定理[2.25]により $\Delta\omega$ および Δt が次のように定められる。

$$T = N\Delta t, \quad \Delta\omega = 2\pi/T \quad (2.2.9)$$

ここで N は解析の対象とする時間範囲 T の分割数 (サンプリング数) を示す。

式(2.2.9)を式(2.2.7)および(2.2.8)に代入することによりラプラス変換および逆変換の定義式を離散フーリエ変換型に表示することができる。

$$\bar{f}(\gamma + in\Delta\omega) = \sum_{k=0}^{TN-1} [f(k\Delta t) \exp(-\gamma k\Delta t)] \exp(-i2\pi nk/N) \quad (2.2.10)$$

$$f(k\Delta t) = \frac{\exp(\gamma k\Delta t)}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{f}(\gamma + in\Delta\omega) \exp(i2\pi nk/N) \quad (2.2.11)$$

ここで

$$n, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

であり、 $\bar{f}(\gamma + in\Delta\omega)$ は式(2.2.5)を満足していることに注意しなければならない。 γ の数値については、 $\bar{f}(s)$ が s 平面内において $\text{Re}[s]=\gamma$ の左半平面に存在する極以外では解析的である限り任意に選ぶことができる。

式(2.2.10)あるいは(2.2.11)の数値計算にあたっては計算の高速化するために高速フーリエ変換 (FFT) [2.29][2.30]のアルゴリズムが適用される。このFFTの適用により、式(2.2.11)の1回の計算により N 個の時系列のデータ $f(k\Delta t)$ を得ることができる。

2.2.2 数値計算例

本項ではTable 2.2.1に示される5種類の基本的な関数についてKrings-Wallerの方法を適用して数値ラプラス逆変換を試みた。本方法のパラメータ N および γ を様々に変化させて数値計算を行い、本方法の特徴およびその最適な利用法について検討する。

適用例(1)：時間範囲 $T=2$ としてKrings-Wallerの方法をステップ関数に適用した。このとき本方法のパラメータを $(N=2^6, \gamma=6/T)$ 、 $(N=2^9, \gamma=6/T)$ および $(N=2^6, \gamma=3/T)$ の3種類に変化させた場合の数値計算の結果をそれぞれFig.2.2.2(a)、(b)および(c)に示す。それぞれのグラフにおいて実線は数値逆変換法を用いた場合であり、破線は正解を示す。また具体的な数値をTable 2.2.2に示す。

このステップ関数 $f(t)$ は $t=1$ において不連続となっている。ラプラス逆変換されて得られる関数の不連続部($t=t_1$)は解析的に次式で定義されている。

$$f(t) = \{f(t_1+0) + f(t_1-0)\} / 2 \quad (2.2.12)$$

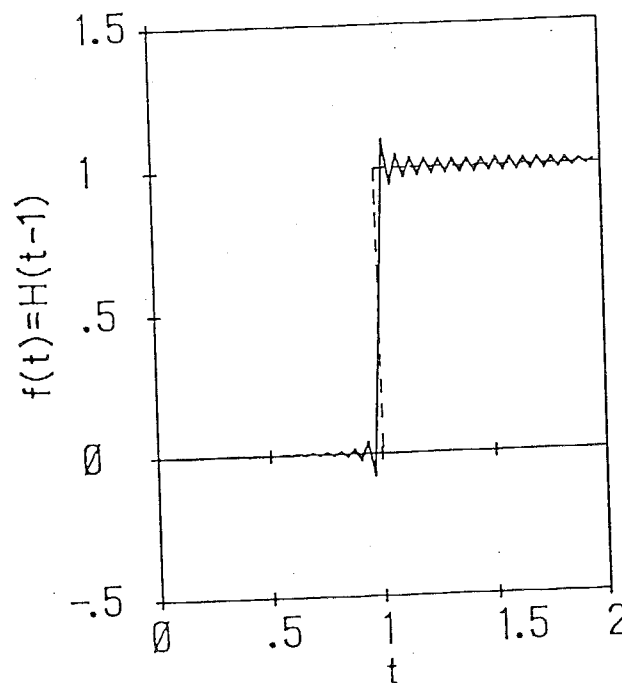
(b)の場合、不連続部は $t=1$ において、ほぼ0.5の数値が得られ逆変換の精度が良好なことを示している。

Fig.2.2.2(a)および(b)の結果を比較したとき数値逆変換の結果は正解を中心として振動する傾向があり、サンプリング数を増加させるにつれ精度が向上することがわかる。このような傾向は特に関数の不連続部で見られる。これはフーリエ変換においてよく知られたGibbsの現象と呼ばれるものと同様の現象であり、式(2.2.10)において無限級数を有限項で打ち切ったために起ったものである。

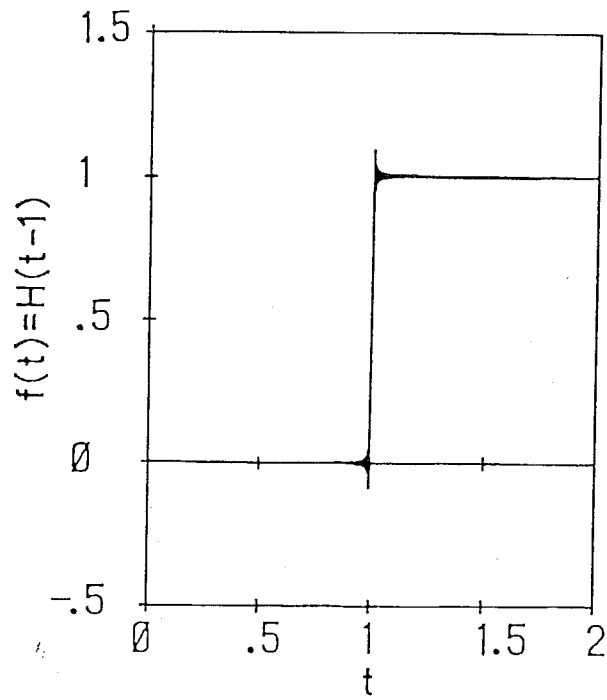
Table 2.2.1 Test Function for Krings-Waller's Method

	Time Domain	Laplace Transformed Domain
(1)	$f(t)=H(t-1)$	$f(s)=\exp(-s)/s$
(2)	$f(t)=\sin(\pi t)$	$f(s)=\pi/(s^2+\pi^2)$
(3)	$f(t)=\exp(-0.5t)$	$f(s)=1/(s+0.5)$
(4)	$f(t)=\exp(-0.2t)\sin(t)$	$f(s)=1/((s+0.2)^2+1)$
(5)	$f(t)=\begin{cases} 0 & (4n-0.5 \leq t \leq 4n+0.5) \\ 1 & (4n+0.5 \leq t \leq 4n+1.5, \\ & 4n+2.5 \leq t \leq 4n+3.5) \\ 2 & (4n+1.5 \leq t \leq 4n+2.5) \\ & (n=0,1,2,\dots) \end{cases}$	$f(s)=\cosh(s/2)/(s \cdot \cosh(s))$

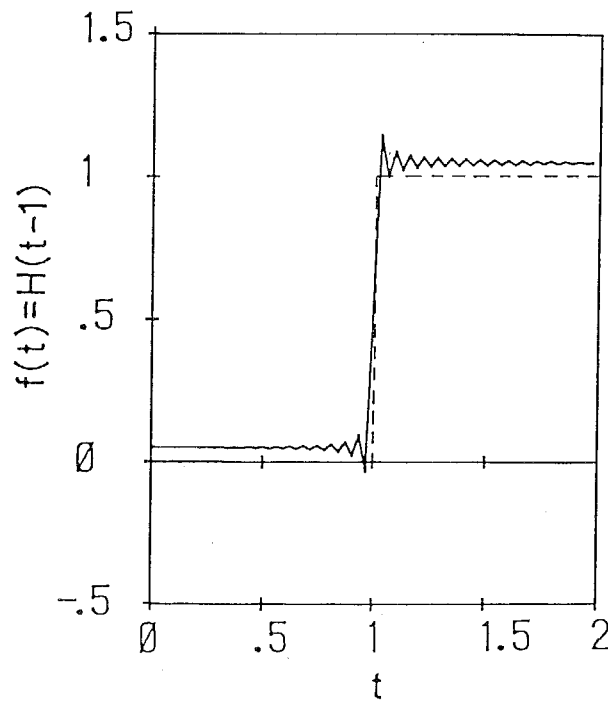
where $H(t)$ is step function $H(t)=0(t<0)$, $1/2(t=0)$, $1(t>0)$



(a) $N=2^6(=64)$, $\gamma=6/T$, $T=2$
 Figure 2.2.2 Numerical Results of Krings & Waller's Method
 Test Function : $f(t)=H(t-1)$
 — : Numerical Result, - - - - : Exact Solution
 (Continued)



(b) $N=2^9 (=512)$, $\gamma = 6/T$, $T=2$



(c) $N=2^6 (=64)$, $\gamma = 3/T$, $T=2$

Figure 2.2.2 Numerical Results of Krings & Waller's Method

Test Function : $f(t) = H(t-1)$

— : Numerical Result, ---- : Exact Solution

Table 2.2.2 Numerical Results of Krings & Waller's Method
Test Function : $f(t)=H(t-1)$

t	Exact Results	Numerical Results (T=2)		
		$N=2^6, \gamma=6/T$	$N=2^9, \gamma=6/T$	$N=2^6, \gamma=3/T$
0.0000	0.000000E+00	2.484681E-03	2.484911E-03	5.239518E-02
0.0625	0.000000E+00	2.514009E-03	2.488588E-03	5.251508E-02
0.1250	0.000000E+00	2.556129E-03	2.493869E-03	5.266112E-02
0.1875	0.000000E+00	2.616114E-03	2.501389E-03	5.284059E-02
0.2500	0.000000E+00	2.701160E-03	2.512052E-03	5.306311E-02
0.3125	0.000000E+00	2.821628E-03	2.527157E-03	5.334173E-02
0.3750	0.000000E+00	2.992713E-03	2.548613E-03	5.369458E-02
0.4375	0.000000E+00	3.237242E-03	2.579287E-03	5.414774E-02
0.5000	0.000000E+00	3.590552E-03	2.623623E-03	5.474007E-02
0.5625	0.000000E+00	4.109542E-03	2.688789E-03	5.553230E-02
0.6250	0.000000E+00	4.890709E-03	2.786960E-03	5.662504E-02
0.6875	0.000000E+00	6.109594E-03	2.940357E-03	5.819820E-02
0.7500	0.000000E+00	8.118572E-03	3.193817E-03	6.060869E-02
0.8125	0.000000E+00	1.173608E-02	3.652479E-03	6.467958E-02
0.8750	0.000000E+00	1.937117E-02	4.632405E-03	7.282447E-02
0.9375	0.000000E+00	4.227804E-02	7.712936E-03	9.630181E-02
1.0000	5.000000E-01	4.929873E-01	5.012975E-01	5.476459E-01
1.0625	1.000000E+00	9.436465E-01	9.948759E-01	9.990065E-01
1.1250	1.000000E+00	9.664054E-01	9.979380E-01	1.022534E+00
1.1875	1.000000E+00	9.738023E-01	9.988882E-01	1.030766E+00
1.2500	1.000000E+00	9.771050E-01	9.993076E-01	1.034963E+00
1.3125	1.000000E+00	9.787438E-01	9.995148E-01	1.037546E+00
1.3750	1.000000E+00	9.795676E-01	9.996190E-01	1.039342E+00
1.4375	1.000000E+00	9.799725E-01	9.996703E-01	1.040720E+00
1.5000	1.000000E+00	9.801949E-01	9.996986E-01	1.041869E+00
1.5625	1.000000E+00	9.804150E-01	9.997267E-01	1.042906E+00
1.6250	1.000000E+00	9.808055E-01	9.997761E-01	1.043909E+00
1.6875	1.000000E+00	9.815596E-01	9.998711E-01	1.044938E+00
1.7500	1.000000E+00	9.829161E-01	1.000042E+00	1.046047E+00
1.8125	1.000000E+00	9.851852E-01	1.000327E+00	1.047287E+00
1.8750	1.000000E+00	9.887806E-01	1.000778E+00	1.048714E+00
1.9375	1.000000E+00	9.942616E-01	1.001465E+00	1.050389E+00

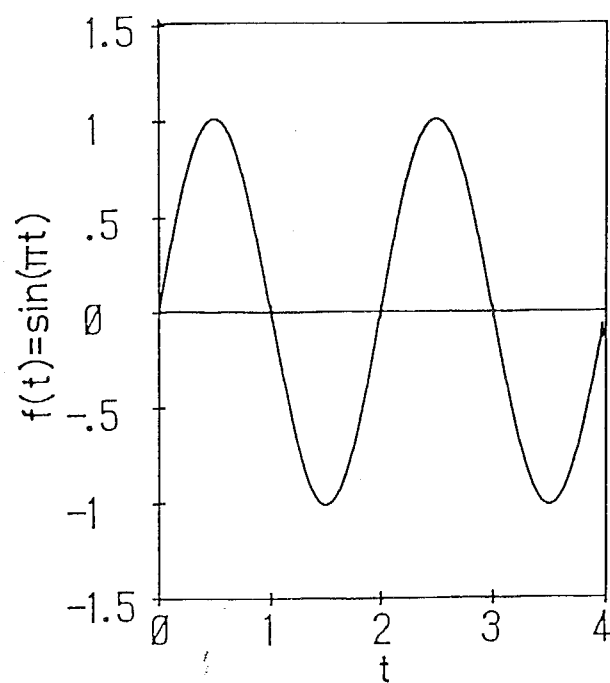
またFig. 2.2.2(a)および(c)を比較することにより数値結果に及ぼす γ の影響を考える。 γ の値が小さい場合、時間の全範囲において関数値全体が大きな誤差を含むことがわかる。よって、あまり γ の値を小さくしすぎると誤差が大きくなる傾向がある。

適用例(2)：得られる関数が正弦関数である場合について数値計算を行った。時間範囲 $T=4$ としたときサンプリング数 N を 2^8 と固定し、 γ の値のみを変化させた。このとき本方法のパラメータを $\gamma=5/T$ 、 $\gamma=3/T$ および $\gamma=9/T$ の3種類に変化させて行った数値計算の結果をそれぞれFig. 2.2.3(a)、(b)および(c)に示す。それぞれのグラフにおいて実線は数値逆変換法を用いた場合であり、破線で正解を示したが実線とほとんど区別できない。Fig. 2.2.3より適用例(1)の場合と同様に γ の値が小さすぎると時間範囲 T を通して誤差が大きくなることがわかる。また γ の値を大きくするにつれ時間後半において数値結果は正解を中心として大きく振動し誤差が増大する傾向が見られる。しかしここでは数値を具体的に示していないが γ の値が小さい場合に比較して時間初期における精度のよい結果を得ることができる。

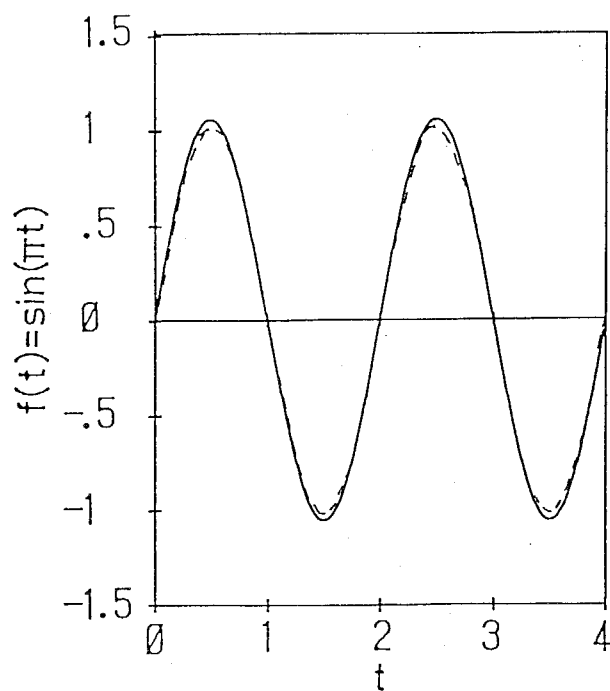
適用例(3)：次に指数関数を数値計算の対象とした場合について考える。 $T=10$ および $N=2^9$ として固定し、 γ の値のみを $3/T$ および $5/T$ として数値計算を行った結果をFig. 2.2.4(a)および(b)に示す。いずれの数値結果も時間後半において誤差が急激に増大することがわかる。この関数の場合は他の適用例に比較して γ の値が小さくても精度のよい結果を得ることができる。またここでは結果を示さないが N の値を大きくすれば時間後半でも精度のよい数値を得ることができる。

適用例(4)：次に時間とともに振動しながら減衰する波形を模擬した関数について数値計算を行う。 $T=16$ および $N=2^8$ と固定し、 $\gamma=5/T$ および $8/T$ と変化した結果をそれぞれFig. 2.2.5(a)および(b)に示す。(a)の場合、時間後半においてわずかに誤差が見られるがほぼ妥当な精度で数値結果を得ることができる。適用例(2)の正弦関数の同様に高次の周波数成分をあまり含まない場合は本方法を用いれば比較的容易に精度のよい結果を得ることが可能である。

適用例(5)：この適用例は棒の縦衝撃における応力の時間変動に見られる関数形である。この関数は不連続部を持ち、一般には数値逆変換では精度のよい結果を得ることが困難な関数である。Fig. 2.2.6に $T=7$ 、 $N=2^9$ および $\gamma=5/T$ とした場合の結果を示す。この場合も適切にパラメータを選択すれば精度よく逆変換することができる。

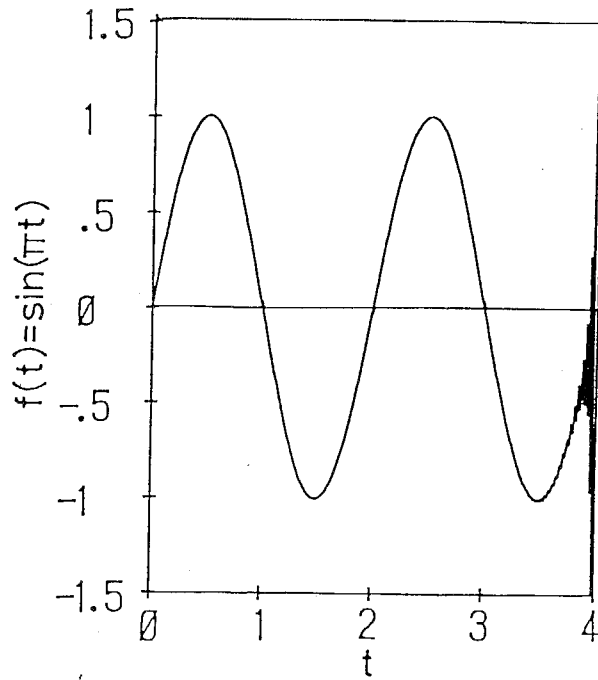


(a) $N=2^8 (=256)$, $\gamma = 5/T$, $T=4$

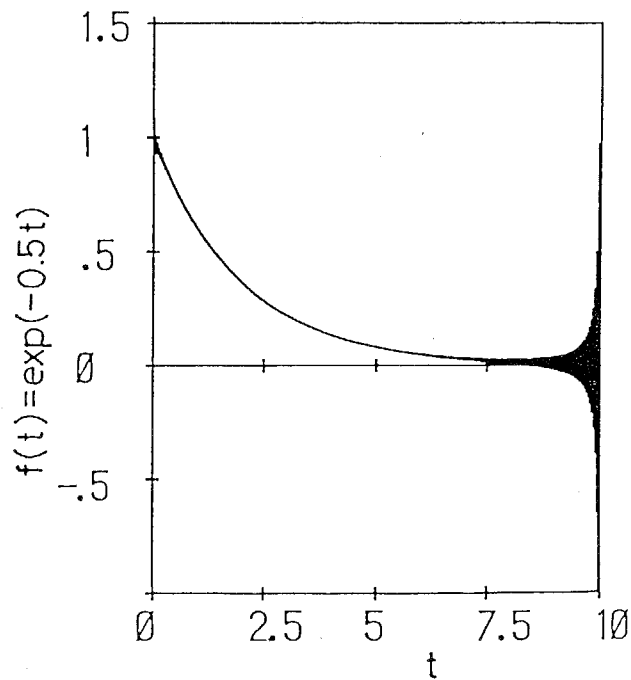


(b) $N=2^8 (=256)$, $\gamma = 3/T$, $T=4$

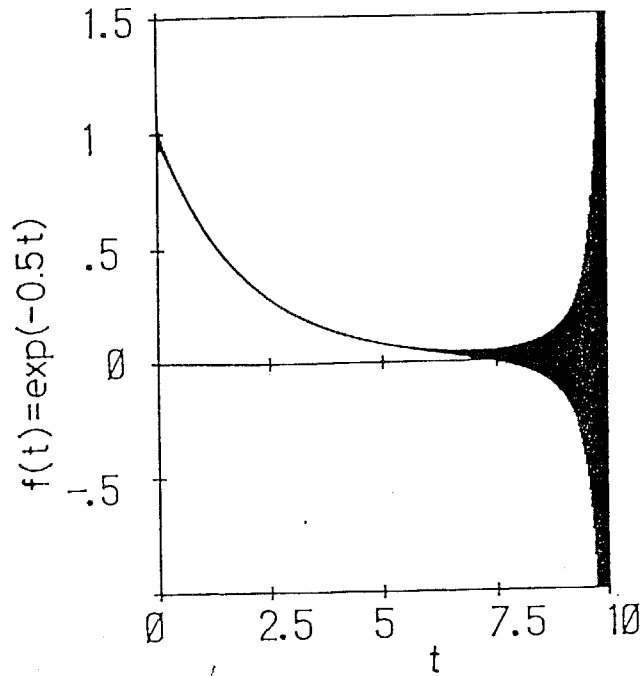
Figure 2.2.3 Numerical Results of Krings & Waller's Method
 Test Function : $f(t)=\sin(\pi t)$
 —: Numerical Result, - - - - - : Exact Solution
 (Continued)



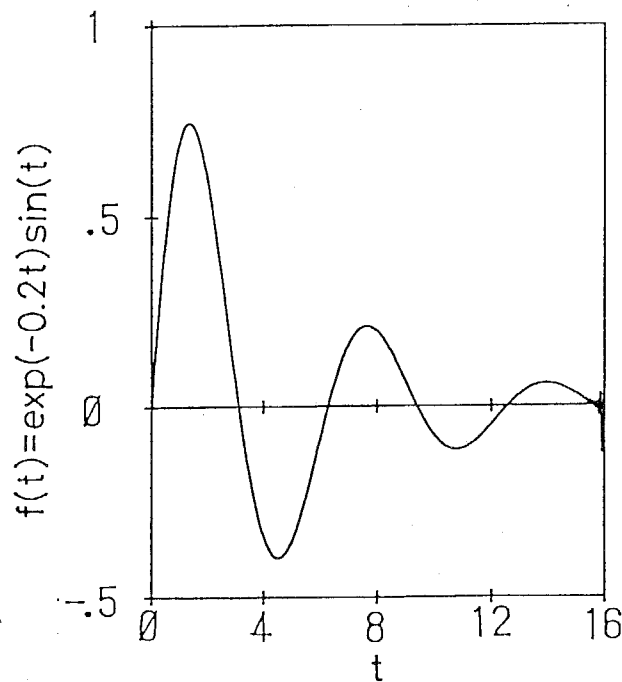
(c) $N=2^8(=256)$, $\gamma=9/T$, $T=4$
 Figure 2.2.3 Numerical Results of Krings & Waller's Method
 Test Function : $f(t)=\sin(\pi t)$
 — : Numerical Result, ---- : Exact Solution



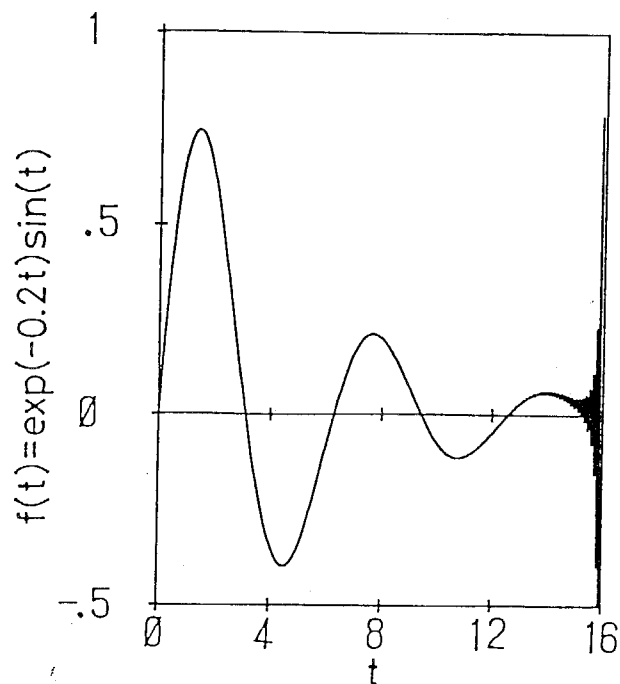
(a) Numerical Results, $N=2^9(=512)$, $\gamma=3/T$, $T=10$
 Figure 2.2.4 Numerical Results of Krings & Waller's Method
 Test Function : $f(t)=\exp(-0.5t)$
 — : Numerical Result, ---- : Exact Solution
 (Continued)



(b) Numerical Results, $N=2^9(=512)$, $\gamma=5/T$, $T=10$
 Figure 2.2.4 Numerical Results of Krings & Waller's Method
 Test Function : $f(t)=\exp(-0.5t)$
 — : Numerical Result, - - - : Exact Solution



(a) Numerical Results, $N=2^8(=256)$, $\gamma=5/T$, $T=16$
 Figure 2.2.5 Numerical Results of Krings & Waller's Method
 Test Function : $f(t)=\exp(-0.2t)\sin(t)$
 — : Numerical Result, - - - : Exact Solution
 (Continued)



(b) Numerical Results, $N=2^8 (=256)$, $\gamma=8/T$, $T=16$
 Figure 2.2.5 Numerical Results of Krings & Waller's Method
 Test Function : $f(t)=\exp(-0.2t)\sin(t)$
 — : Numerical Result, — : Exact Solution

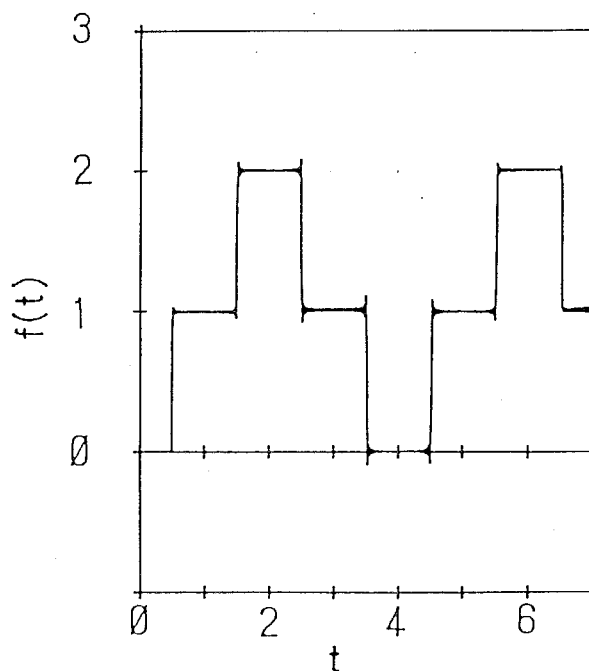


Figure 2.2.6 Numerical Results of Krings & Waller's Method
 Test Function : $f(t)=\begin{cases} 0 & (4n-0.5 \leq t \leq 4n+0.5) \\ 1 & (4n+0.5 \leq t \leq 4n+1.5, 4n+2.5 \leq t \leq 4n+3.5) \\ 2 & (4n+1.5 \leq t \leq 4n+2.5) \end{cases}$
 $(n=0, 1, 2, \dots)$
 Numerical Results, $N=2^9 (=512)$, $\gamma=5/T$, $T=7$
 — : Numerical Result, — : Exact Solution

2.2.3 考察

Krings-Wallerの方法の最も大きな特徴は高速フーリエ変換の適用により、一度の級数計算により関数の時間変動を求めることができることである。また順変換についても逆変換と同様に計算することができるため、時系列の実験データなどの数値を取り扱うこともできる。ただし場合によっては数値計算をするために計算機の容量を多く必要とすることがある。

前項2.2.2の基本的な関数に対する数値計算結果からKrings-Wallerの方法の特徴を考察する。

Krings-Wallerの方法はフーリエ変換の変形された形として考えればFig.2.2.7のように解釈することができる。この方法のアルゴリズムはまずラプラス変換領域における関数値をフーリエ逆変換する。フーリエ逆変換では計算の高速化をはかるために高速フーリエ変換 (FFT) のアルゴリズムが適用されている。これらのフーリエ変換された数値に指数関数 $\exp(\gamma k \Delta t)$ を乗じることにより時間領域における関数値 $f(t)$ が得られる。

ところでフーリエ逆変換を離散的に行う際にはFig.2.2.8に示されるような折り返しひずみ(Aliasing Distortion)[2.31]が生じることが知られている。これは本来、無限周期を持つ関数を有限周期で打ち切るために生じるものである。このため折り返し誤差の原因となる時間後半の数値が時間前半の数値に比べて小さくなり折り返し誤差が抑制されあまり数値結果に影響しなくなる。したがってあまり γ の値を小さく設定しないことが必要となる。逆に γ の数値を大きくすれば時間後半で正解を中心として打ち切り周波数で激しく振動する。これは高速フーリエ変換後、時間後半で大きな値となる関数 $\exp(\gamma k \Delta t)$ を乗じることにより本来、極めて小さく求められた数値の誤差が拡大されて時間前半と同程度のオーダーの不正確な結果が得られる。このため高速フーリエ変換時には時間後半でかなり高い精度の数値を求めておく必要があり、サンプリング数 N を大きくして高次のラプラス変換パラメータまでを計算することが望ましい。

よってKrings-Wallerの方法では求められる関数値において時間全域でパラメータ γ の値の設定による折り返しひずみを原因とする誤差の影響が大きく、時間後半では高次のラプラス変換パラメータを無視したために生じる誤差の影響が大きくなる。また高次の周波数成分を多く含む関数に対してはサンプリング数 N を大きく設定しなけ

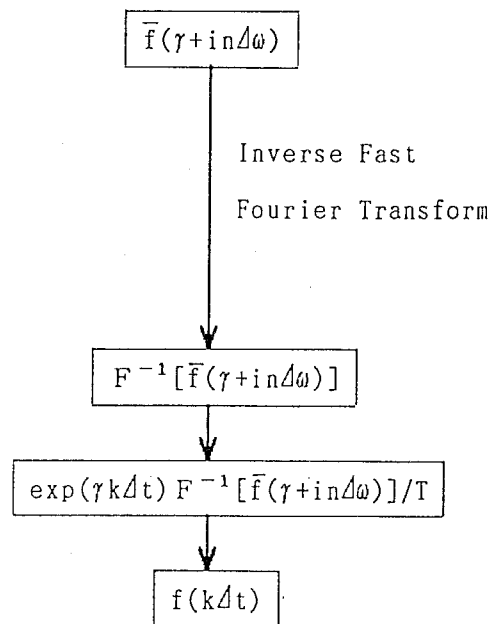
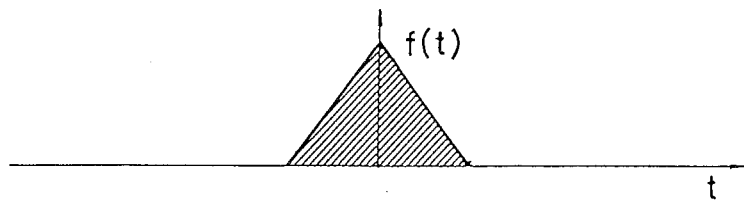
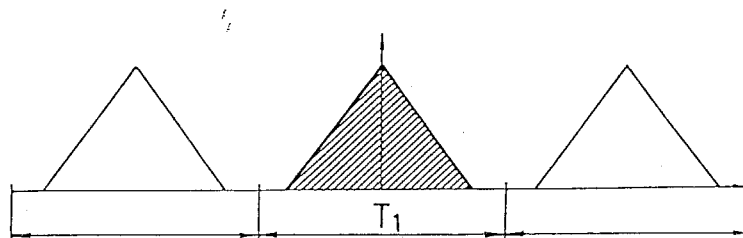


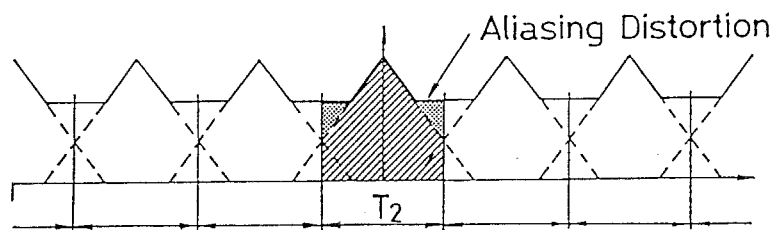
Figure 2.2.7 Algorithm of Krings and Waller's Method
 $F^{-1}[\bar{f}]$: Inverse Fourier Transformed Function $\bar{f}(s)$



(a) Exact Solution



(b) Inverse Fourier Transform
 T_1 : Adequate Period



(c) Inverse Fourier Transform
 T_2 : Too short Period (Appearance of Aliasing Distortion)

Figure.2.2.8 Aliasing Distortion in Inverse Fourier Transform
 t : Time

ればならない。

よって Krings-Waller の方法においてパラメータ γ とサンプリング数 N の適切な選択により逆変換の精度が定められる。前項の基本的な関数に対する数値計算の結果より次のようなパラメータの選択基準が得られる。

a. 1) γ の値は $3/T$ から $10/T$ の範囲が適当である。一般的には $4/T$ から $6/T$ 程度の範囲が良好な精度で数値結果が得られる。 γ の値が小さいとき時間範囲 T 全域にわたって誤差が生じる。また γ の値が大きいとき時間後半で誤差が増大する。

a. 2) サンプリング数 N を増加させれば精度が向上する。特に時間後半における精度が向上する。

また得られた結果に対する精度を判定するためには次のような基準を用いればよい。

b. 1) 初期条件（時間が零のときの数値）が適切な精度で求められているかどうか。求められていない場合は γ の値を大きくする。

b. 2) 時間後半で時間変動が激しく振動しているかどうか。必要のない時間範囲であれば振動が激しくなる前の時間で数値結果を切り捨てる。あるいは N の値を大きくする。

2.3 細野の方法

2.3.1 基礎理論

ラプラス逆変換の定義式 (2.1.2) に含まれる指数関数 $\exp(z)$ を次のように近似する。

$$\exp(z) \cong E_{cc}(z, \gamma_1) = \frac{\exp(\gamma_1)}{2 \cosh(\gamma_1 - z)} \quad (2.3.1)$$

式 (2.3.1) を級数展開すれば次式が得られる。

$$E_{cc}(z, \gamma_1) = \frac{\exp(\gamma_1)}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n i}{z - \{\gamma_1 + i(n-0.5)\pi\}} \quad (2.3.2)$$

ここで $i = \sqrt{-1}$ である。

式 (2.3.2) を式 (2.1.2) に代入すれば次式となる。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}(s) E_{cc}(st, \gamma_1) ds \quad (2.3.3)$$

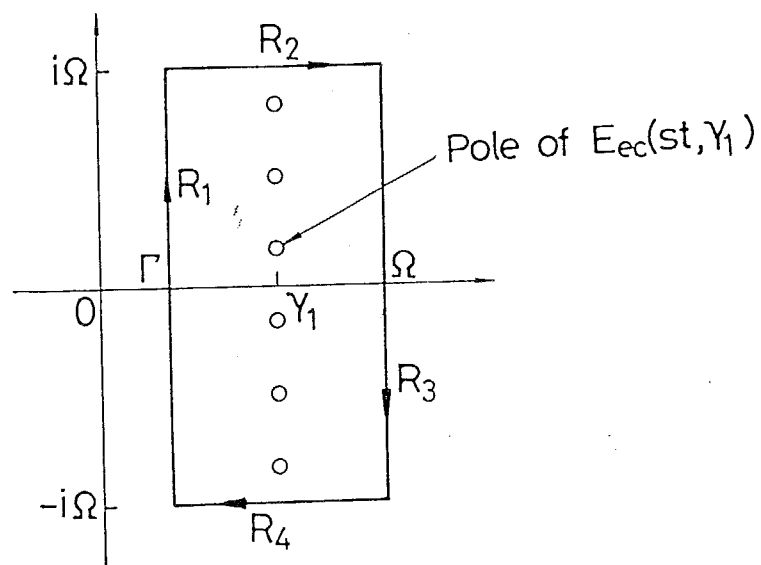


Figure 2.3.1 Integral Contour R for Hosono's Method

式(2.3.4)の複素積分を求めるためにFig. 2.3.1に示される積分路Rを用いるものとする。

$$\text{積分路 } R=R_1+R_2+R_3+R_4$$

$$R_1 : \Gamma-i\Omega \rightarrow \Gamma+i\Omega \quad (\operatorname{Re}[s]:\text{const.})$$

$$R_2 : \Gamma+i\Omega \rightarrow \Omega+i\Omega \quad (\operatorname{Im}[s]:\text{const.})$$

$$R_3 : \Omega+i\Omega \rightarrow \Omega-i\Omega \quad (\operatorname{Re}[s]:\text{const.})$$

$$R_4 : \Omega-i\Omega \rightarrow \Gamma-i\Omega \quad (\operatorname{Im}[s]:\text{const.})$$

ただし

$$\Gamma \leq \gamma_1 \leq \Omega$$

とする。

式(2.3.3)の積分は積分路 R_1 に沿って行われるものとし、その後 Ω を無限大にすることにより求められる。

積分路 R_1 に沿う積分 I_1 は次式のように表わされる。

$$I_1 = I + I_2 + I_3 + I_2^* \quad (2.3.4)$$

ここで

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{R_1} \bar{f}(s) E_{cc}(st, \gamma_1) ds, \quad I = \frac{1}{2\pi i} \int_R \bar{f}(s) E_{cc}(st, \gamma_1) ds$$

$$I_2 = \frac{-1}{2\pi i} \int_{R_2} \bar{f}(s) E_{cc}(st, \gamma_1) ds, \quad I_3 = \frac{-1}{2\pi i} \int_{R_3} \bar{f}(s) E_{cc}(st, \gamma_1) ds$$

ここで上付の添字*は共役複素記号である。

そこで式(2.3.4)のそれぞれの積分について、それぞれ評価する。

まず積分 I について考える。関数 $\bar{f}(s)$ が $\operatorname{Re}[s] > \Gamma$ において正則であると仮定し、式(2.3.2)の関数 $E_{cc}(st, \gamma_1)$ は $(\gamma_1 + i(n-0.5)\pi)/t$ で示される無限個の極を持つことから、留数定理により次のようになる。このとき $\Omega \rightarrow \infty$ とする。

$$I = \frac{\exp(\gamma_1)}{2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} i \bar{f}\left(\frac{\gamma_1 + i(n-0.5)\pi}{t}\right)$$

$$= \frac{\exp(\gamma_1)}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{Im} \left[\bar{f}\left(\frac{\gamma_1 + i(n-0.5)\pi}{t}\right) \right] \quad (2.3.5)$$

また積分 I_2 を変数変換することにより次式となる。

$$I_2 = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \bar{f}\left(\frac{\gamma+i\Omega}{t}\right) E_{cc}(\gamma+i\Omega, \gamma_1) \frac{d\gamma}{t} \quad (2.3.6)$$

したがって

$$2\pi |I_2| \leq \frac{1}{t} \int_{\Gamma} \left| \bar{f}\left(\frac{\gamma+i\Omega}{t}\right) E_{cc}(\gamma+i\Omega, \gamma_1) \right| d\gamma \quad (2.3.7)$$

となる。

上式において

$$|E_{cc}(\gamma+i\Omega, \gamma_1)| = \frac{\exp(\gamma_1)}{2\cosh(\gamma-\gamma_1)} \quad (2.3.8)$$

となるので

$$M_2 = \max_{\Gamma} \left| \bar{f}\left(\frac{\gamma+i\Omega}{t}\right) \right| \quad (2.3.9)$$

とおけば式(2.3.7)は次式のようにになる。

$$2\pi |I_2| < \frac{M_2 \exp(\gamma_1)}{t} \int_0^{\infty} \frac{d\gamma}{\cosh(\gamma)} = \frac{\pi M_2 \exp(\gamma_1)}{t} \quad (2.3.10)$$

次に積分 I_3 については

$$M_3 = \max_{-\Omega \leq \sigma \leq \Omega} \left| \bar{f}\left(\frac{\Omega+i\sigma}{t}\right) \right| \quad (2.3.11)$$

とおくと次のようになる。

$$2\pi |I_3| < \frac{1}{t} \int_{-\Omega}^{\Omega} \left| \bar{f}\left(\frac{\Omega+i\sigma}{t}\right) E_{cc}(\Omega+i\sigma, \gamma_1) \right| d\sigma \quad (2.3.12)$$

式(2.3.12)をさらに整理すると次式が求められる。

$$2\pi |I_3| < \frac{M_3}{t} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{\exp(\gamma_1)}{2(\sinh^2 R + \cos^2 \sigma)^{1/2}} d\sigma \quad (2.3.13)$$

そこで Ω を無限大にすると

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \bar{f}(s) = 0 \quad (2.3.14)$$

となることから式(2.3.10)および(2.3.13)より M_2 および M_3 はそれぞれ零となる。よって $t > 0$ のとき積分 I_2 , I_2^* および I_3 はそれぞれ零となる。

よって以上の結果をまとめると次式が得られる。

$$f(t) = \frac{\exp(\gamma_1)}{2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} i \bar{f} \left(\frac{\gamma_1 + i(n-0.5)\pi}{t} \right)$$

$$= \frac{\exp(\gamma_1)}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{Im} \left[\bar{f} \left(\frac{\gamma_1 + i(n-0.5)\pi}{t} \right) \right] \quad (2.3.15)$$

実際の数値計算においては式(2.3.15)の級数が収束する程度の項数 N で打ち切って計算することになる。しかし収束させるためには多くの項数を必要とする。そこで級数の収束性を加速するためにEuler変換[2.34]を適用する。この方法はそれぞれの項の符号が交互に変わる場合に有効な方法である。式(2.3.15)にEuler変換を適用すると次式のようなになる。

$$f(t) = \frac{\exp(\gamma_1)}{2} \left(\sum_{n=1}^{k-1} F_n + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{\mu} A_{\mu, \nu} F_{k+\nu} \right) \quad N=k+\mu \quad (2.3.16)$$

ここで

$\mu=4$ のとき

$$\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\nu=0}^4 A_{\mu, \nu} F_{k+\nu} = \frac{1}{32} (31F_k + 26F_{k+1} + 16F_{k+2} + 6F_{k+3} + F_{k+4})$$

$\mu=5$ のとき

$$\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\nu=0}^5 A_{\mu, \nu} F_{k+\nu} = \frac{1}{64} (63F_k + 57F_{k+1} + 42F_{k+2} + 22F_{k+3} + 7F_{k+4} + F_{k+5})$$

$\mu=6$ のとき

$$\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\nu=0}^6 A_{\mu, \nu} F_{k+\nu} = \frac{1}{128} (127F_k + 120F_{k+1} + 99F_{k+2} + 64F_{k+3} + 29F_{k+4} + 8F_{k+5} + F_{k+6})$$

であり、また

$$F_n = (-1)^n \operatorname{Im} \left[\bar{f} \left(\frac{\gamma_1 + i(n-0.5)\pi}{t} \right) \right]$$

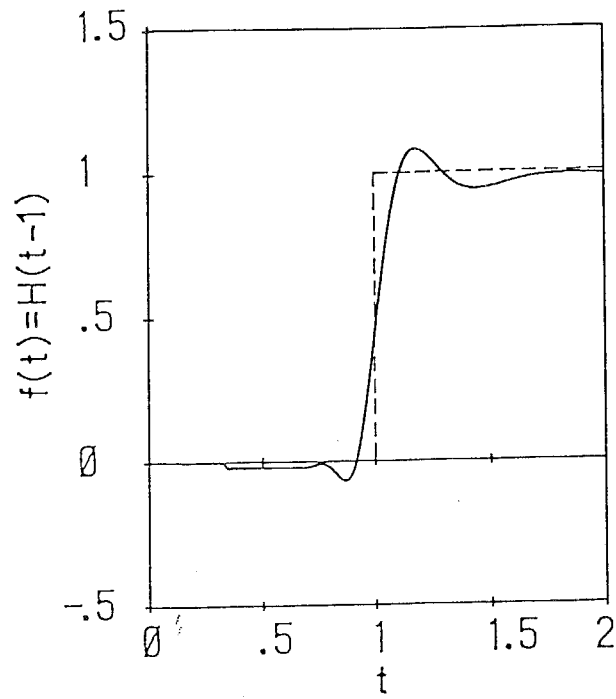
である。

μ の値が大きくなるにつれ収束性は一般的によくなる傾向がある。通常は μ の値を固定して打ち切り項数 N を決める方がプログラミング上は容易である。

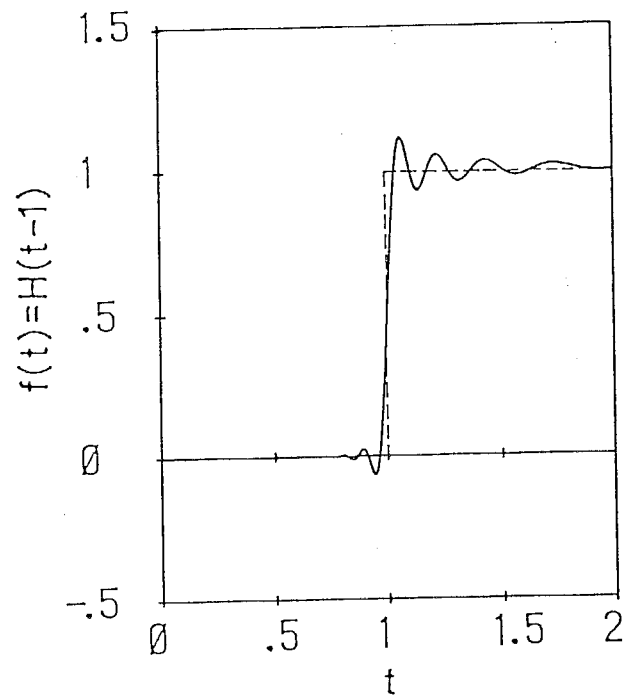
本方法は $t=0$ の場合を除き任意の一点の時間の関数値を計算することができる。

2.3.2 数値計算例

ここではTable 2.2.1に示されるKrings-Wallerの方法の数値計算例と同様に5種類

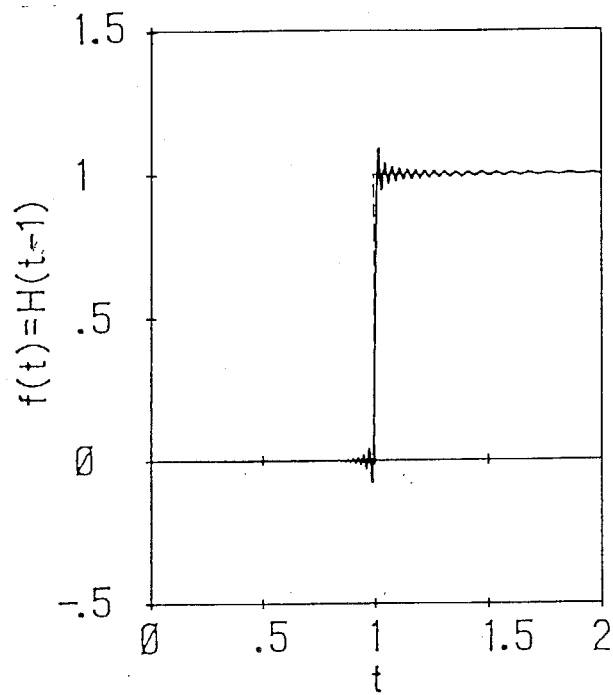


(a) $\gamma_1=2$, $N=75$



(b) $\gamma_1=4$, $N=20$

Figure 2.3.2 Numerical Results of Hosono's Method
 Test Function : $f(t)=H(t-1)$
 — : Numerical Result, - - - : Exact Solution
 (Continued)



(c) $\gamma_1=4$, $N=75$

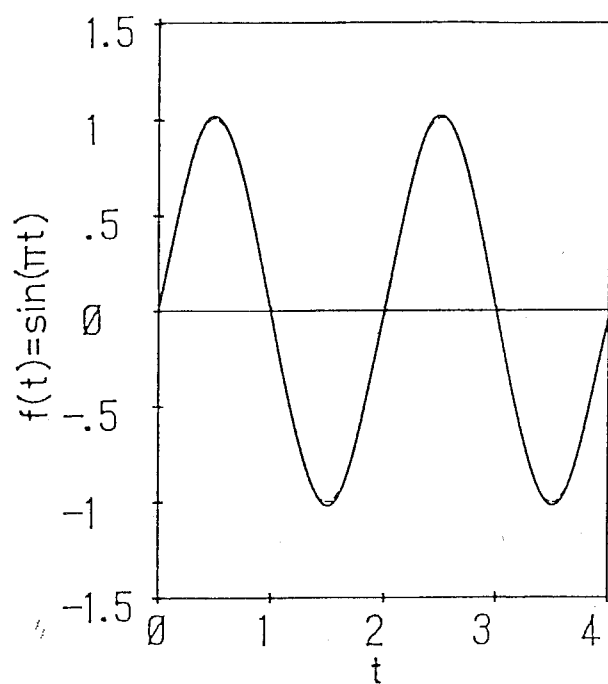
Figure 2.3.2 Numerical Results of Hosono's Method

Test Function : $f(t)=H(t-1)$

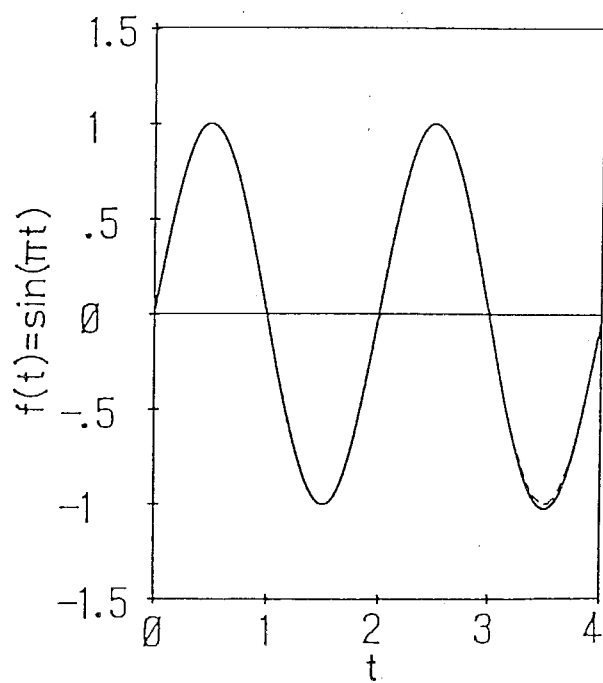
— : Numerical Result, ---- : Exact Solution

Table 2.3.1 Numerical Results of Hosono's Method
Test Function : $f(t)=H(t-1)$

t	Exact Results	Numerical Results				
		N=10, $\gamma_1=2$	N=10, $\gamma_1=4$	N=10, $\gamma_1=6$	N=20, $\gamma_1=4$	N=75, $\gamma_1=4$
0.00	0.0000000D+00					
0.05	0.0000000D+00	0.4171996D-17	0.1804223D-34	0.0000000D+00	0.1804246D-34	0.1804246D-34
0.10	0.0000000D+00	-0.2024107D-08	-0.4246876D-17	-0.8751594D-26	-0.4246930D-17	-0.4246930D-17
0.15	0.0000000D+00	-0.5827833D-05	-0.3525373D-10	-0.2026405D-15	-0.3783727D-10	-0.3753963D-10
0.20	0.0000000D+00	0.1508184D-03	0.4901606D-07	0.1531248D-10	0.5345415D-07	0.5559182D-07
0.25	0.0000000D+00	0.3294332D-03	0.1124960D-06	0.3773015D-10	0.1124974D-06	0.1124974D-06
0.30	0.0000000D+00	0.1784181D-03	-0.1236941D-05	-0.1194462D-07	0.2619640D-06	-0.7500505D-08
0.35	0.0000000D+00	-0.1979235D-01	-0.3823942D-03	-0.7347200D-05	-0.3243002D-03	-0.3313913D-03
0.40	0.0000000D+00	-0.1812324D-01	-0.3423609D-03	-0.6495026D-05	-0.3329222D-03	-0.3348815D-03
0.45	0.0000000D+00	-0.1798687D-01	-0.3353856D-03	-0.6144466D-05	-0.3353698D-03	-0.3353479D-03
0.50	0.0000000D+00	-0.1798644D-01	-0.3353459D-03	-0.6140762D-05	-0.3353501D-03	-0.3353501D-03
0.55	0.0000000D+00	-0.1798673D-01	-0.3354005D-03	-0.6151005D-05	-0.3353785D-03	-0.3353479D-03
0.60	0.0000000D+00	-0.1794771D-01	-0.3256162D-03	-0.3695259D-05	-0.3403716D-03	-0.3347873D-03
0.65	0.0000000D+00	-0.1831828D-01	-0.4485497D-03	-0.4439690D-04	-0.3969468D-03	-0.3338148D-03
0.70	0.0000000D+00	-0.1875019D-01	-0.5768382D-03	-0.7922731D-04	-0.8164603D-03	-0.3782054D-03
0.75	0.0000000D+00	-0.9741296D-02	0.3687268D-02	0.1944044D-02	-0.7809037D-03	0.2235869D-04
0.80	0.0000000D+00	-0.1965326D-01	-0.2195296D-02	-0.1543777D-02	0.4790808D-02	0.7713287D-03
0.85	0.0000000D+00	-0.6069210D-01	-0.2904184D-01	-0.1913470D-01	-0.1152137D-01	-0.1276339D-02
0.90	0.0000000D+00	-0.3564266D-01	-0.9152565D-02	-0.3364668D-02	0.2108549D-01	0.6812175D-02
0.95	0.0000000D+00	0.1466008D+00	0.1471720D+00	0.1308660D+00	-0.5824523D-01	0.1361175D-01
1.00	0.5000000D+00	0.4495833D+00	0.4355621D+00	0.4056140D+00	0.4749995D+00	0.4939951D+00
1.05	0.1000000D+01	0.7554832D+00	0.7562867D+00	0.7421327D+00	0.1082119D+01	0.1012493D+01
1.10	0.1000000D+01	0.9702904D+00	0.1002291D+01	0.1024037D+01	0.1012185D+01	0.9988820D+00
1.15	0.1000000D+01	0.1069379D+01	0.1125144D+01	0.1176427D+01	0.9366357D+00	0.1008265D+01
1.20	0.1000000D+01	0.1079982D+01	0.1138882D+01	0.1194209D+01	0.1035855D+01	0.9870536D+00
1.25	0.1000000D+01	0.1045490D+01	0.1088882D+01	0.1121705D+01	0.1031409D+01	0.9928576D+00
1.30	0.1000000D+01	0.1001225D+01	0.1020769D+01	0.1016861D+01	0.9666598D+00	0.9994754D+00
1.35	0.1000000D+01	0.9667183D+00	0.9645275D+00	0.9251717D+00	0.9730647D+00	0.1000508D+01
1.40	0.1000000D+01	0.9480896D+00	0.9325083D+00	0.8701246D+00	0.1018226D+01	0.9977867D+00
1.45	0.1000000D+01	0.9436048D+00	0.9244547D+00	0.8556609D+00	0.1028385D+01	0.9938636D+00
1.50	0.1000000D+01	0.9485078D+00	0.9338403D+00	0.8736301D+00	0.1002276D+01	0.9943918D+00
1.55	0.1000000D+01	0.9579682D+00	0.9526908D+00	0.9111966D+00	0.9794050D+00	0.1001960D+01
1.60	0.1000000D+01	0.9683643D+00	0.9742634D+00	0.9559669D+00	0.9806831D+00	0.1003696D+01
1.65	0.1000000D+01	0.9775226D+00	0.9940141D+00	0.9985666D+00	0.9974324D+00	0.9957834D+00
1.70	0.1000000D+01	0.9844663D+00	0.1009543D+01	0.1033301D+01	0.1011954D+01	0.1000501D+01
1.75	0.1000000D+01	0.9890240D+00	0.1020092D+01	0.1057716D+01	0.1014933D+01	0.1001104D+01
1.80	0.1000000D+01	0.9914741D+00	0.1025947D+01	0.1071709D+01	0.1008102D+01	0.9973007D+00
1.85	0.1000000D+01	0.9922842D+00	0.1027939D+01	0.1076607D+01	0.9983159D+00	0.1002160D+01
1.90	0.1000000D+01	0.9919489D+00	0.1027081D+01	0.1074411D+01	0.9914476D+00	0.9973663D+00
1.95	0.1000000D+01	0.9909046D+00	0.1024347D+01	0.1067257D+01	0.9897731D+00	0.1001604D+01
2.00	0.1000000D+01	0.9894952D+00	0.1020563D+01	0.1057097D+01	0.9924272D+00	0.9982676D+00



(a) $\gamma_1 = 2$, $N = 10$



(b) $\gamma_1 = 4$, $N = 10$

Figure 2.3.3 Numerical Results of Hosono's Method
 Test Function : $f(t) = \sin(\pi t)$
 — : Numerical Result, - - - : Exact Solution

の基本的な関数について細野の方法により数値ラプラス逆変換を試みた。本方法のパラメータ N および γ_1 を様々に変化させて数値計算を行い、本方法の特徴およびその最適な利用法について考察する。

数値計算の結果として示されるグラフは時間軸を等間隔に500点に分割した点において計算されたものである。

適用例(1)：ステップ関数を求めるために、細野の方法を用いて時間について0から2.0までの計算を行った。このとき本方法のパラメータを $(\gamma_1=2, N=10)$ 、 $(\gamma_1=4, N=20)$ 、および $(\gamma_1=4, N=75)$ として変化させて行った数値計算の結果をそれぞれFig. 2.3.2(a)から(c)に示す。以下のグラフにおいて実線および破線は細野の方法による結果および正解を表わす。また50点について具体的な数値をTable 2.3.1に示す。

この場合の関数 $f(t)$ は $t=1$ において不連続となっている。ラプラス逆変換されて得られる関数の不連続部は解析的に次式で定義されている。

$$f(t) = \{f(t+0) + f(t-0)\} / 2 \quad (2.3.17)$$

このため $f(t)$ の不連続部は精度よく求められている場合では $t=0$ において、ほぼ0.5の数値が得られている。いずれの数値結果とも関数の不連続部において特に精度が低下していることがわかる。

パラメータ γ_1 のみを変化させた結果を比較するとパラメータ γ_1 の値が小さい場合、時間初期から後半まで数値計算結果の精度が低下していることがわかる。また γ_1 の値を大きくした場合、時間前半では高い精度が得られ、時間後半では γ_1 の値が小さい場合よりもさらに精度が低下していることがわかる。

またパラメータ γ_1 を4と固定し N の値を増加させた場合の結果よりパラメータ N の値を増加するにつれ正解に収束する傾向があることがわかる。

適用例(2)：正弦関数を数値計算の対象とした場合について考える。このときのパラメータの値を $(\gamma_1=2, N=10)$ および $(\gamma_1=4, N=10)$ としたときの結果をFig. 2.3.3(a)および(b)に示す。いずれの条件においても原点を除いて時間初期ではほぼ良好な精度で求められていることがわかる。これに対して時間後半においてパラメータ γ_1 が大きいときに精度の低下が見られる。グラフには示していないが、さらにパラメータ N の値を大きくすれば時間後半においても精度のよい結果を得ることができる。ただし、 γ_1 の値が大きい程、収束値を得る N の値が大きくなる。このとき得られる収束値は γ_1 の値が大きい方が精度のよい結果が得られることがわかった。

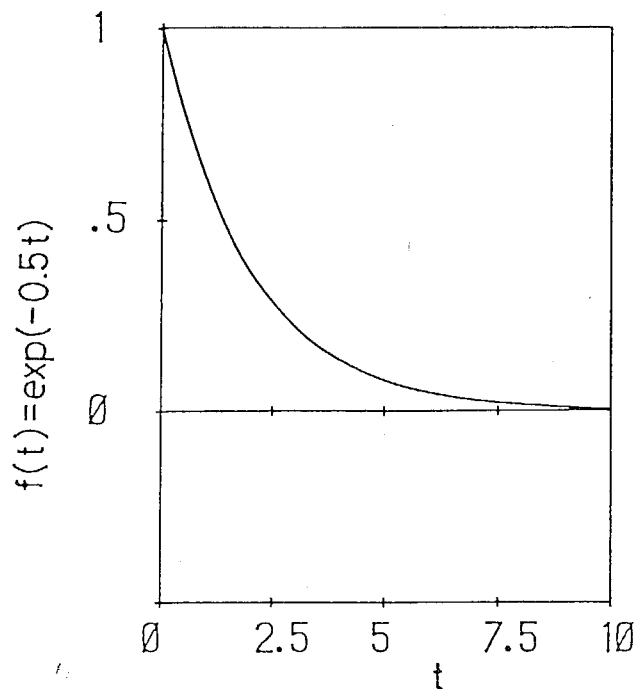


Figure 2.3.4 Numerical Results of Hosono's Method
 Test Function : $f(t)=\exp(-0.5t)$
 $\gamma_1=4, N=10$
 — : Numerical Result, ---- : Exact Solution

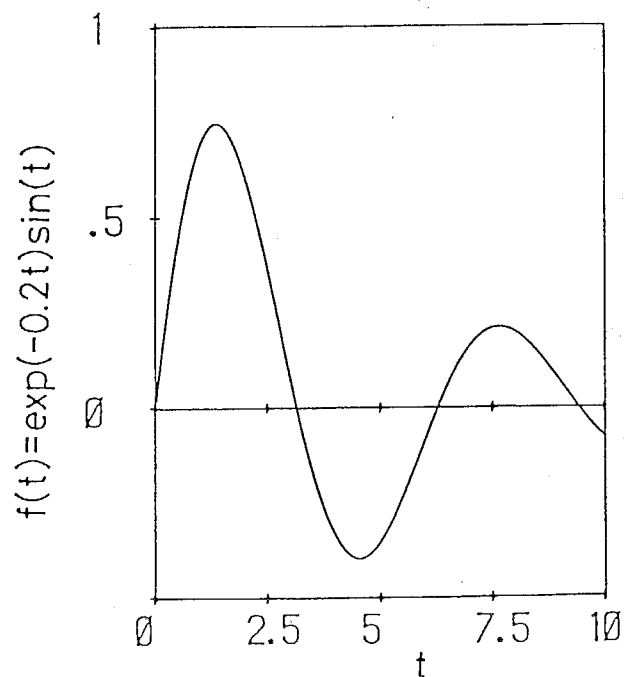


Figure 2.3.5 Numerical Results of Hosono's Method
 Test Function : $f(t)=\exp(-0.2t)\sin(t)$
 $\gamma_1=4, N=10$
 — : Numerical Result, ---- : Exact Solution

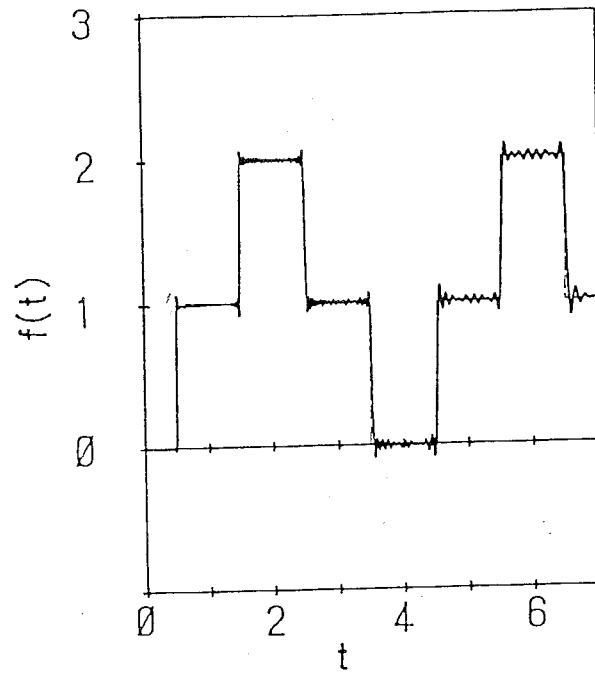


Figure 2.3.6 Numerical Results of Hosono's Method

$$\text{Test Function : } f(t) = \begin{cases} 0 & (4n-0.5 \leq t \leq 4n+0.5) \\ 1 & (4n+0.5 \leq t \leq 4n+1.5, 4n+2.5 \leq t \leq 4n+3.5) \\ 2 & (4n+1.5 \leq t \leq 4n+2.5) \end{cases} \\ (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$\gamma_1=6, \quad N=100$$

—: Numerical Result, ----: Exact Solution

適用例(3)：次に指数関数を数値計算の対象とした場合について考える。このときのパラメータの値を($\gamma_1=2, N=10$)、($\gamma_1=4, N=10$)および($\gamma_1=6, N=10$)とした数値計算を行った。($\gamma_1=4, N=10$)の場合の結果をFig. 2.3.4に示す。いずれの場合も正解に対して、これらの結果を区別することが困難な程度の精度で得られている。指数関数に対して本方法を適用するとき適用例(1)および(2)に比較してパラメータ γ_1 の値に関してあまり敏感でないことがわかった。

適用例(4)：次に時間とともに振動しながら減衰する波形を模擬した関数についてパラメータの値を($\gamma_1=2, N=10$)、($\gamma_1=4, N=10$)および($\gamma_1=6, N=10$)とした数値計算を行った。($\gamma_1=4, N=10$)の場合の結果をFig. 2.3.5に示す。3つの結果とも正解に対してほぼ同程度の精度が得られた。このときも適用例(3)の指数関数の場合と同様に数値計算結果の精度にパラメータの選択が及ぼす影響が少ないことがわかる。

適用例(5)：本方法を適用した関数形は棒の縦衝撃における応力の時間変動と同様のものである。本方法のパラメータを $\gamma_1=6, N=100$ とした数値計算の結果をFig. 2.3.6時間前半の計算結果が良好な精度で得られているが、しかし時間後半では計算結果の精度がやや低下している。ここでグラフでは示さないがパラメータ γ_1 の値を大きくするにつれて式(2.3.16)の級数の収束が悪くなりパラメータ N の値を大きくする必要がある。しかし収束値の精度は γ_1 の値を大きくする方が精度がよくなる。これは細野[2.19]が述べているように γ_1 の値を大きくすることにより式(2.3.1)の指数関数の近似式の精度が向上し、逆変換された数値結果の精度が向上する。よって、できるだけ N の値を許容できる範囲まで γ_1 の値を大きくすればよいことになる。

2.3.3 考察

細野の方法の最大の特徴は一点の任意時間の数値解が比較的容易に求められることである。また数値計算にあたって大きな計算機の容量を必要としないことである。特に応力および変位の分布を求める場合には座標に関して計算機の容量を多く必要とするので本方法は有効である[2.33]。

そこで本方法によって数値計算を行う際のパラメータの選択基準について考察する。

ラプラス逆変換は解析的にはFig. 2.3.7のようなBromwich経路[2.34]と呼ばれる $S=\gamma+i\omega$ の左半平面の閉曲線に沿って積分することにより行われる。すなわち、この経路の分岐積分を行い $\bar{f}(s)$ の極に対する留数和を求めることで時間領域の解が得られる。これに対して細野の方法は $S=\gamma+i\omega$ の右半平面における閉積分経路を用いる。ま

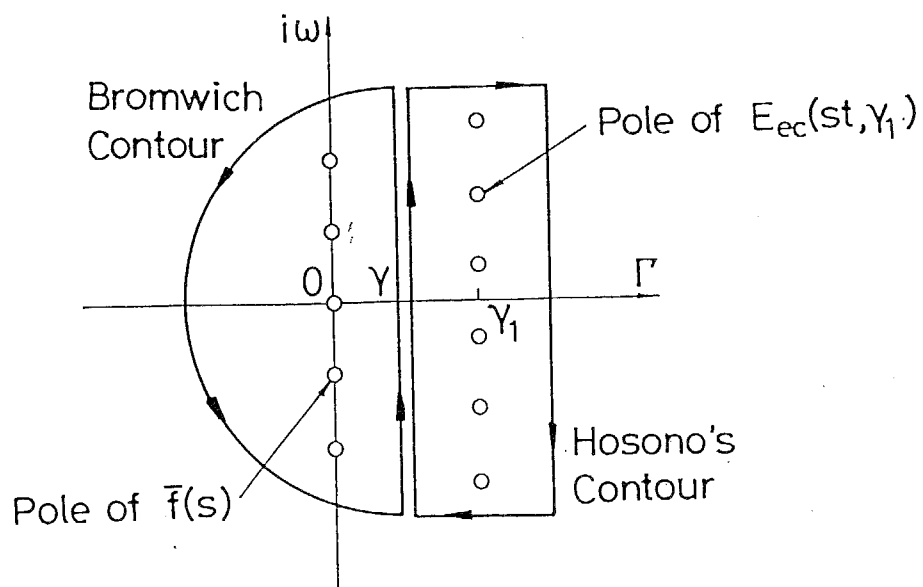


Figure 2.3.7 Bromwich Integral Contour and Hosono's Integral Countour

た指数関数 $\exp(st)$ の近似式としてこの閉曲線内に極を持つ式(2.3.1)の関数を用いる。このため逆変換すべき関数 $\bar{f}(s)$ の極がこの閉曲線内になく指数関数の近似式の極のみが存在する。よって逆変換する場合に用いる極はいつも同じものであるから関数 $\bar{f}(s)$ に関わりなく同一の計算式を用いることができる。よって細野の方法は式(2.3.1)の近似式の精度により逆変換の精度が決まると考えられる。式(2.3.1)において γ_1 の値を大きくすればするほど指数関数 $\exp(st)$ に近づき、精度の良い数値計算の結果が得られる。しかし γ_1 の値を大きくすれば収束値を得るための級数の項数 N を多くしなければならない。

またこの方法ではラプラス変換パラメータ s を式(2.3.16)で示されるように

$$s = (\gamma_1 - 0.5\pi)/t + i n\pi/t \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (2.3.18)$$

として計算を行っている。時間 t が大きい場合、変換パラメータの増分が小さくなる。このため級数の項数 N の値を大きくしなければ高次の変換パラメータまで計算されない。よって時間 t が大きいとき級数の項数 N を大きくする必要がある。

よって細野の方法はパラメータ γ_1 とサンプリング数 N の適切な選択により逆変換の精度が定められる。前項の基本的な関数に対する数値計算の結果より次のようなパラメータの選択基準が得られる。

- a. 1) γ_1 を大きくすれば数値計算の精度が向上する。しかし収束値を得るための級数の項数 N を多くとる必要がある。標準的な γ_1 の値は4から6程度が適切である。項数 N は関数によりかなり変化し正弦波状に変化するものは収束が速い。
- a. 2) 時間 t が大きくなると級数の収束が悪くなる。このため項数 N を大きくする必要がある。

実際の数値計算に使用する場合、高い精度を必要とするときには γ_1 を大きくする必要がある。そこで γ_1 の数値を固定して、 N の値を増加させることにより結果の収束を確認しなければならない。

2.4 結言

本章において離散フーリエ変換型に変換して計算するKrings-Wallerの方法および指数関数を近似して積分路を変更する細野の方法についての有効性および最適な使用

法を考察した。この結果、2つの方法とも適切にパラメータを選択すれば良好な精度を有する数値結果を得ることができることが明らかになった。それぞれの方法の特徴をまとめると次のようになる。

Krings-Wallerの方法は時系列データの処理に優れている。またこの方法は順変換および逆変換を行うことが可能であることから、理論あるいは数値解析に実験解析のデータを結合して使用することも可能となる。ただし多くの計算機の容量を必要とすることに注意する必要がある。今後、問題となるのはリング現象と呼ばれる解析の対象とする時間後半において数値結果が振動し誤差が大きくなることであると考えられる。これは式(2.2.6), (2.2.7)を式(2.2.9), (2.2.10)で有限項で打ち切ったために生じるものである。この現象をできるだけ低減させ、少ないサンプリング数でより精度のよい数値結果を検討する必要があると思われる。

細野の方法は任意の一点の時間における精度のよい数値結果を得るのに有効な方法である。特にほとんど計算機の容量を必要としないために、応力分布などを求めるときのように他の箇所で大きな計算機の容量を必要とする場合には最適な手法である。今後、式(2.3.15)で示される級数の収束を速めて少ない項数で精度のよい結果を得る方法を検討する必要があると思われる。本章ではこれに対してEuler変換を用いた。式(2.3.15)のようにそれぞれの項が交番に正、負と符号の変化する場合にはShankの収束加速法[2.35]が適していることが知られている。これは若干の計算機の容量を必要とするが、検討すべきものと考えられる。また指数関数の近似式(2.3.1)を工夫することで、より精度の良い結果が得られることが期待される。

参考文献

- [2.1] Sneddon I.A. : Fourier Transforms, McGraw-Hill; (1951).
- [2.2] Tranter C.J. : Integral Transforms in Mathematical Physics, Chapman and Hall, (1974).
- [2.3] 松本浩之 : 線形粘弾性体の衝撃応答 (材料特性の同定法と応力解析法とのリングエージ), 日本機械学会論文集 (A編), Vol. 48, NO. 436 (1976), p. 1476-1480.
- [2.4] Erdelyi A. (Editor, Staff of the Betman Manuscript Project) : Tables of Integral Transform, Vol. 1, McGraw-Hill, (1954).

- [2.5] Bellman R.E., Kalaba R.E. and Lockett J. : Numerical Inversion of Laplace Transform: Application of Biology, Economics, Engineering and Physics, Elsevier, (1966).
- [2.6] Erdelyi A. : Inversion Formulae for the Laplace Transformation, Philosophical Magazine, Vol.34(1943), p.553-537.
- [2.7] Krylov V.I. and Skoblya N.S. : Handbook of Numerical Inversion of Laplace Transforms, IPST Press, (1969), p.33-34.
- [2.8] 川建和雄 : 滑底剛槌と半無限粘弾性板の衝突問題の解法, 九州大学応用力学研究所所報, Vol.36(1972), p.91-105.
- [2.9] Papoulis A. : A New Method of Inversion of the Laplace transform, Quarterly of Applied Mathematics, Vol.14(1957), p.405-414.
- [2.10] Sih G.C. : Elastodynamic Crack Problems, Mechanics of Fracture, Vol.4, Noordhoff, (1977), p.55.
- [2.11] Berger B.S. : The Inversion of the Laplace Transform with Applications of the Vibrations of Continuous Elastic Bodies, Journal of Applied Mechanics, Vol.35(1968), p.837-839.
- [2.12] Berger B.S. : Inversion of the N-Dimensional Laplace Transform, Mathematics of Computation, Vol.20(1966), p.418-421.
- [2.13] Berger B.S. and Duagudom S. : A Technique for Increasing the Accuracy the Numerical Inversion of the Laplace Transform with Applications, Journal of Applied Mechanics, Vol.40(1968), p.1110-1112.
- [2.14] Weeks W.T. : Numerical INversion of Laplce Transform Using Laguerre Functions, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol.13, No.3(1966), p.419-429.
- [2.15] Cost T.L. : Approximate Laplace Transform Inversion in Viscoelastic Stress Analysis, AIAA Journal, Vol.2(1964), p.2157-2166.
- [2.16] Gaver Jr. D.R. : Observing Stochastic Processes and Approximate Transform Inversion, Operational Research, Vol.14, No.3(1966), p.444-459.
- [2.17] Cagniard L., Flinn E.A. and Dix C.H. : Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves, McGraw-Hill, (1962).

- [2.18]Schmittroth L.A. : Numerical Inversion of Laplace Transforms, Communications of ACM, Vol.3, No.3(1960), p.171-173.
- [2.19]細野敏夫 : 数値ラプラス変換, 電気学会論文集 A, Vol.99, No.10(1979), p.44-50.
- [2.20]Kwok Y.-K, Barthez D. : An Algorithm for the Numerical Inversion of Laplace Transforms, Inverse Problem, Vol.5(1989), p.1089-1095.
- [2.21]Krings W. and Waller H. : Contributions to the Numerical Treatment of Partial Differential Equations with the Laplace Transformation - An Application of the Algorithm of the Fast Fourier Transformation, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.14(1979), p.1183-1196.
- [2.22]Dubner R. and Abate J. : Numerical Inversion of Laplace Transforms by Relating them to the Finite Fourier Cosine Transform, JACM, Vol.15, No.1 p.115-123.
- [2.23]Durbin F. : Numerical Inversion of Laplace Transforms : An Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method, The Computer Journal, Vol.17, No.4(1974), p.371-376.
- [2.24]Wilcox D.J. and Gibson I.S. : Numerical Laplace Transformation and Inversion in the Analysis of Physical Systems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.20(1984), p.1507-1519.
- [2.25]Wilcox D.J. and Gibson I.S. : Evaluation of a New Method for Numerical Laplace Transformation and Inversion, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.20(1984), p.1521-1528.
- [2.26]Davies B. and Martin B. : Review Numerical Inversion of the Laplace Transform : a Survey and Comparison of Methods, Journal of Computational Physics, Vol.33(1979), p.1-32.
- [2.27]松本浩之 : 数値ラプラス逆変換法による衝撃問題の解析例, 衝撃と破壊調査研究分科会成果報告書, 分科会報告書No.294, 日本機械学会, (1981), p.147-154.
- [2.28]井上裕嗣、上林稔、岸本喜久雄、渋谷寿一、小泉堯 : 高速フーリエ変換を利用した数値ラプラス変換・逆変換, 日本機械学会論文集 (A編), Vol.57, No.542

- (1991), p. 2523-2528.
- [2.29] Bracewell R.N. : The Fourier Transform and Its Application (2nd Edition), McGraw-Hill, (1986), p. 189-218.
- [2.30] Cooley J. W. and Tukey J. W. : An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, Mathematics of Computation, Vol.19 (1965), p. 297-301.
- [2.31] Brigham E.O. : Fast Fourier Transform, Prentice-Hall, (1974).
(宮川洋、今井秀樹 : 高速フーリエ変換, 科学技術出版社, (1982), p. 90-94.)
- [2.32] Abramowitz M. and Stegun I.A. (ed.) : Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables (Ninth Printing), Dover, (1972), p. 16.
- [2.33] 足立忠晴、小川義英、宇治橋貞幸、松本浩之 : 面外荷重をうける直交異方性積層厚板の衝撃応答、日本機械学会第69期全国大会講演会講演論文集(Vol.A)、No. 910-62(1991), p. 127-129.
- [2.34] Pipes L.A. and Harvill L.R. : Applied Mathematics for Engineers and Physicists, Third Edition, McGraw-Hill, (1970), p. 34-37.
- [2.35] Shank D. : Non-Linear Transformations of Divergent and Slowly Convergent Sequences, Journal of Mathematical Physics, Vol. 34, (1955), p. 1-42.

第3章 水撃をうける円筒殻の衝撃応答

3.1 緒言

水撃をうける配管の衝撃応答は設計上の問題だけでなく、流体・構造連成問題において基本的でかつ重要な問題である。配管内を伝播する液体圧力波は配管の変形の影響をうけることが知られている。Joukowsky[3.1][3.2]により提案された理論は配管の変形の影響を考慮されており、配管設計においてよく用いられている。この理論は液体圧力波が一次元的に伝播し配管が準静的に弾性変形するとした仮定に基づいて得られたものである。この理論によれば管内の圧力波は次式で与えられる速度 C_j で伝播する。

$$C_j = C_f (1 + 2KR/Eh)^{1/2} \quad (3.1.1)$$

ここで C_f は剛体配管中の液体の圧力波の速度であり

$$C_f = \sqrt{K/\rho_f} \quad (3.1.2)$$

となる。また K 、 ρ_f 、 E 、 h および R はそれぞれ液体の体積弾性率、液体の密度、配管の縦弾性係数、肉厚および平均半径を表す。

このように得られるJoukowsky理論により求められる管内の圧力波の伝播は実験結果とは比較的一致することが知られている。またSkalak[3.3]は配管の慣性効果と液体の半径方向の運動を考慮して無限長の配管の応答を解析した。この解析において配管内面において配管と液体の速度が一致するとした連成条件が考慮されている。その結果、求められた圧力の変化を配管の慣性効果が考慮されていないJoukowsky理論によって近似的に評価できることを示した。さらにJoukowsky理論で得られる圧力波よりも大きさは小さいが速い速度で伝播する先行波が存在することを指摘した。ForrestalとHerrmann[3.4]は液体中に沈められた無限長の配管に軸対称に作用する移動荷重が作用する問題を解析した。この解析は液体の軸方向の運動を無視した連成条件下において行われた。またKrauseら[3.5]やBarezら[3.6][3.7]により簡単化されたSkalak理論により液体で満たされた配管の縦衝撃が解析され、実験とほぼ一致することが確認されている。さらにWalkerとPhillips[3.8]は液体で満たされた配管の連成運動を半径方向に級数展開することにより定式化し、数値結果を特性曲線法で求めている。

Table 3.1.1 Classification of the Theories

Theory	Equation of Fluid	Equation of a Pipe	Coupling Condition	References
Coupled Theory	Dynamic (Three- Dimensional)	Dynamic	Continuity of Velocity on Interface	Skalak(1956) Forrestal et al.(1965) Urata(1975)-(1987) Krause et al.(1977) Walker et al.(1977) Barez et al.(1979) Tomski et al.(1984) Adachi et al.(1987)
Uncoupled Theory	Dynamic (One- Dimensional)	Dynamic	Neglecting	Suzuki(1975) Adachi et al.(1986)
Joukowsky's Theory	Dynamic (One- Dimensional)	Static	Wave Velocity Considered Static Deformation of a Pipe	Bergeron(1961) Li(1983)

浦田[3.9]-[3.16]は流体と円筒の連成効果が圧力波および応力波に及ぼす影響を詳細に考察し、2つの連成効果を考慮した波を用いて近似的に応答を求める方法を提案している[3.17]。TomskiおよびKukla[3.18]は軸方向の慣性効果を無視した円筒の式を用いて液体・円筒および棒からなる系の応答を解析している。

また鈴木[3.19][3.20]および足立ら[3.21]により液体と円筒とは連成しないものとして水撃をうける円筒の応答解析が行われている。すなわち剛体円筒中を伝播する圧力波と等しい既知の圧力波が弾性円筒に作用するものと仮定している。

以上のような軸方向に伝播する液体圧力波および配管の応力波に関する問題の解析方法は分類するとTable 3.1.1のように液体と円筒の連成を考慮した連成理論、連成効果を無視した非連成理論および静的な円筒の変形を考慮したJoukowsky理論の3つに分類することができる。しかし、これらの理論から得られる結果の相違についてはほとんど考察されていない。このため実際の解析において液体と円筒の連成効果を考慮すべきかどうか不明のままである。

またTable 3.1.1で示される研究において解析の対象となっている配管はかなり長いものがほとんどである。例えば原子炉などの配管系において多くの弁や継ぎ手を使用されており配管系を短い配管の集合体として考えられる。そのため短い円筒の応答を明らかにすることは必要と考えられる。

そこで本章では長い配管および短い配管を対象としてTable 3.1.1に示されるそれぞれの理論結果を比較することにより、Joukowsky理論の妥当性と配管の応答に及ぼす連成効果の影響について考察することを目的とする。長い配管のモデルとして一端が固定された半無限長円筒殻を、また短い配管のモデルとして両端が固定された有限長円筒殻を対象とする。配管にはFlüggeの動的円筒殻理論を、液体には圧縮性完全流体に対するポテンシャル理論を用いる。解析はラプラス変換法で行われ、逆変換には第2章で考察されたKrings-Wallerの方法を使用する。

3.2 解析解の導出

解析において U 、 W および v は円筒殻の軸方向変位、半径方向変位およびポアソン比を示す。 P 、 $v_{r,r}$ および $v_{r,x}$ は液体圧力、半径方向速度および軸方向速度を示す。また t および x は時間および軸方向座標を表わし、座標系は半無限長円筒殻および

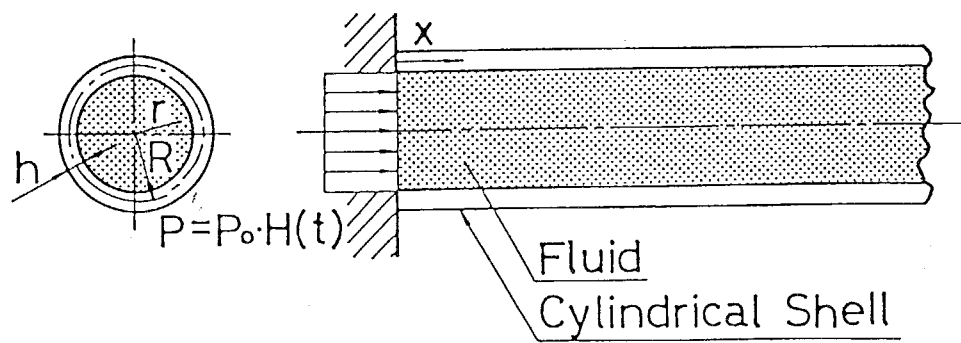


Figure 3.2.1 A Semi-Infinite Circular Pipe Subjected to Waterhammer Waves

限長円筒殻の場合はそれぞれFig. 3.2.1および3.2.2で示されているものを適用する。

3.2.1 半無限長円筒殻の解析

Fig. 3.2.1に示されるように液体で満たされ、一端が固定された半無限長円筒殻を考える。固定端($x=0$)において液体にステップ状の衝撃圧力が作用するものとする。

連成条件は式(1.1.2)より

$$r=R \text{ において } p_z = -P \quad (3.2.1)$$

$$r=R \text{ において } \frac{\partial W}{\partial t} = -v_{fr} \quad (3.2.2)$$

となる。ここで p_z は円筒殻の半径方向に作用する外力を示す。

また非連成条件は式(1.1.1)より

$$r=R \text{ において } p_z = -P \quad (3.2.3)$$

$$r=R \text{ において } v_{fr} = 0 \quad (3.2.4)$$

となる。

境界条件式は次のように与えられる。

$$x=0 \text{ において } U=W=\frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (3.2.5)$$

$$x=0 \text{ において } P=P_0 \cdot H(t) \quad (3.2.6)$$

初期条件として時間 $t=0$ において液体と円筒殻が無応力状態で静止しているとする。

$$t=0 \text{ において } U=\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial \phi}{\partial t}=0 \quad (3.2.7)$$

(a) 連成理論による解析

初期条件式(3.2.7)を考慮して円筒殻に対する基礎方程式(c.18)を、液体に対する基礎方程式(a.10)をそれぞれラプラス変換した後、次の一般解が求められる。

$$\frac{\bar{P}}{P_0} = \frac{1}{s} \exp(-as\xi) + \int_0^\infty P_s I_0(\mu\rho) \sin(\omega\xi) d\omega \quad (3.2.8)$$

$$\frac{E_p}{R^2 P_0} \bar{U} = \sum_{j=1}^3 d_j c_j \exp(\lambda_j \xi) + U_0 \exp(-as\xi) + \int_0^\infty U_c P_s \cos(\omega\xi) d\omega \quad (3.2.9)$$

$$\frac{E_p}{R^2 P_0} \bar{W} = \sum_{j=1}^3 c_j \exp(\lambda_j \xi) + W_0 \exp(-as\xi) + \int_0^\infty W_s P_s \sin(\omega\xi) d\omega \quad (3.2.10)$$

ここで c_j ($j=1, 2, 3$) および P_* は未定係数であり

$$U_0 = \frac{-a(\kappa^2 s^2(a^2-1)-\nu)}{g_0 s^2}, \quad U_c = \frac{\omega(\kappa^2 s^2 + \kappa^2 \omega^2 + \nu) I_0(\mu)}{g_*}$$

$$W_0 = \frac{1-a^2}{g_0 s}, \quad W_* = \frac{-(s^2 + \omega^2) I_0(\mu)}{g_*}, \quad d_j = \lambda_j \left[-\kappa^2 + \frac{\nu}{\lambda_j^2 - s^2} \right]$$

$$g_0 = \kappa^2 a^2 (a^2-1)^2 s^4 + (2\nu \kappa^2 a^4 - \nu \kappa^2 a^2 + a^2 - 1) - \nu^2 a^2 + a^2 - 1$$

$$g_* = \kappa^2 \omega^6 + 2\kappa^2 (s^2 - \nu) \omega^4 + (\kappa^2 s^4 - \nu \kappa^2 s^2 + s^2 + 1 - \nu^2) \omega^2 + s^2 (s^2 + 1)$$

$$[\bar{P}, \bar{U}, \bar{W}] = \int_0^\infty [P, U, W] \exp(-s\tau) d\tau, \quad \tau = \frac{C_t}{R} t, \quad \xi = \frac{x}{R}, \quad \rho = \frac{r}{R}, \quad a = \frac{C_t}{C_f}, \quad \mu^2 = (as)^2 + \omega^2$$

であり、 $I_n(z)$ は n 次の第 1 種変形ベッセル関数である。

また λ_j は次式の特性方程式の相異なる 6 根のうち実部が負となる 3 根である。

$$\lambda^6 + 2(\nu - s^2)\lambda^4 + \left(\frac{1 - \nu^2 + s^2}{\kappa^2} + s^4 - \nu s^2 \right) \lambda^2 - \frac{s^4 + s^2}{\kappa^2} = 0 \quad (3.2.11)$$

式(3.2.2)に式(a.8)(3.2.8)および式(3.2.10)を代入する。

$$\frac{C_t R s^2}{E_p} \left\{ \sum_{j=1}^3 c_j \exp(\lambda_j \xi) + W_0 \exp(-as\xi) + \int_0^\infty W_* P_* \sin(\omega \xi) d\omega \right\}$$

$$= \frac{1}{\rho_t C_t} \int_0^\infty s P_* I_0(\mu) \sin(\omega \xi) d\omega \quad (3.2.12)$$

式(3.2.12)の両辺に $\sin(\omega \xi)$ を乗じた後、0 から ∞ まで ξ について積分すると次のように P_* が求められる。

$$P_* = P_1 \left\{ \sum_{j=1}^3 P_{2j} c_j + W_0 P_3 \right\} \quad (3.2.13)$$

ここで

$$P_1 = \frac{2a^2 \beta \omega s^2}{\pi} \frac{g_*}{g_* \mu I_1(\mu) + a^2 \beta s^2 (s^2 + \omega^2) I_0(\mu)}, \quad P_{2j} = \frac{1}{\lambda_j^2 + \omega^2}, \quad P_3 = \frac{1}{\mu}, \quad \beta = \frac{KR}{E_p}$$

である。

未定係数 c_j は境界条件式(3.2.5)に式(3.2.9)(3.2.10)を代入することにより求められる。

(b) 非連成理論による解析

非連成理論の場合は式(a.10)を非連成条件式(4.2.3)および境界条件式(4.2.6)を考

慮して解くと次式のように液体圧力の解が求められる。

$$\frac{\bar{P}}{P_0} = \exp(-as\xi) \quad (3.2.14)$$

すなわち非連成理論の場合、圧力分布は半径方向に一様になることがわかる。

次に式(3.2.4)を円筒の基礎方程式(c.18)に代入することにより変位 $\bar{U}$ および $\bar{W}$ の一般解が求められる。

$$\frac{E_p}{R^2 P_0} \bar{U} = \sum_{j=1}^3 d_j c_j \exp(\lambda_j \xi) + U_0 \exp(-as\xi) \quad (3.2.15)$$

$$\frac{E_p}{R^2 P_0} \bar{W} = \sum_{j=1}^3 c_j \exp(\lambda_j \xi) + U_0 \exp(-as\xi) \quad (3.2.16)$$

ここでそれぞれの記号は式(3.2.8)から(3.2.10)のただし書きのものと同様である。

3.2.3 有限長円筒殻の解析

Fig.3.2.2に示されるように液体で満たされ、両端が固定された長さ l の有限長円筒殻を考える。 $x=0$ における固定端において液体にステップ状の衝撃圧力が作用するものとする。

連成条件は半無限長円筒殻の場合と同様に式(3.2.1)および(3.2.2)となる。また非連成の場合についても式(3.2.3)(3.2.4)を用いる。

境界条件式は次のように与えられる。

$$x=0 \text{ および } x=l \text{ において } U=W=\frac{\partial W}{\partial x}=0 \quad (3.2.17)$$

$$\begin{cases} x=0 \text{ において } P=P_0 \cdot H(t) \\ x=l \text{ において } v_{fx}=0 \end{cases} \quad (3.2.18)$$

時間 $t=0$ において液体と円筒殻が無応力状態で静止しているとして初期条件式(3.2.7)を用いる。

(a) 連成理論による解析

半無限長円筒殻の場合と同様に円筒殻に対して式(c.18)を、液体に対しては(a.10)を式(3.2.7)を考慮してラプラス変換する。さらに境界条件式(3.2.18)を満たす次の一般解が求められる。

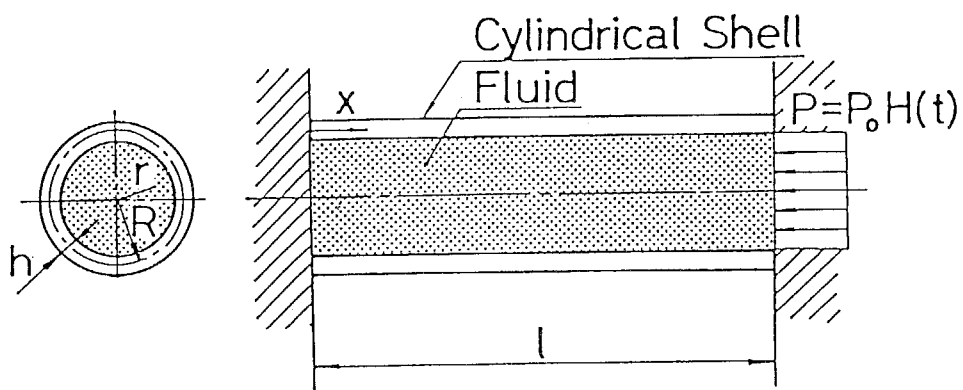


Figure 3.2.2 A Finite Circular Pipe Subjected to Waterhammer Waves

$$\frac{\bar{P}}{P_0} = \frac{\cosh(as\xi)}{\text{scosh}(asL)} + \sum_{m=0}^{\infty} P_m I_0(\mu_m \rho) \cos(k_m \xi) \quad (3.2.19)$$

$$\frac{E_p}{R^2 P_0} \bar{U} = \sum_{j=1}^6 d_j c_j \exp(\lambda_j \xi) + U_0 \sinh(as\xi) + \sum_{m=0}^{\infty} U_m P_m \sin(k_m \xi) \quad (3.2.20)$$

$$\frac{E_p}{R^2 P_0} \bar{W} = \sum_{j=1}^6 c_j \exp(\lambda_j \xi) + W_0 \cosh(as\xi) + \sum_{m=0}^{\infty} W_m P_m \cos(k_m \xi) \quad (3.2.21)$$

ここで c_j ($j=1, 2, \dots, 6$) および P_m は未定係数であり

$$U_0 = \frac{1}{f_0} \frac{a \{ \kappa^2 s^2 (a^2 - 1) - \nu \}}{s^2 \cosh(asL)}, \quad U_m = \frac{-k_m (\kappa^2 s^2 + \kappa^2 k_m^2 + \nu) I_0(\mu_m)}{f_m}$$

$$W_0 = \frac{1}{f_0} \frac{1 - a^2}{\text{scosh}(asL)}, \quad W_m = \frac{-(s^2 + k_m^2) I_0(\mu_m)}{f_m}, \quad d_j = \lambda_j \left[-\kappa^2 + \frac{\nu}{\lambda_j^2 - s^2} \right]$$

$$f_0 = \kappa^2 a^2 (a^2 - 1)^2 s^4 + (2\nu \kappa^2 a^4 - \nu \kappa^2 a^2 + a^2 - 1) - \nu^2 a^2 + a^2 - 1$$

$$f_m = \kappa^2 k_m^6 + 2\kappa^2 (s^2 - \nu) k_m^4 + (\kappa^2 s^4 - \nu \kappa^2 s^2 + s^2 + 1 - \nu^2) k_m^2 + s^2 (s^2 + 1)$$

$$[\bar{P}, \bar{U}, \bar{W}] = \int_0^{\infty} [P, U, W] \exp(-s\tau) d\tau, \quad \tau = \frac{C_t}{R} t, \quad \xi = \frac{x}{R}, \quad \rho = \frac{r}{R}, \quad a = \frac{C_t}{C_f}, \quad L = \frac{l}{R}$$

$$\mu_m^2 = (as)^2 + k_m^2, \quad k_m = \frac{(2m-1)\pi}{2L}$$

であり、 $I_n(z)$ は n 次の第 1 種変形ベッセル関数である。

また λ_j は次式の特微方程式の相異なる 6 根である。

$$\lambda^6 + 2(\nu - s^2)\lambda^4 + \left(\frac{1 - \nu^2 + s^2}{\kappa^2} + s^4 - \nu s^2 \right) \lambda^2 - \frac{s^4 + s^2}{\kappa^2} = 0 \quad (3.2.22)$$

式(3.2.2)に式(3.2.19)および式(3.2.21)を代入する。

$$\frac{C_t R s^2}{E_p} \left\{ \sum_{j=1}^6 c_j \exp(\lambda_j \xi) + W_0 \cosh(as\xi) + \sum_{m=0}^{\infty} W_m P_m \cos(k_m \xi) \right\}$$

$$= \frac{1}{\rho_t C_t} \sum_{m=0}^{\infty} P_m \mu_m I_0(\mu_m) \cos(k_m \xi) \quad (3.2.23)$$

式(3.2.12)の両辺に $\cos(k_m \xi)$ を乗じた後、0 から L まで ξ について積分すると次のように P_m が求められる。

$$P_m = P_1 \left\{ \sum_{j=1}^6 P_{2j} c_j + W_0 P_3 \right\} \quad (3.2.24)$$

ここで

$$P_1 = \frac{2a^2\beta s^2}{\pi} \frac{f_m}{f_m\mu_m I_1(\mu_m) + a^2\beta s^2(s^2 + k_m^2) I_0(\mu_m)}, \quad P_{2j} = \frac{(-1)^{m+1} k_m \exp(\lambda_j L) - \lambda_j}{\lambda_j^2 + k_m^2}$$

$$P_3 = \frac{(-1)^{m+1} k_m (1-a^2)}{\mu_m^2} \frac{1}{f_0 s}, \quad \beta = \frac{KR}{E_p}$$

である。

未定係数 c_j は境界条件式 (3.2.17) に式 (3.2.20) (3.2.21) を代入することにより求められる。

(b) 非連成理論による解析

非連成理論による解は式 (a.10) および (c.18) を式 (3.2.18) を考慮することにより次のように求められる。

$$\frac{\bar{P}}{P_0} = \frac{\cosh(as\xi)}{s \cosh(asL)} \quad (3.2.25)$$

$$\frac{E_p}{R^2 P_0} \bar{U} = \sum_{j=1}^6 d_j c_j \exp(\lambda_j \xi) + U_0 \sinh(as\xi) \quad (3.2.26)$$

$$\frac{E_p}{R^2 P_0} \bar{W} = \sum_{j=1}^6 c_j \exp(\lambda_j \xi) + U_0 \cosh(as\xi) \quad (3.2.27)$$

半無限長円筒殻の場合と同様に圧力波は半径方向に一樣に伝播することがわかる。

3.3 数値計算結果

数値計算においては円筒殻の材質を鋼、液体を水と想定する。それぞれの材料定数は次の通りである。

鋼 : $E=210[\text{GPa}]$, $\nu=0.3$, $\rho_t=7900[\text{kg/m}^3]$

水 : $K=2.2[\text{GPa}]$, $\rho_f=1000[\text{kg/m}^3]$

また円筒殻の大きさは次の通りとした。

$h/R=0.01$, $h/R=0.05$

$l/R=10$ (有限長円筒殻の場合)

ラプラス逆変換は第3章で述べたように Krings-Waller の方法により行った。半無限長円筒殻の解に含まれる積分は被積分関数が三角関数との積の形になっていること

から次式で定義されるFilonの数値積分公式[3.22]を用いた。

$$\begin{aligned} \int_a^b f(p) \cos(xp) dp = & h \left[\alpha \{f(b) \sin(xb) - f(a) \sin(xa)\} \right. \\ & + \beta \left\{ -\frac{1}{2} f(b) \cos(xb) + \frac{1}{2} f(a) \cos(xa) + \sum_{s=1}^{n-1} f_{2s} \cos(xP_{2s}) \right\} \\ & \left. + \gamma \sum_{s=1}^n f_{2s-1} \cos(xP_{2s-1}) \right] \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(p) \sin(xp) dp = & h \left[\alpha \{f(b) \cos(xb) - f(a) \cos(xa)\} \right. \\ & + \beta \left\{ -\frac{1}{2} f(b) \sin(xb) + \frac{1}{2} f(a) \sin(xa) + \sum_{s=1}^{n-1} f_{2s} \sin(xP_{2s}) \right\} + \\ & \left. + \gamma \sum_{s=1}^n f_{2s-1} \sin(xP_{2s-1}) \right] \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

ここで

$$\begin{aligned} \theta^3 \alpha = & \theta^2 + \theta \sin(\theta) \cos(\theta) - 2 \sin^2(\theta), \quad \theta^3 \beta = 2[\theta(1 + \cos^2(\theta)) - 2 \sin(\theta) \cos(\theta)], \\ \theta^3 \gamma = & 4[\sin(\theta) - \theta \cos(\theta)], \quad f_s = f(a + sh), \quad P_s = a + sh, \quad b = a + 2nh, \quad \theta = xh, \\ & s = 0, 1, 2, \dots, 2n \end{aligned}$$

である。

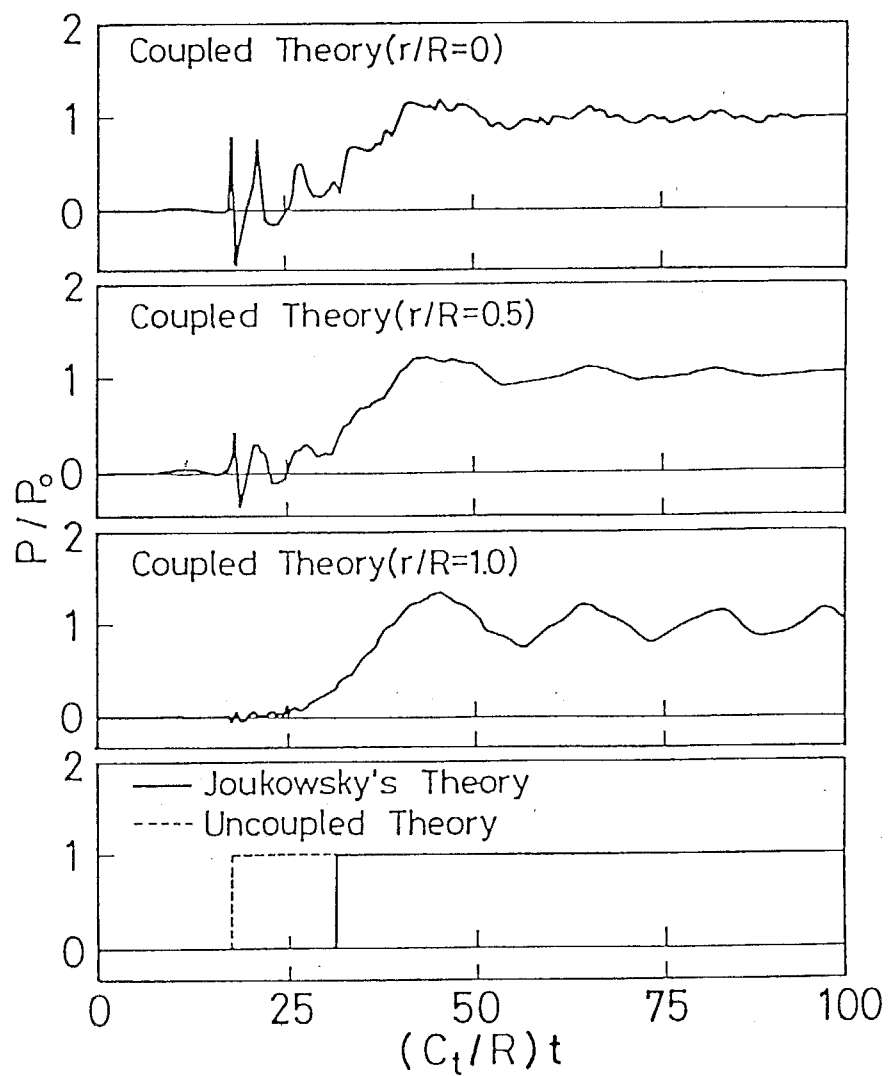
式(3.2.11)および(3.2.22)をJenkins-Traub法[3.23]により数値的に解き、特性根を求めた。

数値ラプラス逆変換は高速フーリエ変換を利用した方法を用い、半無限長および有限長円筒殻のいずれとも γ は $6/T$ とし、サンプリング数 N は変位については 2^8 、垂直応力については 2^9 、曲げモーメントおよび液体圧力については 2^{10} とした。また有限長円筒殻の場合の解に含まれる級数の項数は計算条件によって異なるが最大400項まで取った。

解析対象としたモデルのように軸対称問題では軸方向に比較して円周方向の垂直力 $N_{\theta\theta}$ について、また固定端で最大となる軸方向の曲げモーメント M_{xx} について、数値結果を以下に示し考察を行う。

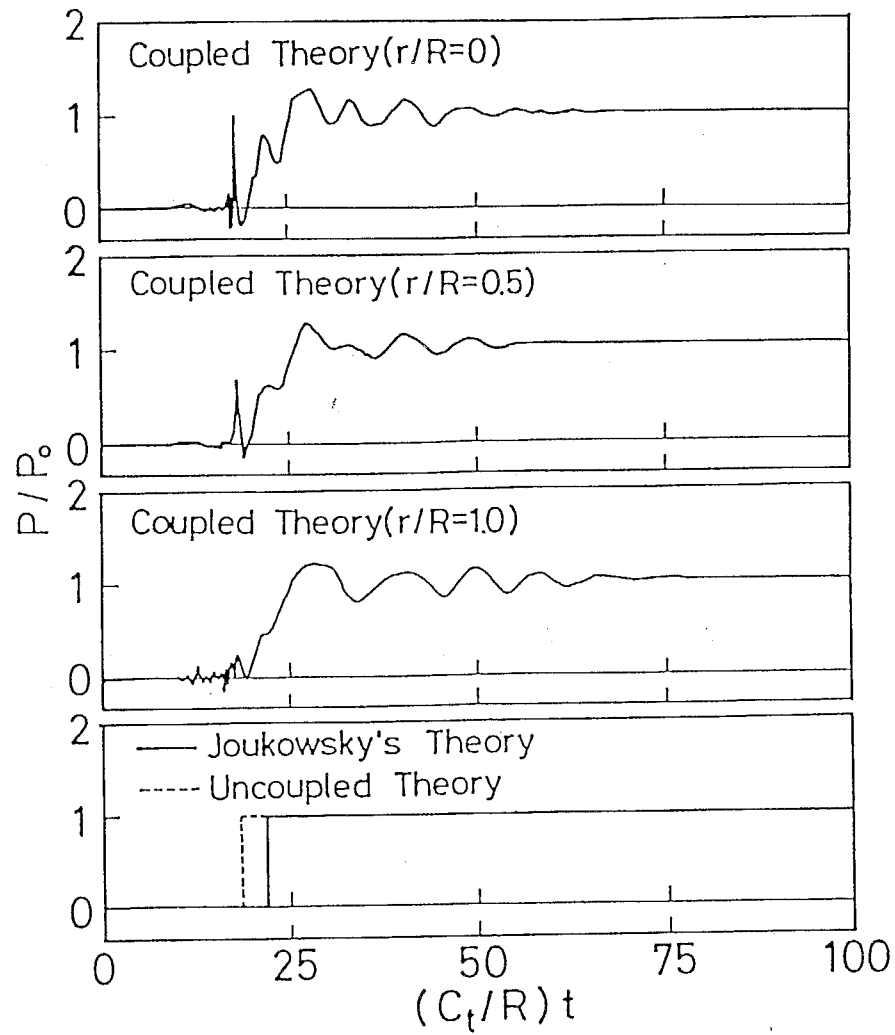
3.3.1 半無限長円筒殻に対する数値結果

Fig. 3.3.1に円筒殻の肉厚比 h/R が0.01および0.05の場合についての液体圧力 P の変



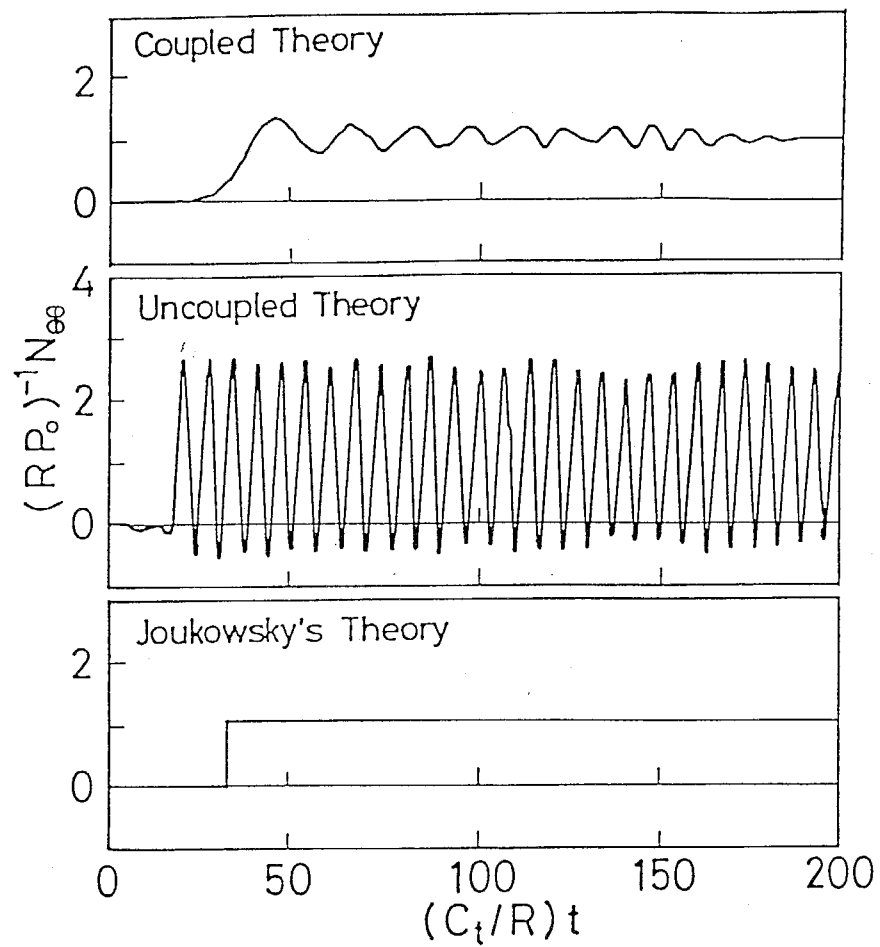
(a) $h/R=0.01$

Figure 3.3.1 History of Liquid Pressure P for the Semi-Infinite Pipe at $x/R=5$
 (In Joukowski's theory and uncoupled theory, the figures denote the results for all r .)
 (Continued)

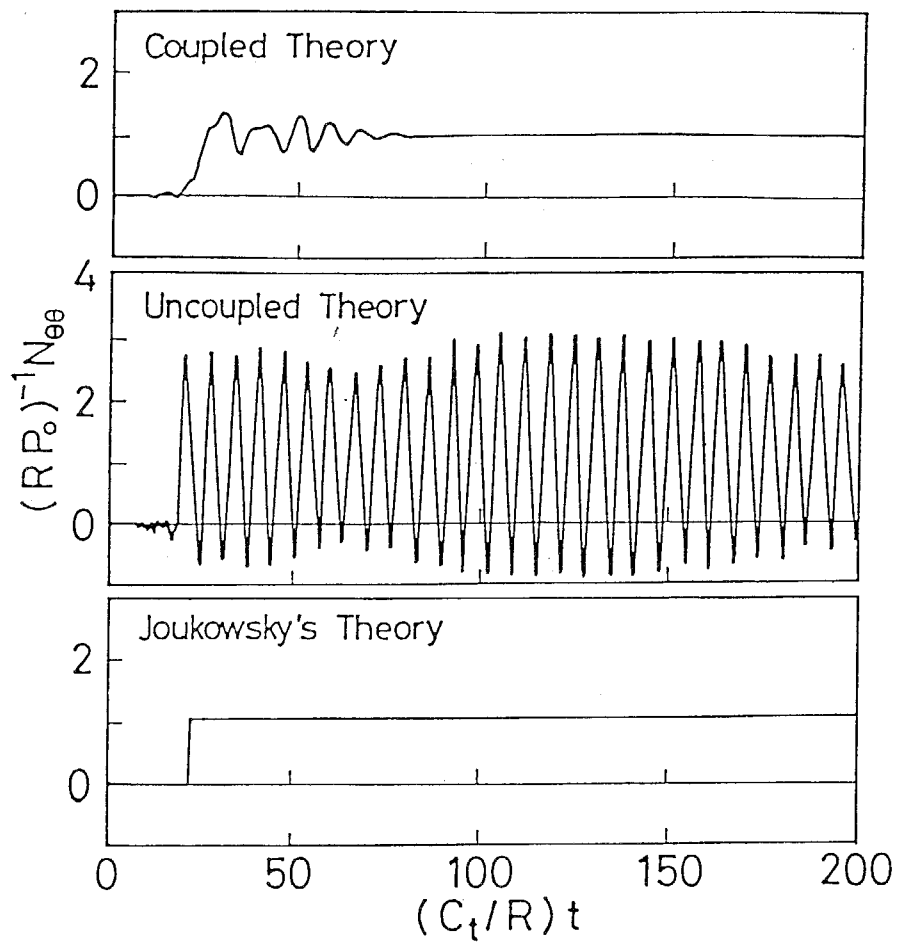


(b) $h/R=0.05$

Figure 3.3.1 History of Liquid Pressure P for the Semi-Infinite Pipe at $x/R=5$
(In Joukowski's theory and uncoupled theory, the figures denote the results for all r .)

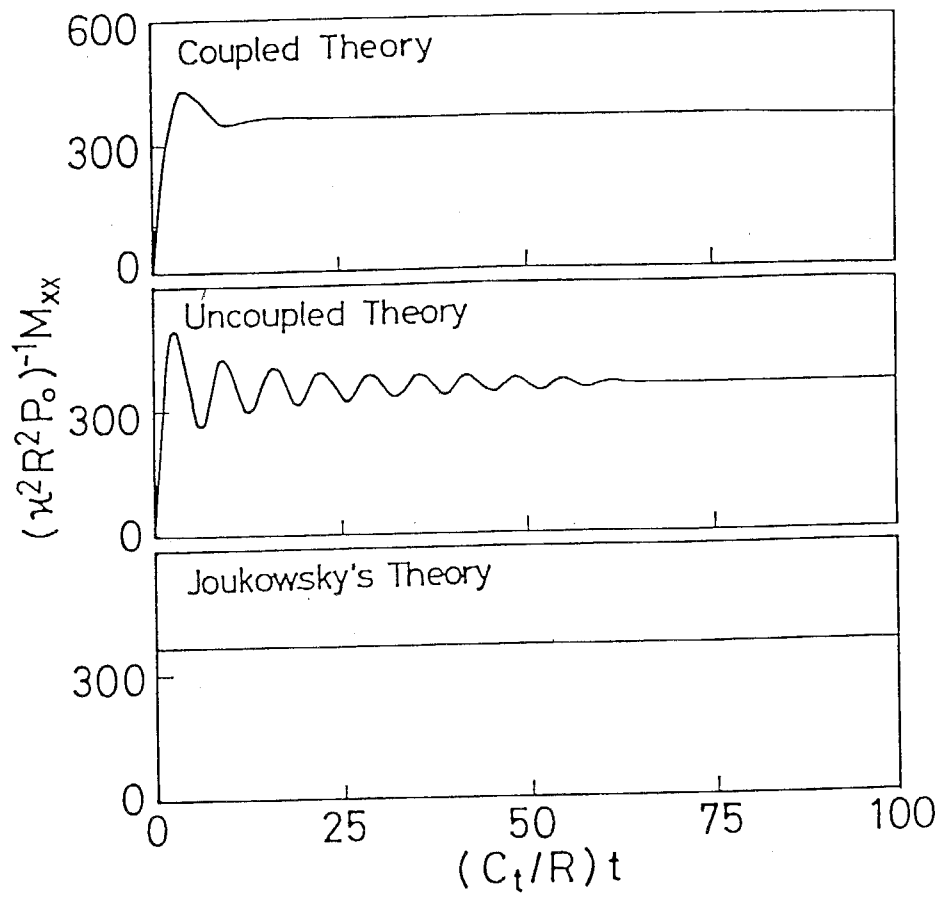


(a) $h/R=0.01$
 Figure 3.3.2 History of Stress Resultant $N_{\theta\theta}$ in the Semi-Infinite Pipe
 at $x/R=5$
 (Continued)



(b) $h/R=0.05$

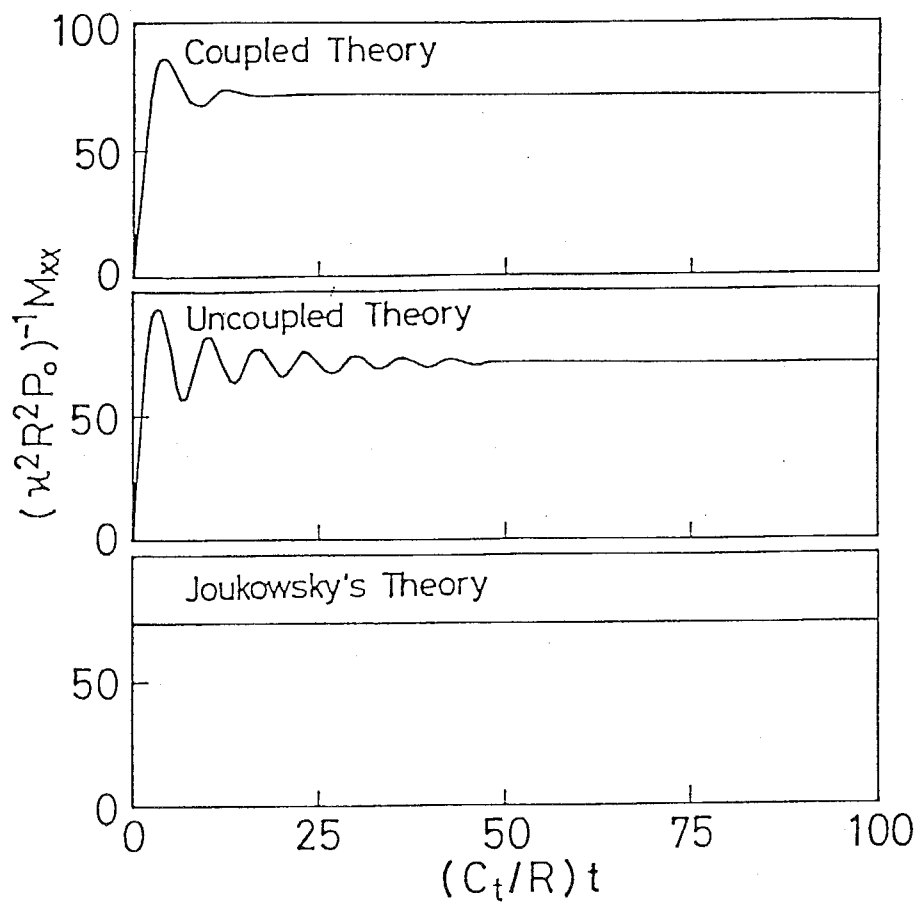
Figure 3.3.2 History of Stress Resultant $N_{\theta\theta}$ in the Semi-Infinite Pipe at $x/R=5$



(a) $h/R=0.01$

Figure 3.3.3 History of Bending Moment M_{xx} in the Semi-Infinite Pipe at $x/R=0$

(Continued)



(b) $h/R=0.05$

Figure 3.3.3 History of Bending Moment M_{xx} in the Semi-Infinite Pipe at $x/R=0$

動を示す。連成理論より得られる液体圧力はJoukowski理論の速度の波とそれよりも速い速度の先行波(Precursor Wave)からなる[3.3]。圧力の時間変動は波頭付近で最大値を示した後、時間経過とともに振動しながら非連成理論およびJoukowski理論の値に収束する。円筒の肉厚が厚くなるにつれ、振動する時間が短くなる傾向がある。また波頭付近では半径方向に圧力の分布が見られるが、時間の経過につれ、しだいに一様な分布を示すことがわかる。このことから波頭付近では液体の半径方向の慣性力の影響が大きいものと思われる。よって相対的に円筒の剛性が大きければ連成振動の影響は小さくなることが予想される。また液体を一次元的に扱ったJoukowski理論では波頭付近を除いてほぼ連成理論の解に一致すると考えられる。

Fig. 3.3.2に円筒殻の肉厚比 h/R が0.01および0.05の場合についての垂直力 $N_{\theta\theta}$ の時間変動を示す。連成理論より得られる垂直力の時間変動は波頭付近で最大値を示した後、振動しながらJoukowski理論の値に収束することがわかる。これは液体圧力の場合と同様の結果である。これに対して非連成理論では液体のない場合の円筒殻の固有振動数で激しく振動することがわかる。連成理論およびJoukowski理論の結果は非連成理論の結果とは全く異なる結果となる。これより円筒の振動は液体の存在のため生じる連成効果により抑制されると考えられる。

次にFig. 3.3.3に円筒殻の肉厚比 h/R が0.01および0.05の場合についての固定端における曲げモーメント M_{xx} の時間変動を示す。連成理論による垂直力の時間変動はJoukowski理論の結果に収束する。収束の速度は非連成理論の結果に比較して速いことがわかる。

3.3.2 有限長円筒殻に対する数値結果

Fig. 3.3.4に長さ $l/R=10$ および肉厚 $h/R=0.01$ の円筒殻の場合の液体圧力 P の時間変動を示す。 $r/R=0, 0.5$ および 1.0 における連成理論、非連成理論およびJoukowski理論による液体圧力の計算結果を比較する。時間初期の振動を除いてほぼ半径方向に一様な分布を示す。ただし円筒の中心付近における圧力の時間変動には高周波成分の波形が多く含まれる。この場合、全体としての圧力変動をJoukowski理論で近似することは困難である。ただし圧力の時間変動の周期はほぼJoukowski理論で近似することは可能である。これは円筒の長さが半無限長円筒殻の場合と比較して短く、液体の半径方向の慣性力が支配的となっているためと考えられる。このため液体を一次元的に取り扱っているJoukowski理論では圧力波の周期のみしか予想が困難であると思われる。

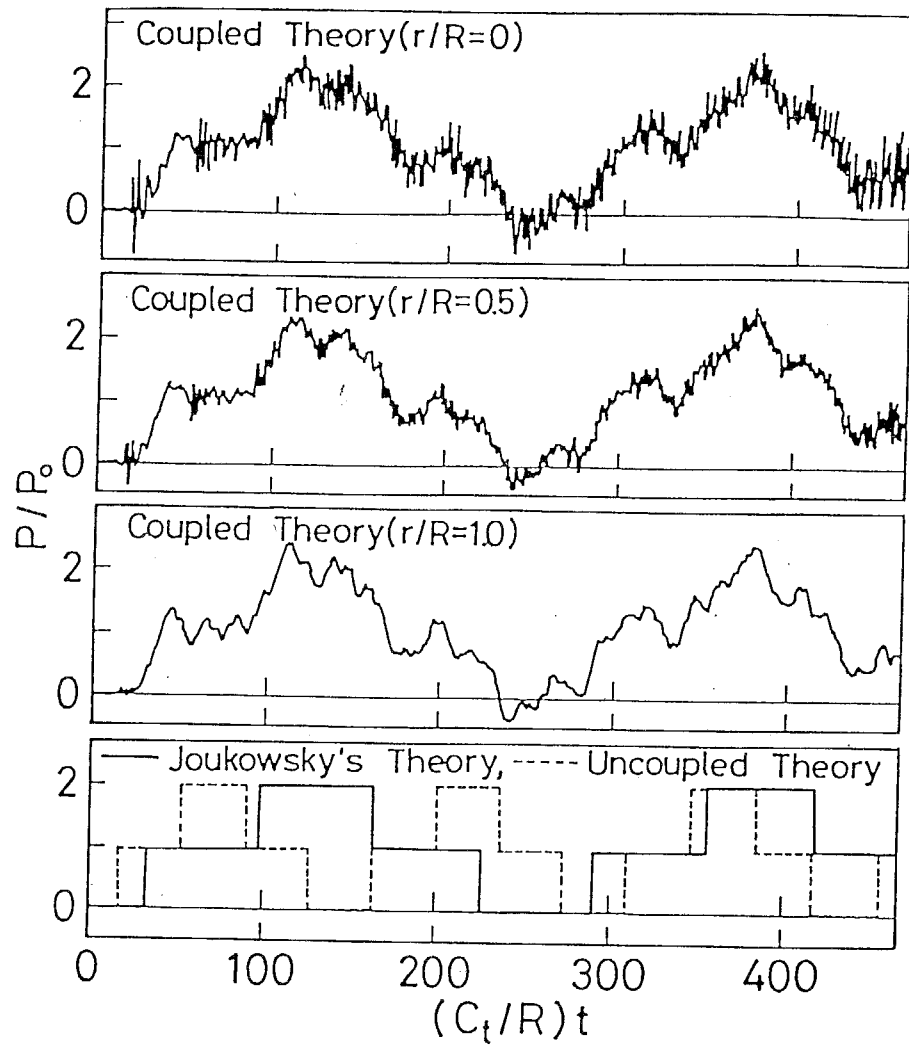


Figure 3.3.4 History of Liquid Pressure P in the Finite Pipe at $x/R=5$
 $h/R=0.01$, $l/R=10$
(In Joukowski's theory and uncoupled theory, the figures denote the results for all r .)

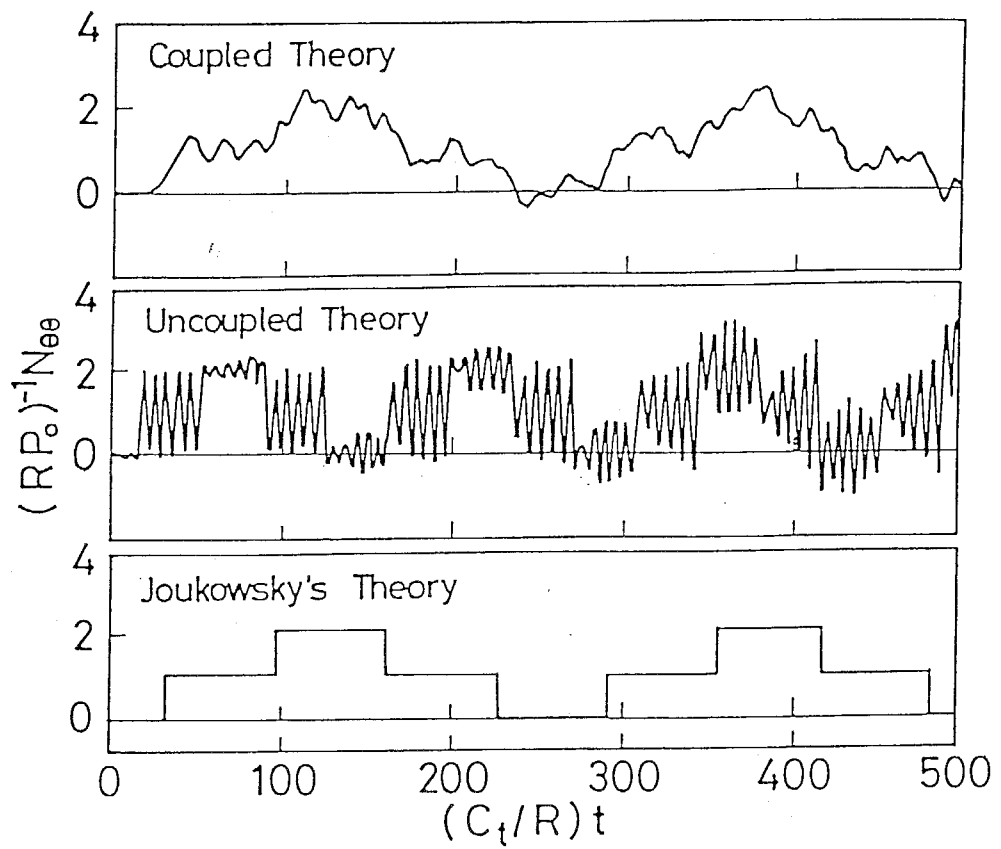


Figure 3.3.5 History of Stress Resultant $N_{\theta\theta}$ in the Finite Pipe at $x/R=5$
 $h/R=0.01$, $L/R=10$

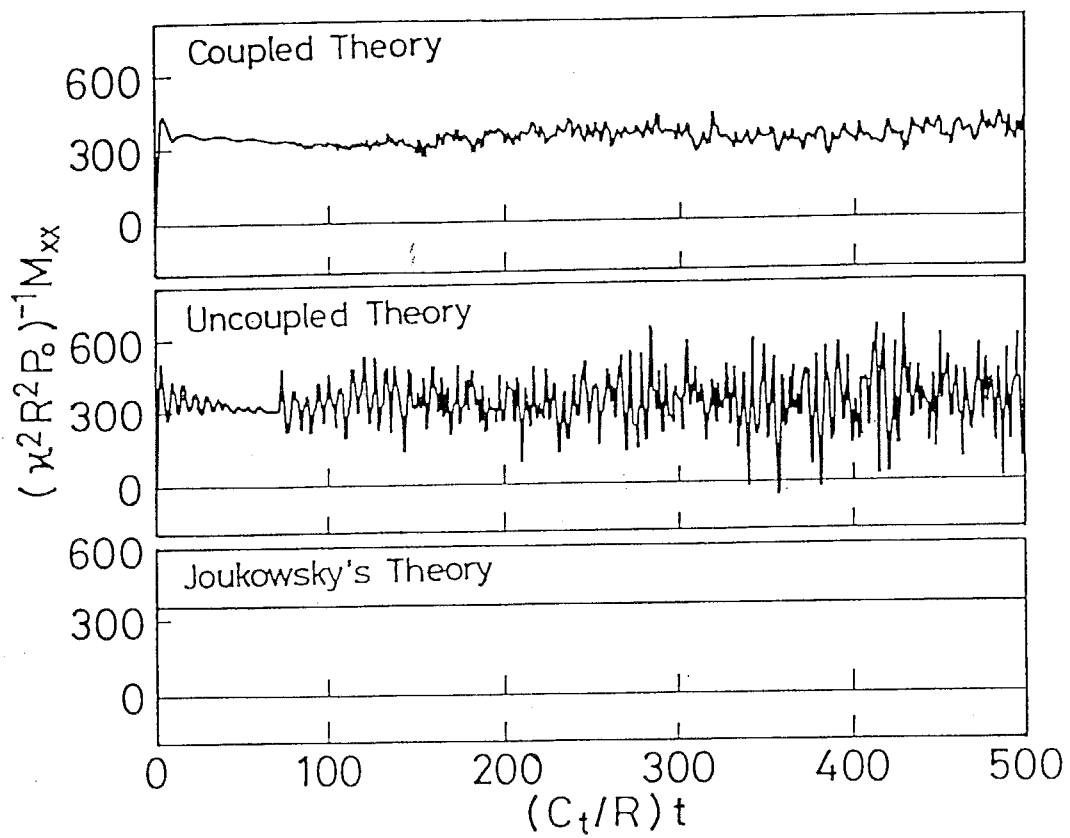


Figure 3.3.6 History of Bending Moment M_{xx} in the Finite Pipe at $x/R=10$
 $h/R=0.01$, $L/R=10$

Fig. 3.3.5に垂直力 $N_{\theta\theta}$ の時間変動を示す。連成理論の垂直力の時間変動は液体圧力と同様の傾向を示す。Joukowski理論による圧力波が円筒の端で反射し戻るまでの時間範囲では、垂直力は半無限長円筒殻の結果と一致する。円筒の応力はJoukowski波の伝播の影響を強くうけるために、応力波の周期はJoukowski理論によりほぼ近似することができる。しかし応力波の振幅はJoukowski理論では評価することが困難である。これは液体圧力の時間変動で考察したように、液体の半径方向の運動が大きく影響しているものと考えられる。また非連成理論の結果は他の理論とは異なり円筒単体の固有振動数で大きく振動する。半無限長円筒殻の場合の考察と同様に、円筒の振動は連成効果によりかなり抑制されるためと思われる。

Fig. 3.3.6は入射圧力が作用する固定端における曲げモーメント M_{xx} を表す。連成理論による結果は非連成理論の結果に比較して振幅が小さくなる。この結果からも円筒の振動を連成効果が抑制していると思われる。

従って圧力波形に高周波成分が少ない場合、Joukowski理論は十分に実用に供するものと考えられる。

3.4 結言

Joukowski理論の妥当性および円筒の応答に及ぼす連成効果を明らかにするため、水撃をうける液体で満たされた半無限長および有限長の円筒殻の衝撃応答を解析した。得られた結果をまとめると次のようになる。

- (1) 円筒がかなり長い場合、円筒の慣性効果を見捨て連成効果を近似的に考慮したJoukowski理論による結果は連成理論による結果とほぼ一致する。円筒の肉厚が厚いほどJoukowski理論の結果はより連成理論の結果に近づく。しかし円筒の応力波の波頭付近では連成効果の影響が大きくなり、Joukowski理論より大きな値を示す。
- (2) 円筒が短い場合、Joukowski理論の結果はあまり正確な結果を得ることができない。円筒の長さが短くなるにつれて円筒の応答に及ぼす動的な連成効果の影響が大きくなる。
- (3) 円筒の慣性効果のみを考慮した非連成理論の結果は、円筒の長さにかかわらず連成理論による結果と異なる。Joukowski理論による結果は実験結果と比較し

てほぼ妥当である。非連成理論によれば円筒殻の半径方向の自由振動の影響が過大に助長された結果が得られるので注意を要する。

- (4) 本問題において円筒と液体の連成効果は円筒の振動を抑制するように作用することがわかった。また液体に比較して円筒の剛性が小さい場合に、連成効果が大きく影響することが明らかになった。
- (5) Joukowsky理論は圧力波形に高周波成分の振動が少ない場合、充分に実用に供することがわかった。

参考文献

- [3.1] Bergeron L. : Waterhammer in Hydraulics and Wave Surges in Electricity (1961), p.2-11, John Wiley & Sons.
- [3.2] Li, W.-H., : Fluid Mechanics in Water Resources Engineering, (1983), p.217-231, Allyn and Bacon.
- [3.3] Skalac S., : An Extension of the Theory Water Hammer, Transactions of the ASME, Vol.78(1956), p.105-116.
- [3.4] Forrestal M.J. and Herrmann G., : Response of a Submerged Cylindrical Shell to an Axially Propagation Step Wave, Journal of Applied Mechanics, Vol.32, No.4(1965), P.788-792.
- [3.5] Krause N., Goldsmith W., Sackman J.L. : Transients in Tubes Containing Liquids, International Journal of Mechanical Sciences, Vol.19, No.1(1977), p.53-68.
- [3.6] Barez F., Goldsmith W., Sackman J.L., : Longitudinal Waves in Liquid-Filled Tubes - 1.Theory, International Journal of Mechanical Sciences Vol.24, No.4(1979), p.212-221.
- [3.7] Barez F., Goldsmith W., Sackman J.L., : Longitudinal Waves in Liquid-Filled Tubes - 2.Experiments, International Journal of Mechanical Sciences, Vol.24, No.4(1979), p.222-236.
- [3.8] Walker J.S., Phillips J.W. : Pulse Propagation in Fluid-Filled Tubes, Journal of Applied Mechanics, Vol.44, No.1(1977), p.31-35.

- [3.9] 浦田喜彦：弾性円筒と流体の連成振動（第1報 流体が非粘性の場合の基礎的解析）、日本機械学会論文集, Vol. 41, No. 351(1975), p. 3114-3125.
- [3.10] 浦田喜彦：弾性円筒と流体の連成振動（第2報 流体の粘性を考慮した場合の基礎的解析）、日本機械学会論文集, Vol. 42, No. 357(1976), p. 1389-1398.
- [3.11] 浦田喜彦：弾性円筒と流体の連成振動（第3報 管外壁に接する物質の力学的効果の解析）、日本機械学会論文集, Vol. 43, No. 375(1977), p. 4139-4149.
- [3.12] 浦田喜彦：弾性円筒と流体の連成振動（第4報 粘性流体を含む直管系の振動数特性の近似計算式）、日本機械学会論文集, Vol. 44, No. 387(1978), p. 3738-3748.
- [3.13] 浦田喜彦：弾性円筒と流体の連成振動（第5報 伝ば速度の周波数依存性に関する実験）、日本機械学会論文集（C編）, Vol. 45, No. 396(1979), p. 869-875.
- [3.14] 浦田喜彦：弾性円筒と流体の連成振動（第6報 境界条件に関する考察）、日本機械学会論文集（C編）, Vol. 47, No. 415(1981), p. 274-282.
- [3.15] 浦田喜彦：弾性円筒と流体の連成振動（第7報 非軸対称現象に関する検討）、日本機械学会論文集（C編）, Vol. 47, No. 420(1981), p. 1125-1129.
- [3.16] 浦田喜彦：弾性円筒と流体の連成振動（第8報 流体粘性による減衰に関する実験）、日本機械学会論文集（C編）, Vol. 48, No. 435(1982), p. 1713-1721.
- [3.17] 浦田喜彦：弾性円筒と流体の連成振動（第9報 水撃の解析）、日本機械学会論文集（C編）, Vol. 53, No. 487(1987), p. 527-533.
- [3.18] Tomski L., Kukla S. : Dynamic Response of Bar-Fluid-Shell System Simulating Hydraulic Cylindrical Subjected to Arbitrary and Extension, Journal of Sound and Vibration, Vol. 29, No. 2, (1984), p. 273-284.
- [3.19] 鈴木真一：高速移動内圧をうける薄肉円筒の動的挙動、日本機械学会論文集, Vol. 38, No. 309(1972), p. 940-947.
- [3.20] 鈴木真一：水撃作用による薄肉円筒の動的挙動、日本機械学会論文集, Vol. 41, No. 346(1975), p. 1695-1701.
- [3.21] 足立忠晴、宇治橋貞幸、松本浩之：水撃をうける有限長円筒殻の衝撃応答の解析、日本機械学会論文集（A編）, Vol. 51, No. 467(1985), p. 1886-1892.
- [3.22] Filon L.N.G. : On a Quadrature Formular for Trigonometric Integrals, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Vol. 49, (1929), p. 38-48.

[3.23]Jenkins M.A., Traub J.F. : Zeros of a Complex Polynomial [C2], Communications of the ACM, Vol. 15, No. 2(1972), p. 97-99.

第4章 液体で満たされた円筒殻の衝撃応答

4.1 緒言

薄肉構造は液体の輸送のための配管や液体の容器として使用されることが多い。宇宙構造物や航空機の燃料系やプラント設備などが代表例であり、これらの構造は衝撃的な負荷をうけることが多く、損傷あるいは破壊した場合、重大な事故につながる。このため液体と接する基本的な構造の挙動を把握しておくことは重要である。

このような薄肉構造は液体と連成運動することが知られている。第1章で述べたように液体との連成運動の理論的取り扱いには2種類に大別することができる。液体貯槽などの問題では構造の応答に液体の流動が大きく影響し、液体の効果は構造壁への付加質量として取り扱われ、様々な条件において液体を付加質量として評価する方法が試みられている[4.1][4.2]。一方、前章で取り扱った水撃による管路の応答問題では液体内の圧力波の影響が顕著になり、液体の効果を単に付加質量で近似するだけでは圧力波の反射などの波動現象を評価することが困難であると考えられる。圧力波の影響を考慮した構造の衝撃応力を対象とした研究は比較的少ない。配管に対する研究ではBarezら[4.3][4.4]およびKatsamanisとGoldsmith[4.5]は液体の存在により応力波の伝播速度が遅くなることを指摘している。宇治橋ら[4.6]は無有限長円筒殻に軸対称衝撃荷重が作用する問題を解析して、液体の影響により円筒のたわみが小さくなり固有振動数が低下することを明らかにしている。また液体を等価質量で近似することを試みているが現象を良好な精度で評価することは困難なようである。またSuzuki[4.7]は液体で満たされた円輪に軸対称衝撃荷重が作用する問題を解析し円輪の応力が静的に荷重が作用する場合の約2倍にも達することがあることを明らかにしている。

このような液体と構造との波動伝播の連成効果が支配的現象に対して、これらの研究では連成効果の重要性を述べているが、連成効果と円筒の形状、材質や液体の種類などとの関係が明らかにされていないようである。そこで液体と構造の連成効果の顕著さを示す指標を明らかにすることは重要であると思われる。

本章では基本構造である液体で満たされた円筒の衝撃応答に及ぼす液体との連成効果を数種の外力条件において明らかにすることを目的とする。ここでは波動の連成効

果が顕著に現れる場合を考え、円筒の軸線が移動しない、すなわち液体が付加質量として作用しない問題を解析の対象とする。まず連成効果を表わすパラメータを得るために、できるだけ単純なモデルとして一様な衝撃圧力が作用する問題を解析する。解析解から導出される2つの無次元パラメータを用いて円筒の変形に及ぼす連成効果を定性的に陽に表わすため、液体-円筒系および液体に対してそれぞれ質点系の力学モデルを考える。力学モデルの質点質量、ばね定数と無次元パラメータとの関係から、無次元パラメータと連成効果の関係を明らかにする。次に得られたパラメータの妥当性を確認するために、非軸対称荷重が作用する2次元問題および有限長円筒殻の中央に線状の軸対称荷重が作用する問題を解析する。さらに、このとき円筒の形状、材質および液体の種類などの影響を明らかにする。

4.2 一様外圧をうける無限長円筒殻の衝撃応答

4.2.1 解析モデル

円筒の衝撃応答に及ぼす液体と円筒の連成効果を考察するためにFig. 4.2.1のようなモデルを考える。肉厚 h および平均半径 R の円筒の内部に液体が満たされており、ステップ状に時間変化する一様な外圧が作用するときの円筒の衝撃応答を解析する。

4.2.2 解析的方法による結果

(a) 解析解の導出

解析に用いる円筒と液体との連成条件は式(1.1.1)より

$$r=R \text{ において } \begin{cases} v_{fr} = -\frac{\partial W}{\partial t} \\ p_z = F_0 \cdot H(t) - P \end{cases} \quad (4.2.1)$$

となる。

また非連成条件は式(1.1.2)より

$$\begin{cases} r=R \text{ において } & v_{fr} = 0 \\ r=R \text{ において } & P_z = F_0 H(t) - P \end{cases} \quad (4.2.2)$$

となる。ここで $H(t)$ はステップ関数を示す。

初期条件として時間 $t=0$ において液体と円筒殻が無応力状態で静止しているとすれば

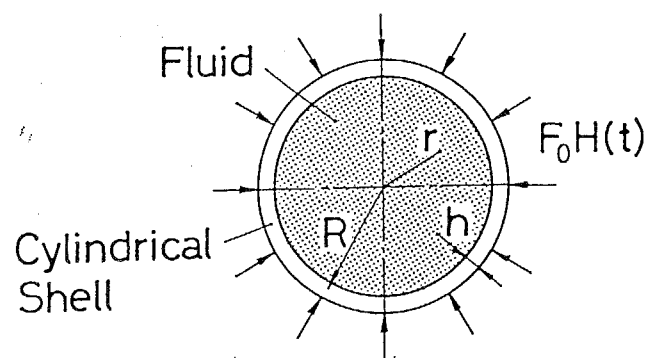


Figure 4.2.1 A Circular Cylinder Filled with Liquid and Subjected to Impulsive Uniform Load

$$t=0 \text{ において } W = \frac{\partial W}{\partial t} = \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (4.2.3)$$

となる。

円筒に一様な外圧が作用していることから、液体の基礎方程式(a.10)および円筒殻の基礎方程式(c.18)の軸方向および円周方向座標に関する微分項を無視して、さらに式(4.2.3)を考慮してラプラス変換した後、式(4.2.1)とともに解くことにより次の円筒のたわみが求められる。

$$\frac{E_p}{R^2 F_0} \bar{W} = \frac{1}{G_c(s)s} \quad (4.2.4)$$

ここで $G_c(s)$ は液体-円筒系の伝達関数であり次式で示される。

$$G_c(s) = 1 + \kappa^2 + s^2 + \frac{\alpha \beta s \cdot I_0(as)}{I_1(as)} \quad (4.2.5)$$

また

$$\alpha = C_t / C_f, \quad \beta = KR / E_p \quad (4.2.6)$$

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau, \quad \tau = (C_t / R) t$$

であり、 $I_n(z)$ は n 次の第1種変形ベッセル関数を示す。

液体の影響を考慮しない場合、すなわち非連成条件においては、式(4.2.5)の下線部を無視すればよい。

また固有振動数 ω は式(4.2.5)より

$$G_c(i\omega) = 0 \quad (4.2.7)$$

とした超越方程式より求められる。

ラプラス変換領域における解である式(4.2.4)を Krings-Waller の方法により時間領域に逆変換する。

(b) 数値計算結果

液体を水とし円筒の材質を鋼としたときの円筒のたわみの数値計算結果を示す。計算に用いた諸量は以下の通りである。

$$E = 210 [\text{GPa}], \quad \rho_t = 7900 [\text{kg/m}^3], \quad \nu = 0.3,$$

$$K = 2.2 [\text{GPa}], \quad \rho_f = 1000 [\text{kg/m}^3]$$

また円筒の肉厚比 h/R は 0.01 および 0.05 とした。

円筒のたわみの時間変動を Fig. 4.2.2 に示す。図中の実線および破線はそれぞれ液

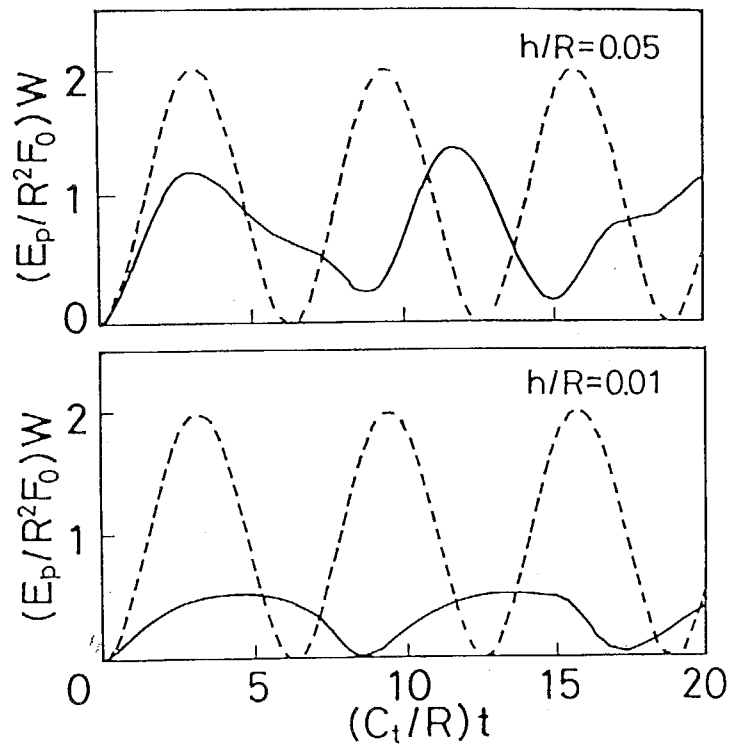
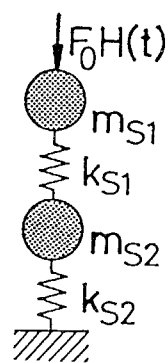
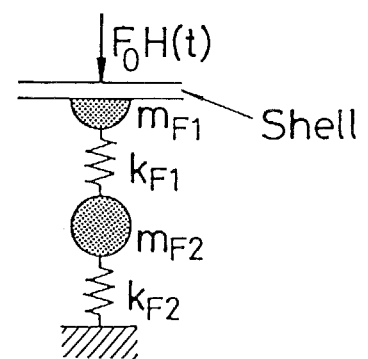


Figure 4.2.2 Deflection W Histories of a Circular Cylindrical Shell
 — Coupled, ---- Uncoupled
 $\alpha = 3.60$, $\beta = 0.00981R/h$ (Shell:Steel/Liquid:Water)



(a) Model S for Liquid-Cylinder System



(b) Model F for Fluid

Figure 4.2.3 Mechanical Model

体の影響を考慮した場合および考慮しない場合を示す。Fig. 4.2.2から液体の影響によりたわみの時間変動の振幅が液体の存在しない場合に比較して小さくなり周期が長くなることがわかる。この傾向は円筒の肉厚が薄くなるにつれて顕著である。

4.2.3 ばね-質点系による近似モデル

式(4.2.4)の解析解から流体連成効果を考察するとき定量的に理解することができる。しかし定性的な連成効果を評価することは困難であると思われる。そこで解析解と同等の応答を示す力学モデルを用いて考察する。液体-円筒系および液体に対してばね-質点系のモデルにより近似する。

(a) 液体-円筒系を近似した力学モデル (モデル S)

Fig. 4.2.3(a)のように液体-円筒系モデル (以下においてモデル S と呼ぶ)において質点 m_{s1} の変位を円筒のたわみとして W を使い、質点 m_{s2} の変位を X とする。またばね定数をそれぞれ k_{s1} および k_{s2} とする。モデル S の運動方程式は

$$\begin{cases} m_{s1} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + k_{s1}(W-X) = F_0 \cdot H(t) \\ m_{s2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + k_{s1}(X-W) + k_{s2}X = 0 \end{cases} \quad (4.2.8)$$

となる。

式(4.2.8)をラプラス変換した後、変位 W が次式のように求められる。

$$\frac{E_P}{R^2 F_0} \bar{W} = \frac{1}{G_S(s)s} \quad (4.2.9)$$

ここで $G_S(s)$ はモデル S で近似された液体-円筒系の伝達関数であり

$$G_S = \frac{M_{s1}M_{s2}s^4 + \{M_{s2}K_{s1} + M_{s1}(K_{s1} + K_{s2})\}s^2 + K_{s1}K_{s2}}{M_{s2}s^2 + K_{s1} + K_{s2}}$$

となる。また

$$\begin{bmatrix} M_{s1} \\ M_{s2} \end{bmatrix} = \frac{C_t^2}{E_P} \begin{bmatrix} m_{s1} \\ m_{s2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} K_{s1} \\ K_{s2} \end{bmatrix} = \frac{R^2}{E_P} \begin{bmatrix} k_{s1} \\ k_{s2} \end{bmatrix}$$

である。

(b) 液体を近似した力学モデル (モデル F)

Fig. 4.2.3(b)のように液体の挙動のみを 2 自由度ばね-質点系モデル (以下においてモデル F と呼ぶ) で近似し、質点 m_{F1} は円筒の内面に取り付けられているものとしてその変位を W とする。質点 m_{F2} の変位は Y とする。またばね定数をそれぞれ k_{F1} および k_{F2} とすれば、モデル F の運動方程式は次のようになる。

$$m_{F1} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + k_{S1}(W-Y) = P, \quad m_{F2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + k_{S1}(Y-W) + k_{F2}Y = 0 \quad (4.2.10)$$

ここで P はばね-質点系モデルが円筒に作用する力、すなわち液体圧力である。

式(4.2.1)、(4.2.4)および(4.2.9)をラプラスした後、円筒のたわみ W が次式のよう求められる。

$$\frac{E_P}{R^2 F_0} \bar{W} = \frac{G_U(s) G_F(s)}{G_U(s) + G_F(s)} \frac{1}{s} \quad (4.2.11)$$

ここで $G_U(s)$ および $G_F(s)$ はそれぞれ円筒単体の伝達関数およびモデル F で近似された液体の伝達関数であり次式で示される。

$$G_F = \frac{M_{F1} M_{F2} s^4 + \{M_{F2} K_{S1} + M_{F1} (K_{F1} + K_{F2})\} s^2 + K_{F1} K_{F2}}{M_{F2} s^2 + K_{F1} + K_{F2}}$$

$$G_U(s) = 1 + K^2 + s^2$$

また

$$\begin{bmatrix} M_{F1} \\ M_{F2} \end{bmatrix} = \frac{C_t^2}{E_P} \begin{bmatrix} m_{F1} \\ m_{F2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} K_{F1} \\ K_{F2} \end{bmatrix} = \frac{R^2}{E_P} \begin{bmatrix} k_{F1} \\ k_{F2} \end{bmatrix}$$

である。

(c) 近似モデルのパラメータの決定

それぞれの力学モデルのばね定数および質点の質量を次のように求めた。

式(4.2.10)および(4.2.12)のラプラス逆変換解はいずれも

$$W = A_0 + A_1 \cos(\omega_1 \tau) + A_2 \cos(\omega_2 \tau) \quad (4.2.12)$$

の形で求められる。

式(4.2.12)の固有振動数 ω_1, ω_2 は解析解の式(4.2.8)より求められる 1 次および 2 次の固有振動数を用いる。式(4.2.5)から得られる結果の 3 周期程度の円筒のたわみの時間変化に対して式(4.2.13)により最小 2 乗近似を行い振幅 A_0, A_1 および A_2 を求めた。固有振動数 ω_1, ω_2 および得られた振幅 A_0, A_1, A_2 より、それぞれのばね定数

Table 4.2.1 Parameters α and β

Pipe	Fluid	α	β
Steel	Ethyl Alcohol	5.07	0.00390R/h
	Glycerin	2.79	0.0206R/h
	Mercury	3.93	0.112R/h
	Benzene	4.95	0.00456R/h
	Water	3.63	0.00963R/h
Aluminum	Ethyl Alcohol	5.00	0.0117R/h
	Glycerin	2.75	0.0619R/h
	Mercury	3.87	0.335R/h
	Benzene	4.88	0.0137R/h
	Water	3.58	0.0289R/h
Copper	Ethyl Alcohol	3.73	0.00656R/h
	Glycerin	2.05	0.0347R/h
	Mercury	2.89	0.188R/h
	Benzene	3.64	0.00766R/h
	Water	2.67	0.0162R/h

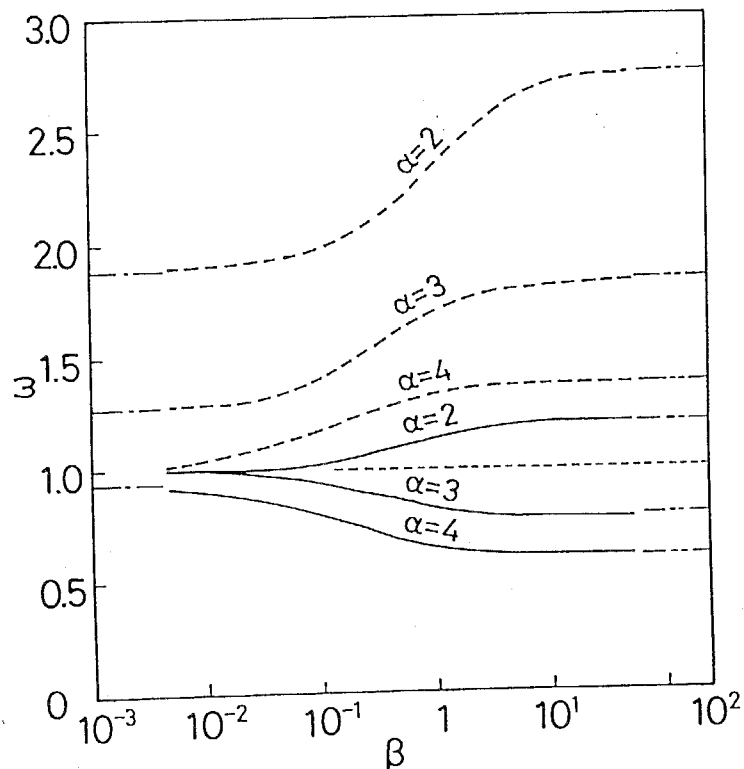


Figure 4.2.4 Non-Dimensional Natural Frequencies

- 1st. Natural Frequencies
- 2nd. Natural Frequencies
- for Empty Cylinder
- for Liquid Enclosed with Rigid Body
- for Liquid Enclosed with Free Surface

および質点質量を決定した。

4.2.4 液体と円筒との連成効果の考察

(a) 無次元パラメータの設定

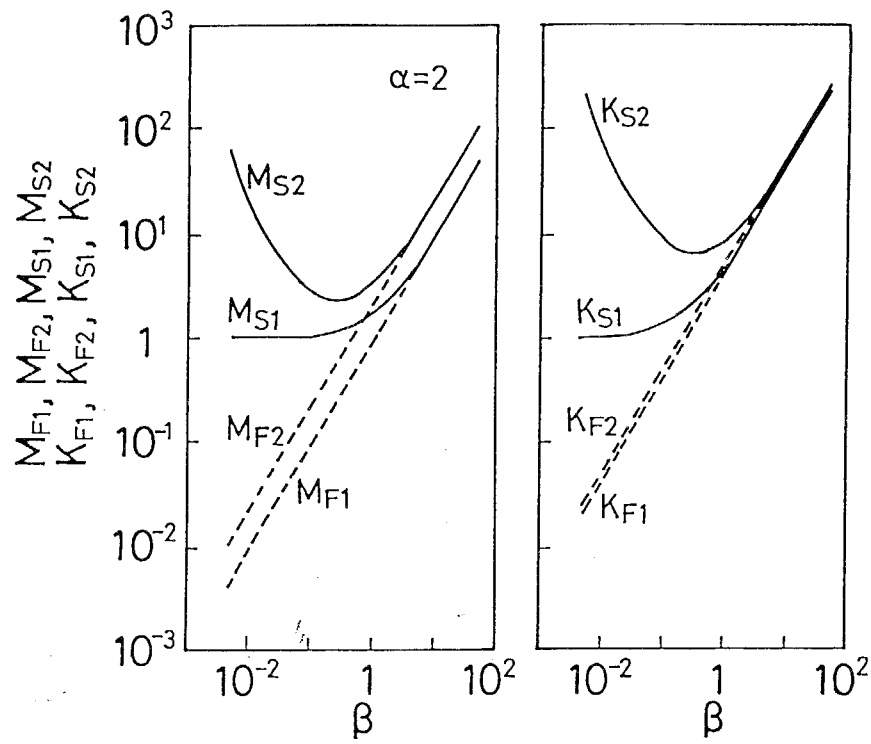
液体－円筒の連成系の衝撃応答の特徴を示すパラメータとして式(4.2.7)で示される無次元量 α および β を用いる。様々な円筒の材料と液体の組み合わせによる α および β の数値を Table 4.2.1 に示す。Table 4.2.1 より α は2から5程度の値を取ることがわかる。一方、 β はかなり数値的に変化することがわかる。

(b) 固有振動数による考察

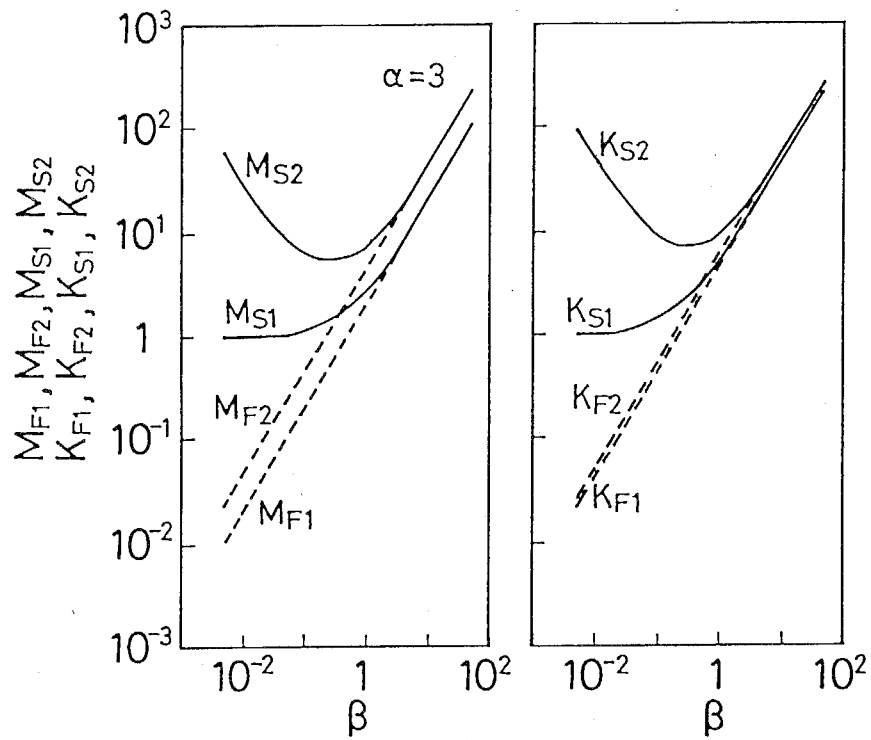
α および β の変化による1次および2次の無次元固有振動数 ω の変化を Fig. 4.2.4 に示す。ただし Table 4.2.1 の結果を考慮して α の値は2, 3 および 5 とした。また円筒殻の基礎方程式の適用範囲を考えて h/R の値を0.1から0.001程度とし、 β の値は0.005から50まで変化させた。Fig. 4.2.4において細線のうち破線、一点鎖線および二点鎖線はそれぞれ円筒単体、周囲を剛体で囲まれる液体および周囲を自由表面で囲まれる液体の固有振動数を示し、太線の実線および破線は式(4.2.8)より得られる液体との連成効果を考慮した場合の1次および2次の固有振動数を表す。 β の値が小さくなるにつれて円筒－液体の連成系の固有振動数は円筒単体および剛体で囲まれる液体の固有振動数のいずれかに漸近する。また β の値が大きくなるにつれて円筒－液体系の固有振動数は自由表面で囲まれる液体の固有振動数に漸近する。このような傾向は α の値の変化に関係なく同様である。したがって β の値が小さくなるにつれ円筒と液体は連成せず、 β の値が大きくなるにつれ円筒と液体とは連成運動する。さらに β の値が大きくなると円筒の影響はほとんどなくなり円筒－液体系は液体単体の挙動を示す。

(c) モデル S および F による考察

α および β の変化によるモデル S および F の無次元のばね定数、無次元の質点質量の変化を Fig. 4.2.5 に示す。(a)、(b) および (c) はそれぞれ α の値が2、3 および 4 の場合の結果である。 $\alpha=2$ のとき β が約0.005までの値では円筒－液体系のモデル S の質点質量およびばね定数に比較して液体の力学モデル F の値は小さい。 β の値が約0.1から1程度のときモデル S とモデル F の質点質量およびばね定数はいずれも近い値を示す。また β が約1以上の値ではモデル S とモデル F の値はほぼ一致する。このような傾向は α が3, 4 の場合も同様であり、ここでは示していないが $\alpha=5$ のときも同様な

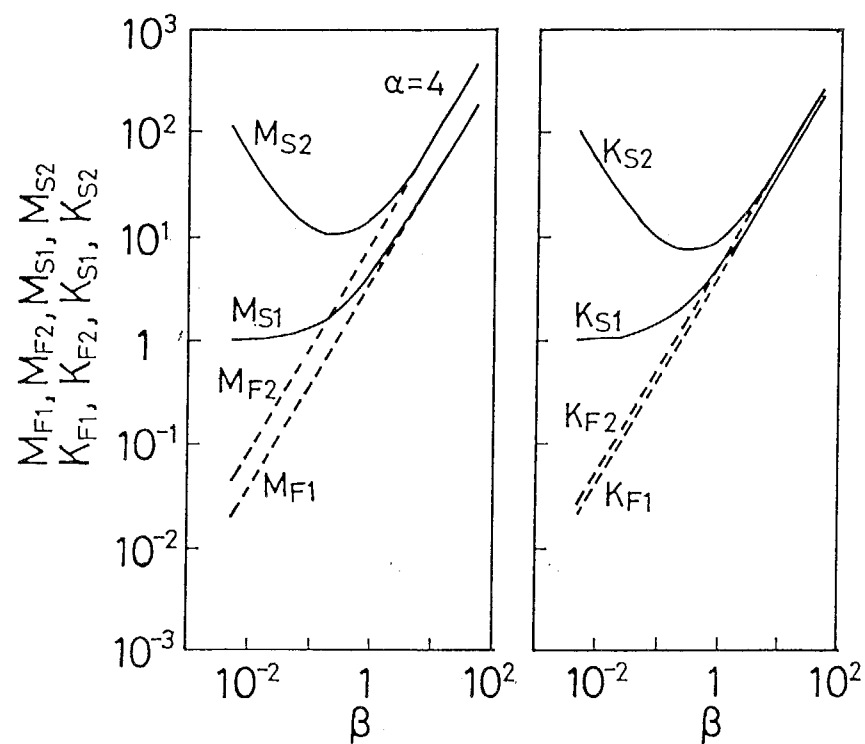


(a) $\alpha = 2$



(b) $\alpha = 3$

Figure 4.2.5 Mass and Spring Constants for Model S and F
(Continued)



(c) $\alpha=4$

Figure 4.2.5 Mass and Spring Constants for Model S and F

傾向がある。これらの結果から無次元量 β によって円筒-液体系の応答特性を分類できると考えられる。 β の値が小さい場合には円筒の衝撃応答を求めるとき液体の存在を無視することができ円筒単体の挙動のみとほぼ一致する。また β の値が大きくなり約1程度、すなわち円筒の剛性と液体の体積弾性率の値が同程度のオーダーのときには液体との連成運動を考慮する必要がある。さらに β の値が大きくなるにつれて円筒の応答はほとんど液体の運動に支配されることがわかる。このような傾向は4.2節の結果と一致している。無次元量 β に対して α は実在する材料を考えると、あまり大きな値の変化はなく円筒-液体系の連成運動の現象の特徴を顕著に表わすことができない。

4.3 非軸対称衝撃荷重をうける無限長円筒殻の衝撃応答

4.3.1 問題の設定

Fig. 4.3.1のように液体が満たされている2次元円筒を考える。肉厚 h および平均半径 R の円筒の外表面に角度 $2\theta_0$ の範囲にステップ状に時間変化する一様分布する対向衝撃荷重 q_0 が作用する場合の円筒および液体の衝撃応答を解析する。

連成条件は式(1.1.2)より

$$\left[\begin{array}{ll} r=R \text{ において} & v_{fr} = -\frac{\partial W}{\partial t} \\ r=R \text{ において} & P_z = q_0 Q(\theta) H(t) + P \end{array} \right. \quad (4.3.1)$$

となる。ここで荷重の形状関数 $Q(\theta)$ は

$$Q(\theta) = H(\theta_0 - |\theta|) + H(\theta_0 - |\theta - \pi|)$$

である。

非連成条件は式(1.1.2)より

$$\left[\begin{array}{ll} r=R \text{ において} & v_{fr} = 0 \\ r=R \text{ において} & P_z = q_0 Q(\theta) H(t) + P \end{array} \right. \quad (4.3.2)$$

なお式(4.3.1)および(4.3.2)に含まれる形状関数 $Q(\theta)$ をフーリエ正弦級数展開すると次式のようになる。

$$Q(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m \cos(2m\theta) \quad (4.3.3)$$

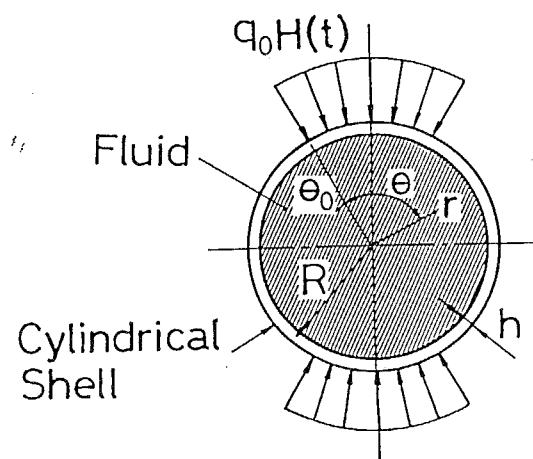


Figure 4.3.1 A Circular Cylindrical Shell Filled with Liquid and Subjected to Impulsive Partial Uniform Load

ここで

$$Q_0 = 2\theta_0 x, \quad Q_m = 2\sin(2m\theta_0)/x_m \quad (m \neq 0)$$

である。

初期条件として時間 $t=0$ において液体と円筒殻が無応力状態で静止しているとすれば

$$t=0 \text{ において } V = \frac{\partial V}{\partial t} = W = \frac{\partial W}{\partial t} = \dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (4.3.4)$$

となる。

4.3.2 解析

(a) 連成応答の解析

初期条件式(4.3.4)を考慮して、円筒殻に対する基礎方程式(c.18)を、液体に対する基礎方程式(a.10)をそれぞれラプラス変換した後、連成条件式(4.3.1)とともに連立させて解けば、次のような液体圧力 P 、円筒の円周方向変位 V および半径方向変位 W の解が求められる。

$$\begin{cases} \frac{\bar{P}}{Q_0} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m Q_m \cos(\omega_m \theta) \\ \frac{E_p}{R^2 Q_0} \bar{V} = \sum_{m=0}^{\infty} V_m Q_m \sin(\omega_m \theta) \\ \frac{E_p}{R^2 Q_0} \bar{W} = \sum_{m=0}^{\infty} W_m Q_m \cos(\omega_m \theta) \end{cases} \quad (4.3.5)$$

ここで

$$P_m = \frac{S_1 F_3}{G_m F_2}, \quad V_m = \frac{S_2}{G_m S}, \quad W_m = \frac{S_1}{G_m S}, \quad G_m = S_1 S_4 - S_2 S_3 + (F_1/F_2) S_1$$

$$S_1 = \omega_m^2 + (1 + \kappa^2) s^2, \quad S_2 = (\kappa^2 s^2 + 1) \omega_m, \quad S_3 = \omega_m, \quad S_4 = \kappa^2 \omega_m^4 - 2\kappa^2 \omega_m^2 + 1 + \kappa^2 + s^2$$

$$F_1 = \alpha^2 \beta s^2 I_{2m}(\alpha s), \quad F_2 = \alpha s I_{2m+1}(\alpha s) + \omega_m I_{2m}(\alpha s), \quad F_3 = \alpha^2 \beta s^2 I_{2m}(\alpha s \rho)$$

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau, \quad \tau = (C_t/R) t, \quad \omega_m = 2m, \quad \alpha = C_t/C_r, \quad \beta = KR/E_p$$

であり、 $I_n(z)$ は n 次の変形ベッセル関数である。

式(4.3.5)より液体の影響は前節で導出された式(4.2.6)の無次元パラメータ α および β により整理できることがわかる。

(b) 非連成応答の解析

円筒と液体が連成しない場合は、円筒の基礎方程式(c.18)と非連成条件式(4.3.2)とを連立させて解けばよく、解は次のようになる。

$$\begin{cases} \frac{E_p}{R^2 q_0} \bar{V} = \sum_{m=0}^{\infty} V_m Q_m \sin(\omega_m \theta) \\ \frac{E_p}{R^2 q_0} \bar{W} = \sum_{m=0}^{\infty} W_m Q_m \cos(\omega_m \theta) \end{cases} \quad (4.3.6)$$

ここで

$$G_m = S_1 S_4 - S_2 S_3$$

であり、これ以外の記号の定義は式(4.3.5)のことわり書きと同様である。すなわち式(4.3.5)において α あるいは β を零と置いた結果と式(4.3.6)が一致することがわかる。

4.3.3 数値計算結果

この節では式(4.3.5)および(4.3.6)に対するラプラス逆変換に細野の方法を用いて、変位および合応力の円周方向分布を求めた。なお、数値逆変換のパラメータ γ_1 , N を4および60とすれば、以後のグラフで示される結果が十分な精度で得られた。また計算式に含まれる無限級数の打ち切り項数を60として計算を行った。

(a) 円筒殻の形状の影響

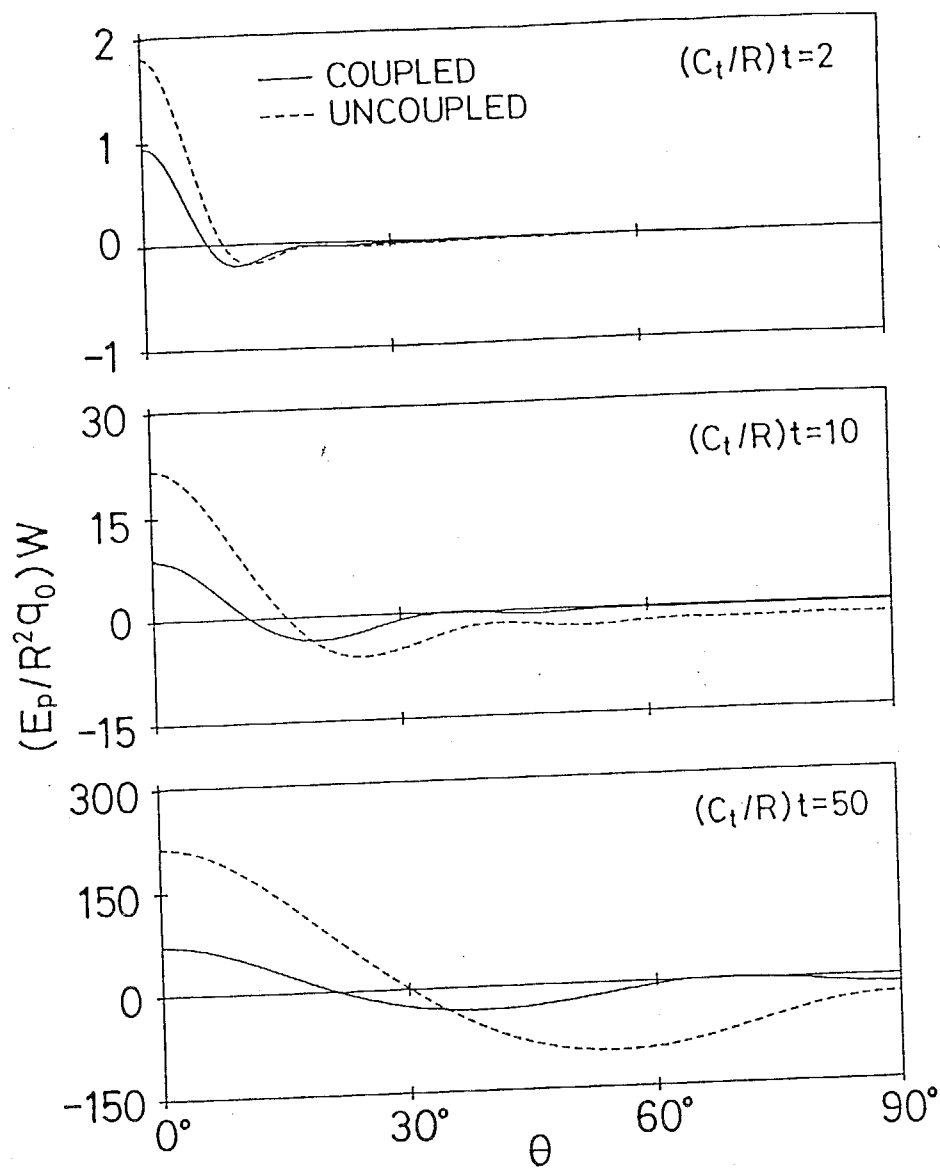
まず円筒の形状が液体—円筒系の連成効果に及ぼす影響を考察する。ここでは円筒の材質を鋼、液体を水として数値計算を行った。使用したそれぞれの定数は以下の通りである。

$$E = 2.06 \times 10^2 [\text{GPa}], \quad \rho_t = 7.86 \times 10^3 [\text{kg/m}^3], \quad \nu = 0.3$$

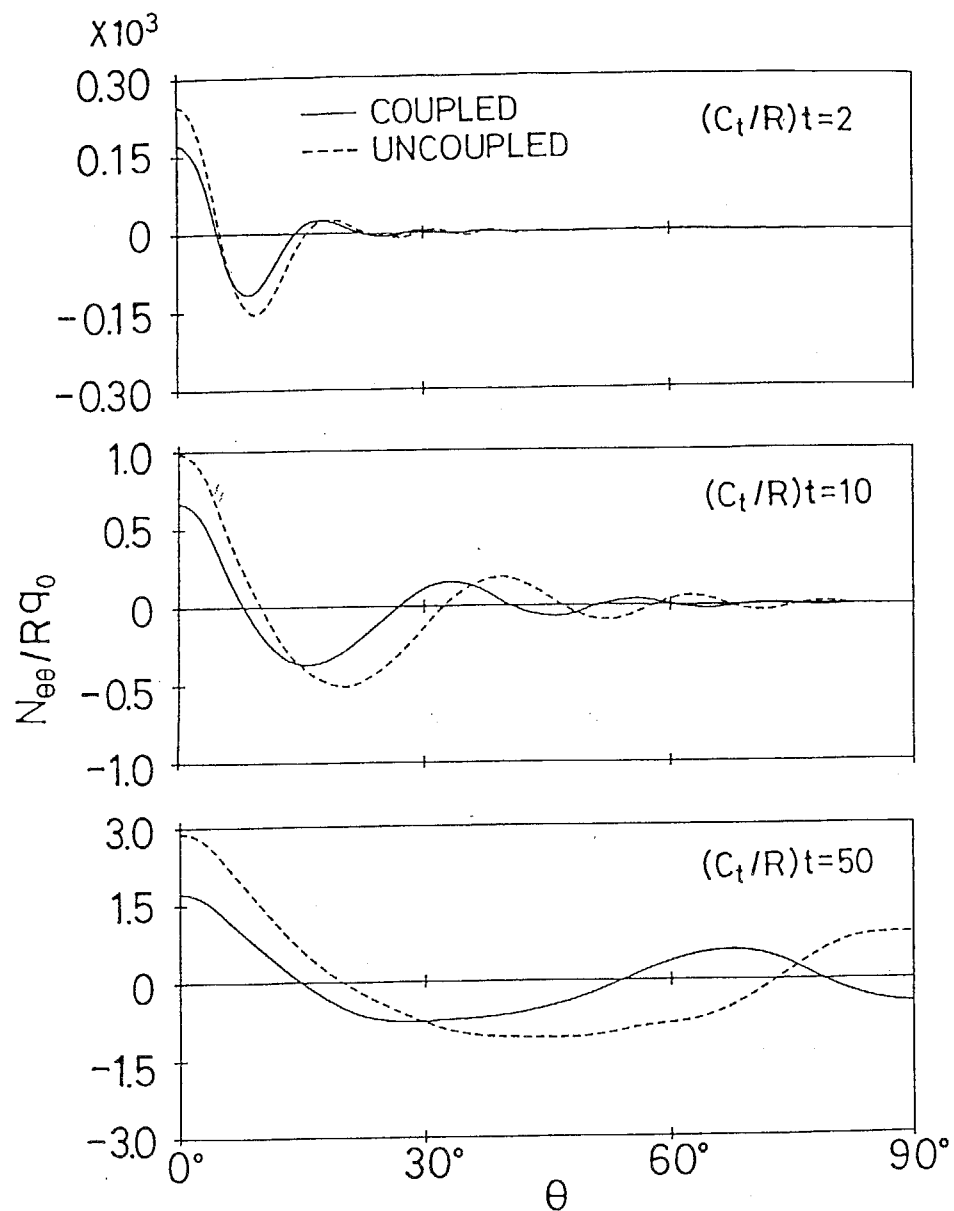
$$K = 2.22 [\text{GPa}], \quad \rho_f = 1.00 \times 10^3 [\text{kg/m}^3]$$

これらの数値より式(12)の2つの無次元パラメータは $\alpha = 3.60$ および $\beta = 0.00981R/h$ となる。また荷重分布範囲 $\theta_0 = 5^\circ$ とした。

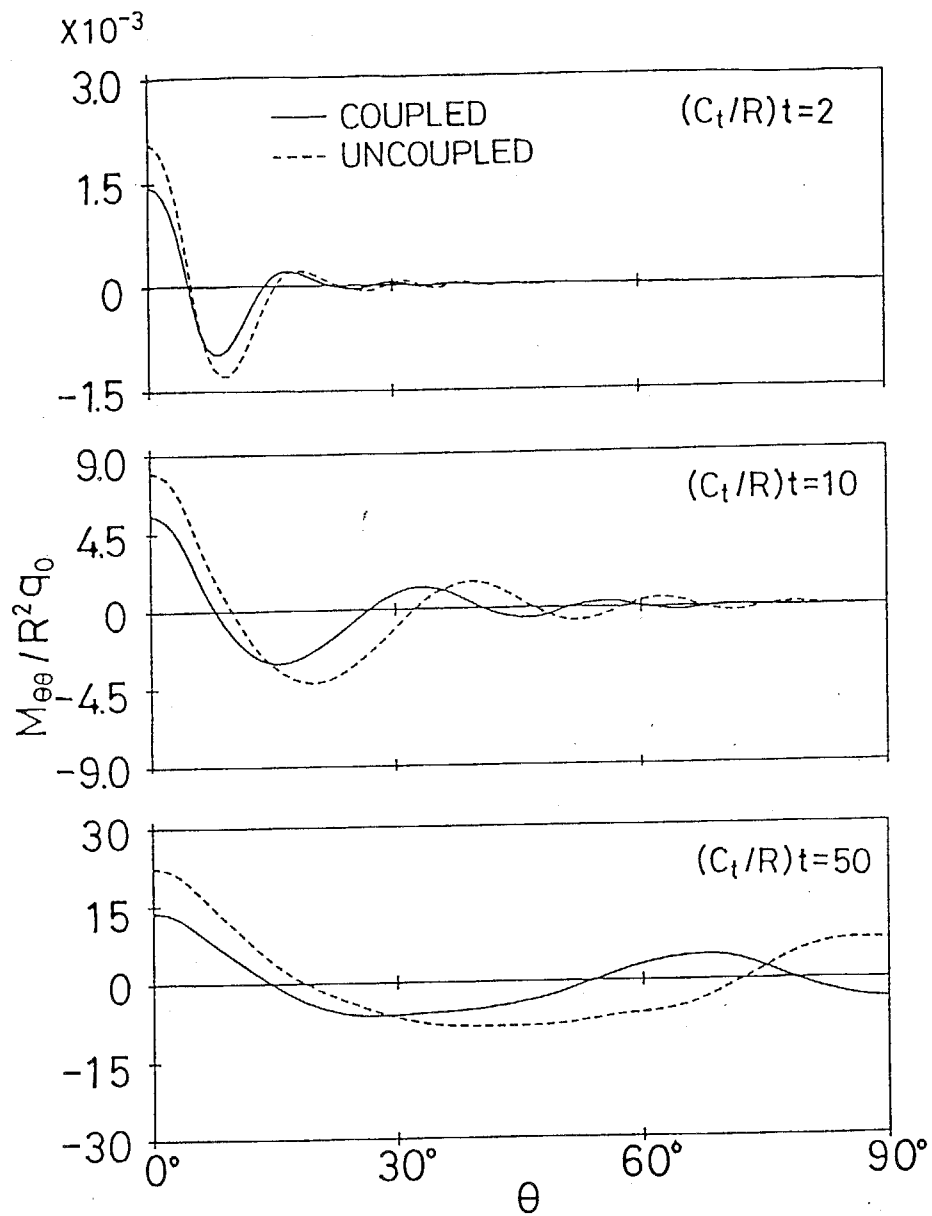
Fig. 4.3.2に無次元時間 $\tau = (C_t/R)t$ が2, 10, 50における肉厚比 $h/R = 0.01$ の円筒殻のたわみおよび円周方向の垂直力および曲げモーメントの円周方向分布を示す。以後において図中の実線および破線は連成効果を考慮した場合の応答および無視した場合の応答を示す。いずれの結果とも連成応答の結果が非連成応答の結果に比較して小さな



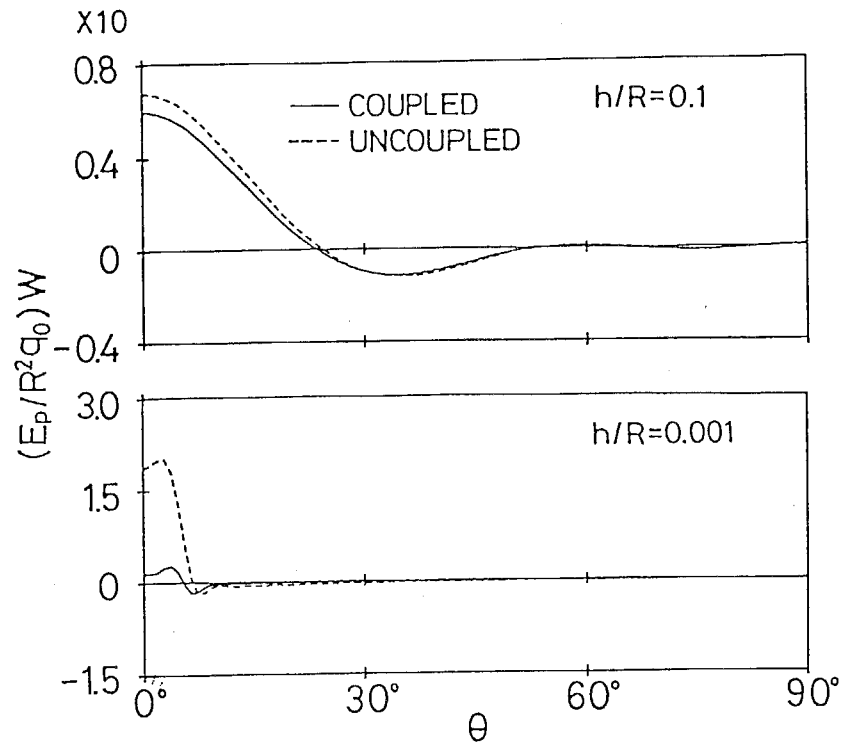
(a) Deflection W
 Figure 4.3.2 Impulsive Responses of a Circular Cylindrical Shell Filled with Liquid
 $\alpha = 3.60$, $\beta = 0.00981R/h$ (Shell:Steel/Liquid:Water)
 $h/R = 0.01$, $\theta_0 = 5^\circ$
 (Continued)



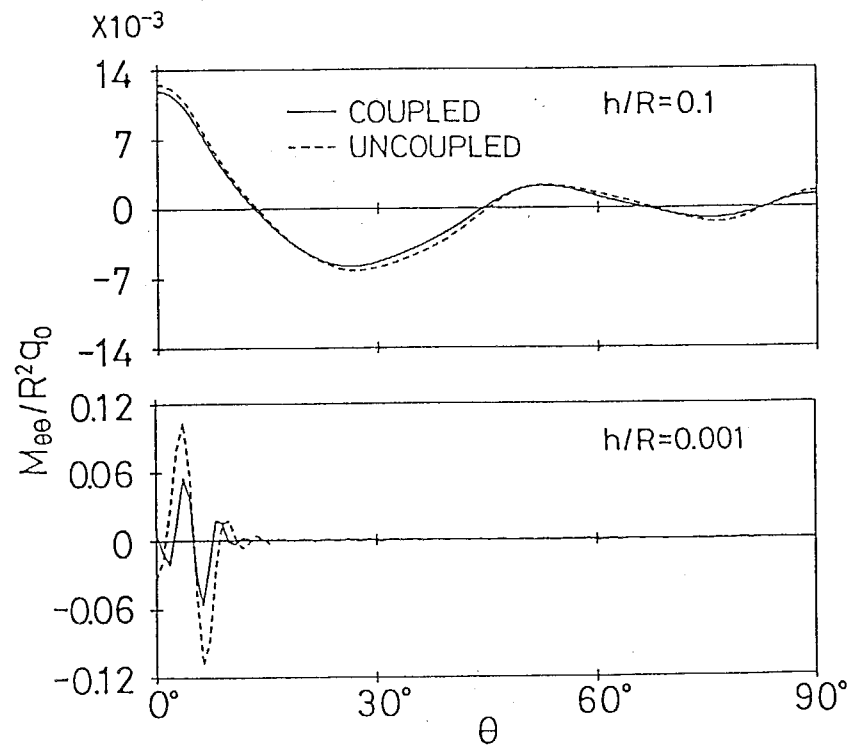
(b) Circumferential Force $N_{\theta\theta}$
 Figure 4.3.2 Impulsive Responses of a Circular Cylindrical Shell Filled
 with Liquid
 $\alpha=3.60$, $\beta=0.00981R/h$ (Shell:Steel/Liquid:Water)
 $h/R=0.01$, $\theta_0=5^\circ$
 (Continued)



(c) Circumferential Bending Moments $M_{\theta\theta}$
 Figure 4.3.2 Impulsive Responses of a Circular Cylindrical Shell Filled with Liquid
 $\alpha = 3.60$, $\beta = 0.00981R/h$ (Shell:Steel/Liquid:Water)
 $h/R = 0.01$, $\theta_0 = 5^\circ$



(a) Deflection W



(b) Circumferential Bending Moments $M_{\theta\theta}$

Figure 4.3.3 Impulsive Responses of a Circular Cylindrical Shell Filled with Liquid

$\alpha = 3.60$, $\beta = 0.00981R/h$ (Shell:Steel/Liquid:Water)

$\theta_0 = 5^\circ$

値を示すことがわかる。ただし、この差はたわみの分布変化において顕著である。時間とともに円筒の変形が周囲に伝播する様子が見られるが、液体の影響により遅くなる。円筒の形状の影響を調べるために、無次元時間 $\tau=2$ における肉厚比 h/R のみを 0.1 および 0.001 と変化させた場合のたわみおよび円周方向曲げモーメントを Fig. 4.3.3 に示す。これより円筒の肉厚が厚い場合、実線の連成応答の結果と破線の非連成応答の結果との差が小さいことがわかる。ところが肉厚が薄くなるにつれて両者の差が大きくなる。

(b) 荷重の分布領域の影響

荷重の分布領域と液体との連成効果の関係について考察するために、一様分布する荷重の領域 θ_0 を 20° として計算を行った。その他の数値計算に用いたパラメータは Fig. 4.3.2 の場合と同様である。このときのたわみ分布の時間変化を Fig. 4.3.4 に示す。この結果と円周方向に一様に荷重が作用する場合の Fig. 4.2.2 および荷重領域の狭い場合の Fig. 4.3.2 と比較する。荷重の領域が大きい程、連成応答と非連成応答の差が大きくなり、液体との連成効果が強く現れる傾向があることがわかる。これは円筒の変形がより広い範囲で生じる方が液体の反力をうけやすくなるためと考えられる。

(c) 無次元パラメータ α 、 β の影響

4.2 節と同様に円筒殻の材質および液体の特性を示す式 (4.2.6) の 2 つの α および β の無次元パラメータにより整理することができた。実在の材質に対しては Table 4.2.1 に示されたように、 α および β はそれぞれ約 2 から 5 の範囲および $0.001R/h$ から $10R/h$ 程度の範囲の値となることを考慮して数値計算を行った。また数値計算に使用した他の数値は以下の通りである。

$$h/R=0.01, \quad \nu=0.3, \quad \theta_0=5^\circ$$

まず β を 0.981 の一定値として α のみを $2.0, 3.6$ および 5.0 と変化させた場合について数値計算を行った。このとき、円周方向の垂直力の時間変動を Fig. 4.3.5 に示す。無次元時間 $\tau=2$ のとき、 α の値が大きくなるにつれて液体と円筒の連成効果が大きくなることがわかる。ただし無次元時間 $\tau=75$ の場合、 α の値の大きさが大きくなるにつれて連成効果が大きく現れるが、 $\alpha=3.6$ と 5 の場合の応答のように明確な相関が見られない。これらの傾向は曲げモーメントに関しても同様であった。

次に α を 3.6 として一定値として β のみを $0.01, 0.981$ および 10.0 と変化させて円周

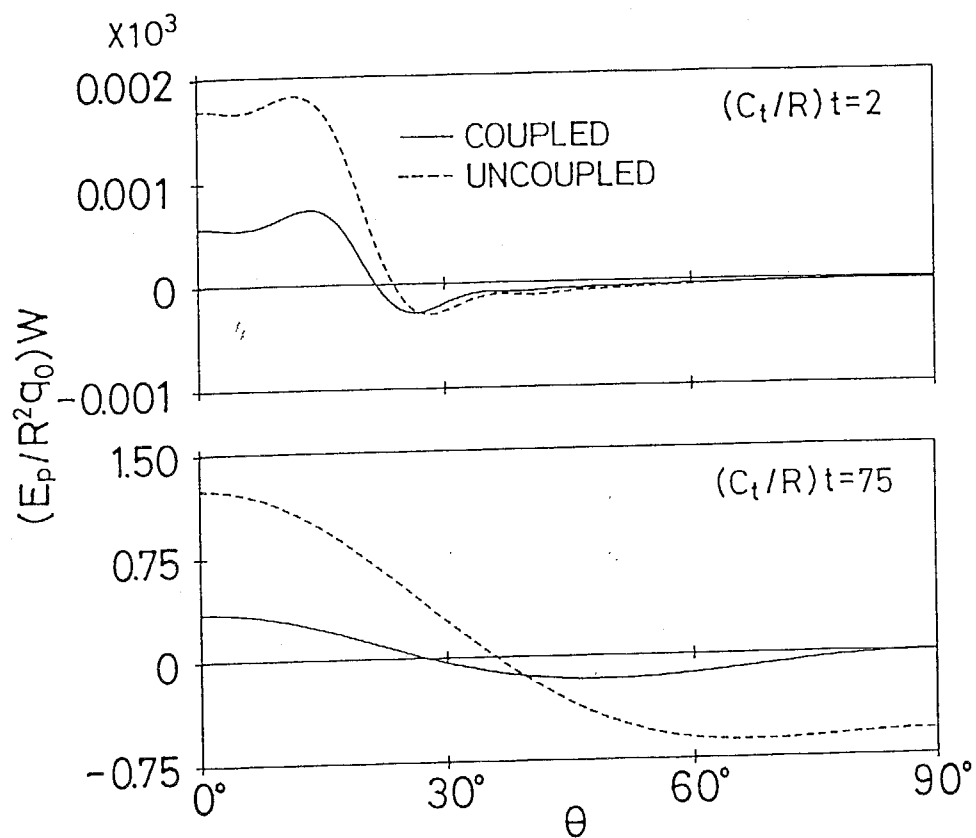


Figure 4.3.4 Deflection W Histories of a Circular Cylindrical Shell Filled with Liquid
 $\alpha = 3.60$, $\beta = 0.00981R/h$ (Shell:Steel/Liquid:Water)
 $\theta_0 = 20^\circ$

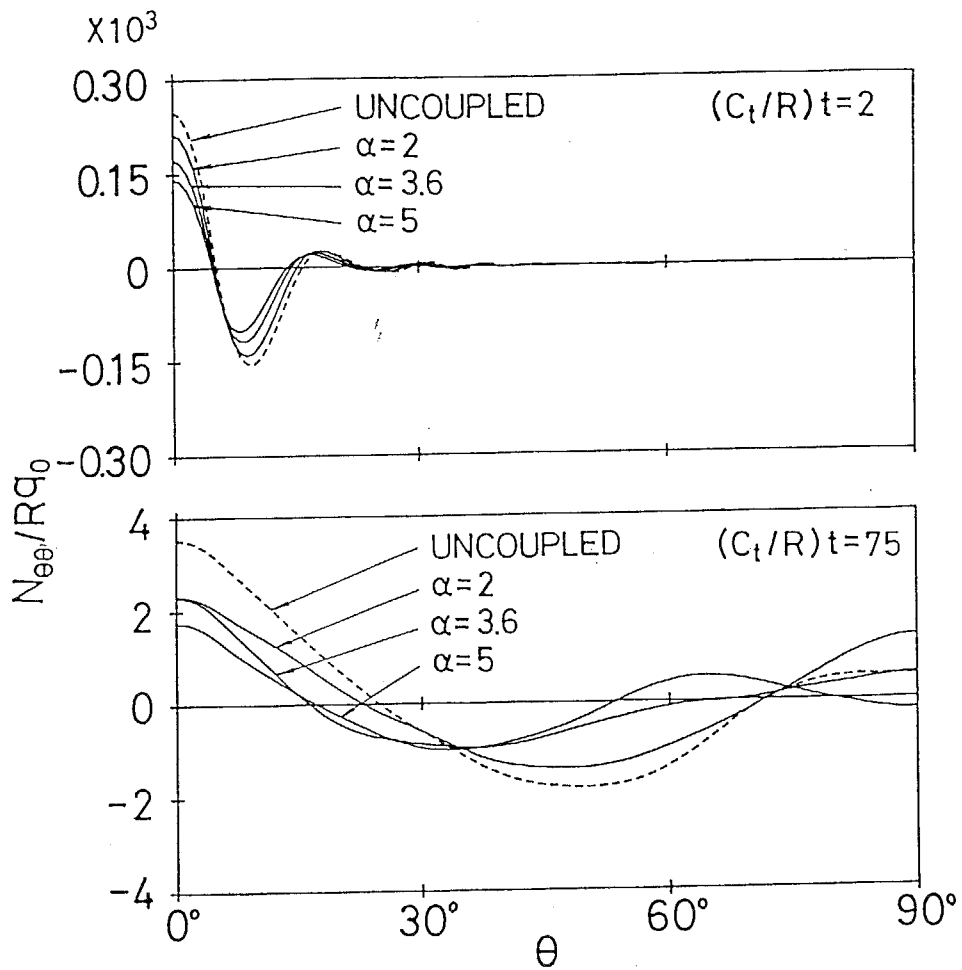


Figure 4.3.5 Circumferential Force $N_{\theta\theta}$ Histories of a Circular Cylindrical Shell Filled with Liquid
 $\beta=0.981$, $h/R=0.01$, $\theta_0=5^\circ$

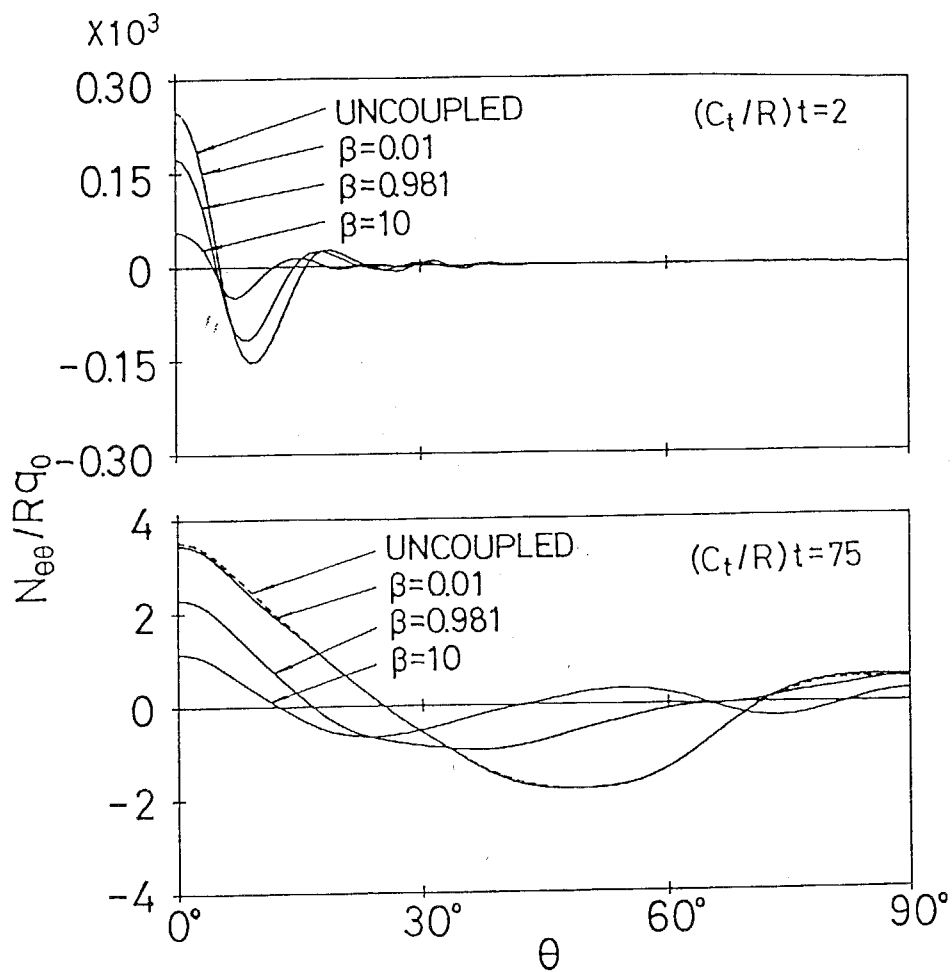


Figure 4.3.6 Circumferential Force $N_{\theta\theta}$ Histories of a Circular Cylindrical Shell Filled with Liquid
 $\alpha=3.6$, $h/R=0.01$, $\theta_0=5^\circ$

方向の垂直力の計算を行い、その結果をFig. 4.3.6に示す。 $\beta=0.01$ のとき、非連成応答の結果とほぼ一致した応答となっている。 $\beta=10$ のとき非連成応答との差が顕著になる。これより β が大きくなるにつれて円筒の応答に及ぼす液体の影響が効果が大きくなることがわかる。したがって無次元パラメータ β の値の変化が円筒と液体との連成効果を顕著に示すことが明らかになった。

4.4 軸対称線荷重をうける有限長円筒殻の衝撃応答

4.4.1 問題の設定

Fig. 4.4.1のように両端が固定され内部を液体で満たされた有限長円筒殻を考える。この円筒殻の中央にステップ状に時間変化する軸対称線荷重 q_0 が作用する場合の円筒殻および液体の衝撃応答を解析する。円筒殻の厚さ、平均半径および長さそれぞれ h 、 R および $2L$ とする。

解析モデルは円筒の中央($x=0$)に対して対称であることから境界条件式は次のようになる。

円筒殻に対して

$$\left\{ \begin{array}{ll} x=0 \text{ において} & U = \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad Q_x = -\frac{q_0}{2} H(t) \\ x=L \text{ において} & U = W = \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (4.4.1)$$

であり、ここで Q_x は円筒殻に作用する面外せん断力である。

液体に対して

$$x=0 \text{ および } L \text{ において} \quad v_{rx} = 0 \quad (4.4.2)$$

である。

円筒と液体の連成条件は式(1.1.2)より

$$\left\{ \begin{array}{ll} r=R \text{ において} & v_{fr} = -\frac{\partial W}{\partial t} \\ r=R \text{ において} & P_z = P \end{array} \right. \quad (4.4.3)$$

となる。

非連成条件は式(1.1.2)より

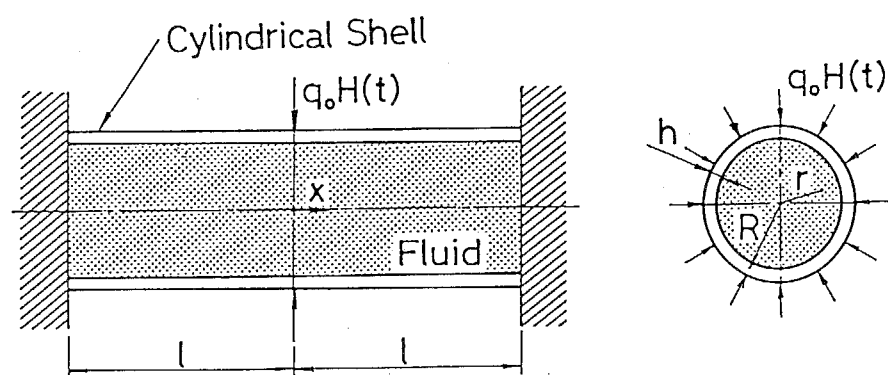


Figure 4.4.1 A Finite Circular Cylindrical Shell Filled with Liquid Subjected to Impulsive Ring Load

$$\left\{ \begin{array}{ll} r=R \text{ において} & v_{fr}=0 \\ r=R \text{ において} & P_z=P \end{array} \right. \quad (4.4.4)$$

初期条件として時間 $t=0$ において液体と円筒殻が無応力状態で静止しているとすれば

$$t=0 \text{ において} \quad U = \frac{\partial U}{\partial t} = W = \frac{\partial W}{\partial t} = \dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (4.4.5)$$

となる。

4.4.2 解析

(a) 連成応答の解析

連成条件式(4.4.3)の第2式および初期条件式(4.4.5)を考慮して、円筒殻に対する基礎方程式(c.18)を液体に対する基礎方程式(a.10)をそれぞれラプラス変換すれば、液体圧力 P および変位 U , W の一般解が次式のように求められる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{P} = -\frac{\rho_f C_t}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m S I_0(\mu_m \rho) \cos(k_m \xi) \\ \bar{U} = \sum_{j=1}^6 d_j C_j \exp(\lambda_j \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} U_m \sin(k_m \xi) \\ \bar{W} = \sum_{j=1}^6 C_j \exp(\lambda_j \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} W_m \cos(k_m \xi) \end{array} \right. \quad (4.4.7)$$

ここで

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau, \quad \tau = (C_t/R)t$$

$$W_m = \frac{k_m^2 + s^2 R \rho_f C_t}{f_m E_P} \Phi_m S I_0(\mu_m),$$

$$U_m = \frac{k_m (k^2 k_m^2 + k^2 s^2 + \nu)}{k_m^2 + s^2} W_m, \quad d_j = \frac{\lambda_j (-k^2 \lambda_j^2 + k^2 s^2 + \nu)}{\lambda_j^2 - s^2}$$

$$f_m = k^2 k_m^6 - 2(\nu - s^2) k^2 k_m^4 + (1 - \nu^2 + s^2 + k^2 s^4 - \nu k^2 s^2) k_m^2 + s^4 + s^2$$

$$k_m = m\pi/L, \quad \mu_m^2 = (as)^2 + k_m^2, \quad L = \ell/R, \quad \xi = x/R, \quad \rho = r/R$$

であり、 Φ_m , C_j は未定係数である。また λ_j は次の特性方程式を満たす相異なる6根である。

$$\lambda_j^6 + 2(\nu - s^2)\lambda_j^4 + \left(\frac{1 - \nu^2 + s^2}{\kappa^2} + s^4 - \nu s^2 \right) \lambda_j^2 - \frac{s^4 + s^2}{\kappa^2} = 0 \quad (4.4.8)$$

式(4.4.3)の第1式に式(4.4.7)を代入する。

$$-\sum_{m=1}^{\infty} \phi_m \mu_m I_1(\mu_m) \cos(k_m \xi) + \frac{C_t s}{R} \left\{ \sum_{j=1}^6 C_j \exp(\lambda_j \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} W_m \cos(k_m \xi) \right\} = 0 \quad (4.4.9)$$

式(4.4.9)の両辺に $\cos(k_n \xi)$ を乗じて 0 から L まで積分すると未定係数 ϕ_m が次のように求められる。

$$\phi_m = -\frac{2C_t}{L} \frac{f_m}{\mu_m I_1(\mu_m) f_m + a^2 \beta s^2 (k_m^2 + s^2) I_0(\mu_m)} \sum_{j=1}^6 C_j s \frac{\lambda_j \{(-1)^m \exp(\lambda_j L) - 1\}}{\lambda_j^2 + k_m^2} \quad (4.4.10)$$

ここで

$$a = C_t / C_f, \quad \beta = KR / E_P \quad (4.4.11)$$

であり、式(4.2.6)で求められた無次元パラメータと一致している。

また未定係数 C_j は式(4.4.7)を式(4.4.1)に代入することにより求められる。

(b) 非連成応答の解析

非連成条件式(4.4.4)を考慮して、円筒殻に対する基礎方程式(c.18)を液体に対する基礎方程式(a.10)を解くことにより、次のように変位 U , W の一般解が次式のように求められる。

$$\bar{U} = \sum_{j=1}^6 d_j C_j \exp(\lambda_j \xi) \quad (4.4.12)$$

$$\bar{W} = \sum_{j=1}^6 C_j \exp(\lambda_j \xi)$$

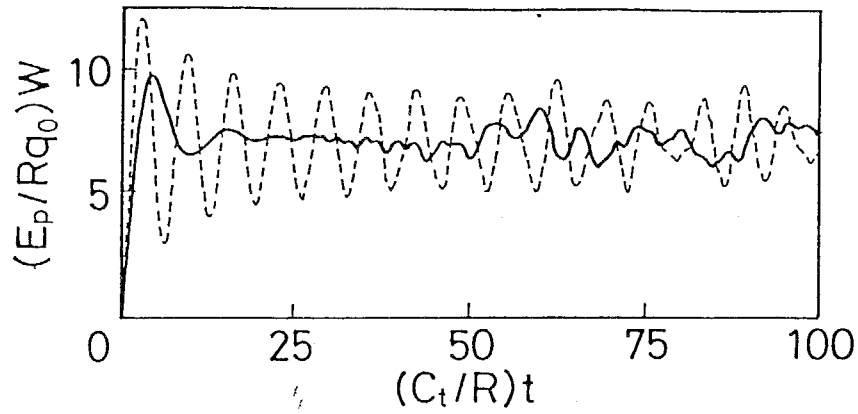
すなわち式(4.4.7)において $\phi_m = 0$ とした場合と一致している。それぞれの記号は式(4.4.7)のただし書きと同様である。

4.4.3 数値計算結果

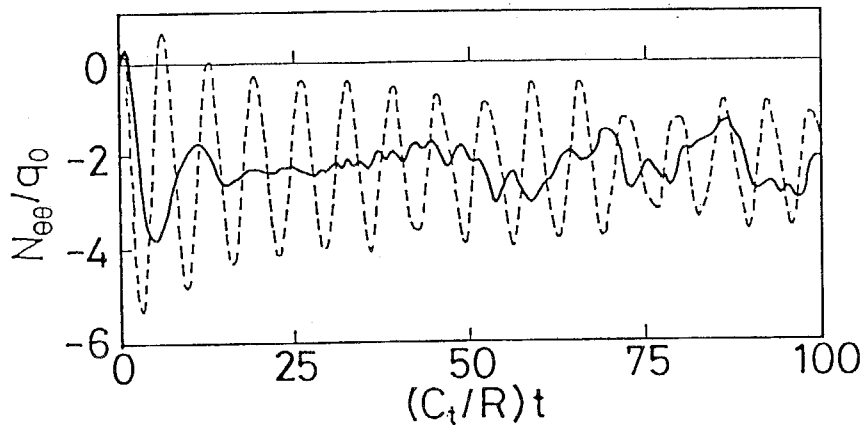
(a) 円筒殻の形状の影響

まず円筒の形状が液体-円筒系の連成効果に及ぼす影響を考察する。ここでは円筒の材質を鋼、液体を水として数値計算を行った。使用したそれぞれの定数は以下の通りである。

$$E = 2.06 \times 10^2 [\text{GPa}], \quad \rho_t = 7.86 \times 10^3 [\text{kg/m}^3], \quad \nu = 0.3$$



(a) History of Deflection W ($x/R=0$)



(b) History of Circumferential Force $N_{\theta\theta}$ ($x/R=0.1$)

Figure 4.4.2 Impulsive Responses of a Cylindrical Shell Filled with Liquid

—— Coupled, -----Uncoupled

$\alpha = 3.60$, $\beta = 0.00981R/h$ (Shell:Steel/Fluid:Water)

$l/R = 3.0$, $h/R = 0.01$

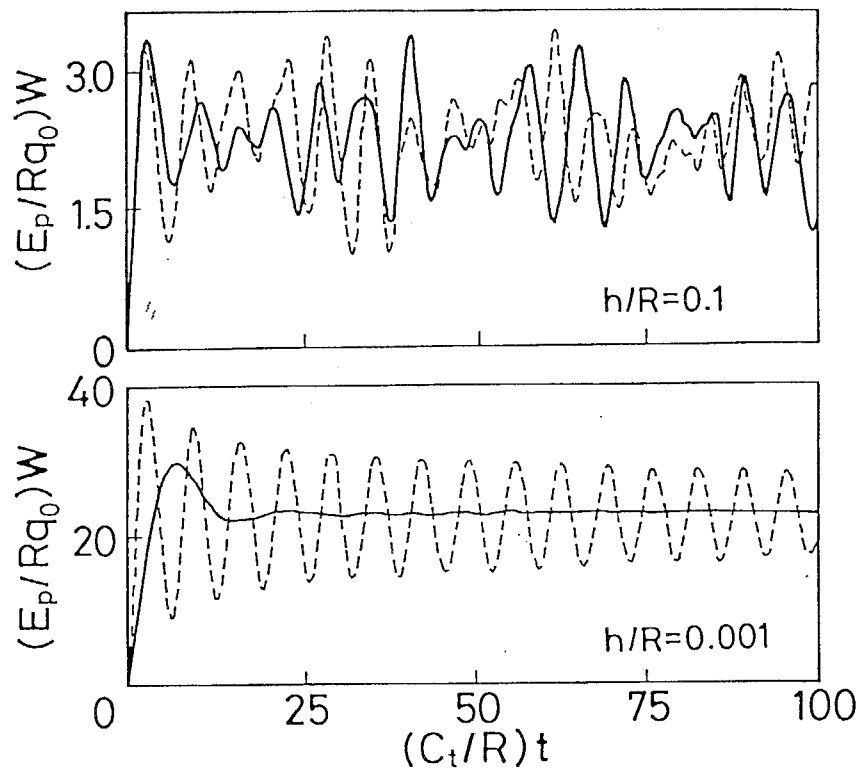


Figure 4.4.3 Deflection W Histories of a Cylindrical Shell Filled with Liquid

— Coupled, ---- Uncoupled
 $\alpha = 3.60$, $\beta = 0.00981R/h$ (Shell:Steel/Fluid:Water)
 $\ell/R = 3.0$, $x/R = 0$

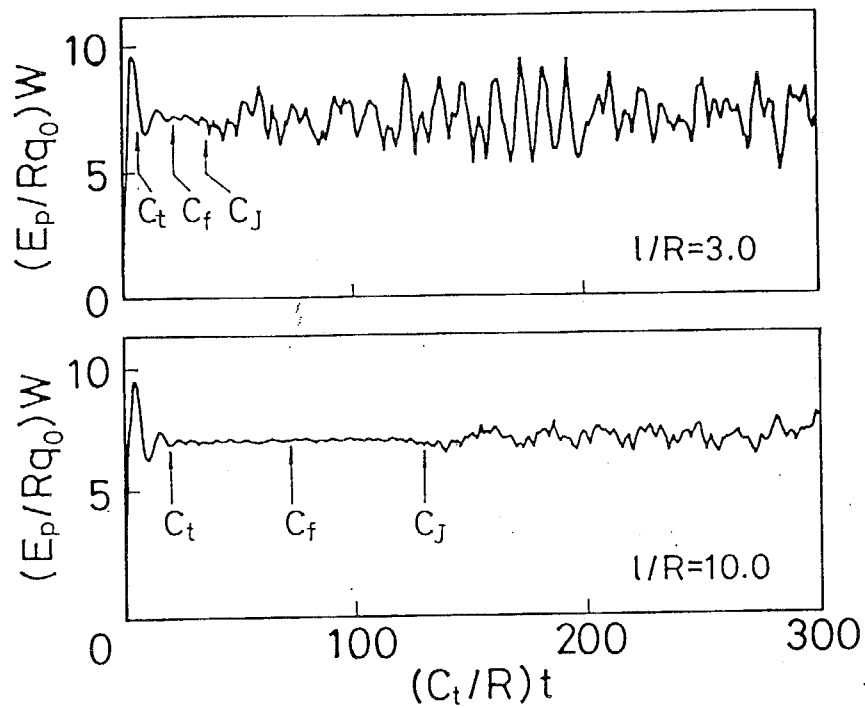


Figure 4.4.4 Deflection W Histories of a Cylindrical Shell Filled with Liquid

$\alpha = 3.60$, $\beta = 0.00981R/h$ (Shell:Steel/Fluid:Water)
 $h/R=0.01$, $x/R=0$

$$K=2.22 \quad [\text{GPa}], \quad \rho_f=1.00 \times 10^3 [\text{kg/m}^3]$$

これらの数値より式(4.4.11)の2つの無次元パラメータは $\alpha=3.60$ および $\beta=0.0098$
 $1R/h$ となる。

変位 U, W および垂直力 $N_{xx}, N_{\theta\theta}$ の数値計算においてはいずれもサンプリング数 N
 および級数の項数 m をそれぞれ 2^9 および150とした。また解析の対象とした無次元時
 間 τ の範囲 T を120あるいは360として計算を行い、ラプラス逆変換の時間後半におけ
 る誤差を除くために100および300以降の数値結果を切り捨てた。

Fig. 4.4.2に $l/R=3.0$ および $h/R=0.01$ の円筒殻の場合のたわみおよび円周方向の垂直
 応力の時間変動を示す。本論文において図中の実線および破線は連成効果を考慮した
 場合の応答および無視した場合の応答を示す。Fig. 4.4.2(a)の荷重点におけるたわみ
 の非連成応答は波形の立ち上がりで大きく振動した後、ほぼ一定の振幅で振動するこ
 とがわかる。これに対して連成応答の場合、非連成の波形に比較してあまり大きな振
 動をせず、また振動周期も長くなることがわかる。Fig. 4.4.2(b)の荷重点から離れた
 位置($x/R=0.1$)の垂直力についても同様の現象が見られる。他の位置についても計算
 を行ったところ、連成および非連成の場合ともたわみと円周方向の垂直力は符号は逆
 となるがほぼ相似形の応答を示すことがわかった。

次に円筒の肉厚が変化した場合の応答について考察する。Fig. 4.4.2の考察よりた
 わみと円周方向の垂直力は同様の傾向を持つので、たわみについてのみ計算結果を示
 す。Fig. 4.4.3に肉厚 h/R を0.1および0.001と変化させた場合の荷重点のたわみの応答
 を示す。肉厚の厚い場合の結果は実線の連成応答結果と破線の非連成応答との差が小
 さいことがわかる。これに対して肉厚の薄い場合の応答では両者の差が大きく、計算
 された時間範囲では連成応答はほとんど振動しないことがわかった。

円筒の長さが $l/R=3$ および $l/R=10$ と変化させた場合について荷重点のたわみを無次
 元時間で300まで求めた結果をFig. 4.4.4に示す。時間初期では2つの応答波形はほぼ
 同様である。これは固定端からの反射波が到達する時刻より前であるためである。 l/R
 $=3$ および10.0の結果においてそれぞれ無次元時間で約40および130付近より、収束す
 る傾向を示していた応答の振幅が増大する傾向を示している。この原因を調べるため
 に次の3種の伝播速度で伝わる応力波および圧力波を考える。

$$\text{円筒の縦波の伝播速度} \quad C_t = \sqrt{\{E/\rho_t(1-\nu^2)\}}$$

$$\text{液体の圧力波の伝播速度} \quad C_f = \sqrt{\{K/\rho_f\}}$$

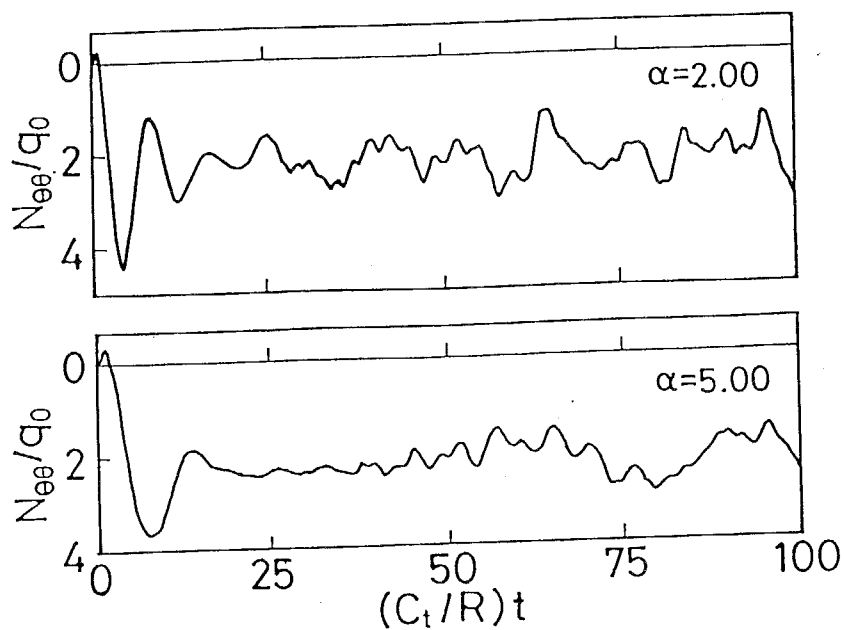


Figure 4.4.5 Circumferential Force $N_{\theta\theta}$ Histories of a Cylindrical Shell Filled with Liquid
 $\beta = 0.00981R/h$, $l/R=3.0$, $h/R=0.01$, $x/R=0.1$

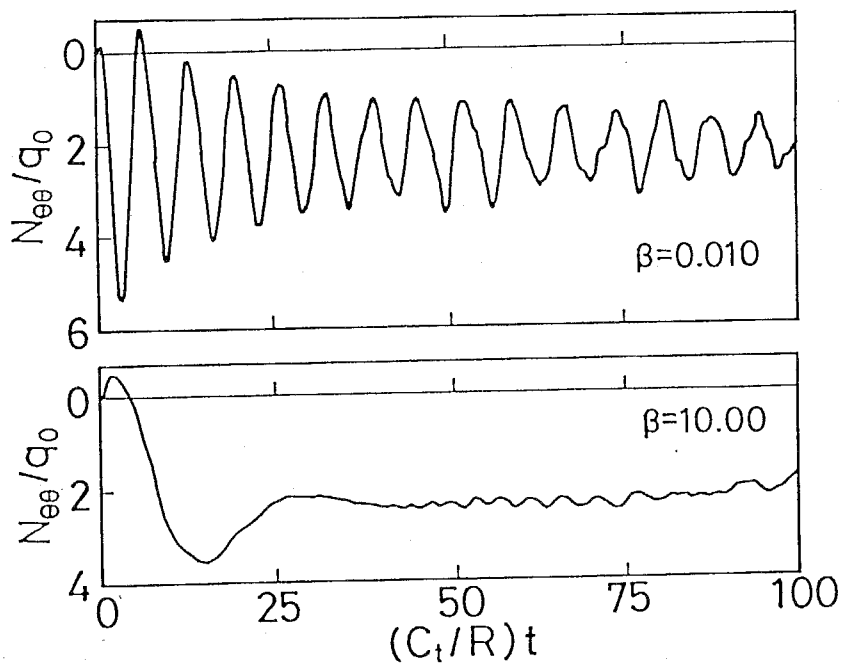


Figure 4.4.6 Circumferential Force $N_{\theta\theta}$ Histories of a Cylindrical Shell Filled with Liquid
 $\alpha = 3.6$, $l/R=3.0$, $h/R=0.01$, $x/R=0.1$

$$\text{Joukowsky波の伝播速度} \quad C_J = C_r / \sqrt{\{1 + 2KR/Eh\}}$$

ここでJoukowsky波は円筒の静的な弾性変形の影響を考慮して求められた伝播速度を持つものである。これらの波が固定端より反射され再び荷重点に戻る時刻を C_t , C_r および C_J としてFig. 4.4.4に示す。その結果、Joukowsky波の反射波が到達後、応答波形が変化することがわかる。この現象は第2章の水撃問題においても同様の結果が得られている。さらに反射波の到達後、応答波形の振幅は円筒の長さが長い方が小さくなることがわかる。

(b) 無次元パラメータ α 、 β の影響

円筒殻の材質および液体の特性を式(4.4.11)の2つの α 、 β の無次元パラメータで表わすことができる。実在の材質に対してはTable 1より α および β はそれぞれ約2から5の範囲および0.001R/hから10R/h程度の範囲の値となることを考慮して数値計算を行った。また数値計算に使用した他の数値は以下の通りである。

$$l/R=3.0, \quad h/R=0.01, \quad \nu=0.3, \quad T=120$$

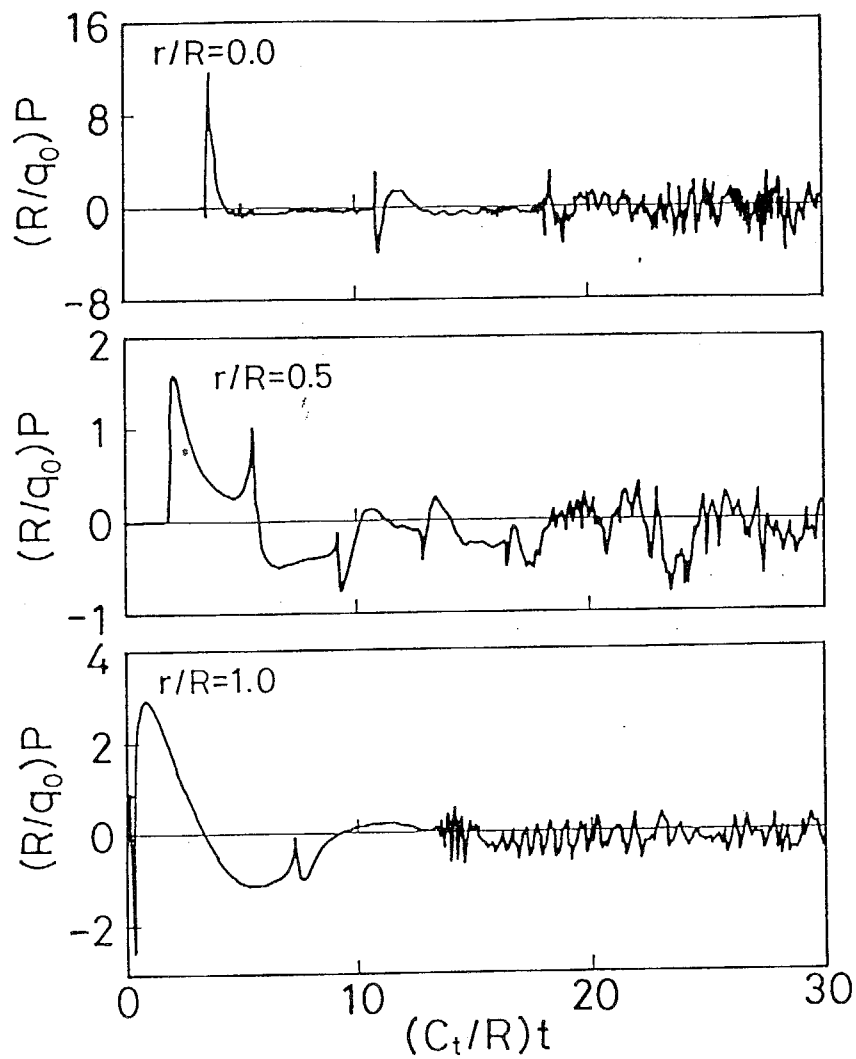
$$N=2^\circ, \quad m=150$$

まず β を0.981の一定値として α のみを2.0および5.0と変化させた場合について数値計算を行った。このとき、円周方向の垂直力の時間変動をFig. 4.4.5に示す。また $\alpha=3.6$ の場合はFig. 4.4.2に示されている。これらの結果より α の値が大きくなるにつれて振幅が時間経過とともに小さくなる。すなわち α が大きくなるにつれ連成効果の影響が大きくなる傾向がある。

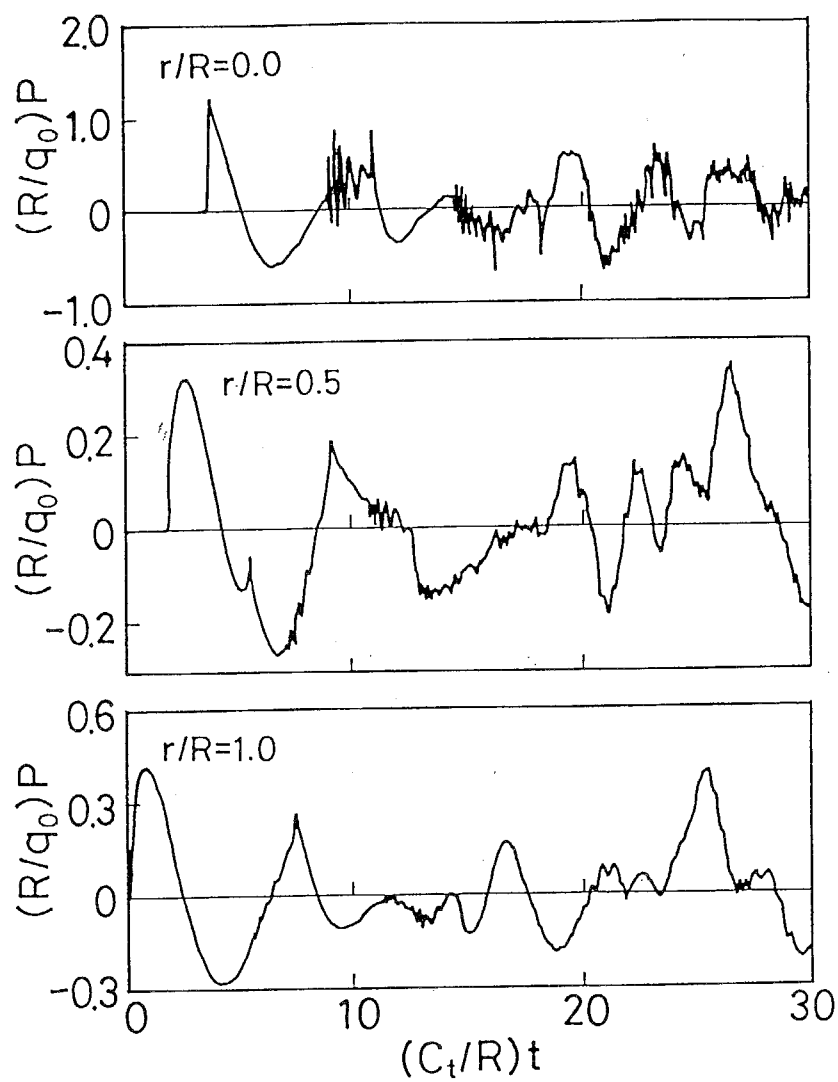
次に α を3.6として一定値として β のみを0.01および10.0と変化させて円周方向の垂直力の計算を行い、その結果をFig. 4.4.6に示す。また $\beta=0.981$ の場合はFig. 4.4.2の通りである。 $\beta=0.01$ のとき、Fig. 4.4.2の液体の影響を考慮しない場合の破線とほぼ一致した応答となっている。また $\beta=10.0$ の場合は円周方向の垂直力の時間変動は顕著に振動しないことがわかる。すなわち β の値が増加するにつれて円筒の応答に及ぼす液体の影響が大きくなる。これらの結果より無次元パラメータ β の値の変化が円筒と液体の連成効果を顕著に示すことが明らかになった。

(c) 液体圧力の時間変動

液体中を伝播する圧力波について考察する。円筒の材質を鋼とし液体を水として数値計算を行った。使用した材料定数は(a)の数値と同様である。また円筒の肉厚比 h/R



(a) $h/R=0.01$
 Figure 4.4.7 History of Liquid Pressure P
 $\alpha=3.60$, $\beta=0.00981R/h$ (Shell:Steel/Liquid:Water)
 $\ell/R=3.0$, $x/R=0.1$
 (Continued)



(b) $h/R=0.1$

Figure 4.4.7 History of Liquid Pressure P

$\alpha=3.60$, $\beta=0.00981R/h$ (Shell:Steel/Liquid:Water)

$l/R=3.0$, $x/R=0.1$

が0.1および0.01の場合を対象とする。数値計算に用いた他の数値は以下の通りである。

$$l/R=3.0, \quad T=36, \quad N=2^{10}, \quad m=150, \quad x/R=0.1,$$

$$r/R=0, 0.5, 1.0$$

$h/R=0.01$ および 0.1 の場合の液体圧力の時間変動をそれぞれFig. 4.4.7(a)および(b)に示す。いずれの肉厚においても円筒の中心付近では円筒の内面から伝播する圧力波が集中するため他の位置に比較して大きな圧力が発生し急激に減少することがわかる。また中心付近では圧力波の伝播速度はほぼ C_f である。これに対して円筒の内面付近では比較的滑らかな時間変動を示す。肉厚が薄い場合の方がより大きな圧力が発生し、時間経過とともに急激に圧力が低下することがわかる。

4.5 結言

横荷重が作用する液体で満たされた円筒の衝撃応答を解析し、応答に及ぼす連成効果を考察した。本章では円筒と液体との波動の連成効果が顕著に現れる場合として、円筒の軸線が移動しないような外力条件を解析の対象とした。得られた結果をまとめる次のようになる。

- (1) 円筒と液体との連成効果は、応力波と圧力波との速度比を示す α および液体と円筒の弾性係数と肉厚比で示される β の2つの無次元量により表わせる。パラメータ β が応答に及ぼす連成効果を明確に示すことがわかった。 β の値が1程度のオーダーのときには円筒と液体との連成効果を考慮する必要があり、 β の値が大きい場合には液体の挙動が支配的となり、小さい場合にはほぼ円筒単体の挙動を示す。したがって円筒の弾性係数が相対的に小さい場合あるいは肉厚が薄い場合には液体の影響が顕著になる。なおパラメータ α の値が変化したときも連成効果に変化が見られるが、 β ほど現象との対応は明確でない。
- (2) 荷重の分布領域が広がると液体との連成効果の影響が大きくなる。また荷重の分布領域が狭くなると円筒の振動を抑制する傾向が強くなる。
- (3) 円筒の軸方向に伝播する波動の速度は第3章で示されたようにJoukowsky理論による伝播速度にほぼ一致する。

参考文献

- [4.1]日本機械学会編：機械工学便覧 第12章 流体・熱を含む系の振動,(1987),
p. A3・121-A3・141, 日本機械学会.
- [4.2]Chen S.-S., : Flow-Induced Vibration of Circular Cylindrical Structures
(1987), Springer-Verlag.
- [4.3]Barez F., Goldsmith W. and Sackman J.L., : Longitudinal Waves in Liquid
-Filled Tubes - 1.Theory, International Journal of Mechanical Sciences,
Vol.21, No.4(1976), p.213-221.
- [4.4]Barez F., Goldsmith W. and Sackman J.L., : Longitudinal Waves in Liquid
-Filled Tubes - 2.Experiments, International Journal of Mechanical
Sciences, Vol.21, No.4(1976), p.223-236.
- [4.5]Katsamanis F. and Goldsmith W., : Transverse Impact on Fluid-Filled
Cylindrical Tubes, Journal of Applied Mechanics, Vol.49(1982), p.149-156.
- [4.6]宇治橋貞幸、松本浩之、中原一郎、重田正之：流体で満たされた無限長円筒殻
の軸対称衝撃応答, 日本機械学会論文集 (A編)、Vol.52, No.477(1986), p.1417
-1422.
- [4.7]Suzuki S. : Dynamic Behaviour of a Ring Filled with a Fluid, Ingenier
-Archiv, Vol.59(1989), p.304-309.

第5章 飛翔体の衝突による液体に接する平板の衝撃応答

5.1 緒言

衝撃問題において重要なものの一つに物体と物体との衝突現象がある。流体連成問題に関連したものでは、宇宙航空構造の燃料系配管などへの異物の衝突や液体で満たされた原子炉内における制御棒の容器底への落下衝突などの安全設計上の問題がある。このように異物が衝突する際に液体と接する構造に発生する衝撃応力を明らかにすることは、応用上重要であり基本的な課題と思われる。

一般に飛翔体と物体との衝突時に生じる衝撃荷重は既知でなく、物体と飛翔体との二体問題として解析する必要がある。この問題は構造・構造の相関問題と呼ばれることがある。解析的取り扱いでは準静的にHertz理論による接触が起こる[5.1]ものとして衝撃荷重が解析されており実験値との比較により妥当な結果が得られることが確認されている[5.2]。また複合材料の衝突問題にも、この方法が適用され有効性が確認されている[5.3][5.4]。また有限要素法に代表される数値解析においては衝突・接触問題について種々のアルゴリズムが提案されており[5.5]、現在も研究が続けられている。液体と接する構造の衝突問題では、さらに液体の影響を考慮する必要があり三体問題として取り扱わなければならない、実際に解析された例はほとんどない。そこで本章では、最も基本的な構造である液体と接する平板に物体が衝突する問題を考察する。

ところで液体と接する平板は流体機械の隔壁部や液体貯槽の底部などの構造に見られる。平板の流体連成問題に関する論文の多くは平板の定常振動[5.6]-[5.11]あるいは音響放射[5.12][5.13]を対象としている。YenとChou[5.14]は液体に浮かんだ無限平板上に移動荷重が作用する問題を解析している。特に荷重の移動速度が応力波の速度より速い場合の現象について考察を行っている。Berglund[5.15]は液体と接する円板に一様分布する衝撃荷重が面外方向に作用する問題を容易に解析する近似解法について考察を行っている。Hui[5.16]は水に浮かぶ氷をばねで支持された粘弾性平板として近似して衝撃応答を解析している。長屋と永井[5.17]は液体貯槽の底板に衝撃的な圧力が作用することを想定して任意の時間変化する圧力に対する応答解析法を提案

している。しかしながら、これまでの研究では液体の存在がどのように構造の応答に影響を及ぼすかについては系統的には、ほとんど考察されていないように思われる。

そこで本章では飛翔体が衝突する液体に接する平板の衝撃応答に及ぼす流体連成効果について考察する。衝撃荷重の作用時間の短い場合として質点を、また長い場合として無限長の棒を飛翔体として検討する。解析において、平板に対して面外せん断変形を考慮したMindlin理論を用いた。また飛翔体と平板の衝突はHertzの接触理論に従うものとして考慮する。さらに実験により衝撃ひずみを測定し解析の妥当性を確認する。

5.2 液体と接する平板の衝撃応答の解析

5.2.1 平板のステップ応答

Fig.5.2.1のように液体に接する半径 R 、厚さ h の円形の平板を考える。平板の下面は周囲を剛体で囲まれた半径 R の無限深さの液体に接し、また上面には半径 a の円形領域にステップ関数状に時間変化する一様な分布荷重 q_0 が作用しているものとする。

このときの連成条件は式(1.1.1)より

$$z=0 \text{ において } \begin{cases} q=q_0 H(a-r) H(t)-P \\ v_z = -\frac{\partial W}{\partial t} \end{cases} \quad (5.2.1)$$

$$(5.2.2)$$

である。ここで q 、 W 、 P および v_z は、それぞれ平板に作用する面外方向の外力、平板のたわみ、液体圧力および z 方向の液体速度である。 (r, z) および t は Fig.5.2.1 に示される円柱座標系および時間である。

また時間 $t=0$ において、平板および液体が何ら変形せず応力も作用していないとすれば初期条件は次式となる。

$$t=0 \text{ において } W = \frac{\partial W}{\partial t} = \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (5.2.3)$$

ここで ϕ は液体の速度ポテンシャルである。

液体の基礎方程式(a.10)をラプラスー有限ハンケル二重積分変換すると次式が求められる。

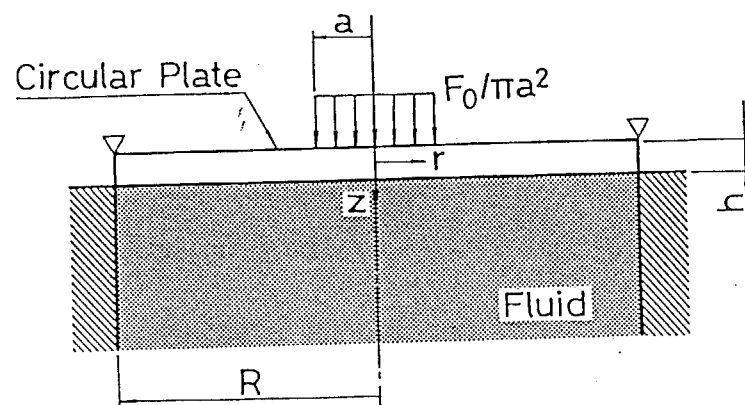


Figure 5.2.1 A Circular Plate Floating on Liquid

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}}{d\zeta^2} - (\eta_i^2 + a^2 s^2) \tilde{\phi} = 0 \quad (5.2.4)$$

ここで η_i は次式を満たす i 番目の根であり、

$$J_0(\eta_i R/h) = 0 \quad (5.2.5)$$

また

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau, \quad \tilde{f}(\eta_i) = \int_0^{R/h} f(\rho) \rho J_0(\eta_i \rho) d\rho$$

$$\tau = (C_2/h)t, \quad a = C_2/C_1, \quad C_2^2 = G/\rho_e, \quad C_1^2 = K/\rho_f, \quad \rho = r/h, \quad \zeta = z/h$$

であり、 G 、 ρ_e 、 K および ρ_f は平板の横弾性係数、密度、液体の体積弾性率、密度である。 $J_0(z)$ は第 1 種のベッセル関数である。

式(5.2.4)に有限ハンケル積分変換する際に用いた境界条件は

$$\rho = R/h \text{ において } \phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = 0$$

である。これを物理的に解釈すれば

$$\rho = R/h \text{ において } v_r = 0$$

と等価の条件となる。ここで v_r は半径方向の液体の速度を示す。

式(5.2.4)から得られる速度ポテンシャル ϕ を式(2.1.9)に代入すれば圧力 P が次のように得られる。

$$\frac{\tilde{P}}{h} = -\frac{C_2 \rho_f}{h} \tilde{\phi} s \exp(-\lambda_i \zeta) \quad (5.2.6)$$

ここで

$$\lambda_i^2 = \eta_i^2 + a^2 s^2$$

であり、 Φ は未定係数である。

次に Mindlin 理論による平板の基礎方程式(b.9)をラプラス-有限ハンケル二重積分変換すると次式が求められる。

$$\left[\left\{ \mu_1 \eta_i^4 + \left(\frac{\mu_1}{\kappa^2} + \frac{1}{12} \right) s^2 \eta_i^2 + \left(\frac{s^2}{12\kappa^2} + 1 \right) s^2 \right\} \frac{\tilde{W}}{h} - \left(1 + \frac{\mu_1}{\kappa^2} \eta_i^2 + \frac{s^2}{12\kappa^2} \right) \frac{\tilde{q}}{G} \right. \\ \left. - \mu_1 \eta_i^2 \frac{\tilde{\phi}_r}{h} + \kappa^2 \eta_i^2 \frac{\tilde{W}}{h} - \kappa^2 \frac{s^2}{12} \frac{\tilde{\phi}_r}{h} \right] \quad (5.2.7)$$

ここで

$$\mu_1 = 1/\{6(1-\nu)\}$$

である。 ϕ_r , ν および κ^2 はそれぞれ r 方向のたわみ角、ポアソン比およびせん断応力の分布定数である。

式(5.2.7)に積分変換するのに用いた境界条件は次式である。

$$\rho=R/h \text{ において } W = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} = 0$$

この境界条件では円板が周辺固定と周辺単純支持の中間的な条件となる。

式(5.2.6)および(5.2.1)を式(5.2.7)に代入した後、たわみ W は次式のように得られる。

$$\frac{\tilde{W}}{h} = \frac{F_2(\eta_i, s)}{F_1(\eta_i, s) G s} \frac{J_1(\eta_i a/h)}{\eta_i (h/a)} q_0 + \frac{C^2 \rho_f s}{h} \Phi \quad (5.2.8)$$

ここで

$$F_1(\eta_i, s) = \mu_1 \eta_i^4 + \left(\frac{\mu_1}{\kappa^2} + \frac{1}{12} \right) s^2 \eta_i^2 + \left(\frac{s^2}{12 \kappa^2} + 1 \right) s^2$$

$$F_2(\eta_i, s) = 1 + \frac{\mu_1}{\kappa^2} \eta_i^2 + \frac{s^2}{12 \kappa^2}$$

である。

式(5.2.8)および式(5.2.6)を式(5.2.1)に代入すれば未定係数 Φ が求められる。

$$\Phi = \frac{h C_2 s F_2(\eta_i, s)}{\lambda_i F_1(\eta_i, s) + \mu_2 s^2 F_2(\eta_i, s)} \frac{J_1(\eta_i a/h) q_0}{\eta_i (h/a) G s} \quad (5.2.9)$$

ここで

$$\mu_2 = \rho_f / \rho_c$$

である。

式(5.2.9)を式(5.2.6)および(5.2.8)に代入すれば、次式のようにたわみ W および液体圧力 P のラプラス-ハンケル二重積分変換領域における解が得られる。

$$\left[\begin{aligned} \frac{\tilde{W}}{h} &= \frac{\lambda_i F_2(\eta_i, s)}{\lambda_i F_1(\eta_i, s) + \mu_2 s^2 F_2(\eta_i, s)} \frac{J_1(\eta_i a/h) q_0}{\eta_i (h/a) G s} \\ \tilde{P} &= \frac{\mu_2 s^2 F_2(\eta_i, s)}{\lambda_i F_1(\eta_i, s) + \mu_2 s^2 F_2(\eta_i, s)} \exp(-\lambda_i \zeta) \frac{J_1(\eta_i a/h) q_0}{\eta_i (h/a) s} \end{aligned} \right. \quad (5.2.10)$$

式(5.2.10)を有限ハンケル逆変換すれば、次式のようにラプラス変換領域の解が得

られる。

$$[\bar{W}/h, \bar{P}] = \frac{1}{(R/h)^2} \sum_{i=1}^{\infty} [\tilde{W}/h, \tilde{P}] \frac{J_0(\eta_i \rho)}{(J_1(\eta_i R/h))^2} \quad (5.2.11)$$

以下において飛翔体との衝突により生じるたわみと区別するために、式(5.2.11)の平板のたわみのステップ応答を $H_1(t)$ の記号にて示すものとする。

5.2.2 飛翔体のステップ応答

平板に衝突する飛翔体のステップ応答を求める。ここでは飛翔体として半無限長の弾性棒および質点を考える。

まず弾性棒の運動について解析する。先端に荷重 $q_0 H(t)$ をうける半無限長弾性棒について考える。弾性棒の運動方程式は次の一次元波動方程式により与えられる。

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (5.2.12)$$

ここで

$$C_0^2 = E_0 / \rho_0$$

であり、 x 、 F_0 および ρ_0 は、それぞれ棒の先端を原点とする軸方向座標、縦弾性係数および密度である。

このときの衝突端における境界条件は次のようになる。

$$x=0 \text{ において } \sigma_x = -q_0 H(t) / A_0 \quad (5.2.13)$$

ここで σ_x および A_0 はそれぞれ軸方向の垂直応力および棒の断面積である。

式(5.2.13)を考慮して式(5.2.12)を解けば、次式のように荷重点における棒の変位が求められる。

$$U(t) = q_0 C_0 t / A_0 E_0 \quad (5.2.14)$$

また質点がステップ荷重 $q_0 H(t)$ をうけるときの変位 U は次式で与えられる。

$$U(t) = q_0 t^2 / 2M \quad (5.2.15)$$

ここで M は質点の質量である。

以下において、飛翔体が弾性棒あるいは質点のいずれの場合においてもステップ応答を $H_2(t)$ の記号にて示すものとする。

5.2.3 衝撃荷重の解析

Fig. 5.2.2のように、液体に接する平板に落下物が速度 V_0 で衝突した場合の衝撃荷

重 $q_0 f(t)$ を求める。衝撃荷重はHertzの接触理論[5.1]に基づいて解析される。

Hertzの接触理論によれば、衝突する2物体の相対接近量 z_0 と作用する荷重 $q_0 f(t)$ には次の関係がある。

$$q_0 f(t) = B \cdot z_0^{3/2} \quad (5.2.16)$$

ここで q_0 および $f(t)$ はそれぞれ荷重の大きさおよび時間変化を示す。また係数 B は衝突する2物体の材質と衝突部近傍の形状より決められる。球面と球面が衝突する場合は次のようになる。

$$B = \frac{4}{3} \frac{1}{(1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2} \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

ここで ν , E および r はそれぞれポアソン比、縦弾性係数および接触部の曲率半径であり、添字1,2は平板および衝突体に関する諸量を示す。

衝突体が速度 V_0 で平板に衝突することから相対接近量 z_0 は

$$z_0 = V_0 t - \{u_1(t) + u_2(t)\} \quad (5.2.17)$$

であり、ここで u_1 および u_2 は衝突体および平板の接触点の変位である。また衝突体が高さ H から自由落下して平板に衝突するとすれば、衝突速度 V_0 は次式により求められる。

$$V_0 = \sqrt{2gH}$$

ここで g は重力加速度を示す。

変位 $u_1(t)$ および $u_2(t)$ はDuhamel積分を用いて、平板および飛翔体のステップ応答 $H_1(t)$ および $H_2(t)$ から次式のように求めることができる[注1]。

$$u_i(t) = \int_0^t q_0 f(\lambda) \frac{dH_i(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{\zeta=t-\lambda} d\lambda \quad (5.2.18)$$

時間 t を式(5.2.4)のただし書きにしたがって無次元時間 τ に書き換えることにより式(5.2.16)は次式となる。

$$K\{f(\tau)\}^{2/3} = \tau - \sum_{j=1}^2 \int_0^t f(\eta) \frac{\partial h_j(\zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\tau-\lambda} d\lambda \quad (5.2.19)$$

ここで

$$K = A(q_0/B)^{2/3}/V_0, \quad A = C_2/h, \quad h_i(\tau) = q_0 H_i(\tau)/V_0$$

である。

式(5.2.19)の非線形積分方程式を解くことにより衝撃荷重が求められる。この式を

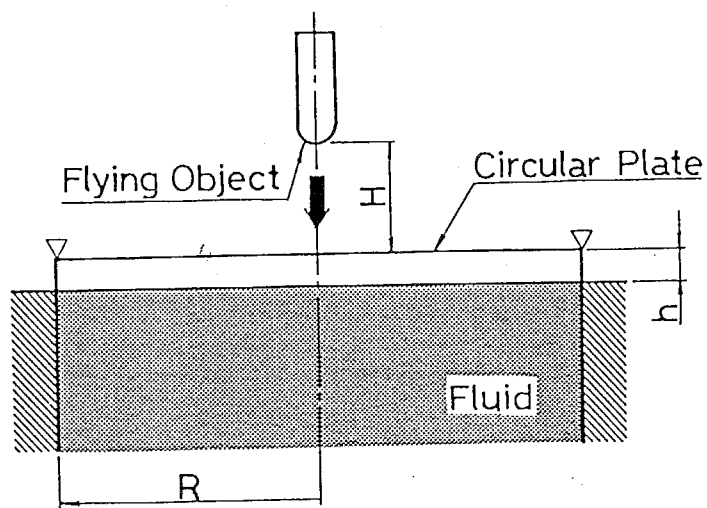


Figure 5.2.2 A Circular Plate Floating on Liquid Collided by a Flying Object

解析的に解くことが困難であることから差分法により解くものとする。0 から τ までを n 分割するものとして式(5.2.19)の積分を台形公式により差分表示し、また微分を中央差分で

$$\frac{\partial h_j}{\partial \tau} = \frac{h_j(\tau + \Delta\tau) - h_j(\tau - \Delta\tau)}{2\Delta\tau}, \quad \Delta\tau = \tau/n \quad (5.2.20)$$

として表わせば、式(5.2.19)は次の差分方程式となる。

$$K(P_{n+1}^{2/3} - P_n^{2/3}) = \Delta\tau + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{4} P_n (-3h_{j,2} + 2h_{j,2} + h_{j,0}) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} P_i (-h_{j,n+3-i} + h_{j,n+2-i} + h_{j,n+1-i} - h_{j,n-i}) \quad (5.2.21)$$

ここで

$$P_n = P(n\Delta\tau), \quad h_{j,i} = h_j(i\Delta\tau), \quad P_0 = 0, \quad P_1 = (\Delta\tau/K)^{3/2}$$

である。

平板のステップ応答 H_1 は Krings-Waller の数値ラプラス変換により離散的に与えられることから、数値ラプラス変換と式(5.2.21)の時間ステップ $\Delta\tau$ は一致するように定め、また級数の項数 N はサンプリング数と一致するようにした。

5.2.4 飛翔体の衝突による平板の応答の解析

得られた衝撃荷重 $f(t)$ を Krings-Waller の方法の式(2.2.9)によりラプラス変換した後、式(5.2.11)に代入すれば次式のように飛翔体が衝突した場合のたわみ W の変換解が求められる。

$$\overline{W} = \overline{H_1}(s) \cdot s \overline{f}(s) \quad (5.2.22)$$

式(5.2.22)を Krings-Waller の方法により再び逆変換すれば、時間領域の数値結果が得られる。

以上の解析の過程をフローチャートにまとめると Fig. 5.2.3 のようになる。

5.3 実験方法

5.2節で述べた解析の結果の妥当性を確認するために実験を行った。使用した実験装置は Fig. 5.3.1 で示される通りである。一辺が 800[mm]、厚さ 5[mm] の正方形の鋼板の四隅をロープでつるし縦横 1100[mm]、深さ 700[mm] の水槽の中にはられた水に浮か

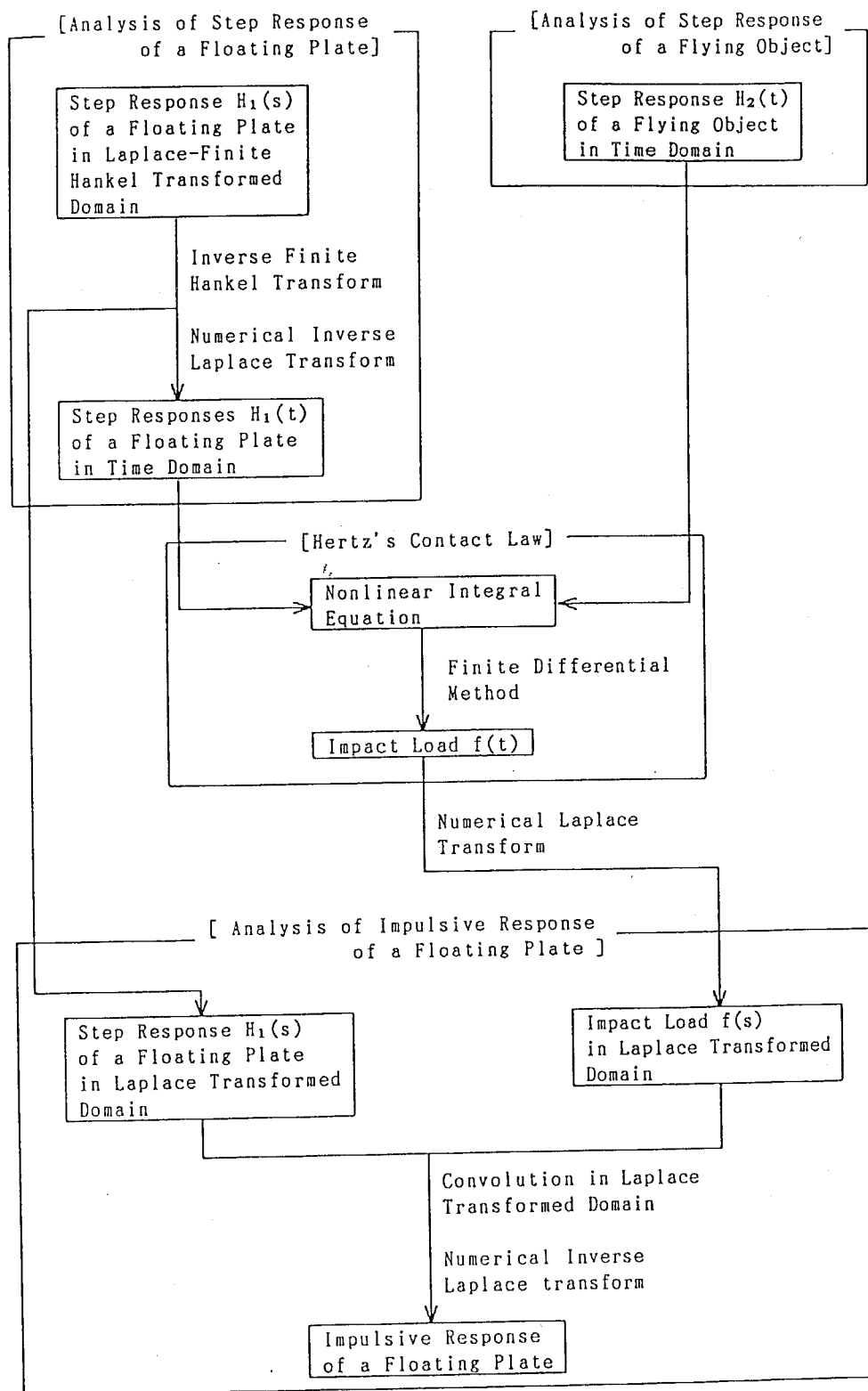
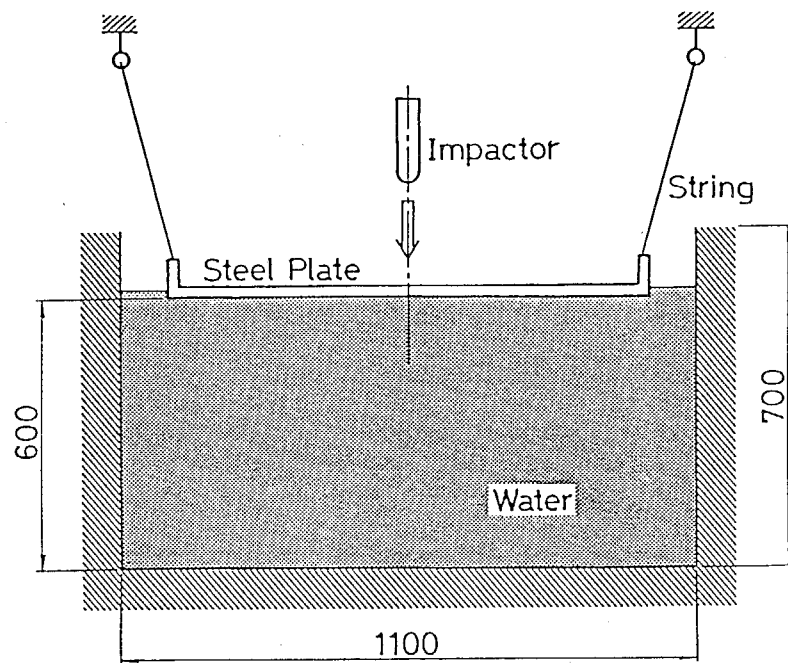


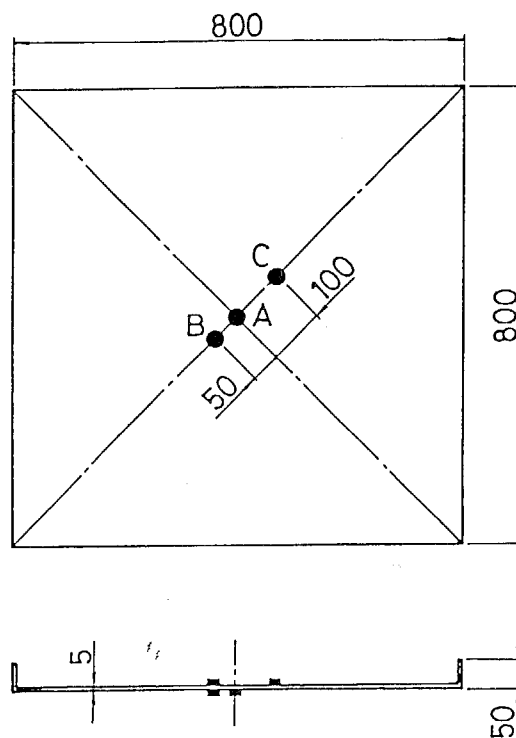
Figure 5.2.3 Flow Chart of Analytical Procedure



(a) Experimental Equipment

Figure 5.3.1 Experimental Equipment

(Continued)



	Gauge Type	Position
A	KEW-2-D16-11	Lower Side ($r=0$ [mm])
B	KEW-2-D16-11	Lower Side ($r=50$ [mm])
	KEC-2-D16-11	Upper Side ($r=50$ [mm])
C	KEC-2-D16-11	Upper Side ($r=100$ [mm])

(b) Steel Plate and Strain Gauges

Figure 5.3.1 Experimental Equipment

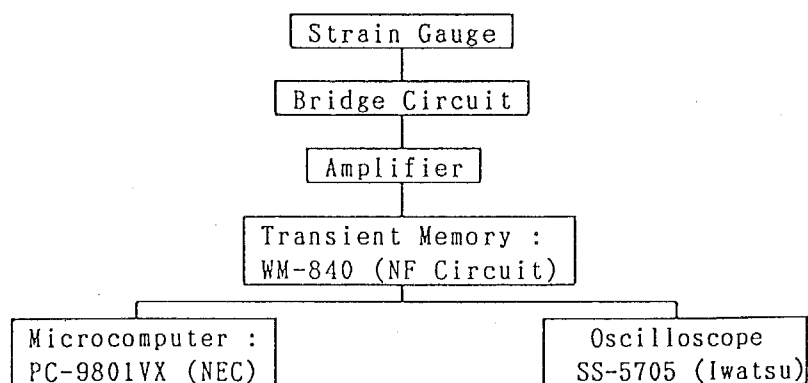


Figure 5.3.2 System of Measuring Strain

べた。鋼板の上面に水が流れ込まないように厚さ5[mm]、幅45[mm]の鋼製の帯板を周囲に溶接し箱型にした。鋼板は水槽の底から約600[mm]の位置になるようにした。鋼板のひずみを測定するために、通常のひずみゲージがエポキシ樹脂の中に埋め込まれた防水型のひずみゲージ（共和電業 KEW-2-D16-11）を用いた。このひずみゲージを鋼板の中心および中心から対角線上に50[mm]離れた水と接する下面に接着した。また中心から対角線上に50[mm]および100[mm]離れた鋼板上面に一般のひずみゲージ（共和電業 KFC-2-D16-11）を取りつけた。使用した2種類のゲージとも2軸の直交ゲージであり、1つのゲージが鋼板の対角線方向になるように接着した。飛翔体は半径7.5[mm]、長さ1[m]の軟鋼棒および、半径15[mm]あるいは20[mm]の鋼球であり、アクリルパイプのガイド中を落下し鋼板の中心に衝突するようにした。軟鋼棒の衝突端より50[mm]離れた位置に半導体ゲージ（共和電業 KSP-2-E4）を取りつけ、測定されるひずみに棒の断面積および縦弾性係数を乗じることにより鋼板に作用する衝撃荷重を求めた。ひずみを測定するために使用した測定系をFig. 5.3.2に示す。

前節において対象とした解析モデルと実験を行ったモデルとは平板の形状および境界条件が異なる。しかし応力波が板の周辺から反射するまでは、平板の形状および境界条件の影響は板の応答に含まれない。そこで理論解析による結果と実験による結果との比較は衝撃応答の考察に重要な初期の時間範囲のひずみ応答を対象とする。

5.4 理論解析結果と実験結果との比較

実験結果と比較するために、理論解析の対象とした円板の形状は実験で使用した正方形板の内接円とし円板の形状を $R/h=80$ とした。また円板の材質および飛翔体の材質は鋼として、縦弾性係数、ポアソン比および密度をそれぞれ210[GPa]、0.3および7900[kg/m³]とした。液体は水とし体積弾性率および密度は2.22[GPa]および1000[kg/m³]である。

5.4.1 衝撃荷重領域の決定

飛翔体が平板に衝突するとき作用する荷重は、ほぼ集中荷重として考えることができる。しかしMindlin理論によれば集中荷重点の直下において、たわみおよび応力が特異となり発散して求められない。そこで式(5.2.11)から得られるMindlin理論によるたわみおよびひずみの時間変動と集中衝撃荷重をうける場合の三次元弾性理論によ

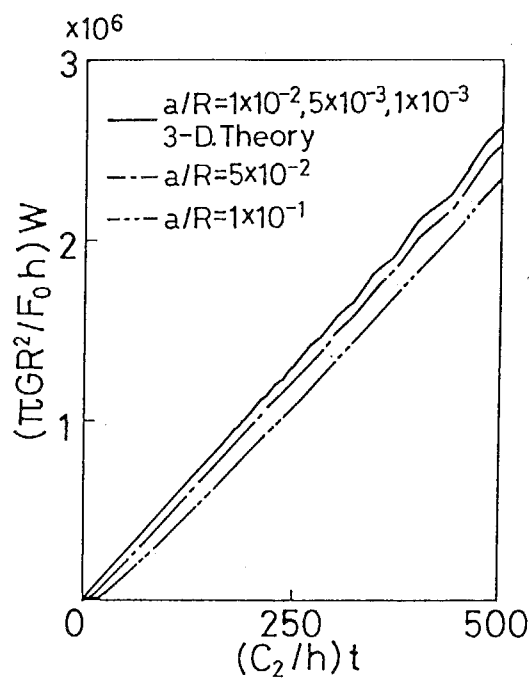


Figure 5.4.1 Comparison of Deflection Histories between Mindlin's Theory and Three-Dimensional Elastic Theory at the Center Point of a Plate

$R/h=80$

---, --- Mindlin's Theory (Distributed Load)
 — Three-Dimensional Theory (Concentrated Load)

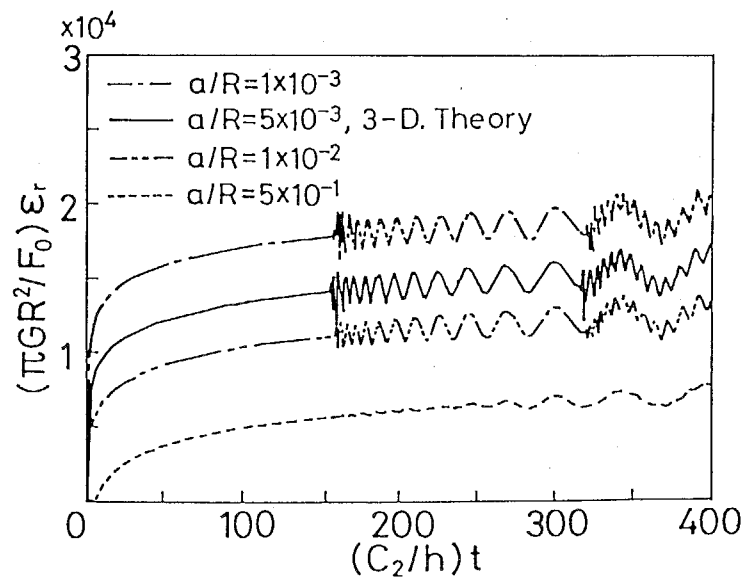


Figure 5.4.2 Comparison of Strain Histories between Mindlin's Theory and Three-Dimensional Elastic Theory at the Center Point of a Plate

$R/h=80$

---, ---, --- Mindlin's Theory (Distributed Load)
 — Three-Dimensional Theory (Concentrated Load)

る結果[5.2]とを比較することにより分布荷重の領域 a を決定するものとする。このときの荷重は領域に一樣に分布するものとし、平板は液体と接しないものとする。

荷重領域の半径 a/h を 1×10^{-1} , 5×10^{-2} , 1×10^{-2} , 5×10^{-3} および 1×10^{-3} と変化させたときの円板中心のたわみの時間変化を Fig. 5.4.1 に示す。また比較のために 3 次元理論による結果を示す。Fig. 5.4.1 によれば $R/h=80$ の形状の円板のたわみに関しては、荷重領域の半径 a/h が計算を行った範囲では、零にならない限り 1×10^{-2} 以下の値であれば 3 次元理論の結果と一致することがわかる。また円板の中心の裏側の半径方向のひずみの時間変化に関する Mindlin 理論による結果と 3 次元理論による結果の比較を Fig. 5.4.2 に示す。このとき荷重領域の半径が小さくなるとともにひずみの値が大きくなることがわかる。この円板の形状であれば $a/h=5 \times 10^{-3}$ のとき、3 次元理論の結果と Mindlin 理論の結果がほぼ一致する。そこで以下において $a/h=5 \times 10^{-3}$ として数値計算を行った。

5.4.2 鋼球の衝突による衝撃荷重および平板のひずみ変動

液体に接する平板に鋼球が衝突する場合について、数値計算および実験を行った。

Fig. 5.4.3 に理論解析から求められた衝撃荷重を示す。鋼球の半径 R_m および落下高さ H の組み合わせを $H=0.5[m]$, $R_m=20[mm]$, $H=0.3[m]$, $R_m=20[mm]$ および $H=0.5[m]$, $R_m=15[mm]$ の 3 種類に変化させた。Fig. 5.4.3 において、板が液体と接している場合および接していない場合の結果を実線および破線で示す。平板が液体に接している場合の衝撃荷重はいずれの条件においても荷重の最大値が大きくなり荷重の持続時間が長くなる。さらに最大値の現れる時間が液体の存在により遅くなることがわかる。また液体に接している場合および接していない場合のいずれの場合も鋼球の半径が小さくなると荷重の最大値が大きくなり荷重の持続時間が短くなりパルス状の荷重変化に近づく。また鋼球の大きさが同じであるとき、鋼球の落下高さの平方根、すなわち衝突速度に衝撃荷重の大きさがほぼ比例することがわかった。

次に平板のひずみ時間変化を示す。以下の Fig. 5.4.4 から Fig. 5.4.6 において太線および細線は計算結果および実験結果を示す。また実線および破線はそれぞれ液体と接している場合および接していない場合の結果を示す。いずれの解析結果と実験結果とは、ほぼ一致しており解析の妥当性を示していると考えられる。

Fig. 5.4.4(a)-(c) に平板の液体の接する表面の鋼球の衝突点直下におけるひずみの時間変化の結果を示す。(a)(b) および (c) は Fig. 5.4.3 の計算条件と同様の $H=0.5[m]$,

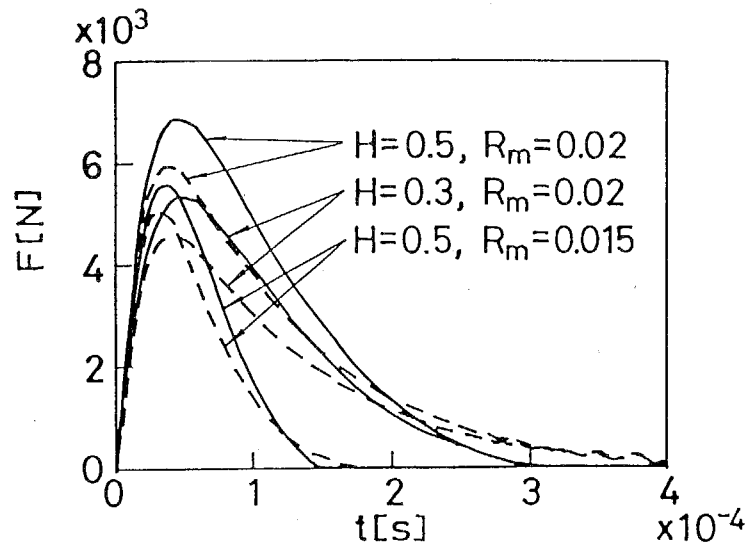
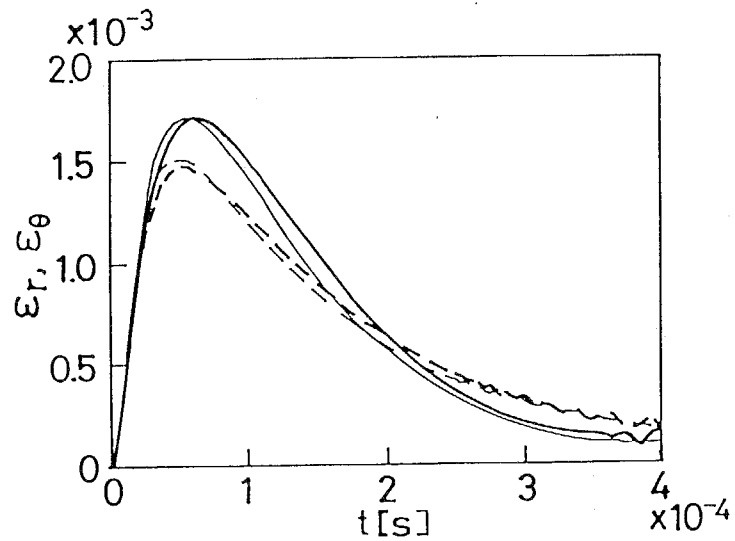
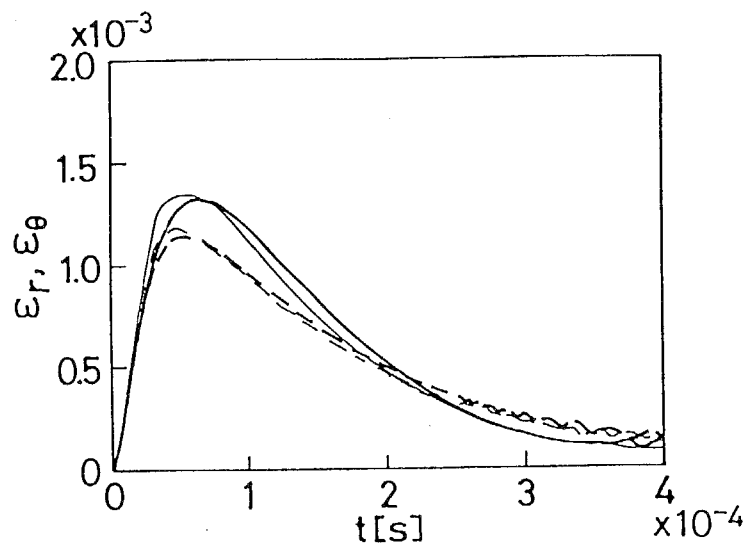


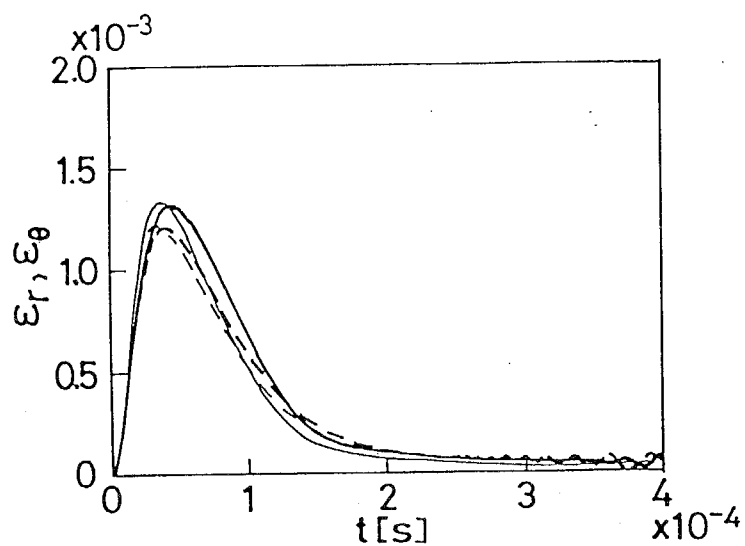
Figure 5.4.3 Impact Loads (Theory)
 Impactor : Steel Ball
 H : Dropping Height [m], R_m : Radius of Steel Ball [m]
 — : Contact with Water
 - - - : Empty



(a) Dropping Height $H=0.5$ [m], Radius of Steel Ball $R_m=20$ [mm]
 Figure 5.4.4 Strain Histories
 $r=0$ [mm] on Backside, Impactor : Steel Ball
 — : Contact with Water (Theory)
 — : Contact with Water (Experiment)
 - - - : Empty (Theory)
 - - - : Empty (Experiment)
 (Continued)



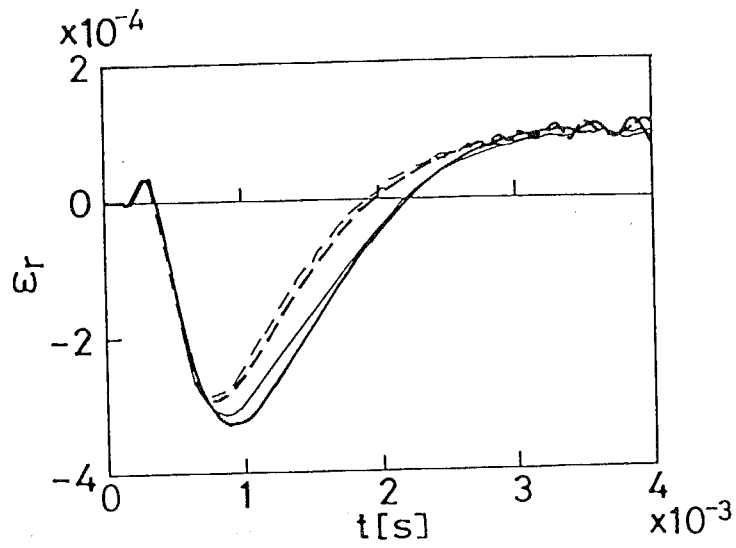
(b) Dropping Height $H=0.3[\text{m}]$, Radius of Steel Ball $R_m=20[\text{mm}]$



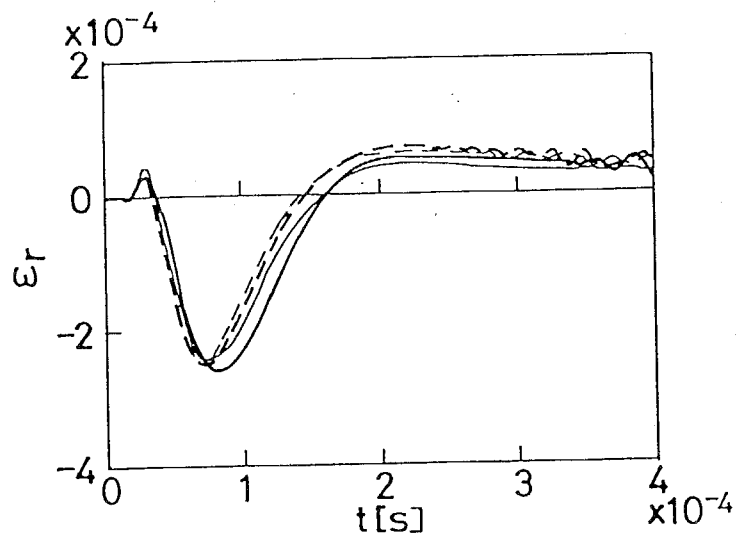
(c) Dropping Height $H=0.5[\text{m}]$, Radius of Steel Ball $R_m=15[\text{mm}]$

Figure 5.4.4 Strain Histories

$r=0[\text{mm}]$ on Backside, Impactor : Steel Ball
 ——— Contact with Water (Theory)
 ——— Contact with Water (Experiment)
 - - - - - Empty (Theory)
 - - - - - Empty (Experiment)



(a) Dropping Height $H=0.5[\text{m}]$, Radius of Steel Ball $R_m=20[\text{mm}]$



(b) Dropping Height $H=0.3[\text{m}]$, Radius of Steel Ball $R_m=15[\text{mm}]$

Figure 5.4.5

Strain Histories

$r=50[\text{mm}]$ on Backside, Impactor : Steel Ball

———— Contact with Water (Theory)

———— Contact with Water (Experiment)

----- Empty (Theory)

----- Empty (Experiment)

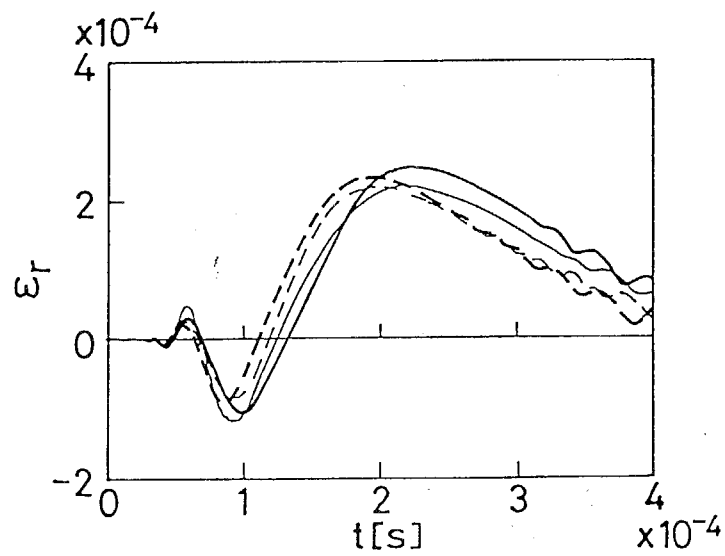


Figure 5.4.6 Strain Histories
 $r=100[\text{mm}]$ on Impact Side, Impactor : Steel Ball
 Dropping Height $H=0.5[\text{m}]$, Radius of Steel Bar $R_m=20[\text{mm}]$
 ——— Contact with Water (Theory)
 ——— Contact with Water (Experiment)
 - - - - - Empty (Theory)
 - - - - - Empty (Experiment)

$R_m=20[\text{mm}]$, $H=0.3[\text{m}]$, $R_m=20[\text{mm}]$ および $H=0.5[\text{m}]$, $R_m=15[\text{mm}]$ の3種類の組み合わせに関する結果である。いずれのグラフとも液体と接している平板の方がひずみが大きくなり、最大値が現れる時間が遅れることがわかる。落下高さのみを変化させた(a)および(b)の結果より、液体と接している場合および接していない場合とも衝撃荷重の結果と同様に衝突速度に比例したほぼ相似形のひずみの時間変化となる。また鋼球の半径が異なる(a)および(c)のグラフを比較すると鋼球径が小さくなると荷重の時間変化の場合と同様にひずみが急激に小さくなる。荷重の作用時間が長いとき、ひずみの時間変動に及ぼす液体の影響が大きくなり、作用時間が短いとき液体の影響が小さくなり液体と接する場合と接しない場合のひずみ変動の差が小さくなる。

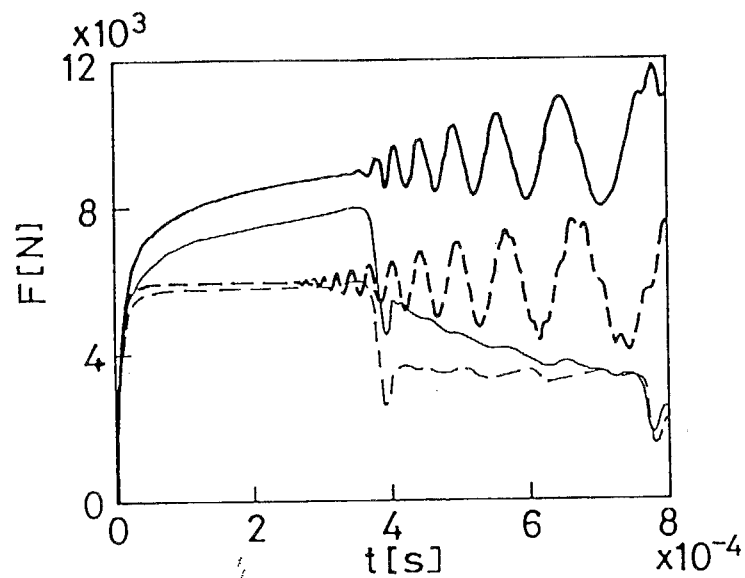
Fig. 5.4.5(a)(b)に平板の中心から50[mm]離れた液体と接する表面における半径方向のひずみの時間変動を示す。(a)および(b)はそれぞれ $H=0.5[\text{m}]$, $R_m=20[\text{mm}]$ および $H=0.5[\text{m}]$, $R_m=15[\text{mm}]$ の場合の結果である。この場合も荷重の作用時間が長い(b)のひずみ変動が液体の影響を大きくうけていることがわかる。

また $H=0.5[\text{m}]$, $R_m=20[\text{mm}]$ のときの中心から100[mm]離れた平板の液体と接していない側の表面の半径方向のひずみの時間変動をFig. 5.4.6に示す。これより中心から離れた位置においてもひずみ変動に液体の影響が現れることがわかる。

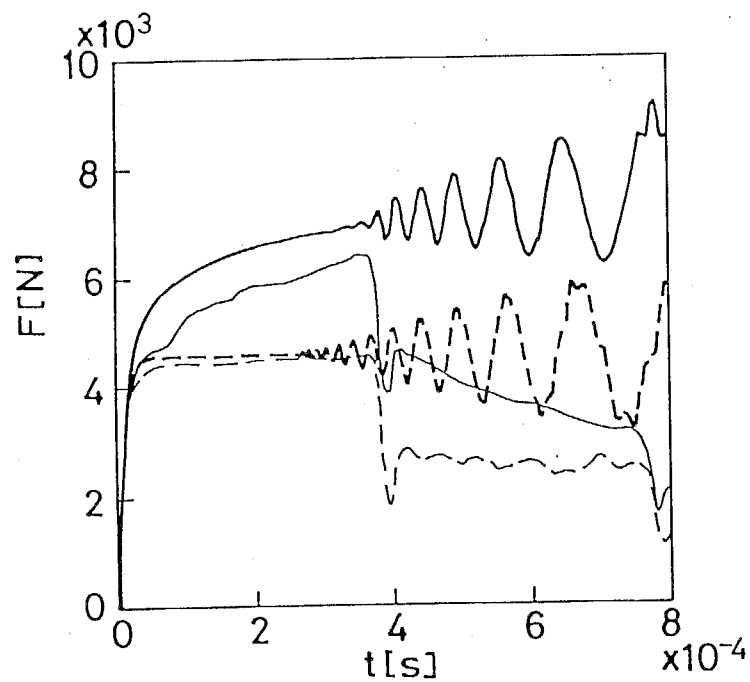
5.4.3 軟鋼棒の衝突による衝撃荷重および平板のひずみ変動

飛翔体が鋼球の場合よりも荷重の作用時間が長い軟鋼棒が衝突したときの結果を示す。以下のグラフにおいても太線および細線は計算結果および実験結果を示す。また実線および破線は、それぞれ液体と接している場合および接していない場合の結果を表わす。

Fig. 5.4.7(a)(b)に軟鋼棒を落下高さ(H)0.3[m]および0.5[m]で平板に衝突させたときの衝撃荷重を示す。液体と接していない場合の荷重の時間変動は実験結果と理論解析の結果とはよく一致している。これに対して液体に接している場合、解析結果の方がやや大きな値を示しているが、実験結果とは同様の傾向を示しており理論解析の妥当性を示していると考えられる。液体と接している場合、時間経過とともに衝撃荷重がかなり大きくなる。これに対して液体と接しない場合ではほぼ一定値となる。実験から得られた荷重は0.4[ms]付近で急激に減少していることがわかる。これは実験では長さ1[m]の軟鋼棒であり、棒の上端で反射した応力波が衝突端まで到達したことが原因であると考えられる。また解析結果において液体と接している場合では0.35[ms]付



(a) Height of Dropping $H=0.3[m]$



(b) Height of Dropping $H=0.5[m]$

Figure 5.4.7 Impact Loads

- Contact with Water (Theory)
- Contact with Water (Experiment)
- Empty (Theory)
- Empty (Experiment)

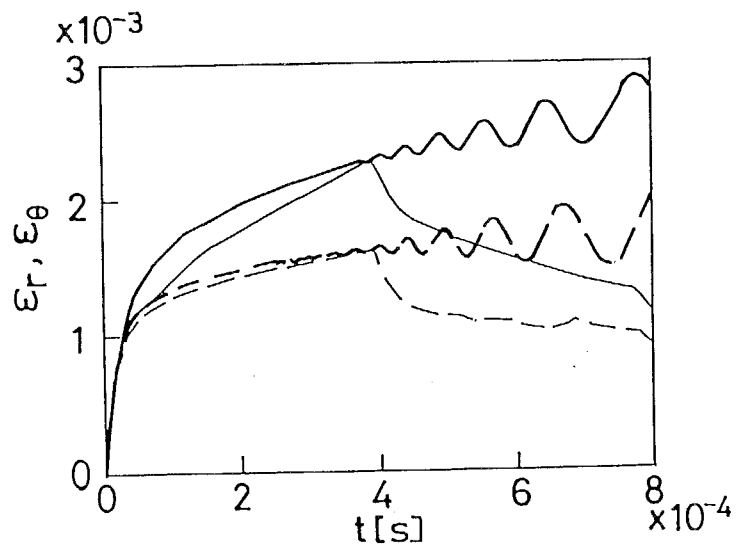


Figure 5.4.8 Strain Histories
 Impactor : Steel Bar, Height of Dropping $H=0.3[m]$
 $r=0[mm]$ on Backside
 ——— Contact with Water (Theory)
 ——— Contact with Water (Experiment)
 - - - - - Empty (Theory)
 - - - - - Empty (Experiment)

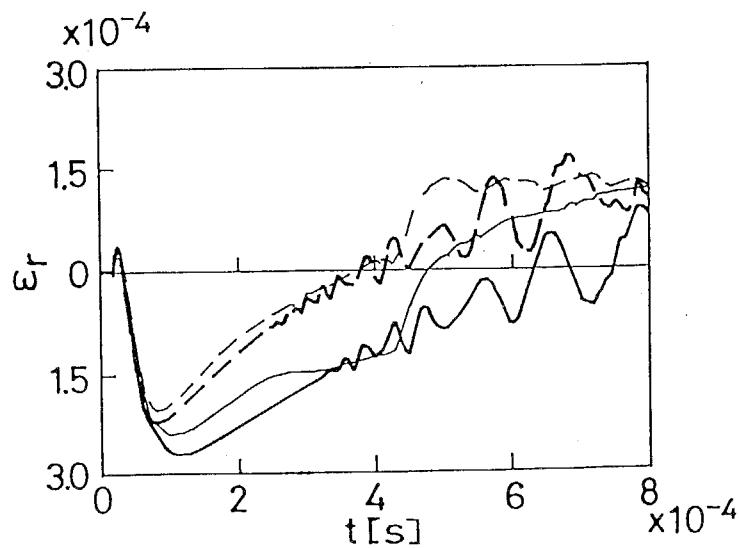


Figure 5.4.9 Strain Histories
 Impactor : Steel Bar, Height of Dropping $H=0.3[m]$
 $r=50[mm]$ on Backside
 ——— Contact with Water (Theory)
 ——— Contact with Water (Experiment)
 - - - - - Empty (Theory)
 - - - - - Empty (Experiment)

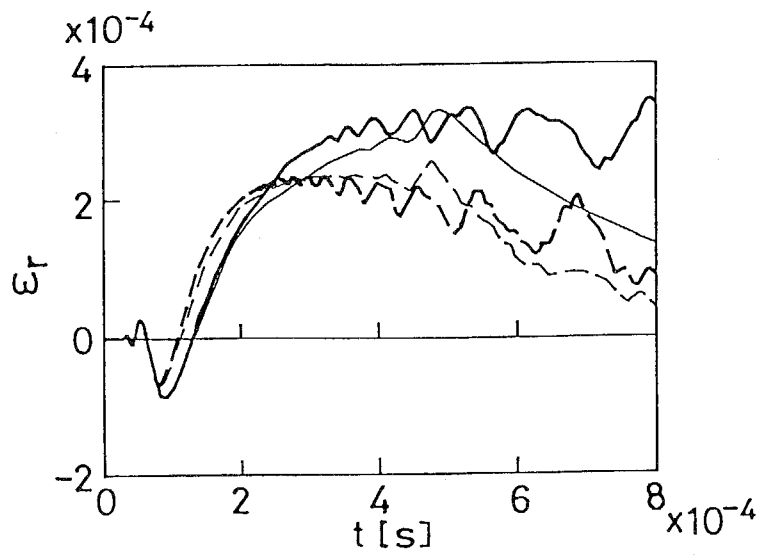


Figure 5.4.10 Strain Histories

Impactor : Steel Bar, Height of Dropping $H=0.3[m]$
 $r=100[mm]$ on Impact Side

- Contact with Water (Theory)
- Contact with Water (Experiment)
- Empty (Theory)
- Empty (Experiment)

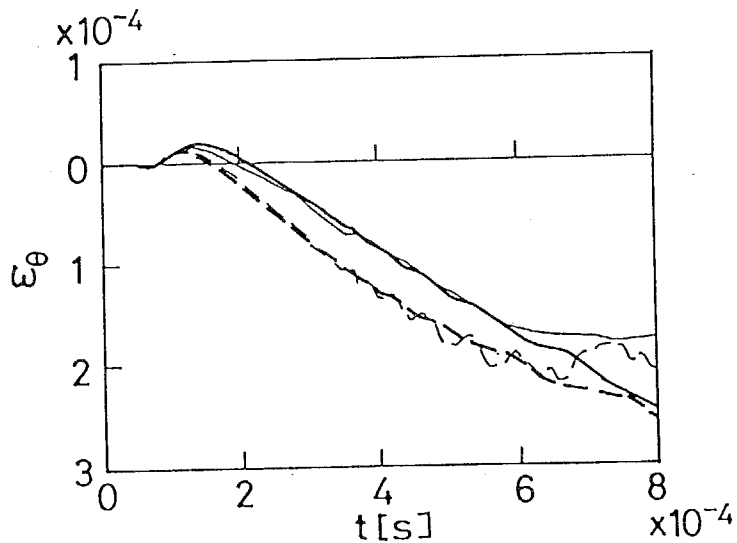


Figure 5.4.11 Strain Histories

Impactor : Steel Bar, Height of Dropping $H=0.3[m]$
 $r=100[mm]$ on Impact Side

- Contact with Water (Theory)
- Contact with Water (Experiment)
- Empty (Theory)
- Empty (Experiment)

近、また液体と接していない場合には0.25[ms]付近までは滑らかな荷重の時間変化を示し、この後、平板の周囲からの反射波のために振動する現象が見られる。このとき液体の存在のために反射波の影響が遅く現れることがわかる。これは第3章で考察したように連成効果によるものと考えられる。

$H=0.3[m]$ のときの平板の落下棒の衝突点の裏側表面おけるひずみの時間変動をFig. 5.4.8に示す。実験における衝撃荷重が急激に低下したために、0.4[ms]付近で実験から得られたひずみの時間変動と理論結果との差が大きくなっている。液体と接している場合の方が大きなひずみの時間変動を示していることがわかる。

また $H=0.3[m]$ で中心より50[mm]離れた液体と接する表面における半径方向のひずみおよび100[mm]離れた液体と接しない表面の半径、円周方向のひずみの時間変動をFig. 5.4.9および5.4.10、5.4.11にそれぞれ示す。いずれの場合とも実験結果と理論結果とはほぼ一致している。また液体の影響が時間とともに大きくなる傾向があることがわかる。

5.5 結言

飛翔体が液体と接する平板に衝突する場合の衝撃応答を理論および実験により解析した。衝撃荷重の作用時間が短い場合として鋼球が衝突する場合、作用時間が長い場合として軟鋼棒が衝突する場合の2種類の条件について、平板の衝撃応答に及ぼす液体の連成効果について考察を行った。

得られた結果をまとめると次のようになる。

- (1)液体に接した平板に飛翔体が衝突する問題を平板に対してはMindlin理論、液体に対してはポテンシャル理論および衝突に対してはHertz理論を適用して解析を行った。ひずみゲージを用いて実験を行い解析結果が妥当であることを確認した。
- (2)液体の存在によって衝撃荷重の最大値が大きくなり、最大値が現れる時間が遅くなることがわかった。鋼球が衝突する場合、液体の有無にかかわらず鋼球の大きさが大きくなるにつれ衝撃荷重の作用時間が長くなり、液体と接する場合と接しない場合との荷重の差が時間とともに大きくなる。さらに軟鋼棒が衝突する場合は、さらに荷重の作用時間が長くなり液体と接しない場合の荷重の大きさとの差が大きくなる。いずれの飛翔体とも衝撃速度と荷重の大きさが比例する。

(3) 平板のひずみは液体の存在によって最大値が大きくなり、最大値が現れる時間が遅くなる。また平板単体のひずみと液体と接する場合の平板のひずみの差が時間とともに大きくなり、荷重の作用時間が長くなるにつれて大きい。また平板のひずみ変動に見られる周辺からの反射波の影響が生じる時間が遅くなることがわかった。

注 1)

Duhamel積分は次式のようにインパルス応答 $g(t)$ に基づいて行われるのが通常である。

$$u_i(t) = \int_0^t q_0 f(\lambda) g_i(t-\lambda) d\lambda$$

液体と接する場合の平板のインパルス応答はステップ応答と同様に数値的に求めざるを得ない。しかしインパルス応答を数値計算する場合、収束性が著しく悪い。そこで本章においては数値計算の容易なステップ応答に基づいてDuhamel積分を行うこととした。

参考文献

- [5.1] Goldsmith W, : Impact - The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids, Arnold, (1960), p.116-132.
- [5.2] 例えば、宇治橋貞幸、井上裕嗣、足立忠晴、松本浩之：鋼球の衝突により生ずる硝子板の衝撃応力の解析、日本機械学会論文集（A編）, Vol.52, No.474 (1986), p.525-532.
- [5.3] 例えば、Christoforou A.P., Swanson S.R. : Analysis of Impact Response in Composite Plates, International Journal of Solids and Structures, Vol.27, No.2(1991), p.161-170.
- [5.4] 例えば、鞠重錫、鈴木正之、足立忠晴、宇治橋貞幸、松本浩之：低速衝撃によるCFRP積層板の荷重変動とひずみ変動、日本機械学会論文集（A編）, Vol.56, No.532(1990), p.2520-2525.
- [5.5] 大坪英臣、久保田晃弘：相関問題、培風館、(1990), p.109-125.

- [5.6] Sandman B.E., Vieira J. Jr. : The Experimental and Theoretical Dynamics of Fluid-Loaded Plates, Development in Mechanics Vol.8, Proceedings of the 14th Midwestern Mechanics Conference, pp.295-311.
- [5.7] Golovanov V.A., Popov A.L., Chernyshev G.N. : Oscillations of Plates under the Action of Concentrated Loads in an Acoustic Medium, PMM U.S.S.R., Vol.46(1983), p.231-236.
- [5.8] 長谷川英治、松下幹雄、関口正寿：鉛直加振される液体層を覆う弾性板の振動の発生、日本機械学会論文集（C編）, Vol.51, No.466(1985), p.1218-1225.
- [5.9] 久保田裕二、鈴木健彦：流体中の振動円板に作用する付加質量効果、日本機械学会論文集（C編）, Vol.50, No.449(1984), p.243-248.
- [5.10] 高田一、大野一彦：流体に接する周辺固定円板の固有振動数、日本機械学会論文集（C編）, Vol.51, No.469(1985), p.2393-2396.
- [5.11] 高田一、大野一彦：接液弾性円板の固有振動数に関する研究（板厚、液体密度と密度の影響）、日本機械学会論文集（C編）, Vol.52, No.473(1986), p.224-228.
- [5.12] Alper S., Magrab E.B. : Radiation from the Forced Harmonic Vibrations of a Clamped Circular Plate in an Acoustic Fluid, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol.48, No.3(1970), p.681-691.
- [5.13] Lai J.-L. : Pressure Radiations from an Infinite Two-Layered Elastic Plate with Point and Shear Force Excitations, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol.53, No.2(1973), p.486-495.
- [5.14] Yen D.H.Y., Chou C.C. : Response of a Plate Supported by a Fluid Half Space to Moving Pressure, Journal of Applied Mechanics, Vol.37(1970), p.1050-1054.
- [5.15] Berglund J.W. : Transient Interaction of a Circular Plate and a Fluid Medium, Journal of Applied Mechanics, Vol.46(1979), p.26-30.
- [5.16] Hui D. : Viscoelastic Response of Floating Ice Plates under Distributed or Concentrated Loads, Journal of Strain Analysis, Vol.3, No.3 (1986), p.135-143.
- [5.17] 長屋幸助、永井克巳：流体を介して任意変動圧力を受ける接水円板の衝撃応答、

日本機械学会論文集（C編）, Vol. 51, No. 471 (1986), p. 2988-2996.

第6章 圧電素子による薄板に作用する衝撃圧力の測定

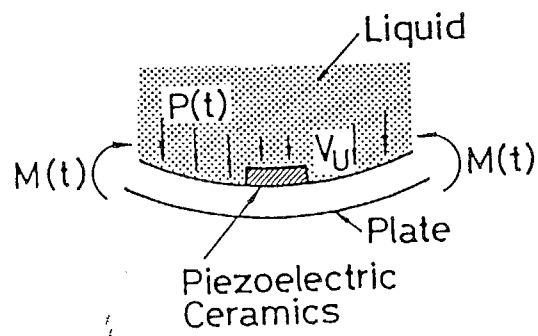
6.1 緒言

第5章において液体と接する平板の衝撃応答をひずみゲージにより実験的に確認することが可能であることを示した。しかし液体圧力を測定することはまだ確立されていない技術である。そこで本章では薄肉構造に作用する衝撃液体圧力の測定を考察する。

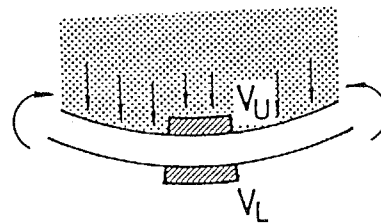
薄肉構造は液体貯槽、パイプラインや宇宙ロケットの燃料配管など液体の容器として多く使用されている。薄肉構造が衝撃圧力をうけるととき内部の液体とともに連成振動することが知られている[6.1]。このような連成振動下における液体の圧力波の伝播現象を実験的に明らかにすることは重要である。

一般に圧力波を測定するには半導体ゲージや圧電気などの圧力変換器が使用されている[6.2]。これらの変換器は構造物に測圧孔をあけて外部より取り付けられる。一方、薄肉構造に孔をあけることから構造の剛性を変化させ、圧力を正確に測定できなかったり、また薄肉のために変換器を取り付けることができない場合がある。これに対処するため半導体拡散形の超小型の圧力変換器[6.3]が開発されており、構造に直接、接着して使用される。この変換器は大きな曲げ変形をしない部分に取り付けることが前提となっている。このため構造が薄く液体と連成振動する場合には測定が困難となることがある。

本章では液体と連成振動する薄肉平板に作用する衝撃圧力の計測を試みる。変換器として応答性の高い圧電セラミックス製の素子を用いる。平板の剛性を変化させないために直接、平板に変換器を取り付ける。接着された圧電素子には平板の曲げ変形の影響が出力電圧として含まれるため、これを分離して圧力による出力電圧を得る方法を考察する。衝撃圧力発生装置を試作して、実際に圧力を計測し本方法の妥当性について明らかにする。



(a) Single type



(b) Double type

Figure.6.2.1 Principle of Impulsive Pressure Measurement

6.2 測定原理

Fig.6.2.1(a)のように液体の衝撃圧力を計測するために薄い圧電素子を直接、平板に接着する。これにより平板に孔をあけることなく取り付け部の剛性の変化を少なくすることができる。

薄肉平板が液体と連成振動するとき平板は曲げ変形のみするとすれば、平板に取り付けられた圧電素子は液体圧力 $P(t)$ と平板の曲げ変形による曲げモーメント $M(t)$ をうけると考えられる。このとき圧力と曲げモーメントによりそれぞれ電圧 $V_P(t)$ および $V_M(t)$ の合計の電圧が圧電素子の上下の電極面間に発生する。Kenner[6.4]は圧電素子を用いたロードセルに含まれる曲げモーメントの影響を2つの圧電素子を重ねたバイモルフ構造により取り除いている。本研究においてもKennerの方法を応用してFig.6.2.1(b)のように平板の上下面に等しい特性の圧電素子を取り付ける。液体圧力の作用するU側および液体圧力の作用しないL側の圧電素子の出力電圧 V_U および V_L は次式のようなになる。

$$\begin{cases} \text{U側において} & V_U(t) = V_P(t) - V_M(t) \\ \text{L側において} & V_L(t) = V_M(t) \end{cases} \quad (6.2.1)$$

式(6.2.1)のU側およびL側の圧電素子の出力電圧の和を求めることにより液体圧力のみの影響による電圧 V_P が次式のように得られる。

$$V_P(t) = V_U(t) + V_L(t) \quad (6.2.2)$$

6.3 圧電素子の検定

圧電素子に静圧力を負荷すると発生した電荷がリークするために一定の出力を保持させることは必ずしも容易でない。そこで棒の縦衝撃実験[6.5]により圧電素子の厚さ方向に作用する応力と出力電圧の関係を求める。実験装置はFig.6.3.1に示されるようなものである。長さ800mm、直径9mmの軟鋼製の棒Aを自由落下させ、同じ形状の棒Bの上端に衝突させる。棒Bの上端に直径9mm、厚さ1mmのチタン酸ジルコン酸鉛（村田製作所 7D-9-2000）の圧電素子を1個取りつけた。衝撃応力の測定のため棒Bの上端から100mm離れた箇所にひずみゲージ（共和電業 KSP-2-E4）を取りつけた。得られるひずみに縦弾性係数を乗じることにより衝撃応力が求められる。使用した測定系はFig.6.3.2に示されるものである。

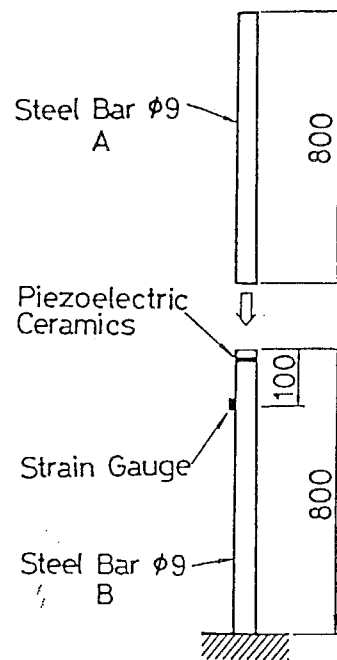


Figure.6.3.1 Experimental Equipment for Longitudinal Impact of Two Bars

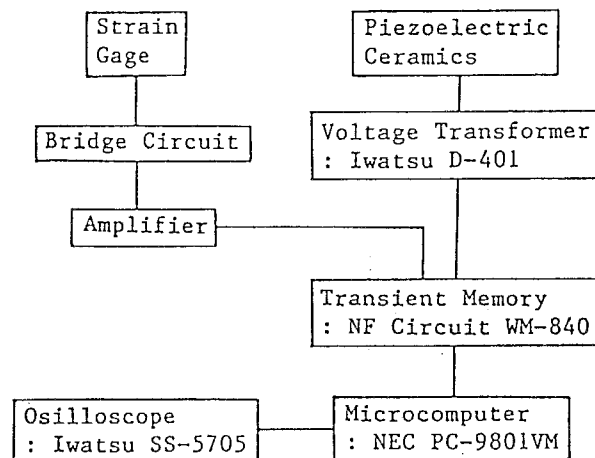
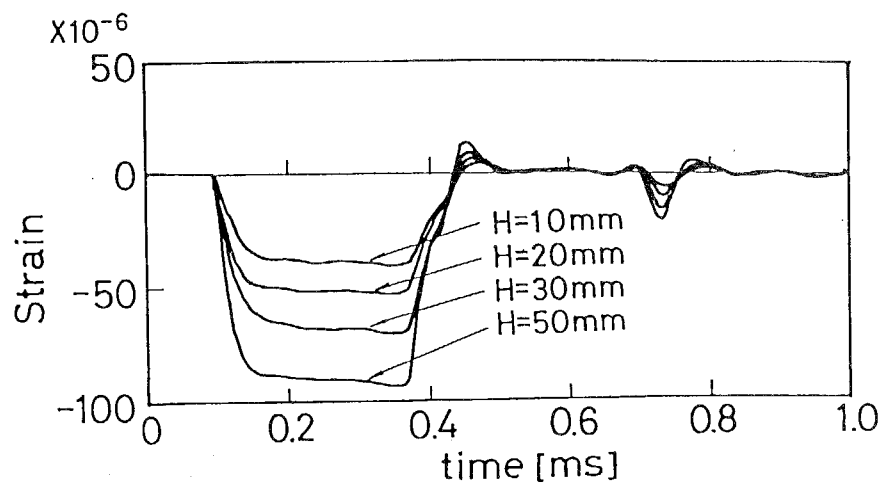
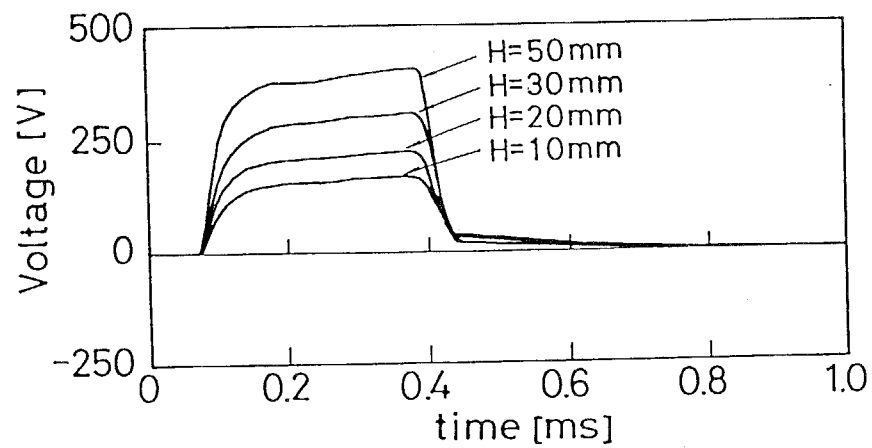


Figure.6.3.2 Measurement System



(a) Strain Histories of Bar B



(b) Histories of Output Voltage from Piezoelectric Transducer

Figure 6.3.3 Experimental Results of Longitudinal Impact

H : Falling Height [m] of Bar A

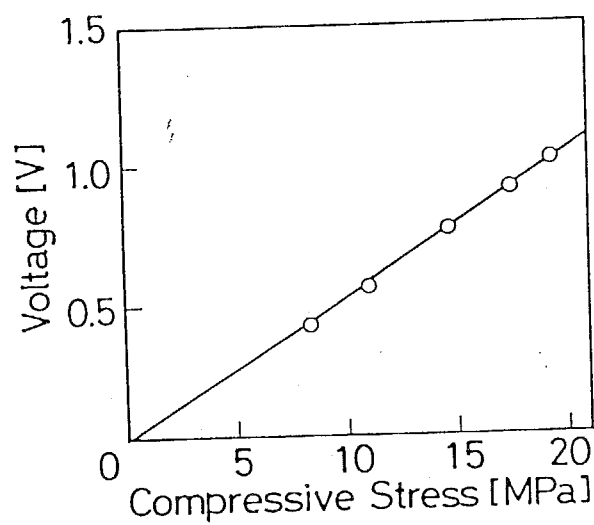


Figure.6.3.4 Relation between Maximum Values of Impulsive Stresses and Output Voltages from piezoelectric ceramics

さまざまな高さから棒Aを落下させ圧電素子の出力電圧を測定した。このときの結果をFig.6.3.3に示す。いずれの高さにおいてもひずみと圧電素子の出力電圧の時間変動はほぼ相似であることがわかる。圧電素子の発生電圧と衝撃応力のそれぞれの時間変化の最大値の関係をFig.6.3.4に示す。Fig.6.3.4の圧電素子の出力電圧は測定系の影響を含んだもので波形記憶装置で計測される数値である。Fig.6.3.4より衝撃応力 $\sigma(t)$ と圧電素子の出力電圧 $V_p(t)$ はほぼ線形関係を示し、最小二乗法により次式が得られた。

$$V_p(t) = K \cdot \sigma(t) \quad (6.3.1)$$

ここで

$$K = 5.23 \times 10^{-8} [\text{V/Pa}]$$

である。

6.4 衝撃圧力発生装置

現在、既知の液体衝撃圧力を薄肉構造に与える方法が見あたらない。そこで薄肉構造に作用する圧力を推定することができ、簡便に安定した圧力波を発生させることが可能な装置を試作した。

動的圧力発生装置はFig.6.4.1に示されるようなものである。装置は液体（本章では水を使用した）で満たされた軟鋼製の短円筒（長さ150mm、内径67mm、肉厚11mm）と自由落下する軟鋼棒から構成されている。短円筒の両端はフランジで固定されている軟鋼製平板AおよびBにより閉じられている。平板AおよびBはさまざまな厚さのものに取り替えられるようになっている。平板Aに軟鋼棒を自由落下させることにより衝撃を加え、平板Aの変形により発生した圧力波が液体内を伝播し平板Bへ作用する。内部の液体がわずかでも外部に流出すると圧力は急激に下がり実験ごとに発生する圧力波が異なり再現性を保つことが困難である。このためフランジ部にはOリングを用いて液体を完全に密閉した。また液体には気泡が混入しないように注意した。この装置において衝突させる棒の落下高さを変えれば平板Aに作用する衝撃力が変化するのて発生する圧力波の大きさを調節することができる。また落下棒の形状を変えれば棒を伝播する応力波の周期が変化するので時間変化の異なる圧力波が得られる。

圧力の測定は平板Bにおいて行った。平板Bの中心より15mm離れた位置に平板の上下に6.2節で使用したのと同じの圧電素子を接着した。圧電素子の取り付け部の詳

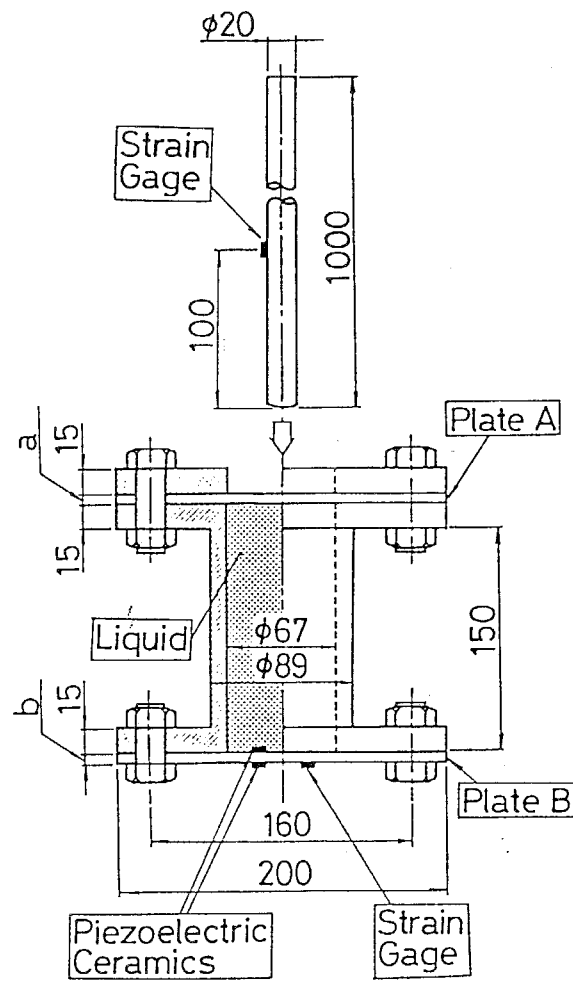


Figure.6.4.1 Generator of Impulsive Pressure

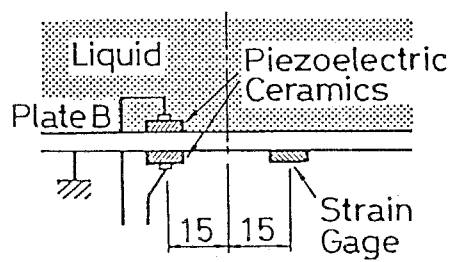


Figure.6.4.2 Detail near Piezoelectric Transducer of Generator

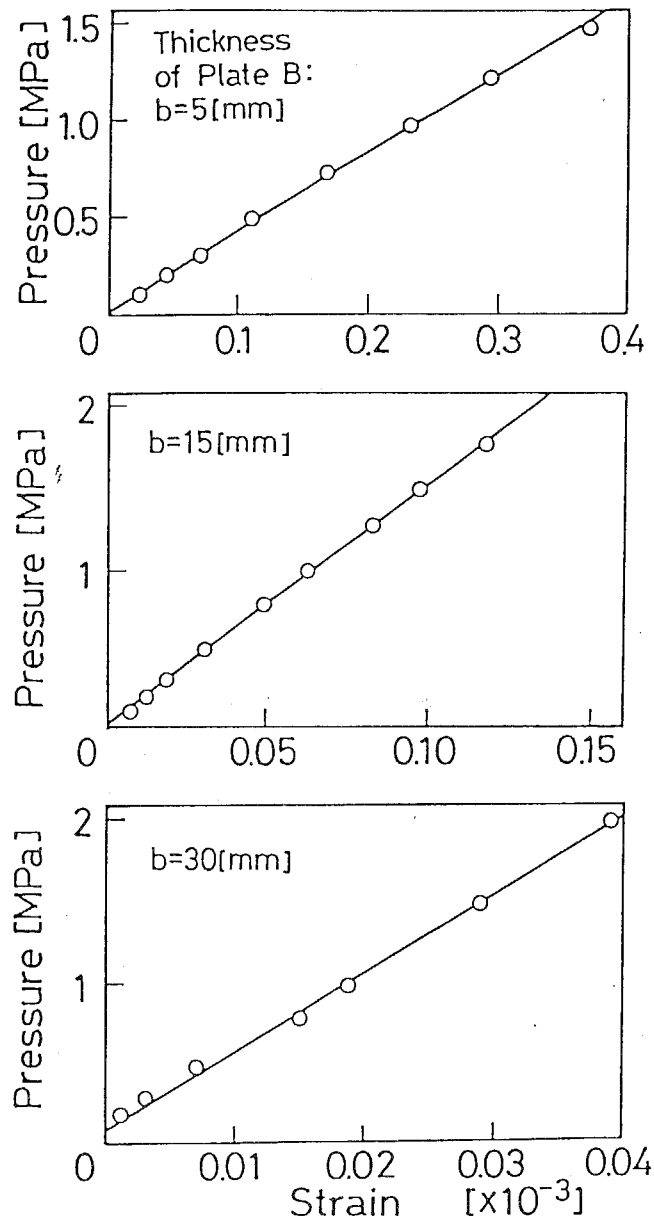


Figure.6.4.3 Relation between Static Pressure and Strain on Plate B

細図をFig.6.4.2に示す。また測定系はFig.6.3.2と同様のものを用いた。

また平板Bは一種の圧力変換器のダイヤフラムと考えられることができるので、平板Bに作用する圧力を平板Bのひずみから推定するものとする。圧電素子と同じ位置関係を保つように平板Bの中心より15mm離れた下面に半径方向のひずみを測定するようにひずみゲージ（共和電業 KFW-2-D16-11）を取り付けた。ひずみと圧力の関係を求めるために円筒の内部の液体に静的に圧力を重錘式圧力計により加えた。加えた圧力は0から2MPa程度までとした。このときの圧力と平板Bのひずみの測定結果をFig.6.4.3に示す。Fig.6.4.3より圧力Pとひずみ ε はほぼ線形関係となり次のような実験式が求められた。

$$P=C \cdot \varepsilon \quad (6.4.1)$$

ここで

平板Bの厚さ $b=5[\text{mm}]$ のとき $C=4.01[\text{GPa}]$

$b=15[\text{mm}]$ のとき $C=16.2[\text{GPa}]$

$b=30[\text{mm}]$ のとき $C=56.5[\text{GPa}]$

である。

6.5 実験結果と考察

平板AおよびBの厚さを5mmとしたときの衝撃圧力の測定を行った。衝突棒の落下高さを300mmとした場合の平板Bの上下に取り付けられた圧電素子の出力電圧はFig.6.5.1であり、圧力の作用する側と作用しない側に差があることがわかる。曲げによる影響を除去するために2つの電圧の和を求めた後、式(6.3.1)により圧力に換算した結果、また比較のため平板Bのひずみから式(6.4.1)により求めた発生圧力をFig.6.5.2に示す。Fig.6.5.2の2つのグラフを比較したところほぼ一致した結果が得られており本計測法が有効であることを示している。

次に平板AおよびBの厚さを10mmおよび30mmとして平板Bが厚い場合について、圧電素子およびひずみゲージから得られた圧力波形をFig.6.5.3に示す。このときの衝突棒の高さは300mmである。この2つの圧力波形はかなり異なっている。これは次のような原因と考えられる。平板Bの厚さが厚くなるにつれ、平板Bにおいて曲げ変形よりも、容器内を伝わり平板Bに伝播する応力波により面内方向の引張、圧縮変形が

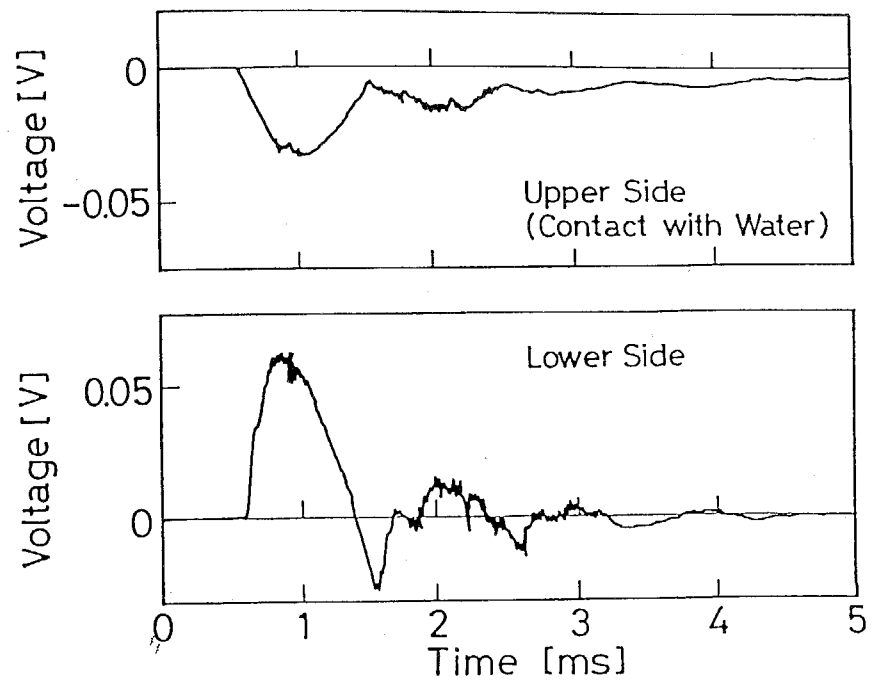


Figure.6.5.1 Output Voltage from Piezoelectric Ceramics
 Thickness : Plate A 5[mm], Plate B 5[mm]
 Falling Height of Bar :300[mm]

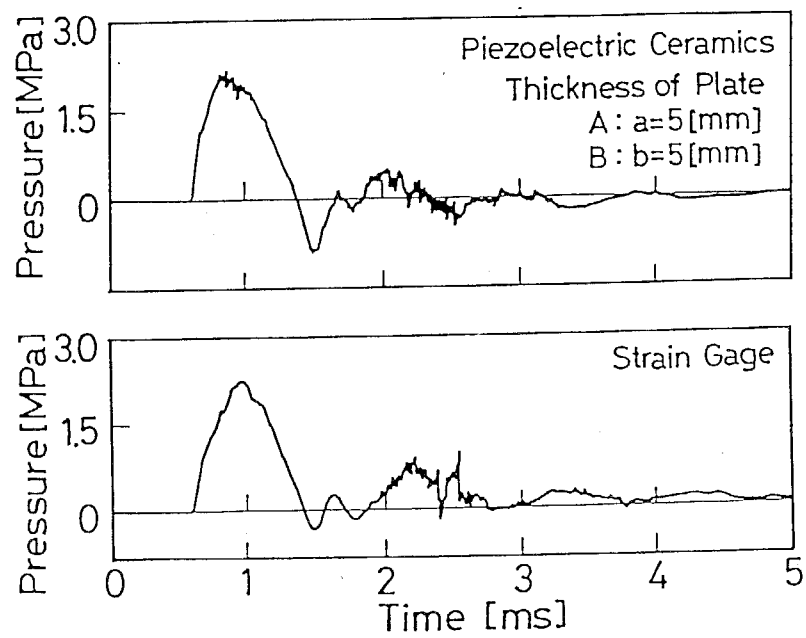


Figure.6.5.2 Impulsive Pressure Histories
 Thickness : Plate A 5[mm], Plate B 5[mm],
 Falling Height of Bar : 300[mm]

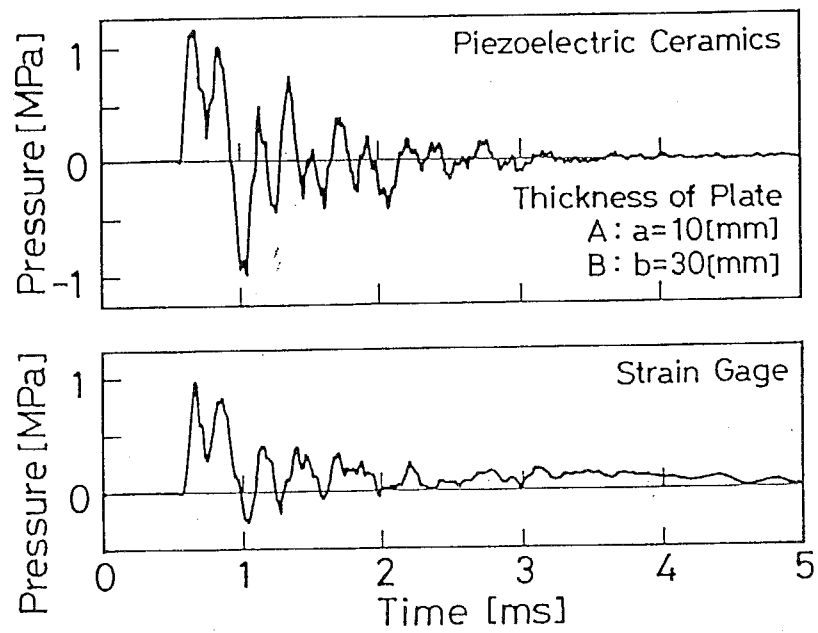


Figure.6.5.3 Impulsive Pressure Histories
Thickness : Plate A 10[mm], Plate B 30[mm]
Falling Height of Bar : 300[mm]

支配的となる。このため平板の変形による上下面の圧電素子の電圧が同位相となる成分が相対的に大きくなり、2つの電圧の和がむしろ板の変形を強調する結果となっている。よって板厚が薄くほぼ曲げ変形のみを示す場合には本方法は有効であると考えられる。

6.6 結言

本研究では連成振動する薄肉構造に作用する衝撃圧力を圧電素子により計測することを試みた。片側に液体圧力が作用し液体と連成振動する平板の両面に取り付けた圧電素子の出力電圧の和をとることにより平板の曲げ変形の影響を分離し液体圧力が計測できることを示した。ただし平板が厚く面内変形が大きいとき困難なことがあることがわかった。

参考文献

- [6.1] 日本機械学会編：機械工学便覧 A-3, 日本機械学会, p.121-141.
- [6.2] 日本機械学会編：技術資料 流体計測法、(1985), 日本機械学会, p.49-66.
- [6.3] 文献[6.2]のp.15-16.
- [6.4] Kenner V.H. : On the Use of Quartz Crystals in Dynamic Stress and Force Transducers, Experimental Mechanics, Vol.15, No.3(1975), p.102-106.
- [6.5] 松本浩之、宮川豊美、宇治橋貞幸、中原一郎：圧電素子による衝撃荷重の測定法（パルス幅の短い場合）、非破壊検査, No.33, No.8(1984), p.576-581.

第7章 結論

7.1 各章の総括

本論文において得られた結果をまとめると以下ようになる。

第2章においてラプラス変換公式を離散フーリエ変換型に変換して計算するKrings-Wallerの方法および逆変換の定義式中の指数関数を近似して積分路を変更する細野の方法についての有効性および最適な使用法を考察した。この結果、2つの方法とも適切にパラメータを選択すれば良好な精度を有する数値結果を得ることができることが明らかになった。それぞれの方法の特徴をまとめると次のようになる。

(2.1) Krings-Wallerの方法は時系列データの処理に優れている。またこの方法は順変換および逆変換を行うことが可能であることから、理論あるいは数値解析に実験解析のデータを結合して使用することも可能となる。ただし多くの計算機の容量を必要とすることに注意する必要がある。

(2.2) 細野の方法は任意の一点の時間における精度のよい数値結果を得るのに有効な方法である。特にほとんど計算機の容量を必要としないために、応力分布などを求めるときのように他の箇所で大きな計算機の容量を必要とする場合には最適な手法である。

よって、ラプラス変換法により求められる解析解をこれらの数値逆変換法を用いれば容易に精度のよい数値結果を得られることがわかった。

第3章において水撃をうける液体で満たされた半無限長および有限長の円筒殻の衝撃応答を解析し、Joukowski理論の妥当性および円筒の応答に及ぼす連成効果を明らかにした。得られた結果をまとめると次のようになる。

(3.1) 円筒がかなり長い場合、円筒の慣性効果を見捨て連成効果を近似的に考慮したJoukowski理論による結果は連成理論による結果とほぼ一致する。円筒の肉厚が厚いほどJoukowski理論の結果はより連成理論の結果に近づく。しかし円筒の応力波の波頭付近では連成効果の影響が大きくなり、Joukowski理論より大きな値を示す。

- (3.2) 円筒が短い場合、Joukowsky理論の結果はあまり正確な結果を得ることができない。円筒の長さが短くなるにつれて円筒の応答に及ぼす動的な連成効果の影響が大きくなる。
- (3.3) 円筒の慣性効果のみを考慮した非連成理論の結果は、円筒の長さにかかわらず連成理論による結果と異なる。Joukowsky理論による結果は実験結果と比較してほぼ妥当である。非連成理論によれば円筒殻の半径方向の自由振動の影響が過大に助長された結果が得られるので注意を要する。
- (3.4) 本問題において円筒と液体の連成効果は円筒の振動を抑制するように作用することがわかった。また液体に比較して円筒の剛性が小さい場合に、連成効果が大きく影響することが明らかになった。
- (3.5) Joukowsky理論は圧力波形に高周波成分の振動が少ない場合、充分に実用に供することができる。

第4章では横荷重が作用する液体で満たされた円筒の衝撃応答を解析し、応答に及ぼす連成効果を考察した。円筒と液体との波動の連成効果が顕著に現れる場合として、円筒の軸線が移動しないような外力条件を解析の対象とした。得られた結果をまとめる次のようになる。

- (4.1) 円筒と液体との連成効果は、応力波と圧力波の速度比を示す α および液体と円筒の弾性係数と肉厚比で示される β の2つの無次元量により表せる。パラメータ β が応答に及ぼす連成効果を明確に示すことがわかった。 β の値が1程度のオーダーのときには円筒と液体との連成効果を考慮する必要があり、 β の値が大きい場合には液体の挙動が支配的になり、小さい場合にはほぼ円筒単体の挙動を示す。したがって円筒の弾性係数が相対的に小さい場合あるいは肉厚が薄い場合には液体の影響が顕著になる。なおパラメータ α の値が変化したときも連成効果に変化が見られるが、 β ほど現象との対応を明確ではない。
- (4.2) 荷重の分布領域が広がると、液体との連成効果の影響が大きくなる。また荷重の分布領域が狭くなると、円筒の振動を抑制する傾向が強くなる。
- (4.3) 円筒の軸方向に伝播する波動の速度は第3章で示されたようにJoukowsky理論による伝播速度にほぼ一致する。

第5章では飛翔体が液体と接する平板に衝突する場合の衝撃応答を理論および実験

により解析した。衝撃荷重の作用時間が短い場合として鋼球が衝突する場合、作用時間が長い場合として軟鋼棒が衝突する場合の2種類の条件について、平板の衝撃応答に及ぼす液体の連成効果について考察を行った。得られた結果をまとめると次のようになる。

- (5.1) 液体に接した平板に飛翔体が衝突する問題を平板に対してはMindlin理論、液体に対してはポテンシャル理論および衝突に対してはHertz理論を適用して解析を行った。ひずみゲージを用いて実験を行い解析結果が妥当であることを確認した。
- (5.2) 液体の存在によって衝撃荷重の最大値が大きくなり、最大値が現れる時間が遅くなることがわかった。鋼球が衝突する場合、液体の有無にかかわらず鋼球の大きさが大きくなるにつれ衝撃荷重の作用時間が長くなり、液体と接する場合と接しない場合との荷重の差が時間とともに大きくなる。さらに軟鋼棒が衝突する場合は、さらに荷重の作用時間が長くなり液体と接しない場合の荷重の大きさとの差が大きくなる。いずれの飛翔体とも衝撃速度と荷重の大きさが比例する。
- (5.3) 平板のひずみは液体の存在によって最大値が大きくなり、最大値が現れる時間が遅くなる。また平板単体のひずみと液体と接する場合の平板のひずみの差が時間とともに大きくなり、荷重の作用時間が長くなるにつれて大きい。また平板のひずみ変動に見られる周辺からの反射波の影響が生じる時間が遅くなることがわかった。

第6章では連成振動する薄肉構造に作用する衝撃圧力を圧電素子により計測することを試みた。片側に液体圧力が作用し液体と連成振動する平板の両面に取り付けた圧電素子の出力電圧の和をとることにより平板の曲げ変形の影響を分離し液体圧力が計測できることを示した。ただし平板が厚く面内変形が大きいとき困難なことがあることがわかった。

本論文では緒論に示されたように次の3つの目的に従って研究が行われた。

- (a) 数値ラプラス変換法の選択と使用方法の検討
- (b) 薄肉構造の応答に及ぼす液体の連成効果の影響
- (c) 薄肉構造に作用する衝撃圧力の計測方法の検討

そこで各章から得られた結果を整理すれば、それぞれの目的に対して次のようなことが総括として本論文を結論づけることができる。

(a) 数値ラプラス変換法の選択と使用方法の検討

ラプラス変換法に基づいた理論的解析法と本論文で考察したKrings-Wallerあるいは細野の方法による逆変換を用いれば、精度の良い数値結果を容易に得られることがわかった。特に連成問題のような複雑な解析では有効なことがわかった。Krings-Wallerの方法では時系列データ、細野の方法では任意の一点の時間応答を求めるのに現状では最適である。

Krings-Wallerの方法に代表される離散フーリエ変換型の変換法では順変換および逆変換を数値的に行うことが可能であり、時系列データを取り扱う場合に最適である。この方法では解析の数値結果を容易に得るのに使用されるだけでなく、次のような分野にも適用が可能である。

- a) 有限要素法[7.1]、境界要素法[7.2]-[7.5]、差分法あるいはマトリックス法[7.6][7.7]などの数値解法への適用できる
- b) 実験データあるいは別の解析で得られた時系列データを境界条件あるいは外力条件として解析を行うことができる[7.8][7.9]
- c) 実験解析の場合、ラプラス変換における伝達関数を数値的に求め衝撃荷重を算出することができる[7.10]-[7.14] また他の荷重が作用する場合の構造の応答を推定することが可能である[7.15]
- d) さらに構造あるいは材料の同一衝撃荷重下における応答（例えばコンプライアンス応答：ステップ荷重が作用したときの応答）の変化により損傷を評価することができる[7.16][7.17]

上記以外にもさらに適用範囲が拡大されつつあり、今後有望な手法である。

(b) 構造の応答に及ぼす液体の連成効果の影響

本研究で対象とした円筒と内部の液体では、円筒の形状を考慮した剛性と液体の弾性率を含む無次元パラメータにより連成効果を分類することができた。相対的に円筒の剛性が低ければ液体の挙動に支配され、円筒の剛性が高ければ円筒単体の挙動を示す。ほぼ円筒の剛性と液体の弾性率がほぼ同程度の場合は連成効果が顕著に現れることから、具体的な構造では有限要素法などの詳細な解析が必要となる。1.3節で提示

したように連成効果の物理的説明として、a) 液体と構造の力学的インピーダンスの差による波動の透過と反射およびb) 構造の変形による液体の体積膨張の2つを予想した。よって、得られたパラメータはa) およびb) の効果の相互作用を示すものと考えられる。本論文で得られた連成効果を分類する無次元パラメータ β は円筒状の構造と内部液体に関するもので、構造の形状が異なる場合には別のパラメータが得られる。例えば液体に接する平板では板厚と平板および液体の密度比が連成効果を明らかに示すことが明らかにされている[7.18]。

また液体で満たされた円筒の波動速度は静的な円筒の変形を考慮したJoukowsky理論による速度でほぼ近似することが可能である。ただし大きさは小さいが円筒の弾性波速度で伝播する先行波(Precursor Wave)が存在する。さらに液体と接する構造の衝突問題では液体により構造の見掛けの剛性が高くなるために、液体が存在しない場合に比較して衝撃荷重が大きくなることに注意する必要がある。

(c) 薄肉構造に作用する衝撃圧力の計測方法の検討

本研究で提案した圧電素子を利用した薄肉構造に作用する衝撃圧力の計測方法は有効な方法であると考えられる。特に薄肉構造が多く使用されつつあることを考えると各種の変換器の取り付けによる影響は十分に考慮される必要があるものである。また圧電素子はセンサーだけでなくアクチュエータとして使用することが可能であるために、その様々な適用を考えることは意義のあることと考える。

7.2 今後の課題

本論文では液体と接する基本構造である液体で満たされた円筒の衝撃問題を主に取り扱った。それぞれの実際の構造などでは数値解析などにより研究がなされている。常に連成効果を考慮して数値解析することは、計算時間が著しく増大し無意味な費用をかけることになる。従って、まず他の基本構造である球殻、箱型などの場合の連成問題を解析し、連成効果を分類することが可能な無次元パラメータを明らかにし、連成効果を考慮するかどうかを判定する基準を明確にする必要があるように思われる。また流体関連の計測を行う場合には、測定対象である流体の影響を考慮しておく必要がある。著者[7.18][7.19]により指摘されているようにダイヤフラム式の圧力変換器では液体の影響により動特性が低下することが指摘されている。このように測定法など

の重要な液体との連成効果の考察が放置されたままである。今後それぞれの実際の問題に対して、定量的に連成効果を論じる必要があると思われる。

材料力学あるいは構造力学は医学、電気電子工学をはじめとする他の分野との境界領域の問題がますます重要となると思われる。特に新しい材料および構造体の概念として発表された知的材料 (Intelligent Material and Structure あるいは Smart Material and Structure と呼ばれることもある) [7.20][7.21]では、構造自身が計測および制御機能を有することから、各種の連成効果を積極的に利用しようとする試みが行われるであろうと思われる。このため構造との連成効果がどのように生じるかを詳細に考察する必要が生じることになる。そこで定性的あるいは定量的な評価の容易な理論解析の重要性が高まり、本論文で適用された解析方法は有効になると思われる。

参考文献

- [7.1] Miya K., Uesaka M., Moon F.C. : Finite Element Analysis of Vibration of Toroidal Field Coils Coupled with Laplace Transform, Journal of Applied Mechanics, Vol.49(1982), p.594-600.
- [7.2] 松本浩之、足立忠晴、角濱義隆、福澤敬一：二次元境界要素法による動的応力集中係数の解析，日本機械学会論文集（A編），Vol.54, No.501(1988), P.1024-1029.
- [7.3] 松本浩之、足立忠晴、吉田節男、宇治橋貞幸、：三次元境界要素法による動的応力集中係数の解析法，日本機械学会論文集（A編），Vol.55, No.514(1989), P.1400-1406.
- [7.4] Adachi T., Satoh K., Ujihashi S., Matsumoto H., Kitagawa K. : Boundary Element Analysis of Plates Subjected to Static and Impulsive Load, Advances in Boundary Elements Methods in JAPAN and USA, Topics in Engineering, Vol.7(1990), p.153-165, Computer Mechanics Publications.
- [7.5] 足立忠晴、河村正孝、宇治橋貞幸、松本浩之：部分積分法による動的境界要素解析の精度向上，日本機械学会論文集（A編），Vol.57, No.536(1991), P.946-953.
- [7.6] 足立忠晴、波多野啓二、宇治橋貞幸、松本浩之：数値ラプラス変換を利用した

- マトリックス法による骨組構造の衝撃応答解析（第1報、真直棒要素で構成される構造の衝撃応答），日本機械学会論文集（A編），Vol.56, No.524(1990), P.917-923.
- [7.7] 中山勝巳、松本浩之、足立忠晴、宇治橋貞幸：数値ラプラス変換を利用したマトリックス法による骨組構造の衝撃応答解析（第2報 部分構造剛性法による解析の効率化），日本機械学会材料力学講演会講演論文集（Vol.A），No.910-71(1991), p.322-324.
- [7.8] 宇治橋貞幸、足立忠晴、井上裕嗣、松本浩之：鋼球の衝突により硝子板に生じる衝撃応力の解析，日本機械学会論文集（A編），Vol.51, No.467(1986), P.525-532.
- [7.9] Ujihashi S., Adachi T., Matsumoto H. : A Circular Plate Floating on a Fluid Subjected to Normal Impact by a Flying Object, Impact Loading and Dynamic Behaviour of Materials (Ed. by C.Y.Chen, H.-D.Kunze, L.W.Meyer), Vol.2(1988), p.913-920, Informationsgesellschaft Verlag.
- [7.10] 井上裕嗣、渡辺隆一、渋谷寿一、小泉堯：逆たたみ込み法による衝撃力の測定、非破壊検査, Vol.37, No.4(1988), p.337-342.
- [7.11] 井上裕嗣、渋谷寿一、小泉堯、福地淳一：逆たたみ込み法による平板の衝撃力測定、非破壊検査, Vol.37, No.11(1988), p.874-878.
- [7.12] 井上裕嗣、渋谷寿一、小泉堯、岸本喜久雄：計装化衝撃試験における衝撃荷重の測定、非破壊検査, Vol.39, No.5(1990), p.390-395.
- [7.13] 井上裕嗣、石田宏之、岸本喜久雄、渋谷寿一：逆解析手法を用いた衝撃荷重の測定（伝達関数の推定法の比較検討と計装化シャルピー衝撃試験への応用）、日本機械学会論文集（A編），57巻534号(1991), p.424-429.
- [7.14] 井上裕嗣、岸本喜久雄、渋谷寿一、小泉堯：逆解析による衝撃荷重の推定（逆解析のための最適伝達関数）、日本機械学会論文集（A編），57巻543号(1991), p.2727-2734.
- [7.15] 季庸恵、渡辺純一、足立忠晴、宇治橋貞幸、松本浩之：骨組構造のひずみ応答に及ぼす締結部の影響，応力・ひずみシンポジウム講演論文集（第24回），（1992），p.19-24.
- [7.16] 足立忠晴、坂上啓、宇治橋貞幸、松本浩之：コンプライアンス応答によるCF

R P 積層板の衝撃損傷解析, 非破壊検査, Vol. 40, No. 3(1991), p. 165-170.

[7.17] 足立忠晴、坂上啓、宇治橋貞幸、松本浩之：繰り返し衝撃をうけるCFRP積層板の損傷評価、日本機械学会論文集（A編），Vol. 57, No. 535(1991), p. 569-575.

[7.18] 足立忠晴：5.2 ひずみゲージ式圧力変換器の動特性の理論的評価、非破壊評価の標準化に関する調査研究 平成3年度調査報告, (1992), p. 64-74, 日本非破壊検査協会.

[7.19] 足立忠晴：7.4 圧力変換器単体の動特性、非破壊評価の標準化に関する調査研究 平成2年度調査報告, (1991), p. 135-147, 日本非破壊検査協会.

[7.20] 江川幸一：知的材料とは何か（1） 日本非破壊検査協会 第1回007特別研究委員会資料, (1991)

[7.21] 江川幸一：知的材料とは何か（2） 日本非破壊検査協会 第2回007特別研究委員会資料, (1991)

付録A 完全流体に関する基礎方程式の導出

A.1 緒言

流体の現象を解析する場合、Navier-Stokesの非線形方程式を直接解くことは極めて困難である。このため実際の現象の考察から様々な近似に基づいて非線形方程式を線形化して解析される。液体貯槽などのスロッシング、バルジング問題のように液体の流動圧が構造の挙動に大きく影響する場合は液体を非圧縮性体として取り扱い、圧力波の伝播の効果を無視するのが通常である。これに対して本論文が対象とするような連成問題では圧力波の伝播による効果が大きく液体の圧縮性を考慮する必要がある。また、この種の問題では液体の流動の速度に比較して圧力波の伝播速度はかなり大きいことが一般的であり、液体粒子の速度をほとんど無視することが可能と考えられる。本論文において液体粒子は微小振動するものとして仮定し、粘性の効果が無い完全流体を対象とする。このような場合に対して連続の式およびEulerの運動方程式を線形化する。さらに速度ポテンシャルを用いて波動方程式を導出する。

A.2 連続の方程式

Fig. a.1のように流体中に閉曲面Sで囲まれる微小要素Vを考える。この微小要素V中に湧き出しや吸い込みがないものとする。密度 ρ_f の流体が速度 $\mathbf{v} = v_{fi}$ ($i=1, 2, 3$)で流出するとき、質量保存則から微小要素V内の質量変化は閉曲面Sを通過する流体の質量に等しくなることから次式が成立する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_f dV + \int_A \rho_f v_{fi} dA_i = 0 \quad (\text{a.1})$$

ここで dA_i は外向き法線ベクトルで示される面積要素である。

式(a.1)にGaussの定理

$$\int_V \text{div}(\rho_f v_{fi}) dV = \int_S \rho_f v_{fi} ds_i$$

を適用すれば次の連続の方程式が求められる。

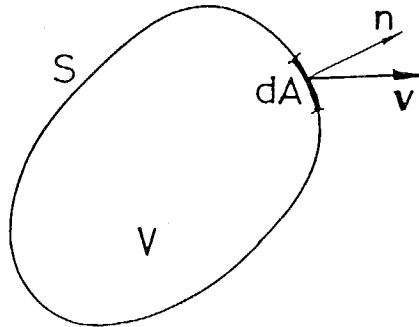


Figure a.1 Infinitesimal Element of Fluid

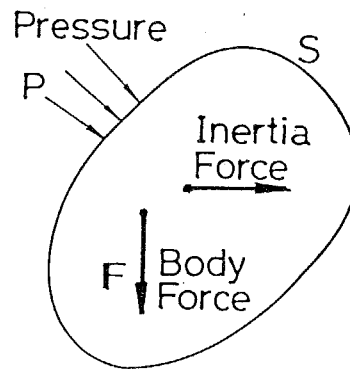


Figure a.2 Equilibrium of Forces in Perfect Fluid

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \text{div}(\rho_f \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{a.2})$$

A.3 運動方程式

Fig. a.2のように運動している完全流体の閉曲面S上に圧力Pが内向き法線方向に作用しているとき、次の平衡方程式が得られる。

$$\int_V \left(F_i - \frac{Dv_i}{Dt} \right) \rho_f dV - \int_S P ds_i = 0 \quad (\text{a.3})$$

ここで

$$\frac{Df_i}{Dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) f_i$$

であり、また F_i 、 ρ_f は流体に作用する慣性力以外の単位体積当りの体積力を示す。

式(a.3)の面積分を体積積分に書き換えることにより次式の完全流体に関するEulerの運動方程式が求められる。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho_f} \text{grad}(P) \quad (\text{a.4})$$

A.4 速度ポテンシャルによる波動方程式

流体の粒子の運動が微小であるとし密度および圧力の相対的な変化 $\Delta \rho_f$ および ΔP が小さいとすれば、式(a.2)および(a.4)の密度および圧力の2次の微小量を無視することができ、それぞれの次のように求められる。

$$\frac{\partial(\Delta \rho_f)}{\partial t} + \rho_f \text{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (\text{a.5})$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_f} \text{grad}(\Delta P) = 0 \quad (\text{a.6})$$

ここで体積力Fは無視されている。

完全流体中においては音波は断熱的に伝播するとすれば

$$\Delta P = \left\{ \frac{\partial (P + \Delta P)}{\partial (\rho_f)} \right\}_s (\rho_f + \Delta \rho_f) \quad (a.7)$$

が成立する。ここで添字 s は等エントロピー変化を示す。

速度ポテンシャルを次式のように定義する。

$$v = \text{grad}(\phi) \quad (a.8)$$

式(a.8)を式(a.6)に代入すれば次の圧力と速度ポテンシャルの関係が求められる。

$$P = -\rho_f \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (a.9)$$

式(a.7)および式(a.9)を式(a.5)に代入すれば次の波動方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - C_f^2 \text{div} \{ \text{grad}(\phi) \} = 0 \quad (a.10)$$

ここで

$$C_f^2 = \left\{ \frac{\partial (P + \Delta P)}{\partial (\rho_f)} \right\}_s$$

である。

流体の体積弾性率 K は次の式により定義される。

$$K = \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial (P + \Delta P)}{\partial (\rho_f)} \quad (a.11)$$

式(a.11)を式(a.10)に代入すれば

$$C_f^2 = K / \rho_f \quad (a.12)$$

となる。

参考文献

- [a.1] Landau L.D. and Lifshitz E.M. : Fluid Mechanics, Pergamon, (1960).
- [a.2] 日野幹雄 : 流体力学, 朝倉書店, (1985).
- [a.3] 富田幸雄 : 流体力学序説, 養賢堂, (1983).

付録B 平板に関する基礎方程式の導出

B.1 緒言

平板の曲げ理論は、はりの曲げ理論と同様に次のKirchhoff-Loveの仮定[b.1]に基づいている。

- (1) 変形前に中央平面に垂直であった平面は変形後も平面である。
- (2) 変形前に中央平面に垂直であった平面は変形後も中央面に垂直である。

これらの仮定に基づいて導出されたものが Kirchhoff理論と呼ばれるものである。Kirchhoff理論から得られる平板のたわみに関する基礎方程式[b.2]は重ポアソン形となり数学的取り扱いの容易さからしばしば使用されている。振動する平板の曲げ問題に対しては、たわみ方向の並進慣性力を考慮した式[b.3]が多く用いられている。この理論はLagrange理論と通常呼ばれる。以上のような仮定に基づく面外せん断変形を考慮しない理論は古典理論と呼ばれる。これに対して仮定(2)を無視した平板の面外せん断変形の考慮した理論は修正理論と呼ばれている。その代表的なものとしてMindlin理論[b.4]がある。Mindlin理論では、せん断変形および並進慣性力以外に回転慣性力が考慮されている。以下においてLagrange理論およびMindlin理論に基づいた基礎方程式の導出を行う。

B.2 平衡方程式

Fig.b.1に示される板厚 h の平板の微小要素を考える。Fig.b.1の極座標系 (r, θ, z) に対する応力の平衡方程式は次式で与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + X_r = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + X_\theta = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + X_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (b.1)$$

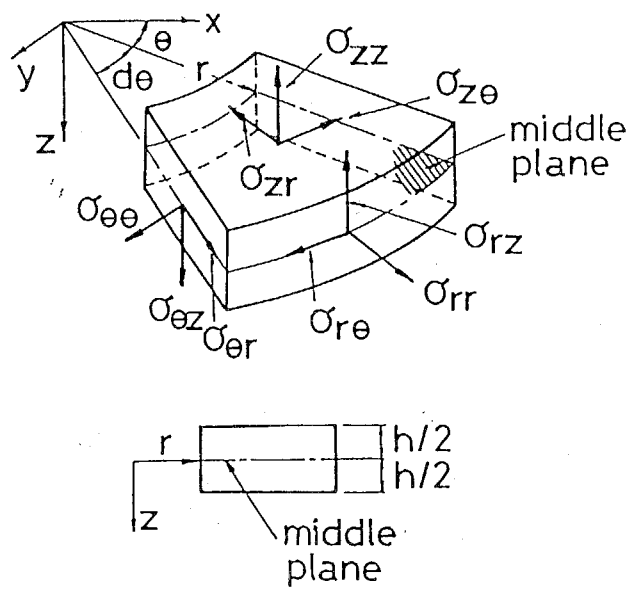


Figure b.1 Equilibrium of Stresses in a Plate

ここで u_r , u_θ および w は r , θ および z 方向の変位を示し、 X_r , X_θ および X_z は r , θ および z 方向の単位体積当りの体積力成分を示す。また ρ および t は密度および時間を示す。

式(b.1)の両辺を z 方向に $h/2$ から $-h/2$ まで積分する。

$$\begin{cases} \frac{\partial N_{rr}}{\partial r} + \frac{N_{rr} - N_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial \theta} + p_r = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} dz \\ \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2N_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + p_\theta = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} dz \\ \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{Q_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + p_z = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz \end{cases} \quad (b.2)$$

ここでそれぞれの式の右辺の項は並進慣性を表す。 N_{rr} , $N_{\theta\theta}$ は面内力であり、 $N_{r\theta}$ は面内せん断応力、 Q_r および Q_θ は面外せん断力を示す。それぞれの単位は単位長さ当りの力である。 p_r , p_θ および p_z は x , θ , z 方向の単位面積あたりの外力である。これらは次式で定義される (Fig. b.2 参照)。

$$\begin{aligned} N_{rr} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr} dz, & N_{\theta\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta} dz, & N_{r\theta} &= N_{\theta r} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\theta} dz \\ Q_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rz} dz, & Q_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta z} dz \\ p_r &= [\sigma_{zr}]_{-h/2}^{h/2} + \int_{-h/2}^{h/2} X_r dz, & p_\theta &= [\sigma_{z\theta}]_{-h/2}^{h/2} + \int_{-h/2}^{h/2} X_\theta dz \\ p_z &= [\sigma_{zz}]_{-h/2}^{h/2} + \int_{-h/2}^{h/2} X_z dz \end{aligned}$$

式(b.1)の第1、2式の両辺に z を乗じ、 z 方向に $h/2$ から $-h/2$ まで積分する。

$$\begin{cases} \frac{\partial M_{rr}}{\partial r} + \frac{M_{rr}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{M_{\theta\theta}}{r} - Q_r + m_r = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} z dz \\ \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2M_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - Q_\theta + m_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} z dz \end{cases} \quad (b.3)$$

ここでそれぞれの式の右辺の項は回転慣性を表す。 M_{rr} , $M_{\theta\theta}$ は曲げモーメントであり、 $M_{r\theta}$, $M_{\theta r}$ およびはねじりモーメントを示す。また m_r , m_θ は単位面積あたりの外部モーメントを示す。これらは次式で定義される (Fig. b.2 参照)。

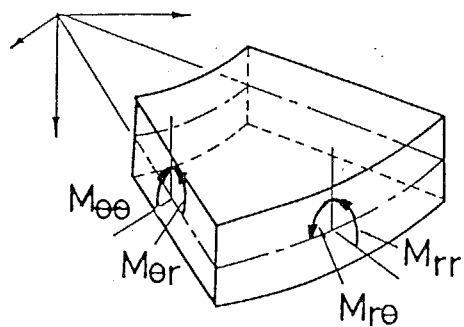
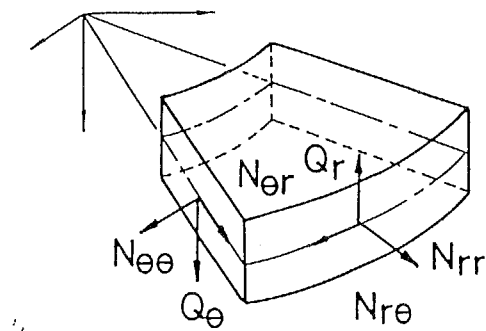


Figure b.2 Equilibrium of Stress Resultants in a Plate

$$M_{rr} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr} z dz, \quad M_{\theta\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta} z dz, \quad M_{r\theta} = M_{\theta r} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\theta} z dz$$

$$m_r = [\sigma_{rz} z]_{-h/2}^{h/2} + \int_{-h/2}^{h/2} X_r z dz, \quad m_\theta = [\sigma_{\theta z} z]_{-h/2}^{h/2} + \int_{-h/2}^{h/2} X_\theta z dz$$

式(b.2)の第1および2式は面内方向の引張変形に関する平衡方程式である。ここでは平板の曲げ変形のみを対象とするため式(b.2)の第3式および式(b.3)で示される曲げ変形に関する平衡方程式のみを取り扱う。

B.3 構成方程式

平板が曲げ変形のみをするとし中央面が伸び縮みせず、板厚方向にひずみがないとすれば、それぞれの変位成分は次のように表される。

$$u_r = \phi_r z, \quad u_\theta = \phi_\theta z, \quad w = W \quad (b.4)$$

ここでW, ϕ_r および ϕ_θ は平板の中央面のz方向の変位およびr方向、 θ 方向の断面の傾き角である。

式(b.4)より、それぞれのひずみ成分は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = z \frac{\partial \phi_r}{\partial r}, & \varepsilon_{r\theta} = z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} - \frac{\phi_\theta}{r} \right), & \varepsilon_{\theta\theta} = z \left(\frac{\phi_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \varepsilon_{zr} = \phi_r + \frac{\partial W}{\partial r}, & \varepsilon_{z\theta} = \phi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \end{cases} \quad (b.5)$$

式(b.5)を応力-ひずみ関係式に代入した後に式(b.2)および(b.3)のただし書きで示される合応力成分に代入すればMindlin理論における構成方程式が次のように求められる。

$$\begin{cases} Q_r = k^2 G h \left(\phi_r + \frac{\partial W}{\partial r} \right), & Q_\theta = k^2 G h \left(\phi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right), \\ M_{rr} = D \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \phi_r + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} \right), & M_{r\theta} = \frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} - \frac{\phi_\theta}{r} \right), \\ M_{\theta\theta} = D \left(\nu \frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{\phi_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} \right) \end{cases} \quad (b.6)$$

ここでDは板の曲げ剛性を示し、

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

であり、そして κ^2 はせん断応力分布定数であり、面外せん断力に対して Timoshenko のはり理論の場合と同様な修正係数である。

平板が面外変形しないとすれば断面の傾き角はたわみ角に一致することから

$$\phi_r = -\frac{\partial W}{\partial r}, \quad \phi_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \quad (b.7)$$

が成り立つ。

式 (b.7) を式 (b.6) に代入すれば Lagrange 理論における構成方程式が求められる。

$$\begin{cases} M_{rr} = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right), & M_{r\theta} = -\frac{1-\nu}{2} D \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \\ M_{\theta\theta} = -D \left(\nu \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \end{cases} \quad (b.8)$$

ここで Lagrange 理論では面外せん断力 Q_r , Q_θ が無視されることから構成方程式は存在せず、平衡方程式より求められる。

B.4 変位の方程式

式 (b.6) に式 (b.2) の第 3 式および式 (b.3) を代入すれば Mindlin 理論の変位の方程式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{D}{2} \left\{ (1-\nu) \left(\nabla^2 \phi_r - \frac{\phi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} \right) + (1+\nu) \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\} - \kappa^2 Gh \left(\phi_r + \frac{\partial W}{\partial r} \right) = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial t^2} \\ \frac{D}{2} \left\{ (1-\nu) \left(\nabla^2 \phi_\theta - \frac{\phi_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1+\nu}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right\} - \kappa^2 Gh \left(\phi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial t^2} \\ \left(\nabla^2 - \frac{\rho}{\kappa^2 Gh} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(D \nabla^2 - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) W + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \left(1 - \frac{D}{\kappa^2 Gh} \nabla^2 + \frac{\rho h^2}{12 \kappa^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p_z \end{cases} \quad (b.9)$$

ここで

$$\phi = \frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{\phi_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

である。

面外せん断変形を考慮しない場合は面外せん断力 Q_r , Q_θ が構成方程式として存在していないことから式 (b.3) を式 (b.2) の第3式に代入し Q_r , Q_θ を消去した後、式 (b.8) を代入すれば次式が求められる。

$$\left(D \nabla^2 - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \nabla^2 W + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = p_z \quad (\text{b.10})$$

式 (b.10) より回転慣性項を除くと Lagrange 理論による平板の変位の方程式が次式のように求められる。

$$D \nabla^2 \nabla^2 W + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = p_z \quad (\text{b.10})$$

B.5 境界条件式

代表的な平板の支持条件は次の3種類である。

(1) 固定端の場合

$$W=0, \quad \frac{\partial W}{\partial n}=0 \quad (\text{b.11})$$

(2) 単純支持端の場合

$$W=0, \quad M_{nn}=0 \quad (\text{b.12})$$

(3) 自由端の場合

$$W=0, \quad V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} = 0 \quad (\text{b.13})$$

ここで V_n および M_n はそれぞれ相当せん断力およびねじりモーメントである。また n , s はそれぞれ境界上の外向き法線方向および接線方向の座標を示す。

他の条件については外力およびたわみなど考慮して設定する必要がある。

参考文献

[b.1] Love A.E.H. : A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity (4th Edition), Dover, (1944), p.27.

[b.2] Timoshenko S. and Woinowsky-Kriger S. : Theory of Plates and Shells 2nd

Edition, McGraw-Hill, (1959), p. 79-104.

[b.3] Rayleigh J.W.S. : The Theory of Sound, Vol.1, Dover, (1945), p. 352-394.

[b.4] Mindlin R.D. : Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural
Motions of Isotropic, Elastic Plates, Journal of Applied Mechanics,
Vol. 18, No. 1 (1951), p. 31-38.

付録C 円筒殻に関する基礎方程式の導出

C.1 緒言

円筒殻理論は次のKirchhoff-Loveの仮定[c.1]と呼ばれる仮定に基づいている。

- (1) 殻の肉厚は最小曲率半径に比較して無視できる程度に小さい。
- (2) 殻の中央面に垂直な直線素は変形後も直線を保ち伸び縮みしない。
- (3) 殻の中央面に垂直な直線素は変形後も中央面に垂直である。
- (4) 殻の肉厚方向応力成分は他の応力成分に比較して無視できる程度に小さい。

これらの仮定に基づいて導出されたものが一次近似理論と呼ばれるLoveの理論と呼ばれるものである。この理論より簡単化された理論として有名なものにDonnell理論[c.2]がある。また仮定(1)について高精度化された2次近似理論において代表的なものにFlüggeの理論[c.3]がある。これらの面外せん断変形を無視した理論は一般的に古典理論と呼ばれる。またさらに仮定(3)を取り除き面外せん断変形を考慮したものは修正理論と呼ばれ、代表的なものがHerrmann-Mirsky理論[c.4][c.5]である。

Donnell理論では基礎方程式が簡単で解析が著しく容易となる。しかし円筒が長くなるにつれ精度が低下することが指摘されている[c.6]。すなわち円筒の軸線が変形しない局所たわみの解析には有効であるが、円筒の軸線がはり状の曲げ変形をうける場合の解析には不向きである。またHerrmann-Mirsky理論に代表される修正理論では高精度の結果を得ることができるが解析に要する手間が著しく増大する。そこで精度が比較的高く使いやすい円筒殻理論であるFlügge理論を本論文では採用するものとして以下において基礎方程式を導出する。

C.2 平衡方程式

Fig.c.1に示される平均半径R、肉厚hの円筒殻の微小要素を考える。Fig.c.1の座標系(x, θ, z)に対する応力の平衡方程式は次式で与えられる。

$$\left[(R-z) \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{\theta x}}{\partial \theta} - \sigma_{xz} + (R-z) \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + (R-z) X_x = (R-z) \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]$$

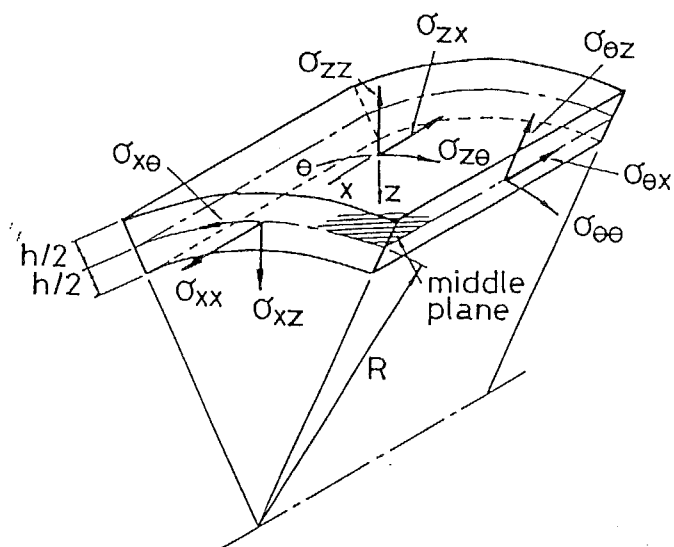


Figure c.1 Equilibrium of Stresses in a Circular Shell

$$\left\{ \begin{aligned} (R-z) \frac{\partial \sigma_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} - 2\sigma_{\theta z} + (R-z) \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + (R-z) X_{\theta} &= (R-z) \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ (R-z) \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} + (R-z) \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + (R-z) X_z &= (R-z) \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right. \quad (c.1)$$

式(c.1)の両辺を円筒の肉厚方向 z に $-h/2$ から $h/2$ まで積分する。

$$\left\{ \begin{aligned} R \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + R p_x &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} u(R-z) dz \\ R \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} - Q_{\theta} + R p_{\theta} &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} v(R-z) dz \\ R \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} + N_{\theta\theta} + R p_z &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} w(R-z) dz \end{aligned} \right. \quad (c.2)$$

ここでそれぞれの式の右辺の項は並進慣性を表す。 N_{xx} , $N_{\theta\theta}$ は垂直応力であり、 $N_{x\theta}$, $N_{\theta x}$ は面内せん断応力、 Q_x および Q_{θ} は面外せん断応力を示す。 p_x , p_{θ} および p_z は x , θ , z 方向の単位面積あたりの外力である。これらは次式で定義される (Fig. c.2 参照)。

$$\left\{ \begin{aligned} N_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(1-z/R) dz, & N_{\theta\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta} dz \\ N_{x\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{x\theta}(1-z/R) dz, & N_{\theta x} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta x} dz \\ Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}(1-z/R) dz, & Q_{\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta z} dz \\ p_x &= \left[(1-z/R) \sigma_{xz} \right]_{-h/2}^{h/2} + \int_{-h/2}^{h/2} (1-z/R) X_x dz \\ p_{\theta} &= \left[(1-z/R) \sigma_{\theta z} \right]_{-h/2}^{h/2} + \int_{-h/2}^{h/2} (1-z/R) X_{\theta} dz \\ p_z &= \left[(1-z/R) \sigma_{zz} \right]_{-h/2}^{h/2} + \int_{-h/2}^{h/2} (1-z/R) X_z dz \end{aligned} \right. \quad (c.3)$$

式(c.1)の第1、2式の両辺に z を乗じて厚さ方向に $h/2$ から $-h/2$ まで積分する。

$$\left\{ \begin{aligned} R \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - R Q_x - m_x &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} uz(R-z) dz \end{aligned} \right.$$

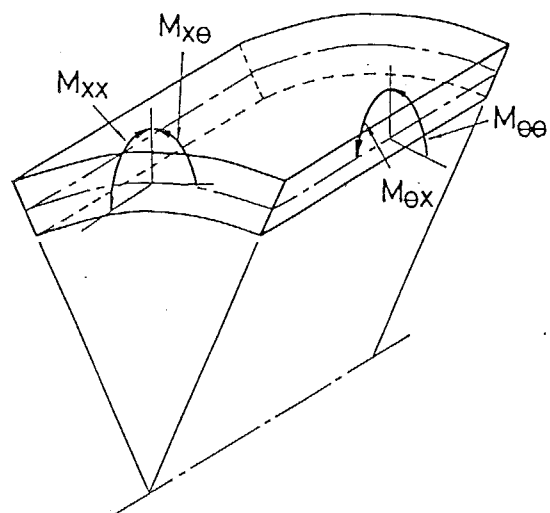
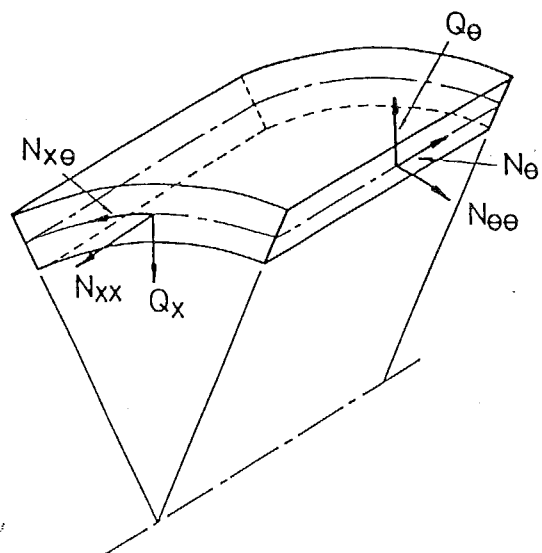


Figure c.2 Equilibrium of Stress Resultants in a Circular Shell

$$\left[R \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - R Q_{\theta} - m_{\theta} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} v z (R-z) dz \right] \quad (c.4)$$

ここでそれぞれの式の右辺の項は回転慣性を表す。

円筒殻の法線まわりのモーメントの平衡は $\sigma_{x\theta}$ および $\sigma_{\theta x}$ の対称性によって保証されることから

$$\sigma_{x\theta} - \sigma_{\theta x} = 0 \quad (c.5)$$

を肉厚方向に $h/2$ から $-h/2$ まで積分する。

$$R N_{x\theta} - R N_{\theta x} + M_{\theta x} = 0 \quad (c.6)$$

ここで次式で定義される M_{xx} , $M_{\theta\theta}$ は曲げモーメント、 $M_{x\theta}$, $M_{\theta x}$ はねじりモーメントである。また m_x , m_{θ} は x , θ 方向の単位面積あたりの外部モーメントを示す (Fig. c.2 参照)。

$$\left[\begin{aligned} M_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} (1-z/R) z dz, & M_{\theta\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta} z dz \\ M_{x\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{x\theta} (1-z/R) z dz, & M_{\theta x} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta x} z dz \\ m_x &= -[z(R-z)\sigma_{xz}]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} X_x (z-R) z dz \\ m_{\theta} &= -[z(R-z)\sigma_{\theta z}]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} X_{\theta} (z-R) z dz \end{aligned} \right] \quad (c.7)$$

導かれた式 (c.2) (c.4) および (c.6) が円筒殻理論における平衡方程式となる。

C.3 構成方程式

円筒における垂直ひずみ ε_{xx} , $\varepsilon_{\theta\theta}$ およびせん断ひずみ $\varepsilon_{x\theta}$, ε_{xz} は次式にて与えられる。

$$\left[\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R-z} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right), & \varepsilon_{x\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R-z} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), & \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{R-z} \left(v + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right\} \end{aligned} \right] \quad (c.8)$$

円筒殻の中央面における変位成分を U , V および W とすれば変位成分の u , v およ

び w は次式のように表わすことができる。

$$\begin{cases} u = U - z \phi_x \\ v = V - z \phi_\theta \\ w = W \end{cases} \quad (c.9)$$

ここで ϕ_x および ϕ_θ は中央面に垂直な断面の傾き角成分である。

Flügge理論においては円筒殻の面外せん断変形を無視することから、傾き角は殻の中央面のたわみ角に等しくなるので次式が成立する。

$$\phi_x = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \phi_\theta = -\frac{1}{R} \left(V + \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \quad (c.10)$$

式(c.8)に含まれる $R/(R-z)$ を次式のようにTaylor展開して近似する。

$$\frac{R}{R-z} \cong 1 + \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} \quad (c.11)$$

式(c.8)に式(c.9)-(c.11)を代入する。

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^* - z \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, & \varepsilon_{\theta\theta} = \left(1 + \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} \right) \left(\varepsilon_{\theta\theta}^* - \frac{z \partial \phi_\theta}{R \partial \theta} \right) \\ \varepsilon_{x\theta} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} \right) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{z \partial \phi_x}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{z \partial \phi_\theta}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{xz} = -\frac{1}{2} \phi_x + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial x}, & \varepsilon_{\theta z} = -\frac{1}{2} \phi_\theta + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} \right) \left(\frac{V}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \theta} \frac{z}{R} \right) \end{cases} \quad (c.12)$$

ここで ε_{xx}^* , $\varepsilon_{x\theta}^*$ および $\varepsilon_{\theta\theta}^*$ は中央面おけるひずみを示し、次式で定義される。

$$\varepsilon_{xx}^* = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_{x\theta}^* = -\frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^* = -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} - W \right)$$

円筒殻は平面応力状態にあることから応力-ひずみ関係式は次のようになる。

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}) \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{xx}) \\ \sigma_{x\theta} = 2G \varepsilon_{x\theta} \end{cases} \quad (c.13)$$

式(c.12)および(c.13)を式(c.3)および(c.7)に代入することに円筒殻理論における構成方程式が得られる。ただしFlügge理論では面外せん断力を無視することから Q_x

および Q_θ はここでは求められない。

$$\left[\begin{array}{l} N_{xx} = E_p (\varepsilon_{xx}' + \nu \varepsilon_{\theta\theta}') + \frac{D}{R} \chi_x, \quad N_{\theta\theta} = E_p (\varepsilon_{\theta\theta}' + \nu \varepsilon_{xx}') + \frac{D}{R} \left(\frac{\varepsilon_{\theta\theta}'}{R} - \chi_\theta \right) \\ N_{x\theta} = Gh \varepsilon_{x\theta}' + \frac{GI}{R} \chi_{x\theta}, \quad N_{\theta x} = Gh \varepsilon_{x\theta}' + \frac{GI}{R} \left(\frac{\varepsilon_{x\theta}'}{R} - \chi_{x\theta} \right) \\ M_{xx} = -D \left(\chi_x + \nu \chi_\theta + \frac{\varepsilon_{xx}'}{R} \right), \quad M_{\theta\theta} = -D \left(\chi_\theta + \nu \chi_x - \frac{\varepsilon_{\theta\theta}'}{R} \right) \\ M_{x\theta} = -2GI \chi_{x\theta}, \quad M_{\theta x} = -2GI \left(\chi_{x\theta} - \frac{\varepsilon_{x\theta}'}{2R} \right) \end{array} \right. \quad (c.14)$$

ここで

$$\chi_x = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \chi_\theta = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right), \quad \chi_{x\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} \right),$$

$$E_p = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad I = \frac{h^3}{12}$$

である。

C.4 変位の方程式

式(c.9)および(c.14)を代入した後、式(c.4)より面外せん断力 Q_x および Q_θ が求められる。

$$\left[\begin{array}{l} Q_x = -\frac{D}{R^3} \left\{ \left(R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{R^2}{C_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U + \rho_2 R \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + \left(R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{R^2}{C_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) R \frac{\partial W}{\partial x} \right\} - \frac{m_x}{R} \\ Q_\theta = -\frac{D}{R^3} \left\{ 2 \left(\rho_1 R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{R^2}{C_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) V + \left(R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1 - \frac{R^2}{C_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial W}{\partial \theta} \right\} - \frac{m_\theta}{R} \end{array} \right. \quad (c.15)$$

ここで

$$\rho_1 = (1-\nu)/2, \quad \rho_2 = (1+\nu)/2, \quad C_t^2 = E/\rho(1-\nu^2)$$

である。

式(c.2)に式(c.14)(c.15)を代入すれば次のように変位の方程式が求められる。

$$\begin{aligned}
& \left\{ R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1+\kappa^2) \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{R^2}{C_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} U + \rho_2 R \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} \\
& + \left(\kappa^2 R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \kappa^2 \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \kappa^2 \frac{R^2}{C_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nu \right) R \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{R^2}{E_p} p_x = 0 \\
& \rho_2 R \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} + \left\{ \rho_1 (1+3\kappa^2) R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - (1+\kappa^2) \frac{R^2}{C_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} V \\
& + \left\{ \kappa^2 (1+\rho_1) R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \kappa^2 \frac{R^2}{C_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 1 \right\} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{m_\theta + R^2 p_\theta}{E_p} = \kappa^2 \frac{R^2}{C_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(2V + \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \quad (c.16) \\
& \left(-\kappa^2 R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2 \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \nu \right) R \frac{\partial U}{\partial x} + \left\{ -\kappa^2 (1+\rho_1) R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 \right\} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\
& - \left\{ \kappa^2 \left(R^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2R^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right) + 2\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1 + \kappa^2 + \frac{R^2}{C_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} W \\
& - \left(R \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_\theta}{\partial \theta} - R^2 p_z \right) \frac{1}{E_p} = -\kappa^2 \frac{R^2}{C_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ R \frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{\partial V}{\partial \theta} + \left(R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) W \right\} \quad (c.16)
\end{aligned}$$

ここで、それぞれの式において右辺の項は回転慣性を示す。

3元連立微分方程式である式(c.16)を直接解くことは困難であることから、これらの方程式を単一の微分方程式に書き換える。

まず式(c.16)を座標および時間について次のように無次元化を行う。

$$\xi = x/R, \quad \tau = (C_t/R)t \quad (c.17)$$

その後、式(c.16)の第1式と第2式から変位Vを消去すれば変位UとWの関係式が求められ、第1式と第3式より変位Uを消去すれば変位VとWの関係式が求められる。得られた2つの微分方程式より変位Wのみの方程式が求められる。得られた式に対して $\kappa^2 = h^2/12R^2 \ll 1$ であることを考慮すれば、次のように簡単化された微分方程式が得られる。

$$\begin{cases}
(\Phi^B - L^6 - L_r^6) W = \frac{1}{\kappa^2} \{ (\Psi_1 + L_{1r}) P_1 + (\Psi_2 + L_{2r}) P_2 + (V^4 + L^4) P_3 \} \\
(V^4 + L^4) U - (\Psi_1 + L_{1r}) W = L_{3a} P_1 + \Psi_3 P_2 \\
(V^4 + L^4) V - (\Psi_2 + L_{2r}) W = \Psi_3 P_1 + L_{3b} P_2
\end{cases} \quad (c.18)$$

ここで

$$\begin{aligned}
\Phi^8 &= \nabla^8 + 2\nu \frac{\partial^6}{\partial \xi^6} + 6 \frac{\partial}{\partial \xi^4 \partial \theta^2} + 2(4-\nu) \frac{\partial^6}{\partial \xi^2 \partial \theta^4} + 2\nu \frac{\partial^6}{\partial \theta^6} + \frac{1-\nu^2}{\kappa^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2(2-\nu) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \\
\Psi_1 &= \left(-\kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 3\kappa^4 \rho_1 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \\
\Psi_2 &= \left\{ -2\kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - 2\kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + (2+\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \frac{\partial}{\partial \theta} \\
L^6 &= -\frac{1}{\kappa^2 \rho_1} \frac{\partial^6}{\partial \tau^6} - \left(\frac{1}{\rho_1} \nabla^4 - \frac{1}{\kappa^2} \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \nabla^2 + \frac{1}{\kappa^2 \rho_1} \right) \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} + \left(\frac{1+\rho_1}{\rho_1} \nabla^6 - \frac{1}{\kappa^2} \nabla^4 + \frac{1}{\kappa^2} \nabla^2 + 4 \frac{\rho_2}{\kappa^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \\
L_r^6 &= \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial^6}{\partial \tau^6} - \frac{1-\rho_1}{\rho_1} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \nabla^6, \quad L^4 = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} - \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \nabla^2 \\
L_{2r} &= 2 \left(\kappa^2 \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{\kappa^2}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2\rho_1} \right) \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial \tau^2} \\
L_{1r} &= \left(\kappa^2 \frac{1+\rho_1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \kappa^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\kappa^2}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\nu}{\rho_1} \right) \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \tau^2} \\
\Psi_1 &= \left(-\kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 3\kappa^4 \rho_1 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \\
\Psi_2 &= \left\{ -2\kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - 2\kappa^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + (2+\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \frac{\partial}{\partial \theta} \\
\Psi_3 &= -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta}, \quad L_{3b} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, \quad L_{3a} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \\
P_1 &= -\frac{R^2}{E_p} p_x, \quad P_2 = -\frac{m_\theta + R^2 p_\theta}{E_p}, \quad P_3 = -\frac{1}{E_p} \left(\frac{\partial m_x}{\partial \xi} + \frac{\partial m_\theta}{\partial \theta} - R^2 p_x \right), \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}
\end{aligned}$$

C.5 境界条件式

代表的な円筒殻の支持条件は次の4種類である。

(1) 固定端の場合

$$U=0, \quad V=0, \quad W=0, \quad \partial W / \partial x = 0 \quad (c.19)$$

(2) 支持端(a)の場合

$$N_x=0, \quad S_x=0, \quad W=0, \quad M_x=0 \quad (c.20)$$

(3) 支持端(b)の場合

$$N_x=0, \quad V=0, \quad W=0, \quad M_x=0 \quad (c.21)$$

(4) 自由端の場合

$$N_x=0, \quad S_x=0, \quad T_x=0, \quad M_x=0 \quad (c.22)$$

ここで S_x および T_x はそれぞれ円周方向および半径方向の有効せん断力であり次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} S_x &= N_{x\theta} - M_{x\theta}/R \\ T_x &= Q_x + \partial M_{x\theta}/R\partial\theta \end{aligned} \right\} (c.23)$$

なお他の条件については外力および変位などを考慮して設定する必要がある。

参考文献

- [c.1] Love A.E.H. : A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity (4th Edition), Dover, (1944), p.515-613.
- [c.2] Donnell L.H. : Beams, Plates and Shells, McGraw-Hill, (1976).
- [c.3] Flügge W. : Stresses in Shells, Springer-Verlag, (1976), p.208-312.
- [c.4] Herrmann G. and Mirsky I. : Three-Dimensional and Shell-Theory Analysis of Axially Symmetric Motions of Cylinders, Journal of Applied Mechanics Vol.23, No.4(1956), p.563-568.
- [c.5] Mirsky I. and Herrmann G. : Nonaxially Symmetric Motions of Cylindrical Shells, Journal of the Acoustical Society of America, Vol.29, No.10 (1957), p.1116-1123.
- [c.6] 宇治橋貞幸 : 円筒殻の衝撃応答に関する研究, 東京工業大学 博士論文, (1982).

付録D 液体と固体の境界面における平面波の反射特性

D.1 緒言

液体と半無限体の固体が接する境界における波動の反射特性を求める。簡単のために伝播する応力波が固体から境界面に垂直に液体側へ入射する場合について考える。反射特性は固体および液体の音響インピーダンスにより反射係数および透過係数にて示される [d. 1] [d. 2]。

D.2 解析モデル

Fig. d. 1 に示されるような半無限領域の固体と液体が接する場合を考える。 $x=0$ を境界面とし $x>0$ には弾性体、 $x<0$ には圧縮性完全流体が存在すると仮定する。

D.3 反射係数および透過係数の導出

弾性体の基礎方程式は次式である。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{d. 1})$$

ここで

$$C_0^2 = E/\rho_e$$

である。 u および t は x 軸方向の変位および時間である。また E および ρ は弾性体の縦弾性係数および密度である。

このとき弾性体から $x=0$ の境界面に円振動数 ω で垂直に入射する応力波 σ_x^+ は式 (d. 1) を満たす次式で示される。

$$\sigma_x^+ = A_0 \exp[i(k_e x - \omega t)] \quad (x < 0) \quad (\text{d. 2})$$

ここで

$$k_e = \omega/C_0$$

である。

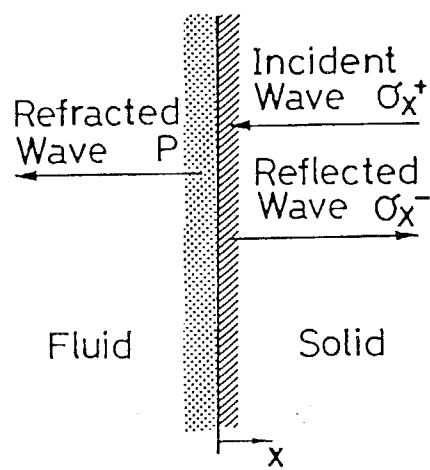


Figure d.1 Refraction and Reflection on Liquid-Solid Interface

また境界面で反射する応力波 σ_x^- は反射係数を V_e とすれば次式となる。

$$\sigma_x^- = V_e A_0 \exp[-i(k_e x + \omega t)] \quad (x < 0) \quad (d.3)$$

境界面に応力波が反射した後の固体の変位 u は次式で求められる。

$$u = (A_0 / i E k_e) \{ \exp[i(k_e x - \omega t)] - V_e \exp[-i(k_e x + \omega t)] \} \quad (x < 0) \quad (d.4)$$

応力波の入射による液体中の圧力波 P は式(a.10)を満たす入射係数 W_e により次式で表わされる。

$$P = W_e A_0 \exp[i(k_f x - \omega t)] \quad (x > 0) \quad (d.5)$$

ここで

$$k_f = \omega / C_f, \quad C_f^2 = K / \rho_f$$

である。 K および ρ_f は液体の体積弾性率および密度である。

式(d.5), (a.8) および (a.9) により x 軸方向の速度 v_f を求める。

$$v_f = (k_f W_e A_0 / \rho_f \omega) \exp[i(k_f x - \omega t)] \quad (x > 0) \quad (d.6)$$

固体と液体の境界面における連成条件は式(1.1.1)および(1.1.2)より次式となる。

$$x=0 \text{ において } \begin{cases} \sigma_x^+ + \sigma_x^- = -P \\ \partial u / \partial t = v_f \end{cases} \quad (d.7)$$

式(d.7)に式(d.1)-(d.5)に代入することにより反射係数 V_e および透過係数 W_e が求められる。

$$V_e = \frac{Z_f - Z_e}{Z_f + Z_e}, \quad W_e = \frac{-2Z_f}{Z_f + Z_e} \quad (d.8)$$

ここで Z_e および Z_f は弾性体および液体の音響インピーダンスを表わし、次式で定義される。

$$Z_e = C_0 \rho_e, \quad Z_f = C_f \rho_f \quad (d.9)$$

逆に液体から固体へ圧力波が入射する場合は次のように反射係数 V_f および透過係数 W_f が求められる。

$$V_f = \frac{Z_e - Z_f}{Z_f + Z_e}, \quad W_f = \frac{-2Z_f}{Z_f + Z_e} \quad (d.10)$$

一般に液体の音響インピーダンス Z_f は $5 \times 10^5 \sim 5 \times 10^6$ [kg/m²s] 程度であり、固体の音響インピーダンス Z_e は $1 \times 10^7 \sim 5 \times 10^7$ [kg/m²s] 程度である。弾性体から液体の反射係数 V_e は負となり、液体から弾性体への反射係数 V_f は正の値となる。固体から弾性波が入射するごとに弾性体内部の応力は減少し、これに対して液体から固体へ圧力波が入射するごとに液体内部の圧力が増加することになる。

参考文献

- [d.1] Brekhovskikh L., Goncharov V. : Mechanics of Continua and Wave Dynamics, (1985), Springer-Verlag.
- [d.2] Junger M.C., Feit D. : Sound, Structure and Their Interaction (Second Edition), (1986), The MIT Press.

略歴および研究業績

氏名 足 立 忠 晴

生年月日 昭和35年11月16日

本籍地 大阪府西成区玉出東2丁目13番地

現住所 千葉県船橋市行田3-1-9-802

略歴

昭和58年 3月 大阪府立大学工学部機械工学科 卒業

昭和58年 4月 東京工業大学大学院理工学研究科機械工学専攻修士課程 入学

昭和60年 3月 東京工業大学大学院理工学研究科機械工学専攻修士課程 修了

昭和60年 4月 東京工業大学大学院理工学研究科機械工学専攻博士後期課程 入学

昭和61年 3月 東京工業大学大学院理工学研究科機械工学専攻博士後期課程

中途退学

昭和61年 4月 東京工業大学工学部機械工学科材料力学講座 助手 現在に至る

受賞

昭和57年度 日本機械学会畠山賞 受賞

平成 2年度 日本非破壊検査協会奨励賞 受賞

(受賞研究：ステップ応答によるCFRP積層板の衝撃損傷評価法
第4分科会資料4801、1989年12月発表)

学位論文に関係する発表論文

第2章

1) 足立忠晴、松本浩之、宇治橋貞幸：

高速フーリエ変換を利用した多重積分変換法による動弾性問題の解析（第1報、基礎的検討）

日本機械学会論文集（A編），55巻519号（1989），p. 2271-2276.

第3章

2) 足立忠晴、宇治橋貞幸、松本浩之：

水撃をうける有限長円筒殻の衝撃応答の解析

日本機械学会論文集（A編），51巻467号（1985），p. 1886-1892.

2') Tadaharu ADACHI, Sadayuki UJIHASHI, Hiroyuki MATSUMOTO:

Impulsive Response of a Finite Circular Cylindrical Shell Subjected to Waterhammer Waves

Bulletin of JSME, Vol. 29, No. 249, (1986), p. 737-742.

3) 足立忠晴、松本浩之、宇治橋貞幸：

水撃をうける半無限長円筒殻の連成応答の解析

日本機械学会論文集（A編），53巻485号（1987），p. 84-90.

4) Tadaharu ADACHI, Sadayuki UJIHASHI, Hiroyuki MATSUMOTO:

The Coupling Effect on the Impulsive Responses of a Circular Cylindrical Shell Subjected to Waterhammer Waves

Dynamic Fracture Mechanics For 1990's (Ed. by H. Homma, D.A. Shockey, G. Yagawa), PVP-Vol. 160, (1989), p. 143-150, The American Society of Mechanical Engineers.

4') Tadaharu ADACHI, Sadayuki UJIHASHI, Hiroyuki MATSUMOTO:

Impulsive Responses of a Circular Cylindrical Shell Subjected to Waterhammer Waves

Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 113, No. 4 (1991), p. 517-523.

第4章

5) 足立忠晴、小川義英、宇治橋貞幸、松本浩之：

一様外圧をうける流体で満たされた円筒の衝撃応答（流体と円筒の連成効果の考察）

日本機械学会論文集（A編），57巻536号，（1991），p. 918-923.

6) 足立忠晴、宇治橋貞幸、松本浩之：

軸対称荷重をうける流体で満たされた有限長円筒殻の衝撃応答

日本機械学会論文集（A編），57巻537号，（1991），p. 1123-1128.

第 5 章

7) Sadayuki UJIHASHI, Tadaharu ADACHI, Hiroyuki MATSUMOTO:

A Circular Plate Floating on a Fluid Subjected to Normal Impact
by a Flying Object

Impact Loading and Dynamic Behaviour of Materials (Ed. by C.Y. Cheim,
H.-D. Kunze, L.W. Meyer), Vol.2, (1988), p.913-920,
Informationsgesellschaft Verlag.

第 6 章

8) 足立忠晴、宇治橋貞幸、松本浩之：

圧電素子による薄板に作用する衝撃圧力の測定

日本機械学会論文集 (C編), 57巻539号, (1991), p.2223-2227.

8') Tadaharu ADACHI, Sadayuki UJIHASHI, Hiroyuki MATSUMOTO :

Measurement of Impulsive Pressure Applied on a Thin Plate by
Piezoelectric Transducers

Smart Structures and Materials (Ed. by Culshaw B., Gardiner P.T. and
McDonach A.), (1992), p.193-196, Institute of Physics Publishing.

研究業績

発表論文（本論文に関係するものを含む）

- 1) 足立忠晴、宇治橋貞幸、松本浩之：
水撃をうける有限長円筒殻の衝撃応答の解析
日本機械学会論文集（A編），51巻467号（1985），p.1886-1892.
- 1') Tadaharu ADACHI, Sadayuki UJIHASHI, Hiroyuki MATSUMOTO:
Impulsive Response of a Finite Circular Cylindrical Shell Subjected to Waterhammer Waves
Bulletin of JSME, Vol.29, No.249, (1986), p.737-742.
- 2) 宇治橋貞幸、足立忠晴、井上裕嗣、松本浩之：
鋼球の衝突により硝子板に生ずる衝撃応力の解析
日本機械学会論文集（A編），52巻474号（1986），p.525-532.
- 3) 足立忠晴、松本浩之、宇治橋貞幸：
水撃をうける半無限長円筒殻の連成応答の解析
日本機械学会論文集（A編），53巻485号（1987），p.84-90.
- 4) Sadayuki UJIHASHI, Tadaharu ADACHI, Hiroyuki MATSUMOTO:
A Circular Plate Floating on a Fluid Subjected to Normal Impact by a Flying Object
Impact Loading and Dynamic Behaviour of Materials (Ed. by C.Y. Cheim, H.-D. Kunze, L.W. Meyer), Vol.2, (1988), p.913-920,
Informationsgesellschaft Verlag.
- 5) 松本浩之、足立忠晴、角濱義隆、福澤敬一：
二次元境界要素法による動的応力集中係数の解析
日本機械学会論文集（A編），54巻501号（1988），p.1024-1029.
- 5') Hiroyuki MATSUMOTO, Tadaharu ADACHI, Yoshitaka KAKUHAMA,
Keiichi FUKUZAWA:
Analysis of the Dynamic Stress Concentration Factor by the Two-Dimensional Boundary Element Method
JSME International Journal, Series I, Vol.33, No.1(1990), p.37-43.
- 6) Tadaharu ADACHI, Sadayuki UJIHASHI, Hiroyuki MATSUMOTO:
The Coupling Effect on the Impulsive Responses of a Circular

Cylindrical Shell Subjected to Waterhammer Waves

Dynamic Fracture Mechanics For 1990's (Ed. by H. Homma, D.A. Shockey, G. Yagawa), PVP-Vol.160, (1989), p.143-150, The American Society of Mechanical Engineers.

- 6') Tadaharu ADACHI, Sadayuki UJIHASHI, Hiroyuki MATSUMOTO:

Impulsive Responses of a Circular Cylindrical Shell Subjected to Waterhammer Waves

Journal of Pressure Vessel Technology, Vol.113, No.4(1991), p.517-523.

- 7) 松本浩之、足立忠晴、吉田節男、宇治橋貞幸:

三次元境界要素法による動的応力集中係数の解析法

日本機械学会論文集 (A編), 55巻514号(1989), p.1400-1406.

- 8) 足立忠晴、松本浩之、宇治橋貞幸:

高速フーリエ変換を利用した多重積分変換法による動弾性問題の解析 (第1報、基礎的検討)

日本機械学会論文集 (A編), 55巻519号(1989), p.2271-2276.

- 9) Sadayuki UJIHASHI, Kei SAKANOE, Tadaharu ADACHI, Hiroyuki MATSUMOTO:

Experimental Measurement of the Mechanical Properties of Fibre-Reinforced Plastics under Impact Loading

Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers Fourth

International Conference FRC'90 Fibre Reinforced Composites, (1990)

p.157-162.

- 10) 足立忠晴、波多野啓二、宇治橋貞幸、松本浩之:

数値ラプラス変換を利用したマトリックス法による骨組構造の衝撃応答解析 (第1報、真直棒要素で構成される構造の衝撃応答)

日本機械学会論文集 (A編), 56巻524号, (1990), p.917-923.

- 11) Hiroyuki MATSUMOTO, Tadaharu ADACHI, Sadayuki UJIHASHI:

Static and Impact Induced Damage of CFRP Laminates

Dynamic Fracture Proceedings of Oji International Seminar on Dynamic Fracture (Ed. by Homma H. and Kanto Y.), (1990), p.174-182, Chuo

Technical Drawing Co Ltd.

- 12) Tadaharu ADACHI, Keiichiro SATOH, Sadayuki UJIHASHI, Hiroyuki MATSUMOTO,

Katsuyoshi KITAGAWA:

Boundary Element Analysis of Plates Subjected to Static and Impulsive

Load,

Advances in Boundary Elements Methods in JAPAN and USA, Topics in Engineering, Volume 7, (1990), p.153-165, Computer Mechanics Publications.

- 13) 鞠重錫、鈴木正之、足立忠晴、宇治橋貞幸、松本浩之:

低速衝撃によるCFRP積層板の荷重変動とひずみ変動

日本機械学会論文集 (A編), 56巻532号, (1990), p.2520-2525.

- 13') Joong Suk KOOK, Masayuki SUZUKI, Tadaharu ADACHI, Sadayuki UJIHASHI, Hiroyuki MATSUMOTO:

Load and Strain Histories for CFRP Laminates under Low Velocity Impact
Proceedings of the KSME/JSME Joint Conference FRACTURE AND STRENGTH'90,
(1990), p.595-600.

- 13') Joong Suk KOOK, Masayuki SUZUKI, Tadaharu ADACHI, Sadayuki UJIHASHI, Hiroyuki MATSUMOTO:

Load and Strain Histories for CFRP Laminates under Low Velocity Impact
JSME International Journal, Series I, Vol.35, No.2(1992), p.159-164.

- 14) 足立忠晴、小川義英、宇治橋貞幸、松本浩之:

一様外圧をうける流体で満たされた円筒の衝撃応答 (流体と円筒の連成効果の考察)

日本機械学会論文集 (A編), 57巻536号, (1991), p.918-923.

- 15) 松本浩之、小川義英、足立忠晴:

面外荷重をうける直交異方性積層厚板の応力解析

日本機械学会論文集 (A編), 57巻538号, (1991), p.1418-1422.

- 15') Hiroyuki MATSUMOTO, Yoshihide OGAWA, Tadaharu ADACHI:

Stress Analysis of Orthotropic Laminated Slab Subjected to Transverse Load

JSME International Journal, Series I, Vol.35, No.2(1992), p.165-169.

- 16) 足立忠晴、河村正孝、宇治橋貞幸、松本浩之:

部分積分法による動的境界要素解析の精度向上

日本機械学会論文集 (A編), 57巻536号, (1991), p.946-953.

- 17) 足立忠晴、坂上啓、宇治橋貞幸、松本浩之:

コンプライアンス応答によるCFRP積層板の衝撃損傷評価法

非破壊検査, 40巻3号, (1991), p.165-170.

- 17') Tadaharu ADACHI, Kei SAKANOE, Sadayuki UJIHASHI, Hiroyuki MATSUMOTO:

Estimation of Impact Damage in CFRP Laminates with Compliance Method
Transactions of the JSNDI, Vol. 4, (1991), p. 33-42.

- 18) 足立忠晴、坂上啓、宇治橋貞幸、松本浩之：
繰り返し衝撃をうけるCFRP積層板の損傷評価
日本機械学会論文集（A編），57巻535号，(1991)，p. 569-575.
- 19) 松本浩之、岡崎光宏、足立忠晴、宇治橋貞幸：
衝撃後のCFRP積層板の残留疲労強度（四点曲げ試験の場合）
日本機械学会論文集（A編），57巻535号，(1991)，p. 576-582.
- 20) 松本浩之、荒井政大、足立忠晴、宇治橋貞幸：
CFRP積層板の貫通強度評価
日本機械学会論文集（A編），57巻535号，(1991)，p. 583-590.
- 21) 足立忠晴、宇治橋貞幸、松本浩之：
圧電素子による薄板に作用する衝撃圧力の測定
日本機械学会論文集（C編），57巻539号，(1991)，p. 2223-2227.
- 21') Tadaharu ADACHI, Sadayuki UJIHASHI, Hiroyuki MATSUMOTO：
Measurement of Impulsive Pressure Applied on a Thin Plate by
Piezoelectric Transducers
Smart Structures and Materials (Ed. by Culshaw B., Gardiner P.T. and
McDonach A.), (1992), p. 193-196, Institute of Physics Publishing.
- 22) 足立忠晴、宇治橋貞幸、松本浩之：
軸対称荷重をうける流体で満たされた有限長円筒殻の衝撃応答
日本機械学会論文集（A編），57巻537号，(1991)，p. 1123-1128.
- 23) 鞠重錫、足立忠晴、宇治橋貞幸、松本浩之：
近似三次元理論による直交積層板の応力解析の適用範囲
日本機械学会論文集（A編），57巻543号，(1991)，p. 2653-2658.
- 24) Sadayuki UJIHASHI, Masahiro NISHIDA, Tadaharu ADACHI, Hiroyuki
MATSUMOTO：
Application of an Alternative Measuring System to Determine the
Mechanical Properties of Composites under Impact
Composite Structures 6 (Ed. by Marshall I.H.), (1991), p. 599-616,
Elsevier Applied Science.

- 25) 宇治橋貞幸、渡辺純一、足立忠晴：
圧電素子を用いた多点床反力測定システムの開発
スポーツ産業学研究，1巻，(1992)，p.19-30.

報告書

- 1) 足立忠晴：
7.4 圧力変換器単体の動特性，非破壊評価の標準化に関する調査研究
平成2年度調査報告書（分担），(1991)，p.135-147，日本非破壊検査協会.
- 2) 足立忠晴：
5.2 ひずみゲージ式圧力変換器の動特性の理論的評価，非破壊評価の標準化に
関する調査研究
平成3年度調査報告書（分担），(1992)，p.64-74，日本非破壊検査協会.

謝辞

ここに学位論文として研究をまとめることができましたのは、昭和58年4月に修士課程の大学院生として研究室に配属されて以来、東京工業大学工学部 松本浩之教授、宇治橋貞幸助教授の有益かつ適切なご指導およびご助言をいただいたことによるものであり、厚くお礼を申し上げます。

学位論文をまとめるにあたって、有益なご助言をいただいた東京工業大学工学部 山根隆一郎教授、渋谷壽一教授、木村康治助教授に感謝いたします。

また東京工業大学 中原一郎名誉教授には私が修士課程の学生時代に暖かくご指導いただき、大阪府立大学 故 竹内洋一郎名誉教授、故 白川馨教授および谷川義信教授には学部学生のとくに材料力学の研究を紹介していただきお礼申し上げます。

これまでの研究等を進める上で拓殖大学工学部 笠野英秋助教授、渡辺純一 元東京工業大学技官をはじめ東京工業大学機械工学科材料力学研究室の方々に数々のご助力をいただきお礼申し上げます。

私が今日までありますのは、両親 足立博、喜志子に温かく育てられてきたものがあります。両親から受けた数々のご恩への私からの感謝のしるしの一つとしてこの学位論文を捧げたいと思います。最後に学位論文をまとめるにあたり、あまり家庭をかえりみなかった私を許してくれた妻 裕子に感謝したいと思います。

1992年 6月

足立 忠晴