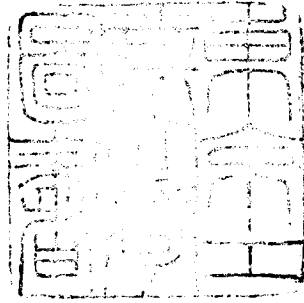


論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	光ビーム導波系に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	伊賀健一
Author(English)	Kenichi Iga
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第252号, 授与年月日:1968年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:関口利男
Citation(English)	Degree:Doctor (Engineering), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第252号, Conferred date:1968/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis



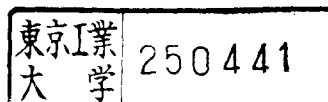
光ビーム導波系に関する研究

昭和43年1月

指導教官 関口利男 教授
末松安晴 助教授

提出者 大学院博士課程 電気工学専攻

伊 賀 健 一



内容梗概

レーザ通信方式は、従来の周波数帯よりも極めて広帯域にできるので、将来の大容量通信方式の一つとして注目されている。現在考えられている電話数万チャンネル以上を伝送する地上におけるレーザ通信のシステムのうち、低損失で安定な光伝送路の開発が最も重要な問題の一つと考えられている。

光伝送路のうち、光をビーム状にして伝送する“光ビーム導波系”は、波長の短いことと、レーザ光のコヒーレンスの良さを生かしたすぐれた方法の一つである。光ビーム導波系に関する当初の問題点としては、(1)集束素子のビーム波に対する応答を明らかにすること、(2)伝送損失の原因になる諸事項の解析、(3)それらの原因で生ずる伝送損失を軽減する方法をみつける、等が挙げられる。

本研究では、このような点に注目し、いくつかの基本的な問題を明らかにし、2,3の導波系の構成法の提案を行った。すなわち、(1)導波素子の基本的な問題について、まず導波素子のビーム波に対する応答を表わすFマトリクス、光線マトリクスを回折を伴う素子にまで拡張し、また層流型ガスレンズ、双曲線型ガスレンズの集束性を理論的、実験的に検討して、これらで導波系をつくる際の設計資料を得た。次に、(2)伝送損失に関連して、まず集束素子の不完全性によって生ずる姿勢の不安定性と姿勢変換として扱い、その影響を調べ、種々の集束素子に対する姿勢変換率を求めて集束素子の良さを表わす一つの目安を与えた。また、ビーム光路の安定性を表わす表式も、種々の導波系に適用できるように拡張した。最後に、(3)これらの問題を解決するために、①反射損失、姿勢変換の小さい双曲線型ガスレンズを用いる導波系、②曲がり部で、比較的小さい曲率半径で曲げることのできるレンズ対や反射鏡対を用いる導波系、③集束素子の変動によって生ずるビーム光路の変動を軽減する方法の一つとしてのガウス・モードフィルタを用いる導波系を提案し、(1)(2)で明らかになった事項を適用したこれらの導波系に関する設計法について述べた。

本研究によって、光ビーム導波系開発の一阶段におけるいくつかの基礎的な設計資料を得ることができた。

目 次

序 論	1
0.1 光通信方式と光伝送路	1
0.2 光ビーム導波系の概要と本研究の目的	8
0.2.1 光ビーム導波系の概要	8
0.2.2 内外における光ビーム導波系研究の歴史	11
0.2.3 本研究の目的と方法	14
0.3 本論文の内容梗概	15
0.3.1 本論文の構成	15
0.3.2 本論文の内容梗概	16
1 編 光ビーム導波系に関する基礎的研究	20
1 章 光ビーム波の基本的な諸関係	20
1.1 ビーム姿態の表示	20
1.1.1 レンズ状媒質における波動方程式	21
1.1.2 理想的なレンズ状媒質における固有姿態	23
1.1.3 伝送姿態	27
1.2 ビーム光路の表示	30
1.2.1 ビーム波の光線的な見方	30
1.2.2 光路を表わす方程式	32
1.2.3 光ビームパラメータの位相空間表示	33
1.3 ビーム波の各パラメータの導波系子による変換	35
1.3.1 波面係数とその変換	35
1.3.2 ビーム波の位置と傾きの変換	36

		11
1.4	本章のまとめ	37
2章	光ビーム導波系に用いる導波素子とその性質	39
2.1	集中型導波素子	39
2.1.1	光学レンズ	39
2.1.2	反射鏡	40
2.1.3	回折格子	42
2.2	ガウス・モードフィルタ	43
2.2.1	ガウス波に対するガウス・モードフィルタの応答	43
2.2.2	ガウス・モードフィルタのFマトリクスと変形光線マトリクス	44
2.2.3	電力透過率	45
2.3	分布型導波素子	46
2.3.1	集束性レンズ状媒質	46
2.3.2	発散性レンズ状媒質	47
2.3.3	自由空間	48
2.4	波面係数の交換のスミス図による表示	48
2.5	本章のまとめ	51
3章	層流型ガスレンズの集束性	54
3.1	層流型ガスレンズの集束性の理論的検討	54
3.1.1	層流管内の気体の誘電率	54
3.1.2	層流型ガスレンズのFマトリクス	56
3.1.3	集束距離と焦点距離	65
3.2	発散系を含む層流型ガスレンズのFマトリクス	67
3.3	層流型ガスレンズの集束性の測定	71

3.3.1	試作したガスレンズと集束距離の測定	71
3.3.2	集束距離の理論値	75
3.4	本章のまとめ	76
4章	双曲線型ガスレンズの集束性	78
4.1	双曲線型ガスレンズの構造と動作原理	78
4.1.1	双曲線型ガスレンズの構造と誘電率分布	78
4.1.2	熱導体の構造	80
4.1.3	内部消費電力	81
4.2	試作した双曲線型ガスレンズ	83
4.3	温度分布の測定	91
4.3.1	内部気体の横方向温度分布	91
4.3.2	熱導体の温度分布の測定	92
4.4	レーザ光による集束性の測定	94
4.4.1	集束光の伝播距離に対する変化	94
4.4.2	温度に対するスポットサイズの変化	96
4.5	オートコリメータによる集束性の測定	100
4.6	双曲線型ガスレンズの動作限界	104
4.7	本章のまとめ	105
5章	光ビーム導波系の安定性	107
5.1	光ビーム導波系の安定性に関する問題点と本章の目的	107
5.2	安定性の表示	110
5.3	曲がりに対する安定性	111
5.3.1	円形曲がり変動に対する安定性	111
5.3.2	正弦波状曲がり変動に対する安定性	113
5.4	集束素子のランダムな位置変動・素子偏差に対する安定性	114

5.5	空気変動の導波系に及ぼす影響	121
5.5.1	空気の温度差によるビームの偏向	121
5.5.2	ランダムな温度分布によるビームの変動	122
5.5.3	空気の擾乱によるビーム変動に関する 一つの実験	124
5.6	導波系の安定化に対する物理的限界	127
5.6.1	Marcuse による安定化の物理的限界	127
5.6.2	回折を伴う導波系の安定化に対する 物理的限界	128
5.7	本章のまとめ	130
6章	光ビーム導波系における姿態変換	133
6.1	光ビーム導波系における姿態変換の定義と表示	133
6.2	姿態変換の影響	135
6.2.1	姿態変換損失	135
6.2.2	遅延歪	136
6.3	分布型集束系子における姿態変換	139
6.3.1	円筒座標による解析	140
6.3.2	直角座標による解析	147
6.3.3	層流型ガスレンズの姿態変換率	152
6.3.4	双曲線型ガスレンズの姿態変換率	154
6.4	集中型集束系子における姿態変換	155
6.4.1	曲面の偶数次変化項による姿態変換	155
6.4.2	曲面が奇数次の変化項を含む場合の影響	158
6.5	光ビーム導波系における姿態変換	160
6.6	本章のまとめ	161

7章	各種光ビーム導波素子の検討	164
7.1	集束素子	164
7.1.1	光学レンズ	164
7.1.2	反射鏡	165
7.1.3	レンズ状媒質	165
7.2	偏向素子	166
7.3	光線変動抑制器	167
2編	光ビーム導波系に関する設計論的研究	168
8章	双曲線型ガスレンズを用いる導波系	169
8.1	本章の目的	169
8.2	導波系の伝送姿態と最適設計	170
8.2.1	周期的な導波系の伝送姿態と安定条件	170
8.2.2	双曲線型ガスレンズを用いる導波系の伝送姿態	171
8.2.3	最適設計	175
8.2.4	姿態整合	179
8.3	素子の変動によるビーム光路の安定性	180
8.3.1	曲がり変動に対するビーム光路	181
8.3.2	素子のランダムな位置変動によるビーム変動	183
8.4	姿態変換と回折損失	185
8.4.1	姿態変換	185
8.4.2	回折損失	186
8.5	伝送実験	187
8.6	本章のまとめ	188

9章	集中型集束素子対を用いる導波系	190
9.1	本章の目的	190
9.2	導波系の伝送姿態と最適設計	191
9.2.1	導波系の伝送姿態と姿態の安定性	191
9.2.2	最適設計条件	192
9.2.3	姿態整合	194
9.3	素子対の角および位置変動に対するビーム光路の安定性	197
9.3.1	変動を表わすマトリクス	198
9.3.2	素子偏差を含む対のランダムな 変動によるビームの安定性	200
9.4	導波系の曲がり部の検討と設計例	203
9.4.1	折線状の曲がり	203
9.4.2	一様な曲がり	204
9.4.3	設計例	204
9.5	本章のまとめ	207
10章	ガウス・モードフィルタとレンズを併用する導波系	209
10.1	本章の目的	209
10.2	導波系の伝送姿態	210
10.3	導波系に異軸、斜入射するビームに対するビーム光路	211
10.4	設計軸からの曲がり変動に対するビーム光路の 安定性と伝送損失	213
10.4.1	一様な曲がり変動に対するビーム光路	213
10.4.2	伝送損失	214
10.5	レンズのランダムな変動に対するビーム光路の 安定性と伝送損失	215
10.5.1	ランダムな素子の変動に対するビーム変動	215

10.5.2	変動による伝送損失の増加	219
10.5.3	レンズ直径	220
10.6	設計例	221
10.7	電子計算機による光路の追跡	225
10.8	本章のまとめ	228
11章	各種光ビーム導波系の検討	229
11.1	導波系の伝送損失に関する検討	229
11.1.1	伝送損失の原因	229
11.1.2	口径が有限な場合の設計例	235
11.2	各種光ビーム導波系の比較検討	237
12章	結 論	238
	謝 辞	239
	参考文献	240
	本研究に関する発表文献	247
附録A	エルミートおよびラゲール多項式に関する公式	249
附録B	数学公式	255
附録C	気体の誘電率と温度の関係	257

序 論

0.1 光通信方式と光伝送路

最近における通信技術の進歩はめざましいものがあり，居ながらにして地球の向う側におこる事件をテレビジョンの画面で同時に見ることができるし，将来は人工衛星船の間などでの宇宙通信が一般化するであろう．また，地球上においても，一国内の都市の間はいうにおよばず，各国間の情報の交換量がますます増加しよう．例えば，現在国内の大部分の地点の間で即時あるいは準即時に電話で話すことができるし，将来はこれをテレビ電話におきかえ，わざわざ会議や談合で遠方まで出向かなくてもよいという時代もくるだろう．このためには，現在の電話に比べて数百倍の通信容量を必要とするし，そのほか大型電子計算機を結ぶデータ伝送など，社会の求める通信の量は今後急激に増加するものと思われる．

さて，このような必要性に対して，種々の方法による大容量通信方式が研究され，また実用化されているが，それらの主なものを表0.1に示す．

ところがこれらとは別に，1960年にルビーレーザーが，1961年にHe-Neガスレーザーが発振に成功して以来，レーザー光のコヒーレンスの良さの故に

表0.1 多重大容量通信方式と電話チャンネル数

マイクロ波中継方式		...	数千～1万	チャンネル
同軸ケーブル	L3方式	...	2千	"
	L4方式	...	3万	"
	40-50 MHz	...	数万	"

これを通信に利用しようとする提案がなされ，これに関連した研究が急加速度をもって行われてきた．当初では，その周波数が高い($\approx 10^{14}$ Hz)ことから，収容し得るチャンネル数は現在のマイクロ波帯に比べて $10^4 \sim 10^5$ 倍であるとわれ，多少過大評価されたようだが，その後レーザー自身の問題，変調器・復調器等の現実の困難な問題にぶつかっている．この点，もう少し現実

的な見方をして、1システム当り数万チャンネルを目標にすれば、レーザ通信系も夢の上の話ではない。

それでは、この大容量(数万チャンネル)、長距離(数百km)の光通信システムはどのようなものであろうか？ 多くの内外における提案がなされているが、⁽⁴²⁾⁽⁷¹⁾⁽⁸³⁾⁽¹²²⁾ 地上通信として最も現実的なものとしては、次のようなものになろう。

光通信方式

(i) 多重化システム

(1) 異なる波長を用いる多重化: N_w

通信に用い得るレーザ波長

(例) He-Ne (6328 Å)

CWルビー (6943 Å)

Ar (4880, 5145 Å)

YAG (Nd³⁺) (5300 Å)

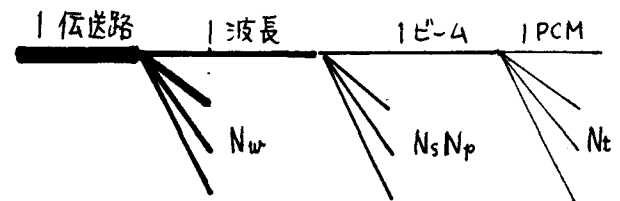


図0.1 光通信における多重化のシステム

(2) 空間多重化

1つの波長の光に対するビーム数: $N_s \cdot N_p$ #1)

(3) 時間分割多重化

1つのビームに対する副搬送波(PCM)数: N_t

このような多重化のシステムは図0.1に示す通りで、1つの伝送路に収容できる副搬送波システムの数 N_T は次のようになる。

$$N_T = N_w N_s N_p N_t \quad (0.1)$$

(ii) 副搬送波変調方式

繰返し周波数 $\cong 150 \text{ Mbit}$ (bipolar $\cong 300 \text{ Mbit}$)

帯域巾 $B \cong 1.5 \text{ GHz}$

チャンネル数 $C \cong 2300 \text{ チャンネル}$ (bipolar 4600 チャンネル)

#1) N_p は 偏波面の異なるビームの数を示す

$$S/N = 15 \text{ dB}$$

(iii) 光変調方式

PM方式(レーザのモード同期による超高速パルスと内部または外部変調方式によるPM)

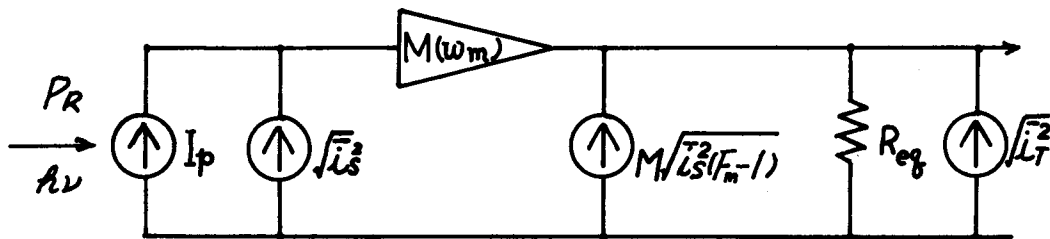
こうして1伝送路に収容できる電話チャンネル数 C_T は

$$C_T = N_T C = N_w N_s N_p N_t C \quad (0.2)$$

のようになる。現在のところ、 $N_t = 5$ 、 $N_p = 2$ 、とするのは困難なことではなく、現在のシステムと同等の数千チャンネルは達成できる。さらに $N_w = 5$ 、 $N_s = 10$ 程度を考えるとこれより数十倍収容できることになる。

(iv) 復調方式

従来の方式では、ヘテロダイン検波によって S/N を改善できたが、光波ではビームの位置のゆらぎや波面の变形などで、ヘテロダインの際に損失となることがあるため、高効率の光検出器による直接検波が有利であろう。



$$I_p = \eta e P_R / h\nu \quad \bar{I}_s^2 = 2e I_p B \quad \bar{I}_T^2 = 4kTB / R_{eq}$$

図0.2 光検出器における雑音源の等価回路

さて、光検出器の等価回路を図0.2に示すが、^{#1)} この回路から出力便のため S/N を求めるに次式を用いる。

$$\frac{S(\text{peak})}{N(\text{rms})} = \frac{I_p^2 M^2 R_{eq}}{2e I_p B F_m M^2 R_{eq} + 4kTB} \quad (0.3)$$

$$I_p = \eta e P_R / h\nu \quad (0.4)$$

#1) L.K. Anderson and B.J. McMurtry, "High Speed Photodetectors," Proc. IEEE, vol. 54, No. 10; pp 1335-1349, October 1966.

ただし, P_R : 受信光電力尖頭値 B : 帯域巾
 η : 光電面の量子効率 M : 電流増倍率
 F_m : 増倍過程の雑音指数 R_{eq} : 検波器の等価出力抵抗
 F_a : 後段増幅器の雑音指数

具体的な検波器として, マイクロ波帯の副搬送波を検波できるのは, 光電子増倍管 (Photomultiplier: PM) と, 電流増倍作用をもつ光ダイオード (Photo Diode: PD) であろう. ところで, 帯域巾 1 GHz 以上を必要とする光 PCM では, IM^2 を極端に大きくとれず $IM^2 R_{eq} = 10 \sim 100 \Omega$ 程度で熱雑音制限となり, 現時点ではマイクロプラズマが大きくて良好な S/N を望めぬ. 大きい電流増倍率をもつ PM では $IM^2 R_{eq}$ を極めて大きく, 例えば 1000 M Ω 程度にまでできるので熱雑音はショット雑音に比べて無視できる. ただ, 広帯域にして, 8 GHz 程度まで周波数応答をもたせるためには, 横磁界型の PM を用いる必要がある. 現在のところ, 実用できる検波器としてはこの横磁界型の PM のみであろう.^{#1)}

こうした理由から, 光検波器として PM を用いる場合の S/N 比と受信光電力の関係を求めておく. 熱雑音を無視すると式 (0.3) より, 許容受信電力は,

$$P_R = \frac{4BF_m h\nu}{\eta} \cdot \frac{S(\text{peak})}{N(\text{rms})} \quad (0.5)$$

例として, $\lambda = 0.6328 \mu$, $B = 1.5 \text{ GHz}$, $F_m = 1.3$, としたときの S/N と P_R (dBm) の関係を図 0.3 に示す. いす, パルスの誤り率を 10^{-10} としたときの S/N は 22 dB であり, $F_a = 8 \text{ dB}$,

スライスレベル利得を 3 dB とすれば S/N = 27 dB であるから, 図 0.3 より, $\eta = 0.05$ のとき $P_R = -19 \text{ dBm}$, $\eta = 0.5$ が得られれば $P_R = -29 \text{ dBm}$ を必要とする.

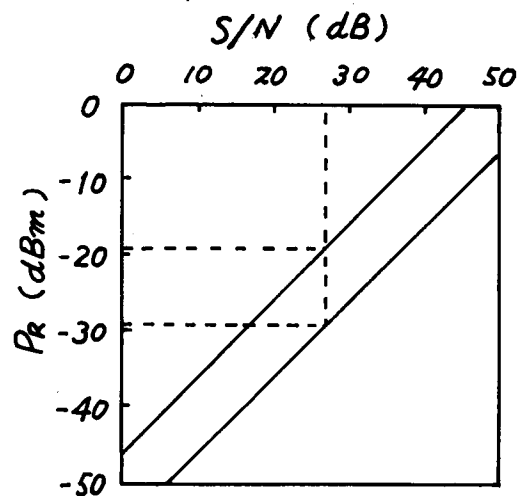


図 0.3 光検波器の S/N と許容受信電力

#1) ところが PM では高圧の直流電源を必要とするため, 実用回路で使用する際の故障率も高いので, 将来はいつでも半導体検波器におきかえなければならぬだろう.

(V) レーザ部および光変調器

レーザの出力は次第に増加しており， CO_2 レーザでは，波長 10μ で出力 1 kW (CW) に達しようとしている。しかし，遠赤外領域では高速パルス検出用の検出器が得難く，かつ伝送する際にガラス製のレンズが使用できないため，PCM方式にはやはり可視光が有望である。可視レーザのうち最も一般的な He-Ne ガスレーザでも，パルスで $2\sim 300\text{ mW}$ の出力が得られるようになり，さらに都合のよいことには，モード同期法によって ns 以下の中で， 150 Mbit (レーザ間隔 1 m) 以上のクロックパルスが得られ，PCM のクロックパルスとしてそのまま使用できる。そのほか，前に述べたような4本の可視レーザが通信に使用できよう。

変調器としては，表0.2に示すような電気光学効果をもつ透明な結晶が用いられる。従来は KDP, ADP が用いられたが，潮解性が大きく，縦方向の高電界を必要とする。KTN は常温でキューリ点をもち，半波長電圧は非常に小さいが，光の屈折率が大きく変調には不向きで，偏向用に使われるだろう。LiNbO₃ は変調感度が大きい，光によって電荷が誘起されて変調電圧をうちけす欠点がある。今のところ最も有望なのは LiTaO₃ の結晶で，潮解性がなく，例えば 11 pF の静電容量の結晶に横方向電圧 35 V をかければ， 100% 変調が可能である。内部変調または結合変調によって，レーザのクロックパルスを ON, OFF する変調が可能である。

表0.2 光変調器に用いる結晶の電気光学定数 (文献 (122) にによる)

	$\text{KTa}_{0.51}\text{Nb}_{0.49}\text{O}_3$ (KTN)	LiTaO_3	LiNbO_3	KD_2PO_4 (DKDP)
諸電率 ϵ_s	3×10^4 (T)	47 (T) 43 (S)	32 (T) 28 (S)	50 (T) 48 (S)
電気光学定数	$g_{11} - g_{12}$ $= 0.174\text{ m}^2/\text{C}^2$ (T)	$r_e = r_{33} - \left(\frac{n_1}{n_3}\right)^2 r_{13}$ $= 22$ (T) $= 28$ (S) $\times 10^{-12}\text{ m/V}$	$r_e = r_{33} - \left(\frac{n_1}{n_3}\right)^2 r_{13}$ $= 19$ (T) $= 21$ (S) $\times 10^{-12}\text{ m/V}$	r_{33} $= 26.4$ (T) $= 24.3$ (S) $\times 10^{-12}\text{ m/V}$
屈折率 $n_1 = n_2$ n_3	2.29 2.29	2.176 2.180	2.286 2.200	1.51 1.47
構成例 $3 \times 3 \times 3\text{ mm}$	横電界形	横電界形	横電界形	縦電界形 横電界形
半波長電圧	113 V (T)	2,180 V (S)	2,830 V (S)	3,780 V (S) 7,560 V (S)
静電容量	780 pF (T)	1.14 pF (S)	0.74 pF (S)	1.28 pF (S) 1.28 pF (S)

at $6,328\text{ \AA}$, (T) : constant stress (free), (S) : constant strain (clamped)

(vi) 光伝送路

送信側のレーザ出力を P_L (dBm) , 受信側の光検出器の SN 比から許される最小の受信電力を P_R (dBm) とすると, 光伝送路に許される損失 L (dB) は, L_e (dB) を送受側の損失として,

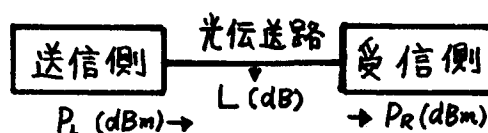


図 0.4 光通信系のレベル

$$L \text{ (dB)} = P_L \text{ (dBm)} - P_R \text{ (dBm)} - L_e \text{ (dB)} \quad (0.6)$$

となる。したがって, 光伝送路には次のことが要求される。

- ① 伝送損失 L (dB) の範囲で, できるだけ中継区間を長くとる
- ② 空間多量度 N_s をできるだけ大きくとる

例えば, 現在のところ $P_L = 25$ dBm, $P_R = -19$ dBm, $L_e = 10$ dB と考えられるから, $L = 34$ dB が伝送損失として許される。

さて, 光伝送路の最も簡単なものは, マイクロ波のように直接大気中を伝播させる方法である。光領域では, 波長がアンテナ系に比べて 1000 倍以上にとれるので回折損失は小さいが, その反面空気の擾乱による姿勢の乱れや, ビームの変動が数 cm/km になることもあるし, 加えて雨による減衰が 20 dB/km, 霧による減衰が 10^3 dB/km に達することもあり, 伝送損失を 40 dB 程度維持できるのは極く短距離に限られる。

そこで特別な光伝送路が必要である。根本的には, ミリ波やマイクロ波と共通の理論で済むわけだが, 周波数が 10^{14} Hz 以上 (波長 1μ 以下) であるために, 伝送損失や構成の際の工作精度が低周波のものと異ってくるので, かなり違った理論的検討や, 実験的うらづけが必要とされる。

現在においては, このような伝送路として, 表 0.3 に示す 2 種類のものが考えられる。その一つである導波管的なものについて検討しよう。

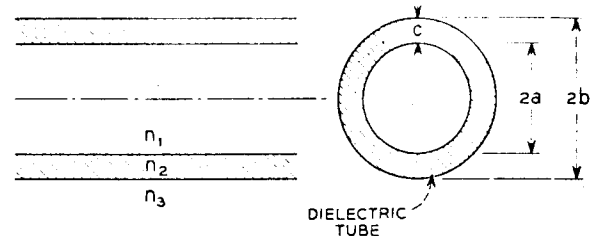
金属パイプは, ミリ波の円形導波管と同じ考えによるもので, TE_{01} 姿勢が最小の損失であり, $\lambda = 1 \mu$, 内面が光学仕上の理想的条件の下で, 管半径 a

$= 0.25 \text{ mm}$ のとき，損失は 1.8 dB/km で， 48 m の曲がりに対して損失が倍になる．しかし，工作精度からみてこれだけの損失を得ることは不可能と思われる．

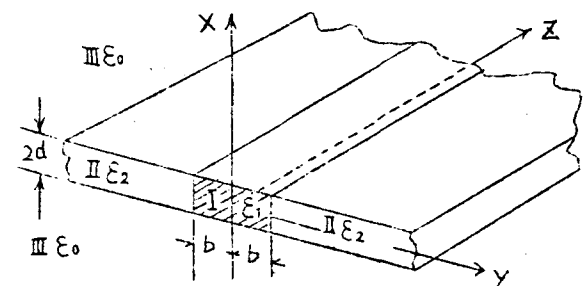
オプティカル・ファイバーは，光波の位相関係が乱れるため，長距離伝送というより，むしろ極く短かいシステムの間を結ぶために用いられる可能性がある．

複合誘電体導波管は図 0.5(a) に示す n_1 という屈折率をもつ気体を屈折率 n_2 の誘電体で包んだ導波管⁽⁶⁵⁾で， 20 気圧の CO_2 を n_1 に用い， $2a = 5 \times 10^{-4} \text{ m}$ ， $c = 10^{-5} \text{ m}$ のとき，損失は 0.05 dB/km とされているが，技術的に実現は困難と思われる．

図 0.5(b) は，不均一誘電体薄膜伝送路で，いわゆるマイクロガイドより電磁波の集中性をよくしたものと



(a) 複合誘電体導波管



(b) 不均一誘電体薄膜伝送路

図 0.5 誘電体を用いる伝送路

表 0.3 光伝送路の分類

導波管的なもの	{	金属円形導波管
		誘電体導波管 (中空誘電体, 複合誘電体)
ビーム導波系	{	誘電体薄膜導波管 (マイクロガイド, 不均一薄膜)
		非集束系 (周期的にアイリスを配列するもの)
	{	集中集束系 { 光学レンズと周期的に配列 反射鏡を周期的に配列 ガスレンズを周期的に配列
		分布集束系 { ガスレンズと縦続接続 不均一誘電体と縦続接続

考えられる。 $\lambda = 1 \mu$, $\epsilon_1^* = 1.30$, $\epsilon_2^* = 1.26$, $2d = 2b = 0.04 \mu$, $\tan \delta = 10^{-8}$ のとき、損失は 1.8 dB/km と計算される。ただ、曲がりによる損失の増加、接続点の不均一性、工精度等に今後の問題点が残されている。

次のビーム導波系では、レーザから得られるビーム状の電磁波を1つの系の中に閉じこめて伝送する方法で、表0.3のように各種のものが考えられるが、それらをまとめて本論文では、光ビーム導波系 (Light Beam Waveguide) と呼ぶ。光領域では、実験室的な寸法が波長に比べて非常に大きいので、放射された電磁波は細いビーム状となり、回折損失を小さく保ちながら伝送されるという特徴があり、有望な伝送路の一つと考えることができる。光ビーム導波系については、次節で概略を述べる。

0.2 光ビーム導波系の概要と本研究の目的

0.2.1 光ビーム導波系の概要

光ビーム導波系には表0.3に示すような各種のものがあげられるが、管によって外気から遮断された雰囲気の中でビーム状にした電磁波を伝播させるという点で共通の特徴をもっているといえよう。

最も簡単なものは、図0.6に示すように周期的に Iris を用いる非集束系である。これはちょうど平面ファブリペロー共振器と等価であり、この導波系を共振器の状態で励振すれば、その回折損失で済む伝送損失をもつ導波系になり得る。ただ、曲がりがあると急激に損失が増加する。

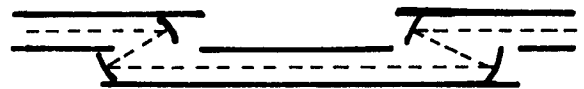
このような回折効果を補正して損失を減らし、曲がりに対してもビームを追従させるために、図0.7のように



図0.6 周期的に Iris を用いる非集束系



(a) 光学レンズを用いるもの



(b) 反射鏡を用いるもの

図0.7 集中型集束素子を用いるもの

レンズや反射鏡などの集中的な集束素子を周期的に配置する方法が考えられる。

まず，レンズを用いる型式は，図0.7 (a)のように焦点距離 f のレンズを間隔 $2l$ で周期的に配置するもので，途中の空間をパイプで覆う。この構成で伝送される状態はエルミート・ガウス型のビーム状態であり，そのスポットの変化は図に示すように，レンズ上で最大値をとり

$$w_c = \sqrt{\frac{f}{R}} \left(\frac{f}{2l} - \frac{1}{4} \right)^{-\frac{1}{4}} \quad (0.7)$$

で表わされる。 $f=l$ の共焦点の条件で w_c は極小となり，

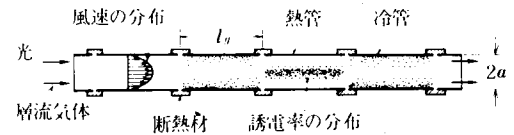
$$w_{cm} = \sqrt{2l/R} = \sqrt{l\lambda/\pi} \quad (0.8)$$

例えば，一定の $2l=100\text{ m}$ ， $\lambda=0.63\mu$ とすると， $w_{cm}=4.5\text{ mm}$ となる。レンズの中間位置でのスポットサイズ w_m は w_{cm} の $1/\sqrt{2}$ になる。図0.9に， w_c ， w_m と f/l の関係を示す。

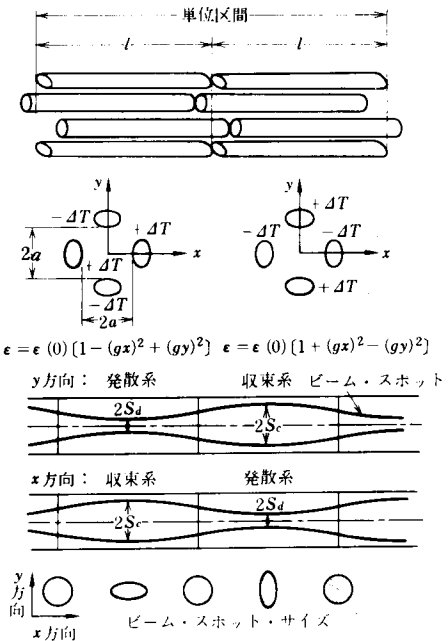
また，導波系に曲がりをもたせるには，ビームをレンズの中心から a だけずらして入射させてレンズの偏向作用を利用する。このときに実現できる曲がりの曲率半径 R は， $f=l$ のとき，

$$R = 2l^2/a \quad (0.9)$$

と表わされる。 $2l=100\text{ m}$ ， $a=3\text{ cm}$ としても， R は百m以上となり，急な



(a) 層流型ガスレンズ



(b) 双曲線型ガスレンズ

図0.8 分布型集束素子を用いるもの

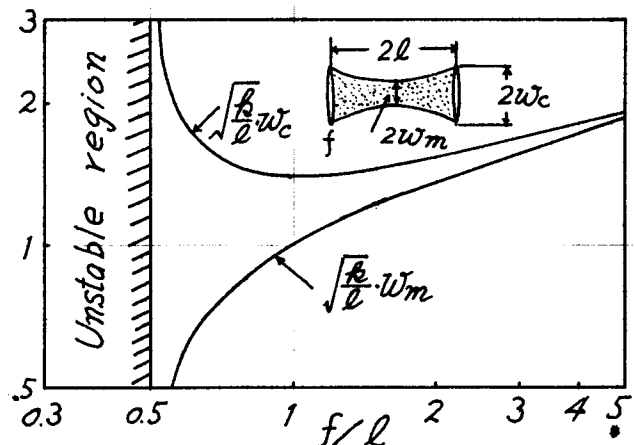


図0.9 単レンズ列導波系の伝送状態

曲がりには期待できない。また長距離になると、レンズがランダムに位置の変動をする場合があり、伝送されるビームの中心が導波束の中心軸からずれて損失となる。また、パイプ中の空気の温度差によるビームの偏向や変動も損失の増加を伴うだろう。特に日本のように地形が変化に富み、比較的急な曲がりが必要とし、地震などの地盤の変動の多い所では、この図0.7(a)のレンズを用いる導波束を基本にして、上に述べたような問題を解決し、改善を加えていく必要がある。

次にレンズの代わりに反射鏡を用いる方法があるが(図0.7(b))、レンズよりも反射による損失を小さくでき、急な角度で曲げられるが、反面、反射鏡の変動によるビームの変動がレンズよりも大きくなる欠点がある。

ガラス製の光学レンズや反射鏡の他に、集束素子としてガスレンズ(横方向における気体の誘電率に分布をつくり、レンズ状にしたもの)を用いる方法も考えられる。光学レンズや反射鏡に比べて反射損失のほとんどない長焦点の集束素子が簡単に実現できるが、誘電率の分布をつくるために電力を消費すること^{#1)}、集束性が非常に弱いために曲がり変動に対するビームの追従性が悪いこと、製作費の問題等、実用的見地からするとなお検討の余地が残されている。

最後に、上に述べたガスレンズと連続的に接続する分布集束素子が考えられる。この具体的方法とは、図0.8に示す層流型ガスレンズ、双曲線型ガスレンズと縦続接続するものが代表的に考えられる。これに対しても上に述べたと同じ問題がある。また、気体の代わりにガラス等の誘電体の誘電率を分布的に不均一にするものでは、上記の問題はなにかかりに、誘電体損が大きい材料の点で問題になる。

以上は、本研究のはじめられた当初における光ビーム導波束の概略であつた。もう少し詳しく問題点がどこにあつたかを述べる前に、この分野に関する歴史的背景を明らかにしておく必要がある。

#1) 管と熱い水、熱導体に温度分布をもたせるために必要となる。

0.2.2 内外における光ビーム導波系研究の歴史

いままで、本研究の始められた1965年前後における導波系の概要について平面的に見てきたが、それらがどのグループでいつごろはじめられ、また現在に到るまでの研究経過がどのようなものであつたかを示し、今からまとめようとする本研究の位置がそれらのどこにあるかを明確にしておく必要がある。そういった意味で、内外におけるこの分野の研究の成果を年代順（発表文献によつて）に表0.4にまとめてみた。

光ビームをパイプを通して伝送しようとする試みは、米国のU.S. Army Electronics Command の Goubau らによつてまず始められ、焦点距離50mの光学レンズ10コを用い、途中をパイプで包んだ約1kmの伝送路が地上に設置された。⁽²⁾⁽³⁾ このときの光源はXeランプであつたが、この年にJavanらによつてHe-NeのCWガスレーザが発振に成功しており、その後光源をレーザにかえて実験を続けている。⁽¹¹⁾⁽³²⁾ 最近の報告によると、パイプ中の空気を10mmHg程度に減圧して伝送損失0.5 dB/kmという値を出した。⁽¹⁰⁹⁾ このほとんどがレンズ面の反射損失(0.02~0.05 dB/lens)によるものである。

一方、Bell Telephone Laboratory (BTL) では、1961年にBoydとGordonによつて球面ファブリ・ペロー共振器の理論的な検討が行われ、⁽¹⁾ 共振器の固有姿態がエルミート・ガウス型になることが明らかにされた。後にファブリ・ペロー共振器の理論を発展させたKogelnikは、光ビーム伝送路の解析に光線マトリクスを用いることを提案した。⁽³⁷⁾ 1964年にDegenfordらは、2枚の99.5%の反射率をもつ二枚の反射鏡を約100 mの間隔で配置して途中をパイプで包んだファブリ・ペロー共振器で、シャトルパルス法による測定を行いこの間の伝送損失を求めた。⁽¹⁵⁾ すなわち、He-Neガスレーザから得られるビームを回転鏡によつて0.2 μsecのパルスにして共振器に入れ、多重反射させることによつて周期的な導波系と等価な効果を出している。反射鏡の透過損失0.5%を降けば、損失は途中の空気の吸収、散乱損失のみで、この値は0.23 dB/km以下であるという。

表0.4 光ビーム導波系の研究の歴史

年	レーザ技術	内外の光ビーム導波系の研究推移
60	ルビ-レーザ	
61	He-Ne ガスレーザ	Bell Telephone Lab. (1) Boyd, Gordon (5) Fox, Li U.S. Army Electronics Command (2)(3) Goubau, Christian, Schwering
62	半導体レーザ	Fabry Perot Resonator Lens Waveguide
63		通研 (7) 大森
64	レーザ, モードロック (APL, Nov. 1964)	Gas Lens (16) Berreman Degenford (15) SirRis, Steier Kogelnik (37) (20) Mirror Marcuse (30) Marcanti (35) Tien et al (41) Unger (51) Steier Gloge (68) Steier (76) Gloge (111) USSR (31) Bazantov (32) (90) BOYTOBYCH (109) (110) Ray Stability (11) (14) 平野, 深津 (29) 大阪 Mirror Waveguide (87) 熊谷, 吉田, 戸床 (a1) 杉本, 鈴木 (102) 青木 (a3) (114) (121) Gas Lens & Random Med. 東工大 Beam Waveguide (47) 末松 吹枝 (74) 末松 (77) 末松 伊賀 依枝 (91) 末松, 伊賀 (101) 末松, 伊賀 依枝 (119) 末松, 伊賀 依枝, 長崎, 北野
65		Ray Stability Ray Stability & Lens Waveguide
66		
67		
68		

また、同所のミリ波伝送グループの Berreman, Mirror らは 1964~5 の 2 年間にガスレンズを開発し⁽⁷⁶⁾、主に集束性に関する理論的、あるいは実験的な検討を行った⁽²⁰⁾⁽³⁰⁾。さらに 1965 年以後、Unger によるレンズ状媒質中の⁽⁴¹⁾、Steier によるレンズなどの束子偏差がある場合の⁽⁷⁶⁾、Gloge による回折を伴う場合⁽⁶⁸⁾のそれぞれビームの安定性に関する報告が行われた。BTL でも最近 Gløge によって、地下約 1.5 m

のところに図 0.10 のような長さ 800 m の伝送路が埋設され、主に季節の温度変化によるビ

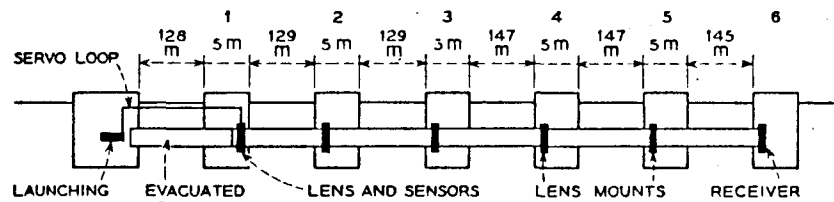


図 0.10 BTL における地下 1.5 m に埋設された光ビーム導波系⁽¹¹¹⁾

ームの位置変動を測定が行われた⁽¹¹¹⁾。この報告によると、地面の季節による温度勾配は $0.02^{\circ}\text{C}/\text{cm}$ であり、これにより 2 cm のビーム偏位がおこるが、この変化は緩慢で、導波系を地下に埋めれば減圧することなく光ビームの伝送が可能であると結論している。

これらとは独立に、ソヴィエトにおいてもレンズを用いる導波系の安定性の問題が Banahov⁽³¹⁾、Boïmoby⁽⁹⁰⁾ らによって検討された。後者では、レンズの口径が有限であることを考慮に入れたビームの中心の運動と、伝送損失が求められた。

日本においても、電々公社通信研究所(通研)で、1963 年頃から反射板によるミリ波伝送路に関連した導波系の研究がはじまり⁽⁷⁾、別に平野・深津らはレンズを用いる導波路で、レンズがランダムに位置変動しているとき、ビームの中心軸からのずれは $\sqrt{\text{レンズ個数}}$ に比例することと導びいた⁽¹⁴⁾⁽²⁹⁾。

大阪における阪大、住友電工のグループも、反射板を用いる型のビーム導波路の問題ととり組んでおり、最近では不均一誘電体薄膜伝送路(図 0.6(b))の提案と解析が行われた。⁽⁸⁷⁾⁽¹¹⁴⁾

名古屋大学のグループは、伝送路に用いるレンズの特性と詳しく検討した^{(a2)(115)}。また、北海道大学では、ランダム媒質中の光ビーム伝播の問題、ガスレン^{(a1)(121)}

(102)(93)

ズに関する解析と実験の報告があった。

東京工業大学における光ビーム導波系の研究は、1964年後期からガスレンズの解析を先導として⁽⁴⁷⁾⁽⁷⁷⁾、姿態変換効果の検討⁽⁹¹⁾、双曲線型ガスレンズの提案⁽⁷⁴⁾と実験報告⁽¹⁰¹⁾、さらには導波系子対を用いる導波系やガウス・モードフィルタを用いる導波系⁽¹¹⁹⁾についてのビームの安定性の検討等が引続いて行われ、報告された。また、実験的な伝送路が設置され、実験が続けられている。

0.2.3 本研究の目的と方法

光ビーム導波系の概要と、研究の歴史的な推移は以上のようなものであるが、本研究が始められた1965年のはじめにおけるこの方面の問題点がどこにあったかについて触れ、本研究の目的を明らかにしておく必要がある。

光ビーム導波系に関する問題点と、本研究の目的をまとめると次のようになる。すなわち、

- (1) ビーム波の性質と、種々の導波系子のビーム波に対する応答について検討すること。この中には、ビーム波と光線の関係の吟味、当時厳密な取扱いがなされていなかった層流型ガスレンズの集束性の検討、双曲線型ガスレンズの集束性の実験的検討などがあげられる。
- (2) 導波系の伝送損失に関係していると思われる基本的な問題の検討。具体的には、次の2つのものが数えられる。
 - ① ビームの伝送姿態が、導波系子の不完全性によって不安定になること
 - ② ビームの中心が、導波系子の位置変動などで導波系の軸からずれるような、いわゆるビームの不安定性。
- (3) これら2つの不安定性を軽減、抑制する方法をみつけること。

各項目に対する問題点の吟味は各章の冒頭にゆずることにして、次に本研究の方法について触れておく。

本論文で用いた解析の方法としては、(i)ビーム姿態の表示には、エルミ-

ト・ガウスあるいはラゲール・ガウス型のTEM波近似によるビーム姿態を，(ii)ビームの中心の運動の表示には，光路方程式に従う光線表示を，それぞれ統一的に用いた。これらの方法は，電磁界を表わす上でのあくまで1つの近似であるが，波長の短い（ 1μ 以下）光波領域では近似度が高く，実験的に得られる現象とよく説明し得る結果を導くことができた。

また，ビーム波に対する集束性の測定には，光源として主にHe-Neガスレーザーから得られる，波長 $6328\text{\AA}$ のガウスビーム波を用いた。このため，種々の計算に用いる自由空間の伝搬定数は，特にことわらない限り，この波長に対する

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 9.929 \times 10^6 \quad (1/m) \quad (0.10)$$

を念頭においている。

測定の際には，ビーム波に対して従来の光学を用いている方法がそのまま適用できる場合もあり，また電子回路やマイクロ波の分野では確立されている常套的な測定法が，ここでは未開拓であるため，測定法は各々の場合に即した独自の方法によった。なお，温度や，気体の流量の測定法は，本学の栗野満教授，河田治男助教授，竹中俊夫助教授に御教示願った。

0.3 本論文の内容梗概

0.3.1 本論文の構成

本論文の構成としては，序論を別にして2つの編に分かれているが，それぞれ独立して行われたものではなく，1編では主に光ビーム導波系に関する基本的な問題（例えば，伝送姿態，ビーム波の性質，導波素子の性質，姿態変換，ビームの安定性など）についての検討が，2編では2,3の新しい構成による導波系の提案と，その設計に関して行った検討が，それぞれの中心をなしている。

次に順を追って，各章の内容を述べる。

0.3.2 本論文の内容梗概

序論では，レーザを用いる超多重通信方式の概要，光伝送路の概要と内外における研究の歴史，本研究の初期における問題点と本研究の目的を述べた。

1 編では，光ビーム導波系に関する基礎的な問題の検討を行った。

1 章では，まず本論文を通じて用いているエルミート・ガウスあるいはラゲール・ガウス型のいわゆるビーム姿態の表示について述べ，ビーム波の TEM 波近似の近似度について吟味した。次に，ビームの媒質内での軌跡つまりビーム光路について述べ，ビーム波が光線の集合であるという見方として，ビーム波の中心を占める光線の軌跡によってビーム光路が近似的に求められることを強調した。最後に，ガウス波の波面係数の変換を表わす F マトリクス，光路の変換を表わす変形光線マトリクスの一般的性質をまとめた。

2 章では，光ビーム導波系に用いる導波素子の性質についての検討を行ない，導波素子と集中型導波素子と分布型導波素子に分けて，それぞれの F マトリクス，変形光線マトリクスを求めた。Snell の法則に従う導波素子では F マトリクスと変形光線マトリクスは一致するが，回折効果を伴う素子では両マトリクスは一致しないことを明らかにした。また回折効果を伴う素子の一つとして，電力透過率が横方向にガウス型の分布をもっているガウス・モードフィルタを提案し，これが導波系におけるビームの不安定性を改善する可能性のあることを示した。

3 章では，分布型集束素子の典型的な例の一つである層流型ガスレンズの，従来厳密な検討がなされていなかった集束性について，理論的，実験的な検討を行った。この型のガスレンズは軸方向にも誘電率の分布があるため，軸方向を小区間に区切り，その間のマトリクスを求めて，それらの積で全体の集束性を表わす F マトリクスを計算した。その際，気体定数によらず温度変化の影響を考慮して求めた理論値は，試作したガスレンズを使用して実験的に求めた集束性を表わす測定値とかなり良く一致した。これによって，解析法の正しいことが証明され，図表にした F マトリクス要素は，この型のガスレンズの設計に関する一資料となった。

4章では、静止気体を用い、1気圧で集束性をもつ双曲線型ガスレンズの集束性を主に実験的に検討した。導体間隔の異なる7種類のガスレンズを試作し、導体間隔が比較的小さく集束性の強い型に対してはレーザ光により、また導体間隔が大きくて集束性が弱い型にはオートコリメータを用いて集束性の測定を行って、導体間に与える温度差のある限界内ではほぼ理論通りのレンズ作用をもってゐることを確かめた。これらの測定から、正常にレンズ状態として動作する温度差の限界は、導体間隔 $2a$ のみによって一義的に決まることを明らかにし、この型のガスレンズを用いる導波束の設計に一つの制限を与えるものとなった。

5章では、導波束を構成する集束素子の曲がり変動、ランダムな位置変動、あるいは素子偏差のためにおこるビームの不安定性について検討した。これには従来の方法を拡張した一般的な変形マトリクスを用いて、まず導波束の曲がり変動に対する影響を、次にランダムな素子の変動によっておこるビーム変動の統計2乗平均値を計算した。従来知られていなかった、ガウス・モードフィルタのように変形光線マトリクスの行列式が1より小さい素子を用いることによって、これらのビーム変動が軽減、抑制されることを示した。次に、空気中に屈折率のランダムな変化があるとき、これをモデル化によって線型なマトリクス計算を行い、ビーム変動の2乗平均値が距離の $3/2$ 乗に比例するという Chernov の理論と同じ結果を得た。最後に、“変動素子のみでは光ビームの不安定性を抑制することが物理的に不可能である”という Marcuse の理論が、分布的な損失を伴うような場合に対しては成り立たないことを示し、安定性を改善することが不可能ではないという結論を得た。

6章では、光ビーム導波束における姿態変換効果の問題を新しく提起して、まずその影響について検討して姿態変換がおこると、1. 回折損失が増加すること、2. 将来、極めて高速のパルス変調が可能になると姿態による遅延が問題になること等の結論を得た。次に、種々の導波束に対する姿態変換率 η (= 姿態変換された波の電力 / 入射ガウス波の電力) を求めた。まず、

レンズ状媒質の誘電率の変化が $\epsilon(r) = \epsilon(0) [1 - (gr)^2 + (hr)^4]$ で表わされるように、理想的な2次元分布に加えて微小な4次変化項が存在する場合の η を、摂動法によって求めた。その結果、入射するガウス波のスポットサイズをレンズ状媒質の固有スポットサイズに近づけることによって姿態変換を小さくできることが明らかになったが、層流型ガスレンズによる実験で、このことを定性的に示しているが確かめた。また、双曲線型ガスレンズが極めて姿態変換の少ない素子であることを指摘した。さらにレンズや反射鏡の面が放物面からなれているときの姿態変換率を求め、偶数次の変化項に対しては面の歪みとスポットサイズの増加によって姿態変換率が著しく大きくなること、奇数次変化項はビームの偏向を伴うことを明らかにした。

7章は、1編全体の総括であり、各種導波素子を集束素子、偏向素子、光線変動抑制素子等に分けて比較検討した。

2編とは、光ビーム導波素子に要求される問題点として、(i)姿態変換や反射等による損失ができるだけ小さいこと、(ii)曲がり部において、小さな曲率半径で曲げられ、かつビームの安定性が良いこと、(iii)素子のランダムな変位や、素子偏差によって生ずるビームの不安定性を抑制する方法を開発すること、などを挙げ、これらに対する一つの解決策として新しい構成の導波素子を提案し、その設計に重点をおいて検討した。

8章では、双曲線型ガスレンズを用いる導波素子の提案と設計について述べた。伝送損失を小さくするために、反射損失の小さいガスレンズを用いることが考えられるが、双曲線型ガスレンズではさらに、姿態変換が小さいこと、ほぼ理論通りのレンズ作用が1気圧の空気を用いて得られること、設計が厳密に行われることなどの利点をもっている。ここでは、従来の構成と異なりガスレンズの間に自由空間をはさむような配置についての、伝送伝達、姿態整合、最適設計に関する検討、ならびに素子の変動によるビーム変動の算定を行った。最後に、試作した1区間(1.2m)の双曲線型ガスレンズを用い、

凸と凹のシリンドリカルレンズでレーザ部との姿勢整合ととしてビームを送し、上記の設計でよいことを確かめた。

9章では、曲がり部において小さい曲率半径で曲げられ、かつ集束集束子の位置変動に対して比較的ビームの安定性が損われなような構成の一つとして、レンズあるいは反射鏡を対にして用いる導波系の提案と、最適設計、ビームの安定性の検討等を行った。この方法は、比較的短かい焦点距離をもつレンズあるいは反射鏡を対にして用いると、等価的には長焦点のレンズとなるが、レンズを異軸にすると単レンズの場合に比べて1けた以上も曲率半径を小さくできるというものである。ただし、曲がり部では導波集束子の位置変動や傾きによるビームの変動が直線部よりも大きくなり、曲げ得る曲率半径には制限ができる。この章に示された算定によると、1素子当りの平均曲がり角が 1° 程度の場合には、対の角変動を秒程度におさえねばならない。

10章では、このようなレンズのランダムな位置変動、素子偏差などによっておこるビームの変動を抑制し、安定性を改善するための一方法として、2章で述べたガウス・モードフィルタを併用する導波系の提案、ビームの安定性の検討、伝送損失を含めて考えた設計について述べた。レンズのみの場合には、レンズのランダムな変動と素子偏差によって指数関数的に増大するものとされていたビーム変動が、GMFにおいて抑制され、レンズやレンズ間隔の設計誤差が比較的大きくとれる。しかし、挿入損失が増加するので、この効果には制限が加わる。この方法では、基本姿勢伝送が可能であり、姿勢変換が遅延として問題になるような符号の非常に速いパルス変調に対しては1つの長所となるものと思われる。

11章は2編全体の総括で、各種光ビーム導波系について、安定性と伝送損失、曲がり部に対する問題、空間多重化の難易等の見地から比較検討を行った。

12章は、本論文の結論とした。

1 編 光ビーム導波系に関する基礎的研究

1 章 光ビーム波の基本的な諸関係

本論文を通じて用いるエルミート・ガウス型（あるいはラゲール・ガウス型）のビーム波の基本的性質について検討した。ビーム波には、スポットサイズ、波面の曲率半径などのビーム自体がもっている情報量と、ある座標軸からみた位置と傾きという相対的な情報量とがある。本章では、これら2種類の情報量の表示、すなわちビーム姿態の表示とビーム光路の表示についてまず述べ、これらが導波素子によって変換をうけるときの一般的性質についてまとめた。

1.1 ビーム姿態の表示

自由空間に存在し得る電磁波の波動方程式の固有解は $\exp[j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ で表わされる平面波であるが、この平面波の重ね合わせによって任意の形の波が存在し得る。この形は境界条件や励振の方法で一義的に決まるが、ファブリ・ペロー共振器やレンズ状媒質内では、固有解としてある細いビーム状の電磁波の姿態が存在する。これはいわゆるビーム姿態 (Beam Mode) と呼ばれるもので、波長に比べて実験室系の大きさが非常に大きいとき、近似よく電磁界のふるまいを表わすことができる。

このビーム姿態は、いわゆるエルミート・ガウスあるいはラゲール・ガウス型の関数で表わされ、BoydとGordonが共焦点構成のファブリ・ペロー共振器内の共振姿態を求めて以来、色々な方法によって導入された。それらの主なものをあげると次のようになる。

(I) ファブリ・ペロー共振器の固有姿態

○ ホイヘンスの原理による積分方程式の解⁽¹⁾

・波動方程式の回転楕円座標による解⁽⁹⁾

(II) 円筒波の合成による解⁽²⁾

(III) レンズ状媒質の固有状態^{(3b) (47)}

ここでは、後の章で述べる状態変換と関連しているので、レンズ状媒質の固有状態として導入する。

1.1.1 レンズ状媒質における波動方程式

いま、媒質に損失がなく、透磁率が一定で、誘電率 ϵ が次式で表わされる場合を考える。すなわち、 $\epsilon(0)$ を z 軸上での誘電率として横方向の分布が

$$\epsilon(x, y) = \epsilon(0) [1 - (g_1 x)^2 - (g_2 y)^2]$$

このとき、時間変化 $e^{j\omega t}$ に対するマクスウェルの方程式は

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} & \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\epsilon\mathbf{E} \\ \nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E}) &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1a)$$

電界、磁界がそれぞれ $\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)$, $\mathbf{H} = (0, H_y, H_z)$ で表わされる状態を考えると、これらは

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega\mu H_y & \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu H_z \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j\omega\epsilon E_x & \frac{\partial H_y}{\partial x} &= -j\omega\epsilon E_z \end{aligned} \quad (1.1b)$$

まず、電界に関する方程式は

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \right) \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} k^2 = \omega^2 \mu \epsilon(x, y) = k_0^2 [1 - (g_1 x)^2 - (g_2 y)^2] \\ k_0^2 = \omega^2 \mu \epsilon(0) \end{cases}$$

ここで

$$\nabla \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x} \cdot \mathbf{E} \right) \cong \nabla \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x} \cdot \mathbf{E} \right) = \left(-2g_1^2 \left\{ E_x + x \frac{\partial E_x}{\partial x} \right\}, 0, 0 \right)$$

であるから E_x に関する方程式は,

$$\nabla^2 E_x + k^2 E_x = 2g_1^2 E_x + 2g_1^2 x \frac{\partial E_x}{\partial x} \quad (1.3)$$

いま考えている光の領域では, $k_0 \cong 10^7$ (1/m), $g \cong 1 \sim 10$ (1/m), $x \cong 10^{-2}$, であり, E_x は x に対して緩やかに変化あるものとするれば, 右辺の各項は g/k_0 程度の微小項となるから省略できる #1). すると電界に関する方程式は

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (1.4)$$

となる.

一方, 磁界に関する方程式は, 簡単な検討によって次のようになる. #2)

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (1.5)$$

したがって, 電界, 磁界の各成分は全く同じ形の方程式で表わされるから, 代表的に電界の横方向成分 E_x について解けば十分である. すなわち,

$$\nabla^2 E_x + k^2 E_x = 0 \quad (1.6)$$

を解けばよい. また, 他の電磁界の成分は, 式(1.1b)から求めることができる.

$$\#1) (i) \quad k^2 - 2g_1^2 = k_0^2 \left[1 - 2 \left(\frac{g_1}{k_0} \right)^2 - (g_1 x)^2 - (g_2 y)^2 \right]$$

$$1 \gg \underbrace{(g_1 x)^2}_{10^{-2}} \gg \underbrace{(g_1/k_0)^2}_{10^{-12}}$$

$$(ii) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} \approx - \frac{x}{w_0^2} E_x = -g_1 k x E_x$$

$$k^2 E_x - 2g_1^2 x \frac{\partial E_x}{\partial x} \approx k_0^2 \left[1 - (g_1 x)^2 \{ 1 + 2g_1/k_0 \} - (g_2 y)^2 \right] E_x$$

$$g_1/k_0 \approx 10^{-6} \ll 1$$

$$\#2) \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = - \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) \cdot \nabla \times \mathbf{H}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \left(-2g_1^2 x \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right), 0, 0 \right)$$

を得る。ただし \$x\$ の正方向への進行波のみを考えている。

\$x, y\$ 方向は全く同型であるから、式 (1.9b) より代表的に \$x\$ について解くと
 $X(x) = F(x) e^{-(dx)^2}$ とおくと

$$\frac{d^2 F}{dx^2} - 4d^2 x \frac{dF}{dx} + [-C_1 - 2d^2 + \{4d^4 - k^2(0)g_1^2\}x^2]F = 0 \quad (1.11)$$

ここで、\$x^2\$ の係数が 0 になるように \$d\$ を選ぶと

$$d^2 = (1/2) k(0) g_1 \equiv 1 / (2w_{01}^2) \quad (1.12)$$

式 (1.11) は \$X/w_{01} = \xi\$ と置換すれば

$$F''(\xi) - 2\xi F'(\xi) - (C_1 w_{01}^2 + 1) F(\xi) = 0 \quad (1.13)$$

特に

$$C_1 w_{01}^2 + 1 = -2p \quad (p \text{ は正整数}) \quad (1.14)$$

のとき、式 (1.13) はエルミートの微分方程式 (Type A)^{#1} となり解は

$$X(x) = H_p(x/w_{01}) e^{-\frac{1}{2}(x/w_{01})^2} \quad (1.15)$$

を得る。したがって、\$x, y\$ 両方向あわせて

$$\left\{ \begin{aligned} E(x, y) &= H_p\left(\frac{x}{w_{01}}\right) H_q\left(\frac{y}{w_{02}}\right) e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{w_{01}}\right)^2 + \left(\frac{y}{w_{02}}\right)^2\right]} e^{-j\beta z} \end{aligned} \right. \quad (1.16a)$$

$$\beta^2 = k^2(0) - (2p+1)k(0)g_1 - (2q+1)k(0)g_2 \quad (1.16b)$$

$$w_{01} = 1 / \sqrt{k(0)g_1}, \quad w_{02} = 1 / \sqrt{k(0)g_2} \quad (1.16c)$$

また、 $k(0) \approx 10^7 \text{ 1/m}$ (光波の領域) で通常のレンズ状媒質では $g \approx 1 \text{ 1/m}$ がその上限であると思われるから、 p, q にあまり大きな値を考えないときは

$$k^2(0) \gg (2p+1)k(0)g_1, \quad k^2(0) \gg (2q+1)k(0)g_2 \quad (1.17)$$

#1) エルミート多項式の定義には 2通りある。これについては付録に示す。

#2) ガスレンズを念頭に置いている。

としてよい。このとき

$$\beta \cong k(0) - (p + \frac{1}{2})g_1 - (q + \frac{1}{2})g_2 \quad (1.18)$$

とすると、式(1.16a)は

$$E(x, y) = H_p\left(\frac{x}{w_{01}}\right) H_q\left(\frac{y}{w_{02}}\right) e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{w_{01}}\right)^2 + \left(\frac{y}{w_{02}}\right)^2\right]} \\ \times e^{-j k(0)z + j(p + \frac{1}{2})g_1 z + j(q + \frac{1}{2})g_2 z} \quad (1.16a')$$

これがレンズ状媒質(集束系)の固有状態であって、入射端におけるスポットサイズ w_{01} , w_{02} は伝播の際にも変化しない。これは回折によって広がる効果と、レンズ状媒質の集束の効果とが釣り合った状態であると解釈できる。

なお、このエルミート・ガウス状態は非常に良い近似でビーム状電磁波の記述としていえるが、式(1.16a')では

1. 完全にマクスウェルの方程式を満足してはいないこと
 2. $k(0) \gg pg_1$ が成りたたないような状況では近似が悪くなること
- 等を注意しておく必要がある。

(ii) 円筒座標による解

$g_1 = g_2 = g$ のような式(1.7b)のように誘電率分布が表わされるとき式(1.6)の波動方程式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2(0) [1 - (gr)^2] E = 0 \quad (1.19)$$

$E = R(r) \Theta(\theta) Z(z)$ とおくと式(1.19)は

$$\begin{cases} \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + [k^2(0) + C_1] = 0 & , & \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + C_2 = 0 \\ (1.20a) & & (1.20b) \\ \frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - [k^2(0)(gr)^2 + C_1] - \frac{C_2}{r^2} = 0 & (1.20c) \end{cases}$$

式(20a)より z に関しては

$$Z(z) \propto e^{-j\beta z} \quad , \quad \beta^2 = k^2(0) + C_1 \quad (1.21)$$

式(1.20b)より

$$\textcircled{H}(\theta) = \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases} \quad C_2 = -m^2 \quad (m \text{ は 整数}) \quad (1.22)$$

したがって、式(20c)は

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \left[k^2(0) (gr)^2 + C_1 + \frac{m^2}{r^2} \right] R = 0 \quad (1.20c')$$

ここで、 $\xi = \alpha^2 r^2$ 、 $R = \xi^{\frac{m}{2}} F(\xi) e^{-\frac{\xi}{2}}$ と置換すれば

$$\xi F''(\xi) + (m+1-\xi) F'(\xi) - \left[\frac{1}{4} \{ k^2(0) g^2 / \alpha^4 - 1 \} \xi + \frac{1}{2} (m+1) + \frac{C_1}{4\alpha^2} \right] F(\xi) = 0 \quad (1.20c'')$$

ξ の係数を0になるように選ぶと

$$\alpha^2 = k(0)g \equiv 1 / w_0^2 \quad (1.23)$$

また、 $C_1 / 4\alpha^2 - 1/2(m+1) = n-m$ なるように選ぶと、式(1.20c'')はラゲールの微分方程式 (Type A) #1)

$$\xi F''(\xi) + (m+1-\xi) F'(\xi) + (n-m) F(\xi) = 0 \quad (1.24)$$

この解はラゲール多項式で与えられる結局、

$$\left\{ \begin{aligned} R(r) &= \left(\frac{r}{w_0} \right)^m L_n^m \left(\frac{r^2}{w_0^2} \right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{w_0} \right)^2} \end{aligned} \right. \quad (1.25a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \beta^2 &= k^2(0) - 2k(0)g(2n-m+1) \end{aligned} \right. \quad (1.25b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} w_0 &= 1 / \sqrt{k(0)g} \end{aligned} \right. \quad (1.25c)$$

同様に $k(0) \gg gn$ のとき、

$$\beta \cong k(0) - (2n-m+1)g \quad (1.26)$$

とすれば、式(1.25a)は

$$E(r, \theta, z) = \left(\frac{r}{w_0} \right)^m L_n^m \left(\frac{r^2}{w_0^2} \right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{w_0} \right)^2} \begin{pmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{pmatrix} e^{-jk(0)z + j(2n-m+1)gz}$$

(1.25a')

まとめ

直角座標

$$E(x, y, z) = u_p(x; w_0) u_q(y; w_0) e^{-jR(0)z + j(p+\frac{1}{2})g_1 z + j(q+\frac{1}{2})g_2 z} \quad (1.26)$$

$$u_p(x; w) = \frac{1}{[2^p p! \sqrt{\pi} w]^{\frac{1}{2}}} H_p\left(\frac{x}{w}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{w}\right)^2}, \quad (1.27)$$

円筒座標

$$E(r, \theta, z) = \phi_{nm}(r, \theta; w_0) e^{-jR(0)z + j(2n-m+1)g z} \quad (1.28)$$

$$\phi_{nm}(r, \theta; w) = \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n!)^2 \pi w^2}} \left(\frac{r}{w}\right)^m \begin{pmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{pmatrix} L_n\left(\frac{r^2}{w^2}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{w}\right)^2} \quad (1.29a)$$

$$\phi_{n0}(r, \theta; w) = \sqrt{\frac{1}{(n!)^2 \pi w^2}} L_n\left(\frac{r^2}{w^2}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{w}\right)^2} \quad (1.29b)$$

1.1.3 伝送変態

レンズ状媒質（集束系）の固有姿態が式(1.26)～(1.29)のように求められたが，レンズ状媒質に任意のスポットサイズをもつガウス波が入射したときの伝送変態は，入射波を固有姿態で展開することによって計算できる。⁽³⁰⁾⁽⁴⁰⁾⁽⁴⁷⁾

ここでは結果のみを示す

(i) 直角座標

$$z=0 \quad E = E_0 H_p\left(\frac{x}{s_1}\right) H_q\left(\frac{y}{s_2}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{s_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{s_2}\right)^2} \quad (1.30)$$

$$z=z \quad E = E_0 \sqrt{\frac{s_1 s_2}{w_1 w_2}} H_p\left(\frac{x}{w_1}\right) H_q\left(\frac{y}{w_2}\right) e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{w_1^2} + j\frac{R(0)}{R_1}\right]x^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{w_2^2} + j\frac{R(0)}{R_2}\right]y^2} \\ \times e^{-jR(0)z + j(p+\frac{1}{2})\tan^{-1}F_1 + j(q+\frac{1}{2})\tan^{-1}F_2} \quad (1.31)$$

(ii) 円筒座標

$$z=0 \quad E = E_0 \left(\frac{r}{S}\right)^m L_n^m\left(\frac{r^2}{S^2}\right) \left(\frac{\cos m\theta}{\sin m\theta}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{S}\right)^2} \quad (1.32)$$

$$z=z \quad E = E_0 \left(\frac{S}{w}\right) \left(\frac{r}{w}\right)^m L_n^m\left(\frac{r^2}{w^2}\right) \left(\frac{\cos m\theta}{\sin m\theta}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w^2} + j\frac{R(0)}{R}\right)r^2} \\ \times e^{-jR(0)z + j(2n-m+1)\tan^{-1}F} \quad (1.33)$$

(iii) 各パラメータの変化

ここで式(1.30)～(1.33)に現われる各パラメータの種々の系における値を次の表1.1に示す。ただし、ここで種々の系とは、横方向での誘電率を

$$\varepsilon(r) = \varepsilon(0) [1 - (gr)^2] \quad (1.7b)$$

とおいたとき、

- ┌ 集束系 ... $g^2 > 0$ で、集束性のレンズ状媒質
- ├ 自由空間 ... $g \rightarrow 0$ とおいた均一な空間
- └ 発散系 ... $g \rightarrow ig$ とおいた発散性のレンズ状媒質

で表わされる媒質のビーム波に対する性質をさすものとする。

次に各パラメータについて多少の説明を加えておこう。

表1.1 パラメータの変換

集束系	自由空間	発散系
$w = S \sqrt{\cos^2 gZ + \left(\frac{w_0}{S}\right)^4 \sin^2 gZ}$	$w = S \sqrt{1 + \left(\frac{Z}{S^2 R(0)}\right)^2}$	$w = S \sqrt{\cosh^2 gZ + \left(\frac{w_0}{S}\right)^4 \sinh^2 gZ}$
$R = 2R(0)w_0^2 \frac{\cos^2 gZ + \left(\frac{w_0}{S}\right)^4 \sin^2 gZ}{\left[\left(\frac{w_0}{S}\right)^2 - 1\right] \sin 2gZ}$	$R = \frac{R(0)S^4}{Z} \sqrt{1 + \left(\frac{Z}{S^2 R(0)}\right)^2}$	$R = 2R(0)w_0^2 \frac{\cosh^2 gZ + \left(\frac{w_0}{S}\right)^4 \sinh^2 gZ}{\left[\left(\frac{w_0}{S}\right)^2 + 1\right] \sinh 2gZ}$
$F = \left(\frac{w_0}{S}\right)^2 \tan gZ$	$F = \frac{Z}{S^2 R(0)}$	$F = \left(\frac{w_0}{S}\right)^2 \tanh gZ$
$w_0 = 1/\sqrt{R(0)g}$		$w_0 = 1/\sqrt{R(0)g}$

注 x, y 座標については、それぞれサフィックス 1, 2 をつけて表わす。

〈スポットサイズ w 〉 ビームの電力の分布が中心軸の $1/e$ になる半径を示す。スポットサイズの定義は文献によりまちまちで、本論文のように電力の $1/e$ になる位置を表わすものと、電界の $1/e$ になる位置を示すものがある。それぞれ w_{power} , w_{field} で表わすと

$$2w_{\text{power}} = w_{\text{field}} \quad (1.34)$$

の関係がある。^{#1)} なお、自由空間における $z=0$ のスポットサイズ S をもつガウス波の伝播の様子を図 1.2 に示す。

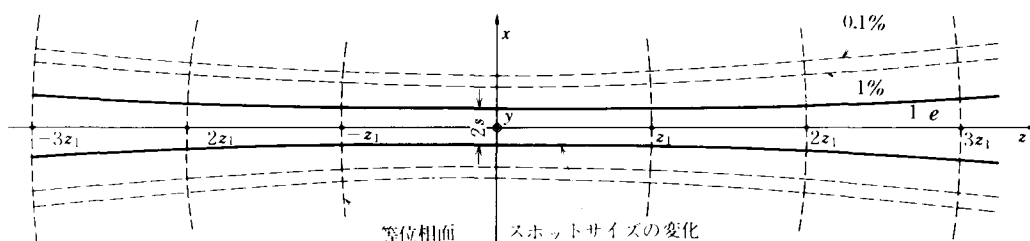


図 1.2 自由空間におけるガウス波の伝播 実線はスポットサイズの変化を示し、破線はそれぞれ電力が中心軸の 1%, 0.1% になる位置の変化を示す。

〈波面の曲率半径 R 〉 式 (1.33) から等位相面を表わす条件を求めると、 $R(z) \gg z$ なので $\tan^{-1} F$ の項を無視すれば

$$z + \frac{1}{2R} r^2 = \text{const.} = 0 \quad (1.35)$$

となり、 R は z 軸における波面の曲率半径を表わしている。 $R > 0$ は発散性、 $R < 0$ は集束性の波面を表わしている。

集束性レンズ状媒質では、 R の z 方向に対する変化をみると周期性をもっており、 $z_0 = \pi/(2g)$ ごとに $R \rightarrow \infty$ となり、 w が極値をとる条件^{#2)}と一致する。すなわち、スポットサイズが極小あるいは極大になるところでは波面は平面になっていることがわかる。

〈位相変化 F 〉 ビーム波の各状態の伝播についておこる位相の変化の平面波からわずかなずれていることを示している。

#1) 電力型定義 ... 本論文, (35) (47)
電界型定義 ... (1) (2)

#2) $\frac{dw^2}{d(gz)} = \left[\left(\frac{w_0}{S} \right)^4 - 1 \right] \sin 2gz = 0 \quad (1.36)$

1.2 ビーム光路の表示

1.2.1 ビーム波の光線的な見方

前節では伝送状態という観点から，ガウス型の分布をもつビーム状態を導入した。このような状態をもつビーム波には，前に述べた“スポットサイズ”と“波面の曲率半径”というビーム自体のもつ情報量の他に，ビームをある座標系から見た相対的な“位置”と“傾き”という別の情報量が必要である。

ところで，従来幾何光学的な“光線”をもってビームの位置，傾きを表わしたようであるが，どうもビーム波と光線の関係がはきりしていなかったと思われる。ここでは，ガウス波の中心の運動が光線の軌跡を表わすものとする一つの見方について述べる。

エルミート・ガウス波の代表としてガウス波を考える。図1.3に示すように簡単のために2次元モデルで，進行方向を z ， y 方向には無限であるとする。その中心が z 軸から x_0 だけずれ， x_0 だけ傾いているようなガウス波を $z=0$ において電界分布が

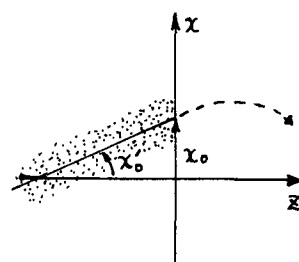


図1.3 ずれと傾きをもつ
ガウスビーム波

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} w} e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{w^2} (x-x_0)^2 - j k x_0 (x-x_0)} \quad (1.37)$$

とおく。ここで， x_0 ， x_0' はともに微小量であると仮定する。いま，仮定として

① ガウス波式(1.37)を平面波の合成であるとみなし，各平面波に光線に対応させると，光線の密度によってビームがきまる #1)

② $|\psi(x)|^2 dx$ を微小区間 dx にある光線の密度と考える。 #2)

次に，このようにして考えた光線の各々の方向を求めることにする。式(1.37)は波数をもち， z 軸と α の角度をもつ平面波で合成することができる。すなわち，任意の形の波は

#1) これは従来の幾何光学と矛盾するものではない。久保田 広，“光学”，

#2) $\int |\psi(x)|^2 dx = 1$ に規格化してあるので，ガウス波を一本の無限に細い光線としたとき， x_0 のまわりの位置の不確定 Δx をもつ確率函数と考えてもよい。

$$\propto \int_{-\pi}^{\pi} B_d e^{-j k (\sin d \cdot x + \cos d \cdot z)} dd \quad (1.38)$$

なる形で表わされる。 $z=0$ で両者が等しいとすると式(1.37), (1.38)より

$$\frac{1}{[\sqrt{\pi} w]^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} (x-x_0)^2 / w^2} k x_0' (x-x_0) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(d) e^{-j k \sin d \cdot x} dd \quad (1.39)$$

両辺に $\exp[j k \sin d' (x-x_0)]$ をかけて x について積分すると

$$\varphi(d) = \frac{1}{[\sqrt{\pi} \Delta d]^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta d^2} (d-x_0')^2} \quad (1.40)$$

$$\Delta d = 1 / (w k) \quad (1.41)$$

すなわち、平面波は x_0' 方向に最も密度が大きいやはりガウス型の分布であることがわかる。また、式(1.41)は、直径 D 、波長 λ としたときの回折角 $\Delta \theta$ が

$$\Delta \theta \cong \frac{\lambda}{D} \quad (1.42)$$

で表わされるのと全く同じ意味をもっていると解釈できる。

以上の議論から、ガウス波を平面波の合成と考えるとき、平面波の伝播しようとする方向は式(1.39)の x_0' の方向に最も多いガウス分布であり、平面波に光線に対応させると、 x_0 の位置に最も多く集まっている。このことから次のように新たに“光線”という言葉定義してよいであろう。

定義 ガウス波の電界分布の最も強い位置にあり、波面と直角な方向に向いている光線を代表させてガウス波を表わし、これを光線とよぶ。

すると次のことがいえる。

- ③ ガウス波の媒質内での運動は、ガウス波の代表である光線の軌跡として表わすことができる。ただし、姿態変換の著しい場合などにはこの考え方では済まなくなる。

1.2.2 光路を表わす方程式

ビームの中心部の軌跡(光路)はやはり電磁界をビーム状態で展開することによって求めることができるが, 近似的には中心部を占める光線の幾何光学的な光路を求める方が簡単である. 前小節で述べたようにガウスビーム波の中心部の運動を一本の光線で代表できるからである.

幾何光学的な光路方程式は, 光路長を $\varphi(\mathbf{r})$ とすると $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const.}$ は波面を表わし, $\mathbf{r}$ を光線上の一点を表わす位置ベクトル, S を光線上にそってとったある点からの距離とすれば^(図1.4), 光路方程式は次のように表わすことができる. つまり, 光線は波面に直角な線の軌跡と定義すると

$$n \frac{d\mathbf{r}}{dS} = \text{grad } \varphi(\mathbf{r}) \quad (1.43)$$

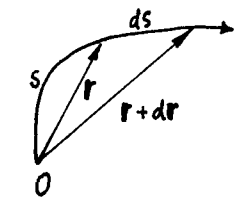


図1.4 光路.

で表わされる.^{#1)} また, マクスウェルの方程式を $\lambda \rightarrow 0$ の極限で表わしたアイコナール方程式

$$(\text{grad } \varphi(\mathbf{r}))^2 = n(\mathbf{r})^2 \quad (1.44)$$

を用いると, 屈折率 n に分布があるときの光路方程式は

$$\frac{d}{dS} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{dS} \right) = \text{grad } n \quad (1.45)$$

となる. ここで, n の変化の代表的な 2, 3 の場合について例を示す.

(i) 一次変化

屈折率の変化を

$$n(x) = n_0 \left[1 + \frac{1}{2} f x \right] \quad (1.46)$$

とおき, S を z 方向にとると, 式(1.45)は

$$\left[1 + \frac{1}{2} f x \right] \frac{d^2 x}{dz^2} - \frac{f}{2} x = 0 \quad (1.47)$$

$|fx| \ll 1$ とすると近似的な解として

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} (f/2) z^2 + x_0' z + x_0 \end{cases} \quad (1.48a)$$

$$\begin{cases} x' = (f/2) z + x_0' \end{cases} \quad (1.48b)$$

#1) M. Born and E. Wolf, "Principles of Optics," 3rd Ed. p121, Pergamon Press.

を得る。ただし、 x_0, x'_0 は入射の光線位置および傾き、 z は x に関する微分で、微小な角度を示す。

(ii) 二次変化

$$n(x) = n_0 \left[1 \mp (g^2/2)x^2 \right] \quad (1.49)$$

のときに式(1.45)は

$$\left[1 \mp (g^2/2)x^2 \right] \frac{d^2x}{dz^2} \pm g^2x = 0 \quad (1.50)$$

$g^2x^2 \ll 1$ のレンズ作用が小さく、かつ近軸の場合の解として

$$\ominus \quad \begin{cases} x' = x'_0 \cos gz - (x_0/g) \sin gz \\ x = (x_0/g) \sin gz + x_0 \cos gz \end{cases} \quad (1.51a)$$

$$(1.51b)$$

$$\oplus \quad \begin{cases} x' = x'_0 \cosh gz + (x_0/g) \sinh gz \\ x = (x_0/g) \sinh gz + x_0 \cosh gz \end{cases} \quad (1.51c)$$

$$(1.51d)$$

1.2.3 光ビームパラメータの位相空間表示

ビーム波の中心を表わす光線の位置 x とこれに共轭な変数 p を定義し、 p は光線の傾きに関係するところから、位置と傾きの組を x と p でつくる位相空間に一つの点として記述すると種々の議論に便利である。

さて、光線の屈折率 $n(x, y, z)$ における運動(軌跡)はフェルマの原理・

$$J = \frac{1}{c} \int_{P_1}^{P_2} n(x, y, z) ds = \text{extremum} \quad (1.52a)$$

に従う。^{#1)} ただし、 c は真空の光速、 s は光線にそってとった距離である。ここで、 $ds = dz \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}$ を用いると、

$$J = \frac{1}{c} \int_{P_1}^{P_2} n \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} dz \quad (1.52b)$$

#1) 式(1.45)が微分型の光路を求める方程式であるのに対し、式(1.52)は積分型で表わしたものである。

ここで

$$x' = \frac{dx}{dz}, \quad y' = \frac{dy}{dz} \quad (1.53)$$

式(1.52b)はラグランジアン L を

$$L \equiv n(x, y, z) \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \quad (1.54)$$

とおくと、ハミルトンの原理と等価である。ただし、 z を z におきかえなければならぬ。ラグランジアンがわかれば、 x, y に共轭な変数 p_x, p_y が次式により定義できる。

$$\left\{ \begin{array}{l} p_x = \frac{\partial L}{\partial x'} = n \frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} \end{array} \right. \quad (1.55a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_y = \frac{\partial L}{\partial y'} = n \frac{y'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} \end{array} \right. \quad (1.55b)$$

次に、ハミルトニアン H は

$$H = p_x x' + p_y y' - L = -\frac{n}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} \quad (1.56)$$

となり、式(1.52)の極値問題は次の正準方程式と等価になる。⁽⁸⁴⁾

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial H}{\partial p_x} & y' &= \frac{\partial H}{\partial p_y} \\ p_x' &= -\frac{\partial H}{\partial x} & p_y' &= \frac{\partial H}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.57)$$

これでビームを表わす光線が、正準共轭な変数で表わせることがわかったので、 x と p とでつくる位相空間によって光線も一つの点によって表わすことができる。図1.5にその一例を示す。

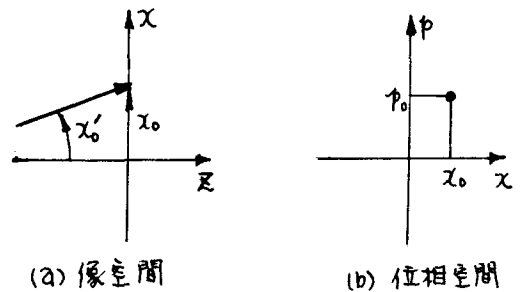


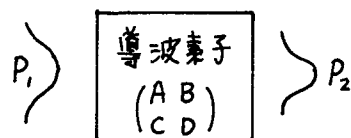
図1.5 ビームパラメータの位相空間表示

1.3 ビーム波の各パラメータの導波素子による変換

1.3.1 波面係数とその変換

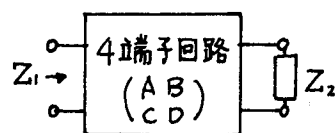
式(1.31), (1.33) で表わされるガウス波の exponent の [] の部分

$$P \equiv \frac{1}{w^2} + j \frac{\pi}{R} \quad (1.58)$$



(a) 波面係数の変換

に注目すると，前に 1.1.3 で述べたように，その実数部はビームのスポットサイズに関係し，虚数部は波面の曲率半径に関係している量であるから，これをガウス波の"波面係数" (Wave form coefficient) とよぶ。



(b) インピーダンスの変換

図 1.6 導波素子と4端子回路の類似性

波面係数は，ガウス波がレンズやレンズ状媒質などの導波素子を通過するとき，その導波素子の性質に応じて変換をうける。その変換は，導波素子にみずみ等と考えなければ，ちょうど電気回路におけるインピーダンスの変換と類似の関係にある。つまり図 1.6 (a) のように，導波素子の入射点，出射点における波面係数をそれぞれ P_1, P_2 とすると， P_1 と P_2 の間には

$$P_1 = \frac{AP_2 + B}{CP_2 + D} \quad (1.59a)$$

で表わされる一次変換の関係がある。これはちょうど (b) のような 4 端子回路の F マトリクス要素を A, B, C, D とするとき 2-2' 端子のインピーダンス Z_2 が 1-1' 側では

$$Z_1 = \frac{AZ_2 + B}{CZ_2 + D} \quad (1.59b)$$

のように変換されるのと全く同じ関係である。

式(1.59a) の定数 A, B, C, D を要素とする F マトリクスと類似のマトリクス

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

と考えると，電気回路の場合と同じく，素子が縦続接続しているときの交換には各素子のマトリクスの積さえ求めればよく，解析が非常に容易になる。種々の素子について $\tilde{F}$ マトリクス^{#1)} を求める手続は次章にゆずることにして，ここでこのマトリクスの性質を述べておくと次のようになる。

$\tilde{F}$ マトリクスの性質

1. $\det \tilde{F} = AD - BC = 1$ ^{#2)} (スネルの法則に従う素子) (1.61a)

$\det \tilde{F} = AD - BC = \alpha^2 (\neq 1)$ (回折現象を伴う素子) (1.61b)

2. n 個の素子が縦続接続しているとき，これらの素子の $\tilde{F}$ マトリクスをそれぞれ

$$\tilde{F}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \tilde{F}_n = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$$

とあるとき，全体のマトリクス $\tilde{F}$ はこれらの積で表わされる。^{#3)} すなわち，

$$\tilde{F} = \tilde{F}_1 \cdot \tilde{F}_2 \cdot \dots \cdot \tilde{F}_n \quad (1.62)$$

1.3.2 ビーム波の位置と傾きの交換

ガウスビーム波の中心部のある軸に関する位置と軸となす角度は，やはり導波素子を通過するときに固有の交換をうける。交換の仕方は各導波素子について光路方程式を解くことによって得られる。

式(1.45)を解いたとき，図に示すように出射点の位置と傾き x_2, x_2' が入射点の位置と傾き x_1, x_1' の同次の一次式で表わされる場合（例えば式(1.51)）がある。すなわち，

$$x_2 = ax_1 + bx_1' \quad (1.63a)$$

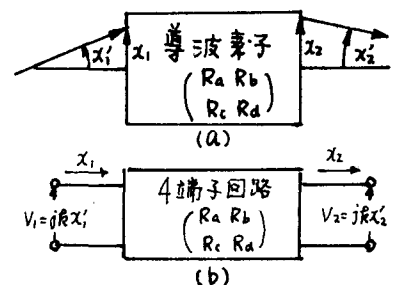


図1.7 光路の交換の類似性

#1) $\tilde{F}$ (F-wave matrix)

#2) $\det \tilde{F}$ が 1 になる必然性はないが，電気回路子回路における変換回路の F マトリクスの $\det F$ が 1 になると類似で 1 を選んだものである。

#3) 式(1.59a)が一次変換を表わすことから，一般的な一次変換の性質としていえることである。

$$x_2 = c' x_1' + d x_1 = c (jR x_1') + d x_1 \quad (1.63b)$$

において式(1.63a)の両辺に jR (R は媒質内の伝播定数)をかけたもの

$$jR x_2' = a(jR x_1') + b x_1 \quad (1.63a')$$

$$c = c'/(jR), \quad b = jR b' \quad (1.64)$$

と式(1.63b)と組合わせると、マトリクスの形で表わすことができる。

すなわち

$$\begin{pmatrix} jR x_2' \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} jR x_1' \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

ここで、

$$R = \begin{pmatrix} R_a & R_b \\ R_c & R_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$$

と考えると、 R は光線の位置、傾きの変換を表わすことから変形光線マトリクス (Modified Ray Matrix) とする。^{#1)}

1.4 本章のまとめ

1.4.1 本章で新たに得られた結果

光ビーム波の性質について検討し、新たに次のような結果が得られた。

- (i) 自由空間やレンズ状媒質内を伝搬するビーム波は、EH波として表わす必要があるが、光波の領域では、電界、磁界の縦方向成分は、横方向成分に比べて 10^{-2} 程度以下に小さいため、この近似の範囲でTEM波とみなしてよい。
- (ii) 従来、不明確と思われていた、ビーム波と光線の関係をはっきりさせるために、ビーム波を光線の集まりであるという見方をし、ビーム波に対する光線の密度、光線の伝搬方向に関する密度を求めた。本論文で扱う光線とは、ガウス波をつくっている光線のうち、中心部を占めている光線をさすものと定義した。

#1) ふつう光線マトリクスは次式で定義される

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$$

1.4.2 結 論

- (i) 光波領域における，ビーム状の電磁波は良い近似でTEM波として表わることができる．ただし，厳密な電磁界分布を求める場合には，電磁界の縦成分も無視することができなリ．
- (ii) ビーム姿態は，エルミート・ガウス（あるいはラゲール・ガウス）関数で表わされ，各姿態については完全正規直交性が成立っている．
- (iii) 光ビームには，姿態というビーム自体のものの情報量の他に，ある座標系から見た位置や傾きという，相対的な情報量が必要である．これを知るには，ビームの中心部を占める光線と代表させて光路方程式を解けばよい．ただし，スポットサイズに比べて媒質の変化が急激な場合には，厳密に電磁界分布を求める必要がある．
- (iv) ビームのスポットサイズ w ，波面の曲率半径 R と，1つの複素変数

$$P = \frac{1}{w^2} + j \frac{R}{R} \quad R = w \sqrt{\mu \epsilon}$$

で表わすと解析に便利である．この P を波面係数というが，種々の導波束子による波面係数の変換は，1つのマトリクス（ $\hat{F}$ マトリクス）によって簡単に表わすることができる．

- (v) ビームの軸からの距離 r と，軸との傾き $r' = dr'/dz$ を組にしてマトリクスで表わしておくと，導波束子による r, r' の変換はやはり一つのマトリクス（光線マトリクス）で表わすことができる．

- (vi) 時間的にパルス状のビーム波が媒質中を伝搬するときの波形変化は面白いものと考えられているが，パルス巾が非常に短くなった場合の応答については，未知であると思われるので検討する必要がある．

2 章 光ビーム導波系に用いる導波素子とその性質

本章は、種々の導波素子（レンズ，反射鏡，レンズ状媒質，ガウス・モードフィルタ等）のガウス波に対する応答関係をくわしく述べたものである

2.1 集中型導波素子

2.1.1 光学レンズ

(i) 波面係数の変換

図 2.1 のように 2 つの回転放物面でできている光学レンズを考える。z 軸にそってレンズを通過するガウス波

$$e^{-\frac{1}{2}P_0 r^2} \quad (2.1)$$

が z 軸にそって Δz を通過するときにおける位相の部分的变化量を $-j\Delta\phi$ とすれば，

$$-j\Delta\phi = -jR_1 z_1(r) - jR_2 z_2(r) = jk(n-1)z_2(r) - jkn\Delta z \quad (2.2)$$

ここでレンズの両面が放物面（各々の面の z 軸での曲率をそれぞれ $1/R_1, 1/R_2$ ）とすれば，

$$z_2(r) = \frac{1}{2R_1} r^2 + \frac{1}{2R_2} r^2 \quad (2.3)$$

で表わされるから式 (2.2) は

$$-j\Delta\phi = jk/f r^2 - jkn\Delta z, \quad \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2}\right) \quad (2.4)$$

すなわち 2 項の一樣移相量は薄肉として無視すれば，ガウス波のうける移相量は

$$e^{-\frac{1}{2}P_0 r^2} + jk/f r^2 \approx e^{-\frac{1}{2}P_0 r^2} \quad (2.5)$$

したがってレンズの $\tilde{F}$ マトリクスは式 (1.59a) より

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 1 & jk/f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

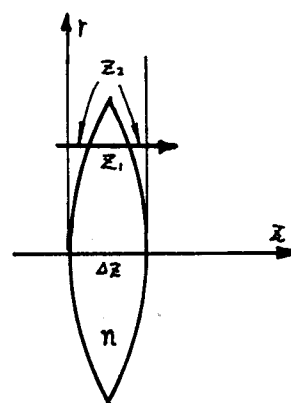


図 2.1 レンズによる波面係数の変換

(ii) 光路の変換

図2.2のように， x_{in}' だけ傾き， x_{in} だけZ軸からずれている光線は

$$\tan \theta = x_{in} / f$$

だけの角度の変換とわかる (b) 図参照)。

入射光線が近軸で，かつ収差を考えないものとするとき， $\tan \theta \cong \theta$ の範囲では

$$\begin{cases} x_{out}' = x_{in}' - x_{in} / f & (2.7a) \\ x_{out} = x_{in} & (2.7b) \end{cases}$$

とおくことができる。したがって式(1.65)より変形光線マトリクスは次のようになる。

$$R = \begin{pmatrix} 1 & j\frac{R}{f} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

2.1.2 反射鏡

(i) 波面係数の変換

回軸放物反射鏡に入射するガウス波のうける位相変化量は

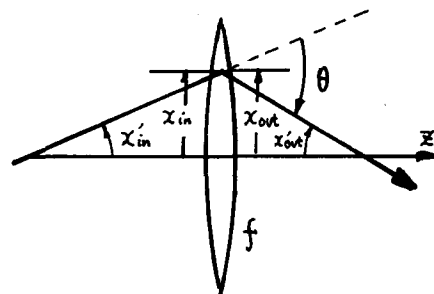
$$-j\Delta\phi = -2jkr Z_2(r) \quad (2.9)$$

であり，曲面を

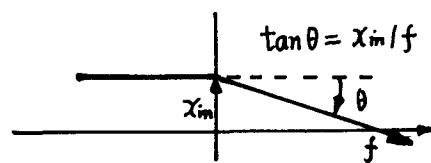
$$Z_2(r) = \Delta Z - \frac{1}{2R} r^2 \quad (2.10)$$

とすると，式(2.9)は

$$\begin{cases} -j\Delta\phi = -jkr 2\Delta Z + \frac{kr}{2f} r^2 \\ f = R/2 \end{cases} \quad (2.11)$$



(a)



(b)

図2.2 レンズによる光路の変換

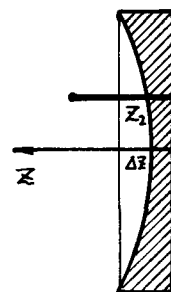


図2.3 反射鏡による波面係数の変換

であるからガウス波の変換量は

$$e^{-\frac{1}{2}P_{in}r^2 + j(k/2f)r^2} \equiv e^{-\frac{1}{2}P_{out}r^2} \quad (2.12)$$

したがってFマトリクスは次のようになる

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} 1 & j\frac{R}{f} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

(ii) 光路の変換

図2.4 (b)のように反射鏡に x_{in} だけずれて入射する光線の角度変化はレンズと同じく

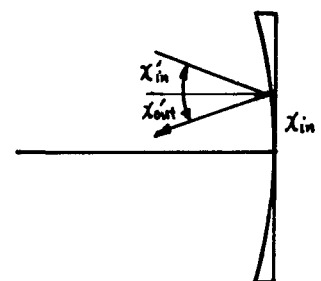
$$\tan \theta = x_{in} / f$$

であるから、 $\tan \theta \approx \theta$ のときには

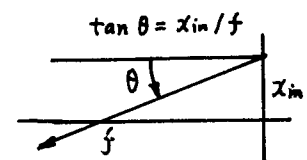
$$\begin{cases} x_{out}' = x_{in} - x_{in} / f \\ x_{out} = x_{in} \end{cases} \quad (2.14)$$

したがって変形光線マトリクスは

$$R = \begin{pmatrix} 1 & jR/f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$



(a)



(b)

図2.4 反射鏡による光路の変換

(iii) 反射鏡の斜め入射の問題点

反射鏡に軸から θ だけずれて斜めに入射する場合には、光線と反射鏡の軸を含む面内とそれと直角な方向とでは、実効的な焦点距離が変化する。

すなわち両方向における焦点距離をそれぞれ $f_{||}$, $f_{\perp}$ とすれば

$$f_{||} = f \cos \theta, \quad f_{\perp} = f / \cos \theta \quad (2.16)$$

としなければならぬ。

2.1.3 回折格子

分光器などに用いられている回折格子は，ガウス波の波面係数の変換はなく，光路の変換のみを生ずる素子と考えてよい．回折格子の入射角と反射角の間には，

$$\sin \theta_2 - \sin \theta_1 = \frac{p\lambda}{d} \quad p=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.17)$$

の関係がある．いま， λ は一定で，特定の次数 p のところに強い反射をもつ回折格子をつくれば， $\theta_2 \neq \theta_1$ にとき通常の平面鏡の反射とは異なる光路をとる．

まず，規定の軸から Δx_1 だけずれた光線に対しては，図 2.5 (b) より

$$\Delta x_2 = - \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \Delta x_1 \quad (2.18)$$

となる．また， $\Delta \theta_1$ だけ角度のずれをもつ光線に対しては，図 2.5 (c) より

$$\sin (\theta_2 - \Delta \theta_2) - \sin (\theta_1 + \Delta \theta_1) = \frac{p\lambda}{d} \quad (2.19)$$

$\Delta \theta_1$ が小さいときには

$$j k \Delta \theta_2 = - \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} j k \Delta \theta_1 \quad (2.20)$$

したがって，変形光線マトリクスは

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} & 0 \\ 0 & -\frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

となる．

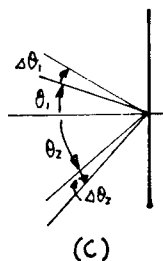
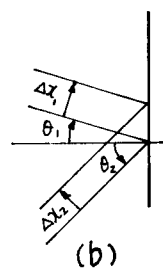
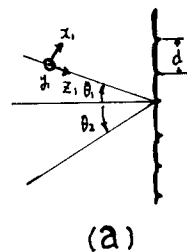


図 2.5 回折格子による光路の変換

2.2 ガウス・モードフィルタ

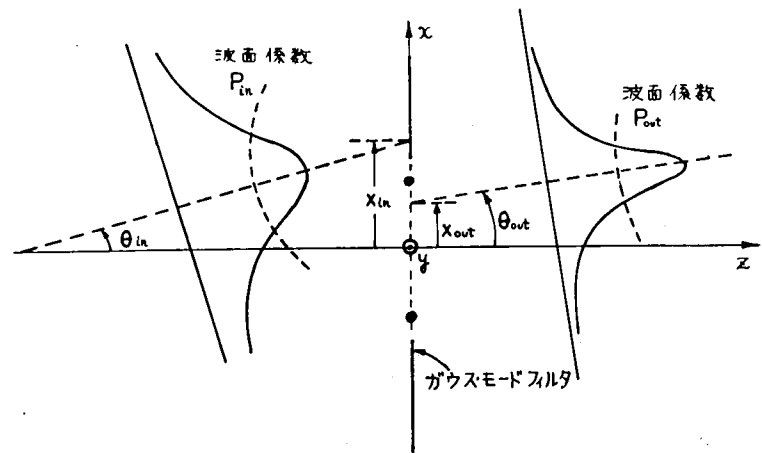
2.2.1 ガウス波に対するガウスモードフィルタの応答

ここに考えるガウス・モードフィルタ (GMF と略す #1) は, 図 2.6 に示すように z 方向には膜状で, 横方向 (r) に関する電力透過度 T_g^2 が次式で与えられるものとする。

$$T_g^2(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{w_g^2}\right) = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w_g^2}\right) \quad (2.31)$$

ここで, 定数 w_g を GMF のスポットサイズと呼ぶ。

この GMF への近軸入射波を TEM₀₀ 状態のガウス波とし, このフィルタ膜面に, z 軸からの角 θ_{in} (x 方向), φ_{in} (y 方向) をもち, 中心軸から x_{in} , y_{in} だけ x , y 方向にそれぞれずれて入射するものとする。この入射波の横方向電界 $E_{in}(x, y)$ は, 図 2.6 ガウス・モードフィルタによる波面係数と光路の変換
 w_{in} をスポットサイズ, R_{in} を波面の曲率半径として



$$E_{in}(x, y) = E_0 \exp\left[-\frac{1}{2} P_{in}\{(x-x_{in})^2 + (y-y_{in})^2\} - jR(\theta_{in}(x-x_{in}) + \varphi_{in}(y-y_{in}))\right] \quad (2.32)$$

と表わされる。ここで, 入射波の波面係数 P_{in} は次式で表わされる。

$$P_{in} = 1/w_{in}^2 + jR/R_{in} \quad (2.33)$$

このとき, GMF を通過した波は E'_0 を次のように定数

$$E'_0 = E_0 \exp\left[-jR(x_{out}-x_{in})^2/2R_{in} - jR(y_{out}-y_{in})^2/2R_{in} - jR\theta_{in}(x_{out}-x_{in}) - jR\varphi_{in}(y_{out}-y_{in})\right] \quad (2.34)$$

#1) Gaussian Mode Filter

とすると

$$\begin{aligned}
 E_{out}(x, y) &\equiv T_g(x, y) E_{in}(x, y) \\
 &= E_0' \exp \left[-\frac{1}{2} P_{out} \{ (x - x_{out})^2 + (y - y_{out})^2 \} \right. \\
 &\quad \left. - jk \theta_{out} (x - x_{out}) - jk \varphi_{out} (y - y_{out}) \} - \frac{1}{2} \frac{x_{in}^2 + y_{in}^2}{w_g^2 (1 + v_m^2)} \right] \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

ここで各パラメータは次のように表わされる。

$$v_{in} = w_{in} / w_g \quad (2.36)$$

$$P_{out} = 1 / w_{out}^2 + jk / R_{out}, \quad w_{out}^2 = w_{in}^2 / (1 + v_{in}^2), \quad R_{out} = R_{in} \quad (2.37)$$

$$x_{out} = x_{in} / (1 + v_{in}^2), \quad y_{out} = y_{in} / (1 + v_{in}^2) \quad (2.38)$$

$$\theta_{out} = -v_{in}^2 x_{out} / R_{in} + \theta_{in}, \quad \varphi_{out} = -v_{in}^2 y_{out} / R_{in} + \varphi_{in} \quad (2.39)$$

したがって、式(2.37)からわかるように、出射波はスポットサイズが $1/\sqrt{1+v_{in}^2}$ 倍に減少し、また式(2.38)はビームの中心の軸からの距離 x_{out} も x_{in} に比べて $1/(1+v_{in}^2)$ 倍になっており、GMFが光路の安定化に役立つこと^{#1)}を示している。

2.2.2 ガウス・モードフィルタの $\tilde{F}$ マトリクスと変形光線マトリクス
式(2.37)より波面係数の変換式は

$$P_{in} = P_{out} - 1/w_g^2 \quad (2.40)$$

となるから、 $\tilde{F}$ マトリクスは次のようになる。

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} 1 & -1/w_g^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

次に式(2.38)(39)において $\theta_{in} \cong x'_{in}$, $\theta_{out} \cong x'_{out}$ とすれば

$$\begin{cases} jk x'_{out} = jk x'_{in} - jk (v_{in}^2 / R_{in}) \cdot x_{in} / (1 + v_{in}^2) \\ x_{out} = x_{in} / (1 + v_{in}^2) \end{cases} \quad (2.42)$$

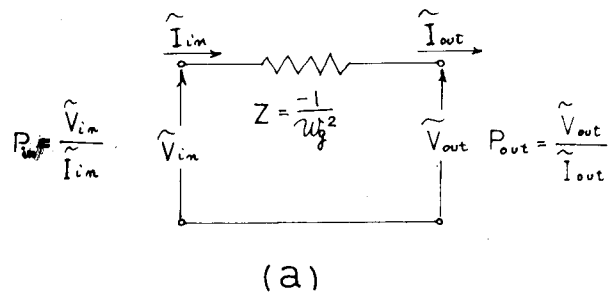
#1) 5章, 10章でくわしくのべる

となるから、変形光線マトリクスは次式のようになる

$$R = \begin{pmatrix} 1 & jRv_{in}^2/R_{in} \\ 0 & 1+v_{in}^2 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

ここで注意すべきことは、変形光線マトリクスの要素は v_{in}^2 , R_{in} などの状態に関する量を含んでいるので、まず $\tilde{F}$ マトリクスを用いて状態を決め、光路は振動的な意味で求められるということである。

等価回路的には、 $\tilde{F}$ マトリクスは図2.7(a)のような直列抵抗、変形光線マトリクスは、ビームの変位 x_{in} を電流とみなしたときこれを $1/(1+v_{in}^2)$ 倍する電流変換器を含んでいると理解される。



2.2.3 電力透過率

GMF は他の導波素子とちがいは損失を伴うので、電力透過率を求めておく必要がある。

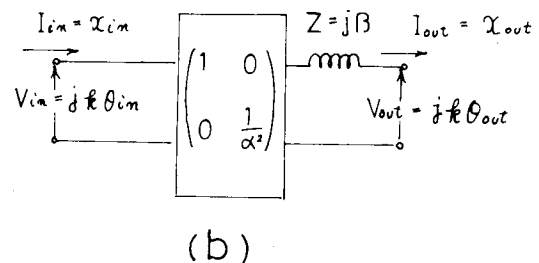


図2.7 ガウス・モードフィルタの等価電気回路

(a) $\tilde{F}$ マトリクス表示 (b) 変形光線マトリクス表示

前小節で検討した TEM_{00} 状態の

ガウス波の電力透過率 $t^{(00)}$ は、式(2.35)を用いて次式のように求める。

$$t^{(00)} = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} |E_{out}|^2 dx dy}{\iint_{-\infty}^{\infty} |E_{in}|^2 dx dy} = \frac{1}{1+v_{in}^2} \exp \left[-\frac{x_{in}^2 + y_{in}^2}{w_g^2 (1+v_{in}^2)} \right] \quad (2.44)$$

また、 TEM_{pq} 状態に対する透過率 $t^{(pq)}$ は同様の計算により、

$$t^{(pq)} = t^{(00)} \sum_{m=0}^p 2^m m! \left(\frac{p}{m} \right)^2 (d v_{in})^{2p-2m} H_{2p-2m}(v_{in} d^2 x_{in}) \\ \times \sum_{m=0}^q 2^m m! \left(\frac{q}{m} \right)^2 (d v_{in})^{2q-2m} H_{2q-2m}(v_{in} d^2 y_{in}) \quad (2.45)$$

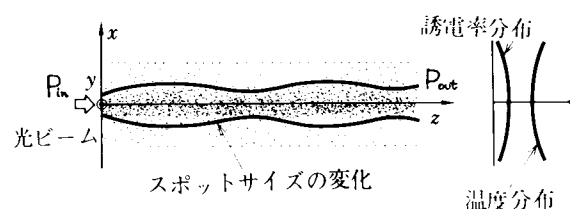
ただし、 $d^2 = 1/(1+v_{in}^2)$, $H_p(x)$ はエルミートの多項式である。

2.3 分布型導波素子

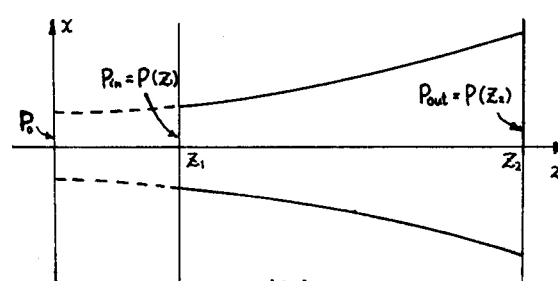
2.3.1 集束性レンズ状媒質

(i) 波面係数の変換

図2.8に示すように，誘電率分布が中心軸で最も大きい束分布をして，集束性レンズ状媒質の入射点，出射点における波面係数をそれぞれ P_{in} , P_{out} とする．これらの間の変換関係を求めるために，図2.8(b)のようにレンズ状媒質の左に仮想的な同じレンズ状媒質を考え，その入射点では波面係数が $P_0 = 1/s^2$ になるように仮想的領域の長さ z_1 を選ぶ．



(a)



(b)

図2.8 レンズ状媒質による波面係数の変換

$$P_0 = 1/s^2, \quad P(z_1) = 1/w^2(z_1) + jR/R(z_1), \quad P(z_2) = 1/w^2(z_2) + jR/R(z_2)$$

とおくと，表1.1の w , R の z_1 , z_2 における値を用いると P_0 と $P(z_1)$, P_0 と $P(z_2)$ の間には次の関係があることがわかる． $w_0^2 = 1/(gR)$ とすると

$$P(z_1) = \frac{P_0 \cos g z_1 - j(1/w_0^2) \sin g z_1}{-j w_0^2 \sin g z_1 \cdot P_0 + \cos g z_1} \quad (2.46a)$$

$$P(z_2) = \frac{P_0 \cos g z_2 - j(1/w_0^2) \sin g z_2}{-j w_0^2 \sin g z_2 \cdot P_0 + \cos g z_2} \quad (2.46b)$$

$z = z_2 - z_1$ とおくと両式から簡単な計算によって

$$P(z_1) = \frac{\cos g z \cdot P(z_2) + j(1/w_0^2) \sin g z}{j w_0^2 \sin g z \cdot P(z_2) + \cos g z} \quad (2.47)$$

したがって $\tilde{F}$ マトリクス表示は

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \cos g z & j(1/w_0^2) \sin g z \\ j w_0^2 \sin g z & \cos g z \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

(ii) 光路の変換

集束性レンズ状媒質の光路は式

(1.51) で表わされている。ここで

$$x_0 = x_{in}, x'_0 = x'_{in}, x = x_{out}, x' = x'_{out}$$

とおくと (図 2.9)

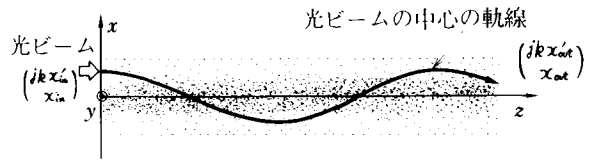


図 2.9 レンズ状媒質による光路の変換

$$\begin{cases} jk x'_{in} = \cos gZ \cdot x'_{out} + jkg \sin gZ x_{out} \\ x_{in} = j \frac{1}{kg} \sin gZ x'_{out} + \cos gZ x_{out} \end{cases} \quad (2.49)$$

$w_0^2 = 1/kg$ であるから、変形光線マトリクスは

$$R = \begin{pmatrix} \cos gZ & j(1/w_0^2) \sin gZ \\ jw_0^2 \sin gZ & \cos gZ \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

となる。

2.3.2 発散性レンズ状媒質

(i) 波面係数の変換

集束性レンズ状媒質と全く同様の取扱いによつて、

$$P(z_1) = \frac{P_0 \cosh gZ_1 + j(1/w_0^2) \sinh gZ_1}{-jw_0^2 \sinh gZ_1 + \cosh gZ_1} \quad (2.51a)$$

$$P(z_2) = \frac{P_0 \cosh gZ_2 + j(1/w_0^2) \sinh gZ_2}{-jw_0^2 \sinh gZ_2 + \cosh gZ_2} \quad (2.52b)$$

であるから

$$P(z_1) = \frac{\cosh gZ \cdot P(z_2) - j(1/w_0^2) \sinh gZ}{jw_0^2 \sinh gZ \cdot P(z_2) + \cosh gZ} \quad (2.53)$$

したがって、 $\tilde{F}$ マトリクスは

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \cosh gZ & -j(1/w_0^2) \sinh gZ \\ jw_0^2 \sinh gZ & \cosh gZ \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

(ii) 光路の変換

式(1.51)より

$$\begin{cases} jkx_{in} = \cosh gZ \cdot x_{out} - jkg \sinh gZ \cdot x_{out} \\ x_{in} = j(1/kg) \sinh gZ \cdot x_{out} + \cosh gZ \cdot x_{out} \end{cases} \quad (2.55)$$

したがって

$$R = \begin{pmatrix} \cosh gZ & -j(1/w_0^2) \sinh gZ \\ jw_0^2 \sinh gZ & \cosh gZ \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

2.3.3 自由空間

式(2.48), (2.50)より, $g \rightarrow 0$ とおくことにより,

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\frac{Z}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\frac{Z}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

2.4 波面係数の変換のスミス図による表示

導波素子による波面係数の変換は, 複素変数の一次変換であるから, その演算をスミス図の上で行なうと簡単である. そこで, いま伝播定数 k の媒質を考えると, 式(1.59a)の両辺を k で割り,

$$\left. \begin{aligned} P_1/k &= \frac{1}{kw_1^2} + j\frac{1}{R_1} = u_1 + jv_1 = p_1 \\ P_2/k &= \frac{1}{kw_2^2} + j\frac{1}{R_2} = u_2 + jv_2 = p_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

とおくと，次式を得る．

$$u_2 + jv_2 = \frac{D(u_1 + jv_1) - B/\bar{r}}{-\bar{r}C(u_1 + jv_1) + A} \quad (2.60)$$

次に，実用上頻繁に使用するレンズおよび自由空間における波面係数の変換を考える．

(i) レンズによる変換

式(2.6)より，焦点距離 f のレンズによる変換に対して

$$u_2 + jv_2 = u_1 + j(v_1 - 1/f) \quad (2.61)$$

となるから，変換はスミス図上で，実数部(抵抗)一定の曲線上を $1/f$ だけ動かせばよい．

(ii) 自由空間による変換

式(2.57)より，長さ z の自由空間による変換に対して

$$u_2 + jv_2 = \frac{1}{\frac{1}{u_1 + jv_1} - jz} \quad (2.62)$$

となるから，複素数の逆数の演算(インピーダンス→アドミタンス)をスミス図上で行えばよい．

〈例〉 レーザ共振器から放射されるガウスビーム波の波面係数

図2.10 のようなレーザ共振器から放射された $\lambda = 0.6328 \mu$ のガウス波の， $z = 1.4 \text{ m}$ の位置における波面係数を求める．レーザの中央部のスポットサイズは， $f/l = 0.5/0.475$ ， $R = 9.925 \times 10^6 \text{ (1/m)}$ とおくと，図0.9の w_m より $w_0 = 0.224 \text{ mm}$ となるから $p_0 = 2$ であり，これから変換をうけて $z = 1.4 \text{ m}$ の位置で p_3 になるまでの演算をスミス図上に示すと図2.11 のようになる．ただし， z は m で， f は $1/\text{m}$ で規格化してある．

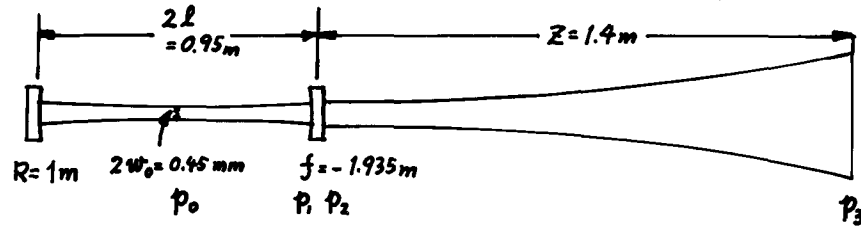


図 2.10 レーザ共振器からの放射. ($p_1, p_2 \dots$ は 良て規格化した波面係数)

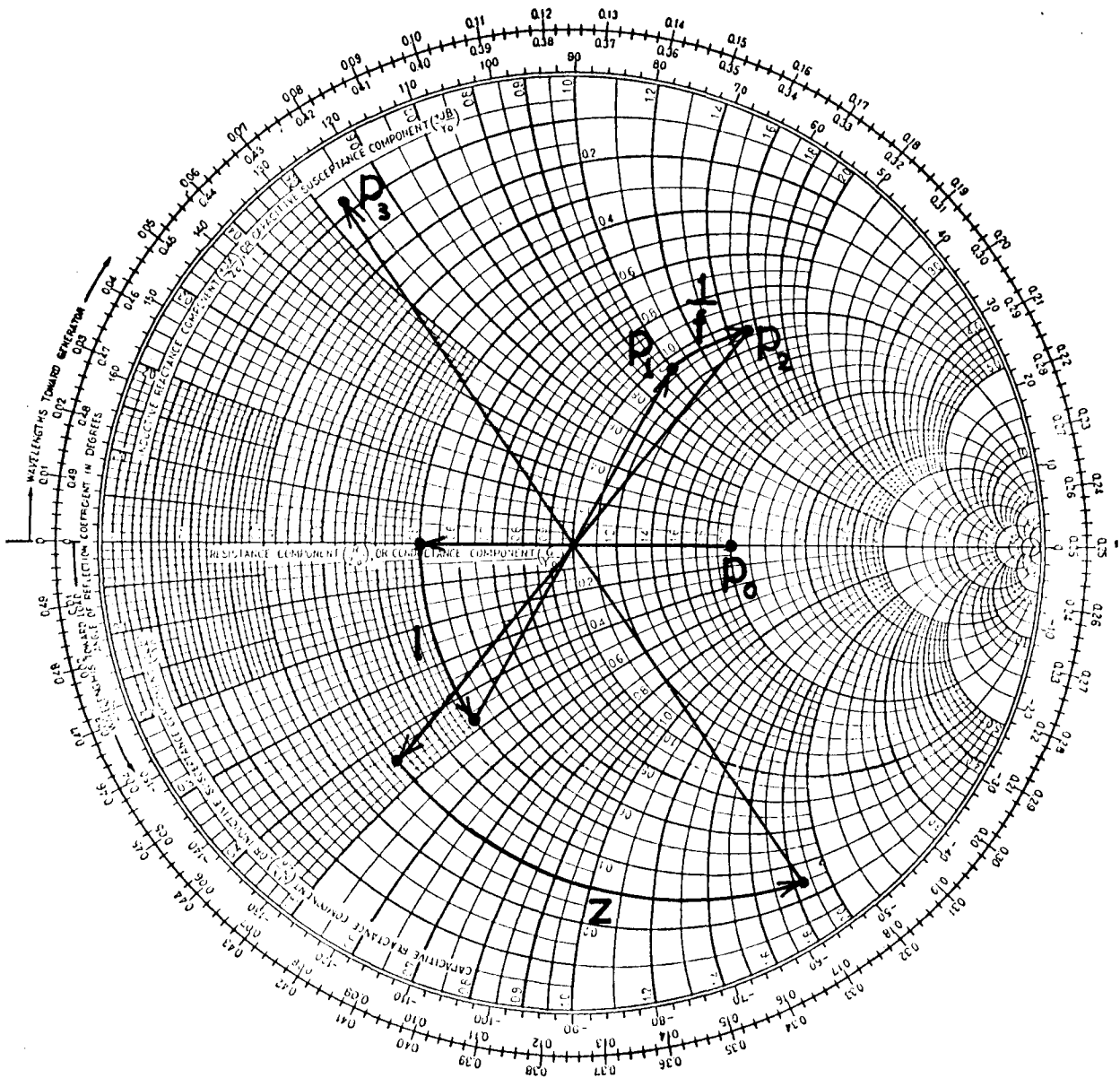


図 2.11 図 2.10 の波面係数の変換をスミス図上で行ったもの

図 2.11 から, $p_3 = 0.09 + j0.53$ となり, R をかけると $P_3 = 0.89 \times 10^6 + j0.526$ となる. 厳密な計算によって求めた値は $P_3 = 0.88 \times 10^6 + j5.23 \times 10^6$ であり, この値は層流型ガスレンズの集束性を測定した際式 (3.20) 以下に, 双曲線ガスレンズの集束性を測定した際 4.4.1 に具体的に使用されている.

2.5 本章のまとめ

2.5.1 本章で新たに得られた結果

- (i) 従来知られている Snell の法則に従うような導波管では、波面係数の変換を表わす $\tilde{F}$ マトリクスと、光路の変換を表わす変形光線マトリクスとは一致していたが、本章 2.2 で述べたガウス・モードフィルタや、回折格子などのように、回折効果を伴うものでは、両マトリクスは一致しないことを明らかにした。
- (ii) ガウス・モードフィルタについてのマトリクス表現も求めた。 $\tilde{F}$ マトリクス表現等価電気回路は直列抵抗を含み、変形光線マトリクス表現に対する等価電気回路は電流変換器を含んでおり、この性質によって、ガウス・モードフィルタを導波管に周回した際に、ビームの安定性が改善されることを明らかにした。
- (iii) 回折格子に対する両マトリクス表現を求めた。

2.5.2 結 論

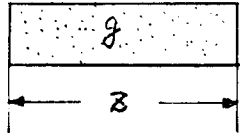
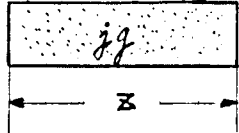
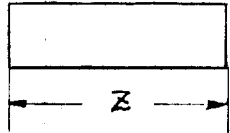
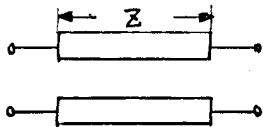
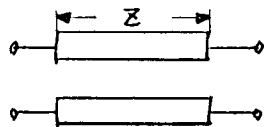
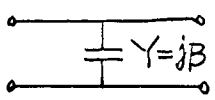
- (i) 光ビーム導波路に用いる導波素子を分類すると次のようになる。

集中型導波素子 ... 光学レンズ，反射鏡，プリズム，回折格子，
ガウス・モードフィルタ

分布型導波素子 ... レンズ状媒質，自由空間

- (11) これらに対する $\tilde{F}$ マトリクス, 変形光線マトリクスをまとめて表 2.2 に示す.

表 2.2 導波管の $\tilde{F}$ マトリクスと変形光線マトリクス - 1

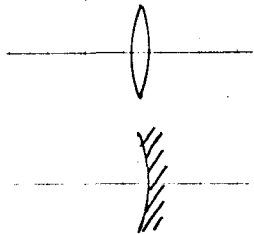
	レンズ状媒質 (収束系)	レンズ状媒質 (発散系)	自由空間
	 $\varepsilon = \varepsilon(0)[1 - (gx)^2 - (gy)^2]$ $k(0) = \omega \sqrt{\varepsilon(0)\mu_0}$	 $\varepsilon = \varepsilon(0)[1 + (gx)^2 + (gy)^2]$ $k = \omega \sqrt{\varepsilon(0)\mu_0}$	 誘電率 ε $k = \omega \sqrt{\varepsilon\mu_0}$
$\tilde{F}$ マトリクス表示	$\begin{pmatrix} \cos gZ & jgk(0)\sin gZ \\ j\frac{\sin gZ}{gk(0)} & \cos gZ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cosh gZ & -jgk(0)\sinh gZ \\ j\frac{\sinh gZ}{gk(0)} & \cosh gZ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\frac{Z}{k} & 1 \end{pmatrix}$
等価四端子回路	 無損失分布定数回路 $Z_0 \leftrightarrow gk(0), \beta \leftrightarrow g$	 カットオフ導波管 $Z_0 \leftrightarrow jgk(0), \beta \leftrightarrow jg$	 $B \leftrightarrow \frac{Z}{k}$
変形光線 マトリクス表示	$= \tilde{F}$	$= \tilde{F}$	$= \tilde{F}$
等価四端子回路	$= \tilde{F}$	$= \tilde{F}$	$= \tilde{F}$

薄肉凸レンズ
(凹面鏡)

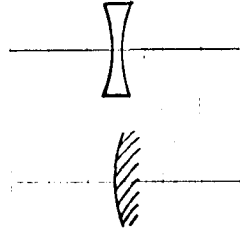
薄肉凹レンズ
(凸面鏡)

回折格子

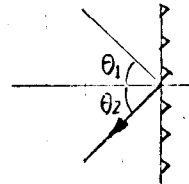
ガウス・モードフィルタ



焦点距離 f



焦点距離 $-f$



$$P_m = \frac{1}{w_m^2} + j \frac{k}{R_m}$$

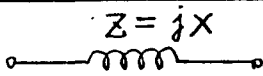
$$T_g = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{w_g} \right)^2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & j \frac{k}{f} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

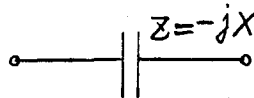
$$\begin{pmatrix} 1 & -j \frac{k}{f} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

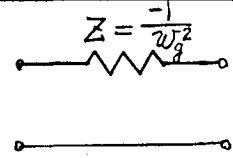
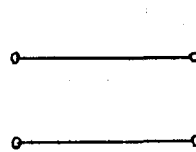
$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{w_g^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$X \leftrightarrow \frac{k}{f}$$



$$X \leftrightarrow \frac{k}{f}$$



$$= \tilde{F}$$

$$= \tilde{F}$$

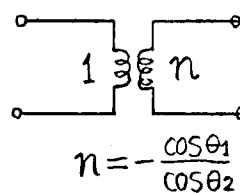
$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & jk \frac{v_m^2}{R_m} \\ 0 & 1 + v_m^2 \end{pmatrix}$$

$$v_m = w_m / w_g$$

$$= \tilde{F}$$

$$= \tilde{F}$$



$$\alpha^2 = \frac{1}{1 + v_m^2}$$

$$\beta = \frac{k}{R_m} v_m^2$$

3章 層流型ガスレンズの集束性

ガスレンズは気体の温度差による誘電率の変化を用いてレンズ作用をもたせたもので、反射損の極めて小さいという特徴のある導波素子である。ガスレンズの具体例は各種のものがあるが、^{#1)} 気体を流かう型のガスレンズの一例に層流型ガスレンズがある。この型のガスレンズは集束性が大きい特徴があり、Marcuse 等により解析がなされたがこれは幾何光学的な検討で集束性を必ずしも正確に表わしているとはいえず、集束性に及ぼす種々のパラメータの影響の定量的な取扱いは行われていない。^{#2)}

そこで、ガウス型光ビーム波に対する層流型ガスレンズの応答関係を明確にするために、この型のガスレンズの $\tilde{F}$ マトリクスを計算し、試作したガスレンズを用いて求めた集束性の測定値と比較して、かなり良く一致することを確認した。気体定数は温度とともに変化するので、管内の気流の温度上昇に伴って中心軸上の温度で定数の補正を行い、2, 3 の気体に対して、光散乱を含めた $\tilde{F}$ マトリクスを求めて図に表わした。

3.1 層流型ガスレンズの集束性の理論的検討

3.1.1 層流管内の気体の誘電率

層流型ガスレンズのモデル

としては、図 3.1 に示すように加熱された半径 a の管 ($T_w^\circ\text{K}$) の中に、冷たい気体 ($T_0^\circ\text{K}$) を層流状に流入させるもので、管の内部における温度 T の分布は図のようになる。このため誘電率の分布は同図のように中心軸付近が最も大きくなるので凸レンズ作用をもつようになる。また、

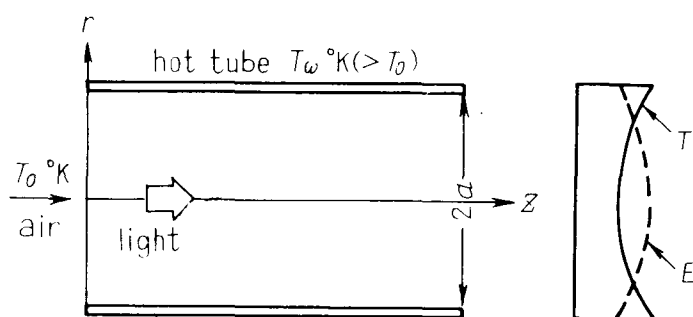


図 3.1 層流型ガスレンズのモデル図

#1) (16) (17) (20) (22) (23)

#2) 本研究が発表されて後 (43)、文献 (51) が発表され幾何光学的な取扱いは行われている。

流入気体の温度は，入口から徐々に上昇して軸方向にも誘電率の分布が与えられる。そこで， g と z の関数として誘電率 ε を次のように表わす：

$$\varepsilon(r) = \varepsilon(0) [1 - (gr)^2] \quad (3.1)$$

さて，このような層流管内の気体温度 T の分布は，気体定数が温度によらず一定とすると，中心軸からの距離 r のべき級数として次式で表わされる。

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_0} = \theta_0(z) + \theta_2(z) \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \theta_4(z) \left(\frac{r}{a}\right)^4 + \dots \quad (3.2)$$

ここで，各係数は z の関数として

$$\begin{aligned} \theta_0(z) &= 1.477 \exp\left(-7.316 \sigma \frac{z}{a}\right) - 0.810 \exp\left(-44.36 \sigma \frac{z}{a}\right) + 0.385 \exp\left(-106.1 \sigma \frac{z}{a}\right) \\ \theta_2(z) &= -2.701 \exp\left(-7.316 \sigma \frac{z}{a}\right) + 8.983 \exp\left(-44.36 \sigma \frac{z}{a}\right) - 10.21 \exp\left(-106.1 \sigma \frac{z}{a}\right) \\ \theta_4(z) &= 1.906 \exp\left(-7.316 \sigma \frac{z}{a}\right) - 27.15 \exp\left(-44.36 \sigma \frac{z}{a}\right) + 70.26 \exp\left(-106.1 \sigma \frac{z}{a}\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\sigma = \frac{\kappa}{\rho C_p} \cdot \frac{1}{av_0} \quad (3.4)$$

で与えられる。^{#3)} ただし， κ は気体の熱伝導率， ρ は密度， C_p は定圧比熱， v_0 は層流の中心における速度，そして a は管の半径である。一方，気体の誘電率 ε と絶対温度 T との間に，クラジウス・モソッティの法則から次の関係がある。^{#1)} ε_s を T_0 における気体の比誘電率， ε_0 を真空の誘電率として，

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left[1 - (\varepsilon_s - 1) \frac{T_0}{T} \right] \quad (3.5)$$

式(3.2)より T を求めて，式(3.5) に代入し 2 乗項までとると^{#2)}，式(3.1)の g は

$$g = \frac{\sqrt{(T_w - T_0)/T_0 \cdot |\theta_2(z)| \cdot (\varepsilon_s - 1)}}{1 + (T_w - T_0)/T_0 \cdot \{1 + \theta_0(z)\}} \cdot \frac{1}{a} \quad (3.6)$$

#1) クラジウス・モソッティの法則，石黒浩三，“光學” 共立全書 1961 参照（誘導は附録 C.1）

#2) 4 次項まで計算したものを 6 章に示す。

#3) M. Jacob, "Heat Transfer", John Wiley, vol.1, p460, 1960

3.1.2 層流型ガスレンズの $\tilde{F}$ マトリクス

管内の誘電率は，式(3.6)の g からわかるように z 方向にも分布をもっているから，2章で述べたような一つのマトリクスとして簡単には表わせない。したがって，各要素を数値的に求めることにする。まず，ガスレンズの長さ $z (=d)$ を n 等分し，その一つの微小区間を $\Delta z = z/n$ では温度変化を一定とみなす。このようにして区切った i 番目の微小区間の $\tilde{F}$ マトリクスを

$$\hat{F}_i = \begin{pmatrix} \cos g_i \Delta z & jR g_i \sin g_i \Delta z \\ j \frac{1}{R g_i} \sin g_i \Delta z & \cos g_i \Delta z \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

で表われ，全体のマトリクスは各区間の積で求まる。すなわち

$$\hat{F} = \hat{F}_1 \cdot \hat{F}_2 \cdot \dots \cdot \hat{F}_n \quad (3.8)$$

ところで，中心軸上の温度は，式(3.3)の $\theta_0(z)$ で表わされるように z とともに変化するのので，これに伴ない気体定数も変化する。用いる気体の定圧比熱 C_p は一定と考えてよいが，密度は $\rho \propto T^{-1}$ であり，熱伝導率 κ は図3.2のように絶対温度 T に依存している。そこで， $1/\rho$ ， κ と T の関係を使用温度付近において直線で次のように近似する。

$$\frac{1}{\rho} = T / (\rho_0 T_0) \quad (3.9)$$

$$\kappa = \kappa_0 \frac{T - T_h}{T_0 - T_h} \quad (3.10)$$

ここで， T_h は κ を式(3.10)で近似したとき $\kappa=0$ になる等価的な温度であり，種々の気体について図3.2から

表3.1 気体定数 (20°C , 1atm)

Gas	$\sqrt{\gamma-1}$	T_h [$^\circ\text{K}$]
Air	0.0234	-70
CO ₂	0.0290	60
CH ₄	0.0288	53
C ₂ H ₆	0.0375	140

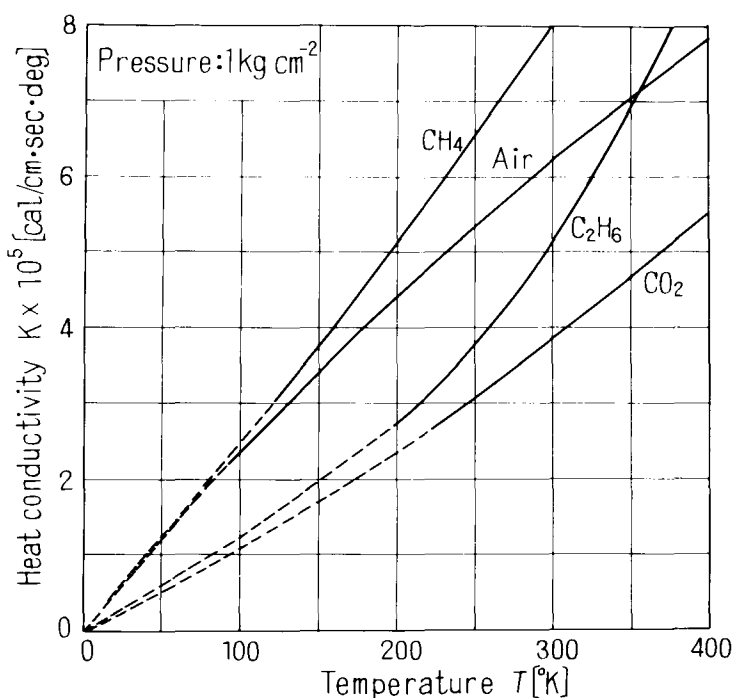


図3.2 気体熱伝導率 κ の温度変化

求めて表3.1に $\sqrt{\epsilon_s - 1}$ の値とともに示した。こうして、温度 T のときのパラメータ σ は、 $T = T_0$ のときの値 σ_0 とすると

$$\sigma = \frac{\kappa_0}{\rho_0 C_p} \cdot \frac{1}{a \nu_0} \cdot \frac{T(T - T_h)}{T_0(T_0 - T_h)} = \sigma_0 \frac{T(T - T_h)}{T_0(T_0 - T_h)} \quad (3.11)$$

と表わされる。

さて、 $\hat{F}$ マトリクスの各要素は次の手順により、電子計算機による数値計算で求めた。まず、最初の微小区間では $\sigma_0 \sigma_0$ として、式(3.6)、(3.7)から $\hat{F}_1$ を求める。次の微小区間では、式(3.3)の $\theta_0(z)$ において $z = \Delta z$ として式(3.2)から中心軸上の温度 T を計算し、この T により式(3.11)から σ を補正して σ_0 においてマトリクス $\hat{F}_2$ を求める。このように、順次補正を行っていった場合の管の中心軸に添う温度分布を、補正のない場合①と共に図3.3に示す。温度差 $\Delta T = T_w - T_0$ の大きい程この効果が著しいことがわかる。

全体の $\hat{F}$ マトリクスは前述のように各微小区間の積で求まる。ただし、計算に際して、 $\sigma_0 \Delta z / a$ が 0.01 以下では式(3.3)の近似が悪くなるため、 $\sigma_0 \Delta z / a$ を

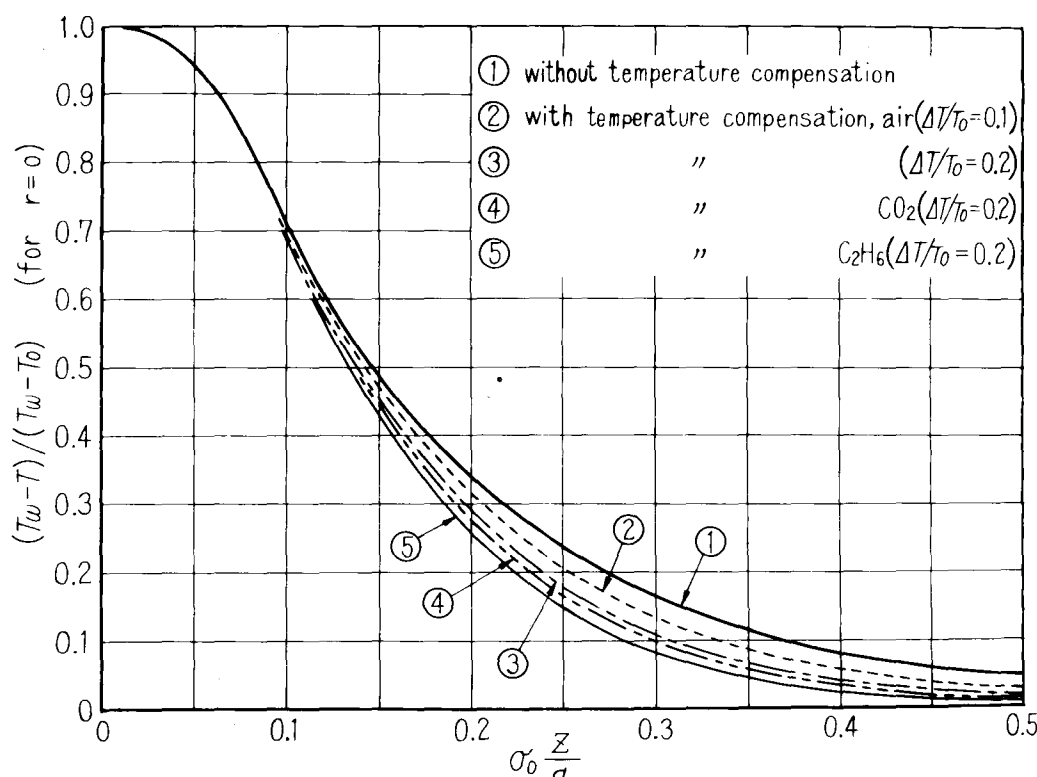


図3.3 補正を加えた 中心軸上の気体の温度変化 ($\Delta T = T_w - T_0$)

0.01 から 0.6 の間で 120 等分して求めた。この区分数ごマトリクス要素の有効数字は 3 ケタ程度得られている。 $\sigma z/a < 0.01$ の区間では乗乗性がほとんどないので、この区間を $\tilde{F}^{(0)}$ とし、マトリクスをもつ自由空間 ($z = \Delta z = 0.01 a/\sigma$ とおいて表わされる) とみなすと、管全体の $\tilde{F}$ マトリクスが得られる。すなわち、全体の $\tilde{F}$ マトリクスを $A, B (= jB'), C (= jC'), D$ とし、 $\sigma z/a$ を 0.01 から始めて計算したマトリクス $\tilde{F}^{(1)}$ の各要素を $\bar{A}, \bar{B} (= j\bar{B}'), \bar{C} (= j\bar{C}'), \bar{D}$ とすると、 $\tilde{F} = \tilde{F}^{(0)} \cdot \tilde{F}^{(1)}$ より

$$\left. \begin{aligned} A = \bar{A} \quad , \quad C = jC' = j[\bar{C}' + (\Delta z / R(0)) A] \\ B = jB' = \bar{B} \quad , \quad D = \bar{D} - (\Delta z / R(0)) B' \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

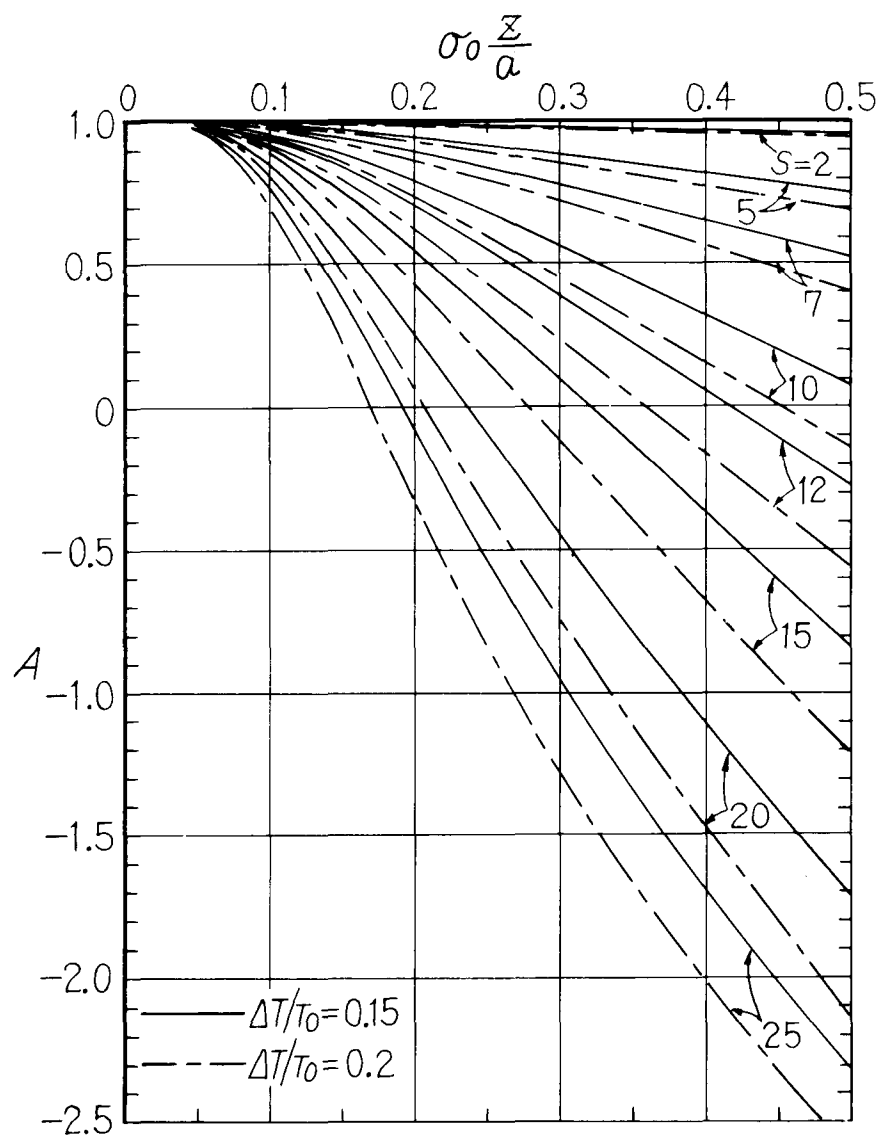
ただし、 $\Delta z = 0.01 a/\sigma$ 。なお、 $\tilde{F}$ マトリクスの A, D 要素は実数、 B, C 要素は純虚数である。

実験に用いた空気に対する各要素 $\bar{A}, \bar{B}' = [a / \{R(0) \sqrt{\epsilon_s - 1}\}] B', \bar{C}'' = [R(0) \sqrt{\epsilon_s - 1} / a] \cdot C', \bar{D}$ の値を、代表的な温度 $\Delta T / T_0 = 0.15, 0.2, 0.25, 0.3$ の場合について、規格化した管長 $\sigma z/a$ を横軸にして図 3.4 に示した。ここで、 z と温度に無関係な $R(0) \sqrt{\epsilon_s - 1} / a$ は、マトリクスの積を計算した後、もそのままの形で係数となるので、 $B'', \bar{C}''$ の部分を計算した。パラメータ S は、

$$S = \sqrt{\epsilon_s - 1} / \sigma_0 = \sqrt{\epsilon_s - 1} \cdot \frac{P_0 C_p}{\kappa_0} \cdot \frac{2}{\pi a} \cdot Q \quad (3.13)$$

で表わされ、風量 Q に関係する量である。

なお、温度差の比較的小さい $\Delta T / T_0 = 0.07$ の場合には、すべての気体に共通の要素を出す意味で温度変化が小さいことから温度補正を加えないで計算し、図 3.5 に示した。

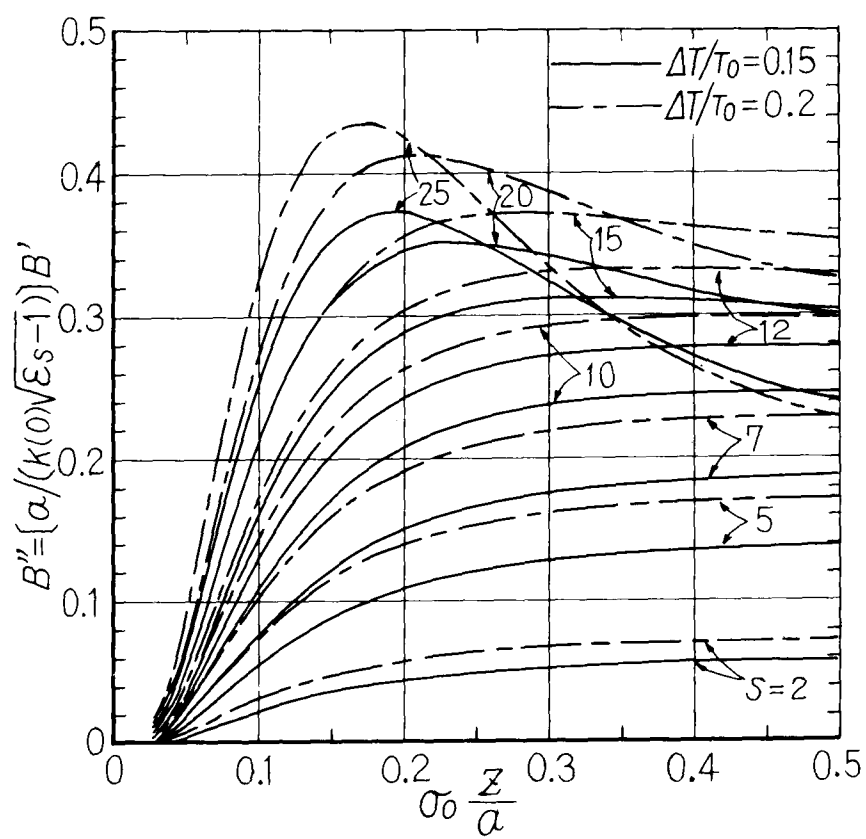


(a)

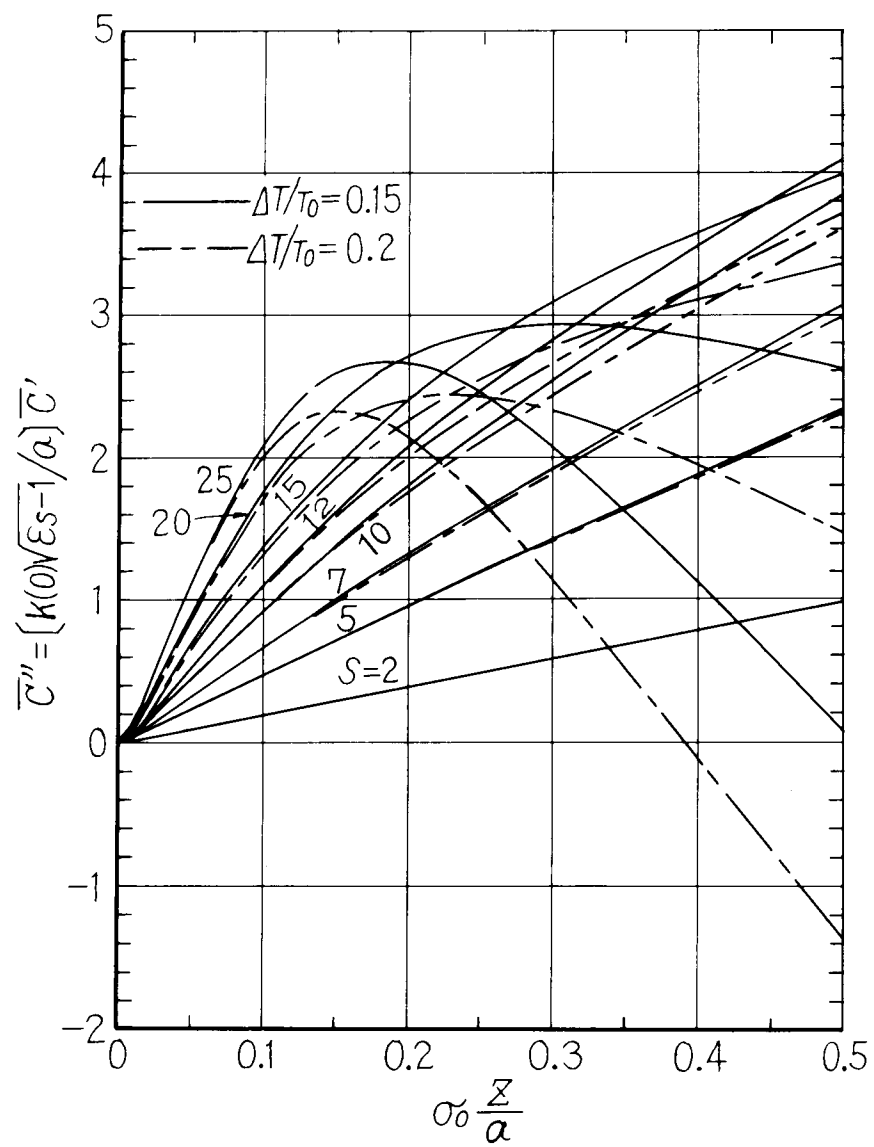
図 3.4 空気に対する $\tilde{F}$ マトリクス要素 ($\Delta T/T_0 = 0.15, 0.2$)

(a) A 要素

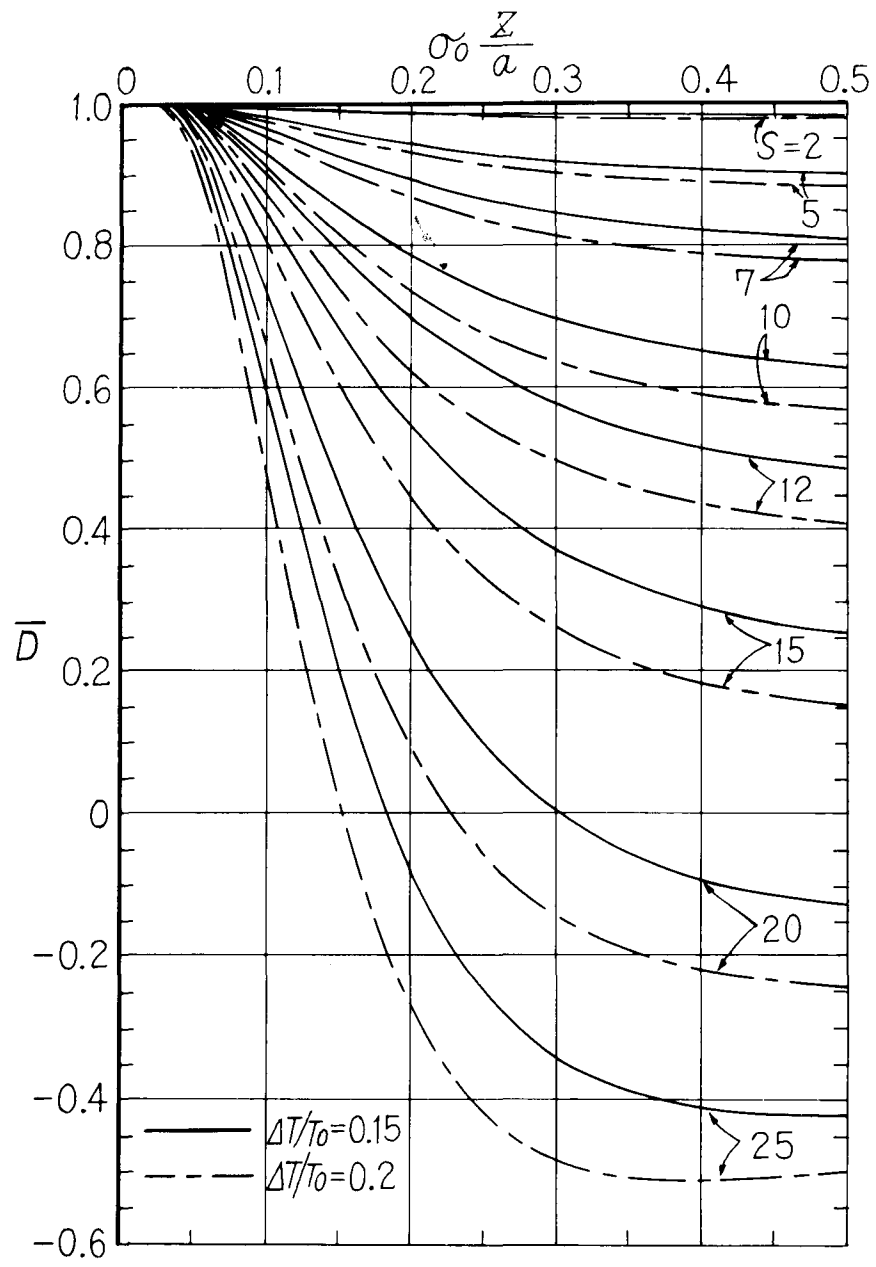
(b) 規格化した B' 要素: B'' (c) 規格化した $\bar{C}'$ 要素: $\bar{C}''$ (d) $\bar{D}$ 要素



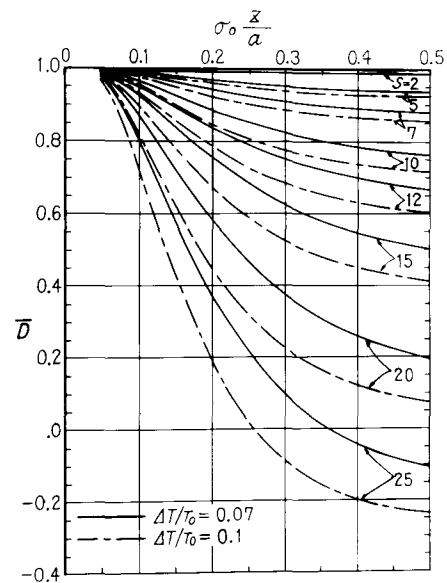
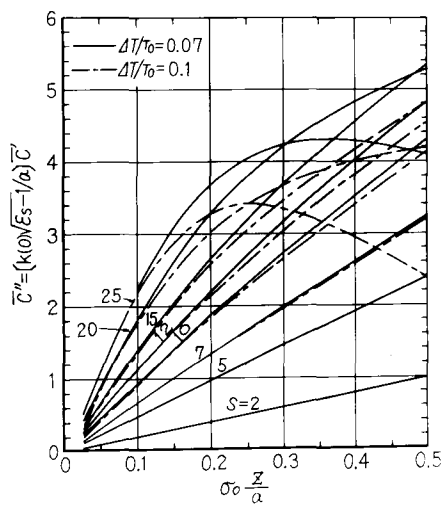
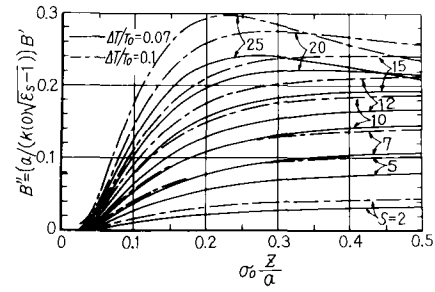
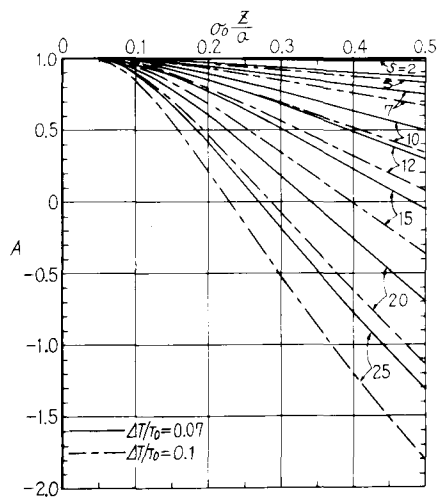
(b)



(C)



(d)

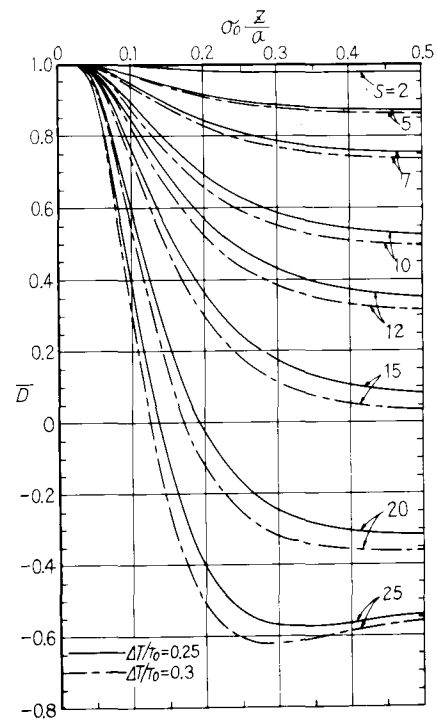
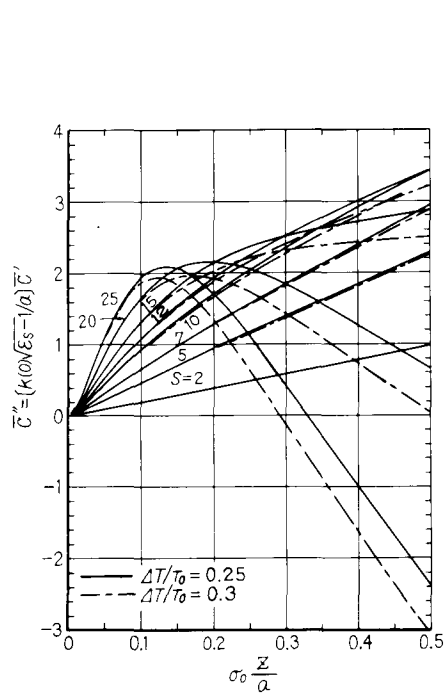
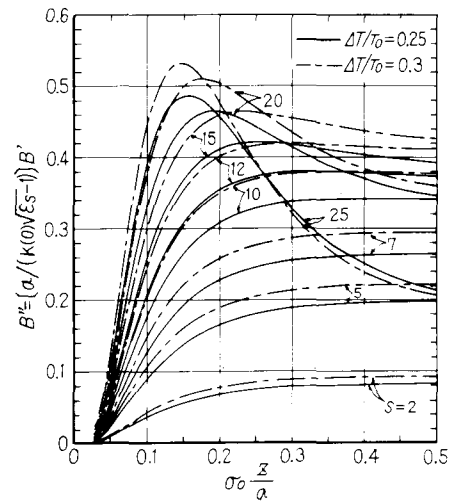
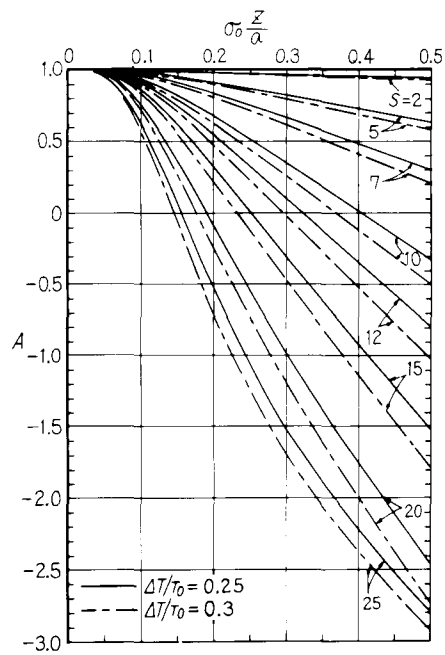


(a)

図3.5 空気に対する $\tilde{F}$ マトリクス要素

(a) $\Delta T/T_0 = 0.07, 0.1$

(b) $\Delta T/T_0 = 0.25, 0.3$



(b)

3.1.3 集束距離と焦点距離

図3. のように，波面係数 $P_i = U_i + jV_i$ で入射したガウス波がガスレンズで集束作用をうけた後，集束距離 l_f でスポットサイズが最小になったとする．この集束距離 l_f は入射条件によって異なり，特に $P_i = 0$ という極限的な場合^{#1)}に，いわゆる焦点距離になる^{#2)}．

いま図3. を参照して，ガスレンズの $\hat{F}$ マトリクス要素を A, jB', jC', D とすると，集束距離 l_f は次式で与えられる．

$$l_f = k \frac{(A + C'V_i)(B' - DV_i) - C'DU_i^2}{(B' - DV_i)^2 + D^2U_i^2} \quad (3.14)$$

なお，入射光のスポットサイズが，ガスレンズの固有スポットサイズに比べて充分大きく，かつ $U_i^2 \ll V_i^2$ の条件が成り立つフランホーファ領域では，

$$l_f \cong k \frac{A - C'V_i}{B' - DV_i} \quad (3.15)$$

となる．また，焦点距離 f は式(3.14)で， $U_i = V_i = 0$ とおくことによって求まり，次式で与えられる．

$$f = k \frac{A}{B'} \quad (3.16)$$

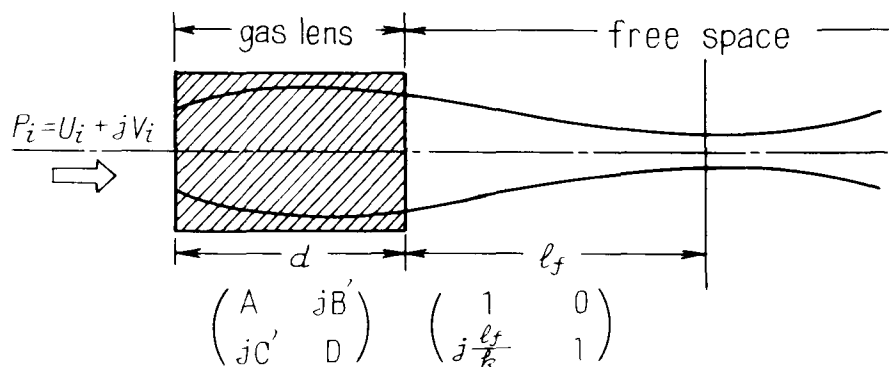


図3.6 ガスレンズの集束距離

#1) 平面波に相当する

#2) レンズの終端から測いたもの．

また，ガスレンズを逆方向にした場合， $\bar{F}$ マトリクスは A ， D 要素が入れかゆるから，集束距離等は式(3.14)～(16)で， A ， D 要素を入れかえたものを用いられよい．なお式(3.13)の関係を用いると，焦点距離 f は順，逆方向それぞれ，

$$f = \frac{a}{\sqrt{\epsilon_s - 1}} \cdot \frac{A}{B''} \quad (\text{順方向}) \quad , \quad f = \frac{a}{\sqrt{\epsilon_s - 1}} \cdot \frac{\bar{D}}{B''} - 0.01 \left(\frac{a}{\sigma_0} \right) \cdot (\text{逆方向}) \quad (3.17)$$

となる．図3.7に， f に関係する量 A/B'' ， $\bar{D}/B''$ を示す．長さ z を大きくすると順方向ではレンズ作用が入力側に近いたの焦点距離は短くなるが，逆方向では出力側にくるため一定値に近づく．

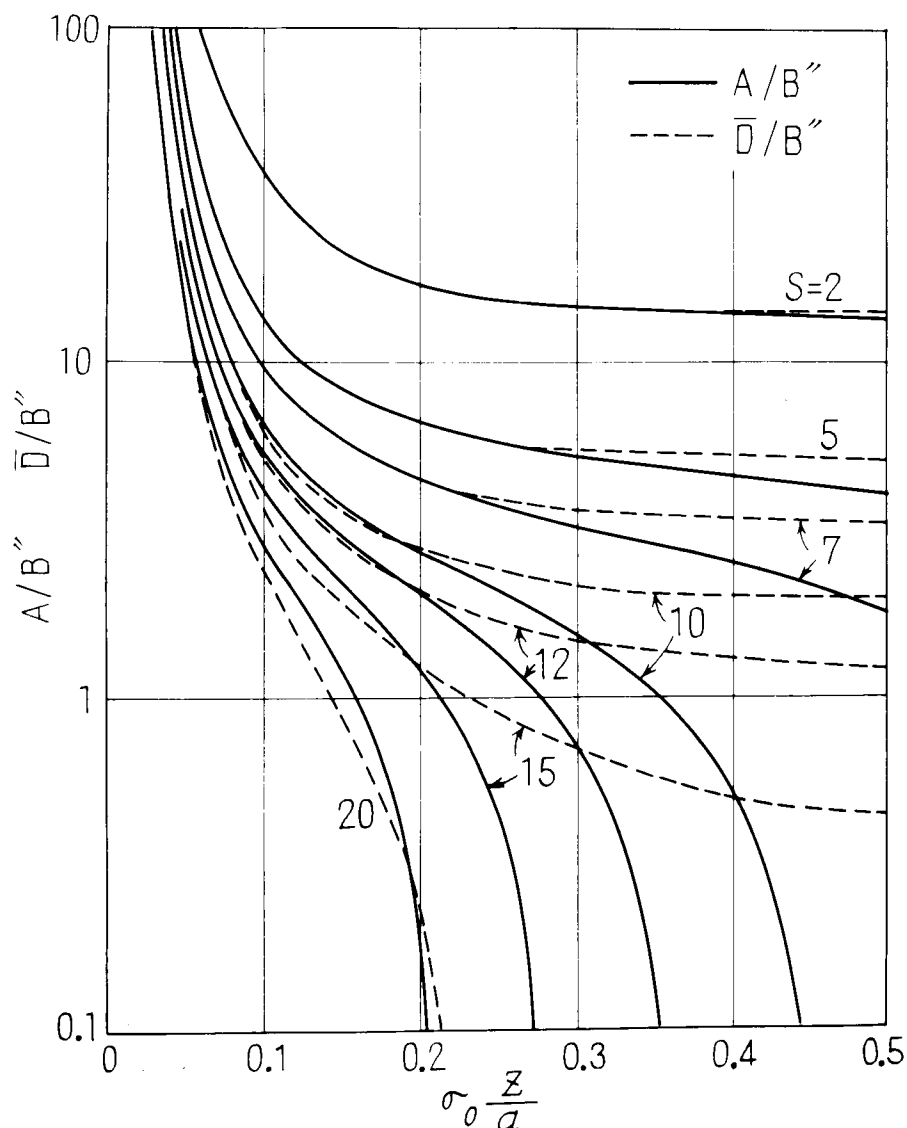


図3.7 ガスレンズの規格化した焦点距離

3.2 発散系を含む層流型ガスレンズの $\tilde{F}$ マトリクス

図3.1において，管の温度 T_w に比べて気体の温度 T_0 が高いときには，レンズ作用が逆に発散性をもつ．このような発散系は，導波系を構成する際に収束系と交互に配置することにより，一つの導波素子になり得るわけで，その $\tilde{F}$ マトリクス要素は設計の際に重要になってくる．

さて，発散系では， $T_w < T_0$ であるから，式(3.6)の g は純虚数となり， $\tilde{F}$ マトリクスは2章で述べたような発散性レンズ状媒質のものをを用いる必要がある．すなわち $g_i \rightarrow jg_i$ とし，式(3.7)に対応する i 番目の区間に関するマトリクス $\tilde{F}_i$ は

$$\tilde{F}_i = \begin{pmatrix} \cosh g_i \Delta z & -jkg_i \sinh g_i \Delta z \\ j \frac{1}{kg_i} \sinh g_i \Delta z & \cosh g_i \Delta z \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

で表わされる．

マトリクス計算の手法は，3.1 で述べたと同じである．式(3.12)以下で述べたように，要素 $\bar{A}$ ， $\bar{B}'' = [a/(R(0)\sqrt{\epsilon_s - 1})]B'$ ， $\bar{C}'' = [R(0)\sqrt{\epsilon_s - 1}/a]C'$ ， $\bar{D}$ の値を次に次に示す．

温度補正を行，たもの $\Delta T/T_0 = 0.20$

空気に対する $\tilde{F}$ マトリクス要素 …… 図3.8

炭酸ガスに対する $\tilde{F}$ マトリクス要素 …… 図3.9

温度補正を行，てないもの $\Delta T/T_0 = 0.07$ …… 図3.10

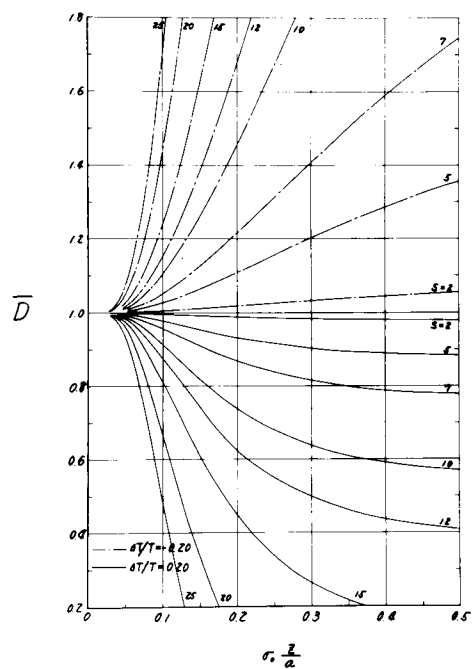
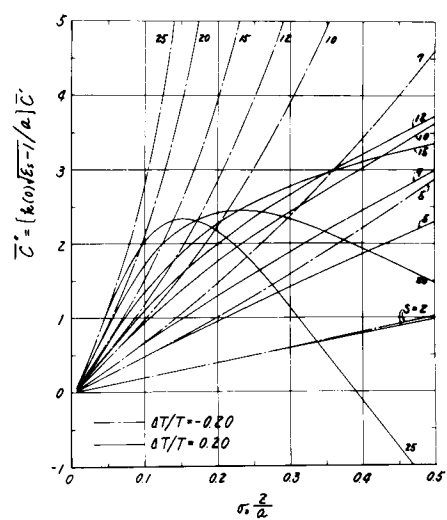
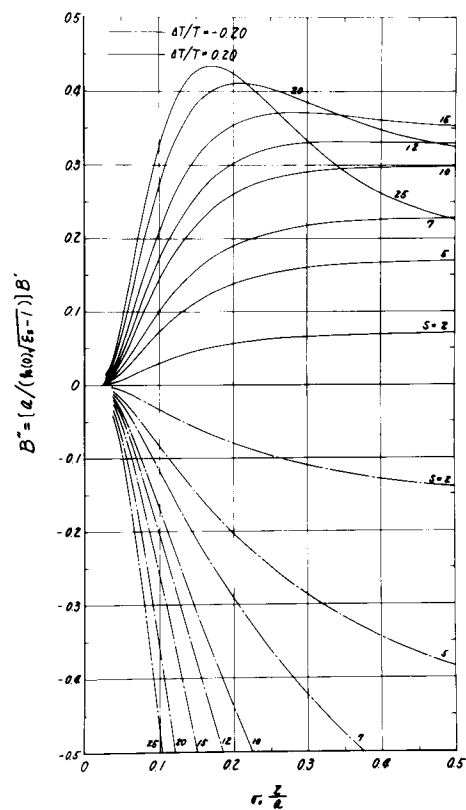
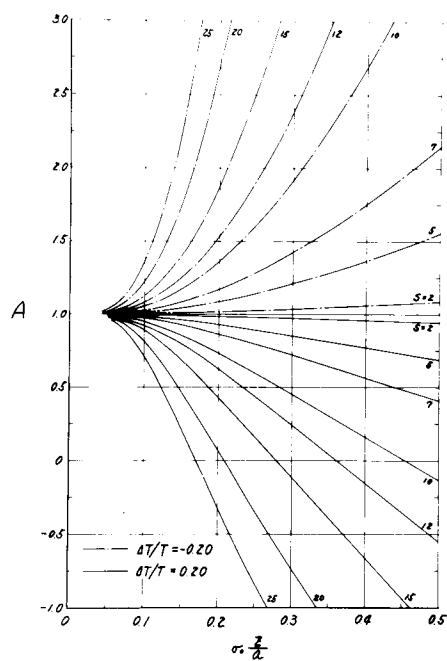


図3.8 散系を含む $\tilde{F}$ マトリクス要素 (空気) $\Delta T/T_0 = \pm 0.20$

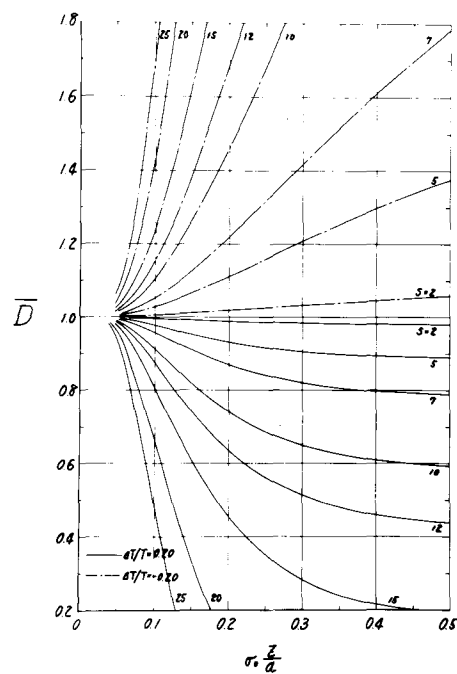
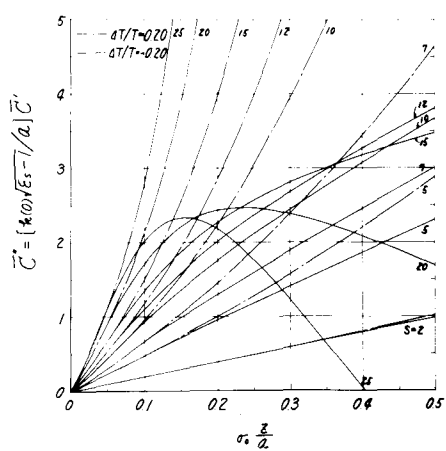
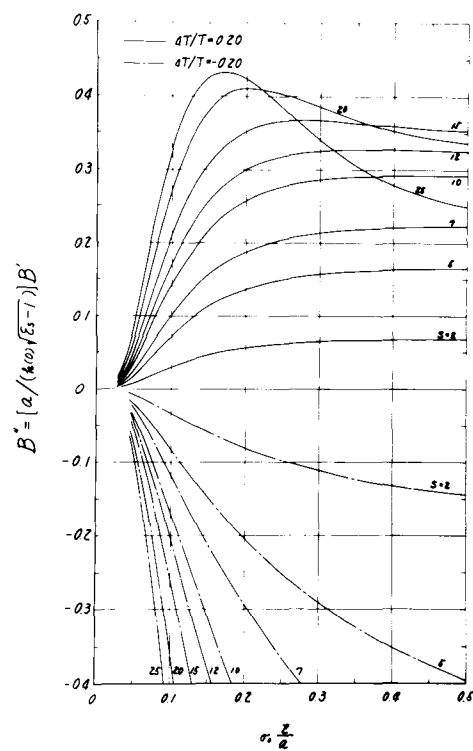
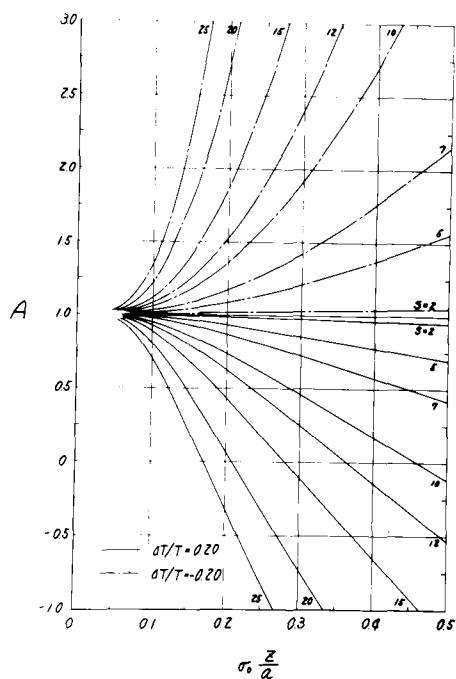


図3.9 発散系を含むFマトリクス要素 (CO_2) $\Delta T/T_0 = \pm 0.20$

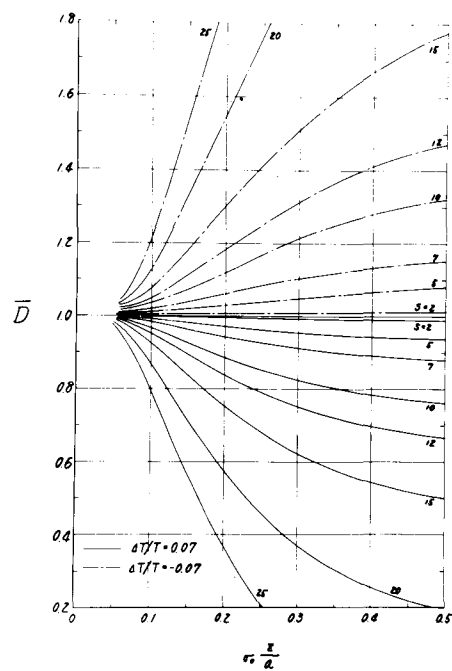
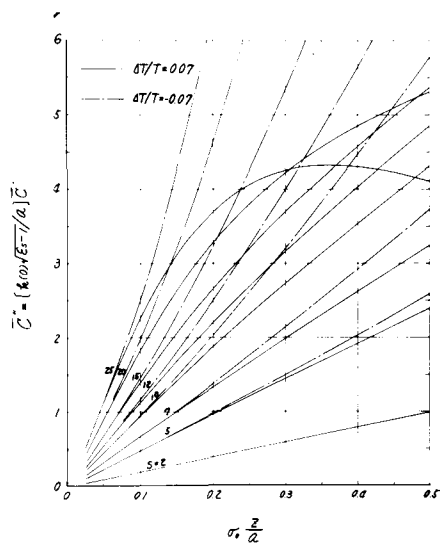
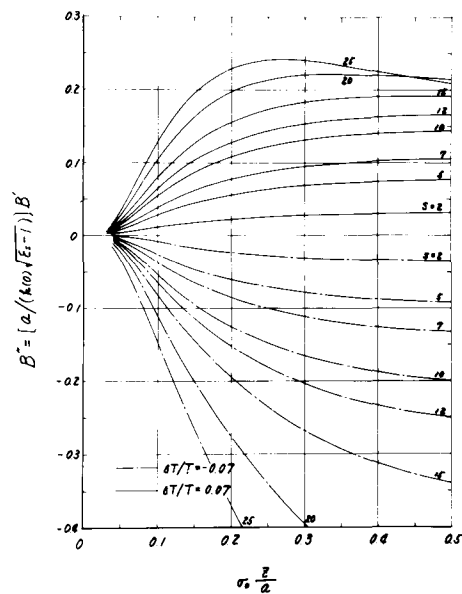
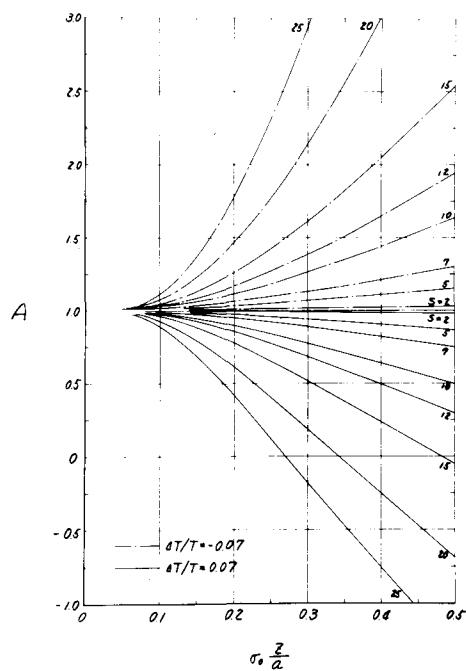


図 3.10 発散系を含む $\tilde{F}$ マトリクス要素

(温度補正を行ってないので 全ての気体に適用できる)

3.3 層流型ガスレンズの集束性の測定

3.3.1 試作したガスレンズと集束距離の測定

試作したガスレンズと測定系を図3.11, 図3.12に示す。ただし, 図3.11の方は気体の流れと光が同じ向き(順方向)であるのに対し, 図3.12では気体の流れと光が反射方向に進む(逆方向)場合を表わしている。図からわかるように, 直径 $2a = 7.5 \text{ mm}$, 長さ $d = 33 \text{ cm}$ の加熱銅管中に, 送風器により風槽を介して空気を送り, 層流をつくる。管内で完全な層流^{#1)}が形成されるには, 入口から $l = 0.06 Ra$ 程度の距離が必要であるため, 約 20 cm の室温パイプを設けた。ここに $R (= 2\mu a / \nu, \mu: \text{動粘度}^{\#2}, \nu: \text{気流の速度})$ はレイノルズ数である。さらに入口を拡げ, その拡がりの曲率半径を $r = 0.5a$ 程度にしておきより良い層流条件をつくった。また, 気体の出口付近にはガラス板をおいて流出した加熱気体による凹レンズ作用を小さくした。風量測定にはロタメータを用い, 温度は室温度加熱パイプの温度差を熱電対で測った。パイプの温度は, 入口, 出口と中心で $\pm 2\%$ 程度差があったが, 中心部で測定した。

集束距離の測定には, TEM₀₀ 状態, $6328 \text{ \AA}$ の He-Ne ガスレーザー光をガスレンズに入射させ, 風量, 温度を一定に保ってフーコーのナイフエッジ法を用いた。凸レンズはスポットを拡大して測定誤差を小さくするのに役立った。

図3.11において, ガラス板とガスレンズとの距離を 8 mm 程度にして凹レンズ作用を除き, 風量 Q をパラメータにして $\Delta T/T_0 = (T_w - T_0)/T_0$ に対する集束距離 l_f を測定した結果を図3.13に示す。(a)の順方向では, 風量 Q を増しても l_f は短かくならない。これはレンズ作用の強い部分が管の出口へ向って移動するためと考えられる。一方, 逆方向では, 集束距離を測る基準となる管の端から, Q が増えるにしたがってレンズ作用の強い部分が離れるために集束距離は次第に短かくなり, いくことがわかる。また, 風量の小さいときに, 温度差 ΔT を大きくしても, 集束性はあまり強くならない。これは風量が小さいために管内の温度が一様になってしまうためと考えられる。

#1) 粒子速度が 2 乗分布になっている場合

#2) $\nu = \eta / \rho$
 $\left\{ \begin{array}{l} \eta: \text{粘性率} \\ \rho: \text{密度} \end{array} \right.$
 空気の場合 $181 \mu\text{P}$ $\rho: \text{dyn sec/cm}^2$
 空気の場合 1.21×10^{-3} g/cm^3

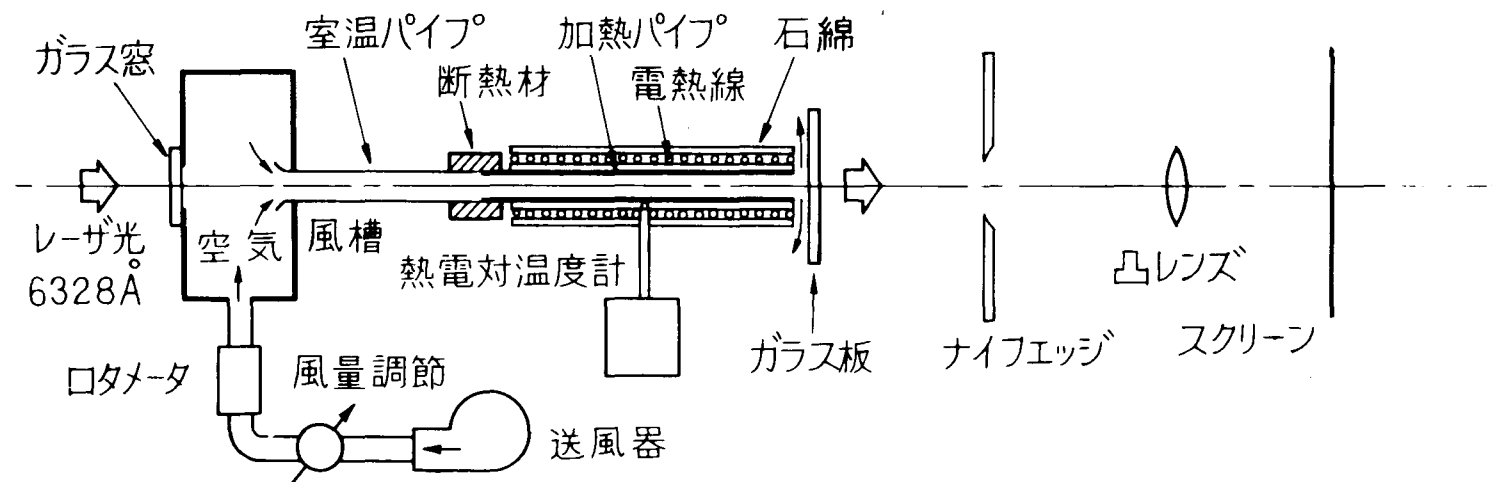


図3.11 層流型ガスレンズの構造と測定系 (a)

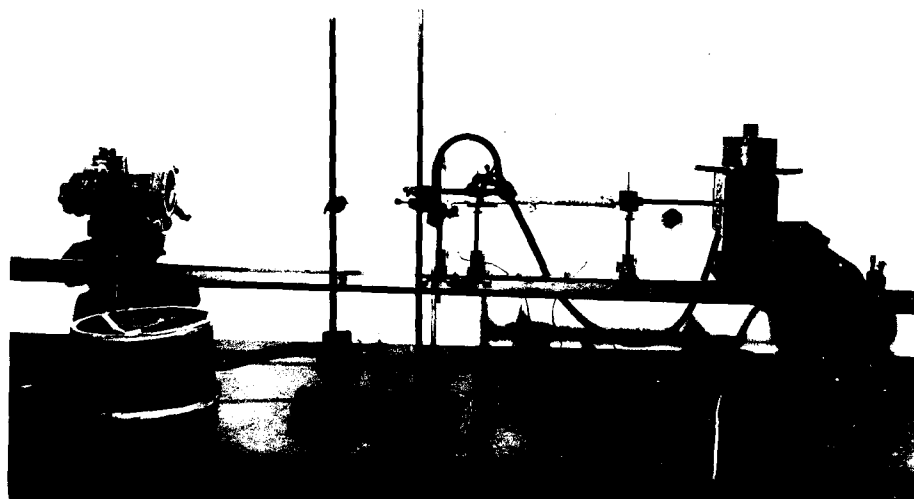


図 3.12 層流型ガスレンズと測定系 (b)

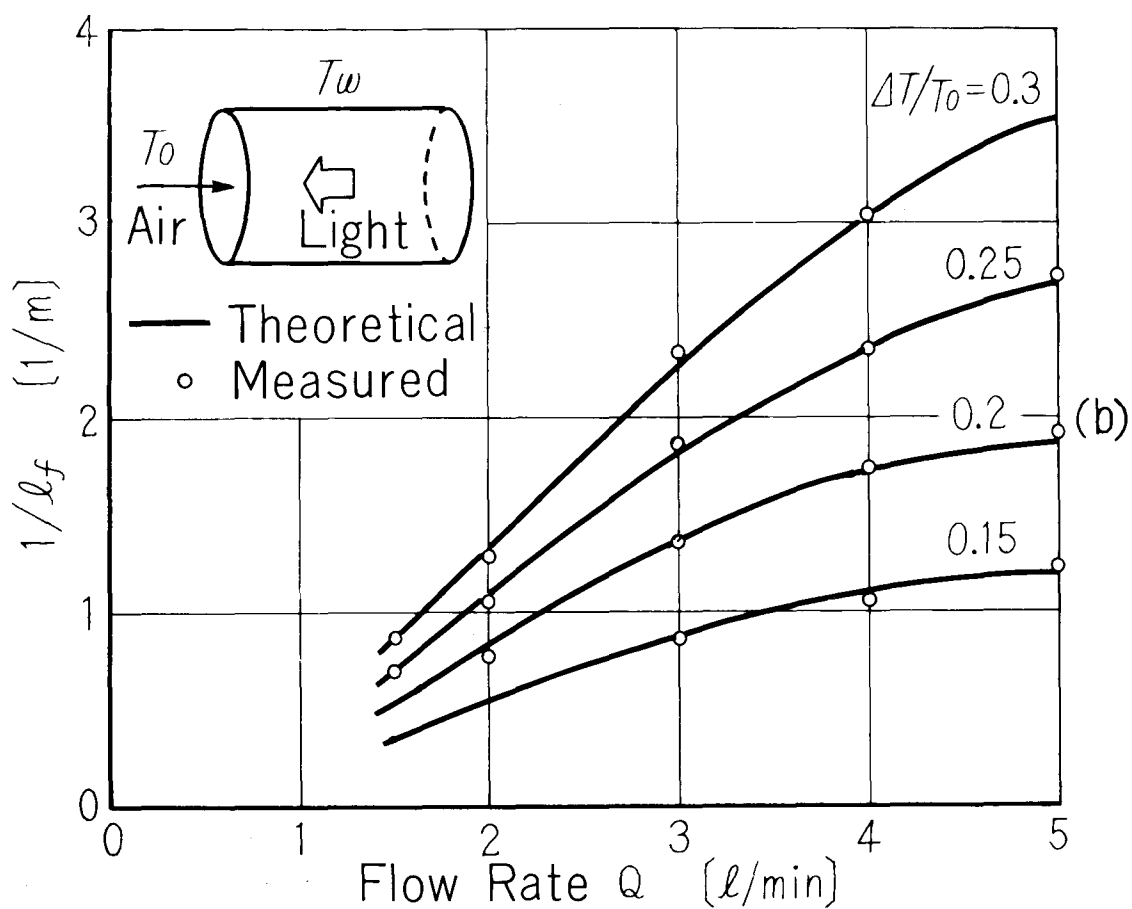
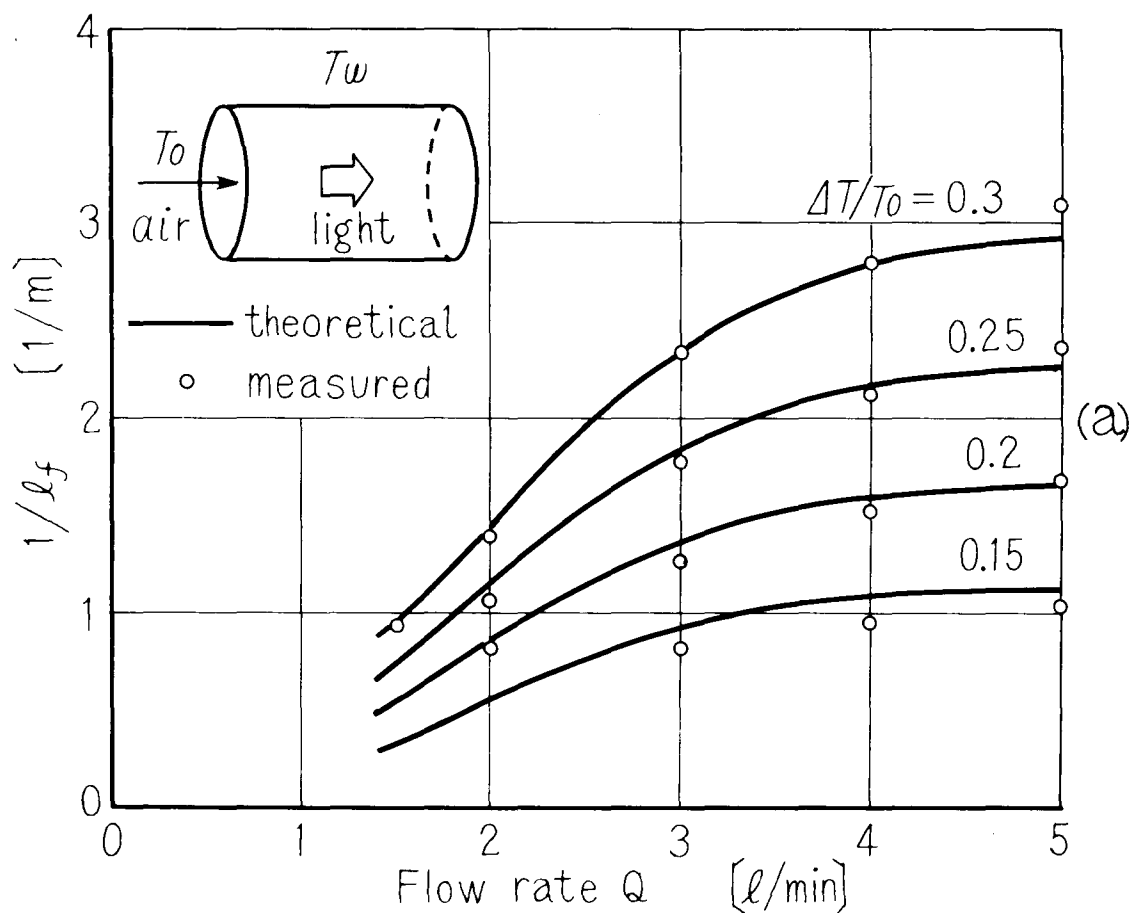


図3.13 層流型ガスレンズの集束距離 l_f と流量 Q の関係 (測定値と理論値の比較)

3.3.2 集束距離の理論値

(i) 入射点における波面係数

集束距離 l_f は式 (3.14) で示されているように，入射波面係数 $P_i = U_i + jV_i$ によってかわるので，測定したガウス波の波面係数を求めておく必要がある．波面係数の実数部 ($= U_i = 1/w_i^2$) はスポットサイズを測定しなければ求まらないが，式 (3.14) 以下で述べたように $U_i^2 \ll V_i^2$ のときには，虚数部さえわかれば集束距離は式 (3.15) のように表わされるから，ここでは虚数部 V_i の測定法について述べる．それには焦点距離 f のわかった薄肉凸レンズを求めるところにおいて，凸レンズによる集束距離 l_f' を測定する． l_f' は式 (3.15)，式 (2.) から

$$l_f' = \left(\frac{1}{f} - \frac{V_i}{R} \right) / \left\{ \left(\frac{1}{f} - \frac{V_i}{R} \right)^2 + \left(\frac{U_i}{R} \right)^2 \right\} \quad (3.19a)$$

で与えられ， $(1/f - V_i/R)^2 \gg (U_i/R)^2$ になるように f を選んでおくと

$$l_f' \cong 1 / \left(\frac{1}{f} - \frac{V_i}{R} \right) \quad (3.19b)$$

となるから， V_i は次式のようになる．

$$V_i = R \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{l_f'} \right) \quad (3.20)$$

測定の結果， $V_i = 5.2 \times 10^6 \text{ (m}^{-2}\text{)}$ を得た．一オ，ガスレーザのフアブリ・ペロ-共振器の共振状態から理論的に求めた波面係数は， $U_i = 8.8 \times 10^5 \text{ (m}^{-2}\text{)}$ ， $V_i = 5.23 \times 10^6 \text{ (m}^{-2}\text{)}$ であり，^{#1)} 実験誤差の範囲で測定値と一致しているので集束距離を求める際には，この理論値を用いた．

(ii) 集束距離

集束距離は次の手順で計算した．例えば， $\Delta T/T_0 = 0.2$ ， $Q = 2 \text{ l/min.}$ ，で順方向の集束距離を求めてみよう．実験に用いた $T_0 = 293 \text{ }^\circ\text{K}$ の空気に対する気体定数は

$$\sqrt{\varepsilon_s - 1} = 0.0234, \quad P_0 = 1.21 \times 10^{-3} \text{ (g/cm}^3\text{)} \quad \kappa_0 = 6.28 \times 10^{-5} \text{ (cal/cm} \cdot \text{sec} \cdot \text{deg)}$$

$$C_p = 0.240 \text{ (cal/g} \cdot \text{deg)} \quad \kappa_0/P_0 C_p = 0.216 \text{ (cm}^2\text{/sec)}$$

$$a = 0.375 \text{ cm} \quad z = 33 \text{ cm}$$

#1) この値は 2 章 2.4 <例> で求めている．

であるから $S = 3.06 Q$ ($Q: \text{l/min}$) となり, $S \approx 6$ のときのマトリクス要素の値を図3.4から読みとる. 次に, 式(3.15)に求めたマトリクス要素の値と, 入射波面係数を代入して $l_f' = 0.8$ (1/m)となる. このようにして求めた集束距離の理論値を図3.13に示した. 全般的に実験値とかなり良く一致した.

風量の小さいオでは, 理論値に比べて実験値がやや小さい. これは管の出口における加熱気体の凹レンズ作用が多少残っているためであろう. また, 温度差が大きいかつ風量が大きくなところで測定値が大きなのは, 管内速度分布が等温の場合の放物線分布(図3.14(2))より, 管壁を熱したために(3)のようにずれて, 実効的な g が増大して集束性が大きくなるためと考えられる.

前者の凹レンズ作用はガスレンズの理論にとって本質的なものではないが, 後者の効果は, 温度差が大きく, 集束性が極めて大きな場合には考慮する必要がある.

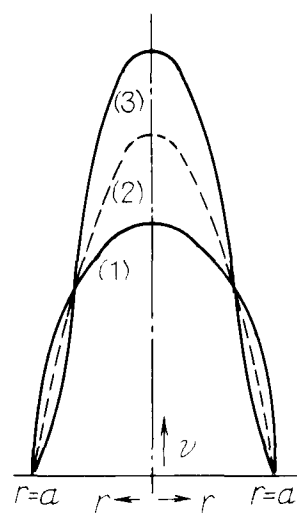


図3.14 管内の風速分布
(1) 管を冷却した場合
(2) 等温の場合
(3) 管を熱した場合

3.4 本章のまとめ

3.4.1 本章で新たに得られた結果

層流型ガスレンズのガウス波に対する集束性を理論的, 実験的に検討して次の結果を得た.

(i) 層流型ガスレンズの $\tilde{F}$ マトリクスを計算した. (図3.4, 図3.8~3.10)

軸方向にも誘電率の分布をもつこの型のガスレンズを, 縦方向に微小区間に分け, その区間の $\tilde{F}$ マトリクスを求めて, それらの積で全体と表わした. その際, 中心軸の温度も変化し, それによって気体の熱伝導率などの気体定数も変化するが, それらの変化も考慮にいった.

(ii) ガウス波のように有限の広がりをもつビーム波を，レンズ状媒質で集束した場合，一点に集まらず，一度ビームが極小になり再び発散する．この極小点までの距離を集束距離と定義して（式(3.14)）， $\tilde{F}$ マトリクスから算出した．

(iii) 管径 7.5 mm，長さ 33 cm の層流型ガスレンズを試作し，He-Ne ガスレーザから得られるガウス波を用いて集束距離の測定を行った．その結果，計算によって求めた理論値とは，実験誤差の範囲で良好一致をみた．

3.4.2 結 論

(i) 層流型ガスレンズの集束性に関しては従来より厳密な検討を行うことができたが，光ビーム導波束をこのガスレンズで構成することは本研究では行わなかった．

(ii) 実際にこの型のガスレンズを導波束に用いる場合に，次の点が問題になってくるであろう．

① この型のガスレンズは集束性が強く，実験では約 20 cm 程度の集束距離のものも得られたが，管径を大きくすると（例えば 2 cm 程度），著しく集束性が減る．このことは，ガスレンズ共通の欠点と思われる．

② 集束性を強くすると姿勢変換が大きくなる（6章参照）

③ ガスレンズを動作させるための電力を必要とするし，温度，風の流速の制御を精密に行わないと集束性が変化してしまう．

4章 双曲線型ガスレンズの集束性

双曲線型ガスレンズは，気体を流すことなく静止気体の熱伝導のみによって気体の誘電率に分布をもたせる，いわゆる静止型ガスレンズの一種の型である。静止型ガスレンズにはこの他に，Tienらによって提案された四重らせん型のものがあるが，解析によると炭酸ガスを10気圧にしてはじめて集束性をもたせることができるといわれているだけで，実験的に集束性が確かめられたという報告はない。

双曲線型ガスレンズは，2対の双曲線筒を用い，相対する一対を熱し，他の一対を冷却するもので，こうすると内部気体の温度分布は理想的な2条分布となり，それによってできる誘電率の分布も2条分布に非常に近くすることができる。1気圧・常温の空気を用い，姿勢変換なしにビームを集束することができることが理論的に示されている。

本章では，このような双曲線型ガスレンズの集束性を実験的に確かめたもので，数種類の試作ガスレンズを用いての温度分布の測定，レーザー光による集束性の測定，オートコリメータによるレンズ作用の測定などから，実用的な熱導体の構造，正常な理論どおりの集束性を示す温度差の限界等を明らかにして，導波系を設計する際の資料を得た。

4.1 双曲線型ガスレンズの構造と動作原理

4.1.1 双曲線型ガスレンズの構造と誘電率分布

双曲線型ガスレンズ(HGL^{#1)}の横断面を図4.1に示す。相対する一対の熱導体を $+\Delta T$ ，他の一対を $-\Delta T$ だけ中心部の温度 T_0 °Kに比べて温度差を与える。熱導体，熱絶縁体は直角双曲線状の断面をもち，与えられた導体の温度分布によって内部気体の温度分布がきまる。対流がおこらず，熱伝導のみで制限される範囲では，内部気体の温度分布 $T(x, y)$ はラプラスの方程式

#1) Hyperbolic-Type Gas Lens

$$\nabla^2 T(x, y) = 0 \quad (4.1)$$

と境界条件, $x^2 - y^2 = a^2$ のとき $T = T_0 + \Delta T$, $x^2 - y^2 = 0$ のとき T_0 , $T(x, y) = T(x, -y)$ によってきまる. この解は

$$T(x, y) = T_0 + \Delta T (x^2 - y^2) / a^2 \quad (4.2)$$

となり, 双曲線型の2乗分布をもつようになる.

ここで, $(\Delta T / T_0) (x^2 - y^2) / a^2 \ll 1$ の範囲, つまり温度差 ΔT が T_0 に比べて小さく, 中心軸の付近では

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{\Delta T}{T_0} (x^2 - y^2) / a^2 + \left\{ \frac{\Delta T}{T_0} (x^2 - y^2) / a^2 \right\}^2 + \dots \quad (4.3)$$

となるから, 誘電率分布はクラジウス・モソッティの法則式(3.5)にこの式を代入することによって次のように求まる.

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon(0) \left[1 - (gx)^2 + (gy)^2 + h^4 (x^2 - y^2)^4 + \dots \right] \quad (4.4)$$

ただし,

$$g = \sqrt{\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{\Delta T}{T_0} \frac{1}{a}}, \quad h = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \left(\frac{\Delta T}{T_0} \right)^2 \frac{1}{a}} \quad \dots \quad (4.5)$$

さらに, $\Delta T \ll T_0$ で近軸の場合 ($x, y \ll a$) には四次項も無視でき, #1)

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon(0) \left[1 - (gx)^2 + (gy)^2 \right] \quad (4.6)$$

と近似でき, ほゞ理想的な2乗分布をもつレンズ状媒質が得られることがわかる. たゞ, x 方向と y 方向とでは g^2 の符号が逆になっているために, x 方向では集束性, y 方向では発散性のレンズ状媒質である. 実際の導波系に用いる場合には, 各区間毎に 90° ずつひねって配置すればよい. このことについては, 8章で詳しく述べる. また, 4次項の影響については5章の姿態変換のところで検討する.

#1) 常温, 1気圧の空気を用いる場合には $\sqrt{\varepsilon_r - 1} = 0.0734$ である. $\Delta T / T_0 = 10^{-2}$, $|x|, |y| \leq 0.3a$ とすると

$$(gx)^2 \approx 5 \times 10^{-7} \quad (hx)^4 \approx 5 \times 10^{-10}$$

4.1.2 熱導体の構造

熱導体の断面が，双曲線である場合には理想的な2束分布のレンズ状媒質が得られることがわかったが，実際問題として理想的な双曲線筒を形づくるのは困難であり，円筒の一部で代用することが考えられる．結果的には，円筒を用いても，ほぼ2束分布に近い温度分布が得られることがわかった．

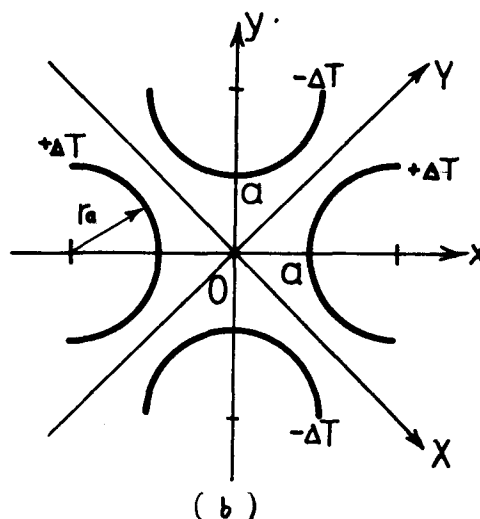
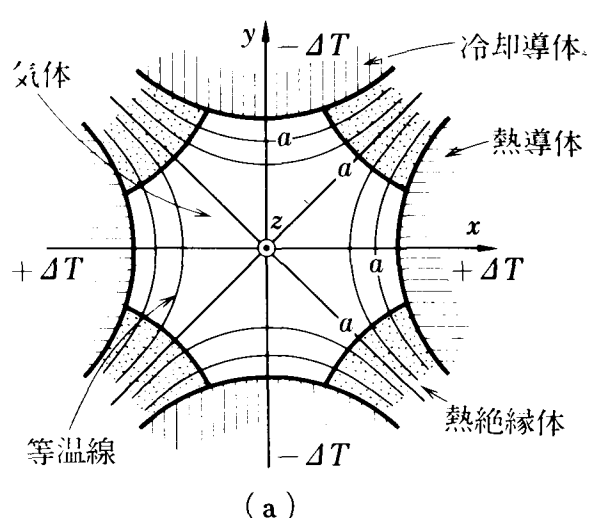


図4.1 双曲線型ガスレンズの構造

(a) 双曲線筒を用いる基本型

(b) 円筒を用いるもの

(1) ま，図4.1 (a) の双曲線筒のかめりに，同図(b) のような半径 r_0 の円筒を中心軸から a だけそれぞれ離して配置する．ここで，

$$s = X + iY, \quad W(s) = V(X, Y) + i\Phi(X, Y) \quad (4.7)$$

とおくと，対称性から $W(s)$ には次の性質があることがわかる^{#1)}．

$$\textcircled{1} W(s) = W(-s), \quad \textcircled{2} W(s) = W(i s^*), \quad \textcircled{3} W(s) = -W(s^*) \quad (4.8)$$

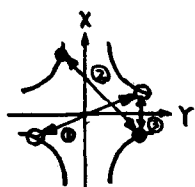
したがって， $W(s)$ を s で多項式展開したとき

$$W(s) = \frac{1}{2} R_2 s^2 + \frac{1}{6} R_6 s^6 + \frac{1}{10} R_{10} s^{10} + \dots$$

とかける．従って等ポテンシャル線は

$$\Phi(x, y) = \text{Re } W = \frac{1}{2} R_2 (x^2 - y^2) + \frac{1}{6} R_6 \{ x^6 - 15x^2y^2(x^2 - y^2) - y^6 \} + \dots \quad (4.9)$$

#1)



$x=a, y=0$ の熱体上でのポテンシャルを Φ_0 とすると

$$\frac{\Phi(x,y)}{\Phi_0} = K_2 \frac{x^2 - y^2}{a^2} + K_6 \frac{x^6 - 15x^2y^2(x^2 - y^2) - y^6}{a^6} + \dots \quad (4.10)$$

と表わされる。係数 $K_2, K_6, \dots$ は r_0 の関数であり、電子ビーム集束用の磁界レンズによる実験によると #1)

$$r_0 = 1.15 a \quad (4.11)$$

のとき、 K_6 は実効的に 0 にできる。従って z 軸付近を考えれば、円筒状の熱導体によっても、非常に近似度よく 2 束分布の温度分布を得ることができる。

4.1.3 内部消費電力

熱導体から冷却導体へ単位時間に定常的に流れる熱量、ちるゆえガスレンズが内部で消費する電力を求める。簡単のために、図 4.2 (a) のように、 $2a$ の導体間隔で配置された半径 a の円筒を考え、さらにこの間を流れる熱量は近

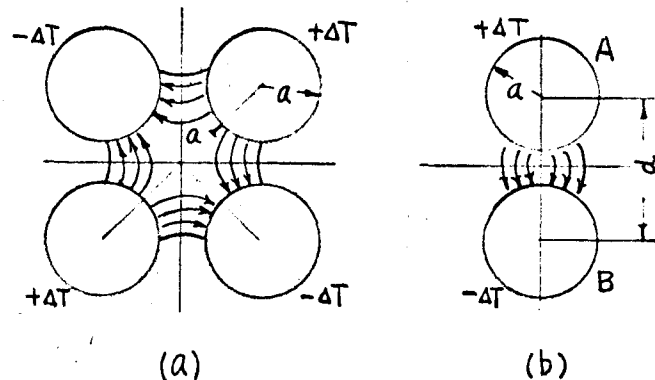


図 4.2 導体間の熱の伝導

似的に (b) のような一対の円筒間に流れる熱量の 2 倍であると仮定する。

微小面積 ds を単位時間に通過する熱量 $d\dot{w}$ は、 ds に垂直な r 方向の温度勾配を $(\nabla T)_r$ 、熱伝導率を κ_q とすると、 $d\dot{w}$ は次のように表わされる。

$$d\dot{w} = -\kappa_q \{ -(\nabla T)_r \} ds \quad (4.12)$$

ここで、図 4.2 (b) の AB 間を流れる熱量 W_{AB} は、式 (4.12) を積分して等価

#1) P. Grivet, "Electron Optics", p237, Pergamon Press

的に

$$W_{AB} = 2 K_{AB} \Delta T \quad (4.13)$$

で表わされたとする。ただし、 K_{AB} は AB 間の熱伝導度である。

さて、 K_{AB} を求めるには、抵抗率 ρ の媒質中に (b) のような導体が埋まっているときの電気抵抗 R_{AB} から求められる。長さ z に対し R_{AB} は

$$R_{AB} = \frac{\rho}{\pi z} \log_e \left(\frac{d + \sqrt{d^2 - 4a^2}}{2a} \right) \quad (\Omega) \quad (4.14)$$

$d = 2\sqrt{2}a$ の場合には

$$R_{AB} = \frac{\rho}{\pi z} \log_e (1 + \sqrt{2}) \cong \frac{1}{3.6 K_e z} \quad (4.15)$$

となる。ただし、 $K_e = 1/\rho$ は電気伝導率である。ところで、電気伝導率 K_e の媒質中を流れる電流も式 (4.12) と同じ形としていることから、 $K_e \rightarrow K_0$ とおきかえると、 $K_{AB} = 1/R_{AB}$ とおくことができるから

$$K_{AB} = 3.6 K_0 z \quad (4.16)$$

となる。式 (4.13) より、 $W_{AB} = 7.2 K_0 z \Delta T$ となるから、図 4.2 (a) に相当する単位長当りの消費電力 W は次のように表わされる。

$$W \cong 15 K_0 \Delta T \quad (\text{Watt/m}) \quad (4.17)$$

ここで、 K_0 は熱伝導率で、1 気圧の空気の場合、 $K_0 = 2.6 \times 10^{-2} (\text{Watt/m})$ であるから、 $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ のときには 3.9 Watt/m になる。

4.2 試作した双曲線型ガスレンズ

試作したガスレンズは、表4.1に示す7種類で、仮りにA, B, C... と名称をつけて呼ぶことにする。いずれも熱導体は真鍮円筒である（ただし、HGL-Fだけは板を用いている）。導体の真直性と、間隔を一定に保つために、両端と中間にベークライト板のスペーサを配置した。内部は反射をさける目的で、黒色の黒反射塗装をほどこした。熱導体円筒は内部に碍子で絶縁したニクロム線を入れ、電熱によって高温にし、冷却導体の方は、放熱板をつけて温度を室温近くに保つ。したがって、中心軸上の温度は熱導体と冷却導体のちょうど中間になる。ガスレンズの両端は開放してあるので、気体は1気圧の空気である。外気流の影響を防ぐために両端にガラス窓を設けたものもあるが、開放の場合でもほとんどその影響はみられなかった。空気以外の気体を用いたり、1気圧以上にして動作させる場合には、特別に周囲を包うか、全体を容器の中に入れる必要があるが、本実験では行っていない。ただ、外気の対流や輻射の影響を防ぐためにまわりを絶縁紙でおおった。ガスレンズ全体は、機械的な安定性を得るために、鉄製のチャンネル上に固定した。

各々のHGLの構造と概観を図4.3(a)~(g)に示す。

表4.1 試作した双曲線型ガスレンズ一覧

双曲線型 ガスレンズ 名 称	導体間隔	円筒直径	長 さ	構 造	備 考
	$2a(\text{mm})$	$2r_0(\text{mm})$	$l_g(\text{m})$		
HGL-A	10	10	1.0		half section
B	10	10	4.2		unit
C	38	51	2.1		half
D	19	19	0.5		half
E	6	6	0.5		half
F	4	4*	0.3		half
G	5.2	6	0.628		unit

* 円筒を用いず、真鍮板の端部を円形に加えたもの

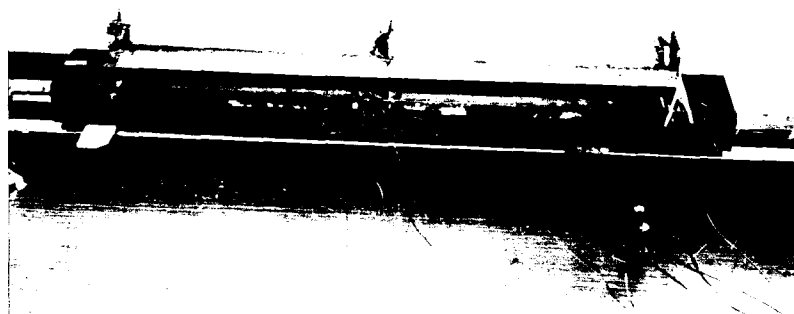
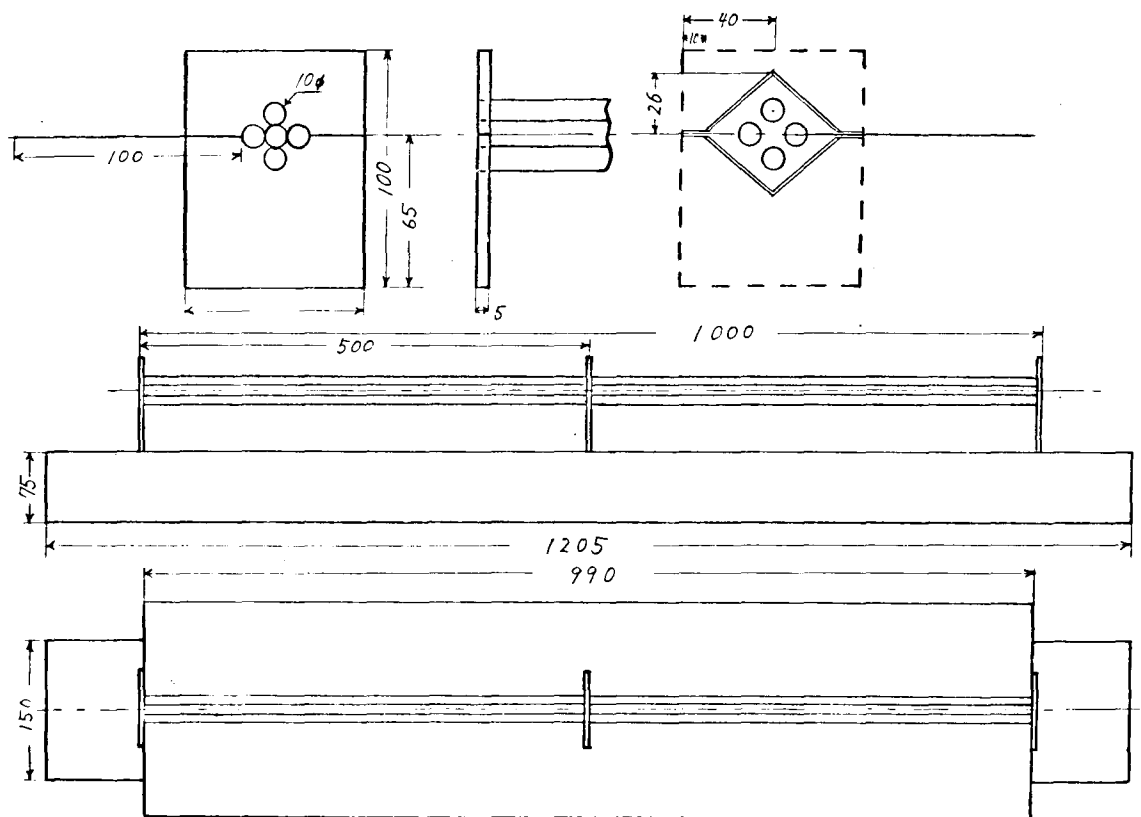


图4.3 (a) HGL-A

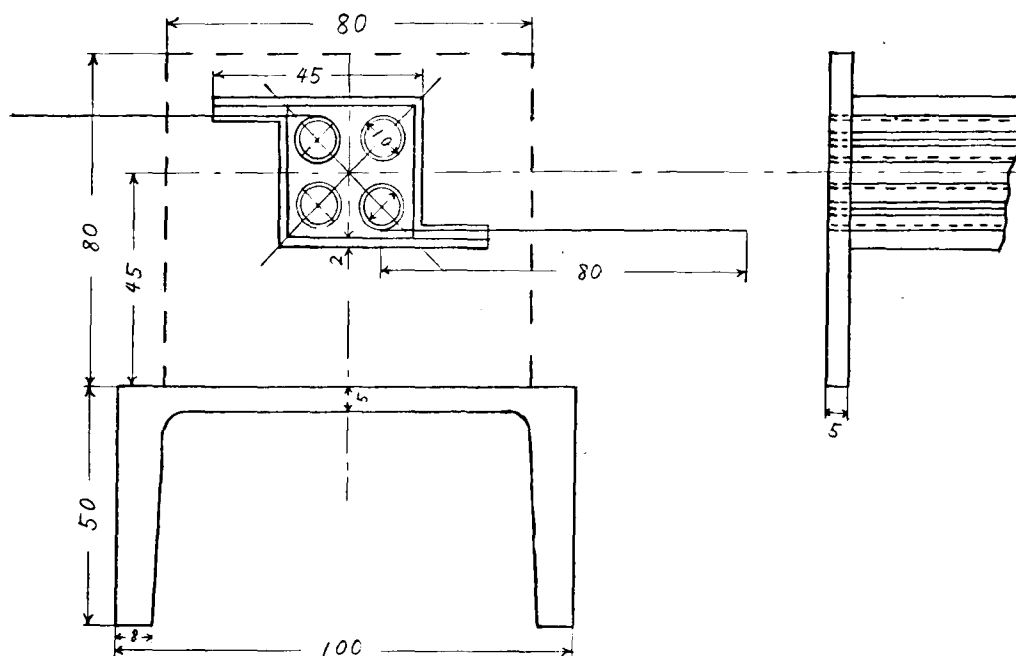
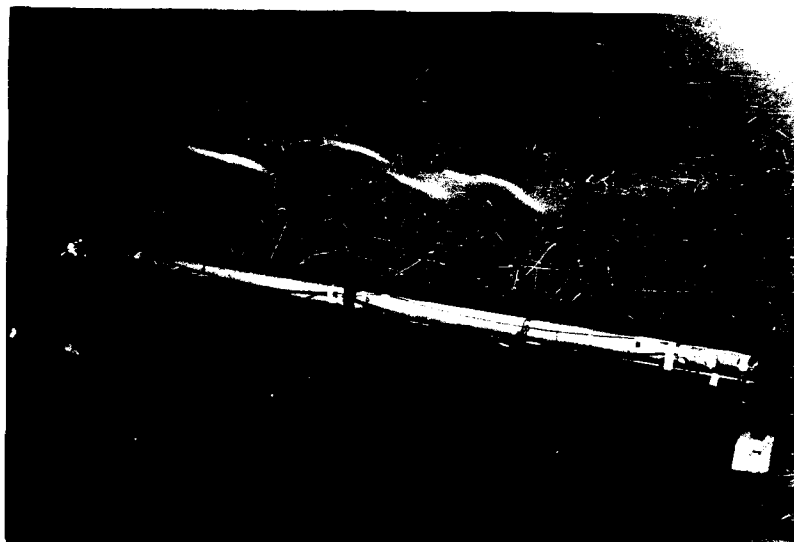
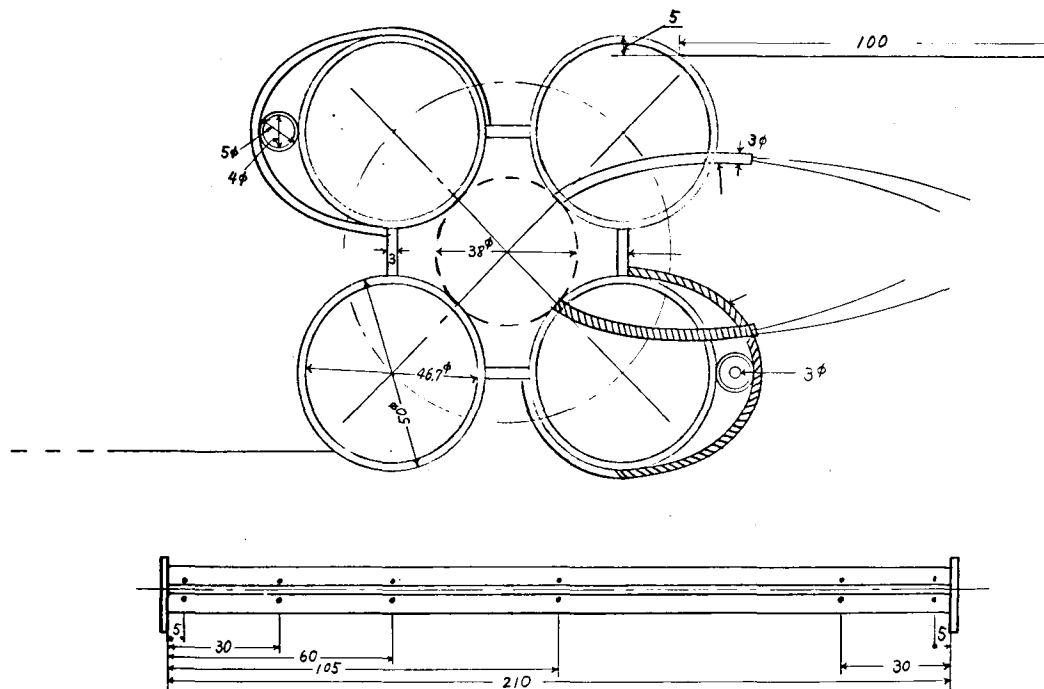
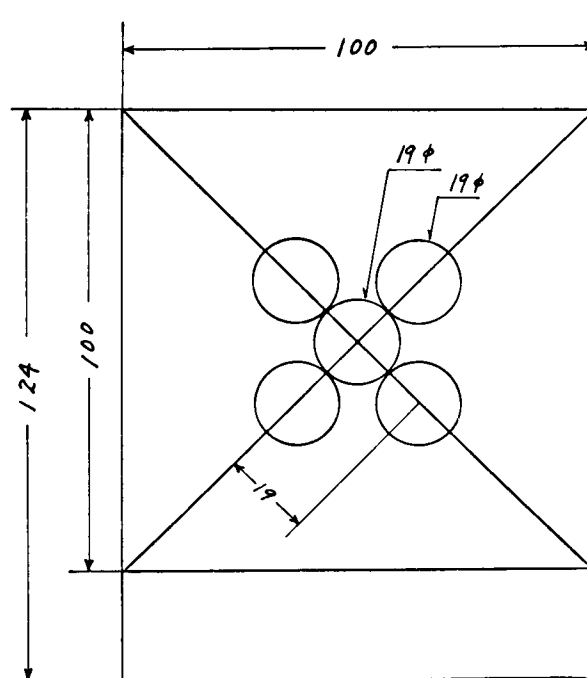


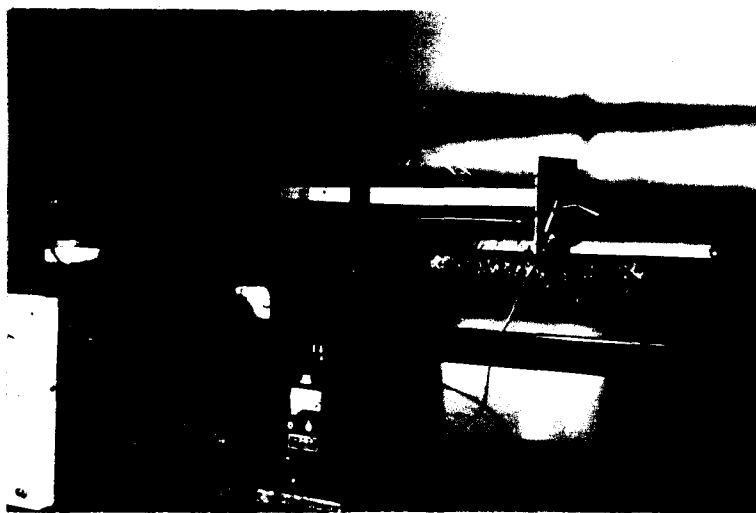
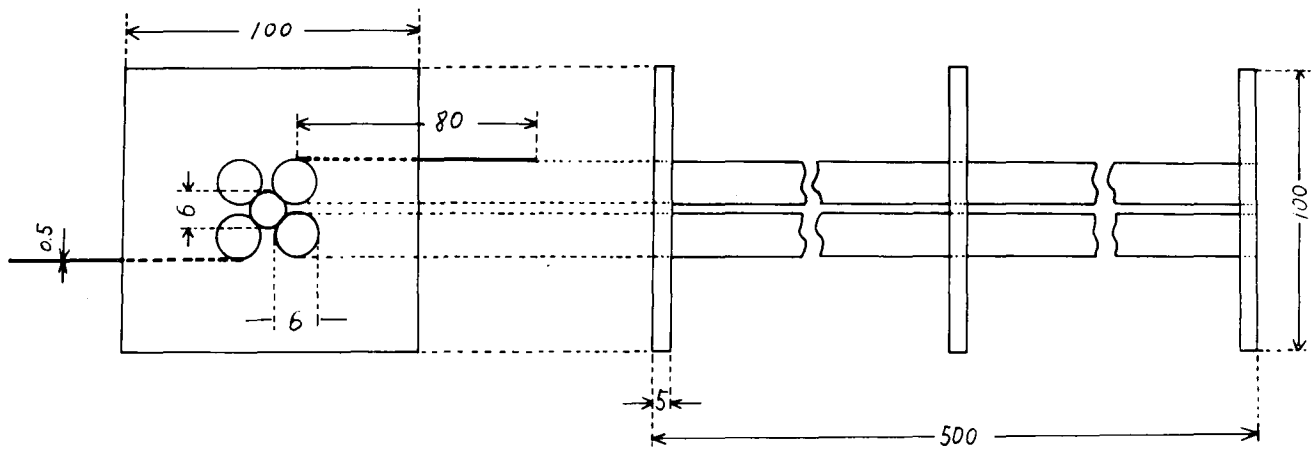
图 4.3 (b) HGL-B



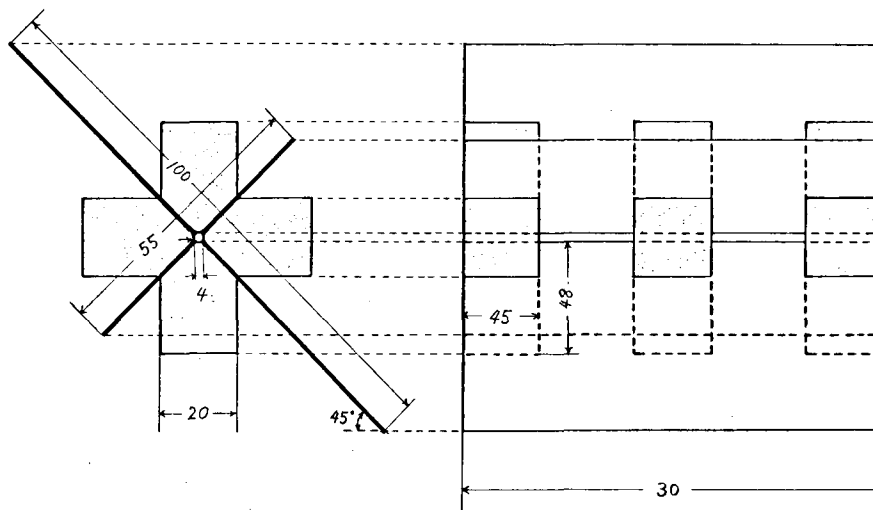
□ 4.3 (c) HGL-C



4.3(d) HGL-D



4.3(e) HGL-E



4.3 (f) HGL-F

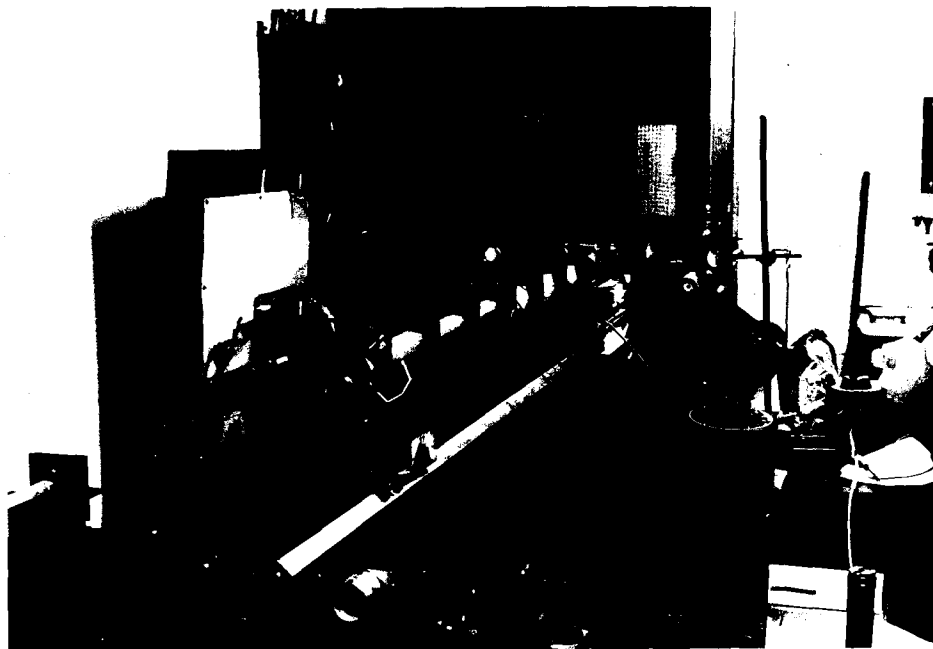
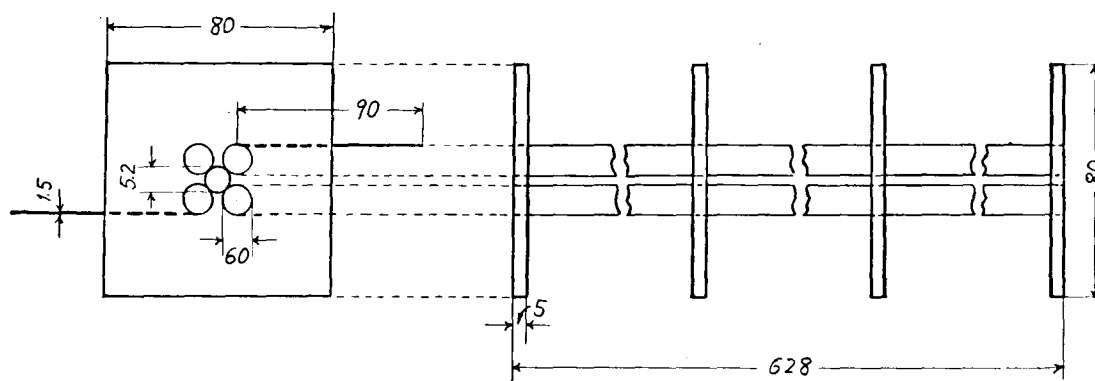


图 4-3 (g) HGL-G

4.3 温度分布の測定

試作したガスレンズの内部気体の温度分布，導体の軸方向の温度分布が設計通りになっているかどうかを測定しておく必要がある．前者をサーミスタ・プローブ，後者を熱電対を用いて測定した結果を次に示す．

4.3.1 内部気体の横方向温度分布

図4.4(a)は直径約3 mm,長さ37 cmのサーミスタプローブを示す．これを，大きな口径(38 mmφ)をもっているHGL-Cに，図4.4のように端から21 cm程挿入して，その位置での温度分布を測定した．図4.5は，X軸に添って測定した温度分布である．ブリッジ電圧 V と温度との絶対較正は行っていないから，温度の絶対値はわからないが，横方向にはほぼ2乗分布をしていることがわかる．この測定は，口径の大きいHGL-Cのみに対して行った．

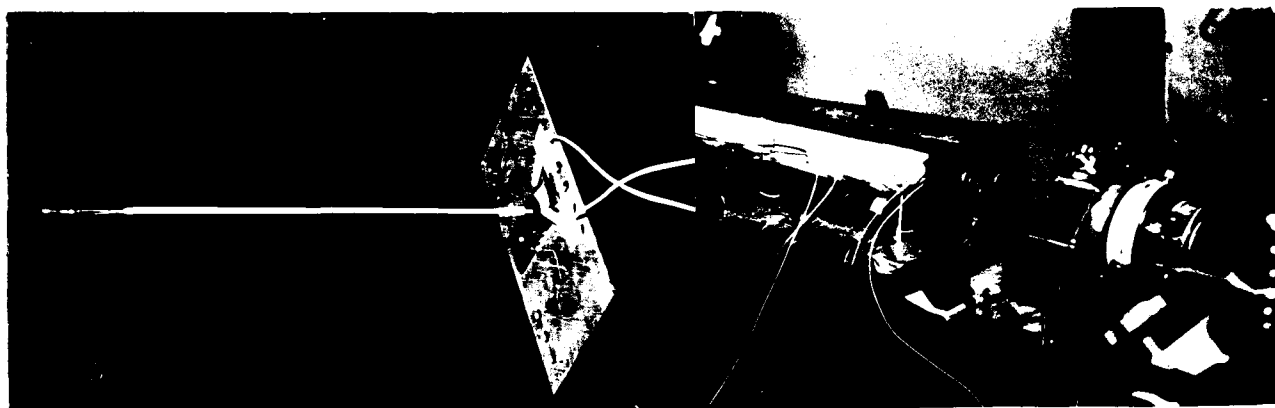


図4.4 (a) サミスタプローブ

(b) サミスタプローブによる温度分布測定

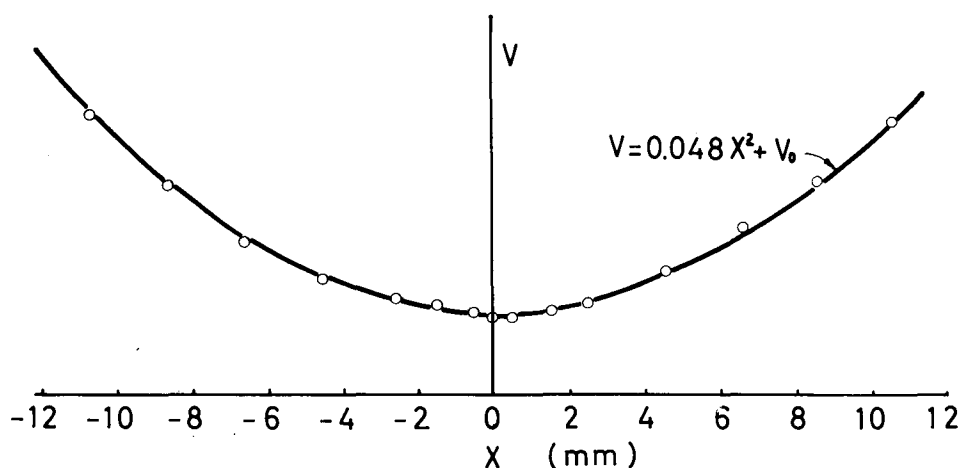


図4.5 HGL-Cの気体温度分布 (縦軸はブリッジ電圧で温度に比例している)

4.3.2 熱導体の温度分布の測定

ガスレンズの構造は代表的に図4.6の3種類が考えられる。正常なレンズ作用をもたせるには、いずれの場合も、マブー対の熱導体の温度を等しくするようにヒータの電力を調整し、かつ空気の熱伝導によって上昇する冷却導体の温度を等しくしなければならぬ。

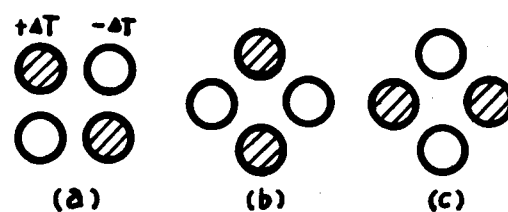


図4.6 双曲線型ガスレンズの熱導体配置

試作したガスレンズの2対の導体には、それぞれ5～6個の銅-コンスタンタン熱電対を設けてあり、各部の温度は、室温に固定された導体との差として、入力インピーダンスの高い真空管電圧計で読んだ。

図4.6(a)の型のガスレンズの温度分布の一例として、図4.7にHGL-Bについて測定した結果を示す。これによると、熱導体対、冷却導体対の温度は

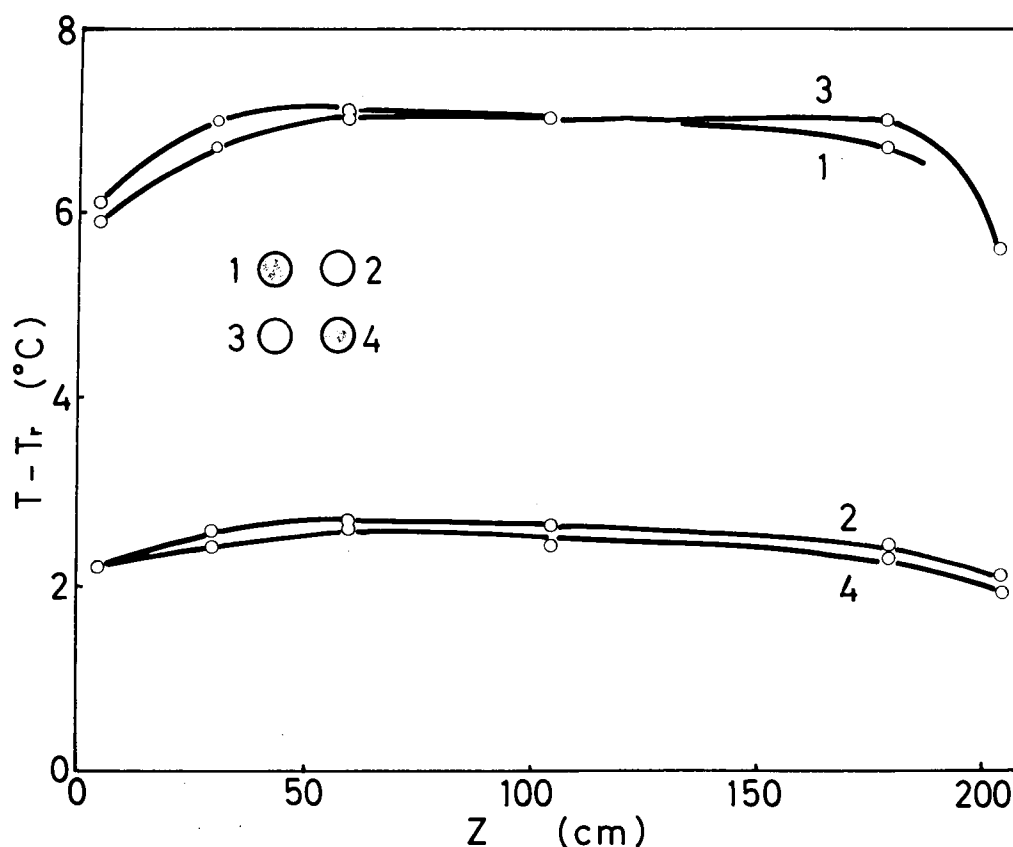


図4.7 HGL-Bの熱導体温度分布 (T_r は室温)

等しくなっていることがわかるが、軸方向の温度分布を見ると端部において熱導体の温度に降下が見られる。また、温度差 ΔT を大きくしていったときの軸方向の温度分布測定例を図4.8に示す。端部における温度降下は、 ΔT が大きくなる程著しいが、 ΔT に対する割合は一定である。このような端部の温度降下を補正するために、両端に補助的なヒータを設けて、 ΔT が一定になるよう考慮した。

また、図4.6(b)の配置では、(a)と同じく比較的对称的な温度は等しくなるが、同図(c)の配置にすると、冷却導体2の温度が4に比べて高くなり、対称性が失われることがわかった。これは、温度の差による対流の影響であると考えられる。

温度分布の測定によって、図4.6(a)の配置が最もよく対称的な設計通りの温度分布を実現できることが確かめられた。

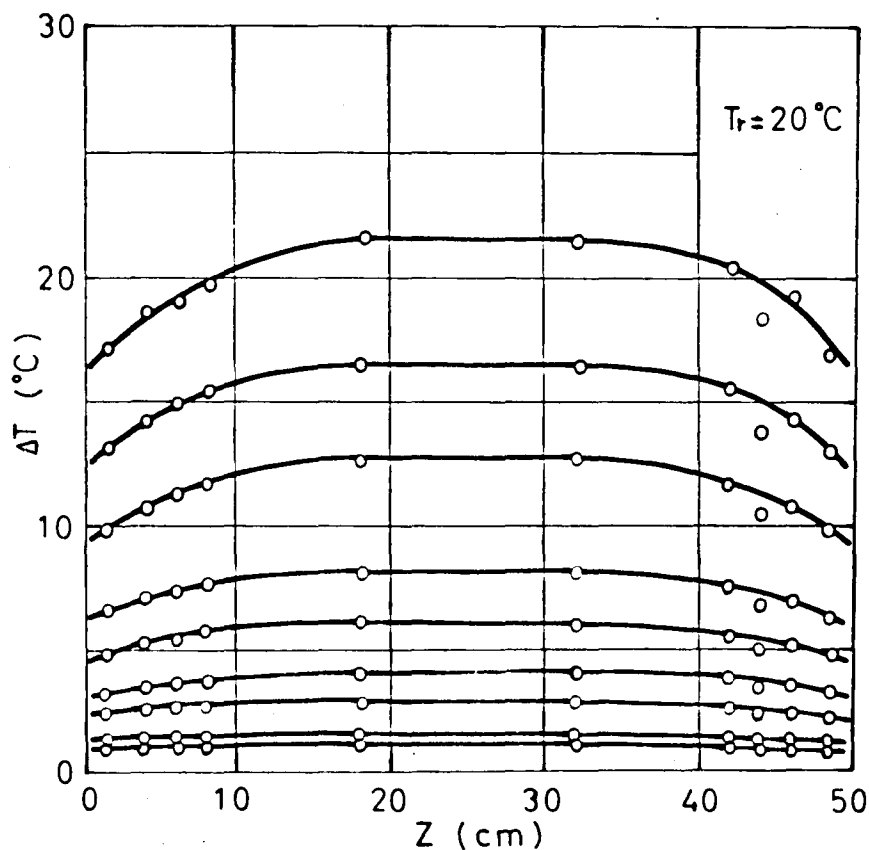


図4.8 HGL-E の ΔT の 縦方向 における 分布

4.4 レーザ光による集束性の測定

このように温度分布を測定した結果、ほぼ設計通りになっていることが確かめられた試作ガスレンズは、4.1で述べたように、熱導体対を含む面の方向では凸レンズ作用、それと直角な方向では凹レンズ作用をもっている。これらレンズ作用の強さ、いわゆる集束性を測定する方法の一つに、図4.9(c)のようにガスレーザからのガウスビーム波をガスレンズの軸にそって入射させ、そのビーム・スポットの変化を測定する方法が考えられる。

4.4.1 集束光の伝播距離に対する変化

ガスレンズ HGL-A に、ガスレーザの TEM₀₀ 状態のガウス波（入射波面係数 $P_i = 0.876 \times 10^6 + j 5.23 \times 10^6$ ^{#1}）を入射させると、ガスレンズから出たビームは図4.9(d)のようにx方向に集束、y方向に発散しながら伝播する。

実験によると、HGL-A では $2\Delta T$ が 20℃ 以上になると出射ビームは完全に楕円ではなく、三日月型になり、重力の影響と思われるものが現われた。

#1) この値は2章 2.4 の(34)で求めている。

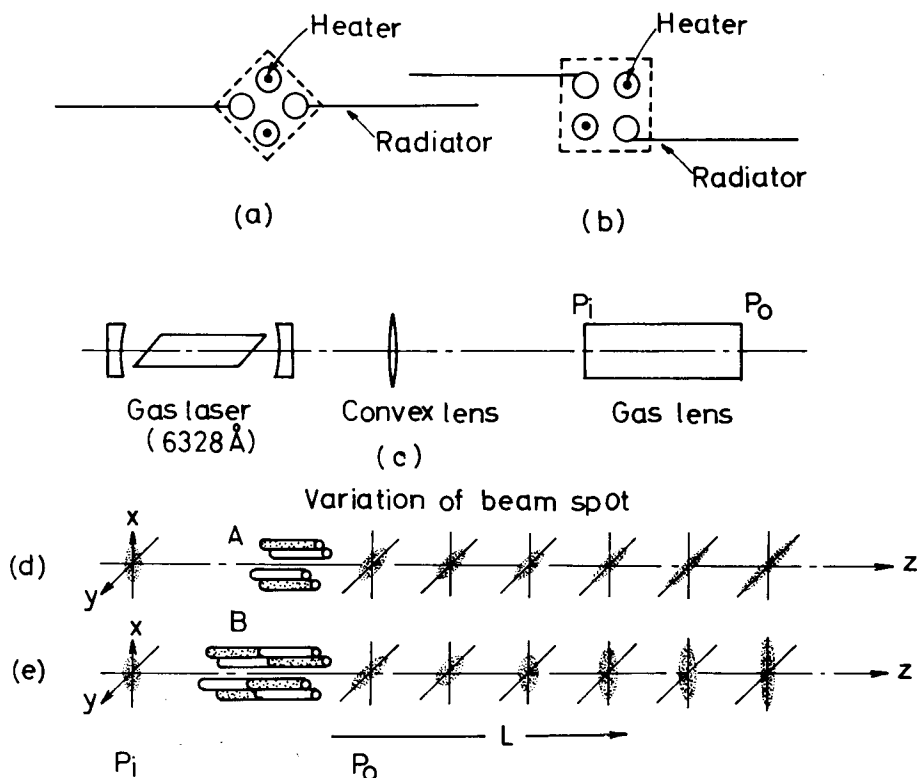


図4.9 レーザ光による双曲線型ガスレンズ集束性の測定系とビームスポット

ビームが三日月型にならず，完全な楕円に集束され，ガスレンズが正常に動作していると思われる温度差の最大値は， $2a=10\text{mm}$ のHGL-A，Bに対して測定した結果， $2\Delta T_m \approx 15^\circ\text{C}$ であった．この ΔT_m は，図4.9(a)の方が(b)に比べて小さかったが，4.3で述べた温度分布の測定結果からみて，(a)の型では内部気体の温度分布がより小さい温度差で非対称になるためと考えられる．

このように，ガスレーザからの円形のガウス波は，ガスレンズにより集束作用を受けて楕円形になり，その離心率をかえながら伝播する．図4.10は伝播距離 L に対し，楕円の長径・短径の比を測定した結果である．図中Aに対応するものは，HGL-Aによって集束を受けたビームの x ， y 方向のスポットサイズ比をとったもので， $2\Delta T=11.7^\circ\text{C}$ における測定値である．また，Bに対応するものは，HGL-Bによる $2\Delta T=5.5^\circ\text{C}$ におけるスポットサイズ比で，HGL-Bは図9(e)のように一區間（互いに 90° ひねった一対のガスレンズを縦横接続したも）であるため，スポットは一度楕円から円にかわり，次に逆方向に長い楕円にかわっていく．

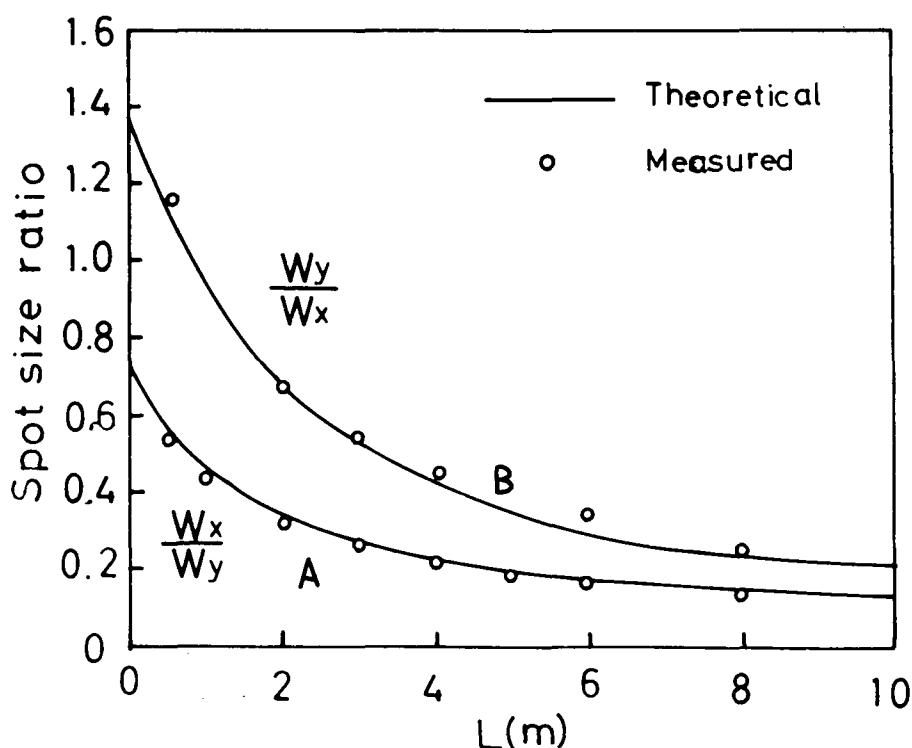


図4.10 HGL-A, B によって集束を受けたビームの x , y 方向におけるスポットサイズの比

さて，このような伝播距離 L に対するスポットサイズ比の変化のようすを理論的に求めよう．ガスレンズに入射するガウス波の波面係数は，3.3.2で求めた方法によって知ることができ，これを $P_i = U_i + jV_i$ とおく．ガスレンズによって変換された直後の波面係数は， x ， y 方向でそれぞれ異なり，これらを $P_{0x} = U_{0x} + jV_{0x}$ ， $P_{0y} = U_{0y} + jV_{0y}$ とおく．2章の式(2.47)，(2.53)を用いると， P_{0x} ， P_{0y} は次の関係から求められる．

$$P_{0x} = \frac{D_x P_i - B_x}{-C_x P_i + A_x}, \quad P_{0y} = \frac{D_y P_i - B_y}{-C_y P_i + A_y} \quad (4.18)$$

ただし， $A_x \sim D_x$ は x 方向に関するガスレンズ部のマトリクス要素を表わしている．こうして出射したガウス波が自由空間をただけ伝播したときのスポットサイズ w_x ， w_y は，簡単な計算によって次のように求まる．

$$\frac{w_x}{w_y} = \sqrt{\frac{U_{0x}}{U_{0y}} \cdot \frac{U_{0y}^2 + (V_{0y}^2 + k/L)^2}{U_{0x}^2 + (V_{0x}^2 + k/L)^2}} \quad (4.19)$$

ただし， k は自由空間の伝播定数である．

各レンズ HGL-A，B に対して，実験で用いた入射波面係数と温度を用いて求めたスポットサイズ比を図4.10に実線で示した．実験におけるスポットサイズ比の読みとり精度の範囲で，実験と理論はよく一致しており，この温度ではガスレンズが設計通りに動作していることがわかる．

4.4.2 温度に対するスポットサイズの変化

ガスレンズ HGL-A，HGL-Bを用いた実験で，ある温度差 ΔT_m より ΔT と大きくすると，ガスレンズとして正常に動作しなくなることが確かめられた．さらに， ΔT_m と口径 $2a$ との関係を調べるために，口径の異なるガスレンズをいくつか試作して，温度に対するスポットサイズ比の変化を測定した．

図4.11は、 ΔT の上昇に伴う集束されたビームの変化の一例である。これは、HGL-E ($2a = 6\text{mm}$)によりガスレンズ後方2mの位置におけるスポットである。このようにして撮影されたビームのスポットサイズの比を求めて、 ΔT との関係を示したのが図4.12である。この図で、 $\Delta T = 12^\circ\text{C}$ 付近からスポットサイズ比が急に小さくなっている。

さて、 w_x/w_y と ΔT との関係を理論的に求めると図4.12の曲線のようになる。これは次のようにして求めた。すなわち、 ΔT を変化させるとそれに伴ってガスレンズの集束性を表わすパラメータ g が変化する；式(4.5)より

$$g = \sqrt{\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \cdot \frac{\Delta T}{T_0} \cdot \frac{1}{a}} \quad (4.20)$$

このときの x, y 方向に関するFマトリクスは

$$\tilde{F}_x = \begin{pmatrix} \cos g l_g & j k g \sin g l_g \\ j \frac{1}{k g} \sin g l_g & \cos g l_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x & B_x \\ C_x & D_x \end{pmatrix} \quad (4.21a)$$

$$\tilde{F}_y = \begin{pmatrix} \cosh g l_g & -j k g \sinh g l_g \\ j \frac{1}{k g} \sinh g l_g & \cosh g l_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y & B_y \\ C_y & D_y \end{pmatrix} \quad (4.21b)$$

で表わされるから、式(4.18)によって P_{ox}, P_{oy} を求め、式(4.19)に代入すればよい。

ただし、図4.12において、 δ は端部での温度降下のため実効的にガスレンズの長さ l_g が短くなることを考慮に入れて、両端から差引いた値で、この場合には $\delta = 3\text{cm}$ が適当であると考えられる。また、 α は $T_0 = T_r + \alpha \Delta T$ とおいたときの定数で、中心軸の温度 T_0 が、室温 T_r に比べてどれだけ高いかを示している。この値は各ガスレンズによって異なるが、実験によって求めたものである。式(4.20)の T_0 に補正值として入れた。

ガスレンズ HGL-E の ΔT_m は、図4.12の実験値と理論値の比較から $\Delta T_m \approx 12^\circ\text{C}$ といえることがわかる。

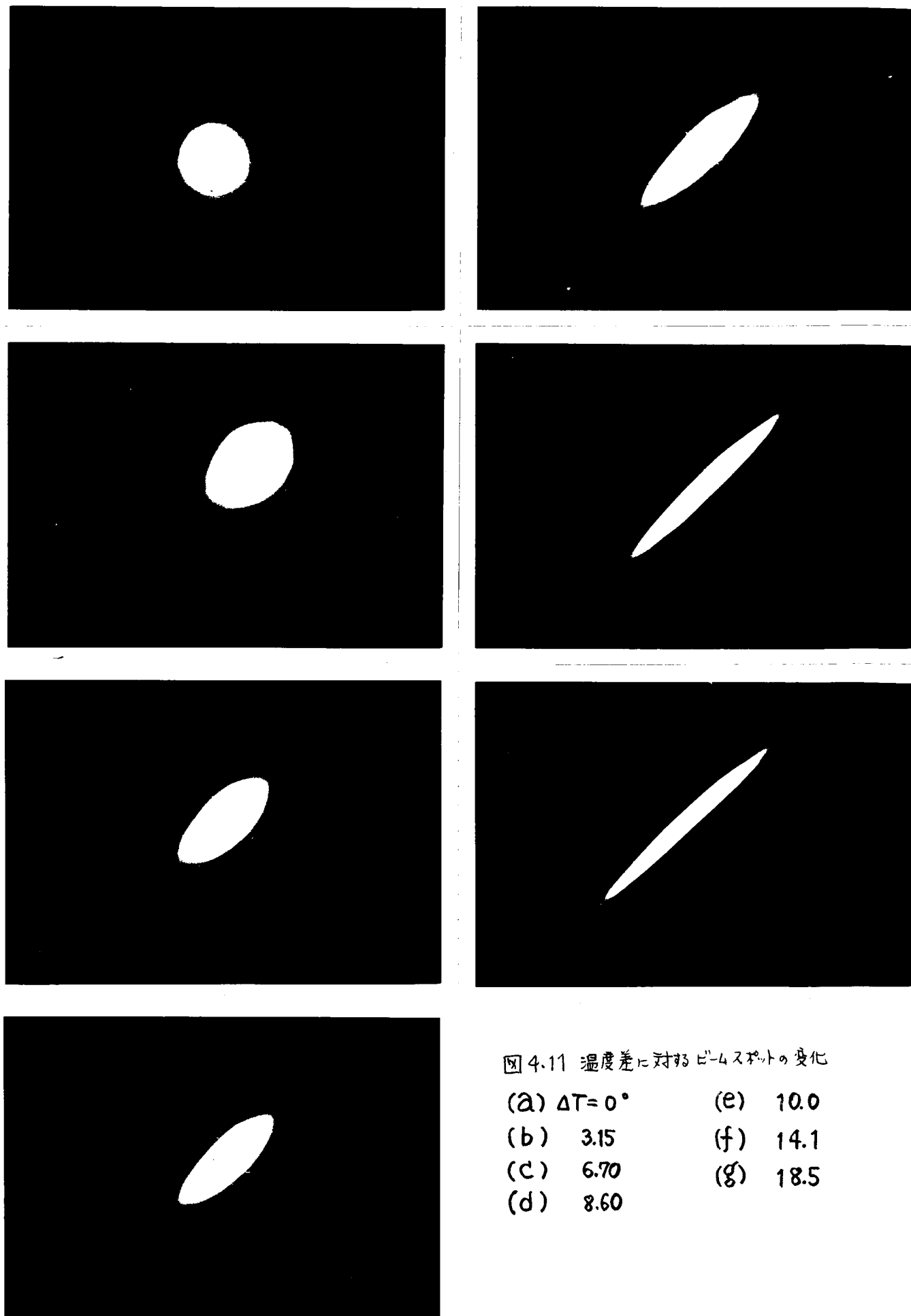


図 4.11 温度差に対するビームスポットの変化

(a) $\Delta T = 0^\circ$	(e) 10.0
(b) 3.15	(f) 14.1
(c) 6.70	(g) 18.5
(d) 8.60	

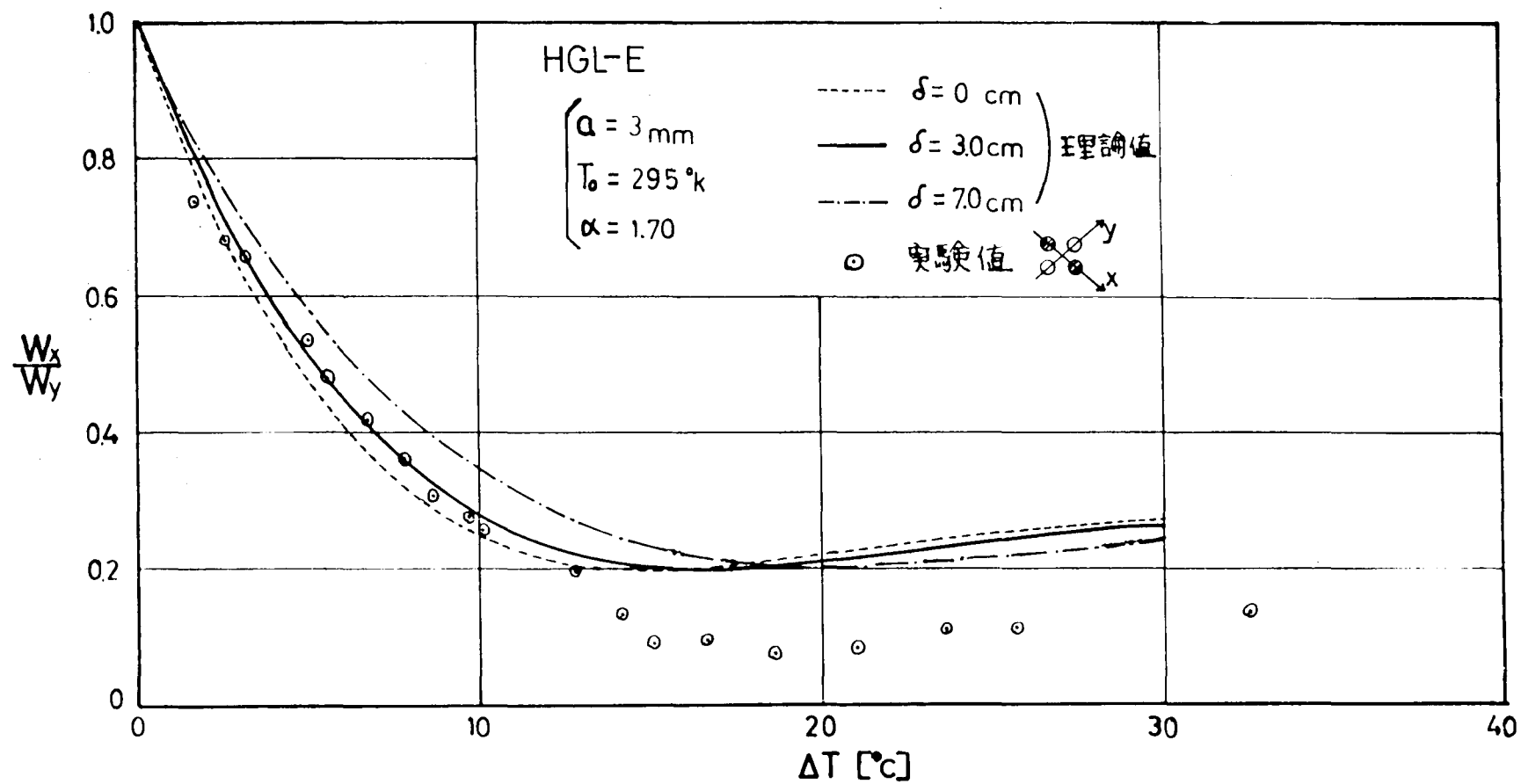


図4.12 HGL-Eによって集束されたビームのスポットサイズ比
の温度差 ΔT に対する変化

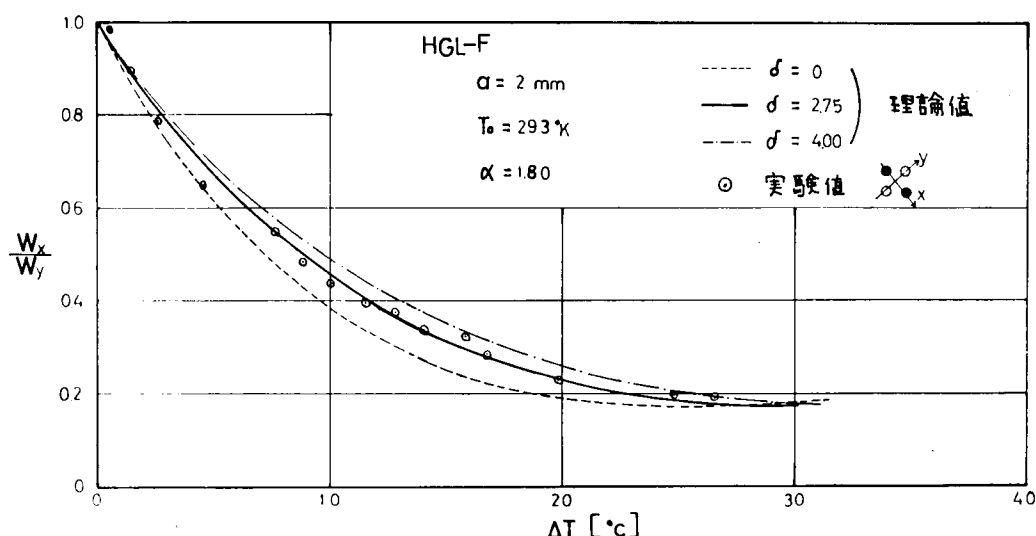


図4-13 HGL-F によって集束をうけたビームのスポットサイズ比と温度差 ΔT の関係

全く同様な方法によって、 $2a = 4 \text{ mm}$ の HGL-F について検討したのが図4-13である。この測定から、HGL-F では $\Delta T_m \approx 25^{\circ}\text{C}$ であることが確かめられた。

また、以上は図4-9 (b) のような構成で測定したが、ガスレンズを 45° だけ軸のまわりに傾けて同様の測定を行った結果、 ΔT_m が (b) の構成に比べて約 20 ~ 30 % 小さくなることが確かめられた。

4.5 オートコリメータによる集束性の測定

ガスレンズ HGL-C, HGL-D のように口径 $2a$ が比較的大きい型では、式(4-20)からわかるように集束性が非常に弱く、レーザー光によるビームスポットの変化が認められないので、オートコリメータによる集束性を測定する方法を考案し、 ΔT_m を求めた。

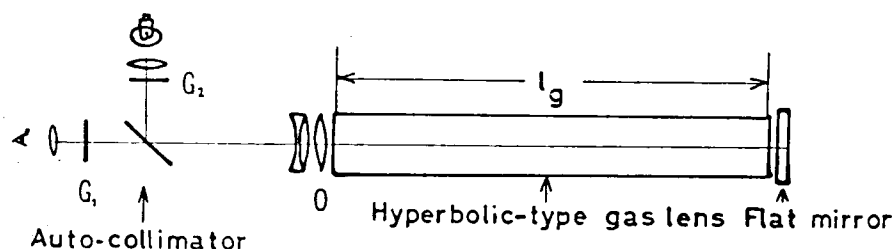


図4-14 オートコリメータによる双曲線型ガスレンズの等価曲率の測定

図4-14に示すように，ガスレンズの直後に平面鏡をおき，入射端よりオートコリメータ^{#1)}の平行光を入射させる．反射してきたオートコリメータの十字線は，ガスレンズの集束作用のためにボケを生じ，このぼけた像をコリメータの対物レンズOの位置を微小に補正することができれば，その補正值より，コリメータからみた等価反射鏡としての曲率を読みとることができる．

すなわち，ガスレンズの長さを l_g とすると，往復してきた光に対するスオ向の $\tilde{F}$ マトリクス $\tilde{F}_x$ は

$$\tilde{F}_x = \begin{pmatrix} \cos 2gl_g & jRg \sin 2gl_g \\ j\frac{1}{Rg} \sin 2gl_g & \cos 2gl_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

で表わされるが，一気圧の空気をを用いる場合， $\sqrt{\epsilon_r - 1} = 0.0234$ ， $\Delta T \cong 1^\circ\text{C}$ ， $T_0 = 300^\circ\text{K}$ ， $Q = 19 \times 10^{-3} \text{ (m)}$ の HGL-C に対して， $g \cong 7.2 \times 10^{-2}$ 程度である． $l_g = 2.1 \text{ m}$ ， $R \cong 10^7 \text{ 1/m}$ として， $A = D \cong 1$ ， $C \cong 0$ とみなせるから^{#2)}， $\tilde{F}_x$ は次のように近似できる．

$$\tilde{F}_x \cong \begin{pmatrix} 1 & jR(2g^2 l_g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

これを一枚の反射鏡(曲率半径 R)の $\tilde{F}$ マトリクス

$$\begin{pmatrix} 1 & j2R/R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

と比較すると，次のようにおけば，オートコリメータからみたガスレンズは反射鏡と脚註^{#2)}の精度で等価であることがわかる．

$$1/|R| = g^2 l_g = \frac{(\epsilon_r - 1) l_g}{\epsilon_r T_0 Q^2} \Delta T \quad (4.25)$$

また，y方向の光散系に対しても同様の近似が行え，結果は式(4.25)と同

#1) 日本光学製 6D型

#2) $A = D = \cos 2gl_g \cong 1 - 5 \times 10^{-2}$

$|C| = \sin 2gl_g / Rg \cong 10^{-7}$

じになるから，曲率半径に絶対値をつけて両方向に対して成り立つようにした。

図4.15は，HGL-Cに対する等価曲率 $1/|R|$ と ΔT の関係

$$1/|R| \times 10^3 = 1.06 \Delta T \quad (4.26)$$

を示すもので，ある湿度までは実験誤差の範囲で，実験で求めた値はこの直線上にあり，正常な動作をしているが， ΔT が 0.8°C 以上では急激にレンズ作用が弱く，かつ非対称になることがわかる。これより，HGL-Cに対する温度限界は $\Delta T_m \approx 0.8^\circ\text{C}$ である。

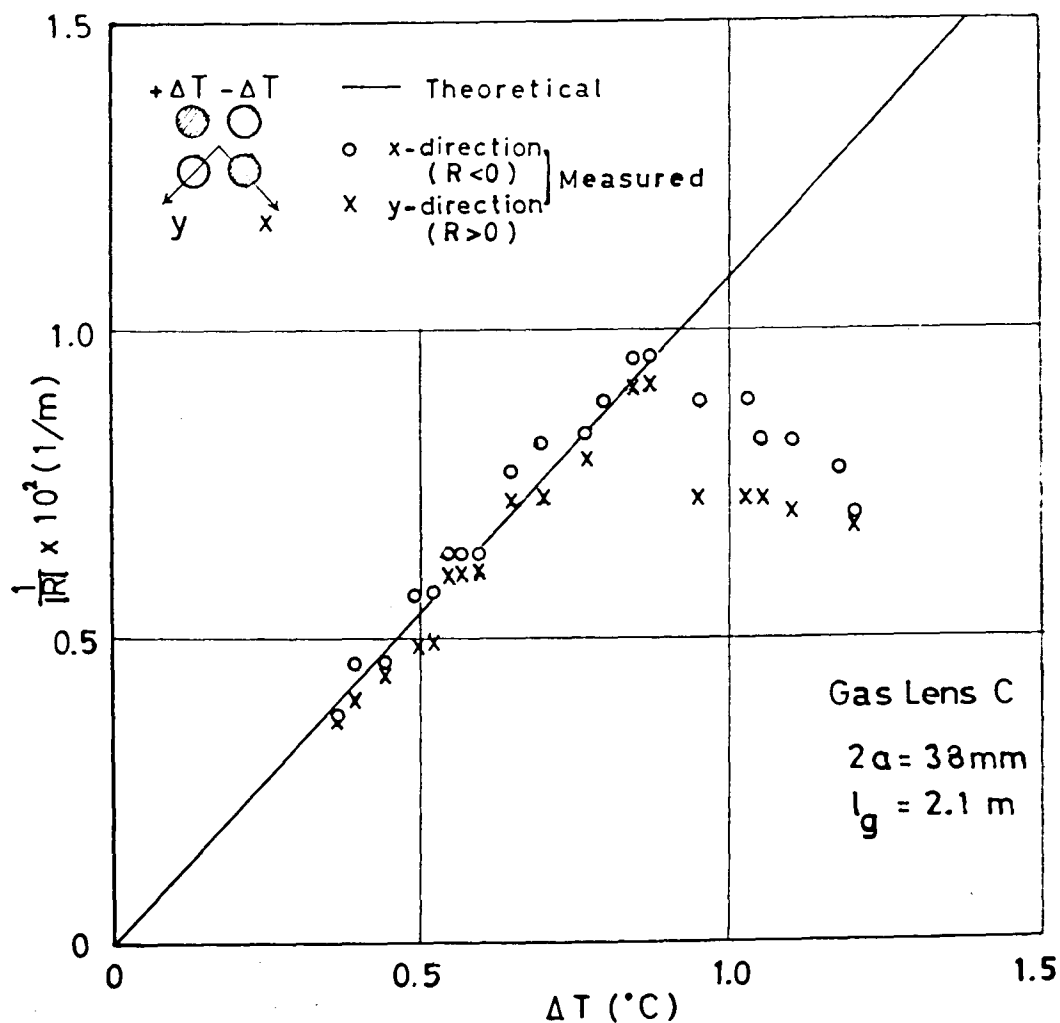


図4.15 HGL-Cの等価曲率 $1/R$ と ΔT の関係

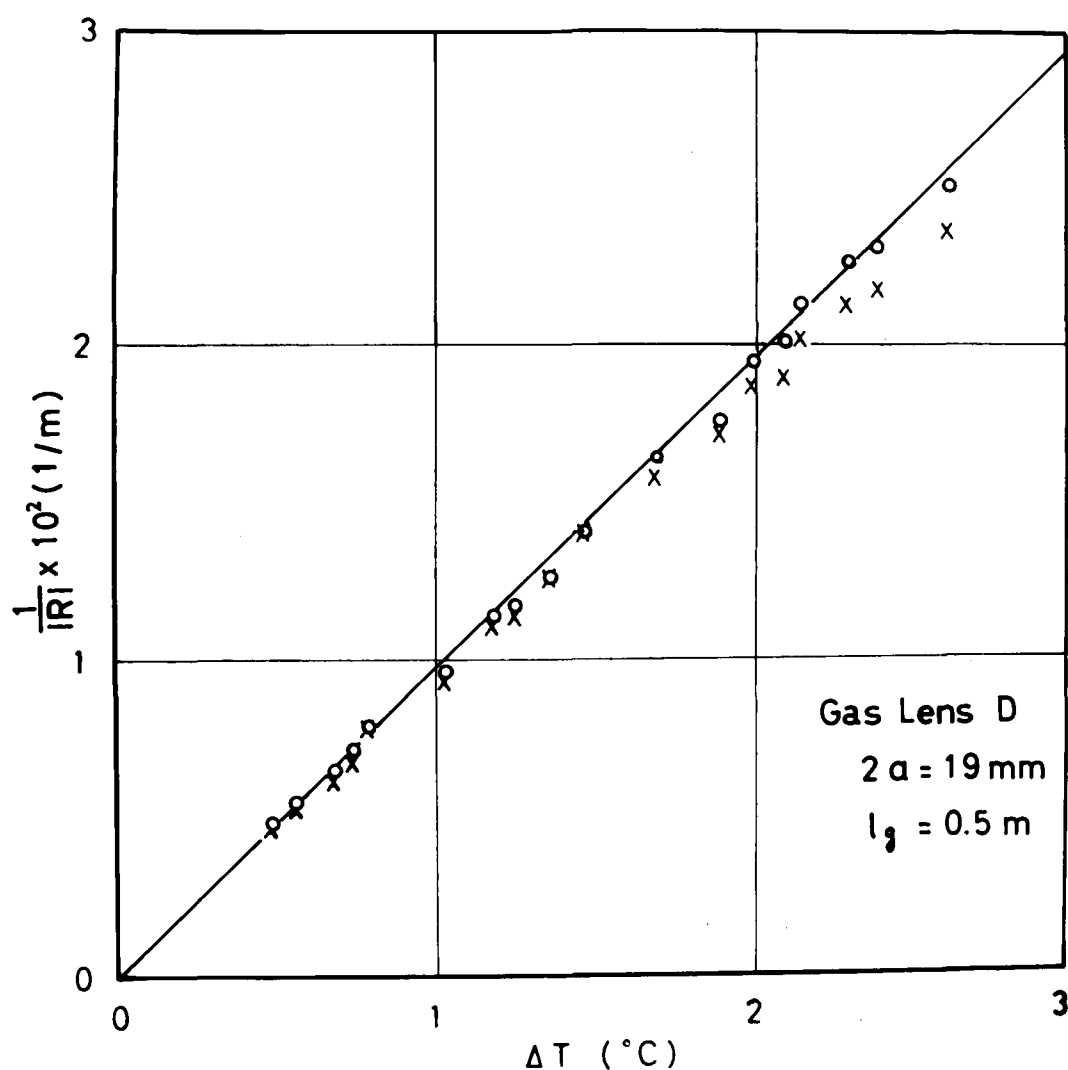


図4-16 ガスレンズDにおける等価曲率 $1/|R|$ と ΔT の関係

次に，全く同じ方法により，ガスレンズDについて測定した等価曲率 $1/|R|$ と ΔT の関係を図4-16 に示す．この場合の理論で求めたものは

$$\frac{1}{|R|} \times 10^2 = 0.98 \Delta T \quad (4.27)$$

となり， $\Delta T \cong 2^\circ\text{C}$ 付近まで実験値とよく一致しているので，このガスレンズに対する温度限界は $\Delta T_m \cong 2^\circ\text{C}$ である．

4.6 双曲線型ガスレンズの動作限界

前節まで行ってきた，温度分布の測定，レーザ光による集束作用の測定，オートコリメータによるレンズ作用の測定などから，双曲線型ガスレンズには，与え得る温度差 ΔT に限界があり，しかも，この限界には口径 a との間にある関係があることが確かめられた．測定の結果をまとめると図4.17のようになる．これによると，温度限界 ΔT_m と a はほぼ反比例している．この曲線を次のように近似して実験式として表わしておく．

$$\left\{ \begin{array}{ll} a > 5 \text{ mm} & \Delta T_m = 42 / a^{1.34} \quad (4.28a) \\ a < 5 \text{ mm} & \Delta T_m = 83 / a^{1.74} \quad (4.28b) \end{array} \right.$$

この式は，導波管の設計に関して一つの重要な資料になるものである．

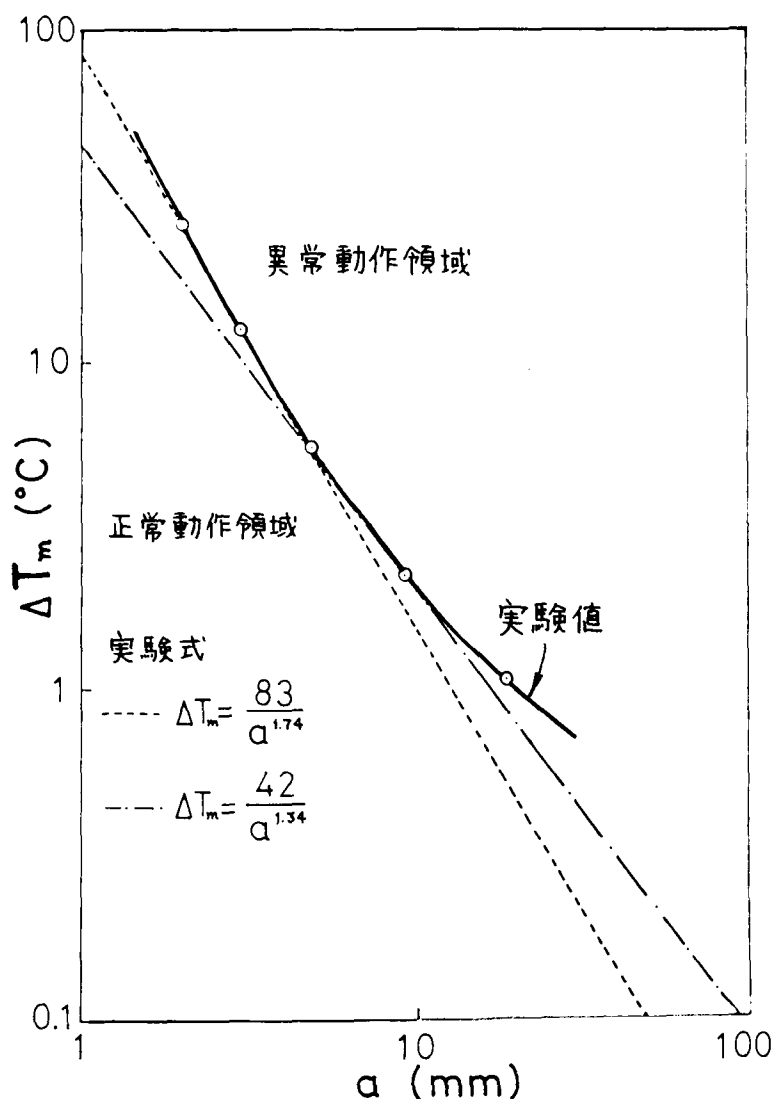


図4.17 双曲線型ガスレンズの与え得る温度差の限界

4.7 本章のまとめ

4.7.1 本章で新たに得られた結果

いくつか試作した双曲線型ガスレンズによって行った実験と、それらに対する理論的な検討によって、この型のガスレンズの集束性を中心とする動作に関して次のような結果が得られた。

- (i) ガスレンズに用いる熱導体に、双曲線筒のかわりに円筒を用いても、中心軸付近では非常に近似度よく光束分布の温度分布を得ることができると。
- (ii) この型のガスレンズの気体熱伝導による内部消費電力は口径によらず一定で、1気圧300°Kの空気の場合には、約0.4 Watt/m-deg である。
 $\Delta T = 2.5^\circ\text{C}$ 、全長を500mmとすると全消費電力は500mWである。
- (iii) 温度分布の測定結果によると、熱導体の構成の代表的な例のうち、図4.6(a)の  の型が最も対称的な温度分布を得ることができるとが確かめられた。
- (iv) 集束性の測定結果をみても、上記の構成が最も広い正常動作をもち温度限界をもっていることがわかる。
- (v) ガスレンズとして正常な動作を保ちうる温度差 ΔT の限界値 ΔT_m は口径 a のみによってきまる。実験によって求められた両者の関係は、実験式として、

$$a > 5\text{mm} \quad \Delta T_m = 42 / a^{1.34}$$

$$a < 5\text{mm} \quad \Delta T_m = 83 / a^{1.74}$$

のように表わすことができ、導波管を設計する際の一つの資料となる。

4.7.2 結 論

- (i) 双曲線型ガスレンズは、静止型ガスレンズの一つとして提案され、理論的な集束性の検討、縦続接続したときの伝送状態等の検討が行われてきた

が、本章では実験的にその集束性を確かめ、与える温度差に限界があり、かつレンズの口径が小さい程この限界温度が大きいことを明らかにした。

(ii) 実際にこの型のガスレンズを導波系に使用する際の問題点としては、次の事項があげられる。

- ①設計に際しては、与え得る温度差の限界を考慮に入れなければならない。
- ②両端部の温度降下を補正しなければならない。
- ③各熱導体の温度分布が等しくなるように補償しなければならない。
- ④縦横接続する際の直線性をよくしなければならない。
- ⑤消費電力の問題。

5章 光ビーム導波系の安定性

導波系の軸にそって伝送される光ビームは、種々の原因によって軸からずれてしまうことがあり得る。用いる集束素子の種類や設置精度によってこのビームのずれが異なるわけであるが、いかに光ビームが軸に追従して伝送されるかという特性を、安定性という言葉で表わしている。本章では、このような導波系の安定性を表現する従来の理論を、2編で述べる種々の導波系に適用できるように一般的に拡張し、また安定性を改善する一方法について述べた。

5.1 光ビーム導波系の安定性に関する問題点と本章の目的

伝送ビームが導波系の軸からずれる主な原因としては次のことが考えられる。

- (1) 入力側におけるレーザや変調器などの位置変動によっておこる導波系の入射点におけるビームの変動によるもの。
- (2) 導波素子の設置精度の誤差によるもの。
- (3) 地面の微小な変動（長期間にわたる地盤の変動、地震や交通機関による地面の振動）によって、導波系が曲がったり、ランダムに変動するために引き起こされるもの。
- (4) レンズの焦点距離や、レンズ間隔のばらつきなど、導波素子の素子偏差が影響するもの。
- (5) レンズ面の歪みなどによっておこるもの。
- (6) 管内空気の湿度差や、乱流によっておこる屈折率の分布から引き起こされるもの。

このような原因によって生ずるビームの不安定性は、従来主にレンズを周期的に配置する図0.7(a)のような導波系で、レンズの口径が無限であると仮

定した検討が多く行われた。それぞれの原因に対する影響をまとめると次のようになる。

(1)' 入射ビームの変動の影響は、導波系内で周期的に現われ、終端まで消えることはない。⁽¹⁴⁾ ただし、有限な口径によって回折がおこり、それによってビームが軸近くにひきもどされる効果を用いると、入射端の影響は次第に小さくなっていく⁽⁹⁰⁾。

(2)' (3)' 円形な曲がり変動に対する安定性は、入射点における変動と等価に考えることができる。また、レンズのランダムな変動によっておこる、導波系内の n 番目のレンズ上でのビームのずれ r_n の 2 乗平均値は

$$\langle r_n^2 \rangle = 2n \langle \Delta r_n^2 \rangle \quad (5.1)$$

で表わされる。⁽²⁹⁾ ただし、 Δr_n は n 番目のレンズの軸と直角な方向におけるランダムな変位を表わす。この式から、レンズの個数が増えたときには、統計的にビーム変動が大きくなることを示している。

(4)' レンズの焦点距離 f 、レンズ間隔 $2l$ などに、素子偏差 $f \cdot \Delta f_n$ 、 $2l \cdot \Delta l$ 等があるときには、 $a = \langle \Delta f_n^2 \rangle + \langle \Delta l_n^2 \rangle$ とおくと

$$\langle r_n^2 \rangle = 2 \frac{e^{na} - 1}{a} \langle \Delta r_n^2 \rangle \quad (5.2)$$

のように指数関数的に増大する。⁽⁷⁶⁾

(5)' 主に姿勢変換効果として取扱われている。

(6)' 主にビームの空気中伝播として取扱われている。

次に、このような変動の影響としては、次の事項があげられる。

① 導波系の途中における回折損失を増加させる。

口径 $2a$ 、レンズ上のスポットサイズ w としたとき、共焦点構成の導波系の一区間の回折損失は α_0 は、 TEH_{pe} 状態に対し

$$\alpha_0 \approx A_p \times 10^{-B_p(a^2/w^2)} + A_q \times 10^{-B_q(a^2/w^2)} \quad (5.3)$$

A_p, B_p は姿勢によって異なる定数で、例えば $A_0 = 12.6$, $B_0 = 0.85$ である。^{#1)}

ビームに位置変動があるときには、等面的に口径が小さくみえ、回折損失が増加する。

② 受信側光検波器へ入射するビームの位置変動による出力のレベル変動。

③ 中心軸光線と異軸光線の伝播時間の差による遅延

長と $2l$ の一区間において平均的に $\sqrt{\langle r_n^2 \rangle}$ の変位があったとすれば、この間における異軸光線の、中心軸光線に比べて遅れる時間 ΔT は

$$\Delta T \approx \langle r_n^2 \rangle / cl \quad (5.4)$$

例えば、 $2l = 100 \text{ m}$, $\sqrt{\langle r_n^2 \rangle} = 10^{-2} \text{ m}$ とすれば、 $\Delta T \approx 10^{-14} \text{ sec}$ 程度である。

この値自体は小さいが、極めて速いパルス変調されている光が、長距離にわたって伝送されるときには遅延が問題になってくる。

これで安定性に関する問題が明らかになり、本章の目的を次のようにまとめることができる。

- (i) 従来厚レンズを用いる導波系での安定性の議論を、任意の光線マトリクスで表わされている導波系に拡張して一般式を求める。
- (ii) これらの安定性を改善する手法を求める。
- (iii) ビームの変動と伝送損失との関係を明らかにする。
- (iv) 空気の温度差や擾乱の影響を調べる
- (v) ビームの安定化に関する Marcuse の理論と再検討する。^{#2)}

#1) 文献(1) p164より

#2) (84)

5.2 安定性の表示

序論で述べたような光ビーム導波系は一般に図5.1のように集束素子と自由空間が交互に連なっているモデルで表わすことができる。集束素子とは、レンズや反射鏡；あるいはそれらの組合せでできているもの、

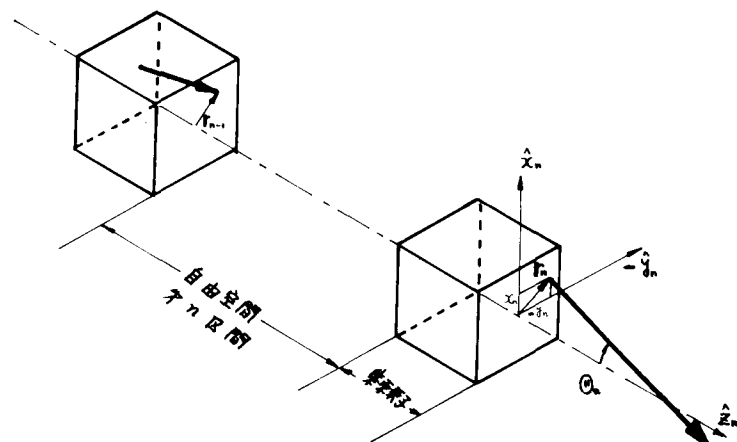


図5.1 導波系のモデル図

の、ガスレンズなどの分布型集束素子などを表わすものとする。このような周期的に n 個連なっている導波系の n 区間を図5.1のように示せば、 n 番目の集束素子の出射点におけるビームの位置および傾きをそれぞれ r_n , Θ_n で表わすと、これらは z 軸に直角な2つの方向 $\hat{x}_n$, $\hat{y}_n$ に分けることができる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} r_n &= x_n \hat{x}_n + y_n \hat{y}_n \\ \Theta_n &= \Theta(x'_n, y'_n) \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

ここで、 x'_n , y'_n は z 軸となす角を表わす。これらをマトリクス

$$X_n = \begin{pmatrix} jR x'_n \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y_n = \begin{pmatrix} jR y'_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

で表わし、^{#1)} n 区間に対する変形光線マトリクスの逆行列を M_n とすれば、1章で述べたように

$$X_n = M_n X_{n-1}, \quad Y_n = M_n Y_{n-1} \quad (5.7a)$$

の関係で結ばれる。

ところで、集束素子に位置変動や傾きの変動があった場合には、入射条件

#1) $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$

とは別に起こるビームのずれや傾きが現われる。この効果を一般的に

$$U_n = \begin{pmatrix} jR u'_n \\ u_n \end{pmatrix}, \quad V_n = \begin{pmatrix} jR v'_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

で表わしておくと、式(5.7a)はこれらが加わって次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} X_n &= M_n X_{n-1} + U_n \\ Y_n &= M_n Y_{n-1} + V_n \end{aligned} \right\} \quad (5.7b)$$

ただし、 M_n, U_n, V_n の各要素は、各導波系についてそれぞれ求める必要があるが、具体的な表示については主に2篇で述べ、この章では主に一般的な表示にとどめる。

5.3 曲がり変動に対する安定性

5.3.1 円形曲がり変動に対する安定性

まず簡単な場合として、導波系子に偏差がなく、一様な曲がりがある場合を考えよう。このとき区間のマトリクス M_n 、変動のマトリクス U_n, V_n は一定値をとる。いま曲がりは xz 面内でおこるものとし、 xy 方向のみを考えても一般性は失われる。そこで

$$M_n = M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

$$U_n = U = \begin{pmatrix} jR u' \\ u \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

とおくと、式(5.7b)から n 番目の変動は次のように求められる。

$$X_n = M^n X_0 + \sum_{m=0}^{n-1} M^m U$$

ここで

$$\alpha = \sqrt{\det M} = ad - bc, \quad \beta = \frac{1}{2} \text{Tr} M = \frac{1}{2}(a+d) \equiv \cos 2\theta \quad (5.11)$$

とおくと、通常の $d \geq \beta$ の場合には、マトリクス M の n 乗公式より

$$M^m = \frac{d^m}{\sin 2\theta} \left[\frac{1}{d} \sin 2\theta m \cdot M - \sin 2\theta (m-1) \cdot I \right] \quad (5.12)$$

和を取ると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n-1} M^n &= I + \frac{\sin 2\theta - d^{n-1} \sin 2n\theta + d^n \sin 2(n-1)\theta}{\sin 2\theta (1 - 2d \cos 2\theta + d^2)} M \\ &\quad - \frac{d^2 \sin 2\theta - d^n \sin 2(n-1)\theta + d^{n+1} \sin 2(n-2)\theta}{\sin 2\theta (1 - 2d \cos 2\theta + d^2)} I \end{aligned} \quad (5.13)$$

これより、 n 番目の区間におけるビームの位置は次式のようになる。

$$x_n = x_n^{(i)} + x_n^{(b)} \quad (5.14)$$

$$x_n^{(i)} = \frac{d^n}{\sin 2\theta} \left[\frac{1}{d} \sin 2n\theta \cdot c(jR x'_0) + \left\{ \frac{1}{d} \sin 2n\theta d - \sin 2(n-1)\theta \right\} x_0 \right] \quad (5.15a)$$

$$\begin{aligned} x_n^{(b)} &= \frac{\sin 2\theta - d^{n-1} \sin 2n\theta + d^n \sin 2(n-1)\theta}{\sin 2\theta (1 - 2d \cos 2\theta + d^2)} c(jR u') \\ &\quad + \left[\frac{\sin 2\theta - d^{n-1} \sin 2n\theta + d^n \sin 2(n-1)\theta}{\sin 2\theta (1 - 2d \cos 2\theta + d^2)} d \right. \\ &\quad \left. - \frac{d^2 \sin 2\theta - d^n \sin 2(n-1)\theta + d^{n+1} \sin 2(n-2)\theta}{\sin 2\theta (1 - 2d \cos 2\theta + d^2)} + 1 \right] u \end{aligned} \quad (5.15b)$$

この式で、 $x_n^{(i)}$ は入射点におけるビームの傾き x'_0 、位置 x_0 によっておこるビーム変動を、 $x_n^{(b)}$ は曲がりによっておこるビーム変動を表わしている。

なお、従来よく知られている単レンズ列導波系に曲率半径 R の曲がり変動があった場合を求めてみると次のようになる。レンズの焦点距離を f 、レンズ間隔を $2l$ とし、簡単のために $f=l$ の共焦点の場合には、式(5.15)で $d=1$ 、 $2\theta=\pi/2$ 、 $c=-j2l/R$ 、 $d=1-2l/f=-1$ 、 $u'=45/f$ 、 $u=0$ 、

$$\Delta\zeta = \frac{2lf}{R} \quad (5.16)$$

とおけばよく，結果は

$$x_n = l \sin \frac{\pi}{2} n \cdot x'_0 + \Delta\zeta + (x_0 - \Delta\zeta) \left[\sin \frac{\pi}{2} n - \sin \frac{\pi}{2} (n-1) \right] \quad (5.17)$$

となり，入射条件，曲がりの影響が周期的に現われている。しかし，あらかじめ曲がりが予想され $\Delta\zeta$ が式(5.16)で求められれば， $x'_0 = 0$ ， $x_0 = \Delta\zeta$ とすれば，

$$x_n = \Delta\zeta = \text{const}$$

にすることが出来る。これらは従来求められていた結果と矛盾するものではないことを示している。

ところで，式(5.15)からわかるように， $\alpha < 1$ なる素子を用いれば，入射条件や，曲がりの影響が n とともに減少する。このことは，2章で述べたガウス・モードフィルタが利用できることを示しているが，くわしくは2編8章で述べることにしてしよう。

5.3.2 正弦波状曲がり変動に対する安定性

次に任意の形で，波状に曲がり変動がある場合には，これを色々の周期をもつ正弦波状の変動の合成で表わすことが出来るので，ここではそれらの一成分に対する応答を求める意味で，一定の周期 $1/2K$ で変動している場合を考える。

この場合，変動のマトリクスは一般的に次のように表わされるものとする。

$$U_n = \begin{pmatrix} jR u_1 \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} jR u_1 \sin 2\pi n \\ u_2 \sin 2\pi n \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

ただし， u_1 ， u_2 は導波系と変動の振巾で表わされる定数がある。このとき，式(5.7b)より x_n は次のように書ける。

$$X_n = M^n X_0 + \sum_{m=0}^{n-1} M^m U_{n-m} \quad (5.19)$$

式(5.9), (5.18)より, 曲がり変動によって生ずるビームのずれ $x_n^{(b)}$ は,

$$x_n^{(b)} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\alpha^m}{\sin 2\theta} \left[\left(\frac{j k U_1 c}{\alpha} + \frac{U_2 d}{\alpha} \right) \sin 2K(n-m) \sin 2m\theta \right. \\ \left. - U_2 \sin 2K(n-m) \sin 2(m-1)\theta \right]$$

と表わされ, 級数の和は附録の式(B.9)より求めることができる.

$$S_1(K) = \frac{\cos 2Kn - \alpha \cos [2K(n+1) - 2\theta] - \alpha^2 \cos 2n\theta + \alpha^{n+1} \cos [2\theta(n-2) + 2K]}{1 - 2\alpha \cos 2(\theta-K) + \alpha^2}$$

$$S_2(K) = \frac{\cos(2Kn - 2\theta) - \alpha \cos [2K(n+1) - 4\theta] - \alpha^2 \cos 2(n-1)\theta + \alpha^{n+1} \cos [2\theta(n-2) + 2K]}{1 - 2\alpha \cos 2(\theta-K) + \alpha^2}$$

(5.20)

とおく, 結局

$$x_n^{(b)} = \frac{1}{2 \sin 2\theta} \left[\left(\frac{j k U_1 c}{\alpha} + \frac{d}{\alpha} \right) \{ S_1(-K) - S_1(K) \} + U_2 \{ S_2(-K) - S_2(K) \} \right]$$

(5.21)

となる. 式(5.20)は, $K = \pm \theta$ のとき n の増加に対して増加する項を含んでおり, 導波束の設計に際して注意する必要がある.

5.4 集束素子のランダムな位置変動, 素子偏差に対する安定性

レンズや反射鏡に位置の変動があると, その変動分は式(5.8)の u'_n, u_n などに含ませることができる. しかし, ここでは一般的に求めるために, u'_n, u_n という表示のまま残しておく. いま, u'_n, u_n が n の値によって異なり, かつそれらの間に相関性がなくランダムな値をとる場合には, M_n の各要素の素子偏差をも含めて, ビーム位置 r_n の統計2乗平均値 $\langle r_n^2 \rangle$ を求めることができる. ここでも, x, y 方向のうち一方を求めておけば十分である.

式(5.7b) から $\langle X_n^2 \rangle$ を求めるために，マトリクス の直積をとる．附録の式(B.1) より，

$$\begin{aligned} X_n \times X_n &= (M_n X_{n-1} + U_n) \times (M_n X_{n-1} + U_n) \\ &= (M_n X_{n-1}) \times (M_n X_{n-1}) + U_n \times U_n \\ &\quad + U_n \times (M_n X_{n-1}) + (M_n X_n) \times U_n \end{aligned} \quad (5.22)$$

いま，集束素子のパラメータの偏差をマトリクス要素の種として

$$M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \Delta a_n & b + \Delta b_n \\ c + \Delta c_n & d + \Delta d_n \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

とおき，各偏差には相関性がなく，一次の平均は0である場合を取扱う．すなわち，

$$\begin{aligned} \langle \Delta a_n \rangle &= 0, \quad \langle \Delta b_n \rangle = 0, \\ \langle \Delta a_n \Delta a_m \rangle &= \sigma_a^2 \delta_{nm}, \quad \langle \Delta b_n \Delta b_m \rangle = \sigma_b^2 \delta_{nm}, \quad \dots \\ \langle \Delta a_n \Delta b_m \rangle &= \sigma_{ab} \delta_{nm}, \quad \langle \Delta b_n \Delta c_m \rangle = \sigma_{bc} \delta_{nm}, \quad \dots \\ \langle \Delta a_n \rangle &= 0, \quad \langle \Delta b_n \rangle = 0, \quad \dots \end{aligned} \quad (5.24)$$

式(5.22)の統計平均をとると，3式の才3，4項は各要素の一次の平均値でできているから，

$$\langle (M_n X_{n-1}) \times U_n \rangle = 0, \quad \langle U_n \times (M_n X_{n-1}) \rangle = 0 \quad (5.25)$$

とおける．したがって

$$\langle X_n \times X_n \rangle = \langle (M_n \times M_n) (X_n \times X_n) \rangle + \langle U_n \times U_n \rangle \quad (5.26)$$

となり，逐次代入することによつて，次式のようになる．

$$\langle X_n \times X_n \rangle = \langle M_n \times M_n \rangle^n X_0 \times X_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \langle M_n \times M_n \rangle^m \langle U_n \times U_n \rangle \quad (5.27)$$

右辺の1項は入射条件による項，才2項は変動による項である．

ただし, 各項は次のように表わされる. (附録式(B.1))

$$\langle X_n \cdot X X_n \rangle = \begin{pmatrix} \langle (j\hbar X'_n)^2 \rangle \\ \langle j\hbar X'_n X_n \rangle \\ \langle X_n^2 \rangle \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

$$\langle U_n \cdot X U_n \rangle = \begin{pmatrix} \langle (j\hbar U'_n)^2 \rangle \\ \langle j\hbar U'_n U_n \rangle \\ \langle U_n^2 \rangle \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

$$M_n \cdot M_n = \begin{pmatrix} a_n^2 & 2a_n b_n & b_n^2 \\ a_n c_n & a_n d_n + b_n c_n & b_n d_n \\ c_n^2 & 2c_n d_n & d_n^2 \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \langle M_n \cdot M_n \rangle &= \begin{pmatrix} a^2 + \langle \Delta a_n^2 \rangle & 2ab + 2\langle \Delta a_n \Delta b_n \rangle & b^2 + \langle \Delta b_n^2 \rangle \\ a(c + \langle \Delta a_n \Delta c_n \rangle) & ad + bc + \langle \Delta a_n \Delta d_n \rangle + \langle \Delta b_n \Delta c_n \rangle & bd + \langle \Delta b_n \Delta d_n \rangle \\ c^2 + \langle \Delta c_n^2 \rangle & 2cd + 2\langle \Delta c_n \Delta d_n \rangle & d^2 + \langle \Delta d_n^2 \rangle \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.31)$$

さて, $\langle M_n \cdot M_n \rangle^m$ を求めるために, まず $\langle M_n \cdot M_n \rangle$ の固有値を計算する. 固有値を λ とすると, 式(5.31)より次の固有値方程式を得る.

$$\lambda^3 - (A_0 + \Delta A)\lambda^2 - (B_0 + \Delta B)\lambda - (C_0 + \Delta C) = 0 \quad (5.32)$$

ただし,

$$\begin{cases} A_0 + \Delta A = p_{11} + p_{22} + p_{33} \\ A_0 = (a+d)^2 - (ad-bc) \\ \Delta A = \langle \Delta a_n^2 \rangle + \langle \Delta d_n^2 \rangle + \langle \Delta a_n \Delta d_n \rangle + \langle \Delta b_n \Delta c_n \rangle \end{cases} \quad (5.33a)$$

$$\begin{cases} B_0 + \Delta B = p_{12} p_{21} + p_{23} p_{32} + p_{13} p_{31} - (p_{11} p_{22} + p_{22} p_{33} + p_{33} p_{11}) \\ B_0 = -[(a+d)^2 - (ad-bc)](ad-bc) \end{cases} \quad (5.33b)$$

$$\Delta B = -\langle \Delta a_n^2 \rangle (ad+bc+d^2) - \langle \Delta d_n^2 \rangle (ad+bc+a^2) \\ + \langle \Delta b_n^2 \rangle c^2 + \langle \Delta c_n^2 \rangle b^2 \\ + 2 \{ \langle \Delta a_n \Delta b_n \rangle ac - \langle \Delta b_n \Delta c_n \rangle (a^2+d^2) \\ + \langle \Delta c_n \Delta d_n \rangle bd - \langle \Delta a_n \Delta d_n \rangle (a^2+d^2) \\ + \langle \Delta a_n \Delta c_n \rangle ab + \langle \Delta b_n \Delta d_n \rangle cd \}$$

$$C_0 + \Delta C = p_{11} p_{22} p_{33} + p_{12} p_{23} p_{31} + p_{21} p_{32} p_{13}$$

$$- (p_{13} p_{22} p_{31} + p_{21} p_{32} p_{13} + p_{31} p_{12} p_{23})$$

$$C_0 = (ad-bc)^3$$

$$\Delta C = [\langle \Delta a_n^2 \rangle d^2 + \langle \Delta b_n^2 \rangle c^2 + \langle \Delta c_n^2 \rangle b^2 + \langle \Delta d_n^2 \rangle a^2 \quad (5.33c) \\ - \{ 2cd \langle \Delta a_n \Delta b_n \rangle - (ad+bc) \langle \Delta b_n \Delta c_n \rangle \\ + 2ab \langle \Delta c_n \Delta d_n \rangle - (ad+bc) \langle \Delta d_n \Delta a_n \rangle \\ + 2bd \langle \Delta a_n \Delta c_n \rangle + 2ac \langle \Delta b_n \Delta d_n \rangle \}] (ad-bc)$$

この方程式の根は，パラメータの関係で次の2つの場合に分けて次のように近似的に求めることができる。

(i) $ad-bc=1$, $a+d=0$ の場合

このとき，式(5.33)より， $A_0=-1$ ， $B_0=-1$ ， $C_0=1$ であるから， $\Delta A=\Delta B=\Delta C=0$ の根は $\lambda=1, -1$ (重根)となる。微かな $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ に対しては，根は近似的に次のように表わされるものとする。

$$\lambda_1 = -1 + a_1$$

$$\lambda_2 = -1 + a_2$$

$$|a_1|, |a_2|, |a_3| \ll 1$$

$$(5.34)$$

$$\lambda_3 = -1 + a_3$$

式(5.32)より a_1, a_2, a_3 を求めると

$$a_1 = \frac{1}{4} (\Delta A + \Delta B + \Delta C)$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \left[(2\Delta A - \Delta B) \pm \sqrt{(2\Delta A - \Delta B)^2 - 8(\Delta A - \Delta B + \Delta C)} \right] \quad (5.35)$$

となり，式(5.33)より $\Delta A - \Delta B + \Delta C = 0$ となるから結局

$$a_1 \cong \frac{1}{4}(\Delta A + \Delta B + \Delta C), \quad a_2 \cong \frac{1}{2}(2\Delta A - \Delta B), \quad a_3 \cong 0 \quad (5.36)$$

$$(ii) \quad ad - bc = \varepsilon, \quad (a+d)^2 = \varepsilon' \quad |\varepsilon|, |\varepsilon'| \ll 1 \quad \text{の場合} \quad (5.37)$$

$\varepsilon, \varepsilon'$ が微小な場合には，これを式(5.33)で $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ にくり入れることにより，根は次のように求まる。

$$\begin{aligned} a_1 &\cong \frac{1}{4}(\Delta A + \Delta B + \Delta C - 4\varepsilon) \\ a_2 &\cong \frac{1}{4} \left[(2\Delta A - \Delta B) + 4\varepsilon + 3\varepsilon' - \varepsilon^2 \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{(2\Delta A - \Delta B + 4\varepsilon - \varepsilon^2 + 3\varepsilon')^2 - 8(\Delta A + \Delta B + \Delta C + 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon')} \right] \end{aligned} \quad (5.38)$$

脚註#1)に式(5.32)の根配置を示す。 $\Delta A, \Delta B, \Delta C \gg \varepsilon, \varepsilon'$ のときには，(c)のように $\varepsilon, \varepsilon'$ が微小な摂動として加わるが， $\Delta A, \Delta B, \Delta C \ll \varepsilon, \varepsilon'$ の場合には式(5.38)は

$$a_3 \cong \frac{1}{4} \left[4\varepsilon + 3\varepsilon' \pm j\sqrt{8\varepsilon^3 + 2\varepsilon'(1-12\varepsilon)} \right] \quad (5.39a)$$

$$a_1 \cong -\varepsilon \quad (5.39b)$$

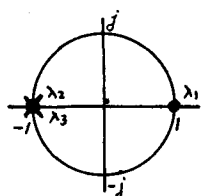
となって，根配置は(d)のようになる。後で述べるように，この根が単位円の内側にあるか，外側にあるかで安定性が判定できる。

さて，マトリクスの固有値がわかれば，Sylvesterの定理(附録式(B.6))を用いてその整数乗を求めることができる。ところで，先に求めた固有値は(i)(ii)の場合にすぎない

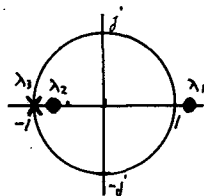
$$\lambda_1 \cong e^{a_1}, \quad \lambda_2 \cong -e^{-a_2}, \quad \lambda_3 \cong -e^{-a_3} \quad (5.40)$$

#1) 固有方程式の根配置

① $ad - bc = 1, \quad a + d = 0$

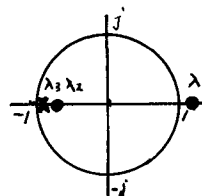


(a) $\Delta A = \Delta B = \Delta C = 0$

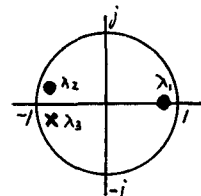


(b) $\Delta A, \Delta B, \Delta C = 0$

② $ad - bc = \varepsilon, \quad (a+d)^2 = \varepsilon'$



(c) $\Delta A, \Delta B, \Delta C \gg \varepsilon, \varepsilon'$



(d) $\Delta A, \Delta B, \Delta C \ll \varepsilon, \varepsilon'$

とおくことができる。そこで、 $\langle M_n \times M_n \rangle^m$ は、附録式(B.6)の Sylvester の定理を用いて次のように表わせる。

$$\begin{aligned} \langle M_n \times M_n \rangle^m &\cong \frac{1}{4} (M \times M + I)(M \times M + I) e^{ma_1} \\ &+ \frac{1}{2(a_3 - a_2)} (\langle M_n \times M_n \rangle - (1 + a_1)I)(\langle M_n \times M_n \rangle + (1 - a_3)I) (-)^m e^{-ma_2} \\ &+ \frac{1}{2(a_2 - a_3)} (\langle M_n \times M_n \rangle - (1 + a_1)I)(\langle M_n \times M_n \rangle + (1 - a_2)I) (-)^m e^{-ma_3} \quad (5.41) \end{aligned}$$

式(5.27) から $\langle \chi_n^2 \rangle$ を求めるには、 $\langle M_n \times M_n \rangle^m$ の第3行要素を求めておけば十分であるから、

$$\langle M_n \times M_n \rangle_{31}^m = \frac{c^2}{2} e^{ma_1} + \frac{\Delta_1}{2(a_3 - a_2)} (-)^m e^{-ma_2} + \frac{\Delta_2}{2(a_2 - a_3)} (-)^m e^{-ma_3} \quad (5.42a)$$

$$\langle M_n \times M_n \rangle_{32}^m = cd e^{ma_1} + \frac{\Delta_3}{2(a_3 - a_2)} (-)^m e^{-ma_2} + \frac{\Delta_4}{2(a_2 - a_3)} (-)^m e^{-ma_3} \quad (5.42b)$$

$$\langle M_n \times M_n \rangle_{33}^m = \frac{1+d^2}{2} e^{ma_1} + \frac{\Delta_5}{2(a_3 - a_2)} (-)^m e^{-ma_2} + \frac{\Delta_6}{2(a_2 - a_3)} (-)^m e^{-ma_3} \quad (5.42c)$$

ただし、 $\Delta_1 \sim \Delta_6$ はいずれも $O(\langle \Delta a_n^2 \rangle, \langle \Delta b_n^2 \rangle, \dots)$ の定数である。

$$\langle \chi_n^2 \rangle = \langle \chi_n^2 \rangle_i + \langle \chi_n^2 \rangle_d \quad (5.43)$$

とおくと、λ 射条件によって決まる項 $\langle \chi_n^2 \rangle_i$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle \chi_n^2 \rangle_i &= \left\{ \frac{c^2}{2} e^{na_1} + \frac{\Delta_1}{2(a_3 - a_2)} (-)^n e^{-na_2} + \frac{\Delta_2}{2(a_2 - a_3)} (-)^n e^{-na_3} \right\} (j k \chi'_0)^2 \\ &+ \left\{ cd e^{na_1} + \frac{\Delta_3}{2(a_3 - a_2)} (-)^n e^{-na_2} + \frac{\Delta_4}{2(a_2 - a_3)} (-)^n e^{-na_3} \right\} (j k \chi'_0 \chi_0) \\ &+ \left\{ \frac{1+d^2}{2} e^{na_1} + \frac{\Delta_5}{2(a_3 - a_2)} (-)^n e^{-na_2} + \frac{\Delta_6}{2(a_2 - a_3)} (-)^n e^{-na_3} \right\} \chi_0^2 \quad (5.44) \end{aligned}$$

次に、ランダムな導波素子の変動による項は、

$$\sum_{m=0}^{n-1} e^{ma_1} \cong (e^{na_1} - 1)/a_1, \quad \sum_{m=0}^{n-1} (-)^m e^{-ma_2} \cong \frac{1}{2} \{1 - (-)^n e^{-na_2}\} \quad (5.45)$$

を用いると,

$$\begin{aligned}
 \langle x_n^2 \rangle_d = & \left\{ \frac{c^2}{2} \frac{e^{na_1} - 1}{a_1} + \frac{\Delta_1}{2(a_3 - a_2)} \frac{1 - (-)^n e^{-na_2}}{2} + \frac{\Delta_2}{2(a_2 - a_3)} \frac{1 - (-)^n e^{-na_3}}{2} \right\} \langle (jR u_n')^2 \rangle \\
 & + \left\{ cd \frac{e^{na_1} - 1}{a_1} + \frac{\Delta_3}{2(a_3 - a_2)} \frac{1 - (-)^n e^{-na_2}}{2} + \frac{\Delta_4}{2(a_2 - a_3)} \frac{1 - (-)^n e^{-na_3}}{2} \right\} \langle jR u_n' u_n \rangle \\
 & + \left\{ \frac{1+d^2}{2} \frac{e^{na_1} - 1}{a_1} + \frac{\Delta_5}{2(a_3 - a_2)} \frac{1 - (-)^n e^{-na_2}}{2} + \frac{\Delta_6}{2(a_2 - a_3)} \frac{1 - (-)^n e^{-na_3}}{2} \right\} \langle u_n^2 \rangle
 \end{aligned} \quad (5.46)$$

ここで, $|a_1| \ll 1$ であるから, $a_2, a_3 > 0$ の場合には $\{ \}$ 内の Δ_2, Δ_3 項は Δ_1 項に比べて非常に小さくなる. したがって,

$$\langle x_n^2 \rangle_d \cong \left\{ \frac{c^2}{2} \langle (jR u_n')^2 \rangle + cd \langle jR u_n' u_n \rangle + \frac{1+d^2}{2} \langle u_n^2 \rangle \right\} \frac{e^{na_1} - 1}{a_1} \quad (5.47)$$

となる. ここで, 一般の場合の a_1 を式(5.38)より再掲すると,

$$a_1 \cong \frac{1}{4} (\Delta A + \Delta B + \Delta C) - \varepsilon \quad (5.48)$$

ただし, $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ は式(5.33)より求められることはいうまでもない.

ここで, レンズの口径を考えずにレンズ列導波系では, $C = -j/2l/R$, $d = 1$, $u_n' = \Delta x_n / f$, $u_n = 0$, $a_1 = \langle \Delta f_n^2 \rangle + \langle \Delta l_n^2 \rangle = a$ であるから, $f = l$ の共焦点の条件を用いると,

$$\langle x_n^2 \rangle_d = 2 \langle \Delta x_n^2 \rangle \frac{e^{na} - 1}{a} \quad (5.49)$$

となり, y 方向についても同様の検討を行えば, Steierの求めた式(5.2)が得られる.

式(5.47)は, 変形光線マトリクス式(5.23)で表わすことのできる区間を接続した仕様の導波系について, 導波束子の束子偏差をも含めた安定性を表わした式とすることが出来る. また, 式(5.48)からわかるように $\frac{1}{4}(\Delta A + \Delta B + \Delta C) < \varepsilon$ とすることができれば, 従来指数関数的に増大するとされてきた $d \sim 4$

変動を小さくすることができるとを示している。これは、2章で述べたがウス・モードファイバを用いることによって実現できるが、くわしい議論は後の10章に行うことにしよう。

5.5 空気変動の導波系におよぼす影響

5.5.1 空気の温度差によるビームの偏向

図5.2のような長さ L 、巾 d の空気の両端に温度差 ΔT がある場合には、屈折率にも分布がでる。いま媒質中の温度分布を

$$T = T_0 + (\Delta T/d)x \quad (5.50)$$

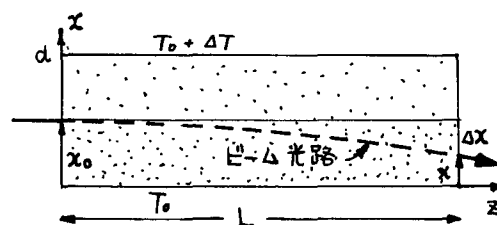


図5.2 空気の温度差によるビームの偏向

とおくと、屈折率表示でのクラジウス・モソッティの法則（附録(C.2)）

$$n(T) = 1 + (n_0 - 1) \frac{T_0}{T} \quad (5.51)$$

を用いて、屈折率の分布は次のように求める。

$$n(x) = 1 + (f/2)x \quad (5.52)$$

$$f = 2(n_0 - 1) \frac{\Delta T}{T_0 d} \quad (5.53)$$

$z=0$ で、 $x=x_0$ に軸と平行に入射した光線は、1章の式(1.48a)から L だけ伝播すると、 $x = x_0 - (f/4)L^2$ にくるからビームのずれは

$$\Delta x = x - x_0 = -(f/4)L^2 = -\frac{1}{2}(n_0 - 1) \frac{\Delta T}{T_0 d} L^2 \quad (5.54)$$

となる。例えば、一気圧常温の空気の場、 $n_0 - 1 = 3 \times 10^{-4}$ 、 $T_0 = 293^\circ\text{K}$ 、 $L = 100\text{m}$ 、 $d = 10\text{cm}$ 、 $\Delta x = 1\text{cm}$ としたときの温度差は $\Delta T \approx 0.2^\circ\text{C}$ であり、かなり小さな温度差でもビームが偏向をうけることがわかる。

5.5.2 ランダムな温度分布によるビームの変動

次に，空気の温度分布が場所的に不規則に変動している場合を考える．この変動の模様を実際に知ることはできないし，したがってその中を伝播する光線の軌跡を知ることもちろんできない．

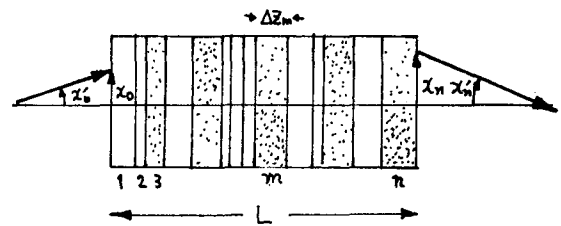


図5.3 ランダムな屈折率分布のモデル化

しかし，この変動が完全にランダムである場合には，統計的なビーム変動を求めることはできる．ここでは，屈折率に不規則な分布のある長さ \$L\$ の空气中をビームが伝播する場合，図5.3のように，長さ \$L\$ を \$n\$ の微小区間（\$m\$ 番目の長さ \$\Delta z_m\$）に区切って，その中では屈折率はある分布をもち，かつその変化が一様であるとみる．

いま，変動の原因として \$m\$ 番目の区間の屈折率 \$n_m(x)\$ を \$x\$ に関して一次で

$$n_m(x) = n_0 [1 - (f_m/2)x] \quad (5.55)$$

で表わされるものとする．この区間の入射，出射ビームの位置，および傾きをそれぞれ \$x_{m-1}, x'_{m-1}, x_m, x'_m\$ とすると，これらは式(5.7b)で表わされる．この場合には

$$M_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -j \frac{4\Delta z_m}{k n_0} & 1 \end{pmatrix}, \quad U_m = \begin{pmatrix} j k n_0 (f_m/2) \Delta z_m \\ (f_m/4) \Delta z_m^2 \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

で表わされる．\$U_m\$ の各要素は式(1.48a, b)を表わしている．この場合も，5.4と同じ手法で変動の2乗平均値を求めるのであるが，式(5.22)の第3，4項はここでも0であると仮定する．^{#1)}すると，\$x_0=0, x'_0=0\$ で入射した光ビームは，次の関係に表わされる．

$$\langle X_n \times X_n \rangle = \sum_{m=0}^{n-1} \langle M_n \times M_n \rangle^m \langle U_n \times U_n \rangle \quad (5.57)$$

#1) 相関性がないものとする

ここで,

$$\langle M_n \times M_n \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -j \langle \frac{\Delta z_n}{R n_0} \rangle & 1 & 0 \\ -\langle (\frac{\Delta z_n}{R n_0})^2 \rangle & -j \langle \frac{2 \Delta z_n}{R n_0} \rangle & 1 \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

$$\langle U_n \times U_n \rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \langle R n_0 f_n \Delta z_n^2 \rangle \\ \frac{j}{8} \langle R n_0 f_n^2 \Delta z_n^3 \rangle \\ \frac{1}{16} \langle f_n^2 \Delta z_n^4 \rangle \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

マトリックスの m 乗の公式より,

$$\langle M_n \times M_n \rangle^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m \langle j \frac{\Delta z_n}{R n_0} \rangle & 1 & 0 \\ -m \langle (\frac{\Delta z_n}{R n_0})^2 \rangle - m(m-1) \langle \frac{\Delta z_n}{R n_0} \rangle^2 & -2m \langle j \frac{\Delta z_n}{R n_0} \rangle & 1 \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

となり, 式(5.57) に代入して級数の和を求めると,

$$\begin{aligned} \langle \chi_n^2 \rangle &= \frac{1}{16} n(n-1) \langle f_n^2 \Delta z_n^4 \rangle \\ &+ \frac{1}{8} n(n-1) \left[\frac{1}{4} \langle R n_0^2 f_n^2 \Delta z_n^2 \rangle \left(\langle \frac{\Delta z_n^2}{R n_0^2} \rangle - \left\langle \frac{\Delta z_n}{R n_0} \right\rangle^2 \right) + \left\langle \frac{\Delta z_n}{R n_0} \right\rangle \langle R n_0 f_n^2 \Delta z_n^3 \rangle \right] \\ &+ \frac{1}{24} n(n-1)(2n-1) \langle \frac{\Delta z_n}{R n_0} \rangle^2 \langle R n_0^2 f_n^2 \Delta z_n^2 \rangle \end{aligned} \quad (5.61)$$

となる. 今, 簡単な場合として, $\Delta z_n = \Delta z = \text{一定}$, $R n_0 = \text{一定}$ とすると,
 $L \gg \Delta z$ については,

$$\sqrt{\langle \chi_n^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\langle f_n^2 \rangle \Delta z}{12}} L^{\frac{3}{2}} \quad (5.62)$$

となる. つまり, このような媒質中では, 長さの 1.5 乗に比例して, 変動が増す.^{#1)} なお, 一次変化を考えただけでは, 伝送状態の変動を表わすことができないので, 一次変化に加えて, 2次, 3次の項を加える必要がある.

#1) Chernov の理論と一致する. * L.A. Chernov, "Wave Propagation in a Random Medium", p168, McGraw Hill Book Co. Inc. New York (1959)

5.5.3 空気の擾乱によるビーム変動に関する一の実験

地面に非常に近い大気中を伝播するレーザビームが，空気の屈折率の分布の変動によって生ずる位置変動の大きさを測定した^{#1)}。

実験装置は図5.4に示すように，TEM₀₀ 状態（スポットサイズ 0.61mm）のレーザビームを望遠鏡（ $f_1 = -7\text{cm}$, $f_2 = 70\text{cm}$ ）で約10倍にし，これを本学南棟屋上のコンクリートの上約35cmの大気中を往復約150m伝播させる。レーザ管の出口の部分の空気の対流が非常に大きいことが指摘されているので，この実験ではこの部分を封じ，対流の影響をさけた。このようにして伝播してきたレーザビームは，日照時には変動も大きく，モードもかなり乱れるが，夜間では非常に変動が小さくなりモードも乱れない。これを測定するために $f = 15.7\text{cm}$ の凸レンズによって変位をスクリーン上で実際の約6倍にして1時間おきに観測した。

測定には，ランダムな変動を任意抽出するために，5秒おきに約70枚の写真撮影を行った（ASA 200, 1/8 sec）。撮影されたフィルム上のビームパターンを幻灯機でさらに2倍に拡大し，光ビームの中心の位置を読みとった結果を図5.5に示す。これらのパターン例を図5.6に示す。

垂直，水平方向ともに同程度の変動があることがわかり，これらのサンプリング点から位置変動の2乗平均値 $\sqrt{x^2}$, $\sqrt{y^2}$ を求めて図5.7に示す。この時の気温の変化と同時に示してあるが，日照による気温変化とビーム変動が対応していることがわかる。

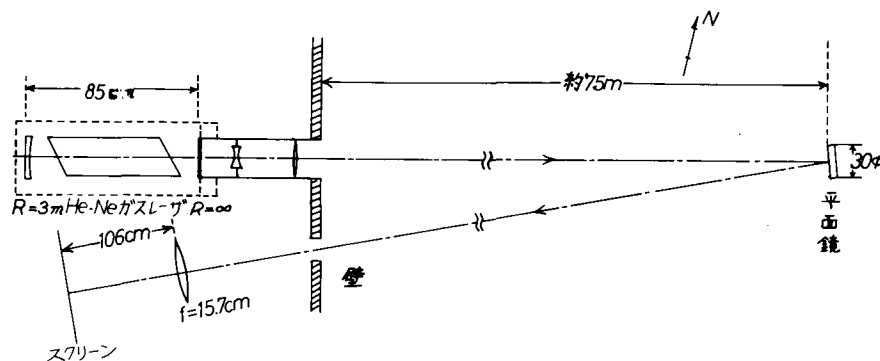


図5.4 大気の変動によるビーム変動の測定系。

#1) 本実験は 本学南棟屋上に設置された，約70mのパイプを用いる光ビーム伝送系による伝送実験の前に 比較のために 同地点で パイプを用いずに行ったものである。

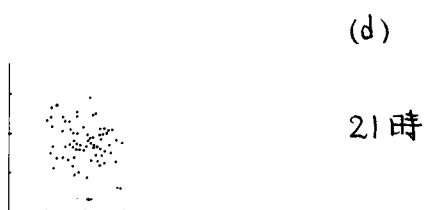
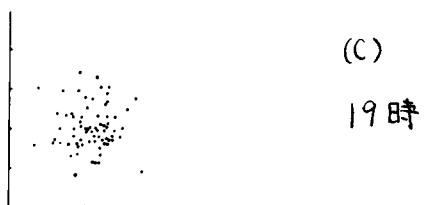
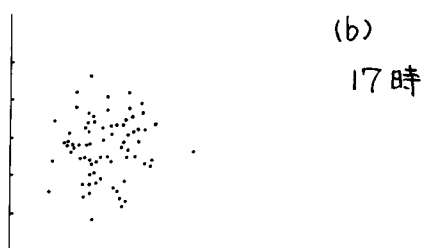
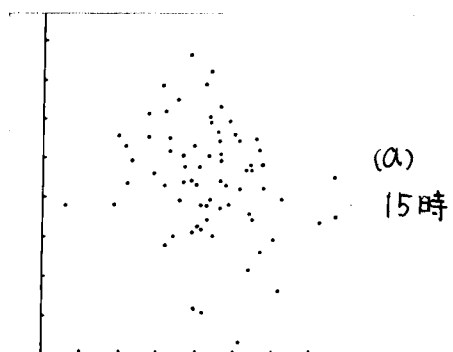


図 5.5 ビーム中心位置の変動
目盛 1mm/div

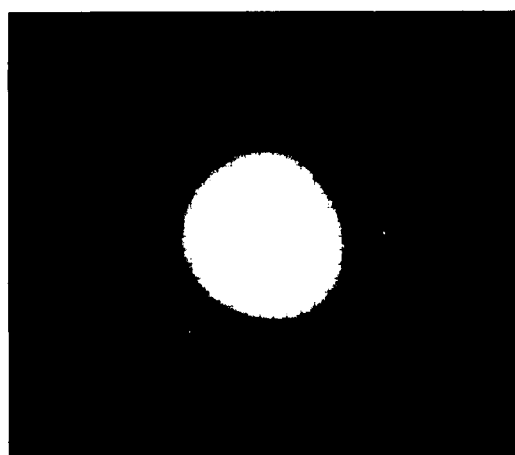


図 5.6 150mを伝播してきたビームの
パターン (1/25で拡大してある)
目盛は 1cm/div.

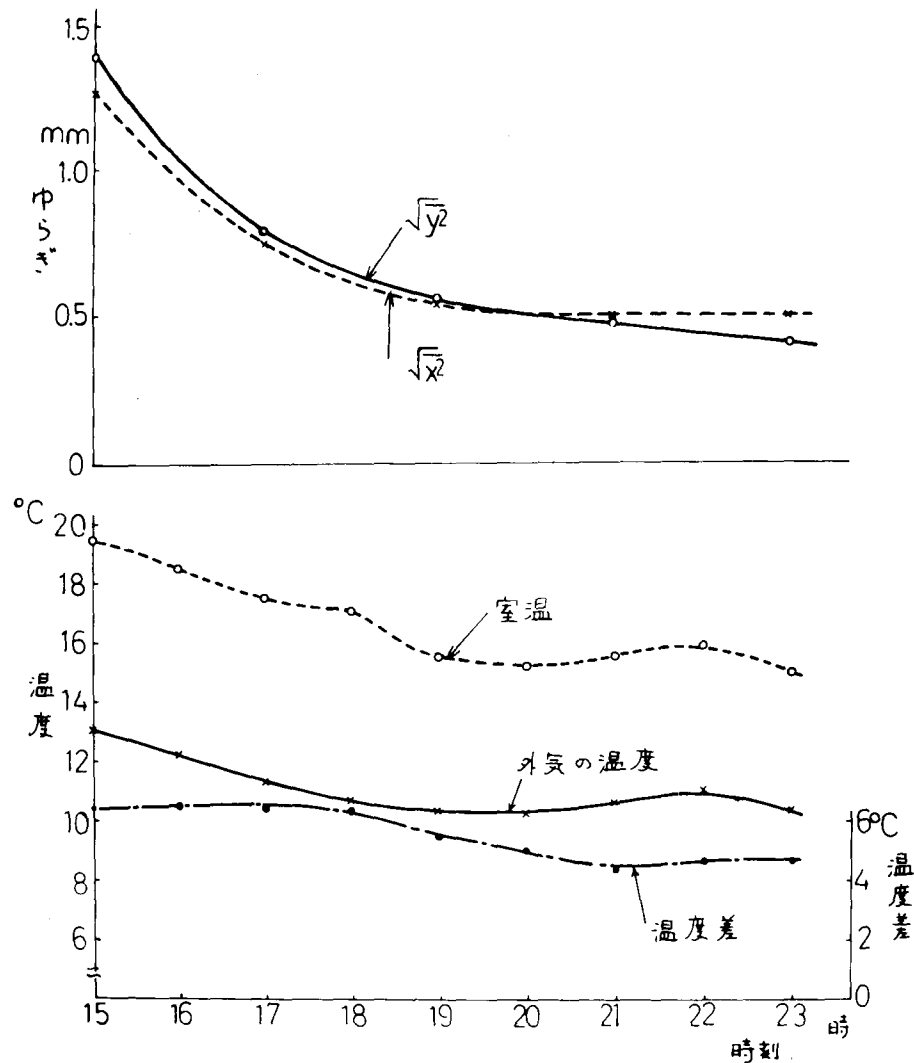


図5.7 ビーム変動の2乗平均値

また、図5.8には曇天の日の午後3時のビーム変動の分布を示すが、 $\sqrt{x^2} = 0.7 \text{ mm}$ 、 $\sqrt{y^2} = 0.6 \text{ mm}$ で、これと図5.5(a)の晴天における同時刻の分布と比較すれば、日照によってビームの変動が著しくなることがわかる。

なお、ビームの変動は測定の際に実際の約12倍に拡大されており、最終段階での読みとり誤差を2 mmとすれば、真の誤差は約0.16 mmで、相対誤差は約10%程度である。

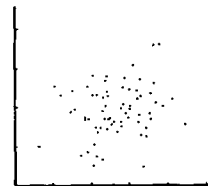


図5.8 曇天時のビーム変動

5.6 導波系の安定化に対する物理的限界

前節⁸³⁾で、一応ビームが不安定になる原因とその定量的な大きさについて論じた。この節では、不安定性を除去するための、光線変動抑制器 (Ray Oscillation Suppressor - ROS) の物理的な限界に関する一つの考察を行った。

5.6.1 Marcuseによる安定化の物理的限界

種々の原因でおこるビームの不安定性を抑制するための手段としては、受動的なものと、自動制御系を含む能動的なものが考えられ、色々な試みがなされた。ところが Marcuse は、受動素子 (レンズなど) のみで ROS をつくることは不可能であることを一般的に示し、巧妙な方法を用いて ROS を⁽⁸⁴⁾ 実現しようとする努力が意味のないことを明らかにした。つまり、

Marcuse の結論

受動的な素子のみでつくられた導波系では、光ビームの位置変動と角度変動を同時に小さくできるのは屈折率が進行方向に増加している場合に限られ、実際の導波系では永久に屈折率が増加の状態にあるようにはできないから、ROS の実現は不可能である。

というものである。この事情をもう少し詳しく考えてみよう。

簡単のために空間を 2 次元に限り、屈折率 $n(x, z)$ で表わされる媒質に入射する光線 (位置 x , 傾き x') の集合を考える。いま、それらの一本の光線について、 x に正準共轭な変数 p は 1.2.3 で述べたように

$$p = n(x, z) \cdot \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}$$

で表わされ、この x と p で位相空間をつくるとき、一本の光線は位相空間における一点 (位相点) として表わされる。光線が z 軸にそって進行するとき、屈折率に応じてその位置 x と z 軸に対する傾き x' をかえれば、位相点はその軌跡に対応する運動を位相空間内で行なう。

さて、先に述べた色々な x, x' をもつ光線の集合は、位相空間においては位相点の密度と考えることができる。このような点の密度関数を $\rho(x, p)$ とすると、光線の集合が z 方向に伝播する際にうける位置、傾きの分布の変化は、 $\rho(x, p)$ の z 方向の変化で表わすことができるわけである。ところで、位相点の z 方向への変化は、型式的にこれらの点を位相空間における〈気体〉とみなして、それらの運動として解くことができる。統計力学におけるリューヴィユの定理は、閉じた系における粒子の密度関数は時間的に不変であることを示したものである。光線の場合にも、その運動は正準方程式に従うので、もちろんおくことにより、リューヴィユの定理がなりたつ。すなわち、

$$\frac{d\rho}{dz} = 0 \quad (5.63)$$

とおくことができる。この式は、位相空間における気体の流れの一般速度を V とおいたとき、連続の式¹⁾

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} + \text{div}(\rho V) = 0 \quad (5.64)$$

と、 $\partial \rho / \partial t = 0$ とから導びくことができる。式(5.63)からわかるように、 ρ は z に関して不変であるから、 x と p との両方を同時に小さくすることはできず、従って $\rho(x, z)$ が z 方向に増加している場合以外は x と x' の両方を同時に小さくできない。これが Marcuse の結論であった。

ところが、リューヴィユの定理式(5.63)は、連続の式(5.64)が成り立つ定常流の場合であった。光学においては、これは媒質に損失をもたない場合であって、光ビーム導波系などのように、レンズの口径が有限な場合や、先に述べたガウス・モードフィルタを用いる場合のように分布的に損失を伴うときには式(5.64)は書き直す必要があるように思われる。

5.6.2 回折を伴う導波系の安定化に対する物理的限界

式(2.31)で表わされる電力透過率をもつガウスモードフィルタは、そこ

#1) Ландау и Лифшиц, "Статистическая физика"

を通過するガウス波の中心の軸からのずれは $1/(1 + w^2/w_0^2)$ 倍に減小し、平面位相のときには傾きは不変である。したがって、ガウス波による集合を考えるとき、 $\partial P / \partial z = 0$ にはならない。そこで式(5.64)の拡張として、

仮定. 有限の広がりをもつビーム波を光線の集まりだとみなし、ビーム波が部分的に回折をうけるような場合、ビーム波の中心を代表する光線の集合がつくる位相点の流れの連続の式は、

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \text{div}(PW) + \frac{P}{\tau} = 0 \quad (5.65)$$

のように書かれねばならない。ただし、 τ は回折効果や能動的原因でおこる位相点の密度の変化を表わす。

すると、次の結論を得る。

結論1 回折効果を伴うようなビーム波の中心を表わす光線がつくる集合の密度 P は、伝播に際して

$$\frac{dP}{dz} \neq 0 \quad (5.66)$$

にすることが出来る。

結論2 ビーム波を表わす光線の位置、傾きは、回折効果や能動的原因が同時に小さくできる場合があり得る。すなわち ROS は不可能なことではない。

5.7 本章のまとめ

5.7.1 本章で新たに得られた結果

光ビーム導波系において、光ビームが導波系の軸からずれてしまうような、いわゆる安定性に関する検討を行い、新たに次の結論を得た。

- (i) ビームの不安定性による影響について考察し、回折損失が増加するほかに、レンズの位置変動などでビームが異軸に伝送されると、中心軸光線に比べて光路長が長くなるため遅延がおこることを示した。現在の光通信のシステムでは問題になる程大きい量ではないが、将来、固体レーザーや半導体レーザーなどで超高速によるパルス変調が可能になり、10 Gbit 以上でかつ多重を行なうようなシステムでは問題になってくる。
 - (ii) 従来知られていなかった、変形光線マトリクスの行列式が1でないような素子を含む光ビーム導波系について、 n 区間を通過した後のビームの軸ずれを求めた。具体的には、任意のマトリクスで表わされる導波系について、
 - (iii) 曲がり変動があるときのビーム光路を求めた結果、ビームは正弦波状にうねりながら伝搬することを導出した。
 - (iv) 正弦波状の曲がり変動があるときのビーム光路を求めた結果、導波系固有のある周期と同じ周期をもつ変動がある場合、ビームは着しく軸からずれてしまうことを明らかにした。
- なお、(iii) (iv) に関して、変形光線マトリクスの行列式が1より小さい素子を用いると、これらの変動は抑制されることを導出した。
- (v) 集束素子のランダムな位置変動がある場合の、素子偏差をも含めた統計的なビームのずれの2乗平均値を一般的に求めた。従来は、このような変動があると、ビームのずれは指数関数的に大きくなることが知られていたが、光線マトリクスの行列式が1より小さい素子を用いた場合には、このような増大を抑制でき、変動を一定値におさえることが出来る。
 - (vi) 空気中にランダムな屈折率の分布があるときのビームのゆらぎを、変形

光線マトリクスを用いる方法によつて求め、ビームのゆらぎの2乗平均値が距離の $3/2$ 乗に比例するという、いわゆる $3/2$ 乗則を導出した。

(vii) 空気の擾乱によるビームのゆらぎに関する実験を行つて、日照により著しくビーム変動がおこり、変動の2乗平均値が150 m 当り約 $0.5 \text{ mm} \sim 1.5 \text{ mm}$ 程度あることを確かめた。

(viii) "受動素子のみでは、光ビームの不安定性を改善することは物理的に不可能である"という Marcuse の理論について検討し、"分布的な損失がある場合には、Marcuse の理論は成り立たず、安定性を改善することが不可能ではない"、という結論を得た。

5.7.2 結 論

本章に関する結論、および将来の安定性についての問題点をまとめると、次のようになる。

- (i) 変形光線マトリクスで表わされる任意の素子で構成される導波系について、①導波系が地形の変動などで一様に曲がったり、②正弦波状にうねったり、③素子がランダムに位置の変動をおこしたり、④素子のパラメータに設計誤差があったり、した場合の、ビームの軸からのずれを表わす式が得られた。
- (ii) 従来、ビームの安定性に関しては幾何光学的な検討が多く、回折効果と伴なうビームに対する考察でも近似的であったが、本章では、回折効果とガウス・モードフィルタを導入することによつて、線型な計算によつて表わすことができた。
- (iii) なお、レンズ面の歪、口径の有限性、位置変動などの全ての要素を考慮に入れた安定性と伝送損失の関連性については未解決であり、早急なる検討を必要とする。
- (iv) 光ビーム導波系の遮蔽管内における空気の屈折率の変動によつておこるビームの不安定性は、導波系を実用化する上での大きな問題となっており

，これを抑制する方法として，①低圧にする，②熱に対する外気との遮断を完全にする，③管の中にランダムな空気の流れをつくる，④自動制御によってビームの位置補正を行なう，などの方法が考えられるが，どの方法が最も良いか，あるいはその他の方法がないかを，経済性を加味して検討することは将来の重要な問題であると思われる。

6章 光ビーム導波系における姿態変換

前章では、種々の原因で伝送されるビームが導波系の軸からそれてしまうような、いわゆるビームの不安定性について述べたが、それとは別にビーム波の姿態そのものが回折効果や、導波系の不完全性によって不安定になり得る。このような現象を本章では、伝送ビーム波の姿態変換という見方でとらえ、姿態変換のおこる原因とその影響について検討し、レンズ状媒質やレンズ、反射鏡などの導波系の姿態変換の割合を計算した。

6.1 光ビーム導波系における姿態変換の定義と表示

ミリ波の導波管では、管の不整や曲がりによって伝送姿態である TE_{01} 姿態から、他の不用伝播姿態への変換がおこり、線路にそって伝播したのち、次の不完全部分で姿態による時間遅れあるいは位相差をもってもとの TE_{01} 姿態へ再変換される。変換がおこった場合、モード・フィルタによって不用姿態を降けば姿態変換損失となり、また再変換された姿態は除くことができないで、信号歪、雑音の原因となる。

光ビーム導波系の集束素子に姿態変換がおこることは、レンズなどの口径が有限なために現われる回折じまや、レンズ状媒質でも、例えば層流型ガスレンズを通過して、 TEM_{00} の姿態から図6.9のような干渉じまが表われる現象が明らかである。

光ビーム伝送において、ミリ波導波管のような影響がおこるかどうか解明することがこの章の一つの目的であるが、結果的にみて、姿態変換がおこる割合の大小が、やはり導波系の良さを決める要素になるものと思われる。

さて、一つの集束素子に入射するビームの横方向電界成分 E_{in} は次のように表わされるものとする。

$$E_{in} = E_0 u_0(x, y) = \frac{E_0}{\sqrt{\pi} w_{x\frac{1}{2}} w_{y\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}[P_x x^2 + P_y y^2]} \quad (6.1)$$

ただし, P_x, P_y はガウス波の波面係数で

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{1}{W_x^2} + j \frac{R_x}{W_x^2} \\ P_y &= \frac{1}{W_y^2} + j \frac{R_y}{W_y^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

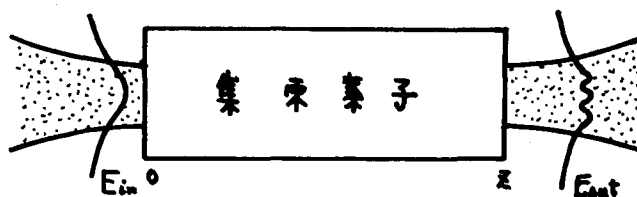


図 6.1 光ビーム導波系用集束素子における姿態変換

このような TEM_{00} 姿態のビームが集束素子を通過したとき, もしこの素子が完全であれば, 出射波はやはり TEM_{00} 姿態で (波面係数は変化してもよい), 一般に

$$E_{out} = E_0 u_{00}(x, y, z) \quad (6.3)$$

で表わされるものとする。しかし, 集束素子に不完全性があるような場合には, TEM_{00} 姿態のみではなくなる。そこでこのように任意に変換された出射波を $u_{00}(x, y, z)$ の高次姿態 $u_{pq}(x, y, z)$ ^{#1)} で展開して次のように表わす。

$$E_{out} = E_0 \sum_{p,q} C_{pq} u_{pq}(x, y, z) \quad (6.4)$$

この係数を p, q 次のエルミート・ガウス波への変換を表わす量として, 姿態変換係数とよぶことにする。

また, $|C_{pq}(p \neq 0, q \neq 0)| \ll 1$ のとき,

定義

$$\eta = 1 - |C_{00}|^2 \quad (6.5)$$

を電力の姿態変換率と定義し, 導波系を通過した波の電力が, TEM_{00} 姿態以外の高次姿態へどれだけの割合で変換されたかを表わすものとする。

さて, このような光ビーム導波系における姿態変換のおこる原因を考えておこう。くわしい検討は 6.3 以下に行なうが, ここでは簡単にまとめることにする。

(1) 導波素子の口径が有限なためにおこるもの ... この場合, 回折損失を

#1) $u_{pq}(x, y, z)$ は 1 章の式 (1.31) で表わされるエルミート・ガウス関数である

伴なうが，同時に高次状態への変換もおこる．

(2) 導波系そのものに不完全性がある場合．

(i) レンズ状媒質では，誘電率の変化が2次元分布からずれている場合

(ii) レンズや反射鏡では，その面が不整である場合．

(iii) 空気の湿気分布がランダムな場合．

6.2 状態変換の影響

光ビーム導波系において，状態変換がおこった場合の通信系におよぼす影響も，ミリ波導波管の場合と比較しながら検討する．主な問題についてまとめたのが表6.1である．これらのうち，3波面の歪によっておこる復調時の損失は特にヘテロダインのときに問題になるもので，ここでは直接検波を考えているのだから，主に1, 2の点について検討する．

表6.1 状態変換の影響

問題点	ミリ波導波管	光ビーム導波系
1 状態による減衰定数の差	変換損失	回折損失
2 変換，再変換	遅延歪	遅延歪
3 波面の歪	—	復調時の損失
4 状態による遮断	帯域	—

6.2.1 状態変換損失

単レンズ列導波系を考えて，その一區間における TEM_{pq} 状態の回折損失は，ファブリペロー共振器のそれと等価である．また，幅 $2a$ の方形ファブリペロー共振器の損失 α_{pq} は，損失が非常に小さいときには， x, y 方向にそれぞれ無限に長い2次元的な共振器の損失 α_p, α_q の和として表わすことができる．すなわち

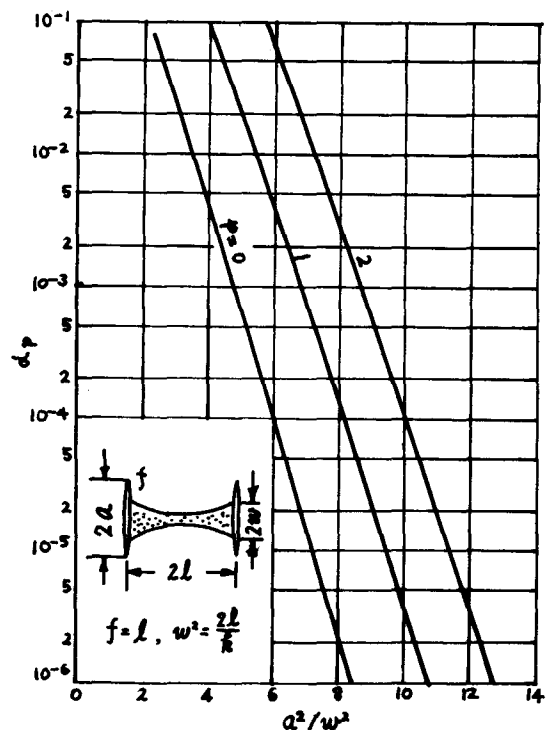


図6.2 2次元焦点レンズ列導波系の一區間における電力回折損失の割合．文献(5)のFig. 2から求めたもの．ただし $C=2\pi a^2/2l\lambda = a^2/w^2$ ．

$$\alpha_{pg} \cong \alpha_p + \alpha_g$$

(6.6)

ここで，2次元的な共焦点レンズ列導波系の一區間において，回折により失われる電力の割合 α_p (p 次状態についての) を図 6.2 に示す．回折損失は，ビームのスポットサイズと，レンズの巾 $2a$ との比で決まり，その関係は，5章式(5.3) に示されているものである．

前の区間に状態変換があり， TEM_{pg} 状態が発生したとすると，次の区間の有限な口径のために TEM_{00} 状態との回折損失の差があるために TEM_{pg} 状態の方が強く減衰する．例えば， $a^2/w^2 = 6$ では， TEM_{00} に対しては $\alpha_{00} \cong 2 \times 10^{-4}$ であるが， TEM_{11} では $\alpha_{11} = 8 \times 10^{-3}$ であり損失は 40 倍も大きい．

6.2.2 遅延歪

(i) 遅延時間 ΔT_{pg}

ミリ波導波管では，導波管の不全部分で伝送状態である TE_{01} 状態から， TE_{02} ， TE_{03} 等の状態へ変換がおこり，これらの状態間には位相速度に差があるため，パルス伝送する際もとのパルスと変換波あるいは再変換との間に干渉がおこって，パルスの波形歪や，遅延パルスによる誤読がおこる．^{#1)}

光ビーム導波系の場合，空間の有限の部分に極所的に存在するエルミートガウス波の伝播定数は，式(1.31)からわかるとおり，状態によって平面波と少しずつ異っている．このためにおこる遅延の大きさを求めるために，図 6.3 のような複数の区間数をもつレンズ列導波系をとりあげ，その半区間と 1 つの伝送回路とみなして遅延時間を求めることにする．

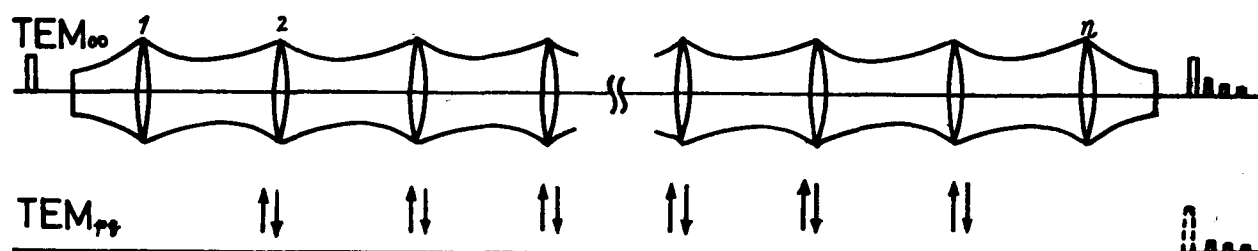


図 6.3 光ビーム導波系における状態変換，再変換

#1) 文献 #1) p13. ミリ波導波管 (130 m) による マイクロパルス法による実験結果によると，96C，0.1 μsec のパルスで，条件が悪い場合には 30 往復で相当の歪が現われる．

#2) 清水幸夫，「ミリ波伝送」共立出版

さて，伝送回路では，文献[#1]によると

入力 $e^{j(\omega t + \theta)}$ の応答出力を $e^{j(\omega t + \theta)} K(j\omega)$ とすると，
この伝送回路の遅延時間 $\tau(\omega)$ は

$$\tau(\omega) = - \frac{\partial}{\partial \omega} \arg K(j\omega) \quad (6.7)$$

で表わされる^{#1)}。

さて，図6.3の導波管の半区間を図6.4のように取出し，
1つの伝送回路と考えると，この間におけるエルミート・ガ
ウス波の時間と周波数のみに関する項を式(1.31)から求める
と

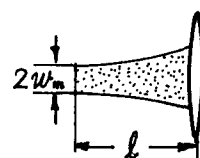


図6.4 導波管の
半区間， $w_m^2 = l/R$ 。

$$\exp \left[-jkl + j(p + \frac{1}{2}) \tan^{-1} \left(\frac{l}{w_m^2 R} \right) + j(q + \frac{1}{2}) \tan^{-1} \left(\frac{l}{w_m^2 R} \right) \right] \quad (6.8)$$

となっている。ただし，途中は自由空間と考えて $R = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ とおく。

これを $K(j\omega)$ とみなして， p, q 姿勢の長さ l に対する遅延時間 $\tau_{pg}(\omega)$ を式
(6.7)の定義に従って求めると次のようになる

$$\tau_{pg}(\omega) = \frac{l}{c} + \frac{1}{\omega} (p + q + 1) \left[\frac{l}{w_m^2 R} + \frac{w_m^2 R}{l} \right]^{-1} \quad (6.9)$$

したがって，00 姿勢との差 $\Delta\tau_{pg} = \tau_{pg} - \tau_{00}$ は次式のようになる。

$$\Delta\tau_{pg} = \frac{1}{\omega} (p + q) \left[\frac{l}{w_m^2 R} + \frac{w_m^2 R}{l} \right]^{-1} \quad (6.10)$$

また，共焦点の構成では $w_m^2 = l/R$ であるから簡単に，

$$\Delta\tau_{pg} = \frac{1}{2\omega} (p + q) \quad (6.11)$$

#1) 岸 源也，"回路網解析の基礎"，共立出版，通信工学講座 5-8

(ii) PM方式におけるパルス遅延

序論0.1 で述べたような光PCMにおけるパルス遅延を求めてみる。いま、1つのビームに対するPM方式を次のようにおく。

くり返し周波数	f bit
くり返し時間	T sec ($= 1/f$)
システム数	N_t
変換波が通過するレンズ数	$\bar{n}$
搬送波(光)周波数	ω

すると、高次状態による最大遅延時間 $2\bar{n}\Delta\tau_{pg}$ は

$$2\bar{n}\Delta\tau_{pg} \ll T/N_t$$

でなければならぬ。

例えば、 $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ ($\omega = 3 \times 10^{15}$) に対して、色々の $\bar{n}\Delta\tau_{pg}$, T/N_t の比較を行ってみよう。 $p=q=10$ までと考えると、 $2\Delta\tau_{pg} \approx 10^{-14}$ であるから

	$\bar{n}$	$2\bar{n}\Delta\tau_{pg}$	f	T	N_t	T/N_t
①	20	2×10^{-13}	150 Mbit	6 nsec	10	6×10^{-10}
②	100	10^{-12}	10 Gbit	10^{-10} sec	100	10^{-12}
③	500	5×10^{-12}	10 Gbit	10^{-10} sec	100	10^{-12}

①の例では遅延時間はあまり問題にならないが、②、③の例のように非常に短いパルスで、しかも長距離にわたる場合は $2\bar{n}\Delta\tau_{pg}$ と T/N_t が同じ大きさになり、遅延が影響してくる。5章で述べた、異軸光による遅延と共に超高速パルスでは無視できなくなってくる。

6.3 分布型集束素子における姿態変換

誘電率の変化が軸方向では一様で、横方向には中心軸からの距離の2乗で変化している分布型集束素子に不完全性のある場合における姿態変換について考える。ここで扱う不完全性とは、誘電率の変化が2乗以外の項を含むという場合をいう。これらの変化項のうち奇数次変化項は、姿態変換への影響よりはむしろビームの中心を動かして偏向させる作用が大きい。これに対して偶数次変化項はガスレンズなどには原理的に除くことはできないものでもあり、ビームの形自体が変化する原因となるもので、ここではそれらのうち最低次の4次項について考える。もちろん、ここで述べる方法でそれ以外の高次項についても検討できる。後で述べるが、偶数次変化項は、等価的に集束作用も変化させるが、この効果は小さい。これに対して、全く性質の異なる姿態変換作用があるので、ここでは後者に注目する。

さて、図6.5のように分布型集束素子で構成する導波系の姿態変換を求めるために図6.6のような長さ L のレンズ状媒質を考える。レンズ状媒質が中心軸対称の場合とそうでない場合、集束素子である場合と発散素子である場合とに分けて考える。

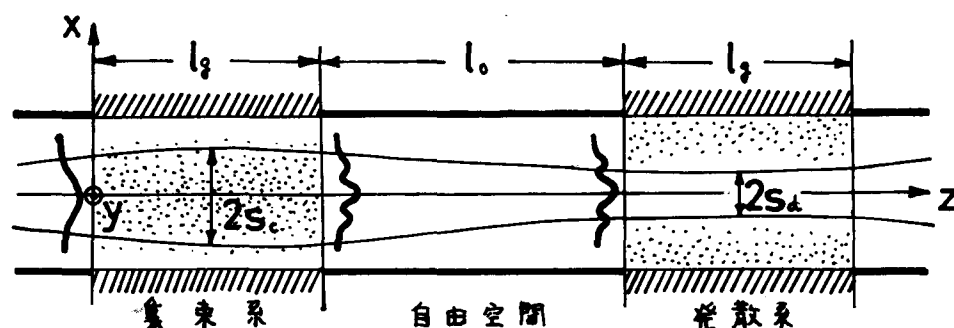


図6.5 分布型集束素子で構成する導波系のモデル図

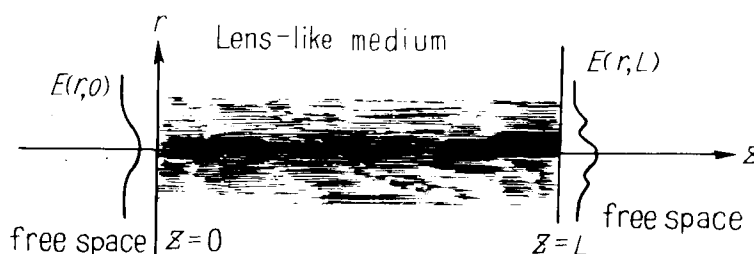


図6.6 レンズ状媒質における姿態変換

6.3.1 円筒座標による解析

まず，分布型集束素子の誘電率の分布が，軸方向には一様で，横方向の変化 $\epsilon(r)$ が 2 次変化項のほかには微小な 4 次変化項を含む場合について考える。 $\epsilon(0)$ を中心軸上の誘電率とすれば， $\epsilon(r)$ はつきのように表わされるものとする。

$$\epsilon(r) = \epsilon(0) [1 \mp (gr)^2 + (hr)^4] \quad (6.12)$$

ここで， g^2 の符号は，1 章で述べたように，負のときは媒質が光に対して集束性を示し，正のときには発散性を示すものとする。さて，横方向電界 E に関する方程式は，式 (1.19) と同じように，軸対称の場合のみを取扱うとすると次のようになる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2(0) [1 \mp (gr)^2 + (hr)^4] E = 0 \quad (6.13)$$

ただし， $k(0) = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon(0)}$ である。ここで， $(hr)^4$ は $(gr)^2$ に比べて十分小さい場合を考え（ほとんどの場合そうであるが），摂動法によって式 (6.13) を解くことにする。このとき， g^2 の符号の正，負によって解法が異なるので，以下のように分けて解析する。

(i) 集束系の場合 (g^2 の符号が負)

$h=0$ の場合には，この媒質の固有状態は 1 章で述べたような変数分離されたラゲール・ガウス形波になり，次式に再掲する。

$$E_{0n}(r, z) = \phi_n(r; \omega_0) e^{-j\beta_n z} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.14)$$

$$\phi_n(r; \omega_0) = \frac{1}{n! \sqrt{\pi} \omega_0} L_n\left(\frac{r^2}{\omega_0^2}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{\omega_0^2}\right)} \quad (6.14a)$$

$$\beta_n \cong k(0) - (2n+1)g \quad , \quad \omega_0 = 1/\sqrt{k(0)g} \quad (6.14b)$$

ただし， L_n は，式 (1.24) を満足するラゲールの多項式である。^{#1)}

さて， $h \neq 0$ で，導波系を構成する近軸領域において $(hr)^4 \ll (gr)^2$ の場合に

#1) Type-A (附録 A) 参照

は、摂動法^{#1)}によって式(6.13)の近似解が得られる。0次摂動において、位相定数 β_n のみが摂動 $\Delta\beta_n$ を受け、波の横方向の分布は $R=0$ の場合と変わらなるとすると、式(6.13)の固有状態 $E_n(r, z)$ は、次式のように求められる。

$$E_n(r, z) = \phi(r; \omega_0) e^{-j(\beta_n + \Delta\beta_n)z} \quad (6.15a)$$

$$\Delta\beta_n = \{3R^4/(g^2 R(0))\} n^2 + \{3R^4/(g^2 R(0))\} n + R^4/(g^2 R(0)) \quad (6.15b)$$

ここで、 $\Delta\beta_n$ の第3項は状態番号 n によらない伝搬定数の変化と、第2項は集束性と左右する n の1次項へのわずかな影響とそれぞれ表わしている。しかし、 $g^2 \sim 10^{-1} \sim 10^{-2}$ 、 $R^4 \sim 10^{-1} \sim 10^{-2}$ 、 $R(0) \cong 10^7$ であるから、これらの項は摂動のない時に比べて非常に小さく、無視してもかまわない。また、場合によっては式(6.14b)にくり入れることも可能である。

ところが、第1項は n^2 に比例する項であって、摂動のないときには存在しない項である。後に述べるように、ガウス波が入射したときに、これを今求めた固有状態で展開して、各集束波の伝搬後の合成によって伝搬状態を求める際に、 n^2 に比例する項があると再びガウス波にならないのでこの項を状態変換の原因と考える。^{#2)}

さて、この媒質の $z=0$ 面に、スポットサイズが w_{in} で、等価相面の曲率半径が R_{in} のTEM₀₀状態のガウス波 $E(r, 0)$ が入射して、媒質中を $z=L$ まで伝搬したときの電界 $E(r, L)$ を求めることにする。

まず、 $E(r, 0)$ を媒質の固有状態 $\phi_n(r; \omega_0)$ で展開する。 ϕ_n の完全正規直交性というラプラス変換の公式を用いることにより、

$$E(r, 0) = \frac{E_0}{\sqrt{\pi} w_{in}} e^{-\frac{1}{2} P(0) r^2} = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(r; \omega_0) \quad (6.16)$$

ただし、 $P(0)$ は入射ビームの波面係数で、

$$P(0) = \frac{1}{w_{in}^2} + j \frac{R(0)}{R_{in}} \quad (6.17)$$

#1) L.I. Schiff, "Quantum Mechanics", McGraw Hill Book Co Inc. - Kogakusha.

#2) このことは1章において、式(1.25b)を式(1.26)のように近似したことと矛盾するように思われる。式(1.25b)で右辺第1項の n^2 の係数は $\sim g^2/R \approx 10^{-9}$ であった。一方、 $R^4/(g^2 R) \approx 10^{-7}$ であるので、以前の右辺は、この摂動に比べて十分小さいものと考えられる。(ただし $g^2 \sim 10^{-1}$ 、 $R^4 \sim 10^{-1}$)

と表わされ, $B_0 = P(0) w_0^2$ とおく

$$C_n = \frac{w_0}{w_{in}} \frac{2}{B_0+1} \left(\frac{B_0-1}{B_0+1} \right)^n = \sqrt{\text{Re } B_0} \frac{2}{B_0+1} \left(\frac{B_0-1}{B_0+1} \right)^n \quad (6.18)$$

ただし, 式(6.16)の E_0 は振巾を表わす定数である.

振動をうけた伝搬定数は式(6.15b)を用いて $\beta_n + \Delta\beta_n$ となるから, $z=L$ における電界 $E(r, L)$ は

$$E(r, L) = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n \phi_n(r; w_0) e^{-j(\beta_n + \Delta\beta_n)L} \quad (6.19)$$

となり, $\Delta\beta_n$ に含まれる n^2 の項のために, 式(6.19)で表わされる合成電界は TEM_{00} 以外の状態へ変換される成分を含むようになる.

ところで, $k=0$ のときには, $z=L$ における電界はガウス波に再合成され

$$E_0(r, L) = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n \phi_n(r; w_0) e^{-j\beta_n L} = E_0 \psi_0(r, L) e^{-jR(0)L} \quad (6.20)$$

と表わされる. ここに,

$$\psi_0(r, L) = \frac{1}{\sqrt{\pi} w(L)} e^{-\frac{1}{2} P(L) r^2} e^{-j\varphi(L) z} \quad (6.21)$$

で, 式(1.33)から求められ, $P(L)$ は $P(0)$ が $z=L$ 点に変換された波面係数であり表(1.1)からそのスポットサイズ $w(L)$ と波面の曲率半径 $R(L)$ を求めることができる. また, $\varphi(L)$ は $z=0, L$ 間における基本波の位相差が平面波とわずかに異なることを表わしている項で, 式(1.33)の $\tan^{-1} F$ から求められる.

さて, 式(6.19)の $E(r, L)$ を $k=0$ の場合の伝搬波である式(6.21)の高次状態

$$\psi_n(r, L) = \frac{1}{n! \sqrt{\pi} w(L)} L_n \left(\frac{r^2}{w(L)^2} \right) e^{-\frac{1}{2} P(L) r^2 - j(zn+1)\varphi(L)} \quad (6.22)$$

で展開して, #1) これを $E'(r, L)$ とおく.

$$E(r, L) = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n(r, L) e^{-jR(0)L} = E'(r, L) \quad (6.23)$$

#1) 特定の $w(L)$ をもつ関数で展開したのは, $k=0$ の場合 $A_0=1, A_i=0$ ($i \neq 0$) に一致させるためである. 固有状態の変化が非常に小さく, かつ再合成波が式(6.19)で表わされる範囲でこの展開が妥当である.

ここで、 $\psi_n(r, L)$ もまた 自交関数であるから、式(6.20), (6.23), (6.19) より A_0 を求めると

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_0^\infty E'(r, L) E_0^* \psi_0^*(r, L) e^{+j\kappa(0)L - j\varphi(L)} 2\pi r dr / |E_0|^2 \\ &= \int_0^\infty E(r, L) E_0^*(r, L) 2\pi r dr / |E_0|^2 \\ &= \sum_{n=0}^\infty C_n C_n^* e^{-j\Delta\beta_n L} \end{aligned} \quad (6.24)$$

この定数 A_0 は 6.1 で述べたように、姿態変換をうけた波を含む電界 $E(r, L)$ のうち、入射波と同じ TEM₀₀ 姿態成分の大きさを示す。

さて式(6.18) から明らかなように、 $C_n C_n^*$ は n のある程度大きな値に対しては著しく減小する。このような値以下の n に対して $\Delta\beta_n L \ll 1$ で表わされるくらい振動が小さいとする。このような条件のもとで、式(6.24) の $\exp(-j\Delta\beta_n L)$ をべき級数に展開してその第2項までとり、

$$\sum_{n=0}^\infty C_n C_n^* = 1 \quad (6.25)$$

の関係を用いると、無限級数は収束して、姿態変換率 η はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - |A_0|^2 = 1 - \left| \sum_{n=0}^\infty C_n C_n^* e^{-j\Delta\beta_n L} \right|^2 \\ &\cong \sum_{n=0}^\infty C_n C_n^* (\Delta\beta_n L)^2 - \left[\sum_{n=0}^\infty C_n C_n^* (\Delta\beta_n L) \right]^2 \\ &= (\kappa^2/g^2)^2 (\lambda L)^2 D_0(t) \end{aligned} \quad (6.26)$$

ここで、 $\kappa(0) = 2\pi/\lambda$,

$$t = |B_0 - 1|^2 / |B_0 + 1|^2 \quad (6.27)$$

$$D_0(t) = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^2 t(1+t)(1+9t)/(1-t)^4 \quad (6.28)$$

である。

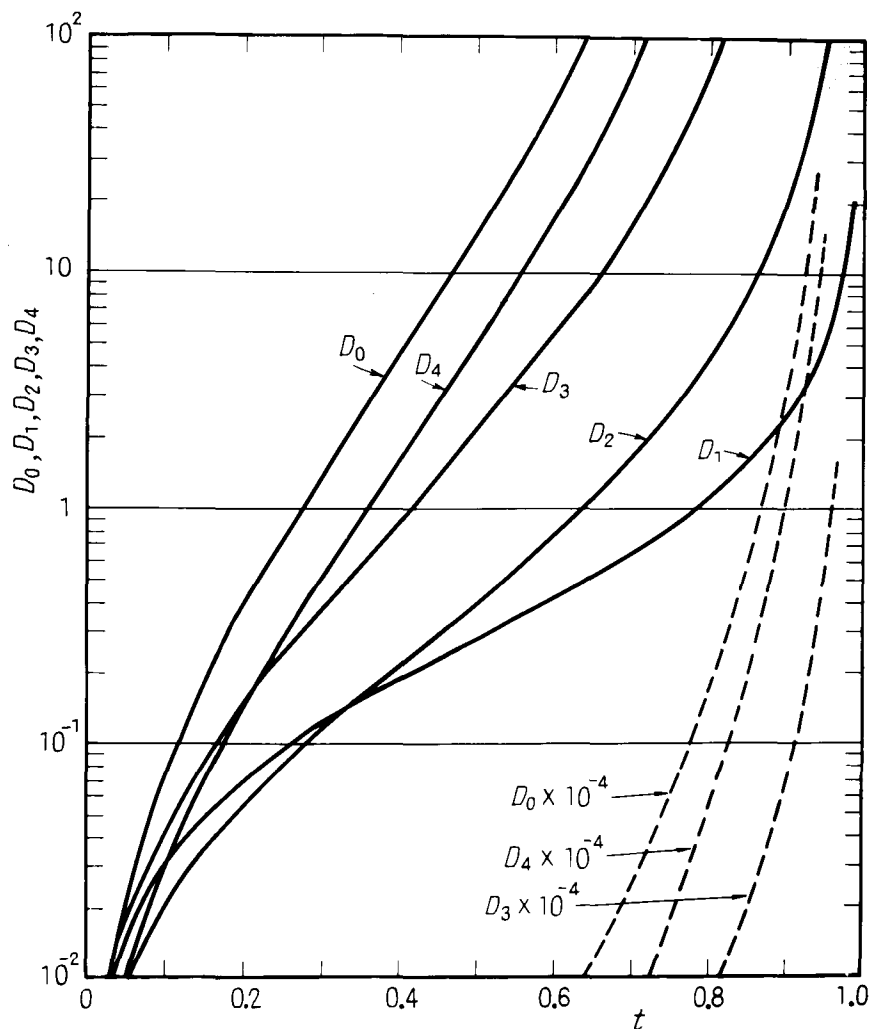


図6.7 式(6.28), (6.60) の関数 D_j ($j=0, 1, 2, 3, 4$)

t は入射条件を規格化して表わしたパラメータであり, この t と $D_0(t)$ との関係を図 6.7 に示す.

(ii) 発散散束の場合 (g^2 の符号が正)

$k=0$ でも, 集束系において存在したような固有状態は存在しない. しかし, $z=0$ において波面係数 $1/w_0^2$, ($w_0^2 = 1/gR(0)$) で入射したガウス波は次のような形のラゲール・ガウス波として z 方向に伝搬する. すなわち, 式(1.33)を用いて,

$$E_{0n}(r, z) = \phi_n^{(0)}(r, z; w_0) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (6.29)$$

$$\phi_n^{(d)}(r, z; w_0) = \frac{1}{n! \sqrt{\pi} w} L_n\left(\frac{r^2}{w^2}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w^2} + j \frac{R(0)}{R}\right) r^2} \\ \times e^{-jR(0)z + j(2n+1)\tan^{-1}\tanh qz} \quad (6.30a)$$

$$w^2 = w_0^2 \cosh 2gz \quad (6.30b)$$

$$R = R(0) w_0^2 \coth 2gz \quad (6.30c)$$

さて, $R \neq 0$ のときには, 伝搬状態を

$$E_n(r, z) = \phi_n^{(d)}(r, z; w_0) e^{-j\Delta\beta_n z} \quad (6.31)$$

に書けるものとして, 式(6.31)を式(6.13)に代入して $\Delta\beta_n$ を求める. このようなレンズ状媒質の長さ L の間で平均された $\Delta\beta_n$ は次のように表わされる.

$$\Delta\beta_n = \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh 4gL}{4gL} + 1 \right] \frac{R^4}{R(0)q^2} (3n^2 + 3n + 1) \quad (6.32)$$

さて, 入射ビーム式(6.16)を前と同じように $\phi_n^{(d)}(r, 0; w_0)$ で展開する.

$$E(r, 0) = \frac{E_0}{\sqrt{\pi} w_{in}} e^{-\frac{1}{2} P(0) r^2} = E_0 \sum c_n \phi_n^{(d)}(r, z; w_0) \quad (6.33)$$

ここでも c_n は式(6.18)で表わされる. 照射を受けた伝搬波は式(6.31)のように伝搬するものとすれば, $z=L$ における電界は

$$E(r, L) = E_0 \sum c_n \phi_n^{(d)}(r, L; w_0) e^{-j\Delta\beta_n L} \quad (6.34)$$

一方, $R=0$ のときには, 式(6.34)はガウス波に再合成されて

$$E_0(r, L) = E_0 \sum c_n \phi_n^{(d)}(r, L; w_0) = E_0 \psi_0^{(d)}(r, L) e^{-jR(0)L}$$

と表わされる. ただし,

$$\psi_0^{(d)}(r, L) = \frac{1}{\sqrt{\pi} w(L)} e^{-\frac{1}{2} P(L) r^2} e^{+j\varphi_0^{(d)}(L)} \quad (6.35)$$

ここでも、 $P(L)$ は光散束の性質に応じて $z=L$ において変換された波面係数であり、 $\varphi_n^{(d)}(L)$ は基本波の位相差を表わす定数である。

集束束のときと同じように、式 (6.35) の高次姿態

$$\psi_n^{(d)}(r, L) = \frac{1}{n! \sqrt{\pi} w(L)} L_n\left(\frac{r^2}{w(L)^2}\right) e^{-\frac{1}{2} P(L) r^2} e^{-jR(L)L + j(2n+1)\varphi_n^{(d)}(L)} \quad (6.36)$$

で $E(r, L)$ を展開する。

$$E(r, L) = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(d)} \psi_n^{(d)}(r, L) \equiv E'(r, L) \quad (6.37)$$

係数 $A_0^{(d)}$ を求めると、

$$\begin{aligned} A_0^{(d)} &= \int_0^{\infty} E'(r, L) \psi_0^{(d)*}(r, L) 2\pi r dr / |E_0|^2 \\ &= \int_0^{\infty} E(r, L) E_0^*(r, L) 2\pi r dr / |E_0|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n c_n^* e^{-j\Delta\beta_n L} \end{aligned} \quad (6.38)$$

ここから先は、集束束と全く同じようにして姿態変換率 $\eta^{(d)}$ を求めることができる。その結果、

$$\eta^{(d)} = (R + |g|^2)^2 (\lambda L)^2 f_0^2 D_0(t) \quad (6.39)$$

$$f_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh 4gL}{4gL} + 1 \right] \quad (6.40)$$

ただし、 $D_0(t)$ は式 (6.28) と同じものであり、図 6.7 に t との関係が示してある。 $f_0 > 1$ であるから、式 (6.26) と比較して $\eta < \eta^{(d)}$ である。これは、光散束の場合、集束束よりスポットサイズの増大する割合が大きいためと考えられる。

6.3.2 直角座標による解析

誘電率の変化が， z 軸と直角な x, y 方向で異なっている分布型集束素子の誘電率の分布 $\varepsilon(x, y)$ を次のように表わす。

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon(0) \left[1 + k_1^{(0)} x + k_2^{(0)} y + (g_1 x)^2 + (g_2 y)^2 + (k_1^{(0)} x)^3 + (k_2^{(0)} y)^3 + (k_1^{(0)} x)^4 + (k_2^{(0)} y)^4 + k_3^{(0)} x^2 y^2 + \dots \right] \quad (6.41)$$

この表不ど，その他にも $xy, x^2 y, \dots$ 等に比例する項が一般的には存在するわけであるが，実際のガスレンズについて考えてみた場合には，熱導体の構造や温度分布が設計通りでも，媒質の温度分布と誘電率分布と間の関係によって対称な偶数次の高次項が生ずるので，まずこのように本質的におこる項を検討する。

また，重力の影響でおこると思われる 1 次項については，式 (6.41) を変形して

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon'(0) \left[1 \mp g_1'^2 \left(x \mp \frac{k_1^{(0)}}{2g_1'^2} \right)^2 \mp g_2'^2 \left(y \mp \frac{k_2^{(0)}}{2g_2'^2} \right)^2 \right] \quad (6.42)$$

$$\varepsilon'(0) = \varepsilon(0) \left[1 \pm \frac{k_1^{(0)}}{4g_1'^2} \pm \frac{k_2^{(0)}}{4g_2'^2} \right] \quad (6.43a)$$

$$g_i'^2 = g_i^2 / \left[1 \pm \frac{k_1^{(0)}}{4g_1'^2} \pm \frac{k_2^{(0)}}{4g_2'^2} \right] \quad (i=1, 2) \quad (6.43b)$$

とおくと， z 軸にそって入射したガウス波は $x_{in} = -k_1^{(0)}/2g_1'^2$ ， $y_{in} = -k_2^{(0)}/2g_2'^2$ で異軸入射したものと等価になり，姿勢変換というよりはむしろ，ビームの中心位置の移動の効果の方が大きい。

したがって，ここでは式 (6.41) の 4 次の項までを取上げて主に検討する。このときの横方向電界 E に関する波動方程式は，式 (6.13) と同じように

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2(0) \left[1 \mp (g_1 x)^2 \mp (g_2 y)^2 + (k_1^{(0)} x)^4 + (k_2^{(0)} y)^4 + k_3^{(0)} x^2 y^2 \right] E = 0 \quad (6.44)$$

となる。ただし， $k(0) = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon(0)}$ である。

表6.2 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ の場合の固有状態, 伝搬状態 ; $E_{0,pg}(x, y, z)$

(I) 集束系 - 集束系 (II) 集束系 - 発散系 (III) 発散系 - 発散系

$$(I) \quad u_p(x; w_{01}) u_q(y; w_{02}) e^{-j k(0)z + j(p+\frac{1}{2})g_1 z + j(q+\frac{1}{2})g_2 z} \quad (6.45a)$$

$$(II) \quad u_p(x; w_{01}) v_q(y, z; w_{02}) e^{-j k(0)z + j(p+\frac{1}{2})g_1 z + j(q+\frac{1}{2})\tan^{-1} \tanh g_2 z} \quad (6.45b)$$

$$(III) \quad v_p(x, z; w_{01}) v_q(y, z; w_{02}) e^{-j k(0)z + j(p+\frac{1}{2})\tan^{-1} \tanh^{-1} g_1 z + j(q+\frac{1}{2})\tan^{-1} \tanh g_2 z} \quad (6.45c)$$

$$u_p(x; w_{0i}) = \frac{1}{[2^p p! \sqrt{\pi} w_{0i}]^{\frac{1}{2}}} H_p\left(\frac{x}{w_{0i}}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{w_{0i}}\right)^2} \quad (6.46a)$$

$$w_{0i}^2 = 1 / k(0) g_i \quad (6.46b)$$

$$v_p(x, z; w_{0i}) = \frac{1}{[2^p p! \sqrt{\pi} w_{0i}]^{\frac{1}{2}}} H_p\left(\frac{x}{w_{0i}}\right) e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{w_{0i}^2} + j \frac{k(0)}{R_i}\right] x^2} \quad (6.47a)$$

$$w_i^2 = w_{0i}^2 \coth 2g_i z, \quad R_i = k(0) w_{0i}^2 \coth 2g_i z, \quad w_{0i}^2 = 1 / k(0) g_i \quad (6.47b)$$

さて, 式(6.44)で $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ ^{#1)} の場合には, 媒質の伝搬状態は表6.2に示すようなエルミート・ガウス波である. 6.3.1 で述べたように, 集束系の場合と, 発散系の場合とでは用いる関数系が異なっている. 表に示すような3つの場合に分けて状態変換率を求めよう.

(i) x, y 方向ともに集束系の場合 (g_1^2, g_2^2 の符号がいずれも負)

まず, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ の理想的な場合は, 方程式(6.44)は固有解として表6.2の式(6.45a)のような形をもつことは1章で述べた.

さて, $k_i \neq 0$ のとき, 4次項が2次項に比べて非常に小さいときには, 円筒座標の場合と同じく振動的な固有解が得られる. その0次振動で, 伝搬定数 β_{pg} のみが増化するものとしたとき, 固有解として次式が得られる.

$$E_{pg}(x, y, z) = u_p(x; w_{01}) u_q(y; w_{02}) e^{-j(\beta_{pg} + \Delta\beta_{pg})z} \quad (6.48)$$

#1) 以下4次項について検討する添字(4)は省略する

である。

$$\left. \begin{aligned} \beta_{rs} &= R(0) - (p+\frac{1}{2})g_1 - (q+\frac{1}{2})g_2 \\ \Delta\beta_{rs} &= \frac{3}{4} \frac{R_1^4}{R(0)g_1^2} p^2 + \frac{3}{4} \frac{R_2^4}{R(0)g_2^2} q^2 + \frac{R_3^4}{2R(0)g_1g_2} pq \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

いま、このような媒質の $z=0$ 点に、 x, y 方向の波面係数が $P_1(0), P_2(0)$ で表わされる TEM₀₀ 状態のガウス波が入射した場合、これを固有状態で展開すると

$$\begin{aligned} E(x, y, 0) &= \frac{E_0}{\sqrt{\pi w_{in,1} w_{in,2}}} e^{-\frac{1}{2} P_1(0) x^2 - \frac{1}{2} P_2(0) y^2} \\ &= E_0 \sum_{p=0}^{\infty} C_{2p,1} u_{2p}(x; w_{0,1}) \sum_{q=0}^{\infty} C_{2q,2} u_{2q}(y; w_{0,2}) \end{aligned} \quad (6.50)$$

ここで、 $i=1, 2$ として

$$P_i(0) = 1/w_{in,i}^2 + jR(0)/R_{in,i} \quad (6.51)$$

$$C_{2p,i} = \sqrt{\frac{w_{0,i}}{w_{in,i}}} \sqrt{\frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}} \sqrt{\frac{2}{1+B_{0,i}}} \left(\frac{1-B_{0,i}}{1+B_{0,i}} \right)^p \quad (6.52)$$

$$B_{0,i} = w_{0,i}^2 P_i(0) = w_{0,i}^2 / w_{in,i}^2 + jR(0) w_{0,i}^2 / R_{in,i} \quad (6.53)$$

このガウス波が振動をうけた媒質中を $z=L$ まで伝搬すると、そこでの電界 $E(x, y, L)$ は

$$E(x, y, L) = E_0 \sum_{p=0}^{\infty} C_{2p,1} u_{2p}(x; w_{0,1}) \sum_{q=0}^{\infty} C_{2q,2} u_{2q}(y; w_{0,2}) e^{-j(P_{2p,2g} + \Delta\beta_{2p,2g})L} \quad (6.54)$$

となる。すべての R が 0 のときは、式 (6.54) は再びガウス波に合成され、これを $E_0(x, y, L)$ とおくと、次のように表わすことができる。

$$E_0(x, y, L) = E_0 \sum_{p=0}^{\infty} C_{2p,1} u_{2p}(x; w_{0,1}) \sum_{q=0}^{\infty} C_{2q,2} u_{2q}(y; w_{0,2}) e^{-j\beta_{rs}L}$$

$$= E_0 U_{0,1}(x, L) U_{0,2}(y, L) e^{-j\beta(0)L} \quad (6.55)$$

たてし,

$$U_{0,i}(x, L) = \frac{1}{[\sqrt{\pi} w_i(L)]^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} P_i(L) x^2 + j \frac{1}{2} \varphi_i(L)} \quad (6.56)$$

$P_i(L)$ は $P_i(0)$ が $z=L$ 点に変換された波面係数で, $w_i(L)$ はそのべきのスポットサイズである. また $\varphi_i(L)$ は $z=0, L$ 間の基本波の位相差に相当する量である.

次に, 式(6.54)の $E(x, y, L)$ を $k_i=0$ の伝搬波である式(6.56)の高次姿態

$$U_{p,i}(x, L) = \frac{1}{[2^p p! \sqrt{\pi} w_i(L)]^{\frac{1}{2}}} H_p\left(\frac{x}{w_i(L)}\right) e^{-\frac{1}{2} P_i(L) x^2 + j(p+\frac{1}{2})\varphi_i(L)} \quad (6.57)$$

を展開して, これを $E'(x, y, L)$ とおく.

$$\begin{aligned} E(x, y, L) &= E_0 \sum_{p=0}^{\infty} A_{p,1} U_{p,1}(x, L) \sum_{q=0}^{\infty} A_{q,2} U_{q,2}(y, L) e^{-j\beta(0)L} \\ &= E'(x, y, L) \end{aligned} \quad (6.58)$$

ここで, $U_{p,i}$ もまた直交関数であるから, 式(6.50), (6.58), (6.54)より

$$\begin{aligned} A_{0,1} A_{0,2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E'(x, y, L) E_0^*(x, y, L) dx dy / |E_0|^2 \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} |C_{2p,1}|^2 \sum_{q=0}^{\infty} |C_{2q,2}|^2 e^{-j\Delta\beta_{p,q}L} \end{aligned} \quad (6.59)$$

したがって, 円筒座標のところで述べた近似を用いると, 姿態変換率は

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - |A_{0,1} A_{0,2}|^2 \\ &\cong 1 - \sum_{p=0}^{\infty} |C_{2p,1}|^2 \sum_{q=0}^{\infty} |C_{2q,2}|^2 (\Delta\beta_{2p,2q} L)^2 - \left\{ \sum |C_{2p,1}|^2 \sum |C_{2q,1}|^2 (\Delta\beta_{2p,2q} L) \right\}^2 \\ &= (\lambda L)^2 \left[\left(\frac{R_1^*}{g_1^2} \right)^2 f_1^2 D_4(t_1) + \left(\frac{R_2^*}{g_2^2} \right)^2 D_4(t_2) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{R_3^*}{g_1 g_2} \right)^2 f_3^2 \{ D_2(t_1) D_2(t_2) - (D_1(t_1) D_1(t_2))^2 \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{R_1^* R_3^*}{g_1^2 g_2} f_1 f_2 D_3(t_1) D_1(t_2) + \frac{R_1^* R_3^*}{g_1 g_2^2} f_2 f_3 D_1(t_1) D_3(t_2) \right] \end{aligned} \quad (6.60)$$

ただし, $i = 1, 2$ として

$$t_i = 1 - B_{0,i}^2 / (1 + B_{0,i}^2) \quad (6.61)$$

$$D_1(t) = (1/2\sqrt{\pi}) t / (1-t), \quad D_2(t) = (1/4\pi) t(t+2)/(1-t)^2$$

$$D_3(t) = 3/(2\pi^{3/2}) t(1+2t)/(1-t)^3$$

$$D_4(t) = 3/(2^{3/2}\pi) t(1+7t+4t^2)/(1-t)^4 \quad (6.62)$$

で表わされ, 集束系-集束系の場合, $f_1 = f_2 = f_3 = 1$ である. ここで, $D_i(t)$ と t の関係を図6.7に示す.

なお, 式(6.44)で, $g_1 = g_2 = g$, $R_1^* = R_2^* = R_3^*/2 = R^*$, $t_1 = t_2 = t$ の場合には, 姿態変換率を η^0 とおくと

$$\eta^0 = \left(\frac{R^*}{g^2}\right)^2 (\lambda L)^2 \left(\frac{3}{2\pi}\right)^2 t(1+8.78t+7.12t^2)/(1-t)^4 \quad (6.63)$$

となる. これを円筒座標で求めた式(6.28)

$$\eta^0 = \left(\frac{R^*}{g^2}\right)^2 (\lambda L)^2 \left(\frac{3}{2\pi}\right)^2 t(1+10t+9t^2)/(1-t)^4 \quad (6.64)$$

となる. $t \ll 1$ の姿態変換率の非常に小さいときには両者はほぼ等しくなる.

(ii) 発散系を含む場合

発散系を含む場合, 集束系のような固有姿態は存在しないが, 伝搬姿態としては表6.2の(II), (III)のようなヤコビ・エルミート・ガウス型になる. ただし, $z=0$ におけるスポットサイズは $w_{0,i} = 1/\sqrt{R(0)g_i}$ に選んである. すなわち, $v_p(x, 0; w_{0,i}) = u_p(x; w_{0,i})$ である. v_p もやはり完全正規直交系である.

ここでも6.3.1(ii)と同じように, 伝搬姿態 v_p を用いて0次近似による伝搬定数の変化 $\Delta\beta_{p,i}$ を求めると,

$$\Delta\beta_{p,i} = \frac{3}{4} \frac{R_i^*}{R(0)g_i^2} f_1 p^2 + \frac{3}{4} \frac{R_i^*}{R(0)g_i^2} f_2 g^2 + \frac{R_i^*}{2R(0)g_i g_2} f_3 p g \quad (6.65)$$

表6.3 式(6.60)における f_1, f_2, f_3

入方向-出方向	f_1	f_2	f_3
(I)集束系-集束系	1	1	1
(II)集束系-発散系	1	$\frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sinh 4 g_2 L}{4 g_2 L} \right]$	$\frac{\sinh 2 g_2 L}{2 g_2 L}$
(III)発散系-発散系	$\frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sinh 4 g_1 L}{4 g_1 L} \right]$	$\frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sinh 4 g_2 L}{4 g_2 L} \right]$	$\frac{1}{2} \left[\frac{\sinh 2(g_1 + g_2)L}{2(g_1 + g_2)L} + \frac{\sinh 2(g_1 - g_2)L}{2(g_1 - g_2)L} \right]$

となる。ただし、 f_1, f_2, f_3 は $0 \leq x \leq L$ で表めたもので、各々の場合表6.3のよう値をとる。

そこで、 $x=0$ における入射波式(6.50)が、 $x=L$ まで伝搬したときの姿態変換率 $\eta^{(d)}$ は、伝搬姿態と伝搬定数に発散系のものを用いれば、式(6.60)の形に書ける。

6.3.3 層流型ガスレンズの姿態変換率

層流型ガスレンズの誘電率分布は、3章で述べたとおり層流気体の性質を用いて式(3.3)のように4次変化項まで求めてある。たゞこの型のガスレンズでは、 x 方向に対する分布も一様ではないので、平均的な姿態変換率を求めることになる。

式(3.3)から4次の係数 ϵ_4 を求めると次のようになる。

$$R^4 = \frac{T_0 (T_w - T_0) \theta_4(z)}{\{T_w - (T_w - T_0) \theta_0(z)\}^2} \cdot \frac{\epsilon_s - 1}{a^4} \quad (6.66)$$

ただし、 T_w, T_0 はそれぞれ層流型ガスレンズの管と流入気体の温度、 a は管の半径、 $\theta_0(z), \theta_4(z)$ はそれぞれ式(3.3)に与えられている x の関数である。この式と式(3.6)から R^4/g^2 を求めると、

$$\frac{R^4}{g^2} = \frac{\theta_4(z)}{|\theta_2(z)|} \cdot \frac{1}{a^2} \quad (6.67)$$

となる。ここで、 $|\theta_4(z)/\theta_2(z)|$ の値を式(3.3)から求めて図6.8に示す。横軸は管長 x に関するパラメータで、 η は式(3.4)に与えられている。

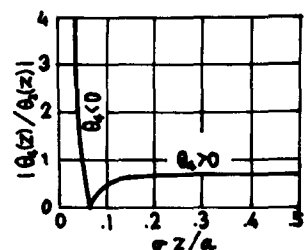


図6.8 規格化した x に対する $|\theta_4(z)/\theta_2(z)|$ の変化

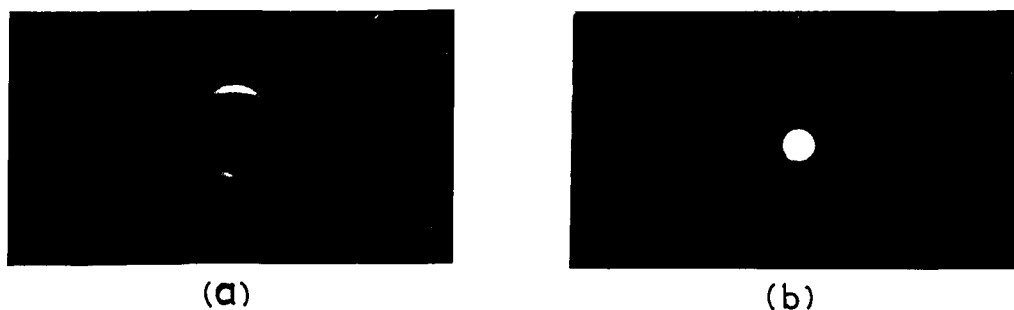


図6.9 層流型ガスレンズによって姿態変換をうけたビームの強度分布

(a) 強く姿態変換をうけたビーム，この場合 w_{in}/w_0 は1よりも非常に大きい

(b) w_{in}/w_0 を1に近づけることによって，姿態変換を小さくされたビーム。

さて，長さ L のガスレンズに対する姿態変換率を求めるのであるが， θ_1/θ_2 が互に関数であるために，この間における $|\theta_1/\theta_2|$ の平均値を Θ_m とおいて，平均値を姿態変換率 η_m を求める．式(6.26)より，

$$\eta_m = \Theta_m^2 \left(\frac{\lambda L}{a^2} \right)^2 D_0(t) \quad (6.68)$$

このように，姿態変換率はガスレンズの形を表わすフレネル数の2乗に逆比例している。

層流型ガスレンズを通過して姿態変換されたビームの強度分布の1例を図6.9に示す．ここに用いたガスレンズについては，くわしくは3章で述べたが， $a^2/\lambda L = 67$ ， $\Delta T/T_0 = 0.3$ ，で1気圧の空気をを用いている．入射ビームは，TEM₀₀ 姿態のガスレーザー光である．図6.9(a)では， w_0 をこのガスレンズの平均的な固有スポットサイズ ($= 1/\sqrt{k(10)g_{mean}}$) とすると， $w_{in}/w_0 = 1/0.17$ で式(6.27)における t は約0.89， $D_0(t) \cong 0.5 \times 10^5$ ， $\Theta_m^2 \cong 1$ ， $(\lambda L/a^2)^2 = 2.2 \times 10^{-4}$ ，したがって $\eta_m > 1$ となって振動の範囲をこえてしまう．ところが，光学レンズによってビームを小さくして入射させる図(b)の場合には， $w_{in}/w_0 = 0.34/0.17$ ， $t = 0.36$ ， $D_0(t) \cong 3$ ，したがって $\eta_m \cong 10^{-3}$ となり，強度分布からもわかる通り，姿態変換を小さくすることができた。

定性的ではあるが，姿態変換率は入射条件によってかわり， w_{in} を固有スポットサイズに近づけることによって軽減できることが確かめられた。

6.3.4 双曲線型ガスレンズの姿態変換率

双曲線型ガスレンズの2次, 4次の係数は式(4.5)で求められているので

$$g_1^2 = -g_2^2 = (\epsilon_r - 1) / \epsilon_r \cdot \{ \Delta T / (T_0 a^2) \} \quad (6.69a)$$

$$R_1^4 = R_2^4 = -\frac{1}{2} R_3^4 = (\epsilon_r - 1) / \epsilon_r \cdot \{ \Delta T / (T_0 a^2) \}^2 \quad (6.69b)$$

とおくことができる。また, 8章で述べるように, この型のガスレンズを用いる導波系の伝送波は, ガスレンズの中央部で平面位相であり ($R_{in,1} = \infty$), スポットサイズは集束方向の方が発散方向に比べて十分大きい ($w_{in,1} > w_{in,2}$)。したがって, 姿態変換率を表わす式(6.60)において $D_4(t_1)$ の項が最も寄与が大きくなる。ゆえに, 式(6.69)を(6.60)に代入し第1項だけを取り上げると

$$\eta \cong \left(\frac{\Delta T}{T_0} \right)^2 \left(\frac{\lambda L}{a^2} \right)^2 D_4(t_1) \quad (6.70)$$

ただし, 長さ L のガスレンズを考慮しており, 入射条件としては

$$t_1 = \frac{(w_{0,1}^2 / w_{in,1}^2 - 1)^2}{(w_{0,1}^2 / w_{in,1}^2 + 1)^2} \quad (6.71)$$

ここで, $w_{in,1} / w_{0,1}$ をパラメータとして, フレネル数に相当する $a^2 / \lambda L$ と η の関係を図6.10に示す。ただし, $\Delta T / T_0 = 2.5 / 293$ の場合である。

双曲線型ガスレンズでは, 図6.10からわかるように姿態変換率が非常に小さく, 4章で述べた集束性の測定の際にも, 層流型にみられたようなビームの干渉じまは見られなかった。

なお, この型のガスレンズの媒質に, $\epsilon = AT + B$, (A, B は定数, T は絶対温度) なるガラスを用いると, 4次変換項による姿態変換は理論的には零にすることができる。

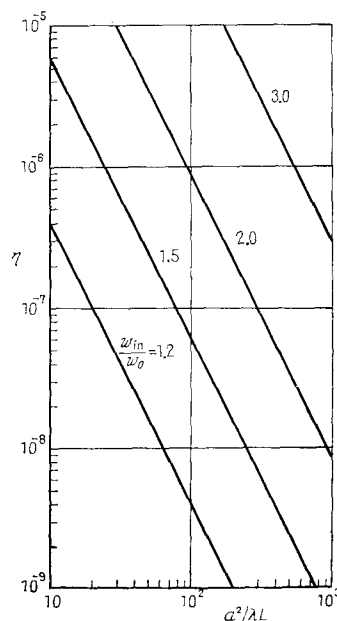


図6.10 双曲線型ガスレンズの姿態変換率

6.4 集中型集束素子における姿態変換

導波素子としての薄肉光学レンズや反射鏡にも，製作精度による面のゆがきによって姿態変換が生ずる．ここでは，集中型集束素子が入射ガウス波と共軸で，かつ垂直におかれた場合について考える．姿態変換の原因としては，レンズや反射鏡の曲面がレンズ作用をなす半径方向 r に関する2次変化項のほか，偶数次の高次変化項を含んでいる場合を考える．これは光学における球面収差に相当している．

一斉，奇数次変化項を含む場合には，入射ビームも偏光させる効果の大きいことを後に示す．

6.4.1 曲面の偶数次変化項による姿態変換

まず，図6.11(a)のように，通過したガウス波が

$$\frac{k}{2f} r^2 + k(n-1) a_{2m} r^{2m} \quad (6.72)$$

($m = 2, 3, 4, \dots$)

だけの位相変化をうける場合を考える．ただし， $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ， f はそれぞれレンズの焦点距離ならびに屈折率で，レンズ面の曲率半径を R_1 , R_2 とすると

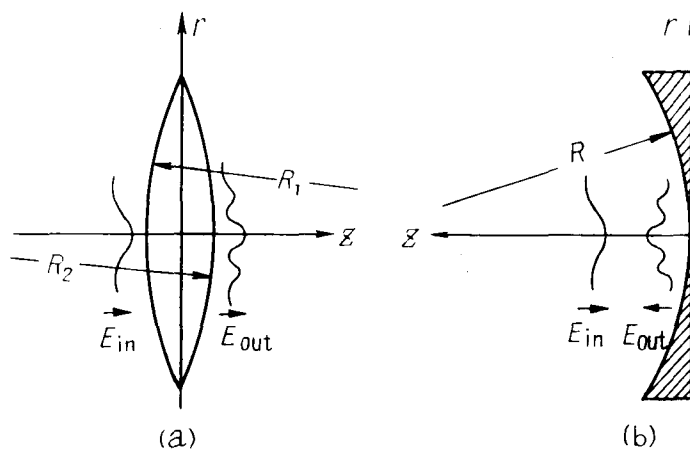


図6.11 光学レンズ，反射鏡における姿態変換

$$1/f = (n-1) (1/R_1 + 1/R_2) \quad (6.73)$$

が表わされる．また $a_{2m} r^{2m}$ は面が放物面からずれていることを示す4次以上の偶関数で， a_1 項に比べて小さいものとする．

このような面をもつ光学レンズに， z 軸にそってガウス波

$$E_{in} = \frac{E_0}{\sqrt{\pi} w_{in}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{w_{in}^2} + j \frac{R}{R_{in}} \right] r^2} \quad (6.74)$$

が入射した後、レンズを通過した後の電界 E_{out} にスポットサイズの変化は薄肉であるためにならと考えると、

$$E_{out} = \frac{E_0}{\sqrt{\pi} w_{in}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{w_{in}^2} + jR \left(\frac{1}{R_{in}} - \frac{1}{f} \right) \right] r^2 + jR(n-1) a_{2m} r^{2m}} \quad (6.75)$$

となる。 $a_{2m}=0$ であれば、 E_{out} は波面の曲率だけが変化した E_{in} と同じ状態の波になるが、 a_{2m} が存在すると、波面がガウス波のそれからずれ、そのために波のエネルギーの一部が高次のラゲール・ガウス波に変換されると考える。

まず、入射波式(6.74)に対する軸対称のラゲール・ガウス状態と

$$\psi_L(r) = \frac{1}{L! \sqrt{\pi} w_{in}} L_L \left(\frac{r^2}{w_{in}^2} \right) e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{w_{in}^2} + j \left(\frac{R}{R_{in}} - \frac{1}{f} \right) \right] r^2} \quad (6.76)$$

とおく。 $L_L(x)$ は 1 章で述べたラゲール多項式である。すると、 E_{out} は

$$E_{out} = E_0 \psi_0(r) e^{jR(n-1) a_{2m} r^{2m}} \equiv E'(r) \quad (6.77)$$

とかける。一斉、 E_{out} と ψ_L を用いて展開すると、

$$E_{out} = E_0 \sum_{L=0}^{\infty} A_L \psi_L(r) \quad (6.78)$$

ここで、展開係数 A_L は L 次の高次状態へ変換される電界の大きさを表わし、 ψ_L の直交性から求めることができる。

さて、 $a_{2m} \neq 0$ の場合の E_{out} の $L=0$ に対する係数 A_0 は、式(6.78)、(6.77)より求められ、次式のようになる。

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_0^{\infty} E_{out} \psi_0^*(r) 2\pi r dr / |E_0|^2 = \int_0^{\infty} E'(r) \psi_0^*(r) 2\pi r dr / |E_0|^2 \\ &= \frac{1}{\pi w_{in}} \int_0^{\infty} e^{jR(n-1) a_{2m} r^{2m}} e^{-\left(\frac{r}{w_{in}}\right)^2} 2\pi r dr \end{aligned} \quad (6.79)$$

この式の被積分関数は、 $r \gg w_{in}$ の領域では、ガウス項のために急激に小さくなり積分に寄与しなくなる。したがって、導波束を構成してなる $r \geq w_{in}$ では、 a_{2m} が微小量であるために実質的に $jR(n-1)a_{2m}r^{2m} \ll 1$ とおける。そこで、

$$e^{jR(n-1)a_{2m}r^{2m}} \cong 1 + jR(n-1)a_{2m}r^{2m} + \frac{1}{2}\{jR(n-1)a_{2m}r^{2m}\}^2 \quad (6.80)$$

と展開する。この近似の範囲では、式(6.79)は積分できて A_0 が求められる。したがって、 $2m$ の次数の面に対する、0次以外のラゲール・ガウス波へ変換される電力の割合は、

$$\eta_{2m} = 1 - |A_0|^2 = [R(n-1)a_{2m}]^2 w_{in}^{4m} [(2m)! - m!^2] \quad (6.81)$$

となる。

次に具体的な例について考えてみよう。放物面ではすべての $a_{2m} = 0$ となり、一方球面の場合には4次の項が主項になる。また、製作精度のゆるさをすべて4次項と考え、その大きさを片面について δ とおくと、姿態変換率 η_4 は

$$\eta_4 = 20 [R(n-1)a_4]^2 w_{in}^8 \quad (6.82)$$

$$a_4 = \begin{cases} 1/8R^3 + 1/8R^3 + 2\delta & (\text{球面レンズ}) \\ 2\delta & (\text{放物面レンズ}) \end{cases} \quad (6.83)$$

普通のレンズ面では $\lambda/10$ 程度以下の凹凸をもつものとされているので、半径5cmのレンズの周辺で最大 $\lambda/10$ の4次変動があるものとするれば、 $\delta = 10^{-2}$ となる。この δ を用いて、一つの面についての姿態変換率 η と、レンズの曲率半径 R_1 ($R_2 \rightarrow \infty$) との関係と w_{in} をパラメータとして図6.12に示す。

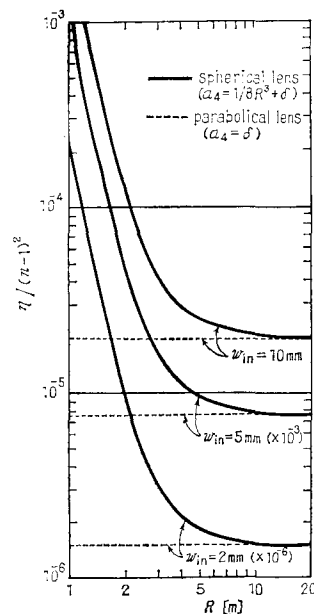


図6.12 光學レンズ、反射鏡の姿態変換率 η と曲率半径 R との関係。 n は屈折率で、反射鏡の場合には $n=2$ とおく。
($R_1=R$, $R_2=\infty$, $\delta=10^{-2}$).

また，図6.11の反射鏡の垂直入射に対しては $n=2$ とおけば，式(6.72)は反射鏡についての位相変化を表わすから，レンズについての諸関係で， $n=2$ とすることによって反射鏡についての姿態変換率を求める。

なお，凹レンズ，凸面鏡の場合には，面の曲率は負であり，式(6.73)で $f < 0$ とおけばよく，式(6.82)以下の結果はそのまゝ適用できる。

6.4.2 曲面が奇数次の変化項を含む場合の影響

いままで，曲面が偶数次の変化項をもつ場合について検討したが，ここではそのほかに，例えば x 方向に関して x の奇数次で変化している項がどのような影響をおよぼすかを調べる。

式(6.72)に対応して，レンズを通過するガウス波のうける位相変化量が

$$j \frac{k}{2f} x^2 + jk(n-1) [a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots] \quad (6.84)$$

で表わされるようなレンズ面を考える。ただし，各係数は両面の影響を含んでゐる。ここでは，これら奇数次のうち，1次と3次の項の影響について調べる。

(i) 1次項の影響

いま， a_1 以外の係数は全て0の場合を考える。図6.13のように $z=0$ における入射ガウス波(x 方向)を

$$E_{in} = \frac{E_0}{[\sqrt{\pi} w_{in}]^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} P_{in} x^2} \quad (6.85)$$

とおく。ただし， P_{in} は入射の波面係数で，スポットサイズは w_{in} である。このビームが1次歪をもったレンズを通過した後には，

$$E_{out} = \frac{E_0}{[\sqrt{\pi} w_{in}]^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} (P_{in} - \frac{1}{f}) x^2 + jk(n-1) a_1 x} \quad (6.86)$$

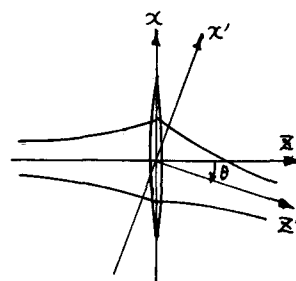


図6.13 1次歪のある
レンズによる光路の変換

となる。次に， z 軸に対して θ だけ回転した $x'-z'$ 座標に関するエルミート・ガウス関数

$$U_p(x') = \frac{1}{[2^p p! \sqrt{\pi} w_{in} \sec \theta]^{\frac{1}{2}}} H_p\left(\frac{x}{w_{in} \sec \theta}\right) e^{-\frac{1}{2}(P_{in} - \frac{1}{2}) \cos^2 \theta x'^2} \quad (6.87)$$

を考え，これで E_{out} を展開する。

$$E_{out} = E_0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p U_p(x') \quad (6.88)$$

関数の直交性より A_0 を求めると，

$$A_0 \cong 1 - \left\{ \frac{1}{2} k w_{in}^2 \{a_1(n-1) - \tan \theta\} \right\}^2 \quad (6.89)$$

となり，

$$\theta = \tan^{-1} (n-1) a_1 \quad (6.90)$$

の角度方向では， $A_0 \cong 1$ とすることが出来る。このことは，1章において述べた，式(1.37)の形に表わしたガウス波に含まれる光線が x' 方向に最も多く存在するという見方と矛盾するものではない。

(ii) 1次項および3次項の影響

次に，式(6.84)において， $a_1 \neq 0$ ， $a_3 \neq 0$ としたとき，同じように θ だけ回転した座標で観測した姿態変換率 $\eta = 1 - |A_0|^2$ を，式(6.88)の展開係数 A_n から求めると次のようになる

$$\eta \cong \frac{1}{2} k^2 w_{in}^2 \{(n-1)a_1 - \tan \theta\}^2 + \frac{3}{2} k^2 w_{in}^4 (n-1)a_3 \{(n-1)a_1 - \tan \theta\} + \frac{15}{8} a_3^2 (n-1)^2 k^2 w_{in}^6 \quad (6.91)$$

この値は $\theta_m = \tan^{-1} [(n-1)a_1 + 3/2 (n-1)a_3 w_{in}^2]$ の角度において最小値

$$\eta_m \cong \frac{3}{4} k^2 w_{in}^6 a_3^2 (n-1)^2 \quad (6.92)$$

をとる。

6.5 光ビーム導波系における姿態変換

図6.14のように、集束系と発散系とが交互に配置された導波系の姿態変換について考える。このような導波系で伝送されるビームのスポットサイズは、集束系の中央部で最大値 s_c をとり、発散系の中央部で最小値 s_d をとる。そして、これらの位置では位相面は平面になっている。ところで、図6.7はスポットサイズの増加につれて急激に姿態変換率が増加することを表わしている。

したがって、 $s_c > s_d$ であるから、

集束系における姿態変換率は発散系のそれと比べてかなり大きいので、一周期にわたってみると集束系の姿態変換率が支配的になっている。こうしたことを念頭において、図6.14 (b) (c) のような二つの例について姿態変換率を求めてみる。

(i) 双曲線型ガスレンズを用いる導波系

図6.14 (b)は、双曲線型ガスレンズを間隔 l をもって周期的に配置したもので、ガスレンズの温度差 $2\Delta T$ と軸方向の間隔 l を決めると、集束系中央部のスポットサイズ s_c を極小にする導体間隔 $2a$ とガスレンズの長さ l_g が求まる。このとき、式(6.70)において $L = l_g$ 、式(6.71)において $t_1 \approx (\omega_0^2/s_c^2 - 1)^2 / (\omega_0^2/s_c^2 + 1)^2$ とみると、図6.14 (b)のAB間の姿態変換率が求まる。1周期における値は、 x, y 方向あわせてこの値の2倍であるから、間隔 l を変化させたときの1Rm当りの姿態変換率 η がわかる。 $4T/T_0 = 2.5/293$ のときの値を図6.15に示す。

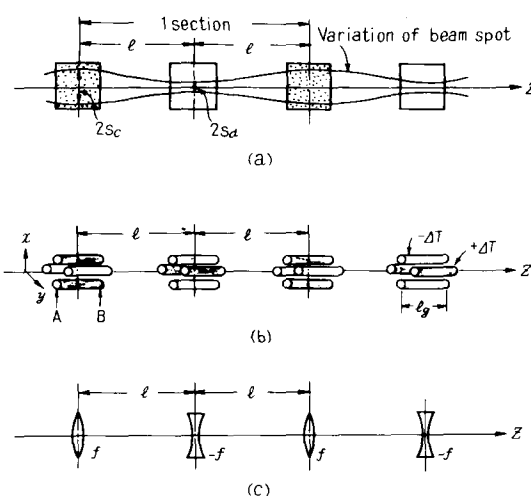


図6.14 光ビーム導波系の構成

- (a) 一般的な集束-発散系を構成したもの
- (b) 双曲線型ガスレンズを用いる構成
- (c) 凸凹レンズ列を用いる構成

iii) 凸凹レンズ列導波系

図6.14(c)は、凸と凹の光学レンズを交互に配置するもので、間隔 l を決めたときに凸レンズの位置でのスポットサイズ S_c が極小になる焦点距離 f の値、ならびにそのときの S_c の値は、9章に述べる方法によって求められ、次のようになる。

$$f = \frac{1+\sqrt{5}}{2} l \quad (6.93)$$

$$S_c \cong 1.82 \sqrt{\frac{l}{k}} \quad (6.94)$$

上式の S_c を用いて、式(6.82)において $w_{in} = S_c$ とすると、凸レンズ1個の姿態変換率が求まる。いま、 $n=1.5$ 、 $R_1=R_2=R$

としたときの、1 m 当りの姿態変換率 η と間隔 l との関係を図6.15に示す。理想的な放物面では η はもちろん0であるが、理想的な球面の場合には、 η は l^{-3} に比例して小さくなる。しかし、面精度のわるさを考慮すると、 l を大きくするにつれて S_c が式(6.94)のように大きくなり、そのために η は l^3 に比例して増加する。あまりに長焦点にしすぎるとかえって面精度の厳密さが要求されることを意味している。

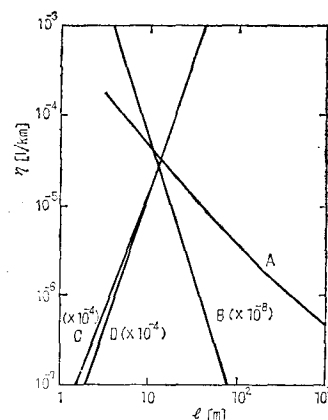


図6-15 導波系1 km 当りの姿態変換率 η と間隔 l との関係 ($\delta=10^{-3}$)

- A 双曲線形ガスレンズを用いた導波系 ($dT/T_0=2.5/293$)
- B 理想的な球面レンズを用いた導波系, $a_1=2/(8R^3)$
- C 面精度を考慮に入れた球面レンズによる導波系, $a_1=2/[(8R^3)+2\delta]$
- D 放物面レンズを用いた導波系, $a_1=2\delta$

6.6 本章のまとめ

6.6.1 本章で新たに得られた結果

光ビーム導波系における姿態変換の問題を新しく提起し、その影響や、各種の光ビーム導波系子についての姿態変換の大きさを算定して、次の結果を得た。

(i) 光ビーム導波系の伝送姿態は、TEM₀₀姿態のガウス波であるが、何らか

の原因によって、高次のエルミート・ガウス，あるいはラゲール・ガウス波が発生するような場合，これをビーム波の姿態変換と定義した。

(ii) 姿態変換のおこる主な原因は，次のようなものであることを指摘した。

① 導波素子が有限であるため

② 導波素子の面や屈折率が不完全であるため

(iii) 姿態変換の影響として，次のものがあげられることを指摘した。

① 口径が有限なために生ずる回折損失の増加

② 高次姿態の位相定数の差による遅延。

(iv) レンズ状媒質の誘電率分布に，2次以外の変化項が含まれている場合，特に最低偶数次の4次変化について，姿態変換率を求めた。この結果，姿態変換率は，レンズ状媒質を表わすフレネル数と，入射するビームの波面係数によってきまる。すなわち，入射ビームのスポットサイズが，媒質の固有スポットサイズに近づくとき，姿態変換率は小さくなる。

(v) 層流型ガスレンズの姿態変換率を平均値として求め，入射条件をかえてガスレンズによる集束ビームのパターンを観測する実験によって，(iv)に述べたことを定性的に立証した。

(vi) 双曲線型ガスレンズの姿態変換率を求め，この型のガスレンズは姿態変換率を非常に小さくできることを示した。

(vii) 薄肉レンズや反射鏡の曲面が放物面からわずかにずれている場合，特に偶数次の変化項がある場合には，波面がガウス波のそれと異なってくるためにやはり姿態変換がおこることを示し，姿態変換率を求めた。

(viii) 面の歪に奇数次の変化がある場合には，ビームを偏向させる効果の大きいことを示した。

6.5.2 結 論

(i) 光ビーム導波系に姿態変換がおこった場合の影響としては，回折損失が高次姿態発生によって増加することは明らかである。一方，パルスの遅延

に関してみると、現在の 150Mbit のクロックパルスを用いる光通信のシステムでは、例え $N_t=10$ 程度の時間分割多重化を行ったとしても、それほど問題にはならないであろう。ただし、将来において、固体レーザーや半導体レーザーで 10Gbit 以上のクロックパルスが実現でき、 $N_t=100$ 程度の多重化が行なえるようになれば、変換波による遅延が、5章で述べた異軸光線による遅延とともに問題になってくると思われる。

- (ii) レンズ面にランダムな面の凸凹があるような場合の姿勢変換と、それによっておこる損失の問題は、レンズの工作精度と関連して将来の重要な問題になると思われる。

7章 各種光ビーム導波素子の検討

1編では、導波素子を光ビーム導波系に用いる際に問題となる点について、理論的あるいは実験的な検討を行ってきた。本章では、1編の総括として残されている問題点に触れ、各種の光ビーム導波素子の比較検討を行う。

7.1 集束素子

集束素子の集束性は導波系の場合には、それほど強いものを必要としない。共焦点構成が集束素子上のスポットサイズを最も小さくできるので、ホフはこのように選ぶ。したがって、素子間隔 $2L$ を大きくしたい場合には必然的に長焦点のものが必要となる。また、素子による伝送損失、ビームに対する安定性等が重要な問題で、ここでは、このような問題点に関して、1編で行った議論をもとに検討する。

7.1.1 光学レンズ

ガラスを用いる光学レンズでは、短レンズで長焦点のものが得難い。報告されている実験のうち長焦点のものとしては、BTLのもの⁽¹¹⁾が $f \cong 70\text{m}$ 、Goubau⁽¹⁰⁹⁾のものが $f \cong 47\text{m}$ である。非常に長焦点のものでは、レンズの保持の仕方や、温度変化による面の歪が問題になってくる。しかし、光学器械では問題になる色収差については、いくつかの波長に対し焦点距離を補正した値で用いればよくあまり問題にならないだろう。

複数個のレンズを組みにする方法は、後に9章で述べるように、等面的な焦点距離を長くし、かつ偏向角を大きくできる特徴がある。図7.1の凸レンズの組みでは、 L を(b)の凸凹の粗みに対して小さくできないので、ビームの安定性は悪いが、11章で述べるように空間多重化⁽⁹⁶⁾に利用できる。

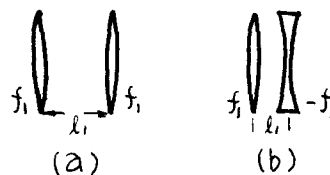


図7.1 組合せレンズ。

ガラスを用いるために反射損失は大きくなるが，反射損失を防ぐためには，誘電体多層膜が用いられ，現在のところレンズ1コ当り $0.02 \sim 0.05$ dB におさえられるが，経年変化による損失の増加は3年で $0.03 \sim 0.05$ dB であるといわれる⁽¹¹⁾。

7.1.2 反射鏡

放物面をもつ反射鏡は，光学レンズとともに重要な集束素子で，レンズの反射損失に比べて損失を小さくできる，波長に関係なく使用できるなどの利点があるので，赤外領域ではレンズにかわって使用される可能性もある。

焦点距離としては，約50mのものを用いたミヤトルパルス波の実験の報告がみられる⁽¹⁵⁾。

反射鏡では，角変動によるビームの安定性は悪くなる。長焦点化の目的とともに，2つの反射鏡を対にして用いる方法では，角変動の影響の1つを打消すことができる。（くわしくは9章に述べる）。しかし，2枚の反射鏡の間隔は，レンズ対よりも長くなるので，角変動による安定性では，レンズ対の方が優れている。

7.1.3 レンズ状媒質

気体の誘電率に分布をもたせたガスレンズでは，素子間隔がレンズの長さ d に比べて大きいときには，等価的な焦点距離 f_{eq} が考えられる。 g を式(17)に示すような集束性を表わすパラメータとすると，

$$f_{eq} \cong 1 / (g^2 d) \quad (7.1)$$

で表わされる。ホフウの動作状態で $g=0.1$ ， $d=1$ m 程度は得られるから， $f_{eq} \cong 100$ m が容易に得られる。層流型ガスレンズでは $f_{eq} \cong 20$ cm 程度までは実現できる。

ただ，実用的には，電力を必要とすること，曲がり変動に対するビームの

追従性が良くないこと，口径に制限があること（例えば，層流型ガスレンズでは1~2cm程度，双曲線型ガスレンズでは4~30mm程度），などの問題点が残されている。

最後に，これらの問題点をまとめて比較検討するために，各種導波素子に対して現在得られている数値例，特徴などを表7.1に示す。

表7.1 各種素子素子の比較検討

	名 称	焦点距離 f_{max}	損 失 (反射損)	姿 態 変 換	口 径 D_{max}	波 長 λ	安 定 性	電力消費
光学素子	単レンズ	70m	0.02~0.05 dB	放物面におよそ小	~100mm	可視，近赤外	良い	✓
	レンズ対	~500m	×2	"	"	"	角度動が影響を	✓
反射鏡	単反射鏡	50m	~10 ⁻⁴ dB	"	~100mm	可視~2400Å	極めて不安定	✓
	反射鏡対	~500m	×2	"	"	"	単反射鏡が良い	✓
ガスレンズ	層流型	100m以上	極めて小	かなり大きい	数mm~2cm	可視~近赤外	かなり悪い	有
	双曲線型	±100m以上	"	極めて小	数mm~3cm	"	"	有

7.2 偏向素子

導波系の曲がり部や，変調・復調，ビームの多重化などの際にビームを偏向させる偏向素子が必要である。

単レンズの軸外入射を利用してビームを曲がる際，ビームのレンズ軸からのずれを a ，焦点距離を f とすると，偏向角 δ は

$$\delta = a / f \quad (7.2)$$

が表わされ，長焦点のレンズで曲がり導波系をつくるのは難かしい。

7.1で述べたレンズ対と軸とずらして配置すると偏向角 δ は

$$\delta = 2a / f$$

となり， f を短かくすると単レンズよりも1けた～2けた大きくできる。

ビームを大きく曲げるには，反射鏡やプリズムを用いねばならないが，9章で述べるように，素子の角変動が直接ビーム変動に影響するので，設置精度をそれだけ正確にする必要がある。

7.3 光線変動抑制器

5章で述べたように，集束素子の位置変動によってビーム変動を生じ，損失の原因となるが，これを抑制するための光線変動抑制器⁽⁸⁴⁾ (Ray Oscillation Suppressor)には次のようなものが考えられる

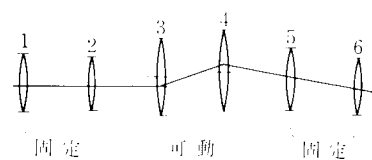
(i) 受動的なもの

- レンズの口径が有限であるための回折効果によるもの⁽⁶⁸⁾⁽⁹⁰⁾
- ガウス・モードフィルタによるもの (10章で述べる)

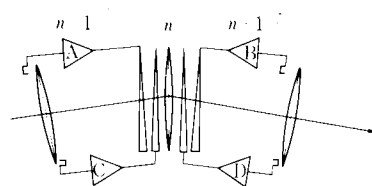
(ii) 自動ビーム光路安定器 (図7.2)

(Automatic Beam Path Controller)

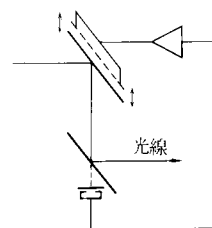
- レンズ位置を動かすもの⁽⁸³⁾
- フリズムを動かすもの⁽⁶⁶⁾
- 反射鏡を動かすもの⁽⁷⁸⁾
- 電気光効果を用いるもの



(a) レンズを動かすもの



(b) フリズムを動かすもの



(c) 反射鏡を動かすもの

結局，導波管の直線部では安定性の良い単レンズを用い，曲がり部では反射鏡があるには，レンズ対によってビームを偏向させ，そのときに生ずるビームの不安定性を受動的な方法，あるいは集中的に自動ビーム光路安定器によって損失の増加を防ぐというシステムになるであろう。

図7.2 自動ビーム光路安定器

2 編 光ビーム導波系に関する設計論的研究

光ビーム導波系に要求される問題点として、(i) 伝送損失が小さいこと、(ii) 曲がり部において、小さい曲率半径で曲げられ、かつ安定性のよい構成法を見つけること、(iii) 素子のランダムな位置変動や、素子偏差によって生ずるビームの不安定性を軽減する方法を開発すること、などが挙げられる。このような要求に対して導波系の構成を行なうには、特徴のある導波素子を用いることはもちろんであるが、導波系の設計に際して、(i') 回折損失をできるだけ小さくするようにパラメータの値を選ぶこと（本論文では、最適設計と呼んでいる）、(ii') 導波素子の位置変動によるビーム変動の算定を行って、許容される設置精度の目安を与える、などの考察が必要である。

本編では、上に述べた (ii)~(iii) の問題点の一部を解決する方法として、次のような導波系、すなわち

双曲線型ガスレンズを用いる導波系、 ← (i)

集束素子対を用いる導波系 ← (ii)

ガウス・モードフィルタをレンズと併用する導波系 ← (iii)

の提案を行い、(i') (ii') のような方針に従って設計に関する検討を行った。

8章 双曲線型ガスレンズを用いる導波系

本章では、低損失であることを特徴とする、ガスレンズ等のいわゆる分布型集束素子を用いる導波系の設計論について述べた。分布型集束素子のうち、4章で述べた双曲線型ガスレンズ^{#1)}は集束性もほぼ理論通りであり、軸方向の誘電率も一様であるなど設計に有利で、しかも常温で動作する静止型であるという持長があるため、本章では主にこの型のガスレンズを自由空間をはさんで周期的に配置する導波系について検討を行った。なお、ここで用いた方法によると、他の型の分布型集束素子にまで拡張することができる。

8.1 本章の目的

分布型集束素子を用いる導波系の設計論についての従来の報告をみると、まず気体を流す型の代表的なものとしての層流型ガスレンズでは、3章でその集束性についてくわしく述べたが、誘電率分布が軸方向にも一様でなく、厳密な設計論が行い難く、設計に必要なマトリクス要素を求めたにとどまっている。一方、静止型ガスレンズの一つである4重らせんガスレンズでは、取扱いが近似的で、20気圧のCO₂を用いてやっと集束性をもたせ得ることが示されているだけで最適設計まで至っていない。⁽³⁵⁾

一方、4章で述べた静止型ガスレンズの一例である双曲線型ガスレンズについては、その集束性が実験的にほぼ理論通りであることが確かめられており、軸方向の一様性もよく、設計も厳密に行うことができる。このため、HGLを密に90°ずらして縦横接続する構成に関する設計が行われた⁽⁷⁴⁾ところで、実際には温度分布の端部効果のために、多少の自由空間が挿入された形になるし、あるいは光学レンズと同じく、一つのレンズとして自由空間をはさんで周期的に配置する場合の検討も必要になってくる。

そこで本章では、文献(74)においてなされていない、自由空間を含めた周期的なHGLを用いる導波系の伝送状態、4章で求めた動作限界を考慮にい

#1) Hyperbolic-type Gas Lens (HGL と略す)

れた最適設計，安定整合，などを求めることをまづ一つの目的とする。

また，分布型集束素子を用いる導波系のビームの安定性については，Ungerによる報告があるが⁽⁴¹⁾，HGLを用いる導波系のように集束性と発散性をもつ導波系についての考察はされていまいなようである。したがって，ここからは章で求めた一般的な安定性をこの型の導波系に適用して，曲がり変動やランダム変動に対する安定性の検討を行う。

なお，ガスレンズでは，示つうの場合反射損失は極微少で考慮する必要はないが，口径が有限であるためにおこる回折損失や，姿勢変動などが設計条件として制限を与えるようになるので最後に検討する。

8.2 導波系の伝送状態と最適設計

8.2.1 周期的な導波系の伝送状態と安定条件

一般に，1区間の $\hat{F}$ マトリクスが

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

で表わされている導波素子が周期的に連続接続してできている導波系の固有伝送状態を求めておく。1区間における入射，出射の波面係数 P_1, P_2 が周期条件によって P に等しくなるとすると，式(1.59a)より

$$P = \frac{A - D \pm \sqrt{(A + D)^2 - 4}}{2C} \quad (8.2)$$

となる。また，1区間が面対称の素子でできている，その半区間のマトリクスが

$$\hat{F}_h = \begin{pmatrix} A_h & B_h \\ C_h & D_h \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

で表わされる場合には，

$\tilde{F}$ マトリクスは

$$\tilde{F} = \tilde{F}_h \cdot \hat{F}_h (A_h \leftrightarrow D_h) = \begin{pmatrix} A_h & B_h \\ C_h & D_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_h & B_h \\ C_h & A_h \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

で表わされるから，固有伝送姿態の波面係数は

$$P = \sqrt{\frac{A_h B_h}{C_h D_h}} \quad (8.5)$$

で表わされる。

導波系の姿態が安定であるための必要条件は，式(8.2) で表わされる波面係数の実数部（スポットサイズの逆数の2乗）が有限であることから

$$(A+D)^2 - 4 \leq 0 \quad (8.6)$$

のように表わされる。 $\tilde{F}$ マトリクスが，式(8.4)のように表わされる場合には

$$(A_h B_h C_h D_h) \leq 0 \quad (8.7)$$

となる。

8.2.2 双曲線型ガスレンズを用いる導波系の伝送姿態

自由空間（長さ l_0 ）を隔てて，長さ l_g の双曲線型ガスレンズを互いに 90° ずつ回転して配置する構成の導波系を図 8.1(a) に示す。互いに 90° だけ回転した 2 個の HGL で 1 周期をつくり，これが周期的に連なっている。図 8.1(b) は，このような 1 周期内の断面と誘電率分布を示している。図 8.1(d) は，導波系の x - z 面を示しており，集束系 - 自由空間 - 発散系 - 自由空間で 1 周期をつくり，逆に y - z 面では，発散系 - 自由空間 - 集束系 - 自由空間で 1 周期をつくる。また， x, y 方向の導波系の性質は， 90° ずつずらしてみれば同じであるから，設計には 1 方向のみを考えておけばよい。

さて，このような導波系の伝送姿態は， x, y 方向でスポットサイズの異なるエルミート・ガウス型である。基本姿態であるガウス波のスポットサイズ

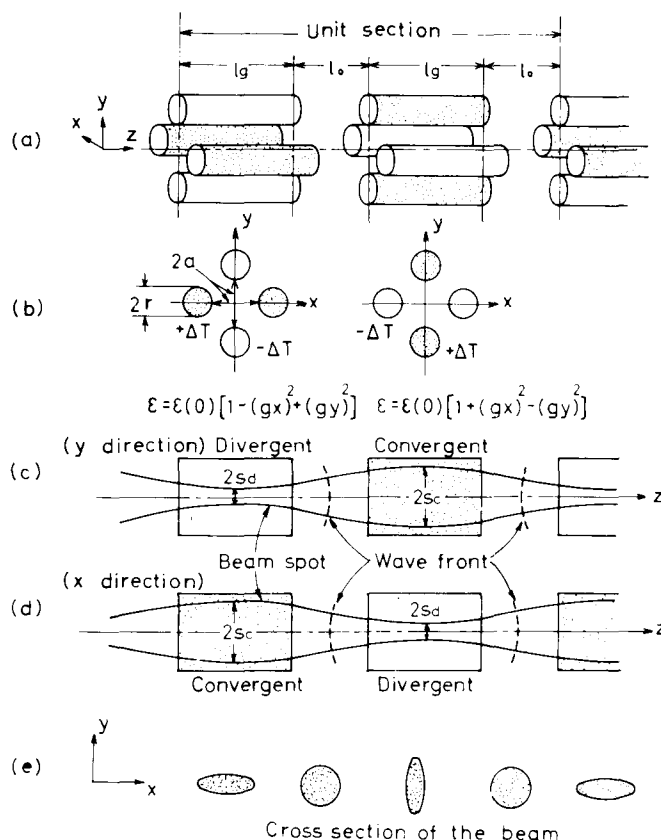


図8.1 双曲線型がスレーブを自由空間を隔てて配置する構成とその母波束の伝送姿態。

の変化は，図8.1(c)(d)(e)に示すように，集束束の中央部で最大値 s_c ，発散束の中央部で最小値 s_d をとる。

これらのスポットサイズの値を求めるために，図8.1(d)において，集束束の中央から発散束の中央までの半周期に対するFマトリクス要素を求めると次のようになる。

$$\tilde{F}_R = \begin{pmatrix} A_R & B_R \\ C_R & D_R \end{pmatrix} \quad (8.3)'$$

各要素は，2章の式(2.48)(2.57)(2.54)の積として求めり，

$$A_R = \cos \phi \cosh \phi - \sin \phi \sinh \phi - Q \sin \phi \cosh \phi$$

$$B_R = j^2 g R(0) [\sin \phi \cosh \phi - \sinh \phi \cos \phi + Q \sinh \phi \sin \phi]$$

$$C_R = \frac{1}{j g R(0)} [\sin \phi \cosh \phi + \sinh \phi \cos \phi + Q \cos \phi \cosh \phi]$$

$$D_R = \cos \phi \cosh \phi + \sin \phi \sinh \phi + Q \cos \phi \sinh \phi \quad (8.8)$$

となる。ただし、 g は式(4.5)で表わされる集束性を表わすパラメータとして、 ϕ 、 Q は次式で定義する

$$\phi = g l g / 2 \quad (8.9)$$

$$Q = g l_0 \quad (8.10)$$

式(8.3)に対する入射点の波面係数 P は

$$P = \sqrt{\frac{A_h B_h}{C_h D_h}} \quad (8.5)'$$

により求めるから、^{#1)} S_c は次式のようになる

$$\frac{S_c}{w_0} = \left[\cot^2 \phi \cdot \frac{\tan \phi + \tanh \phi + Q}{-\cot \phi + \coth \phi + Q} \cdot \frac{\tan \phi + \coth \phi + Q}{\cot \phi - \tanh \phi - Q} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (8.11)$$

ただし、 w_0 はガスレンズの固有状態を次式で定義される。

$$w_0 = 1 / \sqrt{g R(0)} \quad (8.12)$$

同様の手法で、発散系の中央部におけるスポットサイズ S_d を求めると

$$\frac{S_d}{w_0} = \left[\cot^2 \phi \cdot \frac{-\tan \phi + \tanh \phi + Q}{-\cot \phi + \coth \phi + Q} \cdot \frac{\cot \phi - \tanh \phi - Q}{\tan \phi + \coth \phi + Q} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (8.13)$$

のようになる。また、集束系、発散系の中央部では波面係数の虚数部は零で、位相面は平面である。

S_c/w_0 、 S_d/w_0 と ϕ との関係は次頁の図8.2に示す。

#1) この場合の P は実数部のみになる。従って波面は平面である。

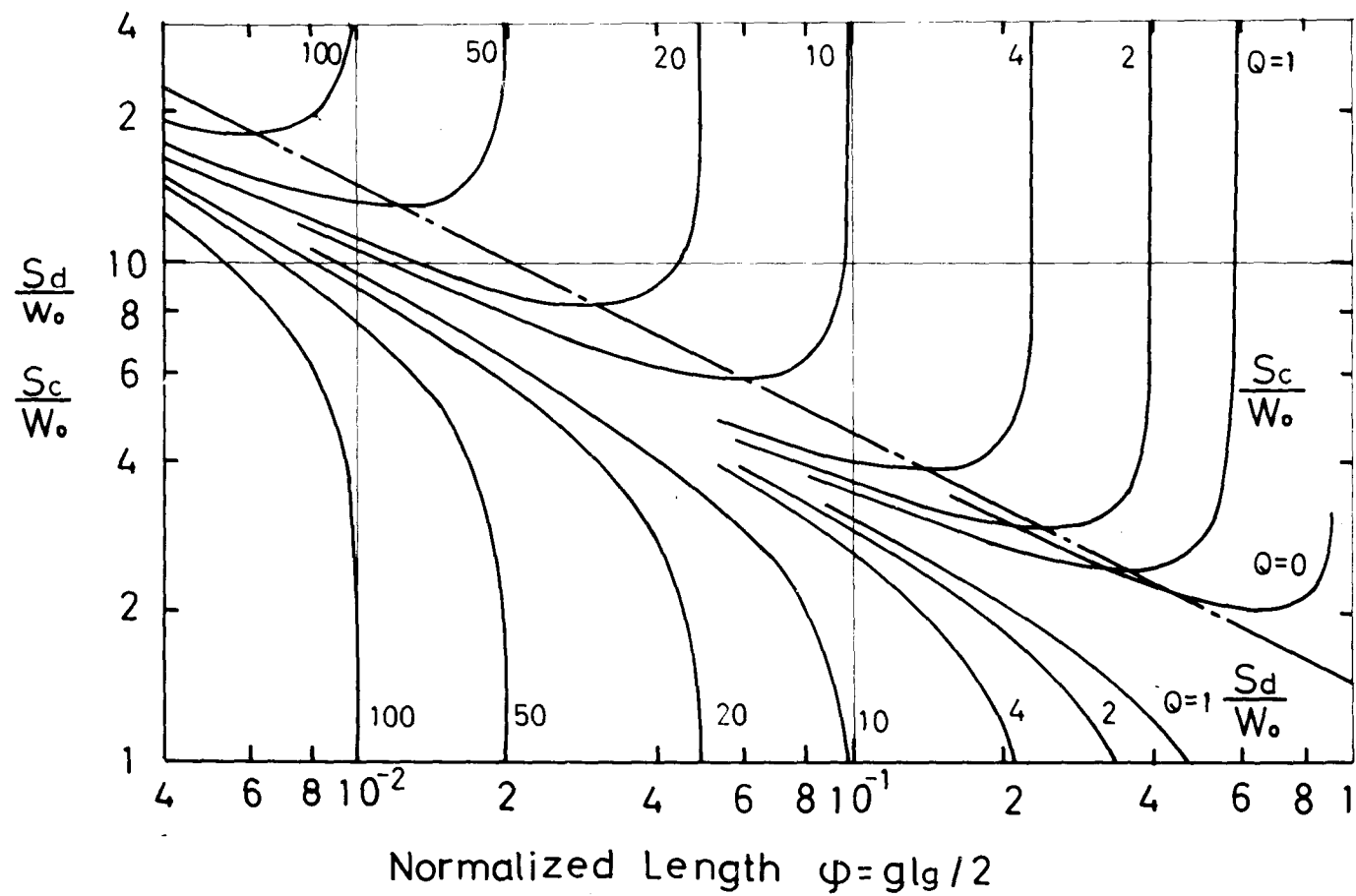


図 8.2 双曲線型ガスレンズ導波系のスポットサイズ(規格化) S_c/W_0 , S_d/W_0 と ϕ との関係

設計の必要条件としてはまず，これらのスポットウイズの値が有限な実数になるようパラメータの値を選び必要があるあり，式(8.7)(8.8)から安定条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} Q + \tanh \phi < \coth \phi < Q + \coth \phi \\ -Q - \coth \phi < \tanh \phi < -Q - \tanh \phi \end{aligned} \quad (8.14)$$

なお，この領域では，姿勢の安定性とともに，ビームを中心の安定性も保障されている。Fマトリクス表と光線マトリクス表がこの場合等しいからである。

ここで， S_c/w_0 ， S_d/w_0 と ϕ との関係を図8.2に示すが， S_c/w_0 が有限な範囲が式(8.14)の安定領域の1つを示している。また， $\phi \ll 1$ ， $Q \neq 0$ のときには，式(8.11)(8.13)は近似的に次のように表わされる。

$$\frac{S_c}{w_0} \cong \frac{1}{\sqrt{\phi}} \left[\frac{1+\phi Q}{1-\phi Q} \right]^{\frac{1}{4}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\phi}} \quad (\phi \rightarrow 0) \quad (8.15)$$

$$\frac{S_d}{w_0} \cong \frac{1}{\sqrt{\phi}} \left[\frac{1-\phi Q}{1+\phi Q} \right]^{\frac{1}{4}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\phi}} \quad (\phi \rightarrow 0) \quad (8.16)$$

8.2.3 最適設計

図8.2の領域中， Q を一定としたとき S_c/w_0 が極小値 $(S_c/w_0)_m$ とする ϕ の値を ϕ_m とすると，式(8.11)からこれらの関係を求めることができ，そのときの発散率の値 $(S_d/w_0)_m$ と共に図8.3に示す。 $\phi \ll 1$ ， $Q \gg 1$ の場合には近似的に

$$\phi_m \cong 0.6180 / Q \quad (8.17)$$

$$(S_c/w_0)_m \cong 1.8248 \sqrt{Q} = 1.4347 / \sqrt{\phi_m} \quad (8.18)$$

となり，図中に点線を示した。

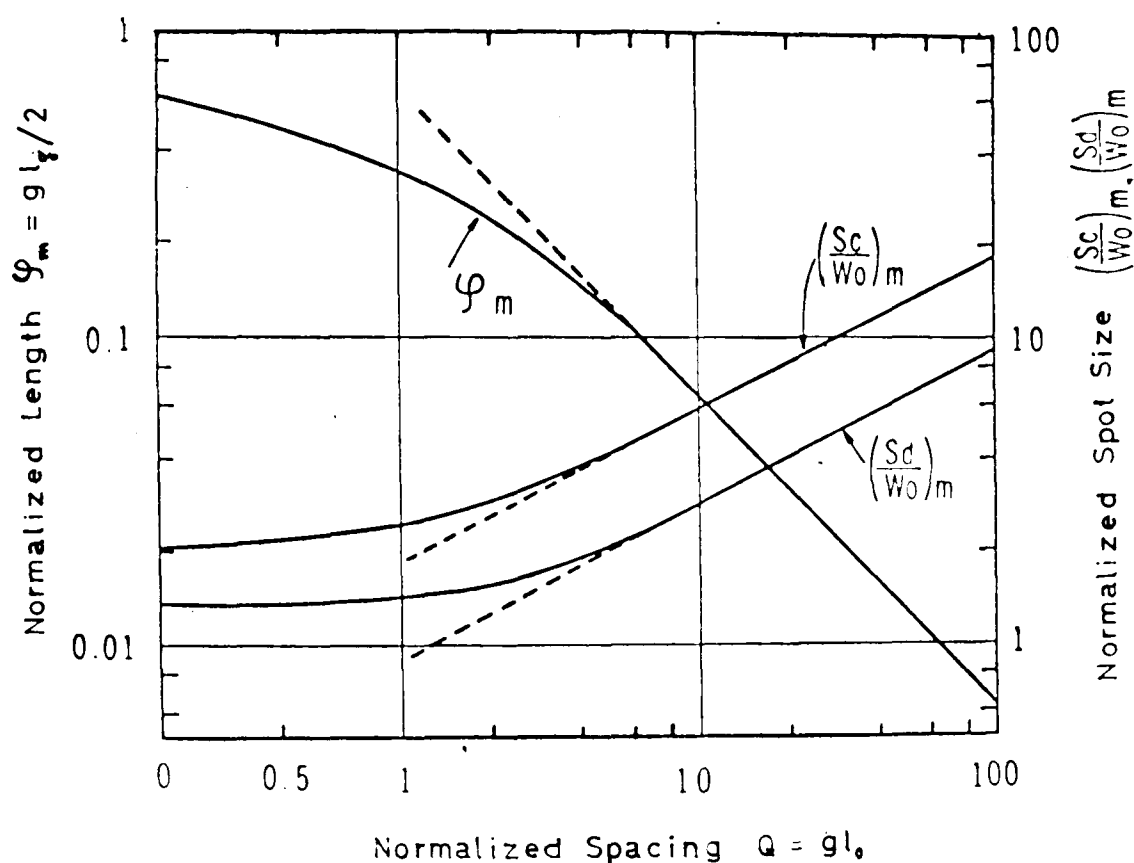


図 8.3 最適設計条件における Q と ϕ_m , $(S_c/W_0)_m$, $(S_d/W_0)_m$ の関係

このように S_c を極小にし、結果的には回折損失を小さくすることができるので、最適設計とよぶが、次に各パラメータの値を求める。導体間隔 $2a$ は後で与える回折損失を小さく保つために $S_c/a < 0.3$ に定めなければならない。ここで、 S_c/a を他のパラメータで表わすと、

$$\begin{aligned}
 S_c/a &= (S_c/W_0)_m \cdot (W_0/a) \\
 &= \left(\frac{S_c}{W_0}\right)_m \frac{1}{[R(0)^2(E_s-1)\Delta T/(T_0E_s)]^{1/4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}
 \end{aligned} \tag{8.19}$$

となり、 $(S_c/W_0)_m$ と W_0 が与えられると a が求まる。

また、 $\phi = \phi_m$ のときのガスレンズ、自由空間の長さは、式(8.9)(8.10)から次のように求まる。

$$l_g = \frac{2\phi_m}{g} = \frac{2\phi_m a}{[(\epsilon_r - 1) \Delta T / (\epsilon_r T_0)]^{\frac{1}{2}}} \quad (8.20)$$

$$l_0 = \frac{Q}{g} = \frac{Qa}{[(\epsilon_r - 1) \Delta T / (\epsilon_r T_0)]^{\frac{1}{2}}} \quad (8.21)$$

結局, $T_0, \Delta T, \epsilon_r - 1, R(0), S_c/a, Q$ (または l_0) が与えられると, 最適設計時の a, l_g が得られ, ガスレンズ製作の試料がえらう。

また, 4章で述べたように, 双曲線型ガスレンズが正常に動作する温度差 ΔT には

$$\Delta T \cdot a^{1.34} \leq 42 \quad (8.22)$$

のような限界があるので (特に a の比較的大きい場合), 任意に $\Delta T, a$ の組は取り得ない。この制限をいれた設計の手順を図8.4に示す。

このようにして求められたパラメータを, Q の選び方に対して図8.5に示す。値は, 空気 (1 atm) を用い, $T_0 = 293^\circ\text{K}$, $\epsilon_r - 1 = 5.46 \times 10^{-4}$, $S_c/a = 0.2$, $R(0) = 9.929 \times 10^6$ (1/m) に対するものである。

ただし, $Q < 1.6$ のときには, $\Delta T = 2.5^\circ\text{C}$, とし, $Q > 1.6$ では, 式(8.22)の制限を考慮に入れている。

また, 具体的な設計値を表8.1に示す。

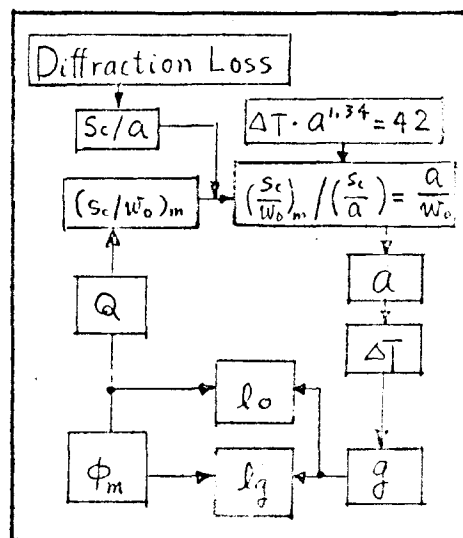


図8.4 双曲線型ガスレンズの温度限界を考慮に入れる場合の設計の手順

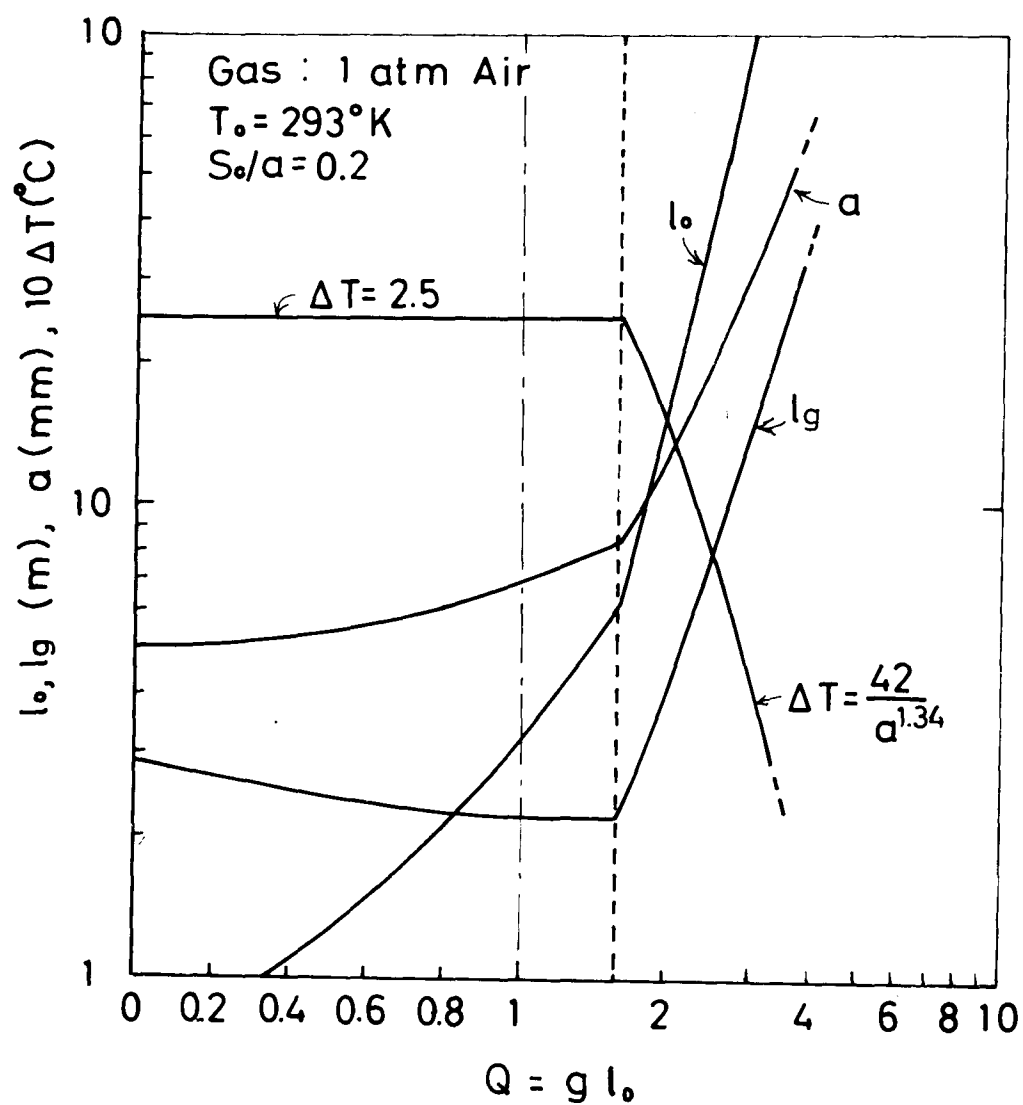


図 8.5 最適設計時におけるパラメータの値

表 8.1 導波管の数値例

l_o (m)	l_g (m)	a (mm)	s_c (mm)	$\Delta T(^{\circ}\text{C})$	Q
0	2.7	5	1.0	2.5	0
10	2.9	10	2.0	2.0	1.8
50	8.8	22	4.4	0.71	2.6

8.2.4 姿態整合

レーザから得られる x, y 方向の波面係数の等しいビームと、導波系の伝送姿態の整合をとるために、自由空間の中央にあたる位置の波面係数を一致させる。この部分の伝送姿態の波面係数 $P_{in,1}, P_{in,2}$ (それぞれ, x, y 方向) は, 8.2.2 の方法で求まり, 次式のようになる。

$$P_{in,1} = P_{in,2}^* = \frac{1}{w_{in}^2} + j \frac{R(0)}{f_{in}} \quad (8.23)$$

ただし, $P_{in,2}^*$ は $P_{in,2}$ の複素共役量であり, w_{in}, f_{in} はそれぞれ

$$\begin{aligned} w_{in} = w_0 & \left[\left(\cos 2\phi - \frac{Q}{2} \sin 2\phi \right) \left\{ Q \cosh 2\phi + \left(1 + \frac{Q^2}{4} \right) \sinh 2\phi \right\} \right. \\ & \left. + \left(\cosh 2\phi + \frac{Q}{2} \sinh 2\phi \right) \left\{ Q \cos 2\phi + \left(1 - \frac{Q^2}{4} \right) \sin 2\phi \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \times \left[1 - \left\{ \cos 2\phi (\cosh 2\phi + Q \sinh 2\phi) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin 2\phi \left(Q \cosh 2\phi + \frac{Q^2}{2} \sinh 2\phi \right) \right\}^2 \right]^{-\frac{1}{4}} \quad (8.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f_{in}}{R(0)} = 2w_0^2 & \left[\left(\cos 2\phi - \frac{Q}{2} \sin 2\phi \right) \left\{ Q \cosh 2\phi + \left(1 + \frac{Q^2}{4} \right) \sinh 2\phi \right\} \right. \\ & \left. + \left(\cosh 2\phi + \frac{Q}{2} \sinh 2\phi \right) \left\{ Q \cos 2\phi + \left(1 - \frac{Q^2}{4} \right) \sin 2\phi \right\} \right] \\ & \times \left[\sin 2\phi (Q \cosh 2\phi + 2 \sinh 2\phi) + Q \cos 2\phi \sinh 2\phi \right]^{-1} \quad (8.25) \end{aligned}$$

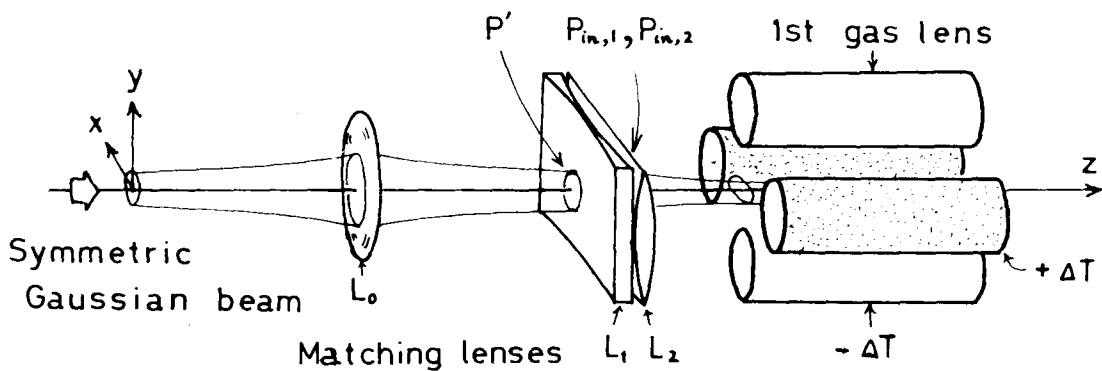


図8.6 双曲線型ガスレンズ導波系の姿態整合

となる。図 8.6 に示すように、TEM₀₀ 状態のガウス波が入射した際、 L_0 によって波面係数が

$$P' = 1/w_{in}^2 \quad (8.26)$$

になるように焦点距離と間隔を選んでスポットサイズの整合をとり、次に 2 枚のシリンドリカルレンズ L_1, L_2 によって波面の整合をとる。それぞれのシリンドリカルレンズの焦点距離 f_1, f_2 は

$$f_1 = -f_{in}, \quad f_2 = f_{in} \quad (8.27)$$

に選べばよい。

8.3 素子の変動によるビーム光路の安定性

双曲線型ガスレンズを用いる導波束の素子に位置変動があるときのビーム光路を求める。簡単のために、導波束を図 8.7 のようにガスレンズが縦横接続されており、交互に集束系、発散系が繰り返っているモデルを考える。このとき、5 章の式 () に相当する M_n は次式で表わされる。

$$M_n = \hat{F}_d^{-1} \cdot \hat{F}_c^{-1} \quad (8.28)$$

$$\hat{F}_c = \begin{pmatrix} \cosh 2\phi & jR(0)g \sinh 2\phi \\ j\frac{1}{R(0)g} \sinh 2\phi & \cosh 2\phi \end{pmatrix}, \quad \hat{F}_d = \begin{pmatrix} \cosh 2\phi & jR(0)g \sinh 2\phi \\ -j\frac{1}{R(0)g} \sinh 2\phi & \cosh 2\phi \end{pmatrix} \quad (8.29)$$

ただし、 ϕ は式 (8.9) に与えられている。

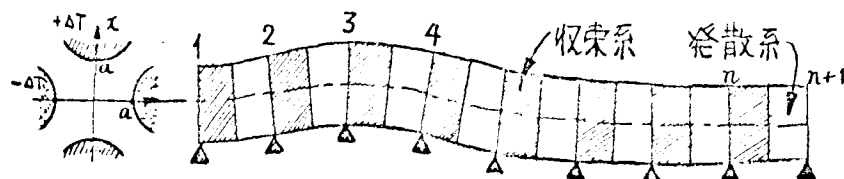


図 8.7 導波束素子の位置変動のモデル

8.3.1 曲がり変動に対するビーム光路

曲がり変動に対する変動のマトリクス U_n は
この場合

$$U_n = \begin{pmatrix} jR u_n' \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$= (-\tilde{F}_d^{-1} \cdot \tilde{F}_c^{-1} + \tilde{F}_d^{-1}) \Delta c_n + (\tilde{F}_d^{-1} - I) \Delta d_n \quad (8.30)$$

$$\Delta c_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \zeta_{cn} \end{pmatrix}, \quad \Delta d_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \zeta_{dn} \end{pmatrix} \quad (8.31)$$

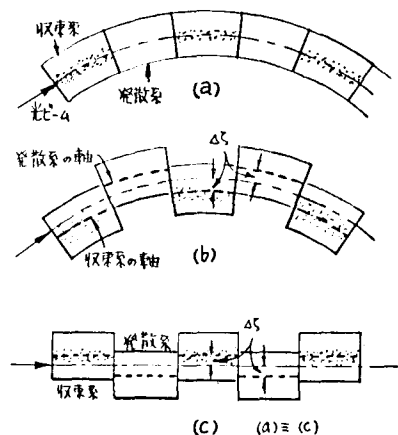


図8.8 円形曲がり変動

とおくことができる。

(i) 円形曲がり変動

図8.8(a)のような一様に導波系が半径 R で曲がったような場合には、等価な直線部と見おると(c)のように $\Delta \zeta$ だけの軸ずれをもっていると考えることができる。一方、(b)のような曲がり導波系は、集束系では内側に、発散系では外側に $\Delta \zeta$ の軸ずれを与えておけば、直線部と等価であることが知られている。ただし

$$\Delta \zeta = 1/(g^2 R) \quad (8.32)$$

この2つのことから、(a)の場合に対し

$$\Delta \zeta_{cn} = \Delta \zeta_{dn} = \Delta \zeta = 1/g^2 R \quad (8.33)$$

とおけばよい。5章の式()で、 $\alpha=1$ とおき、 U_n に式(8.30)の値を用いると、 n 番目の区間におけるビームのずれが求まる。最適設計における $\phi = 0.628$ の場合には

$$x_n/\Delta \zeta = 16.3 + 16.7 \sin(0.94n - 1.8) \quad (8.34)$$

また，うねりの振巾の最大値を $x_{\max}$ とすると，許容曲がりの曲率半径 $R_{\min}$ は

$$R_{\min} \cong 33 \frac{T_0}{\epsilon_r - 1} \cdot \frac{a}{\Delta T} \left(\frac{x_{\max}}{a} \right)^{-1} \quad (8.35)$$

例え^{<例1>}ば， $a = 3 \text{ mm}$ ， $T_0 = 300^\circ \text{K}$ ， $\Delta T = 15^\circ \text{C}$ ， $\epsilon_r - 1 = 5.46 \times 10^{-4}$ の 1 気圧の空気では $x_{\max}/a = 0.3$ とすると， $R_{\min} \cong 10 \text{ km}$ となる，^{<例2>}て，相当良い直直性を要することがわかる。しかし，エタ^{<例2>}ンを用い，10 気圧にすると $R_{\min}$ は数百 m 程度まで小さくできる。

(ii) 正弦波状曲がり変動

うねりの波長が $2\pi/2K$ の場合の正弦波状曲がり変動の場合には，同様の考え方によって

$$\Delta \zeta_{cn} = \Delta \zeta_{dn} = (K/g^2) \sin 2\pi n K \quad (8.36)$$

とおくと，5 章式()よりビーム光路が求まる。式(8.28)で表わされる M の各要素を a, b, c, d とすると

$$N_1 = -\theta C - 2jR(0)g \sinh 2\phi C + a(-a + 2 \cosh 2\phi + 1)$$

$$N_2 = a + 1$$

$$S(n) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\cos(\theta - K)n \cdot \sin(\theta + K)(n-1)}{\sin(\theta + K)} - \frac{\cos(\theta + K)n \cdot \sin(\theta - K)(n-1)}{\sin(\theta - K)} \right]$$

(8.37)

とおくと， n 番目の区間におけるビームのずれ x_n は

$$x_n / (Kg^{-2}) = \frac{1}{\sin 2\theta} \left[N_1 S(n) + N_2 \{ -\sin 2\theta \sin 2Kn + S(n-1) \} \right]$$

(8.38)

となる。ただし， $\cos 2\theta = \frac{1}{2}(a+d)$ である。このとき， $\phi = 0.628$ ，したがって

で $\theta = 0.471$ の場合には，図 8.9 のようにビームのうねりは n とともに大きくなるような“共振”を示す．例えば，〈例 3〉前の〈例 1〉の動作状態で， $n = 100$ とすると，図 8.9 より $(x_n / K g^2) = 300$ となり， $g^2 \approx 3$ であるから許容振幅 $K_{\max}$ は $K_{\max} \approx x_{\max} / 100$ 程度になる．また， $K \neq \theta$ の場合で，〈例 4〉 $K = \theta / 10$ とすると，ビーム光路は図 8.10 のようになり， $(x_n / K g^2) \approx 8$ であるから， $K_{\max} \approx \frac{1}{3} x_{\max}$ となる．

正弦波状振動のうち，導波系固有の振動数 θ と等しい変動成分に対しては，ビームの変動は n とともに増大するので注意する必要がある．

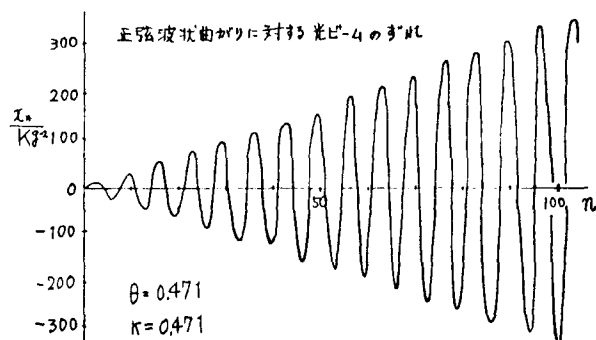


図 8.9 $K = \theta$ の場合のビームのずれ

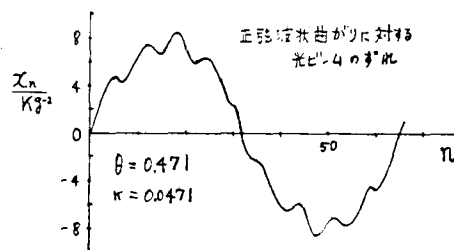


図 8.10 $K \neq \theta$ の場合のビームのずれの一例

8.3.2 素子のランダムな位置変動によるビーム変動

次に， n 番目の区間の集束系が Δx_{cn} ，発散系が Δx_{dn} だけ軸からずれ， $\Delta \theta_{cn}$ ， $\Delta \theta_{dn}$ だけそれぞれ軸と傾いている場合の変動のマトリクスは次式で表わされる．

$$U_n = \begin{pmatrix} jR U'_n \\ U_n \end{pmatrix}$$

$$U'_n = (-g' + g \sinh 2\phi) \Delta x_{cn} - g \sinh 2\phi \Delta x_{dn} \\ + (-a + \cosh 2\phi + 2\phi \sinh 2\phi) \Delta \theta_{cn} + (1 - \cosh 2\phi) \Delta \theta_{dn}$$

$$U_n = (-d + \cosh 2\phi) \Delta x_{cn} + (1 - \cosh 2\phi) \Delta x_{dn} \\ + (c' - \sinh 2\phi - 2\phi \cosh 2\phi) \Delta \theta_{cn} / g + (-\sinh 2\phi + 2\phi) \Delta \theta_{dn} / g$$

(8.38)

ただし，1区間のマトリクスMの要素を

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & jk\theta' \\ j\frac{1}{k}c' & d \end{pmatrix} \quad (8.39)$$

とおいた。

素子偏差がないときのランダムな変動に対するビーム変動の統計2乗平均値は次式で表わされる^{#1)}。

$$\langle x_n^2 \rangle = \left[\frac{c'}{g'} \langle u_n^2 \rangle + \frac{a-d}{g'} \langle u_n' u_n \rangle + \langle u_n^2 \rangle \right] n \quad (8.40)$$

もし，変動がランダムで互いに相関性がなく，次のように表わされているものとする。

$$\begin{aligned} \langle \Delta x_{cn}^2 \rangle &= \langle \Delta x_{dn}^2 \rangle = \delta x^2, & \langle \Delta x_{cn} \Delta x_{cm} \rangle &= 0 \quad (m \neq n) \\ \langle \Delta x_{cn} \Delta x_{dn} \rangle &= 0 & \dots & \text{etc} \\ \langle \Delta \theta_{cn}^2 \rangle &= \langle \Delta \theta_{dn}^2 \rangle = \delta \theta^2, & \langle \Delta \theta_{cn} \Delta \theta_{dm} \rangle &= 0 \quad (m \neq n) \\ \langle \Delta \theta_{cn} \Delta \theta_{dn} \rangle &= 0, & \dots & \text{etc} \end{aligned} \quad (8.41)$$

前の例と同じように，最適設計における $\varphi = 0.628$ を用いると

$$\langle x_n^2 \rangle \cong [5.8 \delta x^2 + (15.4/g^2) \delta \theta^2] n \quad (8.42)$$

となる。ちなみに，レンズ列の場合だと式(5.1)から $\langle x_n^2 \rangle = 2 \delta x^2 n$ であるから，安定性は悪くなっていることがわかる。

例えば，^{<例5>} $n=100$ として， $\Delta \theta^2$ の効果が小さいとしても， $\sqrt{\langle x_n^2 \rangle} = 1$ mm のとき，許される素子変動の2乗平均値は $\delta x \cong 0.04$ mm となって，極めて設置精度を良くする必要があることを示している。

#1) この場合 $a+d=0$ にならなければ文献(12)を参照した。

8.4 姿態変換と回折損失

8.4.1 姿態変換

双曲線型ガスレンズの内部気体の温度分布が完全に2乗分布になっても，誘電率の分布には2乗以外の項が現われる．このうち4次項による姿態変換は6章で検討しており，一区間についての電力の姿態変換率 η_c は次式に再掲する．

$$\eta_c = (\Delta T/T_0)^2 (\lambda l_g/a^2)^2 D_4(t) \quad (8.43)$$

$$D_4(t) = 3/(2\frac{3}{2}\pi) t(1+7t+4t^2)/(1-t)^4 \quad (8.44)$$

$$t = |w_0^2/s_c^2 - 1|^2 / |w_0^2/s_c^2 + 1|^2 \quad (8.45)$$

図6.14(b)の構成に対する，1 km当りの姿態変換率 η_c と間隔 l との関係を図8.11に示す．

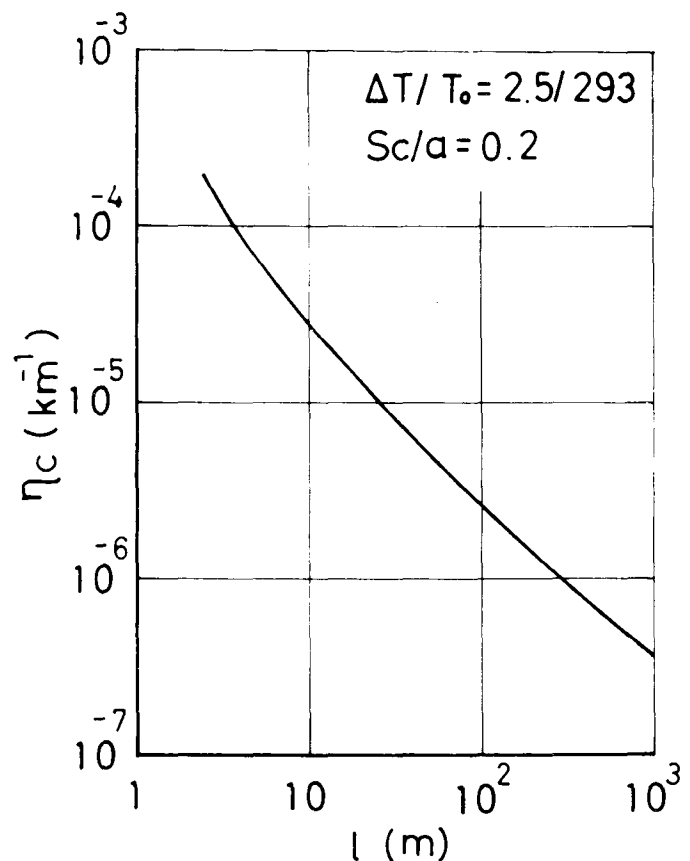


図8.11 双曲線型ガスレンズ導波系の1 km当りの姿態変換率 η_c と間隔 l との関係

8.4.2 回折損失

熱導体の壁によってビームのエネルギーの一部が吸収される効果を，ファブリペロー共振器のように，回折損失と考える。

熱導体の形が双曲線型であるので厳密な計算はできないから，近似的に回折損失が求められる。図8.1よりわかる通り，集束系の中央部でビームのスポットサイズが最大であるから，この部分での回折損失が最も大きい。2次元問題で考えると，この部分に巾 $2a$ のスリットの完全吸収壁があると考えてよい。集束系の中央部における x に関する電界分布は

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{[s_c \sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{s_c})^2} & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (8.46)$$

のように表わされているものとする。

いま $E(x)$ を同じスポットサイズをもつ高次のエルミート・ガウス波で次のように展開する。

$$E(x) = \frac{1}{[s_c \sqrt{\pi}]^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(\frac{x}{s_c}) e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{s_c})^2} \quad (8.47)$$

ここで， A_0 は基本状態に対するものであるから，高次状態へ変換されて壁で吸収される電力の割合は次式で求まる。

$$\eta_d = 2(1 - |A_0|^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}a}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (8.48)$$

ただし， $X_1 = (s_c/a)^{-1}$ である。 s_c/a と η_d の関係を数値的に求めて図8.12に示す。この値は1区間における x , y 方向に対するものである。

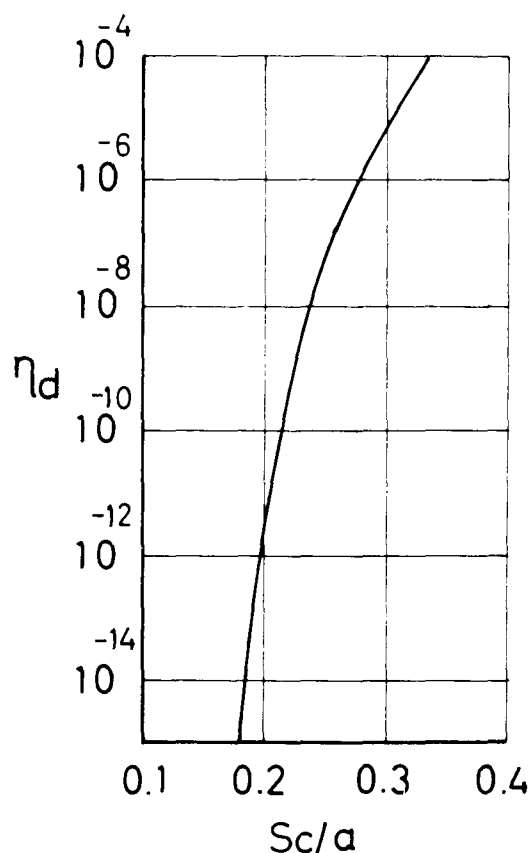


図8.12 1区間における回折損失 η_d

8.5 伝送実験

設計の方法を確認する意味で，試作した HGL-G を用いて 1 区間 (1.3 m) のビーム伝送を行った。図 8.13 に示すように，レーザから得られる TEM₀₀ 状態のガウス波を $f_1 = 2.5 \text{ m}$ のレンズ (実際には反射鏡を用いた) により， d_1 , d_2 を適当な値に選んでスポットサイズの整合をとり，かつ整合用シリンドリカルレンズ L_2 の前で平面になるようにする。次に， x 方向 -80 cm , y 方向 $+80 \text{ cm}$ のシリンドリカルレンズ L_2 によって波面の整合をとる。このときの波面係数は

$$P_{in} = R [u_{in} + jv_{in}] = R [0.632 \pm j1.25]$$

である。複号は，+ が x 方向，- が y 方向を表わしている。

このようにして波面係数の整合をとったビームを， l_0 だけ離しておかれたガスレンズに入射させる。このときの最適設計におけるパラメータの値は次のとおりである。

$Q = 0.04$	$d = 2.6 \text{ mm}$ (HGL-G)	$f_1 = 2.5 \text{ m}$
$q_m = 0.615$	$\Delta T = 13.7^\circ \text{C}$	$f_2 = \pm 80 \text{ cm}$
$g = 1.95$		$d_1 = 3.72 \text{ m}$
$l_g = 62.8 \text{ cm}$	$L = 0.97 \text{ m}$	$d_2 = 5.56 \text{ m}$
$l_0 = 2 \text{ cm}$	$R = 2 \text{ m}$	$d_3 = 1 \text{ cm}$

用いた双曲線型ガスレンズは，表 4. に示す HGL-G であり，図 8.13 における HGL-1 は x 方向で集束系， y 方向で発散系になるように配置し，HGL-2

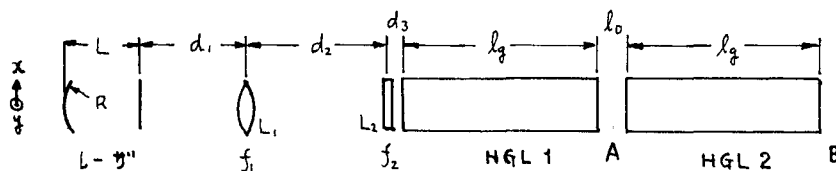


図 8.13 HGL-G による 1 区間の伝送実験

ではその逆になつてゐる。

実験の結果，図8.13のA点のスポットサイズはほぼ入射点におけるスポットサイズと等しくなり，また姿態もほぼス，す方向対称の円になつてゐることが確かめられた。そのうち，ガスレンズ HGL-2 を縦続接続して温度差を与えていくとB点でも姿態整合のとれたほぼ円形のビームが得られた。なお ΔT の値は設計値より多少高くとらねばならなかったが，これは中心軸の温度 T_0 の上昇によるものと思われる。これによって，導波系のパラメータの選定と整合の方法の妥当性が確かめられた。

8.6 本章のまとめ

8.6.1 本章で新たに得られた結果

双曲線型ガスレンズを用いる導波系の設計に関して検討を行い，次の結果を得た。

- (i) 自由空間をはさんで周期的に双曲線型ガスレンズを配置する導波系の伝送姿態を求め，集束系の中央におけるスポットサイズを極小にする最適設計の方針を得た。その際，4章で求められた動作限界を考慮に入れた。
- (ii) レーザから得られる円対称の姿態と導波系の伝送姿態との姿態整合の方法について述べた。
- (iii) 素子の位置変動によっておこるビーム変動に関する検討とこの導波系について行い，次の結果を得た。
 - ① 1気圧の空気を用いる場合は，許容される曲がり変動の曲率半径は，約10cmで，非常に良い真直性を必要とする。エタンを用いて，10気圧にすると，曲率半径を数100 m程度まで許すことができる。
 - ② 正弦波状の変動に対しては，ガスレンズ固有の振動と同じ波長の変動があると，ビーム変動は n と共に増加する。
 - ③ ランダムな素子の変動に対してのビーム変動の統計2乗平均値 $\langle n^2 \rangle$

は，レンズ作用が強いときには主に素子の位置変動が影響し，

$$\langle r_n^2 \rangle \cong 5.8 \delta x^2 n$$

となる．レンズに比べて3倍程度変動が大きい．

- (iv) 1区間(1.2m)ではあるが，設計によるパラメータの値と，シリンダリカルレンズによって姿態整合をとってビームを伝送し，設計の方針を確認した．

8.6.2 結 論

- (i) 双曲稜型ガスレンズを用いる導波束の設計方針が，自由空間を含む場合にも明らかになった．しかし，導波束を構成する際の問題点として，4章の結論に述べた以外に，素子変動に対する安定性の問題が残されている．安定性を改善する方法を用いるに限り，ビームの不安定性によって損失が増加するので，反射損失が小さいという利点が生かせないだろう．
- (ii) なお，多重化の方法として，多数個の熱手体を組み合わせた構成が考えられるが，今後の検討を要する．

9章 集中型集束素子対を用いる導波系

本章では，なるべく小さい曲率半径での曲がり導波系をつくるという要求に対し，レンズあるいは反射鏡を対にして一つの集束素子として用いる光ビーム導波系の提案と，各種のレンズあるいは反射鏡の組合わせについて，ランダムな素子変動と素子偏差にビームの安定性，伝送姿態の理論的な検討，導波系の設計等を行った。

9.1 本章の目的

導波系に集中型集束素子を用いる構成では，基本的には図0.7(a)のような凸レンズを周期的に用いるもの，同様に反射鏡を等間隔で配置するものなど素子を等間隔に並べる構成がとられてきた。ところが，この構成法だと，(i)単レンズ構成では，長焦点のレンズを用いた場合には曲がりの曲率半径を小さくできないし，極めて焦点の長いレンズも得難い。また，反射鏡列では，反射鏡の角変動があった場合に，ビームの安定性が極めて悪くなる等の欠点がある。

前にも，述べたように，曲がり部で小さい曲率半径をもって，かつビームの安定性を損わないような導波系の構成を考えることが一つの重要な問題である。これには，反射鏡を組にして一つの台の上に固定する方法が考えられる。ところで，これまでに，反射鏡を組みにした素子の提案や，2枚の平面鏡を用いるビーム偏向器の安定性の検討があり，またレンズを組みにした素子の等価的な焦点距離に関する議論があった。しかし，このような構成に対するくわしい設計や，安定性の検討などが不足している場合があるように思われる。

そこで本章では，2個のレンズあるいは反射鏡を対にして用いる導波系の色々な組合わせについて，ビームの安定性と曲がり部の検討，導波系の伝送

姿態と最適設計の方法について述べる。

9.2 導波系の伝送姿態と最適設計

9.2.1 導波系の伝送姿態と姿態の安定性

後に図9. に示すような斜め入射に対する反射鏡あるいはレンズも、 x, y 方向における焦点距離が等価的に等しくなるように設計すれば、図9.1 のようなレンズ対導波系と等価になる。

この導波系の伝送姿態を求めるために、図9.1 の①-①' 間の $\hat{F}$ マトリクス $\hat{F}_1$ を求める。2章の式(2.8), (2.57)を用い、

$$\hat{F}_1 = \begin{pmatrix} (1 - l_1/f_1)(1 - l_2/f_2) & jk(1/f_1 + 1/f_2 - l_1/f_1 f_2) \\ (j/k)(l_1 + l_2 - l_1 l_2/f_2) & 1 - l_1/f_2 \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

となる。これらの要素と式(8.2) から伝送固有姿態の①におけるスポットサ

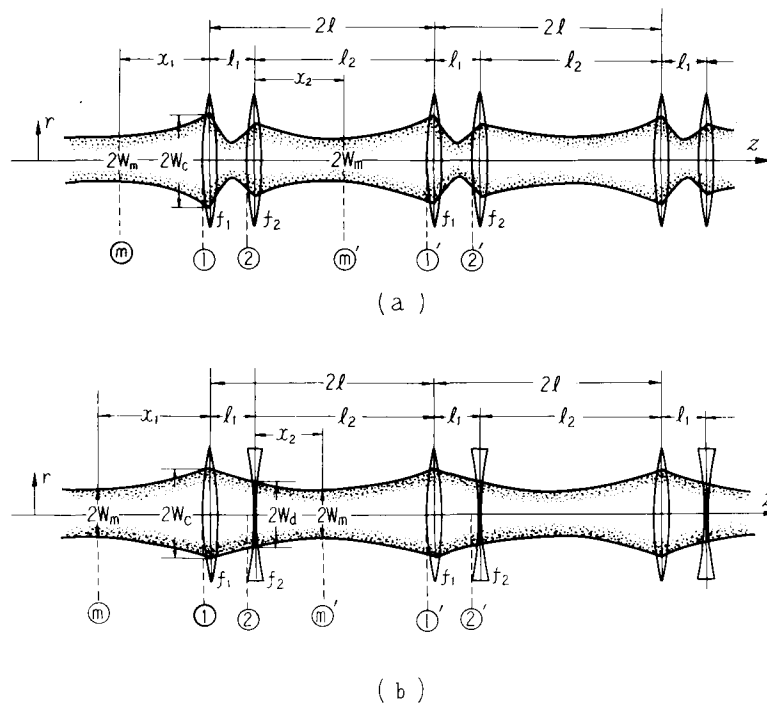


図9.1 レンズ対を用いる導波系のモデル図

1. w_c は、次式で表わされる。

$$w_c = \frac{l}{R} \frac{\sqrt{2F_1(5-2F_2)}}{[\{ 4F_1F_2 - 2(F_1+F_2) + 5 \} \{ 2(F_1+F_2) - 5 \}]^{\frac{1}{2}}} \quad (9.2)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= f_1/l, \quad F_2 = f_2/l, \quad L_1 = l_1/l, \quad L_2 = l_2/l \\ 5 &= L_1L_2 = L_1(1-L_1), \quad \gamma = f_1/f_2 \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

姿態が安定であるための必要条件は、式(9.2)の w_c が実数になる条件として求められ、次式で表わされる。

$$\{ 4F_1F_2 - 2(F_1+F_2) + 5 \} \{ 2(F_1+F_2) - 5 \} \geq 0 \quad (9.4)$$

この領域を図示すると、図9.2の斜線をほどこした部分になる。

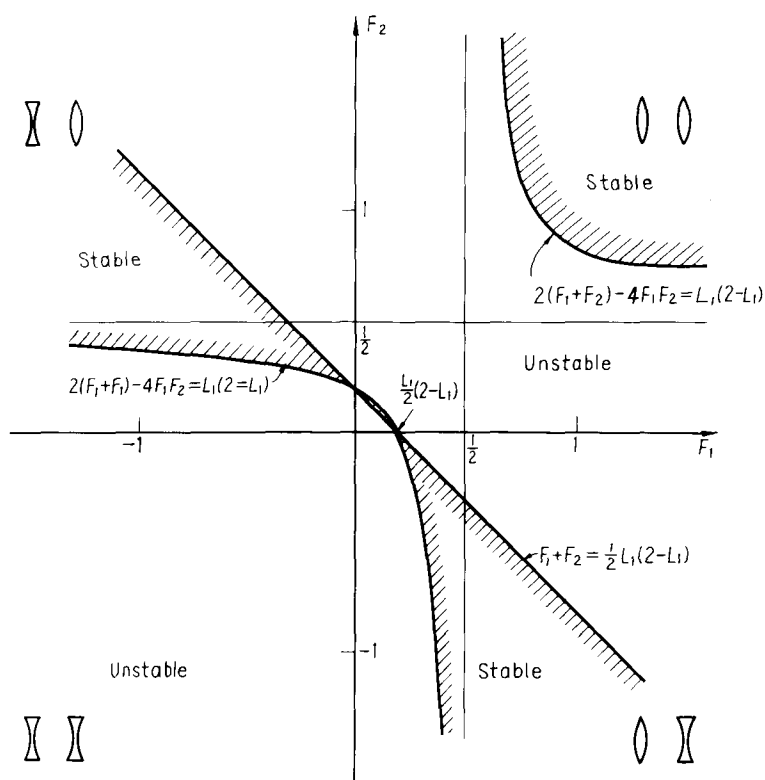


図9.2 レンズ対列導波系の安定領域 $F_1 = f_1/l, F_2 = f_2/l$

また，式(9.3)のパラメータ $\gamma (= f_2/f_1)$ の選び方による F_1, F_2 の安定領域を表 9.1 に示す。

表 9.1 γ の値に対する F_1 の安定領域	
$\gamma = f_2 / f_1$	$F_1 = f_1 / l$ の安定領域 ($S=1$)
$\gamma \geq 1$	$0.5 / \gamma \leq F_1 \leq 0.5$
$0 \leq \gamma \leq 1$	$0.5 \leq F_1 \leq 0.5 / \gamma$
$-1 \leq \gamma \leq 0$	$F_1 \geq 0.5 / (1 + \gamma)$
$\gamma = -1$	$F_1 = \infty$
$\gamma < -1$	/

9.2.2 最適設計条件

ここでは一応，図 9.1 (b) の凸凹レンズの対を鏡頭において， w を極小にする条件を求める。与えられた F_1, F_2 のもとで， w を極小にするような γ の値を γ_m とすれば，式(9.2)より，次式のように求まる。

$$\gamma_m = L_1 (1 - L_1) |_{\gamma} = 2(F_1 + F_2 - 2F_1 F_2 - F_2^2) / (1 - F_2) \quad (9.5)$$

これより， $\gamma = f_2 / f_1$ をパラメータとして， $F_1 = f_1 / l$ を決めたときの最適な規格化されたレンズ間隔 l_1 / l の選び方を求めて図 9.3 に示す。

また，そのときのスポットサイズの極小値 w_{cm} は

$$w_{cm} = \sqrt{\frac{l}{R}} [4(F_2 / F_1)^2 (1 - 2F_2)]^{\frac{1}{4}} \quad (9.6)$$

となり， $\gamma = -1$ の場合について， F_1 との関係を図 9.4 に示す。図 9.4 の中で，破線で示した部分および $F_1 \leq 0$ だけは，最適間隔 $L_1 = l_1 / l = 1$ となり，従来の等間隔配置が最適であることを示している。

なお，このときの第 2 レンズ上のスポットサイズ w_{dm} は同様の検討により次のようになり，図 9.4 に併記した。

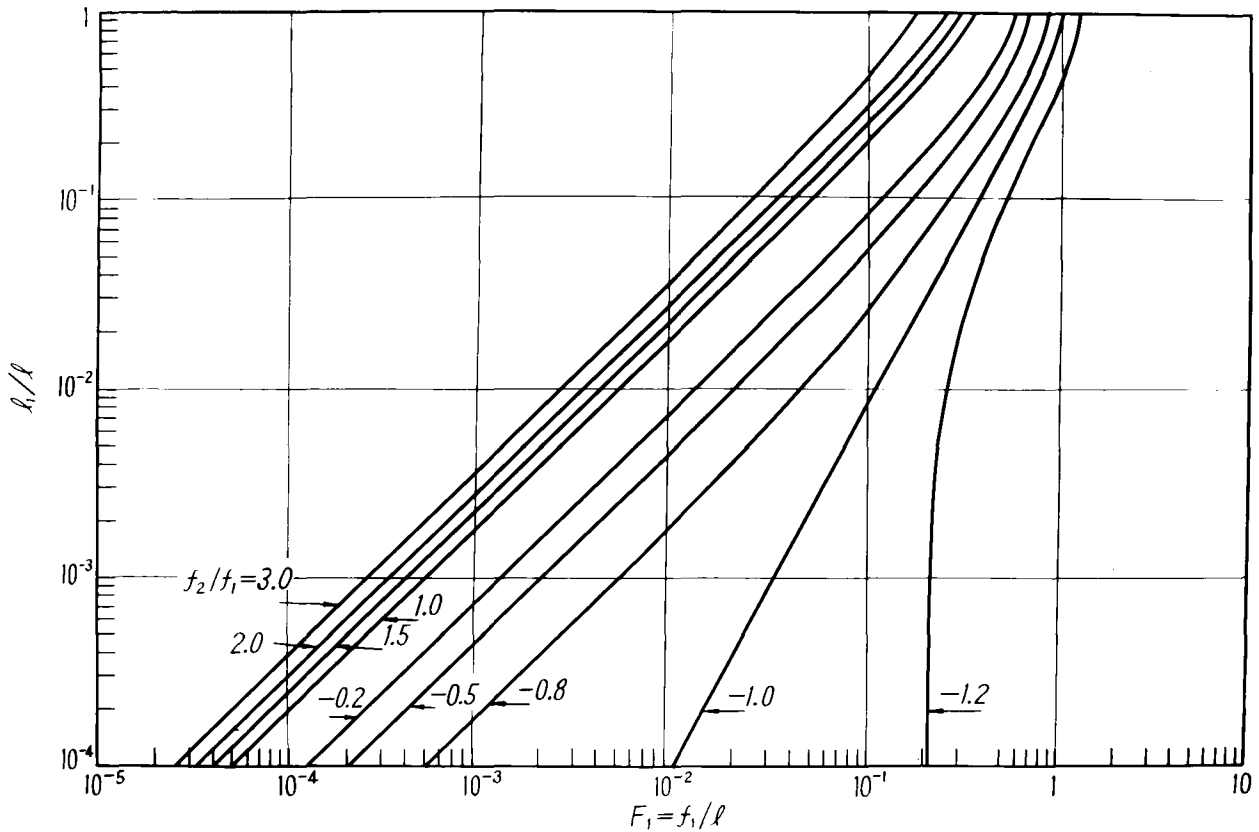


図9.3 最適設計における F_1 に対する f_1/l の選定方

$$w_{dm} = \sqrt{\frac{l}{R}} \left[4 \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 \cdot \frac{(1 - F_1 - F_2)^2}{1 - 2F_2} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (9.7)$$

また，同じ方法によって，図9.1(a)に示す凸凸レンズ対に対する値を求めて図9.5に示す。

9.2.3 姿態整合

さて，図9.1の③点は，ここで等位相面が平面になっており，導波束の入，出射部における姿態整合に際して考慮すべき点である。この点のスポットサイズ w_m は，波面係数の虚数部が零になる条件を用いて次のように表わされる。

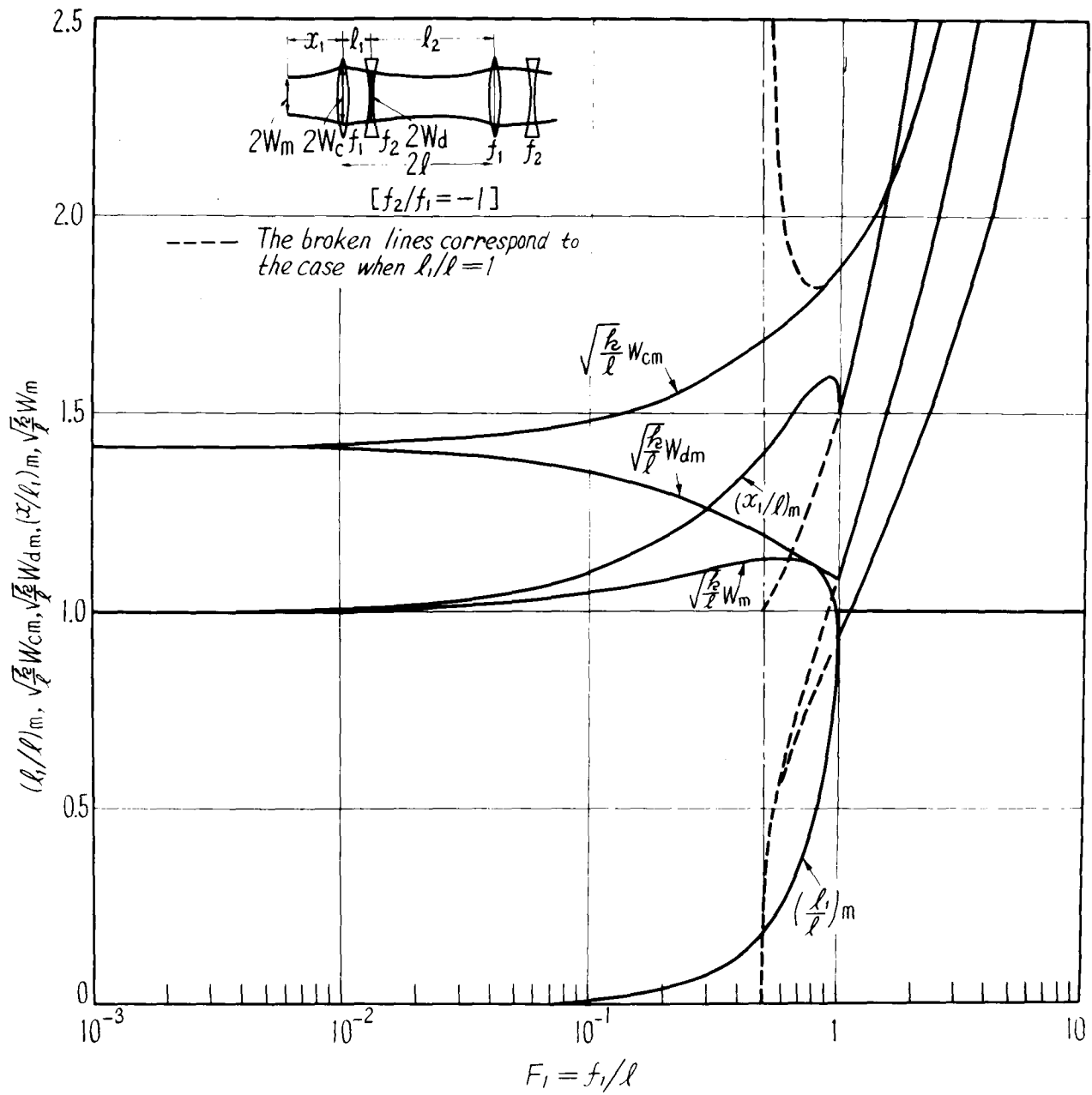


図9.4 レンズ対導波系における最適パラメータ (凸凹レンズ対)

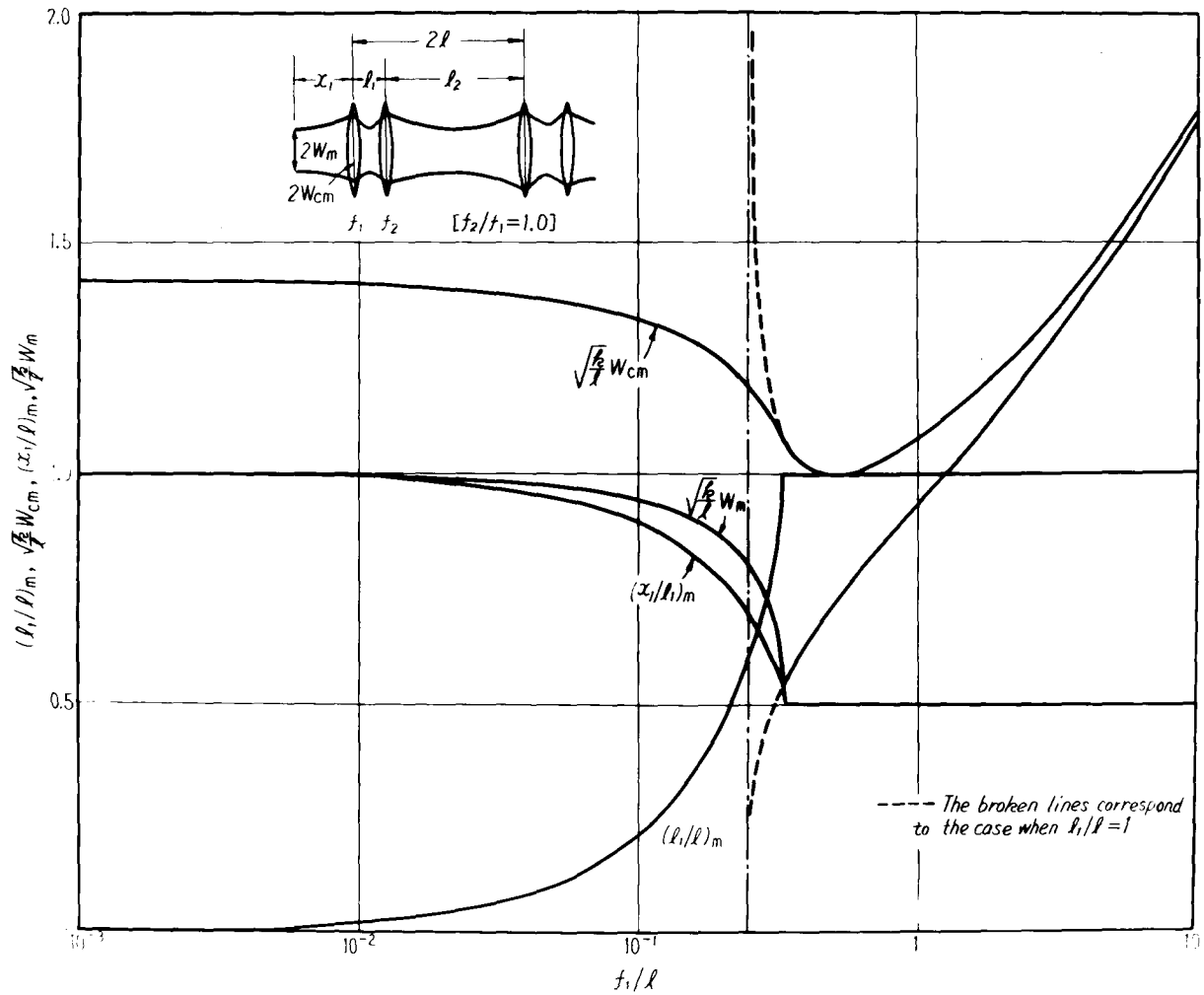


図9.5 レンズ対導波系の最適パラメータ (凸-凸レンズ対)

$$W_m = \sqrt{\frac{l}{F}} \left[\frac{4 \{ 2F_1 F_2 - Z_1 Z_2 (F_1 + F_2 - L_1) - L_1 (Z_1 F_2 + Z_2 F_1) \}^2}{\{ 4F_1 F_2 - 2(F_1 + F_2) + 5 \} \{ 2(F_1 + F_2) - 5 \}} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (9.8)$$

ただし、オ1レンズから③までの距離を x_1 とすると、

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= x_1/l = 1 - L_1(L_1 - 2F_1) / \{ 2(L_1 - F_1 - F_2) \} \\ Z_2 &= x_2/l = 2 - Z_1 - L_1 \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

が表わされる。最適設計条件における x_1/l の値を 図9.4, 9.5 に併記してある。この点において姿勢整合を行えばよい。

ここで注意すべきことは、最適設計条件を表わす式(9.5)は $f_1, f_2, l_1 \ll l$ のときには、

$$f_{eq} = \frac{f_1 f_2 l}{l_1} \quad (9.10)$$

とおいたとき、1枚のレンズ(焦点距離 f_{eq})に対する共焦点の条件

$$f_{eq} = l/2$$

とほぼ等価になっている。

また、図9.1で、 f_1 あるいは f_2 が設計値から微小にずれているとき、一定の l に対して、 f_1 および l_1 を変化させ、点④における等位相面が平面で、かつスポットサイズを不変に保つことにより、これを補正できる。

9.3 素子対の角および位置変動に対するビーム光路の安定性

5章で述べたように、光ビーム導波系の集束素子が微小に変動しても、ビームが導波系の軸からずれてしまうおそれがある。単レンズ列では、レンズの位置変動に対しては変動を伴うが、傾くような角変動に対しては一次の近似では影響をうけないので、最も安定な構成といえる。また、単反射鏡では逆に角変動によって大きな影響をうける。

さて、後でくわしく述べるように、曲がり部において、小さな曲率半径をもって曲げ、かつ焦点の長い素子として、図9.6のようなレンズ対、あるいは反射鏡対を一つの台の上に固定する構成法では、等価的な厚肉効果のために、位置変動、角変動が共に安定性に影響する。このため、特に曲がり部において曲げ得る曲率半径に制限ができる。素子偏差(レンズの焦点距離、レンズ対の間隔、対の間隔)をも含めた、これらの変動に対するビームの安定性について、5章で求めた一般的な議論を用いて検討を行う。

9.3.1 変動を表わすマトリクス

集束素子対を周期的に配置した導波系の n 番目の区間における素子を図 9.6 のように表わす。点線は素子の台であり、この台の上の基準点 O を原点とする座標系を考えて、この座標系に対する 3 つの変動、 ΔR_n (位置変動)、 $\Delta \Omega_n$ (角変動) は次の 6 つの成分で表わせば十分である。

$$\Delta R_n = \Delta x_n \hat{x}_{n1} + \Delta y_n \hat{y}_{n1} + \Delta z_n \hat{z}_{n1} \quad (9.11)$$

$$\Delta \Omega_n = \Delta \Omega (\Delta \theta_n, \Delta \varphi_n, \Delta \psi_n) \quad (9.12)$$

ただし、 $\hat{x}_{n1}, \hat{y}_{n1}, \hat{z}_{n1}$ は O を基準点とする座標系の単位ベクトルである。また、 Δz_n に対しては一次の近似では変動を無視できるので、後の計算では残りの 5 つの成分を考慮する。

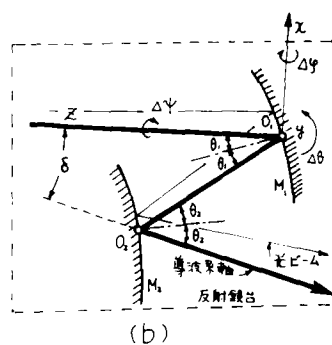
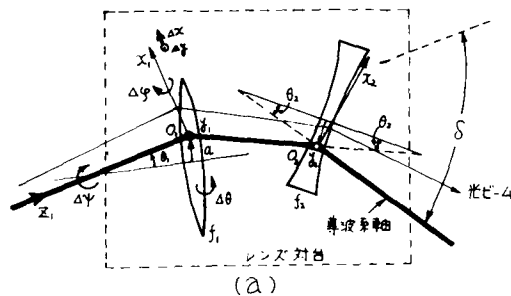
さて、 n 番目の周期における光ビームの位置ベクトルを O_1 から始めて R_n 、導波系軸となる角を θ_n とすると、 $\hat{x}_{n2}, \hat{y}_{n2}$ 方向の要素に分けて次のように表わされる。

$$R_n = x_n \hat{x}_{n2} + y_n \hat{y}_{n2} \quad (9.13)$$

$$\theta_n = \theta(x'_n, y'_n) \quad (9.14)$$

ただし、 $\hat{x}_{n2}, \hat{y}_{n2}$ は対の出射面における導波系軸と直角な単位ベクトルである。ビームと z 軸のなす角は微小であるとして、角度は z に関する微分値 x'_n, y'_n で表わす。これらの量を 5 章で行ったようにマトリクス型式で次のようにおく。

$$X_n = \begin{pmatrix} jk x'_n \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y_n = \begin{pmatrix} jk y'_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (9.15)$$



すると、 n 番目と $n-1$ 番目の素子については次の関係で結ばれる。

$$\left. \begin{aligned} X_n &= M_n X_{n-1} + U_n \\ Y_n &= M_n Y_{n-1} + V_n \end{aligned} \right\} \quad (9.16)$$

ここで、 n 番目の区間における、自由空間(長さ $l_{2,n}$)、素子対(レンズ①(焦点距離 $f_{1,n}$)—自由空間(長さ $l_{1,n}$)—レンズ②(焦点距離 $f_{2,n}$))に属する $\tilde{F}$ マトリクスをそれぞれ $\tilde{F}_{f,n}$, $\tilde{F}_{pn}$ とおくと、逆変形光線マトリクスは次のように表わされる。

$$M_n = (\tilde{F}_{f,n} \cdot \tilde{F}_{pn})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_{1,n}}{f_{2,n}} - \frac{l_{2,n}}{F_n} & -j \frac{R}{F_n} \\ j \frac{L_n}{R} & 1 - \frac{l_{1,n}}{f_{1,n}} \end{pmatrix} \quad (9.17)$$

ただし、

$$\frac{1}{F_n} = \frac{1}{f_{1,n}} + \frac{1}{f_{2,n}} - \frac{l_{1,n}}{f_{1,n} f_{2,n}} \quad (9.18)$$

$$L_n = l_{1,n} + l_{2,n} - \frac{l_{1,n} l_{2,n}}{f_{1,n}} \quad (9.19)$$

で表わされる。^{#1)}

一方、変動のマトリクスは、レンズ対と反射鏡対では多少異なっている。図9.6を参照して、各変動に対する影響を算定すると、次のように表わすことができる。

$$U_n = \begin{pmatrix} jR u'_n \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} jR (\alpha_x^{(n)} \Delta x_n + \alpha_\theta^{(n)} \Delta \theta_n) \\ \beta_x^{(n)} \Delta x_n + \beta_\theta^{(n)} \Delta \theta_n \end{pmatrix} \quad (9.20a)$$

$$V_n = \begin{pmatrix} jR v'_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} jR (\alpha_y^{(n)} \Delta y_n + \alpha_\varphi^{(n)} \Delta \varphi_n + \alpha_\psi^{(n)} \Delta \psi_n) \\ \beta_y^{(n)} \Delta y_n + \beta_\varphi^{(n)} \Delta \varphi_n + \beta_\psi^{(n)} \Delta \psi_n \end{pmatrix} \quad (9.20b)$$

各係数は、表9.1のように表わすことができる。比較のために単レンズ列の

#1) 曲がり部では L_n は 導波管の軸にとり考える。また、反射鏡に対しても同じ表式が成り立つ。

係数も示した。

表9.1 式(9.20)における変動の係数 (サフィックス n は除いてある)

係数	単レンズ	レンズ対	反射鏡対
α_x	$1/F$	$1/F$	$1/F$
α_θ	0	l_1/f_2	l_1/f_2
β_x	0	$\cos\delta - 1 + l_1/f_1$	$\cos\delta - 1 + l_1/f_1$
β_θ	0	$-l_1(1 - \cos 2\hat{\theta}_2)$	$-l_1(1 + \cos 2\hat{\theta}_2)$
α_y	$1/F$	$1/F$	$1/F$
α_r	0	$\cos\delta - 1 + l_1/f_2$	$\cos\delta - 1 + l_1/f_2$
α_r	0	$\sin\delta + f_1 \sin 2\theta_1 / F$	$\sin\delta$
β_y	0	l_1/f_1	l_1/f_1
β_φ	0	$-l_1(1 - \cos 2\hat{\theta}_1)$	$-l_1(1 + \cos 2\hat{\theta}_1)$
β_r	0	$(2l_1 - f_1) \sin 2\theta_1$	$l_1 \sin 2\theta_1$

9.3.2 素子偏差を含む対のランダムな変動によるビームの安定性

1つの対の変動の影響は、表9.1からわかるが、ここでは素子偏差をもっている n 区間の導波系において、ランダムな対の変動によって生ずるビーム変動の統計平均を5章の結果を用いて算出する。

いま、導波素子のパラメータに偏差を考えて

$$\left. \begin{aligned} f_{1n} &= f_1 + \Delta f_{1n} & f_{2n} &= f_2 + \Delta f_{2n} \\ l_{1n} &= l_1 + \Delta l_{1n} & l_{2n} &= l_2 + \Delta l_{2n} \\ F_n &= F + \Delta F_n & L_n &= L + \Delta L_n \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

とおき、偏差については

$$(i) \langle \Delta f_{1n} \rangle = \langle \Delta f_{2n} \rangle = \langle \Delta l_{1n} \rangle = \langle \Delta l_{2n} \rangle = \langle \Delta F_n \rangle = \langle \Delta L_n \rangle = 0 \quad (9.21)$$

$$(ii) \langle \Delta f_{1n} \Delta f_{1m} \rangle = \sigma_{f_1}^2 \delta_{nm}, \quad \langle \Delta f_{2n} \Delta f_{2m} \rangle = \sigma_{f_2}^2 \delta_{nm} \quad (9.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle \Delta l_{1n} \Delta l_{1m} \rangle &= \sigma_{l_1}^2 \delta_{nm} & \langle \Delta l_{2n} \Delta l_{2m} \rangle &= \sigma_{l_2}^2 \delta_{nm} \\ \langle \Delta f_{1n} \Delta f_{2n} \rangle &= 0, & \langle \Delta l_{1n} \Delta l_{2n} \rangle &= 0, \dots \text{etc} \end{aligned} \right\}$$

の関係が成り立つ，あるいは変動がランダムでお互いの間に相関がないものと仮定する．

このとき， n 区間通過後のビーム変動の統計2乗平均値は，5章の式(5.47)において， $\varepsilon=0$ の場合つまり

$$a_1 = \sigma_{f_1}^2 + \sigma_{f_2}^2 + \sigma_{l_1}^2 + \sigma_{l_2}^2 \quad (9.23)$$

とおけば，次式で表わされる．

$$\langle r_n^2 \rangle = 2 \left[\sum_{I=x, y, \theta, \varphi, \psi} C_I \langle \Delta I_n^2 \rangle \right] \cdot \frac{e^{na_1} - 1}{a_1} \quad (9.24)$$

ただし，

$$C_I = \frac{L^2}{4} \langle \alpha_I^{(n)2} \rangle + \frac{L}{2} (1 - l_1/f_1) \langle \alpha_I^{(n)} \beta_I^{(n)} \rangle + \frac{L}{4F} \langle \beta_I^{(n)2} \rangle \quad (9.25)$$

ここで，式(9.25)の各係数に式(9.1)の値を用い，パラメータ間に

$$l_2, L, F \gg l_1, f_1, f_2$$

のような大小関係があるものとし，かつ前節で述べた最適設計の場合には，式(9.18)(9.19)で表わされる F, L の間には

$$F = L/2 \quad (9.26)$$

の共焦点の条件が成り立っているものとする．このときの種々の構成に対するビーム変動の大きさを求めて表9.2に示す．各々の場合について，検討を加えると次のようになる．

(i) 単レンズ列 $\dots f_2 \rightarrow \infty, l_1 \rightarrow 0$ とすればよい．なお，後来問題にされて

表9.2 各種の集束素子対を用いる導波系のビームの安定性

$\langle r_n^2 \rangle = 2 (C_x \langle \Delta x_n^2 \rangle + C_y \langle \Delta y_n^2 \rangle + C_\theta \langle \Delta \theta_n^2 \rangle + C_\varphi \langle \Delta \varphi_n^2 \rangle + C_\psi \langle \Delta \psi_n^2 \rangle) (e^{n\alpha} - 1) / \alpha$									
導波系	構 成	条 件	α	C_x	C_y	C_θ	C_φ	C_ψ	
(a) 単素子対		$f = l$	$2(\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2)$	1	1	0	0	0	
			$2(\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2)$	1	1	0	0	$l^2 \overline{\delta^2}$	
(b) 凸凹レンズ対		$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l_1}{f_1 f_2}$ $2l = l_1 + l_2$	$2(\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2 + \sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2)$	1	1	$(\frac{l_1}{f_2})^2 l^2$	$(\frac{l_1}{f_2})^2 l^2$	0	
		$F = l, l_2 \gg l_1$ $\delta = 2(\theta_2 + \theta_1)$	$2(\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2 + \sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2)$	1	1	$(\frac{l_1}{f_2})^2 l^2$	$(\frac{l_1}{f_2})^2 l^2$	$l^2 \overline{\delta^2}$	
(c) 凹凹反射鏡対		$2l = l_1 + l_2$ $f = l$	$2(\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2 + \sigma_{y1}^2)$	1	1	$\frac{l_1^2}{2} \overline{(1 + \cos 2\theta_2)^2}$	$\frac{l_1^2}{2} \overline{(1 + \cos 2\theta_2)^2}$	$\frac{l_1^2}{2} \overline{(\sin 2\theta_1)^2}$	
		$l_2 \gg l_1$ $\delta = 2(\theta_2 - \theta_1)$	$2(\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2 + \sigma_{y1}^2)$	1	1	$\frac{l_1^2}{2} \overline{(1 + \cos 2\theta_2)^2}$	$\frac{l_1^2}{2} \overline{(1 + \cos 2\theta_2)^2}$	$l^2 \overline{\delta^2}$	
(d) 凹凸反射鏡対		$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l_1}{f_1 f_2}$ $L = l_1 + l_2 - \frac{l_1 l_2}{f_1}$	$2(\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2 + \sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2)$	1	1	$(\frac{l_1}{f_2})^2 l^2$	$(\frac{l_1}{f_2})^2 l^2$	$\frac{l_1^2}{2} \overline{(\sin 2\theta_1)^2}$	
		$l_1 + l_2 = F = l$ $l_2 \gg f_1, l_2 \gg l_1$	$2(\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2 + \sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2)$	1	1	$(\frac{l_1}{f_2})^2 l^2$	$l^2 \overline{(\frac{\delta^2}{2} - \frac{l_1}{f_2})^2}$	$l^2 \overline{\delta^2}$	

になかった曲がり部におけるレンズの角変動 $\Delta\psi$ がやはり安定性に影響を及ぼす。

- (ii) 凸凹 レンズ対 ... $\delta x, \delta y, \delta\psi$ に対しては，厚レンズ列とほぼ等しいが， $\Delta\theta, \Delta\varphi$ に対しては厚肉の効果がでている。
- (iii) 凸凸 レンズ対 ... 安定性を表わす表式は (ii) と同じであるが，とり得る β の値が凸凹 レンズ対に比べて大きいため（図9.3 から明らか），安定性はある。
- (iv) 凹・平面反射鏡対 ... 直線部においても角変動の影響が現われている。
- (v) 凹凸面反射鏡対 ... 安定性はほぼ凸凹レンズ対と等しいが，曲がり部において $\delta\psi$ の影響がきいてくる。

これらの検討の結果，種々の集束系子対導波系の安定性の判定を行った結果をまとめて表9.3に示す。

9.4 導波系の曲がり部の検討と設計例

導波系を設置する場合，地形や建物の制約から，曲がり導波系を必要とする。曲がりには，(i) 比較的大きな角度をもつて（角度 δ_n ）折線状に屈折させる場合と，(ii) 一定の曲率半径 R_b で緩やかに曲がる場合とがある。9.3 の検討では，(i) に対しては平均的な値 $\sqrt{\delta_n^2}$ を，(ii) に対しては一定値 δ を用いればよい。

9.4.1 折線状の曲がり。

屈折角 δ_n はこの場合には比較的大きな値が予想される。後に11章で示すように，効外部では $|\delta_{n, \max}| \cong 15^\circ$ ， $\sqrt{\delta_n^2} \cong 10^\circ$ 程度を見込む必要がある。ただし，これは水平方向の曲がりであって，垂直方向には $\sqrt{\delta_n^2} \cong 3^\circ$ 程度でよい。

屈折の角度 δ_n は,

$$\text{レンズ対} : \delta_n \cong 2a_n / f_1 \quad (9.27)$$

$$\text{反射鏡対} : \delta_n \cong 2(\theta_{2n} - \theta_{1n}) \quad (9.28)$$

で与えられる。ただし、レンズ対の場合には、 a_n をビームのレンズ軸からのずれ、 $f_1 = |f_2|$ の場合を示している。 f_1 を単レンズに比べて1桁以上は小さくとれるから、それだけ δ_n も大きくとれる。しかし、表9.2からわかるとおり、 δ の値によって角変動による影響が大きくなり、 δ には制限が加わる。また、反射鏡対では、曲げ得る角度には θ_{2n} , θ_{1n} の差を適当に選ぶことにより、制限はないが、やはり角変動に対する制約が加わることはレンズ対と同じである。

9.4.2 一様な曲がり

一様な曲率半径 R で、図9.7のように曲げる場合は、表9.2において $\delta = \delta_b = \text{const}$ とおけばよく、 R は δ を用いて次式で表わされる。

$$R \cong 2l / \delta_b \quad (9.29)$$

したがって、各々の場合には、

$$\text{レンズ対} : R \cong 2f_1 / a \quad (9.30)$$

$$\text{反射鏡対} : R \cong l / (\theta_2 - \theta_1) \quad (9.31)$$

9.4.3 設計例

次に具体的な数値例を示す。ただし、波長は $6328 \text{ \AA}$ 、1中程区間は 10 km とおいた。また、表9.2において、 $\langle r_n^2 \rangle$ を表わす各項がすべて等しく Δ^2 であるとするれば、 $\langle r_n^2 \rangle \cong 10n\Delta^2$ となるから、これより $\sqrt{\langle r_n^2 \rangle} = 10^{-2} \text{ (m)}$ とし Δ^2 を求め、角変動量の許容値とした。

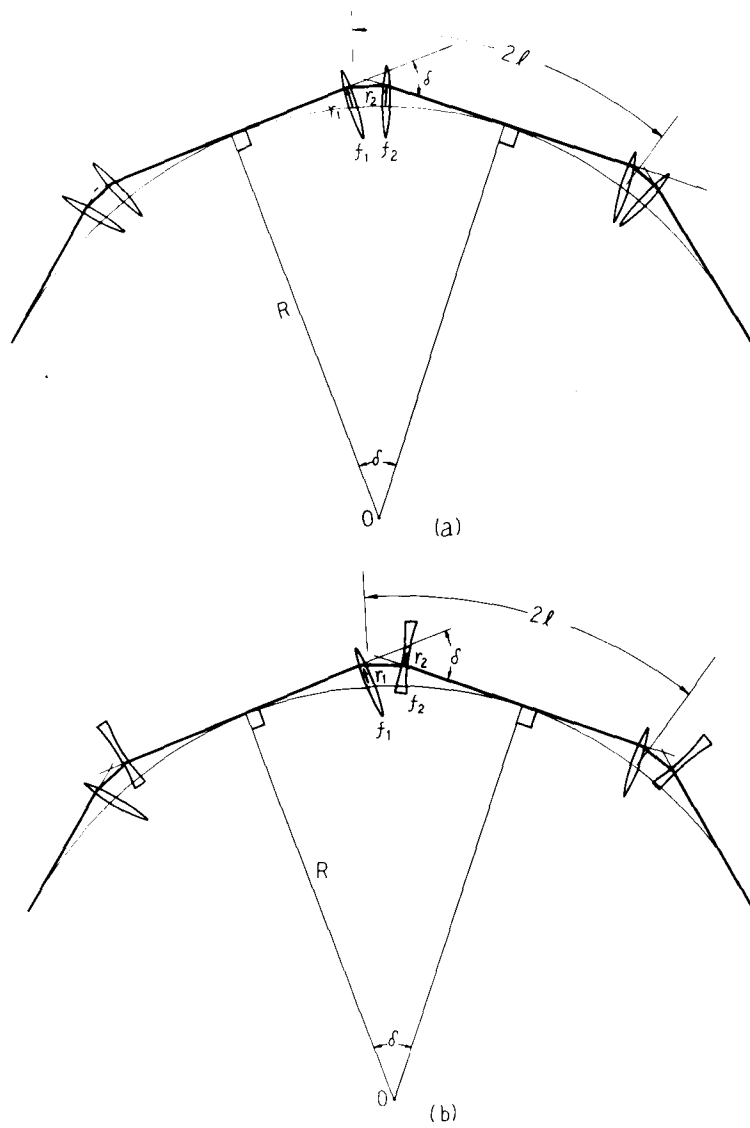


図 9.7 一様な曲率半径 R で曲げる場合
(レンズ対を用いる例)

<数値例1> 凹・平面反射鏡対列直線部

$2l = 50\text{ m}$, $l_1 = 10\text{ cm}$, 等価的な $f_1 = 25\text{ m}$, $f_2 = \infty$, $\theta_1 = \theta_2 = 30^\circ$ とすると,
 $n = 10^4 / 50 = 200$, $w_{1m} = 2.24\text{ mm}$, 強度が中心の 0.1% になるビーム半径 $w_{0.1}$
 $= 5.9\text{ mm}$, $w_m = 1.59\text{ mm}$, $x_1 = 25\text{ m}$, 式(2.16)から求めた凹面鏡の曲率半径
 $R_x = 57.73\text{ m}$, $R_y = 43.30\text{ m}$, $\Delta^2 = \langle r_n^2 \rangle / 10n = 5 \times 10^{-8} (\text{m}^2)$, 角変動量の許容
 値 $\delta\theta = 7.6''$, $\delta\varphi = 7.6''$, $\delta\psi = 2.2'$, 位置変動の許容値は $\delta x = \delta y = 0.22\text{ mm}$
 となる。反射鏡の寸法としては, 変動を考慮に於いて $4.6\text{ cm} \times 4\text{ cm}$ 程度が適
 当であろう。

<数値例2> 同上・曲がり部

例1と同じ反射鏡間隔で, $\theta_1 = 30^\circ$, $2l = 500\text{ m}$ では $\sqrt{\delta_n^2} = 10^\circ$ 程度を見込
 むならば, この間隔では $\sqrt{\delta_n^2} = 1^\circ$ とおけばよいから, 許容値は $\delta\theta = 7.7''$,
 $\delta\varphi = 7.6''$, $\delta\psi = 1.8''$ となる。このように, 軸のまわりの回転 $\delta\psi$ に対して
 設置精度を秒程度におさえる必要がある。なお, 凹面鏡の入射角は直線部と
 同じにとれば, 伝送経路の整合は不用である。

<数値例3> 凸凹レンズ対列直線部

$2l = 50\text{ m}$, $f_1 = -f_2 = 50\text{ m}$ とすると, $n = 200$, $l_1 = 1\text{ cm}$, $w_{1m} = 2.35\text{ mm}$, $w_{0.1} =$
 6.18 mm , $w_m = 1.66\text{ mm}$, $x_1 = 25.50\text{ m}$, $\Delta^2 = 5 \times 10^{-8} (\text{m}^2)$ とすると, 許容値は
 $\delta\theta = 1.6''$, $\delta\varphi = 1.6''$, $\delta\psi \gg \delta\theta, \delta\varphi$ となり, 厚肉効果のために角変動の影響
 が大きい。

<数値例4> 同上曲がり部

例3と同じレンズ対で, $\sqrt{\delta_n^2} = 1^\circ$ とすると, $a = 0.44\text{ cm}$, $\delta\theta = \delta\varphi = 1.6''$,
 $\delta\psi = 1.9''$ となる。位置変動の許容値はいずれも例1と等しい。

これらの例からわかるように, 曲がりの場合の角変動の許容値は, 導波束
 の設置に対して非常に高い精度を要求している。曲がり部では特に, 自動制
 御系あるいは, その他の光線変動抑制器を用いてこれらの条件を緩和する必
 要がある。

9.5 本章のまとめ

9.5.1 本章で新たに得られた結果

導波系の曲がり部における曲率半径をできるだけ小さくするという要求に対し、レンズあるいは反射鏡を対にして用いる方法を提案し、安定性からくる制約などについて検討し、次の結果を得た。

- (i) 2枚のレンズを対にして用い、互いに軸をずらせて配置し、かつビームを異軸に入射させることによって、ビームがうつける偏向角を大きくでき、したがって小さい曲率半径で曲げられることを特徴とするレンズ対列導波系の提案を行った。
- (ii) 組合わせレンズによって周期的につくられる導波系の伝送状態の解析と、最適設計条件を求めた。
- (iii) レンズ対、反射鏡対の種々の組合わせに対するビームの安定性と5章の結果を用いて検討し、安定性では凸凹レンズ列と凹平面反射鏡列が良いことを明らかにした。

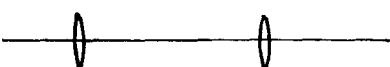
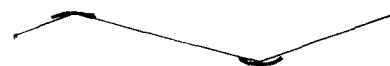
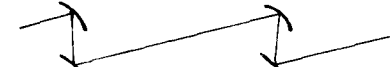
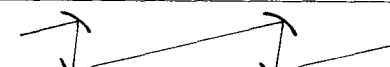
9.5.2 結 論

- (i) 単レンズ、単反射鏡で長焦点のものが得られない場合には、レンズあるいは反射鏡を組合わせることによって等面的に長焦点のものが得られる。
- (ii) また、これらの組にしたレンズ対も互いに異軸にすれば、単反射鏡よりも1けた以上の大きな偏向角をもたせることができる。
- (iii) 単反射鏡では、角変動の影響が大きいので、対にして用いる必要がある。反射損失という点からはレンズよりも有利であろう。
- (iv) このように、レンズ対、あるいは反射鏡対では一応大きな偏向角をもたせ得るが、その反面、束子対の目的位置変動や角変動によってビームの安定度が損われるため、曲げうる角度には制限ができる。10kmの中

粗区間内で曲がりの角度の2乗平均値 $\sqrt{\delta_{\theta}^2} = 1^\circ$ 程度にするには、50m間隔に配置した素子対の角変動を秒以下におさえなければならぬ。

(v) 色々な対に対して、ビームの安定性、曲げ得る角度の大きさからみた曲がり部の特性などから判定した結果を表9.3に示す。

表9.3 集束素子対導波系の安定性の評価

導 波 系	曲げ得る角度	安 定 性
(a) 	小	良
(b) 	大	悪
(c) 	大	やや良
(d) 	大	悪
(e) 	大	やや良
(f) 	大	やや悪
(g) 	大	やや良

10章 ガウス・モードフィルタとレンズ"を併用する導波系

素子のランダムな変動や、素子偏差によって生ずるビームの不安定が、導波系設置に際して問題になることは、前の2章で述べた。本章ではこれらを改善するための一つの方法として、ガウス・モードフィルタ (GMF) を用いる導波系の提案と、設計手法等について述べた。

10.1 本章の目的

周期的に配置された集束素子が、設計軸から位置変動、角変動をおこすと、統計的に加算されて、ビーム光路が不安定になったり、スポットサイズが増大する問題が生ずる。これに対する一つの解決策は、ビーム光路安定器 (Beam Redirector) を用いることであるが、ビームのずれを検出し、集束素子と位置的にずらすための補助回路を必要とするし、集束素子の素子偏差によるスポットサイズ増大を補正することはできない。また、レンズを用いる導波系において、レンズの口径が有限であることを考慮に入れると、レンズのランダムな変位によるビームの不安定性がおこえられ、比較的低損失で伝送されることが近似的に指摘されており、数値計算による取扱いの報告もみられる。この場合には、ガウス型の基本伝送状態の一部が切られるために、状態変換がおこり、伝送損失が基本状態と大きく異なる状態に対しては、多量状態伝送になるので、場合によつては一つの欠点になると思われる。

本章では、変形光線マトリクスの行列式が1より小さい素子を用いるとビームの不安定性が抑制されることが5章で述べられたが、その1例として2章で導波素子としての性質を求めたGMFをレンズに蒸着した導波系についての検討を行う。特に、ここでは伝送状態、素子のランダムな変位によっておこるビーム不安定性の改善度、GMFによって生ずる伝送損失を考慮にいれた設計について述べる。

10.2 導波管の伝送状態

最も簡単な構成としては、図10.1のようにレンズ面に蒸着したものが考えられる。このときの伝送状態を求めるために、GMFから次のGMFまでの1区間のFマトリクスは次のように表わされる。

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2l/f - j2l/(Rw_g^2) & -1/w_g^2 + jR/f \\ j2l/R & 1 \end{pmatrix} \quad (10.1)$$

ただし、 $2l$ はレンズ間隔、 f はレンズの焦点距離、 $R = w\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ である。

伝送状態のGMF上の波面係数 P は、8章式(8.2)から次のように求められる。

$$P = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\eta_1 + \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}}{2}} - \frac{1}{w_g^2} \right] + j \left[2 \sqrt{\frac{\eta_2}{2(\eta_1 + \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2})}} + \frac{R}{2f} \right] \quad (10.2)$$

ここで、

$$\eta_1 = (v_0^2 + 8f/l - 4)/w_0^4, \quad \eta_2 = 4v_0^2(f/l - 1)/w_0^4 \quad (10.3)$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{2f}{R}} \quad (10.4)$$

$$v_0 = w_0/w_g \quad (10.5)$$

また、伝送状態の安定条件は、式(8.6)より

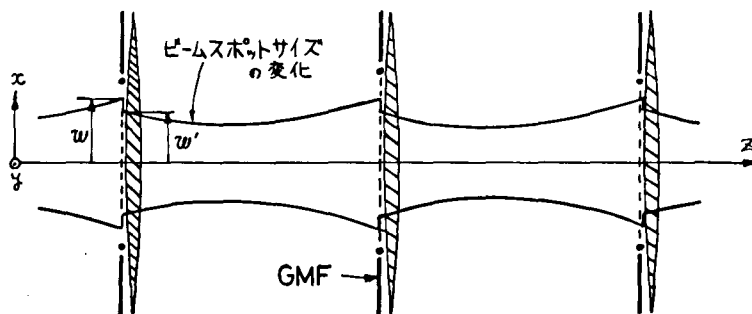


図10.1 GMFを併用する導波管の伝送状態

$$\eta_1 + \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} > 2/w_0^2 \quad (10.6)$$

で示される。有限の w_0 をもつ G M F が挿入された場合には、 $2l, f$ のすべての値に対して式 (10.6) の条件が満たされる。

また、 $l=f$ の共焦点の場合には、式 (9.2) は

$$\begin{aligned} P &= (\sqrt{1 + v_0^4/4 - v_0^2/2}) / w_0^2 + jR/f \\ &\equiv 1/w^2 + jR/f \end{aligned} \quad (10.7)$$

となる。これより、レンズ列のみによる導波系のスポットサイズ w_0 と G M F を付けたときのスポットサイズ w との比は、次のようになる。

$$(w/w_0)^2 = \sqrt{1 + v^2} \quad (10.8)$$

ただし、

$$v = w/w_0 \quad (10.9)$$

なお、レンズの出射面におけるスポットサイズ w' は、次式で表される。

$$w'^2 = w^2 \left[1 + v_0^4/2 - v_0^2 \sqrt{1 + v_0^4/4} \right] \quad (10.10)$$

G M F は、図 10.2 (a) のようにレンズ前面に蒸着するか、(b) のようにレンズ後面に蒸着するか、(c) のように 2 枚の平凸レンズの間に挿入するかの方法が考えられるが、これらいずれの場合も、伝達状態は式 (9.2) と同じになる。

10.3 導波系に異軸, 斜入射するビームに対するビーム光路

図 10.2 (a) に示す導波系の、自由空間 - G M F - レンズを 1 区間とする変形光路マトリックスの逆マトリックスは、式 (2.15) (2.43) (2.58) の積の逆マトリックスとして次のように表わされる。ここで、レンズ上のスポットサイズ w' を小さくする $l=f$ の共焦点の条件のもとで

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+v^2} & -jR \frac{2+v^2}{2f(1+v^2)} \\ -j \frac{2L}{R(1+v^2)} & \frac{1}{1+v^2} \end{pmatrix} \quad (10.11)$$

ただし,

$$|M| = \frac{1}{1+v^2} \equiv d^2 (< 1) \quad (10.12)$$

さて, このようなマトリクスで表わされる導波系の入射点におけるビームの位置ずれを x_0 , 傾きを x'_0 とすると, n 区間伝達後のビームのずれ x_n , x'_n は式 (5.15a) を用いると次のようになる. この場合 $\sin 2\theta = 1$ であるから

$$\begin{aligned} x_n &= d^n \left[(2dL \sin n\pi/2) x'_0 + \{d \sin n\pi/2 - \sin(n-1)\pi/2\} x_0 \right] \\ x'_n &= d^n \left[\{-d \sin n\pi/2 - \sin(n-1)\pi/2\} x'_0 - \{d(2+v^2)/(2f) \cdot \sin n\pi/2\} x_0 \right] \end{aligned} \quad (10.13)$$

1) ずれの量も d^n 程度で図 10.2(a) のように減小する.

また, 図 10.2(b)(c) についても, 波面の曲率をそれぞれ $R = -2f$, ∞ とおいた式 (10.13) を用いることによつて, M は式 (2.11) と同じになり, 式 (10.13) と同じ結果が得られる.

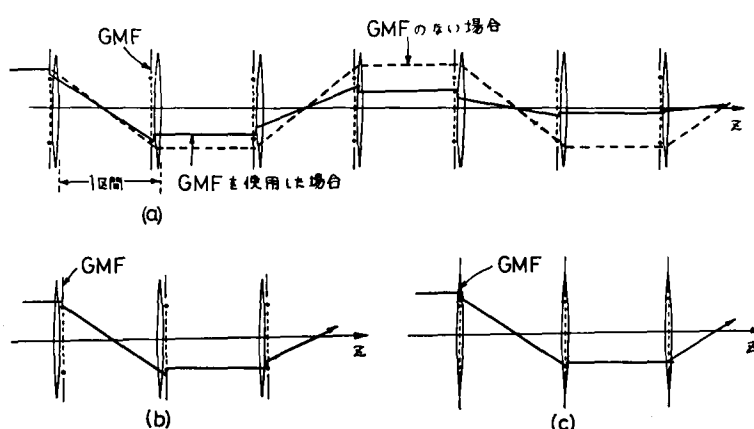


図 10.2 GMFを用いる導波系の異軸入射したビームに対するビーム光路. (a) GMFをレンズ前面につけた場合, (b) レンズ後面につけた場合 (c) レンズの中央にはさんだ場合.

10.4 設計軸からの曲がり変動に対するビーム光路の安定性と伝送損失

10.4.1 一様な曲がり変動に対するビーム光路

図10.3(a)のように、導波系が一様な曲率半径 R_b で曲がった場合には、図(b)のように、曲がりの部分はレンズのみが中心軸から

$$\Delta S_b = 2lf / R_b \quad (10.14)$$

だけずれた直線導波系におきかえられる。このとき、 n 区間を通過したビームの軸からのずれ $z_n^{(0)}$ は、5章の式(5.15b)において、 $u' = \Delta S_b / f$, $u = 0$ とおけば、共焦点の場合には $\sin 2\theta = 1$ であるから、次式のようになる。

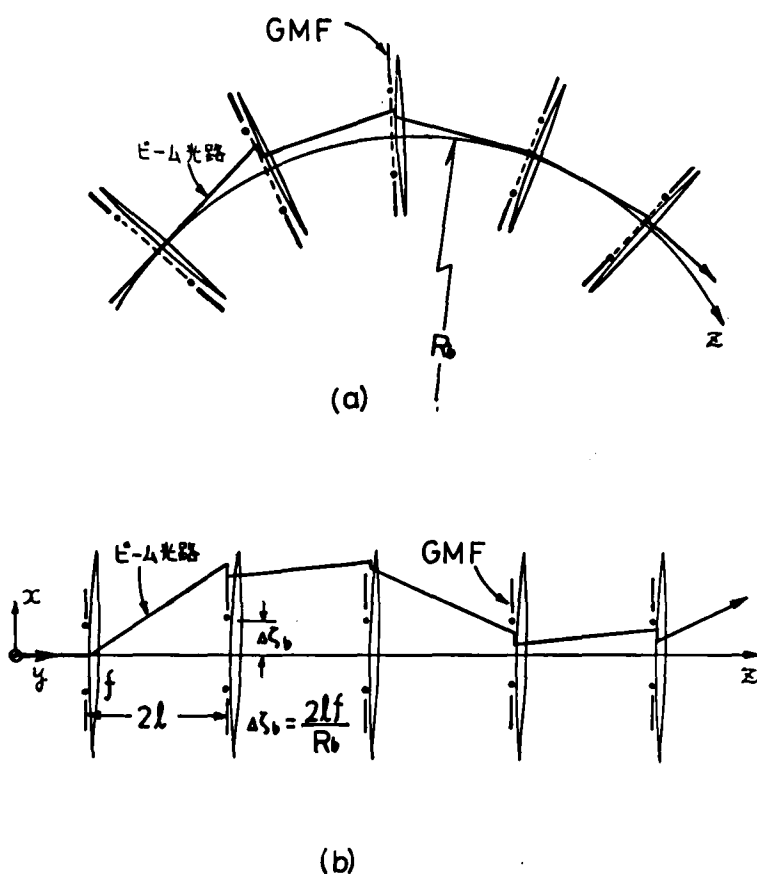


図10.3 (a) 一様な曲率半径をもつ曲がり変動
(b) 等価的に直線導波系で表わしたもの

$$x_n^{(b)} = \frac{2d^2}{1+d^2} \Delta \zeta_b \left[1 - d^n \left\{ \frac{1}{d} \sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{(n-1)\pi}{2} \right\} \right] \quad (10.15)$$

ただし、入射点ではビームは中心軸にそって入射するものとし、導波管は \$y\$ 平面内で曲がっているものとする。GMFを用いる導波管では \$d < 1\$ であり、\$n\$ が大きくなるにつれてビームは中心軸からずれて

$$x_n^{(b)} = 2d^2 \Delta \zeta_b / (1+d^2) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (10.16)$$

に収束する。

10.4.2 伝送損失

\$m\$ 番目の GMF の透過率 \$t_m\$ は 2 章式(2.44)に与えられている。ここで、\$m\$ 番目の区間におけるビームの軸ずれを \$x_m, y_m\$ とすると、\$n\$ 区間通過後のビームのうける伝送損失は次のように求められる。

$$\begin{aligned} L_n(\text{dB}) &= -10 \log_{10} \prod_{m=1}^n t_m \\ &= 4.34 \left[n \log_e (1+v^2) + \frac{1}{w_g^2 (1+v^2)} \left\{ \sum_{m=1}^n (x_m^2 + y_m^2) \right\} \right] \end{aligned} \quad (10.17)$$

ここで第 1 項は GMF の挿入損失、第 2 項はビームのずれによる損失の増加をそれぞれ表わしている。

いま、曲がりによる伝送損失の増加分 \$L_n^{(b)}\$ を求めるために、式(10.17)の \$x_m^2 + y_m^2\$ のかわりに、GMF 前面におけるビーム変位 \$(x_n^{(b)}/d^2)^2\$ を代入することによって、次式のようになる。

$$L_n^{(b)}(\text{dB}) = 4.34 \left(\frac{2d}{1+d^2} \right)^2 \left(\frac{\Delta \zeta_b}{w} \right)^2 n v^2 \quad (10.18)$$

したがって、あらかじめ曲がりが予定されている場合には、GMF の中心と

レンズの中心と Δz_b だけずらしておけば, $L_n^{(b)}$ は原理的には零にできる。
後に示すように, 非常に緩やかな曲がり変動の場合にすら, 伝送損失は増加する。

10.5 レンズのランダムな変動に対するビーム光路の安定性と伝送損失

10.5.1 ランダムな素子の変動に対するビーム変動

図10.4のような導波束で, 各単位区間のレンズ変動, $\Delta x_n, \Delta y_n$ があり, かつ, 焦点距離やレンズ間隔などに素子偏差がある場合のビーム変動を求める。x, y 方向成分はそれぞれ独立に計算できるので, まず, x 方向のみについて計算する。

n 番目の GMF 付きレンズを通過した後の x 方向のビーム変位 x_n , ビームの傾き $x'_n (= dx_n/dz)$ は, n-1 番目の値で表わすと

$$\begin{pmatrix} jR x'_n \\ x_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} jR x'_{n-1} \\ x_{n-1} \end{pmatrix} + U_n \quad (10.19)$$

となる。ただし, 変移行列マトリックスの逆マトリックス M_n は, 式(9.11)に素子偏差をも含めて次のように表わされる。

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l(1+\Delta l_n)}{f(1+\Delta f_n)} \left[1 + \frac{1}{1+v^2(1+\Delta v_n)} \right] & -jR \frac{2f(1+\Delta f_n)}{1+v^2(1+\Delta v_n)} \left[1 + \frac{1}{1+v^2(1+\Delta v_n)} \right] \\ -j \frac{1}{R} \frac{2l(1+\Delta l_n)}{1+v^2(1+\Delta v_n)} & \frac{1}{1+v^2(1+\Delta v_n)} \end{pmatrix} \quad (10.20)$$

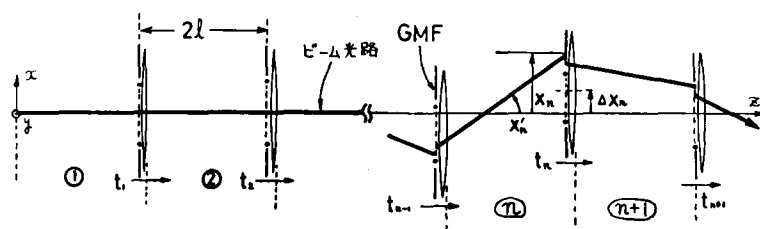


図10.4 変動のある導波束のモデル図

ただし， n 番目の区間におけるレンズの焦点距離 f_n ，レンズ間隔 l_n ， v_n^2 の偏差をそれぞれ Δf_n ， Δl_n ， Δv_n として

$$\begin{aligned} f_n &= f(1 + \Delta v_n) \\ l_n &= l(1 + \Delta l_n) \\ v_n^2 &= v^2(1 + \Delta v_n) \end{aligned} \quad (10.21)$$

とおく．また，変動のマトリクス U_n は，この場合次のようになる．

$$U_n = \begin{pmatrix} jk U_n' \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} jk \Delta x_n / f_n \\ v^2 \Delta x_n \end{pmatrix} \quad (10.22)$$

ただし， U_n' はレンズの位置ずれ Δx_n によっておこるビームの角度変動を， u_n はGMFの位置ずれ Δx_n による微小なビームの位置変動を表わしている．いま，各変動量の間には，相関性がなく，ランダムであると仮定し，

$$\begin{aligned} \langle \Delta x_n \Delta x_m \rangle &= \delta_{nm} \delta x^2 \\ \langle \Delta f_n \Delta f_m \rangle &= \delta_{nm} \delta f^2 \\ \langle \Delta l_n \Delta l_m \rangle &= \delta_{nm} \delta l^2 \\ \langle \Delta v_n \Delta v_m \rangle &= \delta_{nm} \delta v^2 \\ \langle \Delta x_n \Delta f_m \rangle &= 0, \dots \text{etc} \end{aligned} \quad (10.23)$$

の場合には，5章の結果が使用できる．式(5.37)において

$$\varepsilon = v^2, \quad \varepsilon' = 0 \quad (10.24)$$

とおく．また， v^2 が式(5.48)の第1項に比べて十分大きいような

$$0.001 < v^2 < 0.2 \quad (10.25)$$

の範囲では，^{#1)}

$$q_1 \cong -v^2 \quad (10.26)$$

#1) 式(10.23)で表わされるレンズの焦点距離などの偏差が数%程度までは式(10.25)の下限である．

とおくことができるので，ランダムなレンズの位置変動によって生ずるビーム変動 $\langle x_n^2 \rangle_d$ は，式(5.47)より次式のようになる。

$$\langle x_n^2 \rangle_d = \frac{2}{v^2(1+v^2)} (1 - e^{-nv^2}) \delta x^2 \quad (10.27)$$

同様にして，y方向における変動 Δy_n について

$$\langle \Delta y_n \Delta y_m \rangle = \delta y^2 \delta_{nm} \quad (10.28)$$

とすれば，両方向あわせて

$$\delta r^2 = \langle \Delta r_n^2 \rangle = \langle \Delta x_n^2 \rangle + \langle \Delta y_n^2 \rangle \quad (10.29)$$

$$\langle r_n^2 \rangle = \langle x_n^2 \rangle + \langle y_n^2 \rangle \quad (10.30)$$

と表わされるから，結局ビームの変動の2乗平均値は

$$\langle r_n^2 \rangle = \frac{2}{v^2(1+v^2)} (1 - e^{-nv^2}) \delta r^2 \quad (10.31)$$

となる。ただし，ここで用いたものは式(10.9)に与えられてゐる。

v^2 をパラメータとしたときの $\langle r_n^2 \rangle / \delta r^2$ と n との関係を図10.5に示す。この図には，従来のレンズのみの場合の式(5.1)^{#1)}と，それに量子偏差を含めた式(5.2)^{#2)}を併記した。レンズのみでは，統計的なビームの変動は n と共に増加するが，GMTを用いる場合にはその変動の増加をある程度抑制できることを示してゐる。

図10.5より，GMTを用いた場合のビーム変動の2乗平均値 $\sqrt{\langle r_n^2 \rangle_{\text{GMT}}}$ とレンズのみの場合の値 $\sqrt{\langle r_n^2 \rangle_{\text{Lens}}}$ との比と，パラメータ nv^2 との関係を求めて図10.6に示す。これより， $nv^2 = 1.5$ で $\sqrt{\langle r_n^2 \rangle_{\text{GMT}}} / \sqrt{\langle r_n^2 \rangle_{\text{Lens}}} = 0.5$ になることができる。

#1) 式(5.1) by Hirano and Fukatsu

#2) 式(5.2) by Steier

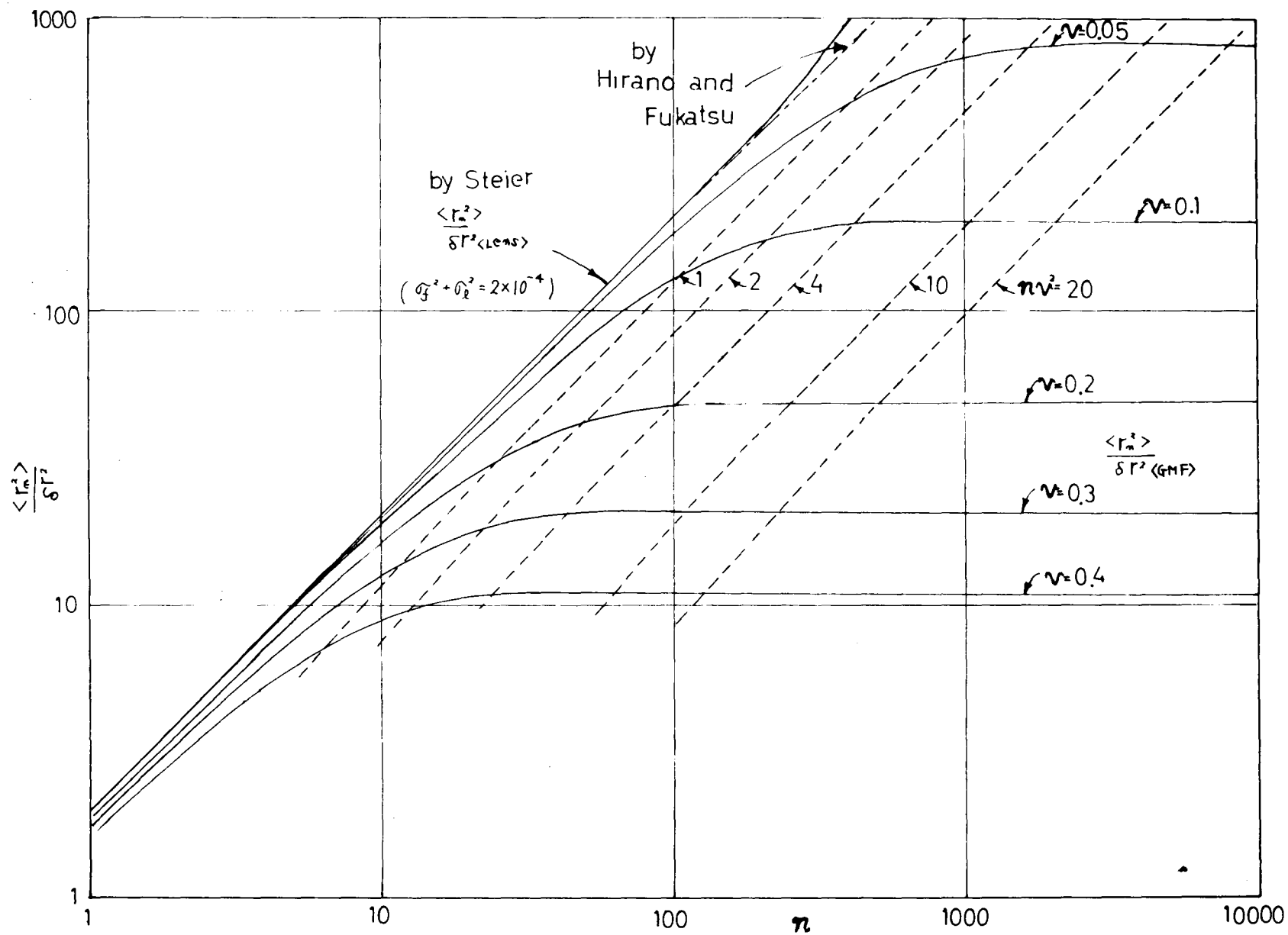


図10.5 レンズ導波管におけるビーム変動と n の関係 . $\delta r^2 = \langle \Delta r_m^2 \rangle$

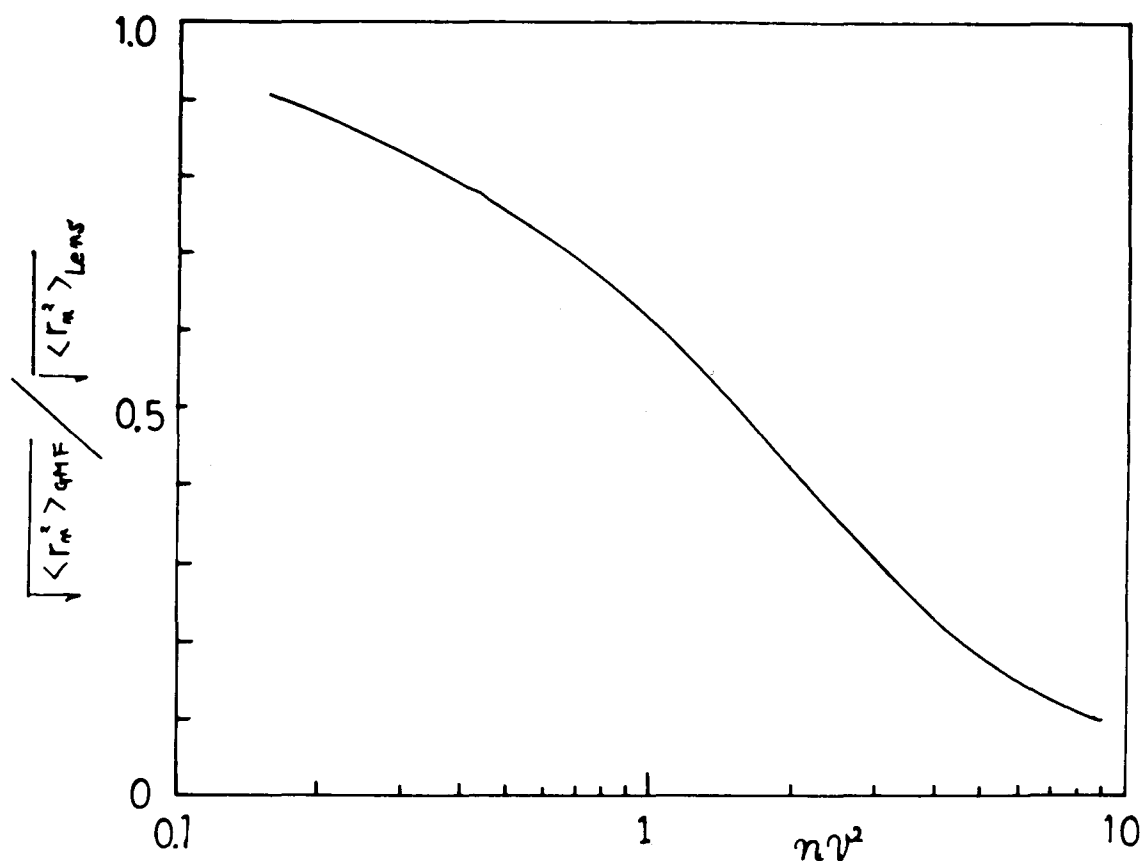


図10.6 ビーム変動の改善度とパラメータ nv^2 との関係

10.5.2 変動による伝送損失の増加

式(10.17)の $x_m^2 + y_m^2$ にランダムなレンズ変動によって生ずる統計平均値 $\langle r_m^2 \rangle$ を代入すると，変動によって増加する伝送損失分が求まる．この項を $L_n^{(d)}(\text{dB})$ とすると

$$L_n^{(d)}(\text{dB}) = 8.68 \frac{(\delta r/vw)^2}{(1+v^2)^2} \left[n - \frac{e^{-v^2}(1-e^{-nv^2})}{1-e^{-v^2}} \right] \quad (10.32)$$

となり， $v^2 \ll 1$ のときには近似的に

$$L_n^{(d)}(\text{dB}) \cong 8.68 \frac{(\delta r/vw)^2}{(1+v^2)^2} [nv^2 - 1 + e^{-nv^2}] \quad (10.33)$$

で表わされる。挿入損失 $L_n^{(i)}$ (dB) もこのとき近似でき

$$L_n^{(i)}(\text{dB}) \cong 4.34 n v^2 \quad (10.34)$$

となるから、伝送損失は結局

$$\begin{aligned} L_n(\text{dB}) &= L_n^{(i)}(\text{dB}) + L_n^{(d)}(\text{dB}) \\ &\cong 4.34 n v^2 + 8.68 \frac{(\delta r/vw)^2}{(1+v^2)^2} [n v^2 - 1 + e^{-n v^2}] \end{aligned} \quad (10.35)$$

また式(10.35)より $(\delta r/vw)$ について解くと

$$\frac{\delta r}{vw} = \left[\frac{(1+v^2)^2}{8.68} \cdot \frac{L_n(\text{dB}) - 4.34 n v^2}{n v^2 - 1 + e^{-n v^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10.36)$$

が得られる。 L_n のいくつかの値に対して、 $(\delta r/vw)$ と $n v^2$ との関係を図 10.7 に示す。この図より、 L_n , v^2 , n をきめたときの許容されるレンズ変動 δr が求められる。

10.5.3 レンズ直径

レンズ直径 D は、中心軸にそつビームに対しては、 $2w$ の3倍程度にすれば回折損失はレンズ1個につき 0.1%におさえられる。さらに式(10.31)で求めたビームの中心位置の移動 $\sqrt{\langle r_n^2 \rangle}$ を考え合わせると

$$\begin{aligned} D &= 2 [3w + \sqrt{\langle r_n^2 \rangle}] \\ &= 2w [3 + (\delta r/vw) \sqrt{2(1 - e^{-n v^2})/v^2(1+v^2)}] \end{aligned} \quad (10.37)$$

程度に選べばよいであろう。図 10.7 から $\delta r/vw$ の値を求めれば、式(10.37)から、必要なレンズ直径 D が知られる。

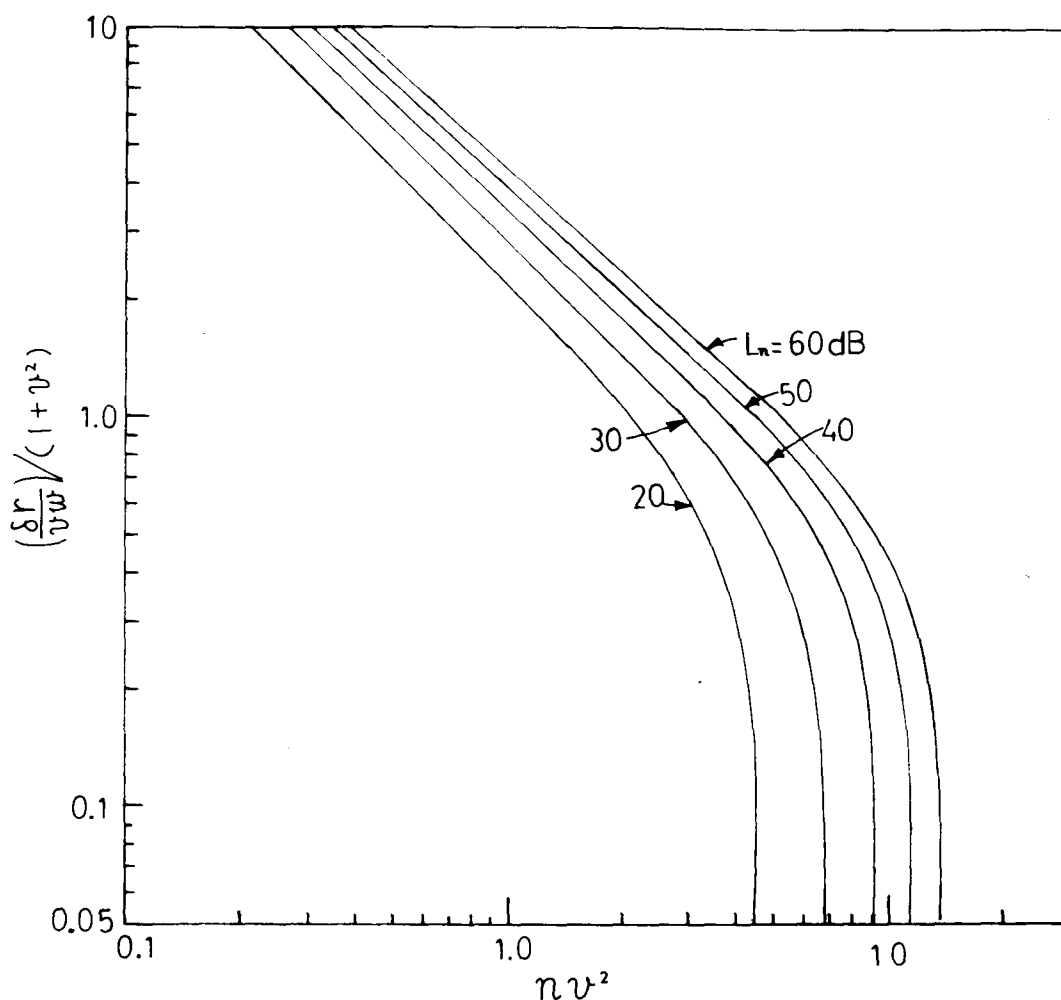


図10.7 規格化した許容レンズ変動 $\delta r (= \sqrt{\langle \delta r^2 \rangle})$ と nv^2 の関係

10.6 設計例

光ビームの変動の改善度 $\sqrt{\langle r_n^2 \rangle_{\text{GMF}}} / \sqrt{\langle r_n^2 \rangle_{\text{Lens}}}$ ，伝送損失，レンズの許容変動の2乗平均値 δr はそれぞれ nv^2 に関係しているのど，導波管の設計に際しては nv^2 を決めなければならぬ。

そこでまず， nv^2 のとり得る範囲について考えておく。図10.6からわかるとおり，ビーム安定性の改善度を良くするには， nv^2 を比較的大きくする必要がある。また，図10.7 によると逆に nv^2 を増すと，レンズ変動の許容値

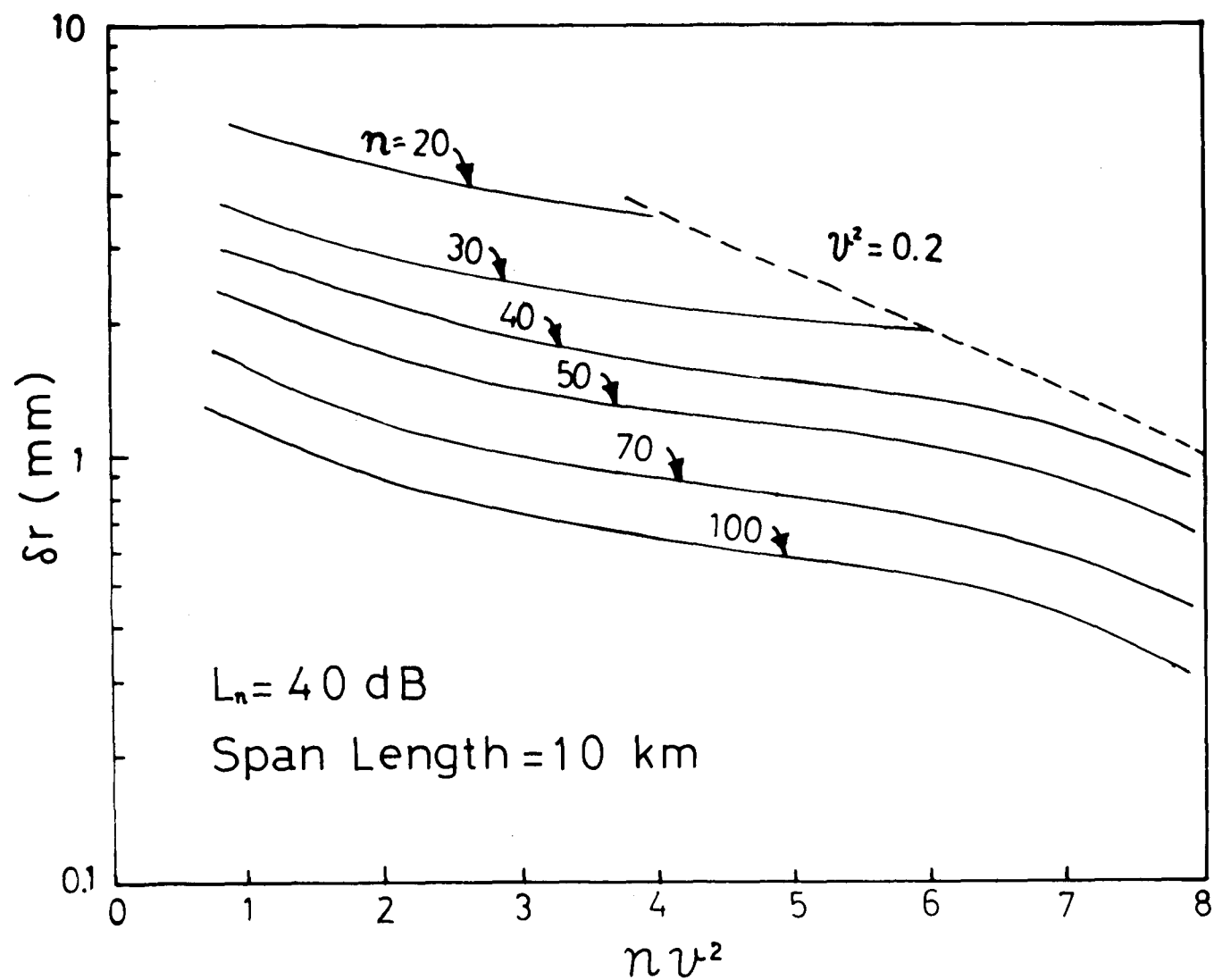


図10.8 $n v^2$ の値が異なる δr の許容値の例

δr が小さくなる。さらに、ある $L_n(\text{dB})$ をきめた場合、式 (10.36) の分子の挿入損失が $L_n(\text{dB})$ に近づくが、 $L_n(\text{dB})$ をこえることはできないから nv^2 には上限ができる。この限界は $(\delta r/vw) > 0.2$ として

$$nv^2 < 0.2 L_n(\text{dB}) \quad (10.38)$$

で表わすことができる。 nv^2 のとり得る値は 3~10 程度となる。

また、レンズ面による反射損失、雑音性、等からみると、中継区間内にあるレンズの数はなるべく小さくし、た方が有利であるが、長焦点レンズの製作精度、レンズ口径、地形の曲がりなどで制限を受ける。

次に、安定性および伝送損失を加味した設計例について検討した。いま、

中継区間	10 km
$L_n(\text{dB})$	40 dB

としたとき、素子数 n をパラメータとして、 nv^2 の選定による δr の変化の様子を図 10.8 に示す。これらのうち、次の 3 例についてパラメータの値を示す

<数値例 1> 区間数 $n=20$, $nv^2=4$ と仮定すると、 $v=0.45$, $L=500\text{ m}$,
図 10.7 より $\delta r/vw=1.09$, $w=7.4\text{ mm}$, レンズの焦点距離 $f=250\text{ m}$, レンズ直径 $D=66\text{ mm}$, 許容変動 3.7 mm となる。このとき $\sqrt{\langle r_n^2 \rangle_{\text{GME}}} / \sqrt{\langle r_n^2 \rangle_{\text{Lens}}} = 0.47$ である。

<数値例 2> $n=100$, $nv^2=4$ と仮定すると、 $v=0.20$, $\delta r/vw=0.93$,
 $w=3.33\text{ mm}$, $f=50\text{ m}$, $D=28\text{ mm}$, $\delta r=0.6\text{ mm}$, 改善度 $=0.47$ である。

<数値例 3> $n=100$, $nv^2=8$ と仮定すると、 $v=0.28$, $\delta r/vw=0.31$,
 $w=3.36\text{ mm}$, $f=50\text{ m}$, $D=23\text{ mm}$, $\delta r=0.29\text{ mm}$, 改善度 $=0.23$ となる。

以上はランダムな変動のみを考えた数値例であるが、式(10.18)からわかるように、

$$\Delta S_b \cong w / \sqrt{\eta v^2} \quad (10.39)$$

だけの曲がり変動に対する ΔS_b が存在する場合にはさらに $L_n^{(b)}(\text{dB}) \cong 3$ が加算される。つまり受信電力が半減する。この値は、上記の例では 1~4mm 程度である。11章で述べるように、我が国における地盤の年当りの変動は、距離 10 km に対し、やはり 2~3 mm であるので、1年当りの損失の増加は 3dB 程度あるものと思われる。

次に、レンズの回折を考慮に入れた Gloge の解析との比較を行ってみる。 η が大きく、かつ v^2 が非常に小さいときには、レンズ直径を $D \cong 3 \times (2w)$ と仮定すると、式(10.32)より

$$L_n - L_{n-1} \Big|_{n \rightarrow \infty} \cong 8.68 (\delta r / v w)^2 \cong 20 \left(\frac{2\delta r}{D/2} \right)^2 \quad (10.40)$$

となる。Gloge の解析では

$$L_n - L_{n-1} \Big|_{n \rightarrow \infty} \cong 20 \left(\frac{\delta r_{\text{Gloge}}}{D/2} \right)^2 \quad (10.40)$$

がある。 η が大きいときの電力損失率を等しくするには $\delta r \cong \frac{1}{2} \delta r_{\text{Gloge}}$ としななければならない。

このように、レンズの口径が有限であるためにおこる回折効率を直接利用する方が良いか、GMFをさらに付け加える方が良いかは、さらに問題が残されているが、GMFでは姿勢変換がおこなえないために、遅延が問題になるような変調方法だと一つの長所になるものと思われる。

10.7 電子計算機による光路の追跡

10.5では，レンズの変動が互いに相関性がなく，ランダムな場合も扱ったが，曲がり変動とランダムな変動が同時にあったり，1箇所集中的に変動がある場合のように，変動に強い相関性がある場合には，光路の追跡に電子計算機が有効である．その手始めとして，レンズ変動に正規乱数を与えた場合の光路の追跡を，GMFのある場合とない場合について行なった．

レンズのx,y方向の変動を

$$\Delta x_n = \delta x R_{xn}$$

$$\Delta y_n = \delta y R_{yn}$$

とし，正規乱数 ($\overline{R_{xn}} = \overline{R_{yn}} = 0$, $\overline{R_{xn}^2} = \overline{R_{yn}^2} = 1$) を，東大大型電子計算機センター，サブプログラム^{#1}(IR=1967)によって発生させる．レンズ区間nが10の場合のx方向におけるビームのずれ x_n を図10.9に示す． $w^2/w_0^2 = v^2$

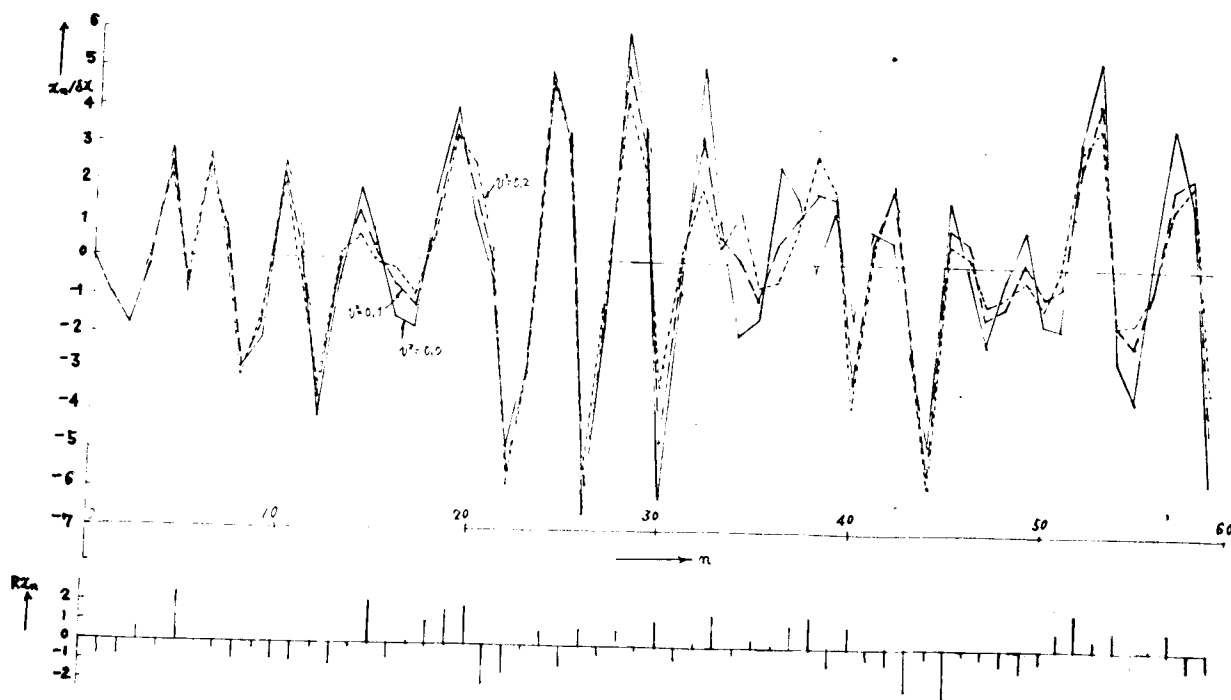


図10.9 正規乱数 R_{xn} を与えたときのビーム変動の規格値 $x_n / \delta x$

を大きくするとビームの変動は小さくなっている。

また、 n を増していったときの変動による損失の増加 L_0 (dB) を $\delta r/w = 0.1$ ($\delta r^2 = \delta x^2 + \delta y^2$) の場合について図10.10に示す。 v^2 の大きい方が、 L_0 の増加が一様になり、図10.11に示すように $n=160$ 付近で集中的に変動がおこる場合には、逆に v^2 の大きい方が変動による損失の増加が小さくなっている。これはGMFによる安定化が v^2 の大きい程著しく、ビームが早く中心軸付近にもどされることがわかる。このように変動の大きい部分には、集中的に v^2 の大きいGMFを挿入することが考えられる。

なお、ここではレンズの焦点距離 f や間隔 $2d$ には、量子偏差を考えていないが、これらを含んだ完全な導波系のシミュレーションを行なう必要があらう。

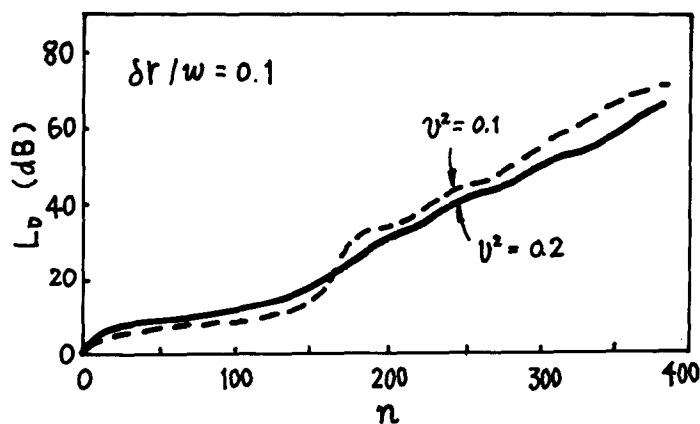


図10.10 変動による損失の増加

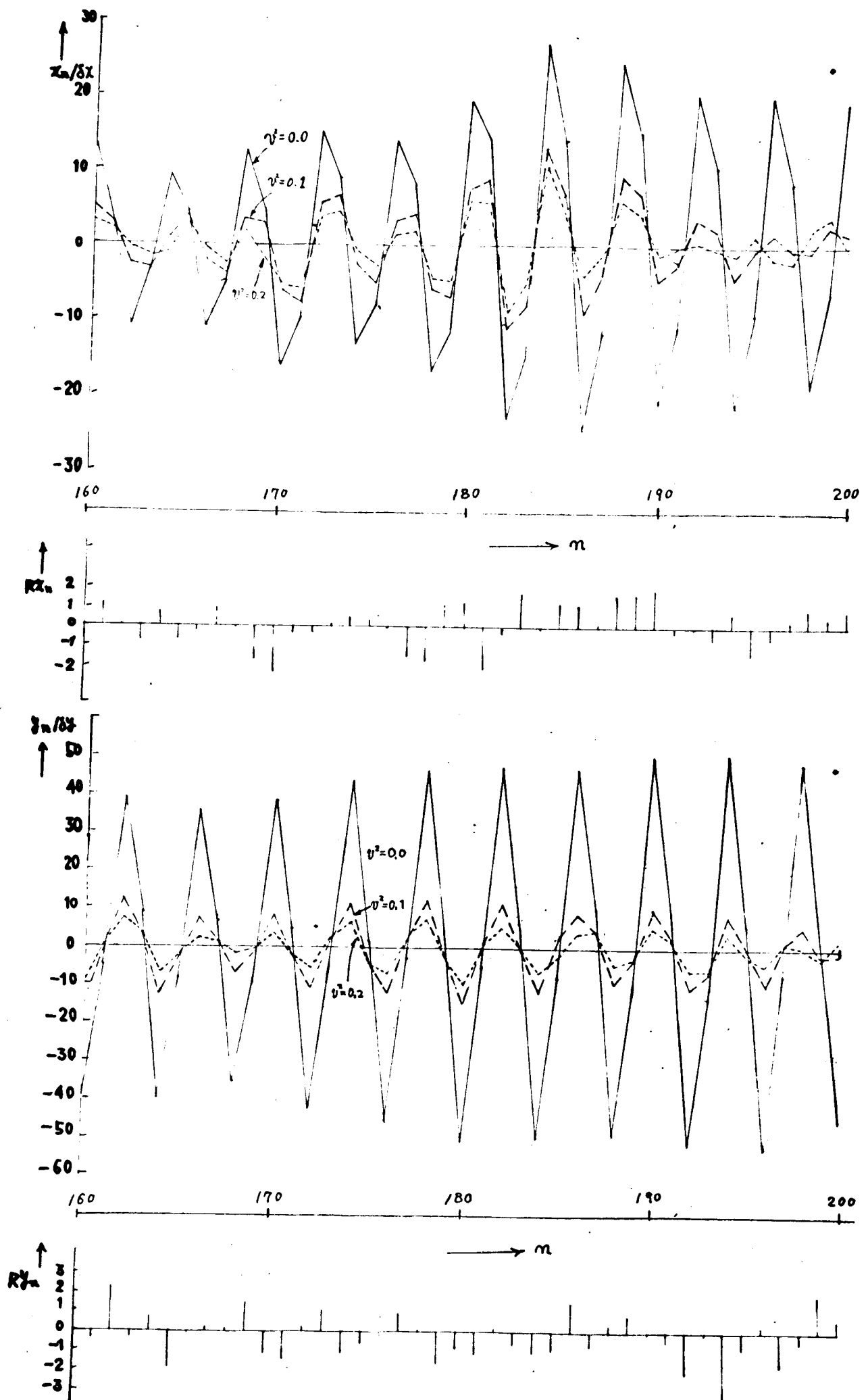


図10.11 光路の追跡

10.8 本章のまとめ

10.8.1 本章で新たに得られた結果

ガウス・モードフィルタを光ビーム導波路に用いることを提案し，ビームの安定性や伝送損失に関する検討を行なって次の結果を得た．

- (i) 入射ビームの位置変動，レンズのランダムな変動などによっておこるビームの不安定性は，レンズのみの場合に比べて軽減することができる．
- (ii) 束子偏差の許容値を大きくとることができる．(数%程度まで)
- (iii) しかし，挿入損失が増加するので大きな改善度は望めず，伝送損失と考慮に入れた設計の必要性を述べた．1例によると，中継間隔 10 km，伝送損失 40 dB の要求に対して，レンズ個数 $n=20$ ， $\nu^2 = w^2/w_g^2 = 0.2$ (ただし， w は G M F 上のスポットサイズ， w_g は G M F の透過率分布を表わす定数)，とすると，ビーム変動の改善度 $\sqrt{\langle r_n^2 \rangle_{\text{GMF}}} / \sqrt{\langle r_n^2 \rangle_{\text{lens}}} = 0.47$ ，レンズ位置変動の許容値 $\delta r (= \sqrt{\langle \Delta r_n^2 \rangle}) \cong 3.7 \text{ mm}$ となる．
- (iv) さらに曲がり変動が $\Delta S_b \cong w / \sqrt{n\nu^2}$ 程度あると，曲がりによる損失の増加は 3 dB になる．ただし， $\Delta S_b = 2l\theta / R_b$ で， $2l$ はレンズ間隔， R_b は曲がり変動の曲率半径．

10.8.2 結 論

- (i) ガウス・モードフィルタをレンズと併用すると確かにビームの安定性は改善できる．しかし，その反面挿入損失を伴う．一オ，レンズのみの場合でも，口径の有限と考慮に入れると回折損失をもっているし，ビームの強度が最大である位置と光線と考えれば，ビームの安定性も改善される．レンズの口径の有限性を直接利用することと，G M F を併用することの良否については，伝送路に対する将来のレーザ通信の要求が決めることになるだろう．
- (ii) 回折現象を伴う場合に対しても，本論文で用いた光線による線型な計算法が適用できたといえよう．

11章 各種光ビーム導波系の検討

本章では、1,2編で述べた伝送損失に関係する種々の原因について、適当な角度からまとめて検討し、これらの要素を考へて入れた導波系の設計と、各種光ビーム導波系の比較検討を行つた。

11.1 導波系の伝送損失に関する検討

11.1.1 伝送損失の原因

光ビーム導波系で、伝送損失の原因となるものをまとめると、次のようになる。

集束素子による反射損失 Q_S

集束素子による姿態変換損失 S

空気による散乱，吸収損失 S

回折損失

$\left\{ \begin{array}{l} \text{口径が有限なために起るもの(挿入損失)} \quad S \\ \text{集束素子のランダムな変動による増加} \quad V \\ \text{地盤の変動による増加} \quad Q_S \\ \text{空気の変動による増加} \quad V, Q_S \end{array} \right.$

ただし、 S, Q_S, V は次のことを表わしている；

S ：定常的に起こるもの

Q_S ：準定常的に起こるもの（経年変化）

V ：時間的に変化するもの

ここで、1半径区間 L ，集束素子の口径 $2a$ （ガウス・モードフィルタの場合には $2W_g$ ）が一定と考えたとき、半径区間内に含まれる素子数 n と、各伝送損失との関係とをみる。

(i) 集束素子による反射損失: L_R

$$L_R(\text{dB}) = \alpha_R(\text{dB}) n \quad (11.1)$$

$$\alpha_R = 0.03 \sim 0.05 \text{ dB} \quad (\text{レンズの場合}^{*1})$$

$$10^{-4} \text{ dB} \quad (\text{反射鏡の場合})$$

(ii) 集束素子による姿態変換損失: L_c

レンズ面, 反射鏡面の放物面からのずれによっておこる姿態変換波は, 回折損失が大きいため全べて損失になると仮定すると, 6章式(6.82)が一個の集束素子当りの損失とみなすことができる。したがって, 1個当り

$$\alpha_c = 86.8 [R(\bar{n}-1) a_4]^2 w^8 \quad (\text{dB}) \quad (11.2)$$

の損失となる。ただし, $\bar{n}$ はレンズの場合は屈折率, 反射鏡の場合は2である)。図6.2から, 共焦点構成の場合のレンズ上のスポットサイズ w は

$$w^2 = \frac{2l}{R} = \frac{L}{R} \cdot \frac{1}{n} \quad (11.3)$$

を用いると, 中継区間の損失 $L_c(\text{dB})$ は

$$L_c(\text{dB}) = 86.8 [L^2(\bar{n}-1) a_4 / R]^2 n^{-3} \quad (11.4)$$

球面レンズの場合, $a_4 = 1/(4f^3) = 2n^3/L^3$ であるから

$$L_c(\text{dB}) = 86.8 [(\bar{n}-1)/RL]^2 n^3 \quad (11.5)$$

放物面レンズの場合, $a_4 = 2\delta$ とし

$$L_c(\text{dB}) = 86.8 [2L^2(\bar{n}-1)\delta/R]^2 n^{-3} \quad (11.6)$$

ここで, δ は放物面が完全でなく, 4次変化項が含まれている場合の係数と表わす。

*1). 文献 (109)

(iii) 空気による散乱, 吸収 : L_s

$$L_s (\text{dB}) = \alpha_s (\text{dB}/\text{km}) L (\text{km}) \quad (11.7)$$

ただし, パイプでおおった空気による散乱, 吸収による損失は, $\alpha_s \approx 0.23$ dB/km であると考えられている⁽¹⁵⁾.

(iv) 回折損失 (挿入損失) : L_I

① 一辺 $2a$ の方形レンズの 1 個当りの損失は

$$\alpha_I = 47.3 e^{-0.787 (a/w)^2} \quad (\text{dB}) \quad (11.8)$$

n 個のレンズに対して

$$L_I = 47.3 n e^{-0.787 (a^2 R/L) n} \quad (\text{dB}) \quad (11.9)$$

② また, スポットサイズ w_g のガウス・モードフィルタの場合には

$$\begin{aligned} \alpha_I &= 4.34 (1 - t_0) \\ &\approx 4.34 (w/w_g)^2 \end{aligned} \quad (11.10)$$

レンズと併用した導波管に対し

$$L_I = 4.34 (w/w_g)^2 n = 4.34 L / (R w_g^2) \quad (11.11)$$

(v) 素子の変動による回折損失の増加 : L_D

① 一辺 $2a$ の方形レンズの場合,

$$\alpha_D = 47.3 e^{-0.787 (a/w)^2} \times e^{C (r_n^2/w^2)} \quad (11.12)$$

と仮定する。ただし, r_n は n 番目のレンズにおけるビームの中心軸からのずれを表す。文献 (68) の図 7 より係数 C を求めると,

$$C \cong 12$$

$$(11.13)$$

となる。

従って n 区間に対してランダムな素子変動があるとき、 $r_n^2 \rightarrow \langle r_n^2 \rangle$ とおくことにより回折損失の増加分が求まる。式(5.1)を用いて、変動による増加分を L_D とすると

$$\begin{aligned} L_D + L_I &= \alpha_I \cdot \frac{e^{2C\langle r_n^2 \rangle / w^2 \cdot Cn} - 1}{2C\langle r_n^2 \rangle / w^2 C} \\ &= 47.3 e^{-0.787(a^2 R/L)n} \cdot \frac{e^{2C\langle r_n^2 \rangle / (L/R) \cdot n^2} - 1}{2C\langle r_n^2 \rangle / (L/R) \cdot n} \end{aligned} \quad (11.14)$$

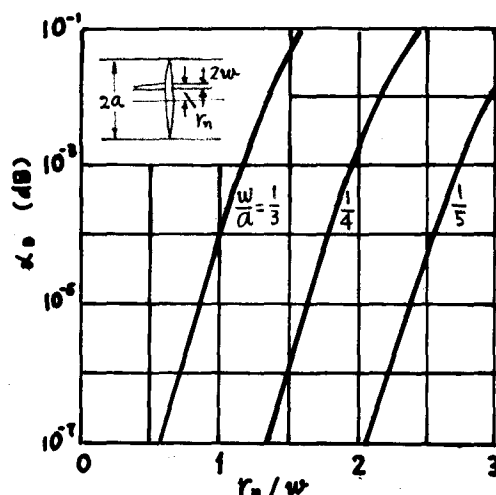


図 11.1 ビームの変動による回折損失の増加 (文献 (68) Bild.7 に従う)

また、全区間のうち m 区間にわたって一様な曲率半径 R_b の曲がり変動があるとするば、そのために生ずる損失の増加分を L_B とすると

$$\begin{aligned} L_B &= \alpha_D m = \alpha_I e^{C \Delta S^2 / w^2} \cdot m \\ &= 47.3 e^{-0.787(a^2/R_L)n + C(\Delta S^2/R_L)n} \cdot m \end{aligned} \quad (11.15)$$

ただし、

$$\Delta S = 2lf/R_b = \frac{L^2}{2R_b} \cdot n^{-2} \quad (11.16)$$

② スポットサイズ w_g のガウス・モードファイバの場合

$$\alpha_D = 4.34 \left[1 - \frac{1}{1 + (w/w_g)^2} e^{-\left(\frac{r_n}{w_g}\right)^2 / (1 + w^2/w_g^2)} \right] \quad (11.17)$$

$$L_D = 8.68 \left(\frac{\langle \Delta r_n^2 \rangle}{w_g^2} \right) \left(\frac{R w_g^2}{L} \right)^2 \cdot \frac{n^2}{\left(1 + \frac{L}{R w_g^2} \cdot \frac{1}{n} \right)^2} \quad (11.18)$$

$$L_B \cong 4.34 \left(\frac{45}{w_g} \right)^2 m$$

(11.19)

ここで，地盤の変動の一例として，文献(34)から引用したものを図11.2に示す．東京付近では，1年に約 10^7 cmの半径で曲がり変動が生じていることになる．

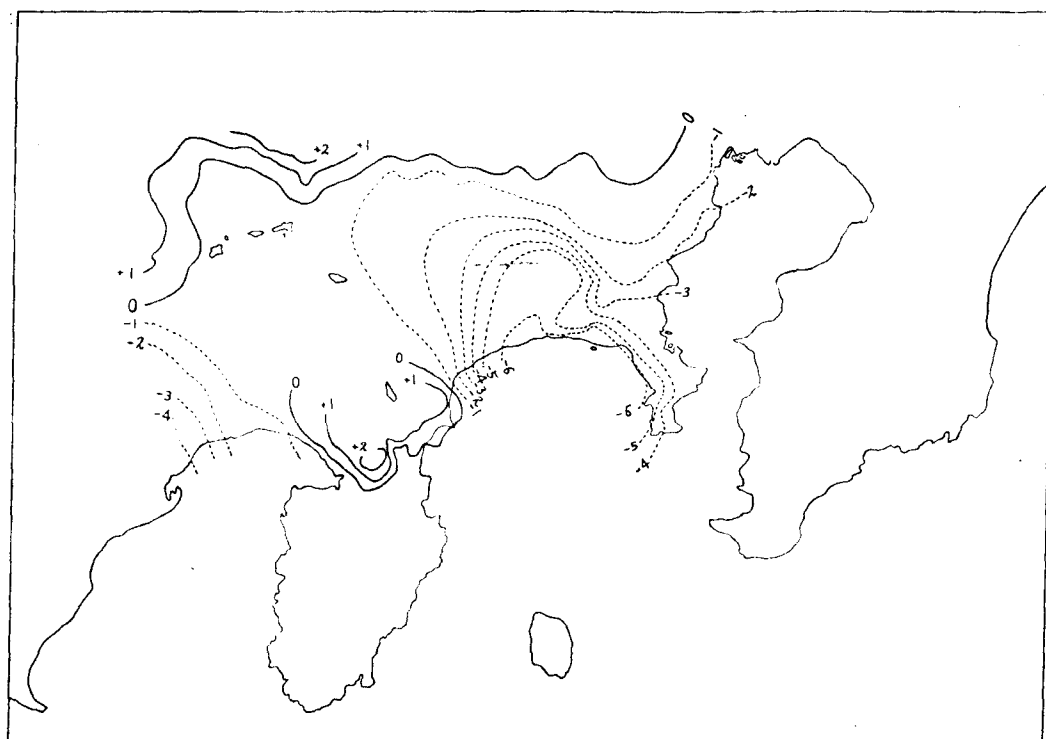


図 11.2 Annual crustal movements during 1931—1950. Unit: mm/yr

次に，導波系に曲がり部が含まれている場合について考える． n 番目の束要素子における屈折角を δ_n とおき，ビームの軸のまわりの回転変動を $\Delta\psi_n$ とすると，ランダムな $\Delta\psi_n$ に対しては，表(9.2)から式(11.14)(11.18)の $\langle \Delta\psi_n^2 \rangle$ のかゆりに

$$l^2 \bar{\delta}_n^2 \langle \Delta\psi_n^2 \rangle$$

(11.20)

とおけば，ビームの変動が求まる． $\bar{\delta}_n^2$ は， n 区間における屈折角 δ_n の2乗平均値である．一例として，東海道新幹線の軌道の曲がりをも文献#1)より求めて図11.3に示す．屈折角 δ の最大値 δ_{max} ，2乗平均値 $\bar{\delta}^2$ を求めると，

#1) “東海道新幹線工事誌” 日本国有鉄道，東海道新幹線建設局

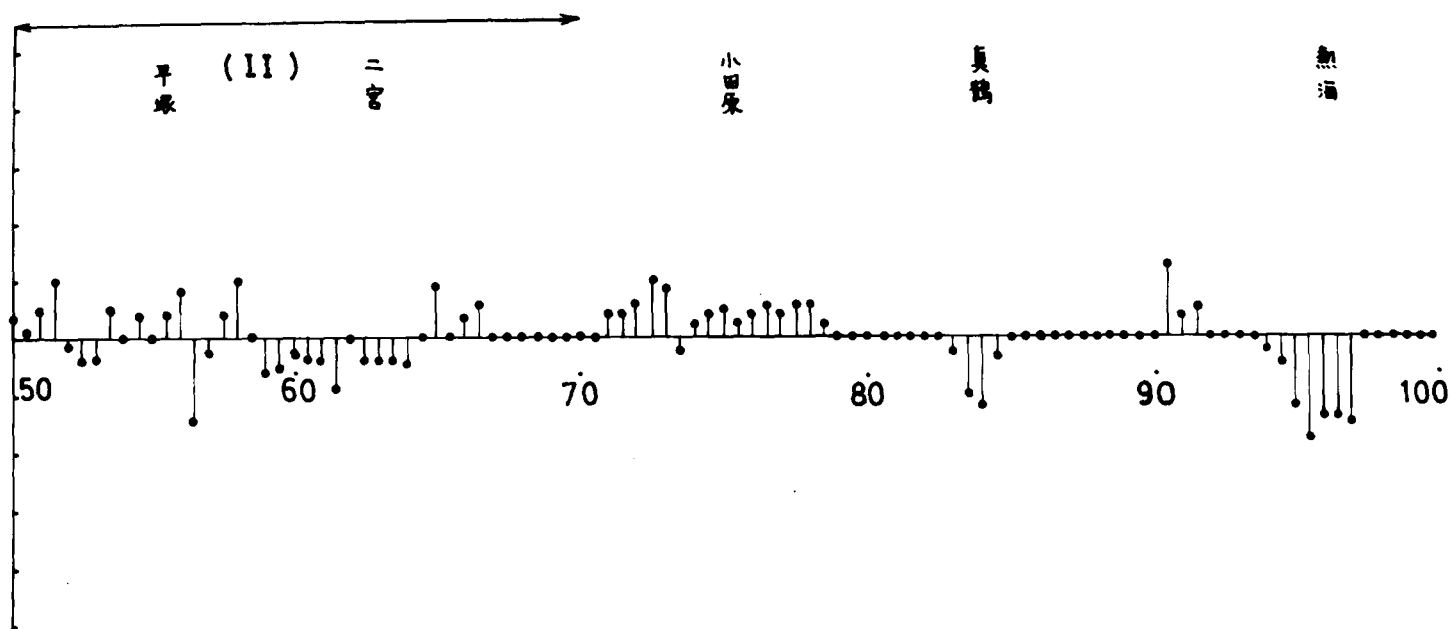
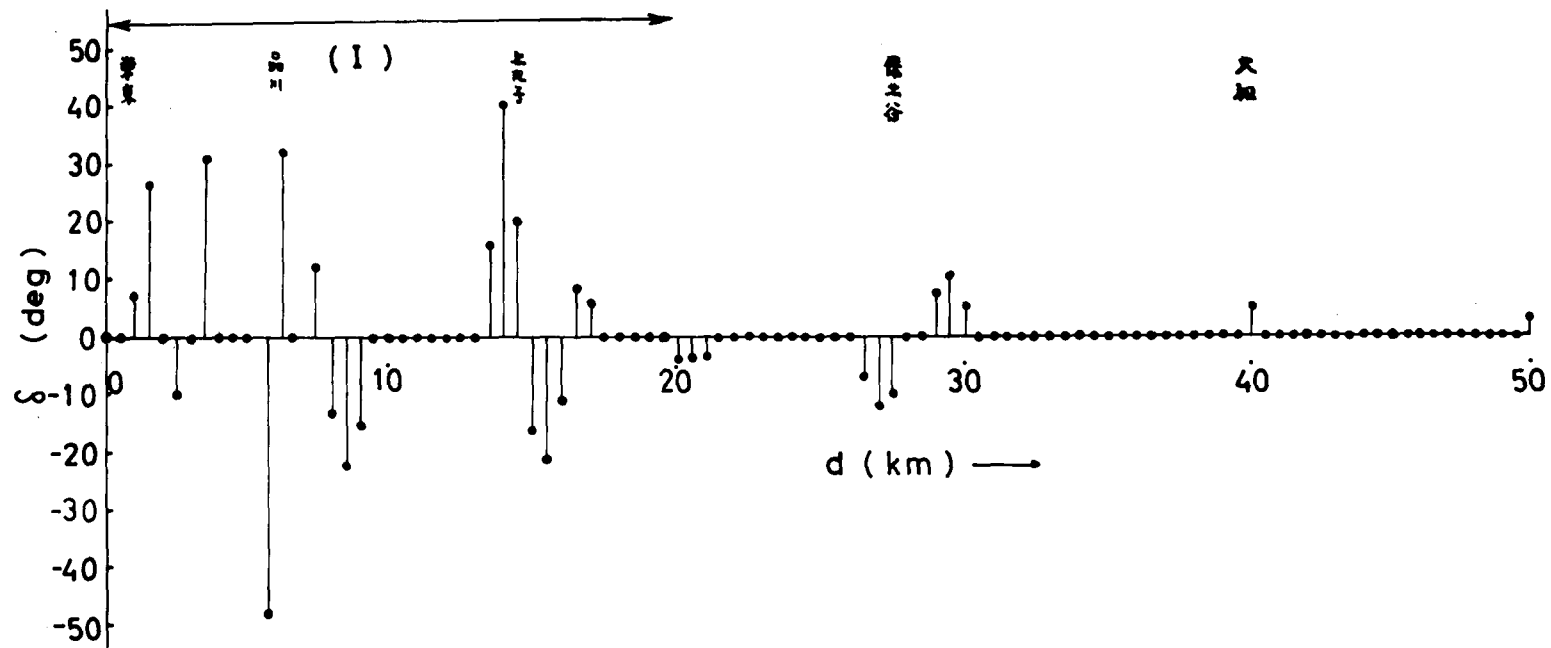


図11.3 東海道新幹線の軌道の図がり
(500mごとに折線近似した場合で、進行方向に
対して左折れの場合に
正とする)

$$\begin{array}{lll}
 \text{都市部(I)} & \delta_{\max} \cong 50^\circ & \sqrt{\delta^2} \cong 15^\circ \\
 \text{郊外部(II)} & \delta_{\max} \cong 15^\circ & \sqrt{\delta^2} \cong 10^\circ
 \end{array}
 \quad (11.21)$$

となつてゐる。ただし、この値は $2l = 500 \text{ m}$ に対するものであるから、 10 km に対する乗子数で表わすと

$$\sqrt{\delta^2} = 2/n \quad (\text{rad}) \quad (11.22)$$

とあらうことができる。

特に、ガウス・モードフィルタの場合には、曲がり部における角変動の影響が、式(11.18)に加算される。その増加分を $L_D^{(b)}$ とおくと

$$L_D^{(b)} (\text{dB}) = 4.34 \cdot \frac{\langle \Delta \psi_n^2 \rangle}{W_g^2} \times \left(\frac{R W_g^2}{L} \right)^2 L^2 \cdot \frac{n^{-2}}{\left[1 + \left(\frac{L}{R W_g^2} \right)^2 \frac{1}{n} \right]^2} \quad (11.23)$$

となり、 n と共に減少する。

11.1.2 口径が有限な場合の設計例

次に、ガウス・モードフィルタを用いる導波束を例にとり、

$$L = 10 \text{ km}$$

$$2W_g = 3 \text{ cm}$$

とした場合に、レンズ個数のとり得る最適値を求めよう。ここで、各パラメータを次のようにおく。

$$R = 9.929 \times 10^6 \quad (1/\text{m})$$

$$\alpha_R = 0.05 \text{ dB}$$

$$\delta = 10^{-2} \quad (\text{放物面})$$

$$\alpha_s = 0.23 \text{ dB/km}$$

$$R_b = 10^{10} \quad (\text{m})$$

$$\sqrt{\langle \Delta r_n^2 \rangle} = 0.2 \text{ mm}$$

$$\sqrt{\delta_n^2} = 0.1 \text{ rad (500 m 間隔)}$$

$$\sqrt{\langle \Delta \psi_n^2 \rangle} = 10^{-4}$$

これより全伝送損失 $L_T (\text{dB})$

$$L_T = L_R + L_s + L_L + L_D + L_D^{(b)} \quad (11.24)$$

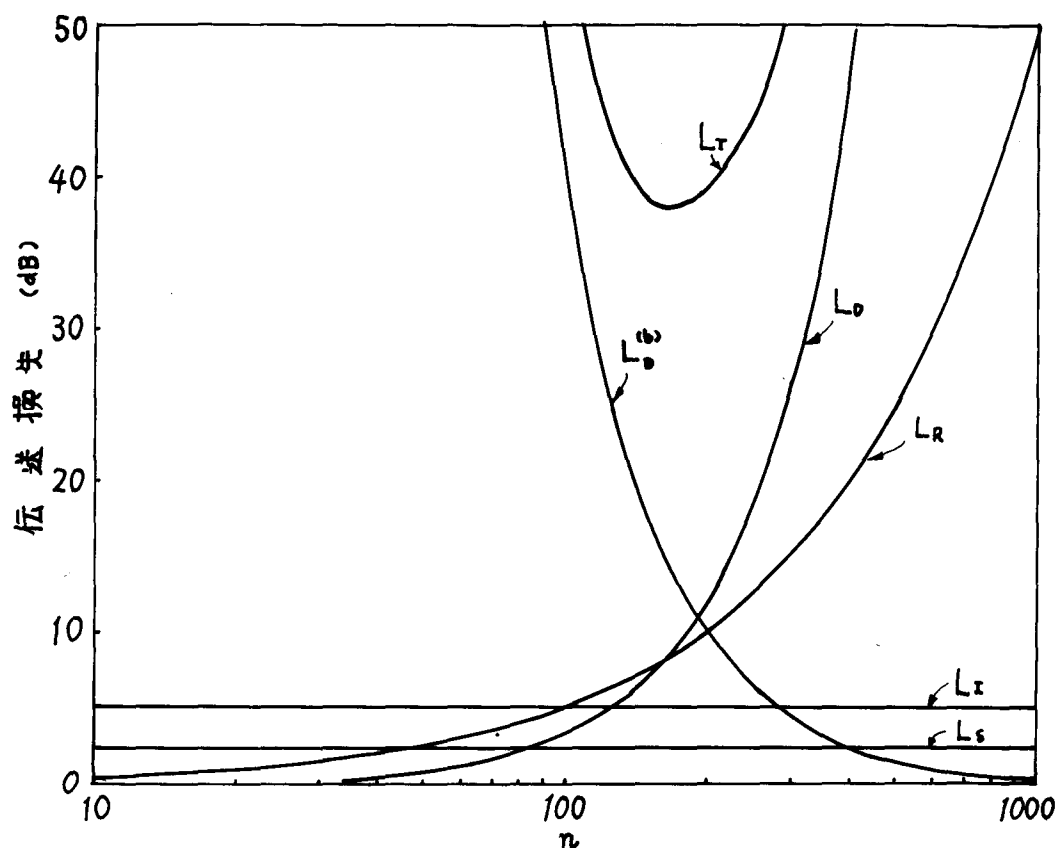


図11.4 G+MFを併用する導波管の設計例. ω_0 を一定にしたときの n と伝送損失

を求めて図11.4に示す。ここで，放物面レンズを用い，レンズ面をこのように精密に製作すれば L_c は無視でき，地盤の長期的変動による損失の経年増加も挿入損失に比べて小さい。この場合，直線部のみであれば，できる限りレンズ個数を減らす方が有利であるが，曲がり部を含むと角変動はレンズ間隔と共に伝送損失を増加させるので，適当なレンズ個数が存在する。今の場合

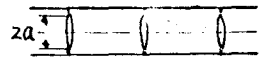
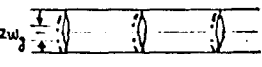
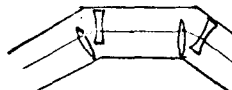
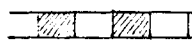
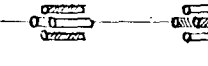
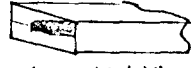
$$n_{opt} = 170$$

で，このときの焦点距離は，約 290 m である。このような長焦点レンズは，具体的には，レンズ対で実現できるし， $\sqrt{\delta n^2} = 0.1 \text{ rad}$ をつくるには，プリズム，あるいは反射鏡対によることになる。

11.2 各種光ビーム導波系の比較検討

導波系の良さを決める要素として伝送損失について主に検討したが、その他に考えらるべき要素としては、曲がり部の難易、空間多重化の可能性、接続の難易等が挙げられる。これらについて検討してきた導波系について、ここできとめた結果を図11.5に示す。

図11.5 各種光ビーム導波系の比較検討

導 波 系	口 径	素子数 (cm 当)	挿入損失	素子変位力 による損失	曲がり部 の難易	空間多重化 の難易	接 続 の難易
 単レンズ列	$2a=10\text{ cm}$	10	0.5 dB		難	1システムにつき1ビーム	易
 ガウス・モードフィルタを用	$2W_g=6\text{ cm}$	10	1 dB	直線部 0.3 dB 曲がり部 5 dB (プリズム)	難	"	"
 レンズ対	$2a=10\text{ cm}$	10対	1 dB		やや易	凸凸対では空間多重化が可能。安定性は悪化	"
 反射鏡対	$2a=10\text{ cm}$	10対	$< 10^{-2}\text{ dB}$		易	1システムにつき1ビーム	"
 層流型ガスレンズ	$2a=1\text{ cm}$	10^3			難	"	やや難
 双曲線型ガスレンズ	$2a=2\text{ cm}$	80	$\ll 10^{-2}$		難	"	"
 マイクロガイド	図10.6	連続	1.8 dB		難	"	非常に難

12章 結 論

本研究によって，レーザ通信系における光ビーム導波系の基本的な問題に関して，いくつかの基礎資料が得られ，2, 3の特徴ある導波系の提案がなされた。それらのうちの主なものを挙げると次のようになる。

(1) 光ビーム波，導波素子に関する基礎的な問題について；

(i) ガウスビーム波と光線の関係について検討し，ガウスビーム波を光線の集合とみなし，その集合の最も光線密度の大きい部分を占める光線の軌跡によって近似的にビーム光路が求まるといふ，一つの解法を与えた。

(ii) 波面係数の交換を表わすFマトリクスと，光路の変換を表わす変形光線マトリクスを，回折現象を伴う素子にまで拡張し，両者がこの場合には異なることを明らかにした。

(iii) 従来厳密に検討が行われていなかった層流型ガスレンズのガウスビーム波に対する集束性を，理論，実験によって明確にした。

(iv) 双曲線型ガスレンズが正常にレンズ状媒質として動作する温度範囲の，口径に対する上限を実験的に明らかにした。

(2) 光ビーム導波系の伝送損失に関する2つの問題に対し，

(i) 導波素子の不完全性における姿態の不安定性と，姿態変換とみなし，その影響を調べ，種々の導波素子に対する姿態変換の大きさを求めて，導波素子の良さを表わす一つの目安を与えた。

(ii) 光ビーム導波系のビーム光路の安定性に関する検討で，従来レンズ列導波系に対して求められていたビーム変動の表式を拡張して，種々の導波系に適用できるようにした。

(3) これらの問題を解決するための方法として

(i) 反射損失，姿態変換の小さな双曲線型ガスレンズを用いる導波系

(ii) 曲がり部において比較的小さな曲率半径で曲がることのできるレン

ス対，反射鏡対を用いる導波系

(iii) 集束素子の変動によって生ずるビーム変動を軽減することのできる

ガウス・モードフィルタを用いる導波系

の提案と，これらの導波系に関する設計を行なった。

光ビーム伝送は，ある一つの方法によって万事が解決するという性質のものではなく，各国のもっている地形や地震などの条件を考え合わせた上で，種々の導波素子や関連技術の綜合によって実現されるものと思われる。それで，現時点において解決すべき問題，将来レーザと関連技術の進歩によって，伝送に課せられる高度な要求に対して地道な努力の推進が必要とされる。本研究が，レーザ通信の開発の途上における一つの礎になれば幸いである。

謝 辞

本論文を終えるにあたり，いろいろ御指導，御配慮いただいた指導教官関口利男教授ならびに，6年間の長きにわたって良き御指導をいただいた指導教官末松安晴助教授に心からの御礼を申し上げる。

日本電気株式会社の内田禎二博士からは，本研究の一部に対して御援助と，レーザ通信系に関する貴重な討論をいただいた。

本学の川上正光教授，福手人八教授からは本研究に対する深い御理解といただき，また，西巻正郎教授，末武国弘教授，川村光男助教授，古川静二郎助教授，武者利光助教授，内藤喜之助教授，千葉大学の後藤尚久助教授をはじめとする本学マイクロ波グループの諸氏からは，討論を通じていろいろ御指導をいただいた。

また，末松研究室において6年間寝食を共にした池上徹彦君，同じ光ビーム導波系の問題と共に取組んだ長嶋秀世助手，現電々公社通信研究所の吹抜洋司氏，現本学大学院の伊藤信一氏，北野利彦氏，卒論を通じて熱心に協力された鈴木徹夫，小幡伊和男，小坂晋介，佐々木豊，松平昌昭の諸氏は，得難い相談相手であった。

以上のように

多くの方々から御指導いただいたことを感謝しつつ，本論文を終える。

参考文献 (年代順, 1967年まで)

- (1) G. D. Boyd and J. P. Gordon, "Conforcal Multimode Resonator for Millimeter Through Optical Wavelength Masers", BSTJ, vol. 40, pp 489-508; March 1961.
- (2) G. Goubau and F. Schwing, "On the Guided Propagation of Electromagnetic Wave Beams", IRE Trans. on Antennas and Propagation, vol. AP-9, pp 248-256; May 1961.
- (3) J. R. Christian and G. Goubau, "Experimental Studies on a Beam Waveguide for Millimeter Waves", IRE Trans. on Antennas and Propagation, vol. AP-9, pp 256-263; May 1961.
- (4) J. R. Pierce, "Modes in Sequences of Lenses", Proc. National Academy of Science, vol. 40, pp 1808-1813; November 1961.
- (5) A. G. Fox and T. Li, "Resonant Modes in a Maser Interferometer", BSTJ, vol. 40, pp 453-488; March 1962.
- (6) G. D. Boyd and H. Kogelnik, "Generalized Conforcal Resonator Theory", BSTJ, vol. 40, pp 1347-1369; July 1962.
- (7) 大森武夫, "ビーム伝送方式について", 信学会マイクロ波伝送研資; September 1963.
- (8) H. Kogelnik, "Matching of Optical Modes", BSTJ, vol. 43, pp 334-337; January 1964.
- (9) 伊藤 敏雄, "Fabry-Perot 型共振器の共振状態", 東北大学量子エレクトロニクスシンポジウム予稿集, pp 93-102; February 1964.
- (10) H. Kogelnik, "Coupling and Conversion Coefficients for Optical Modes", Proc. of PIB Quasi-Optics Symposium, pp 333-347; 1964.
- (11) G. Goubau and J. R. Christian, "Some Aspects of Beam Wave for Long Distance Transmission at Optical Frequencies", IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-12, pp 212-220; March 1964.
- (12) D. Marcuse, "Propagation of Light Rays through a Lens-Waveguide with Curved Axis", Bell Syst. Tech. J., vol. 43, pp 741-753; March 1964.
- (13) M. A. Gilleo, "Radiation Transfer by a Light Pipe between Media with High Indices of Refraction", Appl. Optics, vol. 3, pp 765-767; June 1964.
- (14) J. Hirano, "Instability of Light Beam due to Lens-Displacements in a Beam Waveguide", Proc. IEEE, vol. 52, pp 872-873; July 1964.
- (15) J. E. Degenford, M. D. Sirkis and W. H. Steier, "The Reflecting Beam Waveguide", IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-12, pp 445-453; July 1964.

- (16) D. W. Berreman, "A Lens or Light Guide Using Convectively Distorted Thermal Gradients in Gases", BSTJ, vol. 43, part 1, pp 1469-1475; July 1964.
- (17) D. W. Berreman, "A Gas Lens Using Unlike Counter-Flowing Gases", BSTJ, vol. 43, part 1, pp 1476-1479; July 1964.
- (18) S. E. Miller, "Directional Control in Light-Wave Guidance", Bell Syst. Tech. J., vol. 43, part 2, pp 1727-1739; July 1964.
- (19) S. E. Miller, "Alternating-Gradient Focusing and Related Properties of Conventional Convergent Lens Focussing", BSTJ, vol. 43, part 2, pp 1741-1758; July 1964.
- (20) D. Marcuse and S. E. Miller, "Analysis of a Tubular Gas Lens", BSTJ, vol. 43, part 2, pp 1759-1782; July 1964.
- (21) E. A. J. Marcatili and R. A. Schmeltzer, "Hollow Metallic and Dielectric Waveguides for Long Distance Optical Transmission and Lasers", ~~BSTJ~~ vol. 43, part 2, pp 1783-1803; July 1964.
- (22) A. C. Beck, "Thermal Gas Lens Measurements", BSTJ, vol. 43, part 2, pp 1818-1820; July 1964.
- (23) A. C. Beck, "Gas Mixture Lens Measurements", BSTJ, vol. 43, part 2, pp 1821-1825; July 1964.
- (24) A. G. van Nie, "Rigorous Calculation of the Electromagnetic Field of Wave Beams", Philips Res. Repts., vol. 19, pp 378-394; August 1964.
- (25) 平野 順三, 深津良治, "光集束伝送の安定性", 信学会量3エレクトロニクス研究, September 1964.
- (26) 平野 順三, 深津良治, "光集束伝送路の安定性", 信学会大, p 347; October 1964.
- (27) 深津良治, "光集束伝送路の整合方式と曲がり", 信学会大, p 348; October 1964.
- (28) T. Li, "Dual Forms of the Gaussian Beam Chart", Appl. Optics, vol. 3, No. 11, pp 1315-1317; November 1964.
- (29) J. Hirano and Y. Fukatsu, "Stability of a Light Beam in a Beam Waveguide", Proc. IEEE, vol. 52, pp 1284-1292; November 1964.
- (30) E. A. J. Marcatili, "Modes in a Sequence of Thick Astigmatic Lens-Like Focusers", BSTJ, vol. 43, pp 2887-2904; November 1964.
- (31) Р.Б. Ваганов, "Потери Энергии на Преобразование в Волны Высших Типов при Деформациях и Смещениях Линз в Конфокальном Лучевом", Радиотехника и Электроника, vol. 9, pp 1958-1967; November 1964.
- (32) G. Goubau and J. R. Christian, "Loss Measurements with a Beam Waveguide for Long Distance Transmission at Optical Frequencies", Proc. IEEE, vol. 52, p 1739; December 1964.
- (33) D. Gloge, "Ein allgemeines Verfahren zur Berechnung optischer Resonatoren und periodischer Linsen system", Arch. elektr. Ubertrag., vol. 19, pp 13-26; January 1965.
- (34) 檀原 毅, 佐部正信, "日本における過去60年間の垂直変動", 測地学会誌, vol. 10, pp 6-13; January 1965, pp 61-82; February 1965.

- (35) P. K. Tien, J. P. Gordon and J. R. Whinnery, "Focusing of a Light Beam of Gaussian Field Distribution in Continuous and Periodic Lens-Like Media", Proc. IEEE, vol. 53, pp 129-138; February 1965.
- (36) O. E. DeLange, "Losses Suffered by Coherent Light Redirected and Refocused Many Times in an Enclosed Medium", BSTJ, vol. 44, pp 283-302; February 1965.
- (37) H. Kogelnik, "Imaging of Optical Modes-Resonators with Internal Lenses", BSTJ, vol. 44, pp 455-494; March 1965.
- (38) D. W. Berreman, "Convective Gas Light Guides or Lens Trains for Optical Beam Transmission", J. Opt. Soc. Amer., vol. 55, pp 239-247; March 1965.
- (39) A. L. Jones, "Coupling of Optical Fibers and Scattering in Fibers", J. Opt. Soc. Amer., vol. 55, pp 261-271; March 1965.
- (40) 米松安晴, 吹板洋司, "理想化されたガス光ビーム導波系の固有状態", 信学会, QE委, March 1965.
- (41) H. G. Unger, "Light Beam Propagation in Curved Schlieren Guides", Arch. Elektr. Ubertr., vol. 19, pp 189-198; April 1965.
- (42) A. E. Karbowiak, "A Close Look at Optical Waveguides", Microwaves, pp 37-46; July 1965.
- (43) 米松安晴, 吹板洋司, 伊賀健一, 鈴木徹夫, "層流型ガスレンズの特性と収集性", 信学会, QE委, March 1965.
- (44) 虫明康人, 本間広平, "ビーム伝送における遮蔽管の影響について", 信学会, 2700波伝送研究, July 1965.
- (45) С. Г. Зенгер, Н. И. Калигеевский, Э. Е. Фрадкин и М. П. Чаика, "Структура Поля Излучения Газового Лазера Со Сферическими Зеркалами," Оптика и Спектроскопия, vol. 65, No. 2, pp 255-263; August 1965.
- (46) D. Marcuse, "Design Considerations for Bent-Beam Waveguides", IEEE, G-MTT, vol. MTT-13, pp 647-651; September 1965.
- (47) 米松安晴, 吹板洋司, "理想化されたガス光導波系の解析", 信学誌, vol. 48, pp 1684-1690; October 1965.
- (48) R. Hioki, "Coherent Light Transmission through Optical Fiber", J. J. A. P., vol. 4, pp 817- ; October 1965.
- (49) B. L. Lewis, "Photon Tunnels: The Waveguides of the Future", Proc. IEEE, vol. 53, pp 1768-1769; November 1965.
- (50) D. Marcuse, "Statistical Treatment of Light-Ray Propagation in Beam-Waveguides", BSTJ, vol. 44, pp 2065-2081; November 1965.
- (51) W. H. Steier, "Measurements on a Thermal Gradient Gas Lens", IEEE Trans-G-MTT, vol. MTT-13, pp 740-748; November 1965.
- (52) S. E. Miller, "Light Propagation in Generalized Lens-Like Media", BSTJ, vol. 44, pp 2017-2064; November 1965.
- (53) D. Marcuse, "Statistical Treatment of Light-Ray Propagation in Beam-Waveguides", Bell Syst. Tech. J., vol. 44, pp 2065-2081; November 1965.

- (54) D. Marcuse, "Propagation of Periodic Gas Lenses", Bell Syst. Tech. J., vol. 44, pp 2083-2118; November 1965.
- (55) G. Seifert and D. Gloge, "Messungen an einer Optischen Pendelimpulsstrecke", vol. 19, pp 633-635; November 1965.
- (56) 末松安晴, 吹板洋司, "レンズ状媒質の $\tilde{F}$ エトックスと拡張した光線エトックスとの関連について", 信学全大, p 412; November 1965.
- (57) 末松安晴, "周期構造のレンズ状媒質を用いた新しい光ビーム導波系", 信学全大, p 413; November 1965.
- (58) 末松安晴, 伊賀健一, "レンズ状媒質における状態変換", 信学全大, p 414; November 1965.
- (59) D. Marcuse, "Theory of a Thermal Gradient Gas Lens", IRE Trans-G-MTT, vol. MTT-13, pp 734-739; November 1965.
- (60) D. W. Berreman, "Growth of Oscillations of Ray about the Irregularity Wavy Axis of a Lens Light Guide", BSTJ, vol. 44, pp 2117-2132; November 1965.
- (61) B. R. Frieden, "Lossless Conversion of a Plane Laser Wave to a Plane Wave of Uniform Irradiance", Appl. Optics, vol. 4, pp 1400-1403; November 1965.
- (62) S. Kawakami and J. Nishizawa, "Propagation Loss in a Distributed Beam Waveguide", Proc. IEEE, vol. 53, pp 2148-2149; December 1965.
- (63) N. S. Kapany et al, "Radiation Characteristics of Circular Dielectric Waveguide", Appl. Optics, vol. 4, pp 1534-1543; December 1965.
- (64) 末松安晴, 伊賀健一, 伊藤信一, "周期的に双曲線形温度分布の媒質に配置した新しいビーム導波系", 信学会, QE研資; December 1965.
- (65) E. A. J. Marcatili, "Light Transmission in a Multiple Dielectric (Gaseous and Solid) Guide", Bell Syst. Tech. J., vol. 45, pp 97-103; January 1966.
- (66) E. A. J. Marcatili, "Ray Propagation in Beam-Waveguides with Redirectors", Bell Syst. Tech. J., vol. 45, No. 1, pp 105-115; January 1966.
- (67) L. Bergstein et al, "The Frustrated Total Reflection Fiber I. Spectral Analysis", Appl. Optics, vol. 5, pp 9-21; January 1966.
- (68) D. Gloge, "Regulose Störungen in Linsen Leitungen", vol. 20, pp 82-90; February 1966.
- (69) T. S. Chu, "Geometrical Representation of Gaussian Beam Propagation", Bell Syst. Tech. J., vol. 45, No. 2, pp 287-299; February 1966.
- (70) R. Trambly et al, "Concepts and Techniques of Microwave Optics", Appl. Optics, vol. 5, pp 249-278; February 1966.
- (71) 平野順三, "光通信方式の条件", 信学会, QE委; February 1966.
- (72) 末松安晴, 伊賀健一, "レンズ状媒質を用いた光ビーム導波系の状態変換について", 信学会 2170 波伝達研究会資料; February 1966.
- (73) 末松安晴, 吹板洋司, "入射波と主軸の異なるレンズ状媒質の応答について", 信学会 2170 波伝達委; February 1966; 電通大 p 1030; April 1966.

- (74) 若松安晴, "周期的な双曲線 温度分布のレンズ媒質を用いた光ビーム導波系", 信学誌, vol. 49, pp 463-469; March 1966.
- (75) W. K. Kahn, "Unstable Optical Resonators", Appl. Optics, vol. 5, No. 3, pp 407-413; March 1966.
- (76) W. H. Steier, "The Statistical Effects of Random Variations in the Components of a Beam Waveguide", Bell Syst. Tech. J., vol. 45, pp 451-471; March 1966.
- (77) 若松安晴, 坪賀健一, 吹板洋司, "層流形ガスレンズの収束性について", 信学誌, vol. 49, No. 4, pp 748-754; April 1966.
- (78) 若松安晴, 池上徹彦, "ビーム光路を安定化する非カウラー提案", 電通大, p 1040; April 1966.
- (79) 若松安晴, 坪賀健一, "光ビーム伝送における光学ロス, 反射鏡の姿勢変換", p 1031; April 1966.
- (80) W. H. Steier, "Some Characteristics of Alternate Gradient Optical Transmission Lines", IEEE Trans on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-14, pp 228-233; May 1966.
- (81) A. W. Snyder, "Excitation of Waveguide Modes in Retinal Receptors", J. Opt. Soc. Amer., vol. 56, pp 705-706; May 1966.
- (82) Y. Suematsu, K. Iga and S. Ito, "A Light Beam Waveguide Using Hyperbolic-type Gas Lens", IEEE Symposium on Microwave Theory and Techniques, pp 184-188, May 1966.
- (83) G. Goubau, "Lenses Guide Optical Frequencies to Low-Loss Transmission", Electronics, pp 83-89; May 16, 1966.
- (84) D. Marcuse, "Physical Limitation on Ray Oscillation Suppressors", Bell Syst. Tech. J., vol. 45, No. 3, pp 743-751; May-June 1966.
- (85) N. Kurauchi and W. K. Kahn, "Rays and Ray Envelopes within Stable Optical Resonators Containing Focusing Media", Appl. Optics, vol. 5, No. 6, pp 1023-1029; June 1966.
- (86) D. W. Wilmot et al, "Optical Waveguide Modes in a Bisected Dielectric Slab", J. Opt. Soc. Amer., vol. 56, pp 839-840; June 1966.
- (87) 熊谷信昭, 吉田健一, 中原恒雄, "互射形ビーム デレグガイド", 信学誌, vol. 49, pp 51-58; June 1966.
- (88) W. H. Steier, "The Ray Racket Equivalent of a Gaussian Light Beam", Appl. Optics, vol. 5, No. 7, pp 1229-1233; July 1966.
- (89) A. E. Karbowiak, "A Close Look at Optical Waveguide", Microwaves, pp 37-46; July 1966.
- (90) Н.Н. Войтович, "К вопросу об Исследовании Лучевых Волноводов Случайными Линз," Радиотехника и Электроника, vol. , pp 1496-1499; August 1966.
- (91) 若松安晴, 坪賀健一, "光ビーム導波系における姿勢変換", 信学誌, vol. 49, No. 9, pp 59-66; September 1966.
- (92) S. E. Miller and L. C. Tillotson, "Optical Transmission Research", Proc. IEEE, vol. 54, pp 1300-1311; October 1966.

- (93) D. Marcuse, "Comparison between a Gas Lens and its Equivalent Thin Lens", Bell Syst. Tech. J., vol. 45, No. 10, pp 1339-1344; October 1966.
- (94) D. Marcuse, "Deformation of Equivalent Fields Propagating through Gas Lens", vol. 45, No. 10, pp 1345-1368; October 1966.
- (95) H. Kogelnik and T. Li, "Laser Beams and Resonators", Proc. IEEE, vol. 54, pp 1312-1329; October 1966.
- (96) 伊藤 敬, "空間分割方式による光線通信回線の多様化", 信学全大, S12-4; October 1966.
- (97) 平野 順三, "光による大容量伝送について", 信学全大, S12-3; October 1966.
- (98) 末松安晴, 伊賀健一, "組合せレンズ列, 反射鏡列光ビーム導波系", 信学全大, p 417; October 1966.
- (99) 末松安晴, 伊賀健一, 長嶋秀世, "光ビーム導波系収束素子の奇数次項振動による状態変換", 信学全大, p 418; October 1966.
- (100) 末松安晴, 伊賀健一, 伊藤信一, "双曲線型ガスレンズ諸特性の測定", 信学全大, p 419; October 1966.
- (101) Y. Suematsu, K. Iga and S. Ito, "A Light Beam Waveguide Using Hyperbolic-Type Gas Lens", IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-14, pp 657-665; December 1966.
- (102) Y. Aoki, "Light Rays in Lens-Like Media", Opt. Soc. Amer., vol. 56, pp 1648-1651; December 1966.
- (103) 末松安晴, 伊賀健一, "レンズ対および反射鏡対を用いた光ビーム導波系", 信学会, マイクロ波研資; December 1966.
- (104) 末松安晴, 伊賀健一, "光ビーム導波系の現状", エレクトロニクス(ホム社), vol. 11, pp 1406-1414; December 1966.
- (105) 深澤良治, 平野 順三, "曲り光集束伝送路の安定性について", 信学誌, vol. 49, No. 12, pp 63-70; December 1966.
- (106) E. A. J. Marcatili, "Off Axis Wave-Optics Transmission in a Lens-Like Medium with Aberration", Bell Syst. Tech. J., vol. 45, pp 149-166; January 1967
- (107) 末松安晴, "ビーム導波系用収束素子の異軸, 斜入射ガス波に対する性質", 信学会, マイクロ波研資, January 1967
- (108) 吉田健一, 熊谷信昭, "反射形ビーム導波系の幾何光学的取扱", 信学誌, vol. 50, pp 18-24; March 1967
- (109) J. R. Christian, G. Goubau and J. W. Mink, "Further Investigations with on Optical Beam Waveguide for Long Distance Transmission", vol. MTT-15, pp 216-219; April 1967
- (110) F. K. Schwing, "On the Theory of Randomly Misaligned Beam Waveguides", IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-15, pp 206-215; April 1967

- (111) D. Gloge, "Experiments with an Underground Lens Waveguide", Bell Syst. Tech. J., vol. 46, 3, pp721-735; April 1967
- (112) 末松安晴, 長嶋秀世, "光ビーム導波系の安定性について", 電通大, p 1432; April 1967
- (113) 伊賀健一, 末松安晴, "双曲線ガスレンズを用いた光ビーム導波系の曲がりに対する安全性", 電通大, p 1425; April 1967
- (114) 中原恒雄, 倉内豊孝, "平行反射板形電磁波伝送", 信学誌, vol. 50, 5, pp 879-885; May 1967
- (115) 赤尾保男, 宮崎保光, "誘導体レンズによるビーム変換公式の考察", 信学誌(校書), vol. 50 5, pp 138-139; May 1967
- (116) 内田稔二, "レーザを用いた超多重光通信について", 東京工業大学における講演, July 1967
- (117) 末松安晴, 長嶋秀世, 伊賀健一, "光ビーム導波系の安定性の一般式", ^(信学大会予稿集) p 536; October 1967
- (118) 末松安晴, 伊賀健一, 長嶋秀世, 北野利彦, "ガウス・モードフィルタ(GMF)を併用した光ビーム導波系", p 537; October 1967
信学大会, 予稿集
- (119) 末松安晴, 伊賀健一, 北野利彦, 長嶋秀世, "ガウス・モードフィルタを併用した光ビーム導波系の伝送状態", MW67-31; October 1967
信学会, マイクロ波研資,
- (120) 末松安晴, 長嶋秀世, 伊賀健一, "ガウス・モードフィルタを併用した光ビーム導波系の安定性", MW67-45; December 1967
信学会, マイクロ波研資,
- (121) 木下康昭, 鈴木道雄, 松本正, "ランダム媒質中のガウス形光ビーム伝搬", 信学誌, vol. 50, 11, pp 2146-2153; November 1967
- (122) 内田稔二, "通信への応用", 電子通信学会全国大会シンポジウム - S-14 レーザ応用, pp1-4; October 1967

(123)

追補

- (a1) 木下康昭, 鈴木道雄, 松本正, "かげろうの中における光路のゆらぎ", 信学誌校書, vol. 49, No 6, p1181; June 1966
- (a2) 赤尾保男, 宮崎保光, 松本光生, "ビーム導波系の誘電体レンズの非線形効果に関する考察", 信学誌, vol. 49, No 7, p1358; July 1966
- (a3) 青木由直, "Gas Lens の解析", 応用物理, vol. 36, No. 3, pp180-187; March 1967.

本研究に関する発表文献

論文

- [1] 末松安晴, 伊賀健一, 吹枝洋司, "層流型ガスレンズの収束性について", 電気通信学会雑誌, vol.49, No.4, pp748-754; April 1966
- [2] 末松安晴, 伊賀健一, "光ビーム導波系における姿態変換", 電気通信学会雑誌, vol.49, No.9, pp1645-1652; September 1966
- [3] Y.Suematsu, K.Iga and S.Ito; "A Light Beam Waveguide Using Hyperbolic-type Gas Lens", IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques, vol.MTT-14, No 12, pp657-665; December 1966
- [4] 末松安晴, 伊賀健一, 長嶋秀世, 北野利彦, "ガウス・モードフィルタとレンズを併用した光ビーム導波系", 電子通信学会雑誌掲載予定
- [5] 末松安晴, 伊賀健一, 長嶋秀世, "レンズ対あるいは反射鏡対を用いる光ビーム導波系", 電子通信学会雑誌掲載予定

研究会, シンポジウム資料

- [6] 末松安晴, 吹枝洋司, 伊賀健一, 鈴木徹夫, "層流型ガスレンズのFマトリクスと収束性の測定", 電気通信学会量子エレクトロニクス研究会資料; (1965-05)
- [7] 末松安晴, 伊賀健一, 伊藤信一, "周期的に双曲線型温度分布の媒質を配置した新しい光ビーム導波系", 同上研究会資料; (1965-12)
- [8] 末松安晴, 伊賀健一, "レンズ状媒質を用いる光ビーム導波系の姿態変換について", 電気通信学会マイクロ波伝送研究会資料; (1966-02)
- [9] Y.Suematsu, K.Iga and S.Ito, "A Light Beam Waveguide Using Hyperbolic-type Gas Lens", IEEE Symposium on Microwave Theory and Techniques, pp184-188; May 1966
- [10] 末松安晴, 伊賀健一, "レンズ対および反射鏡対を用いる光ビーム導波系", 電気通信学会マイクロ波研究会資料; (1966-12)

- [11] 末松安晴, 伊賀健一, 北野利彦, 長嶋秀世, "ガウス・モードフィルタとレンズを併用した光ビーム導波系の伝送変態", 電子通信学会マイクロ波研究会資料, MW 67-31 ; (1967-10)
- [12] 末松安晴, 長嶋秀世, 伊賀健一, "ガウス・モードフィルタとレンズを併用した光ビーム導波系の安定性", 同上研究会資料, MW 67-45 (1967-12)

学会報告

- [13] 末松安晴, 伊賀健一, "レンズ状媒質における変態変換", 電気通信学会全国大会(信学全大)予稿集, p414, (1965-11)
- [14] 末松安晴, 伊賀健一, "光ビーム伝送における光学レンズ, 反射鏡の変態変換", 電気四学会連合大会予稿集, p1031, (1966-04)
- [15] 末松安晴, 伊賀健一, "組合わせレンズ列, 反射鏡列光ビーム導波系", 信学全大予稿集, p417, (1966-10)
- [16] 末松安晴, 伊賀健一, 長嶋秀世, "光ビーム導波系の奇数次項振動による変態変換", 信学全大予稿集, p418, (1966-10)
- [17] 末松安晴, 伊賀健一, 伊藤信一, "双曲線型ガスレンズ諸特性の測定", 信学全大予稿集 p419, (1966-10)
- [18] 伊賀健一, 末松安晴, "双曲線型ガスレンズを用いる光ビーム導波系の曲がりに対する安定性", 電通連大予稿集, pp 1684-1685, (1967-04)
- [19] 末松安晴, 長嶋秀世, 伊賀健一, "光ビーム導波系の安定性の一般式", 信学全大予稿集, p536, (1967-10)
- [20] 末松安晴, 伊賀健一, 長嶋秀世, 北野利彦, "ガウス・モードフィルタ(GMF)とレンズを併用した光ビーム導波系", 信学全大予稿集 p537 (1967-10)

特許出願

- [21] "組合わせレンズ列光ビーム導波系" 昭和41年7月19日
- [22] "光ビーム導波系", 昭和42年8月19日

附録A エルミートおよびラゲール多項式に関する公式

本論文で用いているエルミートおよびラゲール多項式には定義が二通りある。その相異を表A.2, A.3に示すが, 本論文では統一的に Type A の方を用いた。また, 種々の文献にある両多項式の定義のとり方を表A.1に便利のために示した。なお, 多項式の積分公式が豊富に出ている表A.1の文献1, 2では, Type A, Bをそれぞれ異なるものを使用しているのが, Type Aに変換した公式を表A.4に示す。

$$\begin{cases} H_n^{(A)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} H_n^{(B)}(\sqrt{2}x) \\ H_n^{(B)}(x) = 2^{-\frac{n}{2}} H_n^{(A)}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}
 \begin{cases} L_n^{(A)}(x) = (-1)^n n! L_{n-m}^{(B)}(x) \\ L_n^{(B)}(x) = (-1)^n \frac{1}{(n+m)!} L_{n+m}^{(A)}(x) \end{cases}$$

表A.1 エルミート, ラゲール多項式の定義の相違と分類

	文 献	エルミート 多項式		ラゲール 多項式	
		A	B	A	B
1	A. Erdelyi, "Higher Transcendental Functions", vol. 2, p188, McGraw Hill, New York, 1953	○			○
2	A. Erdelyi, "Table of Integral Transforms", vol. 2, p288, McGraw Hill, 1953.		○ $He_n(x)$		○
3	森口繁一他, "数学公式Ⅲ", p91 岩波.	$H_n^*(x)$	○		○
4	石津武彦, "特殊函数論", p131, 朝倉書店.		○		○ S_n^μ
5	Jahnke-Emde-Lösche, "Tables of High Functions", Fig 67		○ Ⅳ		
6	大井鉄郎, "特殊函数", p48, 岩波全書	○		○	$S_n^\mu(x)$
7	大井鉄郎, "球函数, 円筒函数, 超幾何函数"	○		○	
8	野邑雄吉, "特殊函数とその応用", p37, 日刊工業新聞社	○		○	
9	L.I. Schiff, "Quantum Mechanics", p60, McGraw Hill-Kogakusha,	○		○	
10	R. クーラン, D. ヒルベルト, "数理物理学の方法", p72, 東京図書, 1962	○		○	

表 A.2 エルミート多項式の表示の差

表 示	Type A $H_n(x)$	Type B $H_n(x)$ $He_n(x)$
微分方程式	$H_n''(x) - 2x H_n'(x) + 2n H_n(x) = 0$	$H_n''(x) - x H_n'(x) + n H_n(x) = 0$
漸化式	$H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0$	$H_{n+1}(x) - x H_n(x) + n H_{n-1}(x) = 0$
母函数	$e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$	$e^{xt - t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$
正規直交系	$\varphi_n(x) = \frac{1}{[2^n n! \sqrt{\pi}]^{1/2}} e^{-x^2/2} H_n(x)$	$\varphi_n(x) = \frac{1}{[n! \sqrt{2\pi}]^{1/2}} e^{-x^2/2} H_n(x)$
定義	$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ $H_0(x) = 1$ $H_1(x) = 2x$ $H_2(x) = 4x^2 - 2$ $H_3(x) = 8x^3 - 12x$ $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$ $H_5(x) = 32x^5 - 16x^3 + 120x$ $H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$ $H_n(x) = n! \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m (2x)^{n-2m}}{m! (n-2m)!}$	$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$ $H_0(x) = 1$ $H_1(x) = x$ $H_2(x) = x^2 - 1$ $H_3(x) = x^3 - 3x$ $H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$ $H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x$ $H_6(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15$ $H_n(x) = n! \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m x^{n-2m}}{2^m m! (n-2m)!}$

$$[n/2] = \begin{cases} \frac{n}{2} & n: \text{even} \\ (n-1)/2 & n: \text{odd} \end{cases}$$

表 A-3 ラゲール多項式の表示の差

表 式	Type A $L_n^m(x)$	Type B $L_n^{(d)}(x)$
微分方程式	$x L_n^{m''}(x) + (m+1-x) L_n^{m'}(x) + (n-m) L_n^m(x) = 0$	$x L_n^{(d)'}(x) + (\alpha+1-x) L_n^{(d)'}(x) + n L_n^{(d)}(x) = 0$
漸化式		$n L_n^{(d)}(x) + (x-2n+d+1) L_{n-1}^{(d)}(x) + (n+d-1) L_{n-2}^{(d)}(x) = 0 \quad (n \geq 2)$
正規直交系	$\varphi_n(x) = \frac{1}{n!} e^{-x} L_n(x)$ $\varphi_{nm}(x) = \left[\frac{(n-m)!}{(n!)^3} \right]^{\frac{1}{2}} e^{-x} x^{\frac{m}{2}} L_n^m(x)$	$\varphi_n(x) = e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)$ $\varphi_{nd}(x) = \left[\frac{n!}{\Gamma(n+d+1)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{d}{2}} L_n^{(d)}(x)$
定 義	$L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x)$ $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$ $L_0(x) = 1$ $L_1(x) = -x + 1$ $L_2(x) = x^2 - 4x + 2$ $L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$ $L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$ $L_5(x) = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$ $L_n^m(x) = (-)^m n! \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n}{n-m-k} \frac{(-x)^k}{k!}$	$L_n^{(d)}(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-d} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+d})$ $L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$ $L_0(x) = 1$ $L_1(x) = -x + 1$ $L_2(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1$ $L_3(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$ $L_4(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ $L_5(x) = -\frac{x^5}{120} + \frac{5}{24}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 5x^2 - 5x + 1$ $L_n^{(d)}(x) = \sum_{m=0}^n \binom{n+d}{n-m} \frac{(-x)^m}{m!}$
母函数		$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{d+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(d)}(x) t^n$

表A.4 エルミート多項式に関する積分公式

Table of Integral Transforms (Type B) を Type A に変換したものの,
 m, n は non-negative integer.

(1)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2x^2) H_n(x) dx = (-1)^n 2^{n-\frac{1}{2}} \Gamma(n+\frac{1}{2})$
(2)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x-y)^2] H_n(x) dx = \pi^{\frac{1}{2}} 2^n y^n$
(3)	$\int_{-\infty}^{\infty} (x \pm ic)^{\nu} \exp(-x^2) H_n(x) dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\nu)}{\Gamma(-\nu)} \pi^{\frac{1}{2}} 2^{n-\nu-1} e^{\pm \frac{1}{2}\pi(\nu+n)i}$
(4)	$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{-1} (x^2 + a^2)^{-1} e^{-x^2} H_{2n+1}(x) dx \\ = 2^{n+\frac{1}{2}} (-1)^n (\frac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}} a^{-2} [2^n n! - (2n+1)! \exp(\frac{1}{2}a^2) D_{-2n-2}(\sqrt{2}a)] \end{aligned}$
(5)	$\int_0^{\infty} \exp(-x^2) \sin(\beta x) H_{2n+1}(x) dx = \frac{1}{2} (-1)^n (\pi)^{\frac{1}{2}} \beta^{2n+1} \exp(-\frac{1}{4}\beta^2)$
(6)	$\int_0^{\infty} \exp(-x^2) \cos(\beta x) H_{2n}(x) dx = \frac{1}{2} (-1)^n (\pi)^{\frac{1}{2}} \beta^{2n} \exp(-\frac{1}{4}\beta^2)$
(7)	$\int_0^{\infty} \exp(-x^2) \sinh(\beta x) H_{2n+1}(x) dx = \frac{1}{2} (\pi)^{\frac{1}{2}} \beta^{2n+1} \exp(+\frac{1}{4}\beta^2)$
(8)	$\int_0^{\infty} \exp(-x^2) \cosh(\beta x) H_{2n}(x) dx = \frac{1}{2} (\pi)^{\frac{1}{2}} \beta^{2n} \exp(+\frac{1}{4}\beta^2)$
(9)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) [H_n(x)]^2 dx = (\pi)^{\frac{1}{2}} 2^n n!$
(10)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2x^2) H_m(x) H_n(x) dx = (-1)^{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n} 2^{\frac{1}{2}(m+n-1)} \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right), \quad \begin{matrix} m+n \\ \text{even} \end{matrix}$
(11)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_m(x) H_n(x) dx = 0 \quad m \neq n$

(12)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha^2 x^2) H_m(x) H_n(x) dx$ $= \alpha^{-m-n-1} (1-\alpha^2)^{1/2 m + 1/2 n} 2^{m+n} \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right)$ $\times {}_2F_1\left(-m, -n; \frac{1-m-n}{2}; \frac{\alpha^2/2}{\alpha^2-1}\right) \quad \text{Re } \alpha^2 > 0, m+n \text{ even}$
(13)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x-y)^2] H_m(x) H_n(x) dx = (\pi)^{1/2} m! 2^n y^{n-m} L_n^{n-m}(-2y^2) \quad m \leq n$
(14)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2x^2) H_R(x) H_m(x) H_n(x) dx$ $= 2^{S-1} \pi^{-1} \Gamma(S-R) \Gamma(S-m) \Gamma(S-n)$ $2S = R+m+n+1$ $R+m+n = \dots \text{ even}$
(15)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_R(x) H_m(x) H_n(x) dx = \frac{2^S \pi^{1/2} R! m! n!}{(S-R)! (S-m)! (S-n)!}$ $R+m+n = 2S \quad \text{even}$
(16)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha^2 x^2) H_m(x) H_n(x) H_R(x) \dots dx$ See Busbridge, I.W., 1948: J. London Math. Soc. 23, 135-141.
(17)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x-y)^2] H_n(\alpha x) dx = \pi^{1/2} (1-\alpha^2)^{1/2 n} H_n\left[\frac{\alpha y}{(1-\alpha^2)^{1/2}}\right]$
(18)	$\int_0^{\infty} \exp(-x^2) \sin 2\beta x H_{2n+1}(\alpha x) dx$ $= \frac{1}{2} (-)^n \pi^{1/2} (\alpha^2-1)^{n+1/2} \exp(-\beta^2) H_{2n+1}\left[\frac{\alpha\beta}{(\alpha^2-1)^{1/2}}\right]$
(19)	$\int_0^{\infty} \exp(-x^2) \cos(2\beta x) H_{2n}(\alpha x) dx$ $= \frac{1}{2} \pi^{1/2} (1-\alpha^2)^n \exp(-\beta^2) H_n\left[\frac{\alpha\beta}{(\alpha^2-1)^{1/2}}\right]$
(20)	$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_m(x) H_n(x) dx = 0$ $m < n$

(21)	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{2m+n}(\alpha x) H_n(x) dx = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{(2m+n)!}{m! 2^{2m+n}} (\alpha^2 - 1)^m \alpha^n$
(22)	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha^2 + \beta^2)x^2} H_m(\alpha x) H_n(\beta x) dx = (-)^{\frac{1}{2}(m-n)} 2^{m+n} \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right) \alpha^n \beta^m (\alpha^2 + \beta^2)^{-m-n-\frac{1}{2}}$ $\operatorname{Re}(\alpha^2 + \beta^2) > 0 \quad m+n \text{ even}$
(23)	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(\alpha x) H_n(\beta x) dx$ $= \sqrt{\pi} n! (\alpha^2 - 1)^{-\frac{1}{2}m} (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{2}n} (\alpha^2 + \beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}(m+n)} P_{m+n}^n(z)$ $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2 \beta^2}$
(24)	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\lambda^2 x^2} H_m(\alpha x) H_n(\beta x) dx = 0 \quad m+n \text{ odd}$
(25)	$\int_{-\infty}^{\infty} x^p e^{-2\lambda^2 x^2} H_{2n}(\alpha x) H_{2n}(\beta x) dx$ See Buchholz, Herbert, 1953; Die konfluente hypergeometrische Function. Springer-Verlag, Berlin, Göttinger, Heidelberg, Sec. 13.
(26)	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} H_m(\alpha x) H_n(\alpha x) dx = \sqrt{\pi} \sum_{R=0}^{\min(m,n)} 2^R R! \binom{m}{R} \binom{n}{R} (1-\alpha^2)^{-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}-R} H_{m+n-2R}\left(\frac{\alpha y}{(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$
(27)	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\lambda^2 x^2} H_m(\alpha x) H_n(\beta x) H_R(\gamma x) dx = 0 \quad m+n+R \text{ odd}$
(28)	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\lambda^2 x^2} H_R(\alpha x) H_m(\beta x) H_n(\gamma x) \dots dx$
(29)	$\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-2\lambda^2 x^2} H_R(\alpha x) H_m(\beta x) H_n(\gamma x) \dots dx$
(30)	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x+y) H_n(x+z) dx = \pi^{\frac{1}{2}} 2^n m! z^{n-m} L_m^{n-m}(2yz) \quad (m \leq n)$
(31)	$\int_0^{\pi} (\cos x)^n H_{2n}\left[\alpha(1-\sec x)^{\frac{1}{2}}\right] dx = \frac{(-)^n \pi (2n)!}{2^n (n!)^2} [H_n(\alpha)]^2$

附録 B 数学公式 (本論文で新たに導いたもの)

マトリクスのクロネッカー積(直積)

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdot & \cdot \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$A \times A = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & 2a_{11}a_{12} & a_{12}^2 \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} & a_{12}a_{22} \\ a_{21}^2 & 2a_{21}a_{22} & a_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

マトリクスの n 乗

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (\text{B.3a})$$

$$\alpha = \sqrt{\det F} = \sqrt{AD - BC} \quad (\text{B.3b})$$

$$\beta = \frac{1}{2}(A + D) = \frac{1}{2} \text{Tr} F \quad (\text{B.3c})$$

$$(i) \alpha \geq \beta \quad \cos 2\theta = \beta/\alpha$$

$$F^n = \frac{\alpha^n}{\sin 2\theta} \left[\frac{1}{\alpha} \sin 2n\theta \cdot F - \sin 2(n-1)\theta I \right] \quad (\text{B.4})$$

$$(ii) \alpha \leq \beta \quad \cosh 2\theta = \beta/\alpha$$

$$F^n = \frac{\alpha^n}{\sinh 2\theta} \left[\frac{1}{\alpha} \sinh 2n\theta F - \sinh 2(n-1)\theta I \right] \quad (\text{B.5})$$

シルベスターの定理 (Sylvester's Theorem) 文献(76)による

$$\begin{aligned} F^R &= \frac{(F - \lambda_2 I)(F - \lambda_3 I)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} \cdot \lambda_1^R \\ &+ \frac{(F - \lambda_1 I)(F - \lambda_3 I)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} \cdot \lambda_2^R \\ &+ \frac{(F - \lambda_1 I)(F - \lambda_2 I)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \cdot \lambda_3^R \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は $|F| - \lambda E = 0$ の根, F は 3 行 3 列のマトリクスである.

級数の和

$$\bar{S}_R(x) = \sum_{r=1}^{\infty} r^R x^r \quad |x| < 1$$

$$\bar{S}_0(x) = x / (1-x)$$

$$\bar{S}_1(x) = x / (1-x)^2$$

$$\bar{S}_2(x) = x(1+x) / (1-x)^3$$

$$\bar{S}_3(x) = x(1+4x+x^2) / (1-x)^4$$

$$\bar{S}_4(x) = x(1+11x+11x^2+x^3) / (1-x)^5 \quad (B.7)$$

$$r_R(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!} r^R x^r$$

$$r_0(x) = 1 / \sqrt{1-x}$$

$$r_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{x}{1-x}$$

$$r_2(x) = \frac{1}{4\sqrt{1-x}} \left[2 \frac{x}{1-x} + 3 \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 \right]$$

$$r_3(x) = \frac{1}{8\sqrt{1-x}} \left[4 \frac{x}{1-x} + 18 \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 + 15 \left(\frac{x}{1-x} \right)^3 \right]$$

$$r_4(x) = \frac{1}{16\sqrt{1-x}} \left[8 \frac{x}{1-x} + 84 \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 + 180 \left(\frac{x}{1-x} \right)^3 + 150 \left(\frac{x}{1-x} \right)^4 \right] \quad (B.8)$$

$$\sum_{r=1}^n a^r \sin rx = \frac{a \sin x - a^{n+1} \sin (n+1)x + a^{n+2} \sin nx}{1 - 2a \cos x + a^2} \quad (B.9)$$

附録C 気体の誘電率と温度の関係

(i) クラジウス・モソッティの法則

絶対温度 T における理想気体の誘電率 $\epsilon(T)$, 屈折率 $n(T)$ は次の関係で与えられる。

$$\epsilon(T) = \epsilon_0 \left[1 + (\epsilon_0 - 1) \frac{T_0}{T} \right] \quad (C.1)$$

$$n(T) = 1 + (n_0 - 1) \frac{T_0}{T} \quad (C.2)$$

ただし, ϵ_0, n_0 は $T=T_0$ における比誘電率, 屈折率である。

電媒質におけるクラジウス・モソッティの法則^{#1)}

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{4\pi}{3} N \alpha \quad (C.3)$$

ただし, α は polarizability, N は単位体積中の粒子数である。理想気体について, 分子の分子量を M , 密度を ρ , 1 mol 中の分子数を N , 1 cm³ 中の分子数を N' , 圧力を p , 体積を v , 絶対温度を T , 全体の mol 数を ν とすると,

$$N'/N = \rho/M = \nu/v = \text{mol 数} \quad (C.5)$$

$$pv = \nu RT \quad (C.6)$$

$$p = (\nu/v) RT = (\rho/M) \cdot RT = (N'/N) RT = N' RT \quad (C.7)$$

であるから

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{4\pi}{3} \alpha \frac{p}{RT} \quad (C.8)$$

$\epsilon_r - 1 \ll 1$ とすると,

$$(\epsilon_r - 1) / (\epsilon_r + 2) \cong \frac{1}{3} (\epsilon_r - 1) \quad (C.9)$$

#1) Clausius-Mossotti's Law. ただし, これは静電場に対して発見されたもので光の様な振動する場では, Lorentz-Lorenz の法則として知られている。

したが、 $\epsilon(T) = \epsilon_0 \epsilon_r$ $\epsilon(T_0) = \epsilon_0 \epsilon_{r0}$ とおくと、式(0.8), (0.9)より、式(0.1)が得られる。

(ii) 屈折率と温度、圧力の関係

$$n_p - 1 = \frac{(n_0^{760} - 1) p}{(1 + \alpha \theta) 760}$$

ただし、 p (mmHg), θ °C, $\alpha = 0.00367$, n_0^{760} は 0°C, 760 mmHg における屈折率である。