

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	Explorationに着目した実数値遺伝的アルゴリズム
Title(English)	Real-Coded Genetic Algorithms Taking Account of Exploration
著者(和文)	上村健人
Author(English)	Kento Uemura
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第9867号, 授与年月日:2015年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:小野 功,樺島 祥介,寺野 隆雄,新田 克己,山村 雅幸
Citation(English)	Degree:, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第9867号, Conferred date:2015/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	要約
Type(English)	Outline

Exploration に着目した
実数値遺伝的アルゴリズム (要約)

上村 健人

博士（工学）論文

Explorationに着目した
実数値遺伝的アルゴリズム（要約）

Real-Coded Genetic Algorithms
Taking Account of Exploration (Outline)

指導教官：小野 功 准教授
氏 名：上村 健人

目次

第 1 章 序論	5
1.1 背景と目的	5
1.2 方法と意義	7
1.3 論文の構成	8
第 2 章 問題の所在	10
2.1 はじめに	10
2.2 問題設定	10
2.2.1 ブラックボックス関数最適化	10
2.2.2 非明示制約付きブラックボックス関数最適化	10
2.3 実数値遺伝的アルゴリズム	11
2.3.1 RCGA の枠組み	11
2.3.2 Exploitation 重視の RCGA とその例：REX/JGG	11
2.4 Exploitation 重視の RCGA での探索を困難にする問題の性質	12
2.4.1 大域的多峰性	13
2.4.2 非明示アクティブ制約	13
2.4.3 稜構造	15
2.5 Exploitation 重視の RCGA の問題点に対処した既存手法とその問題点	15
2.5.1 生得分離モデル (Innately Split Model; ISM)	15
2.5.2 ISM の問題点	16
2.5.3 modified AREX/JGG (mAREX/JGG)	17
2.5.4 mAREX/JGG の問題点	19
2.6 本論文での接近法	19
2.6.1 大域的多峰性への接近法	19
2.6.2 非明示アクティブ制約と稜構造への接近法	19
2.7 おわりに	20
第 3 章 大域的多峰性関数最適化のための RCGA の枠組み：Big-valley Explorer	21
3.1 はじめに	21
3.2 基本的な考え方	21
3.2.1 全体の探索の流れ	21
3.2.2 大谷領域推定機構	22
3.2.3 適応的初期化機構	23

3.3	アルゴリズム	24
3.3.1	全体のアルゴリズム	24
3.3.2	大谷領域推定機構のアルゴリズム	25
3.3.3	適応的初期化機構のアルゴリズム	26
3.4	実験	26
3.4.1	目的	26
3.4.2	比較手法	27
3.4.3	評価方法	27
3.4.4	ベンチマーク関数	28
3.4.5	設定	29
3.4.6	結果	29
3.5	考察	30
3.5.1	実験結果の考察	30
3.5.2	大谷領域推定機構と適応的初期化機構の効果	31
3.5.3	超楕円体更新アルゴリズムの推定精度に関する検証	32
3.5.4	ユーザパラメータに関する考察	33
3.6	おわりに	34

第 4 章 非明示アクティブ制約と稜構造を考慮した RCGA: Adaptive Extrapolation

	RCGA	35
4.1	はじめに	35
4.2	基本的な考え方	35
4.2.1	子個体生成	36
4.2.2	生存選択	37
4.2.3	拡張率適応	37
4.3	実現方法	38
4.3.1	子個体生成	39
4.3.2	拡張率適応	39
4.4	アルゴリズム	41
4.5	実験	42
4.5.1	目的	42
4.5.2	評価方法	42
4.5.3	ベンチマーク問題	43
4.5.4	設定	43
4.5.5	結果	43
4.6	考察	44
4.6.1	直交方向への子個体分布拡大の効果に関する考察	44
4.6.2	β 適応法の挙動に関する考察	45
4.6.3	ユーザパラメータに関する考察	47

4.6.4	mCMA-ES との比較	47
4.7	4 枚組固定焦点レンズ系設計問題への適用	49
4.7.1	4 枚組固定焦点レンズ系設計問題	49
4.7.2	目的	51
4.7.3	評価方法	51
4.7.4	設定	51
4.7.5	結果	51
4.8	おわりに	52
第 5 章	結論	53
5.1	研究成果のとりまとめ	53
5.2	今後の課題	54
	謝辞	58
	公表論文	59
	参考文献	61
付 録 A	BE に関して	66
A.1	超楕円体 $(\mu_e, \alpha^2(n+2)\mathbf{A}_e)$ 内一様分布に従うサンプルの生成方法	66
A.2	超楕円体更新アルゴリズムの効率的な実装方法	66
付 録 B	AEGA に関して	68
B.1	直交方向への分布拡大行列 \mathbf{B} の導出方法	68
B.2	τ の厳密解の導出方法	68

第1章 序論

1.1 背景と目的

目的関数として与えられた実連続関数 $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ を最小とする決定変数 $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ を求める問題を関数最適化という。関数最適化は、工学のあらゆる分野で現れる重要な問題クラスである。実問題では、しばしば目的関数値 $f(\mathbf{x})$ の計算に物理現象などのシミュレーションを含むため、 $f(\mathbf{x})$ が数式で陽に記述されないブラックボックス関数として与えられる。ブラックボックス関数では $f(\mathbf{x})$ の微分値を利用できないことから、 $f(\mathbf{x})$ の値のみを用いて最適化を行う直接探索法が一般に利用される。また、解の探索空間が $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ である問題を無制約問題とよび、 \mathcal{X} に何らかの制約が課された問題 $\mathcal{X} \neq \mathbb{R}^n$ を制約付き問題とよぶ。多くの実問題は制約付き問題として定式化される。さらに、実問題では制約が目的関数とは別に与えられず、解に評価値が定義されるか否かによってのみその解の制約充足性を知ることができる非明示制約とよばれる困難な制約がしばしば課される。

実数値遺伝的アルゴリズム (Real-coded Genetic Algorithm; RCGA) [1, 2, 3] は有力なブラックボックス関数最適化手法の一種である。RCGA では解候補のことを個体、解候補の集合のことを集団とよぶ。RCGA は複数個体からなる集団を保持し、確率的な要素を取り入れた更新により、集団を有望な領域へと収束させることで探索を進める枠組みである。RCGA は単点ではなく複数点を用いて確率的に探索を行う確率的多点探索手法であることから、準ニュートン法や焼き鈍し法といった従来の単点探索手法 [4, 5] に比べて、より大域的な問題の構造を捉えた探索ができる可能性を秘めており、現在盛んに研究がなされている。今までに様々な RCGA が提案されてきており、無制約問題において良好な探索性能を示すことが報告されている [6, 7]。また、RCGA は制約充足個体ができるまで個体生成を繰り返すリサンプリングによる制約処理 (Death Penalty とよばれる) [8, 9] を導入することで、非明示制約を含む制約付き問題にも適用できる。RCGA と並ぶ確率的多点探索手法の例としては、粒子群最適化 (Particle Swarm Optimization; PSO) [10, 11]、差分進化 (Differential Evolution; DE) [12, 13]、進化戦略 (Evolution Strategy; ES) [9, 14, 15]、分布推定アルゴリズム (Estimation of Distribution Algorithm; EDA) [16] といった手法がこれまでに提案されている。

RCGA の従来研究においては、関数の景観が大谷 [17] とよばれる、細かい局所解はあるものの、探索空間全体では単一の大きな谷をなしていることを暗に想定してきた。これに加えて、探索を通してその集団分布が常に最適解を覆い続けるという想定がなされていた。これらの前提のもと、従来の多くの RCGA は、現在の集団分布の情報を利用してそれと同じ領域もしくはその内部に重点的に新たな個体を生成する、Exploitation 重視の探索を行うよ

うに設計されている [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 7].

しかし、近年計算機の性能向上により、これまで時間的制約などから困難であった実問題への適用が盛んになるとともに、Exploitation 重視の RCGA による最適解の発見を困難にする問題の性質が明らかになってきた。この困難な問題の性質として、大域的多峰性、非明示アクティブ制約、および稜構造がある。大域的多峰性とは、探索空間で関数景観が複数の大谷から構成されることを指す。従来の RCGA では、探索序盤に集団分布内の期待評価値が良い大谷内へと探索が進むため、問題によっては最適解のない大谷へと集団が収束してしまうおそれがある。非明示アクティブ制約とは、非明示制約付き問題において、アクティブ制約が存在するものを指す。アクティブ制約とはその制約境界上に最適解が存在する制約をいう。稜構造とは、関数景観内に細長く湾曲した谷が存在することを指す。非明示アクティブ制約や稜構造を持つ問題では、初期化時から探索を通して、もしくは探索過程の途中において集団分布が最適解を覆わない状況が現れる。これらの問題で最適解を発見するためには、RCGA の集団分布をアクティブ制約境界上の最適解方向に、もしくは湾曲した谷に沿って移動させる必要がある。また、非明示アクティブ制約付き問題ではしばしば最適解ではない制約境界付近での誤った収束が観察される。これを回避するためには、一度収束しかけた集団分布を再度拡大させる必要がある。従来の Exploitation 重視の手法では集団分布の移動や拡大が困難であるため、探索停滞により探索効率が悪化したり、最適解ではない位置での収束により最適解の発見に失敗するおそれがある。

大域的多峰性に対処した RCGA の初期化領域適応手法として生得分離モデル (Innately Split Model; ISM) が提案されている [25, 26]。ISM では従来の RCGA のように探索空間全体ではなく、探索空間内の小領域内に限定して RCGA の集団を初期化する。ISM ではこの小領域の位置をランダムに変更しつつ、RCGA による探索を繰り返すことで、うまく最適解のある大谷内部に初期化され、その後の探索により最適解が発見されることをねらっている。ISM は大域的多峰性において良好な性能を示しているものの、小領域の大きさが固定で予め与えるユーザパラメータに依存していることや、小領域の位置が完全ランダムであることに起因する、探索の非効率性という問題点がある。

非明示アクティブ制約および稜構造に対処した RCGA として、AREX/JGG [24, 27] にリサンプリングによる制約処理を導入した手法である modified AREX/JGG (mAREX/JGG) がある。mAREX/JGG は従来の Exploitation 重視の RCGA である REX/JGG を拡張した手法であり、新たな個体生成分布の位置を評価値改善方向に移動させ、かつその分布を拡張率を用いて拡大することで、集団分布に対して外挿的な新たな個体の生成を実現し、集団分布を移動や拡大させることをねらっている。しかし、mAREX/JGG には、個体生成分布を集団内からランダム選択した親個体のみから構成することに起因する、探索の非効率性という問題点が存在する。

本論文の目的は、以下の2点である：1) 大域的多峰性に対処した新たな RCGA の初期化領域適応手法 Big-valley Explorer (BE) を提案し、数値実験により ISM に対する BE の有効性を示すこと、および、2) 非明示アクティブ制約と稜構造を考慮した新たな RCGA である Adaptive Extrapolation RCGA (AEGA) を提案し、数値実験により mAREX/JGG に

対する AEGA の有効性を示すことである。

1.2 方法と意義

本論文では、はじめに RCGA について説明し、対象とするブラックボックス関数最適化について定式化を行う。また、従来の RCGA での探索を困難にする問題の性質である大域的多峰性、非明示アクティブ制約、および稜構造について説明し、これらに対処した既存手法とその問題点について議論する。具体的には、大域的多峰性に対処した RCGA の初期化領域適応手法 ISM を紹介し、その初期化領域の位置と大きさの決定方法に起因する問題点があることを指摘する。また、非明示アクティブ制約と稜構造で良好な性能を示す RCGA である mAREX/JGG を紹介し、集団からランダム選択した親個体のみを用いた子個体生成方法に起因する問題点があることを指摘する。次に、大域的多峰性に対処した RCGA の初期化領域適応手法である Big-valley Explorer (BE) を提案する。既存手法 ISM の問題点を解決するため、BE では一度探索を行った領域を推定することで、未探索領域への積極的な RCGA の初期化を促す。ベンチマーク問題を用いた数値実験により、ISM を含む既存手法に対する BE の有効性を示す。さらに、非明示アクティブ制約と稜構造を考慮した RCGA である Adaptive Extrapolation RCGA (AEGA) を提案する。既存手法 mAREX/JGG の問題点を解決するため、AEGA では集団全体の情報を用いて子個体を生成することで、安定的かつ効率的に集団分布に対する外挿的な子個体生成をねらう。非明示アクティブ制約および稜構造をそれぞれ持つベンチマーク問題、および両方の性質を持つとされている実問題を用いた数値実験により、mAREX/JGG に対する AEGA の有効性を示す。

本研究が対象とする問題の性質は、近年になり認識されはじめた新たな性質であり、これらの性質への対処は RCGA に代表される確率的多点探索手法の分野における重要な中心的課題である。大域的多峰性を持つ問題では RCGA を含む様々な確率的多点探索手法での性能劣化が報告されており [25, 28, 29, 30]、未だに決定的な手法は存在しない最先端の研究分野である。既存研究である ISM での成果は、RCGA の初期化領域の変更が本問題の解決に有効であることを示唆している。提案手法 BE ではこの考えを発展させ、未探索領域を重点的に探索させるという前提のもとで初期化領域の適応を行う手法であり、本論文の成果は大域的多峰性への取り組みにおけるこの新たな方法論が非常に有用であることを示唆している。非明示アクティブ制約および稜構造に代表されるような、最適解の発見のために集団分布の移動や拡大が必要となる問題の性質は、RCGA の研究においてここ数年で認識されてきた新たな研究分野である。ごく最近になり提案された、mAREX/JGG に代表される移動や拡大を考慮して、従来の Exploitation 重視の RCGA を拡張する形で設計された RCGA [7, 27] は、ベンチマーク問題において非常に良好な性能を示している。一方で、本論文で提案する AEGA は、集団分布の移動や拡大を考慮して一から設計するという、新たな考え方に基づく RCGA であり、本論文の成果はこれらの困難な性質を持つ問題における新しい解決法を提示するとともに、この解決法が非常に有用であることを示唆している。

近年計算機の発展により、大規模なシミュレーションを含むブラックボックス関数最適化

が活用されるようになりつつある。このような背景のもと、有力なブラックボックス関数最適化手法である RCGA の開発は産業発展において非常に重要であるといえる。本研究で対象とする性質を持つ問題は既存の RCGA でも最適化が困難であることから、本研究の成果は困難な実問題の解決に大きく貢献すると考えられる。大域的多峰性を持つ問題に対処した手法 BE により、従来のように専門家の高度な領域知識を利用せずとも、良好な解を得ることができるようになると期待される。また、今までに専門家の領域知識で探索領域を狭めることで解決してきた実問題の探索領域を再度拡大することで、問題が大域的多峰性となることが考えられる。この拡大した問題に提案手法を適用して得られる新たな解は、今までの専門家の常識では発見できなかった革新的な解となり得る。非明示アクティブ制約と稜構造を考慮し、集団分布の移動や拡大を行うことができる提案手法 AEGA を用いることで、従来手法より効率よく良好な解を得ることができるようになると期待される。さらに、Exploitation 重視の従来の RCGA は集団の移動や拡大を行う能力を持たないことから、今までに従来手法で得られていた解は、また改善の余地のある解であった可能性がある。このような問題に提案手法を適用することで、従来手法で得られた解からさらに探索を進めて、より良好な新たな解を発見できるようになると期待される。

以上より、本論文の成果は、実問題にも現れる困難な性質を持つ問題における最新の研究分野を牽引し、そのさらなる発展に大きく寄与すると期待される。

1.3 論文の構成

本論文は「Exploration に着目した実数値遺伝的アルゴリズム」と題し、全5章から成る。第1章は「序論」である。

第2章は「問題の所在」である。ここでは、まずブラックボックス関数最適化問題と非明示制約を定義する。次に準備として RCGA の枠組みと従来の Exploitation 重視の手法を紹介する。その後、本論文で対象とする大域的多峰性、非明示アクティブ制約、および稜構造における、従来の RCGA での探索の困難さを説明し、これらの性質に対処した既存手法 ISM および mAREX/JGG とその問題点を示す。最後にその問題点の解決のため、本論文でとる接近法を示す。

第3章は「大域的多峰性関数最適化のための RCGA の枠組み：Big-valley Explorer」である。ここでは、第2章で示す接近法に従い、既存手法 ISM の問題点を解決した RCGA の初期化領域適応手法 Big-valley Explorer (BE) を提案する。まず提案手法 BE の基本的な考え方を、次にそのアルゴリズムを示す。大域的多峰性ベンチマーク問題を用いて性能評価実験を行い、BE の ISM に対する有用性を示す。また、BE の詳細な挙動やユーザパラメータに関する考察を行う。

第4章は「非明示アクティブ制約と稜構造を考慮した RCGA：Adaptive Extrapolation RCGA」である。ここでは、第2章で示す接近法に従い、既存手法 mAREX/JGG の問題点を解決した新たな RCGA である Adaptive Extrapolation RCGA (AEGA) を提案する。まず提案手法 AEGA の基本的な考え方とその実現方法を、次にそのアルゴリズムを示す。

非明示アクティブ制約または稜構造を持つベンチマーク問題を用いて性能評価実験を行い、AEGA の mAREX/JGG に対する有用性を示す。さらに、AEGA の詳細な挙動やユーザパラメータに関する考察を行う。最後に非明示アクティブ制約と稜構造を持つとされている実問題に AEGA を適用し、その効果について検証する。

第5章は「結論」である。ここでは本論文の成果をとりまとめ、今後の課題を述べる。

第2章 問題の所在

2.1 はじめに

本章では、まず、問題設定として本論文で扱うブラックボックス関数最適化および非明示制約を定式化する。次に、RCGAの枠組みを説明し、従来のExploitation重視のRCGAの一例としてREX/JGGのアルゴリズムを紹介した後に、Exploitation重視のRCGAでの探索を困難にする問題の性質である大域的多峰性、非明示アクティブ制約、および稜構造について説明する。その後、これらの性質に対処した既存研究として、大域的多峰性に対処したRCGAの初期化領域適応手法であるISMと、非明示アクティブ制約と稜構造に対処したRCGAであるmAREX/JGGについて紹介し、これらの手法にもまだ問題点が存在することを指摘する。最後に、その問題点の議論に基づき、本論文でとる接近法について論ずる。

本章の構成は以下の通りである。第2.2節が問題設定、第2.3節がRCGAの枠組みの説明と既存のExploitation重視のRCGAの紹介である。第2.4節でExploitation重視のRCGAの探索を困難にする問題の性質を述べる。第2.5節でこれらに対処した既存研究とその問題点を示す。第2.6節で本論文での接近法を論ずる。

2.2 問題設定

2.2.1 ブラックボックス関数最適化

本論文では、ブラックボックス関数 $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ を最小とする決定変数 \mathbf{x} を求める問題

$$\text{minimize } f(\mathbf{x}) \text{ subject to } \mathbf{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

を対象とする。目的関数 $f(\mathbf{x})$ はブラックボックス関数であり、ユーザはある解 \mathbf{x} に対してその評価値 $f(\mathbf{x})$ の値のみが観測可能である。探索空間 \mathcal{X} に制約が課されない場合、すなわち $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ である場合を無制約問題といい、 \mathcal{X} に何らかの制約が課される場合、すなわち $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ である場合を制約付き問題という。制約付き問題では特に、制約を充足する ($\mathbf{x} \in \mathcal{X}$) ことを実行可能であるといい、制約に違反する ($\mathbf{x} \notin \mathcal{X}$) ことを実行不可能であるという。

2.2.2 非明示制約付きブラックボックス関数最適化

制約付き問題において、制約が制約関数として目的関数と別に与えられず、かつ実行可能解 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ にのみ $f(\mathbf{x})$ が定義され、実行不可能解 $\mathbf{x} \notin \mathcal{X}$ には評価値が定義されない場合、こ

の制約を非明示制約とよぶ。本論文では、実行不可能な場合、評価値として $+\infty$ が与えられるものとして扱う。非明示制約付きブラックボックス関数最適化は、

$$\text{minimize } f_{\text{impl.const}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \\ +\infty & \mathbf{x} \notin \mathcal{X} \end{cases} \quad (2.2)$$

として定式化される。ユーザはある解 \mathbf{x} に対して $f_{\text{impl.const}}(\mathbf{x})$ の値のみが観測可能であり、 $f(\mathbf{x})$ および \mathcal{X} の具体的な情報は得ることはできない。

2.3 実数値遺伝的アルゴリズム

2.3.1 RCGA の枠組み

実数値遺伝的アルゴリズム (Real-coded Genetic Algorithm; RCGA) は有力なブラックボックス関数最適化手法である。RCGA では解を個体とよび、複数個体の集合である集団を保持し、以下の手順に従い反復的に探索を行う。

1. 初期集団を生成する。
2. 交叉とよばれる処理に従い、新たな解 (子個体) を生成する。
3. 集団と子個体を用いて次世代の集団を構成する。
4. 終了条件が満たされれば集団内の最良個体を出力して終了する。そうでなければステップ 2 に戻る。

ステップ 2 からステップ 4 を世代とよぶ。RCGA では世代を繰り返すことで集団分布を更新し、最終的に最適解に集団分布を取束させることで精度の高い解の発見をねらう。

2.3.2 Exploitation 重視の RCGA とその例: REX/JGG

従来 RCGA の設計においては、交叉とそれ以外の部分に相当する世代交代モデルを別々の考え方に基づき独立に設計するのが良いという機能分担仮説 [31] に基づく設計が行われてきた。この指針のもと設計された RCGA では、一般に、世代交代モデルにより集団から親個体群が選択され、この親個体群を用いて交叉により子個体が生成される。さらに、交叉の設計指針として、親個体群の平均と分散共分散行列を保存するのが良いという統計量遺伝 [32, 33] という設計指針が提唱されており、これらの設計指針に基づく RCGA がこれまでに多く提案されてきた [21, 23, 7]。これらの RCGA では、集団内から選択された親個体の張る領域に子個体が生成されることから、集団分布に対して、その外側の領域に子個体が生成される可能性は低く、おもにその内部に重点的に子個体を生成して探索を行う、Exploitation 重視の RCGA であるといえる。

これらの設計指針に基づく Exploitation 重視の RCGA が有効とされた背景には、従来の RCGA では対象とする問題に対して、目的関数の景観内に細かい局所解は存在するものの

探索空間全体では一つの大谷 [17] から構成されているということと、RCGA の探索過程において集団分布が常に最適解を覆っていること、という2つの前提を暗にしていたという理由があった。これらの前提が成立する問題では、問題が無制約である場合、これらの設計指針に基づき設計された RCGA は非常に良好な性能を示している。さらに、リサンプリングによる制約処理（または Death Penalty 法）[8, 9] とよばれる、実行可能個体が生成されるまで個体の生成を繰り返す制約処理を導入することで、上述の前提の成り立つ制約付き問題でも良好な性能を示している。

機能分担仮説と統計量遺伝に基づき設計された RCGA の中で、もっとも良好な性能を示す手法に REX/JGG[24, 7] がある。本手法は交叉 REX と世代交代モデル JGG からなる。REX/JGG のアルゴリズムを以下に示す。

1. 与えられた分布に従い集団 $\{p_1, \dots, p_\mu\}$ を初期化する。
2. 集団内からランダムに親個体 y_1, \dots, y_η を選択する。
3. 交叉 REX に従い以下の式で子個体 x_1, \dots, x_λ を生成する：

$$x_i = m_y + \sum_{j=1}^{\eta} \epsilon_{i,j} (y_j - m_y), \quad m_y := \frac{1}{\eta} \sum_{j=1}^{\eta} y_j. \quad (2.3)$$

ここで $\epsilon_{i,j}$ は平均 0、分散 σ^2 に従う任意の確率分布に従う i.i.d. な乱数である。

4. 集団内から親個体を取り除き、同数の評価値上位子個体を集団に加える。
5. 終了条件が満たされれば集団中の最良個体を出力して終了する。そうでなければステップ 2 に戻る。

REX/JGG では子個体は集団内からランダム選択された親個体のみから生成される。また、子個体生成時の乱数の従う分布について、その分散が $\sigma^2 = 1/\eta$ であるという条件が課されており、この条件に従うとき、交叉 REX は統計量遺伝を満たすことが示されている。文献 [7] では乱数として一様乱数や正規乱数が利用されており、この場合、親個体分布の内部に重点的に子個体が生成される。従って、親個体は集団から選択されることから、REX/JGG は集団分布に対して内挿的に子個体を生成して探索を行う、すなわち Exploitation を重視した探索を行う手法であるといえる。REX/JGG はいくつかの無制約ベンチマーク問題において、Exploitation 重視の RCGA のなかで良好な探索性能を示している。また、リサンプリングによる制約処理の導入により、制約付き問題でも良好な性能を示している。

2.4 Exploitation 重視の RCGA での探索を困難にする問題の性質

近年、計算機の性能向上に伴い実問題の景観調査などが進むにつれ、従来の RCGA のおいていた前提を満たさない問題の性質の存在が明らかになってきた。本節では、こういった Exploitation 重視の RCGA での探索を困難にする問題の性質である、大域的多峰性、非明示アクティブ制約、および稜構造について述べる。

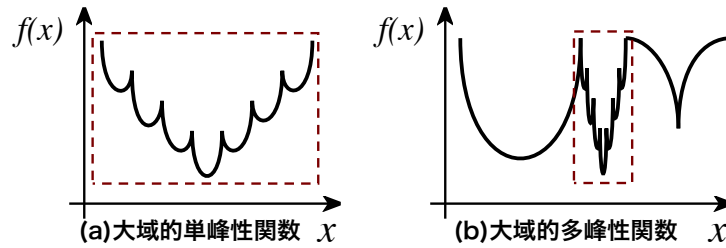


Fig. 2.1: 大域的単峰性関数 (a) と大域的多峰性関数 (b) の例. 点線領域は一つの大谷を指す.

2.4.1 大域的多峰性

目的関数の景観が Fig. 2.1(a) に示すように、探索空間全体から見たときに1つの大谷からなる構造を有しており、最適解からの距離と評価値に比較的強い相関がみられるような場合、その関数は大域的単峰性関数、もしくは single-funnel 関数とよばれる。一方、Fig. 2.1(b) に示すように、探索空間全体から見たときに複数の大谷から構成され、最適解から見て比較的遠方に有力局所解が存在する場合、その関数は大域的多峰性関数、もしくは multi-funnel 関数とよばれる [25, 34, 29].

従来の RCGA は目的関数が大域的単峰性であることを仮定して設計されており、大域的多峰性関数のように探索過程で集団分布が複数の大谷を覆う状況を想定していない。従来の Exploitation 重視の RCGA では、特に探索序盤に集団分布が複数の大谷を覆った状況において、それらの大谷の位置や大きさによって探索効率が劣化したり最適解発見に失敗する。同程度の大きさの複数の大谷を覆っている場合、それぞれの大谷内に同数程度の有望な解個体が存在することで、集団分布の収束が進まず、しばしば探索の停滞が発生する。大谷の広さや形状などに差があり、それぞれの大谷内の有望な個体数に偏りが存在する場合、より有望に見える大谷へと探索が進む。このとき、最適解を含む大谷が比較的狭いなどの理由から、しばしば最適解を含まない大谷へと集団が収束し、最適解の発見に失敗することが観察されている [25, 34].

以上のように、大域的多峰性関数における上述の探索の困難さは、特に大谷の広さなどに偏りがある場合に顕著となるといえる。そこで、本論文では大谷の数が高々可算個程度である大域的多峰性関数で、特にその大きさに偏りがあり、最適解を含む大谷が狭い問題を対象とする。

2.4.2 非明示アクティブ制約

非明示アクティブ制約とは、制約が非明示であり、かつアクティブであることを指す。ここで制約がアクティブであるとは、その制約境界上に最適解が存在することをいう。

これまでに RCGA に代表される確率的多点探索手法のための制約処理手法は多く研究がなされている [35]. 代表的な例として、制約関数値を評価値に加えることで無制約問題に変換する方法 [36] や、実行不可能解の選好順序として実行可能領域に近いものを優先する方

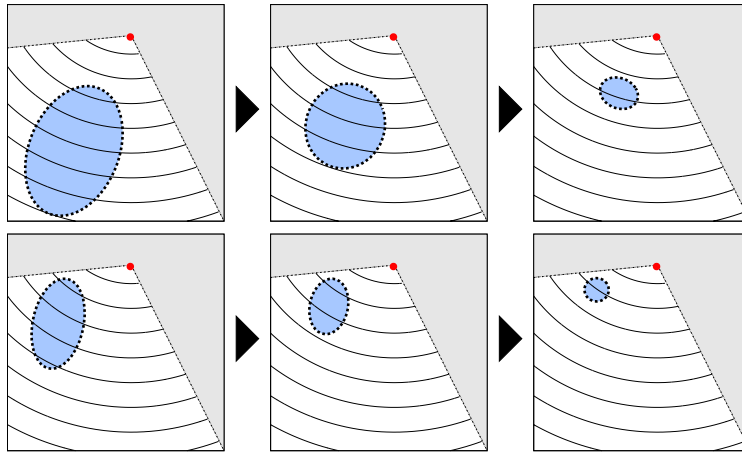


Fig. 2.2: 非明示アクティブ制約付き問題における Exploration 重視の RCGA の探索失敗例. それぞれ黒の実線が等高線, 灰色の領域が実行不可能領域, 赤点が最適解, 青の楕円体が集団分布を表す.

法 [37], そして制約関数を別の目的関数とみなして多目的最適化として解く方法 [38] などがある. しかし, これら既存の制約処理のほとんどは, 制約が制約関数として目的関数とは別に与えられることを仮定していることから, 非明示制約では利用することができない. 本論文では非明示制約においても利用可能であるリサンプリングによる制約処理 (Resampling Technique; RT) を利用する. RT は DeathPenalty 法ともよばれ, 解の生成時に, 実行可能解が生成されるまで解の生成を繰り返すというものである [8, 9]. RT は様々な最適化手法に非常に容易に導入することが可能であることから, しばしば制約に対処していない手法を制約付きの問題に適用する際に, 最初の選択肢として利用される制約処理である.

RT を導入した RCGA では, 実行不可能個体は集団分布の更新に利用されないことから, 集団分布は実行可能領域内に存在するようになる. さらに, アクティブ制約である場合には, 最適解が制約境界上に存在することから, 探索過程において集団分布が最適解を覆わなくなる. ゆえに, 精度よく良好な解を発見するためには, 集団分布をアクティブ制約境界上の最適解方向に移動させ続ける必要がある.

Exploitation 重視の RCGA は, 集団が探索を通して最適解を覆い続けることを想定しており, 集団分布を移動させる能力が低い. ゆえに, Fig. 2.2(上) に示すように探索分布を最適解に十分接近させることが難しく, 素早く高精度の解を発見することが困難となると考えられる.

アクティブ制約付き問題でしばしば起こる現象として, 集団分布がアクティブではない制約境界上に収束してしまうという現象がある [35]. この現象は, 制約境界付近で新たな解を生成する際に十分多様な解を生成できず, 正しい評価値勾配が推定できなくなることで発生する. Exploitation 重視の RCGA では集団分布の外に新たな解を生成することができないことから, Fig. 2.2(下) に示すようにこの収束をさらに加速してしまうおそれがある.

制約付き問題においては, 実行可能領域が連続ではなく, 探索空間内に点在する問題を考えることができる. この問題は, 実行可能個体を優先する RT の選好順序関係の観点からは, 互いに遠方に有力な (局所) 最適解が存在する景観, すなわち一種の大域的な多峰性であると

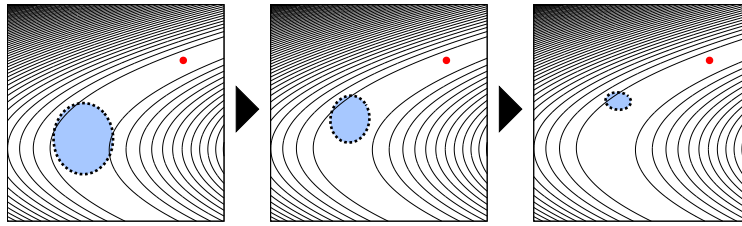


Fig. 2.3: 稜構造を持つ問題における Exploration 重視の RCGA の探索失敗例. それぞれ黒の実線が等高線, 赤点が最適解, 青の楕円体が集団分布を表す.

みなすことができる. したがって, 本論文ではこれらの問題の性質を分離して考えるため, 実行可能領域が連続であり, 点在していない問題を対象とする.

2.4.3 稜構造

問題が稜構造 [6] を持つとは, 目的関数の景観内に Fig. 2.3 に示すような細長く湾曲した谷が存在することをいう. この谷のことを稜とよぶ. 稜構造は, 多くの実問題が持つ変数間依存性, 悪スケール性, 非線形性といった目的関数の性質により発生する.

稜構造を持つ問題では, 稜に沿った集団分布の移動が必要となる. これは, 集団分布が稜を含むより広い空間を覆っているときは稜内に個体が生成されにくいことからその存在を検知できず, 稜を検知するためには集団が一旦小さく収束する必要があるためである. これにより大域的に見た場合の有望領域と局所的に見た場合の有望領域の位置が異なり, その結果, 一旦集団分布を収束させたのちに, 稜に沿って正しい有望領域の方向へと移動させる必要がしばしば生じる. しかし, Exploitation 重視の RCGA では集団分布を移動させる能力が低いことから, Fig. 2.3 に示すように稜内を移動できず, 途中で探索停滞や収束してしまうおそれがある.

2.5 Exploitation 重視の RCGA の問題点に対処した既存手法とその問題点

前節で示した Exploitation 重視の RCGA の問題点の解決に取り組んだ既存研究がいくつか存在する. ここではまず, 大域的な多峰性で良好な性能を示す既存手法 ISM を紹介し, その問題点を指摘する. 次に, 非明示アクティブ制約および稜構造を持つ問題で良好な性能を示す既存手法 mAREX/JGG を紹介し, その問題点を指摘する.

2.5.1 生得分離モデル (Innately Split Model; ISM)

ISM[25, 26] は RCGA の初期化領域適応手法であり, その探索の流れを Fig. 2.4 に示す. ISM は RCGA を問題に繰り返し適用する枠組みであり, 従来の RCGA のように集団を探

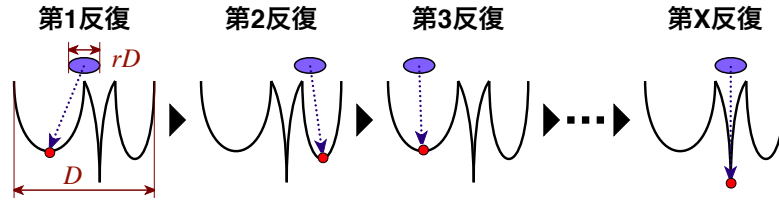


Fig. 2.4: ISMによる探索の流れ. 黒の実線は関数景観, D は探索空間の幅, 青の楕円はRCGAの初期化領域, 赤の点はRCGAの収束点をそれぞれ表す.

探索空間全体に初期化するのではなく, 探索空間内の小領域内に限定して初期化することで, RCGAが最適解を含む大谷内に初期化されることをねらう.

ISMのアルゴリズムを以下に示す. なお, ISMでは探索空間が各次元上下制限約で定められる問題を想定しており, U_i と L_i はそれぞれ, i 次元目における上限値と下限値である.

1. 解集合 $S = \emptyset$ とする.
2. 探索空間内から一様分布に従い初期化領域中心 \mathbf{c} を生成する:

$$\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n]^T, c_i \sim \mathcal{U}(L_i, U_i). \quad (2.4)$$

3. 以下の矩形領域 R_{ISM} にランダムに初期集団を生成する:

$$R_{\text{ISM}} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid c_i - r \frac{U_i - L_i}{2} \leq x_i \leq c_i + r \frac{U_i - L_i}{2} \right\}. \quad (2.5)$$

ここで r はユーザパラメータである.

4. 生成した初期集団より RCGA で探索を行う.
5. 得られた解を S に加える.
6. 終了条件が満たされれば S を出力し, 終了する. そうでなければステップ 2 に戻る.

ISMで利用される初期化領域は, 探索空間内の矩形領域である. この領域の中心は探索空間内からランダムに決定され, 領域の大きさは, ユーザパラメータ $r \in (0, 1)$ に従い, 各次元の探索空間の幅の r 倍として決定される. ISMでは矩形領域の中心位置をランダムに変更しつつRCGAによる探索を反復することで, うまく最適解を含む大谷内に矩形領域が生成されることをねらう.

2.5.2 ISMの問題点

ISMの考え方は大域的多峰性関数において効果的である. しかし, ISMには以下に示す2つの問題点があると考えられる. 1つ目に, Fig. 2.5(a)に示す重複探索の問題点がある. 探索空間内に広さの意味で支配的な大谷が存在する場合, 集団は何度もその内部に初期化され, 同じ大谷を探索してしまう. これは探索効率の観点から問題であると考えられる. 2つ

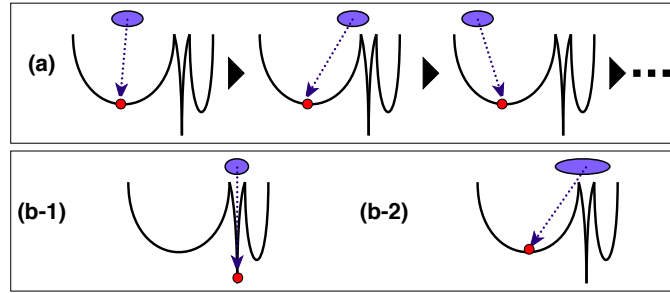


Fig. 2.5: ISM の問題点である重複探索 (a) と初期化領域の大きさの設定の困難さ (b).

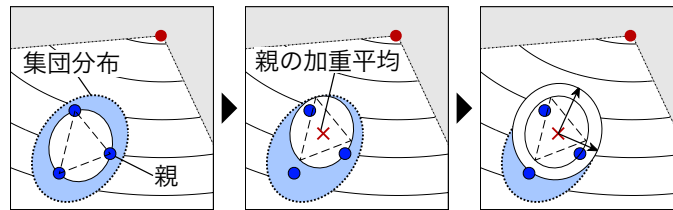


Fig. 2.6: mAREX/JGG による子個体生成の様子. 青の楕円と点が集団分布と親個体をそれぞれ表す.

目に, Fig. 2.5(b) に示す, 初期化領域の大きさを決定するユーザパラメータ r の設定の難しさがある. このパラメータは探索性能に大きな影響を及ぼすものの, その適切な設定値は関数景観により大きく異なる. 狭い大谷を見逃さないようにするためには, Fig. 2.5(b-1) に示すように r の値をある程度小さくする必要がある. このとき Fig. 2.5(b-2) に示すように, r の値を大きめに設定してしまうと, うまくこの狭い大谷上に初期化領域が生成されたとしても, その大きさが広いために他の大谷へと集団が引き込まれてしまい, 結果として狭い大谷の探索に失敗するおそれがある. ユーザは r の値を探索の前に決定する必要があるものの, ブラックボックス関数最適化において, 一般にユーザは景観に関する知識を持たないため, 適切に設定をするのは非常に困難になる. 特に最適解を含む大谷が他の大谷に比べて狭くなるほど, これらの問題点の影響は大きくなる. このような関数において最適解を発見するためには, 初期化領域を小さくする必要がある. しかし同時に, 小さな初期化領域とすることでさらに最適解の無い支配的な大谷内へと初期化されやすくなり, 大きく探索効率が悪化したり, 最適解の発見の失敗につながる.

2.5.3 modified AREX/JGG (mAREX/JGG)

AREX/JGG[24, 27] は, 無制約ベンチマーク問題でもっとも良好な探索性能を示している RCGA のひとつである. 本論文では非明示制約付き問題でも利用できるように AREX/JGG に RT を導入し, 本手法を mAREX/JGG (modified -) とよぶ. なお, 無制約問題においては mAREX/JGG は AREX/JGG と等価となることに注意されたい.

mAREX/JGG のアルゴリズムを以下に示す.

1. 与えられた分布に従い, 実行可能個体からなる初期集団を生成する.

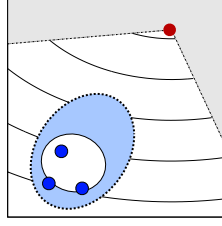


Fig. 2.7: mAREX/JGG の問題点. 青の楕円と点が集団分布と親個体, 白の楕円が子個体生成分布を表す.

2. 集団からランダムに親個体 $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_\eta$ を選択する.
3. 以下の式に従い実行可能な子個体 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\lambda$ を生成する:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{m}_{\text{yw}} + \alpha \sum_{j=1}^{\eta} \epsilon_{i,j} (\mathbf{y}_j - \mathbf{m}_{\text{y}}), \quad \mathbf{m}_{\text{yw}} := \sum_{j=1}^{\eta} w_j \mathbf{y}_{j:\eta} \quad (2.6)$$

ここで $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\mathbf{m}_{\text{y}} := (1/\eta) \sum_{j=1}^{\eta} \mathbf{y}_j$, $w_j := 2(\eta + 1 - j)/(\eta(\eta + 1))$, $\mathbf{y}_{j:\eta}$ は j 番目に評価値の良い親個体である.

4. 評価値上位の η 子個体 $\mathbf{x}_{1:\lambda}, \dots, \mathbf{x}_{\eta:\lambda}$ を親個体と入れ替え, 集団分布を更新する.
5. 以下に従い拡張率 α を適応する:

$$\alpha \leftarrow \max \left(\alpha \sqrt{(1 - c_\alpha) + c_\alpha \frac{L_{\text{cdp}}}{L_{\text{avg}}}}, 1 \right), \quad (2.7)$$

$$L_{\text{cdp}} = \alpha^2 (\eta - 1) \left(\sum_{j=1}^{\eta} \langle \epsilon_j \rangle_\eta^2 - \frac{1}{\eta} \left(\sum_{j=1}^{\eta} \langle \epsilon_j \rangle_\eta \right)^2 \right), \quad (2.8)$$

$$L_{\text{avg}} = \alpha^2 \sigma^2 (\eta - 1)^2 / \eta. \quad (2.9)$$

ここで $\langle \epsilon_j \rangle_\eta = \sum_{i=1}^{\eta} \epsilon_{i:\lambda,j} / \eta$ で $(i:\lambda)$ は上位 i 番目に評価値の良い子個体のインデックスである.

6. 終了条件が満たされるまでステップ 2-5 を繰り返す.

RT はステップ 1, 3 の個体生成時に利用される. mAREX/JGG による子個体生成の模式図を Fig. 2.6 に示す. mAREX/JGG ではまず親個体の張る領域を, その中心が親個体の評価値に基づく加重平均に一致するように移動する. ここで, 加重平均は評価値の良い親ほど大きな重みを掛けて加算した平均であることから, 親個体の張る領域を親個体から推定した評価値改善方向に移動していると考えられる. 次に, 移動した領域を拡張率 α を用いて全方向に一律に拡大し, その拡大した領域に正規分布で子個体を生成する. この手順により, mAREX/JGG では親個体分布に対して評価値が良い方向に外挿的に子個体を生成することができる. よって, うまく親個体を選択されることで集団分布に対して外挿的に子個体を生成でき, 結果, 集団分布の移動や拡大を行うことができる.

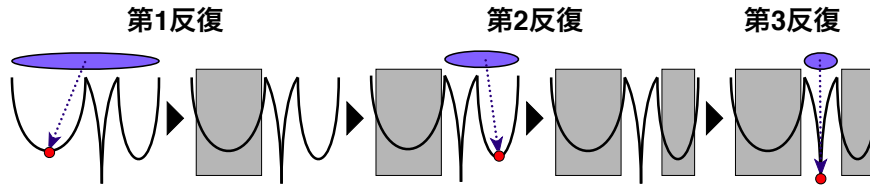


Fig. 2.8: 大域的多峰性における理想的な探索シナリオ. 黒の実線は関数景観, 青の楕円はRCGAの初期化領域, 赤点はRCGAの収束点をそれぞれ表す.

2.5.4 mAREX/JGGの問題点

mAREX/JGGには, 集団分布の移動や拡大などの外挿的な解の生成が必要な状況において, 毎反復常に集団分布に対して外挿的な子個体の生成ができるとは限らない, という問題点がある. mAREX/JGGでは, 集団内から選択された親個体の情報を用いて, 親個体分布に対して評価値が改善する方向に外挿的に子個体を生成する. しかし, これらの親個体は集団内から一様ランダムに選択されることから, Fig. 2.7に示すように, 親個体の選択のされ方によっては集団分布に対して外挿的に子個体を生成できない場合がある. 従って, 探索効率の観点から, mAREX/JGGには探索の無駄が存在すると考えられる.

2.6 本論文での接近法

2.6.1 大域的多峰性への接近法

本論文では, 大域的多峰性に対して, ISMと同様のRCGAの初期化領域適応手法を提案することで, その解決を図る. ただし, ISMの1つ目の問題点に対処するため, RCGAによる探索が終了した大谷を推定し, 以降の反復における探索空間から除外する. さらに, ISMの2つ目の問題点に対処するため, RCGAの初期化時点での探索済み大谷領域の情報を利用して, 初期化領域の大きさを適応的に決定する. すなわち, これまでの探索済み領域に対するExplorationによる接近を試みる.

Fig. 2.8に大域的多峰性関数において理想とする探索シナリオを示す. はじめは景観に関する情報を持たないため, 従来同様, 探索空間全体に初期化し, RCGAによる探索を進める. 次に, 探索終了後に探索を行った大谷を推定し, 探索空間から除外する. その後, 広い未探索領域を適応的に推定し, これを再初期化領域としてRCGAによる探索を再度実行する. この流れを反復することで, 徐々に探索空間を狭め, 最終的に狭い大谷を発見できるようになると考えられる.

2.6.2 非明示アクティブ制約と稜構造への接近法

本論文では, 非明示アクティブ制約および稜構造を持つ問題に対して, 集団分布に対する外挿的な子個体生成を実現する新たなRCGAを提案することで, その解決を図る. ただし, mAREX/JGGの問題点に対処するために, これらの性質を持つ問題で, 集団分布の移動や

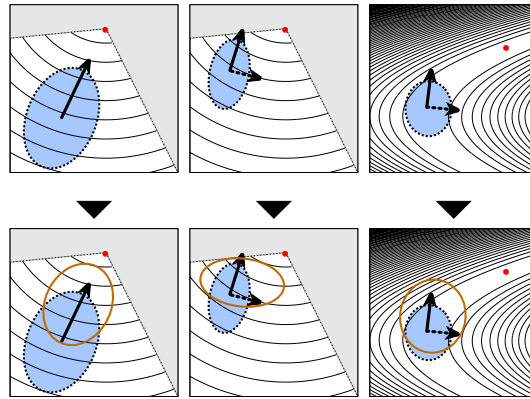


Fig. 2.9: 非明示アクティブ制約および稜構造を持つ問題における理想的な子個体生成の様子. 青の楕円が集団分布, 橙の楕円が子個体生成領域, 実矢印が現在の集団分布から見て評価値が改善すると思われる方向を表す.

拡大が必要な状況において常に安定して外挿的な子個体生成を実現できることを目的として設計する. すなわち, 現在の集団分布に対する Exploration による接近を試みる.

Fig. 2.9 に, それぞれの性質を持つ問題における探索状況に応じた理想的な子個体生成の様子を示す. 非明示アクティブ制約付き問題では, Fig. 2.9(左) に示すように現在の集団分布に対して評価値が改善すると思われる方向に外挿的に子個体を生成することで, 集団分布のアクティブ制約境界方向への移動を促進することができると考えられる. また, 誤った制約境界付近への収束時には, Fig. 2.9(中) に示すように評価値が改善すると思われる方向以外の方向にも同時に外挿的に子個体を生成し, 真の評価値勾配が見えるまで集団分布を拡大することで, この収束から脱出することが期待できる. 稜構造を持つ問題においては, Fig. 2.9(右) に示すように評価値が改善すると思われる方向とこれ以外の方向に同時に外挿的に子個体を生成することで, 湾曲した稜に沿った集団分布の移動を促進して探索を進めることができると考えられる.

2.7 おわりに

本章では, まず, ブラックボックス関数最適化および非明示制約を定義した. 次に, RCGA の枠組みを紹介し, 従来の Exploitation 重視の RCGA である REX/JGG を例としてあげた. 従来の Exploitation 重視の RCGA での探索を困難にする問題の性質として, 大域的多峰性, 非明示アクティブ制約, および稜構造について述べた後, これらに対処した既存の Exploration に着目した RCGA として, ISM と mAREX/JGG およびこれらの問題点について述べた. 最後に本論文における接近法を説明した. 大域的多峰性に対しては, 探索済み領域に対する Exploration を行う RCGA の初期化領域適応手法を構築することで, その解決を図ることを述べた. また, 非明示アクティブ制約と稜構造に対しては, 現在の集団分布に対する Exploration を行う RCGA を構築することで, その解決を図ることを述べた.

第3章 大域的多峰性関数最適化のための RCGAの枠組み：Big-valley Explorer

3.1 はじめに

本章では、大域的多峰性に対処したRCGAの枠組みであるBig-valley Explorer (BE)を提案する。BEはRCGAを初期化領域を変更しつつ繰り返し問題に適用する反復的探索手法である。まず、第2章で述べた接近法をより詳細に議論し、探索済み領域の推定および適応的な初期化領域の取得方法についての基本的な考え方を示す。次に、この基本的な考え方の実現方法をBEのアルゴリズムとして示す。大域的多峰性ベンチマーク問題を用いた性能評価実験を行い、提案手法BEが既存手法ISMに比べて優れた性能を発揮することを示す。さらに、BEのより詳細な挙動について考察してBEが有効に働く理由を明らかにするとともに、ユーザパラメータに関する考察を通してパラメータの推奨値や設定指針を示す。

本章の構成は以下の通りである。第3.2節でBEの基本的な考え方を示し、第3.3節でその実現方法をアルゴリズムで示す。第3.4節で性能評価実験を行い、第3.5節で追加実験を含めた考察を行う。最後に第3.6節で本章の内容と今後の課題をまとめる。

3.2 基本的な考え方

3.2.1 全体の探索の流れ

提案手法Big-valley Explorer (BE)による探索の流れをFig. 3.1に示す。BEではRCGAによる探索を反復して探索を進めていく。第2.5節で指摘したISMの1つ目の問題点である重複探索に対処するため、一度RCGAによる探索が終了するごとに探索を行った大谷領域を推定し、以降の反復ではその領域を実行不可能領域と見なすことで、探索空間から除外する。さらにISMの2つ目の問題点である初期化領域の設定の困難さに対処するため、RCGAの初期化時点での景観の情報を用いて、初期化領域を適応的に決定する。BEではRCGAの大域的探索能力を活かすため、できるだけ広い未探索領域を初期化領域とする。

第1反復では探索空間に関する情報は持たないため、既存のRCGAと同様に、探索空間全体を初期化領域とする。この領域に生成した初期集団を用いてRCGAによる探索を行うことで、景観内の最も支配的な大谷へと集団が収束すると期待される。なお、景観が大域的単峰性である場合、この時点で最適解を発見できると考えられる。探索終了後、第3.2.2節

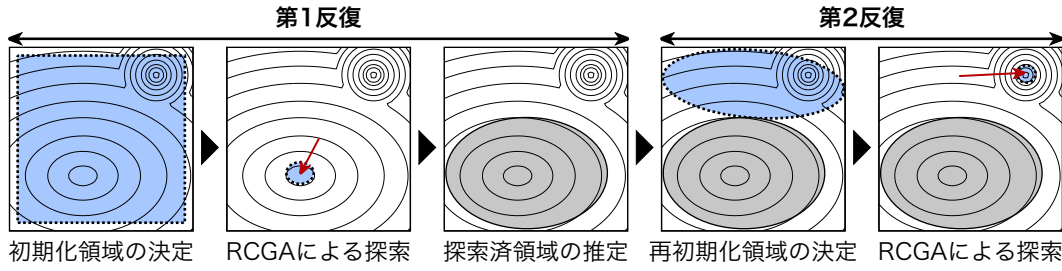


Fig. 3.1: 2次元関数上でのBEによる探索の流れ. 青の楕円体は集団分布, 矢印はRCGAの探索過程をそれぞれ表す.

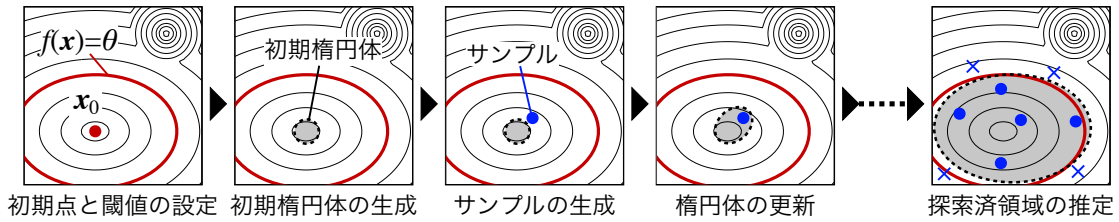


Fig. 3.2: 2次元関数上での大谷領域推定の流れ. 初期点 x_0 からサンプリングにより超楕円体を拡大していく. \bullet , \times はそれぞれ, 評価値が θ 未満および θ 以上のサンプルを表す.

で説明する大谷領域推定機構により探索済みの大谷領域を推定してその内部を実行不可能領域と見なすことで, 以降の探索空間から除外する. 第2反復以降においては, 第3.2.3節で説明する適応的初期化機構を用いて, 集団をできるだけ広い実行可能領域へと初期化し, RCGAによる探索を行う. 探索終了後, 第1反復と同様に探索済み大谷領域を推定し, 探索空間から除外する. この手順を繰り返して徐々に探索空間を狭めていくことで, 最適解を含む大谷が非常に狭い場合でも, 効率良く最適解を探索することができると考えられる.

3.2.2 大谷領域推定機構

大谷領域を表現するモデルとして, 悪スケール性や変数間依存性といった関数の性質 [39] を考慮し, n 次元超楕円体を採用する. 悪スケール性は変数ごとに座標軸のスケールが大きく異なる性質であり, 変数間依存性は目的関数が非線形であることをいう. これらは実問題においてもしばしば観察される重要な性質である.

Fig. 3.2に大谷領域推定の流れを示す. まず大谷の底の点 x_0 および大谷間の境界の評価値 θ は与えられるものとする. 推定開始時に x_0 を中心とする微小な n 次元超球を生成し, これを初期超楕円体とする. その後, サンプルの生成と超楕円体の更新を繰り返すことで, 超楕円体を徐々に拡大していく. 最終的に, 超楕円面で x_0 の周囲の評価値 θ の等高線を近似し, その内部を推定した大谷領域とする. サンプルの生成では, 現在の超楕円体を一定倍拡大した超楕円体内一様分布より, サンプル点を一点生成する. 超楕円体の更新では, 生成したサンプルの位置および評価値を利用し, 2種類の更新式を切り替えて実行する. サンプルが現在の超楕円体の外部にあり, かつその評価値が θ 未満である場合, まだ覆うべき領域

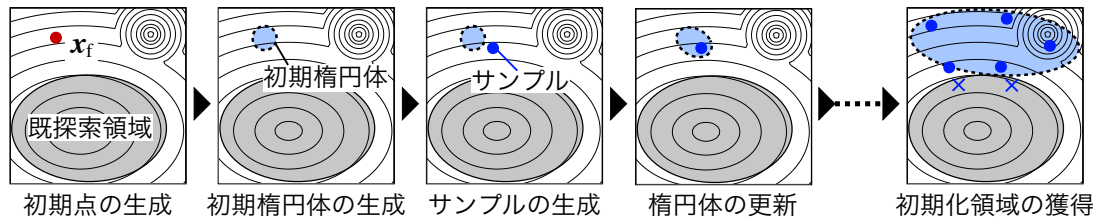


Fig. 3.3: 2次元関数上での集団の再初期化領域の決定の流れ. ある実行可能点からサンプリングにより超楕円体を拡大していく. ●, ×はそれぞれ, 実行可能および実行不可能なサンプルを表す.

が存在すると判断し, その方向へと超楕円体を拡大する. 一方, サンプルが現在の超楕円体の内部にあり, かつその評価値が θ 以上である場合, 間違った領域を覆ってしまっていると判断し, その方向に超楕円体を縮小する. なお, どちらの条件にも当てはまらないサンプルの場合, 超楕円体の更新は行わない.

ある大谷内の最小解は, RCGA による探索により発見が可能であると考え, x_0 としてはその反復の探索で発見された最良解を用いる. また, RCGA での探索が進むにつれ, 集団が大谷の中心部へと収束していく事実を加味し, θ としては探索序盤で得られた評価値のうち, 若干悪い値のものを採用するのが妥当であると考えられる.

3.2.3 適応的初期化機構

RCGA では, 複数の探索点を利用して関数の大域的な景観をとらえることで, 細かな局所解を乗り越えて有望領域へと探索を進めていく. 一般に RCGA では現在の集団を元に新たな子個体を生成する. このとき, 集団が実行不可能領域を挟み複数の小集団に分離していた場合, それらの小集団の間の実行不可能領域や有望ではない領域に多くの子個体が生成され, 探索効率の悪化を引き起こすおそれがある. 以上の考えより, BE ではできるだけ広い1つの実行可能領域を初期化領域として取得し, これを利用する.

第1反復においては, まだ景観に関する情報が得られていないため, 探索空間全体に RCGA の集団を初期化する. なお, これは既存の RCGA と同様の手順である. 第2反復以降においては, これまでの反復で推定した大谷領域を実行不可能領域として保持しているため, この情報を用いて適応的に集団の再初期化領域を決定する. この際の再初期化領域の形状としては, 大谷領域のモデルと同様の理由から n 次元超楕円体を採用する.

Fig. 3.3 に再初期化領域の決定の流れを示す. これは大谷領域の推定とほぼ同様の流れになっており, 初期超楕円体の生成方法および, 超楕円体の更新の際のサンプルの採用判定方法の2点が異なっている. まず, 初期超楕円体としては, 探索空間内の実行可能な点を1点ランダムに生成し, これを中心とした微小超球を生成して利用する. 次に, 大谷領域推定と同様に, 新たなサンプルを生成し, 超楕円体の更新を行う. ここでは生成したサンプルの位置と実行可能性により更新の可否と種類を決定する. サンプルが現在の超楕円体の外部にあり, かつ実行可能である場合, 外部の実行可能領域を含むように超楕円体を拡大する. 一方, サンプルが現在の超楕円体の内部にあり, かつ実行不可能である場合, 超楕円体を実行不可

Algorithm 1 Big-valley Explorer

- 1: $S_{\text{obt}} = \emptyset$, $R_{\text{infeasible}} = R_{\text{orig.infeasible}}$, $n_{\text{itr}} = 0$.
 - 2: **repeat**
 - 3: $n_{\text{itr}} \leftarrow n_{\text{itr}} + 1$.
 - 4: *AdaptiveInitialization*(n_{itr} , $R_{\text{infeasible}}$).
 - 5: Search with the RCGA considering $R_{\text{infeasible}}$,
 $\theta \leftarrow Q_3$ (population of g_θ th generation).
 - 6: Store the obtained solution,
 $S_{\text{obt}} \leftarrow S_{\text{obt}} \cup \{\mathbf{x}_{\text{obt}}\}$.
 - 7: $R_{\text{searched}} \leftarrow \text{BigValleyEstimation}(\mathbf{x}_{\text{obt}}, \theta, R_{\text{orig.infeasible}})$.
 - 8: $R_{\text{infeasible}} \leftarrow R_{\text{infeasible}} \cup R_{\text{searched}}$.
 - 9: **until** termination condition is met
 - 10: Output the best solution in S_{obt} .
-

能領域を含んでしまっていると判断し、超楕円体を縮小する。どちらの条件にも当てはまらないサンプルの場合、更新は行わない。このように超楕円体を更新していくことで、最終的に広い実行可能領域、すなわち広い未探索領域を覆うような超楕円体を得られると考えられる。ゆえに、得られた超楕円体を RCGA の初期化領域とし、その内部に一様に初期集団を生成する。なお、大谷領域推定時とは異なり、この再初期化領域決定のプロセスではサンプルの評価値は必要としない。

3.3 アルゴリズム

3.3.1 全体のアルゴリズム

BE のアルゴリズムを Algorithm 1 に示す。最初に各反復で得られる最良解集合 S_{obt} 、実行不可能領域 $R_{\text{infeasible}}$ 、および反復回数 n_{itr} を初期化する。ここで、 $R_{\text{orig.infeasible}}$ は問題の実行不可能領域を表す (1 行目)。次に、以下の手順を終了条件が満たされるまで繰り返す (2–9 行目)。反復数を更新し (3 行目)、適応的初期化機構を用いて RCGA の集団を初期化する (4 行目)。初期化した集団を用いて RCGA による探索を行い (5 行目)、収束した解 \mathbf{x}_{obt} を得る (6 行目)。ここで、RCGA の探索中において、第 g_θ 世代の集団中の評価値分布のうち、上側四分位値 $Q_3(\cdot)$ を θ に保存しておく。なお、実行不可能領域への対処は、利用する RCGA により異なる¹²。探索が終了した後に、大谷領域推定機構で探索を行った大谷領域を推定し (7 行目)、その領域内を実行不可能領域とする (8 行目)。以上を繰り返し、最終的な最良解を出力して終了する (10 行目)。

次の第 3.3.2 節で大谷領域推定機構のアルゴリズム (7 行目) を、第 3.3.3 節で RCGA の適応的初期化機構のアルゴリズム (4 行目) をそれぞれ示す。

¹ 大谷領域推定機構による実行不可能領域については、明示的に数式で記述されるため非明示制約ではない。

² 本論文の実験ではリサンプリングによる制約処理を採用した。

Algorithm 2 *BigValleyEstimation*($\mathbf{x}_0, \theta, R_{\text{orig_infeasible}}$)

- 1: Initialize an ellipsoid $(\boldsymbol{\mu}_e, \mathbf{A}_e) = (\mathbf{x}_0, k\mathbf{I})$.
- 2: $\text{count} = 0, \tilde{\mathbf{A}}_e = \mathbf{A}_e + \boldsymbol{\mu}_e\boldsymbol{\mu}_e^T$.
- 3: **repeat**
- 4: $\text{count} \leftarrow \text{count} + 1$
- 5: $(\alpha, \gamma) \leftarrow \text{AdaptUpdateParameters}()$.
- 6: Generate \mathbf{x}_s in the ellipsoid $(\boldsymbol{\mu}_e, \alpha^2(n+2)\mathbf{A}_e)$.
- 7: **if** $f(\mathbf{x}_s) < \theta$ and $\mathbf{x}_s \notin (E \cup R_{\text{orig_infeasible}})$ **then**
- 8: Update the ellipsoid :

$$\boldsymbol{\mu}_e \leftarrow (1 - \gamma)\boldsymbol{\mu}_e + \gamma\mathbf{x}_s, \quad (3.2)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_e \leftarrow (1 - \gamma)\tilde{\mathbf{A}}_e + \gamma\mathbf{x}_s\mathbf{x}_s^T, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{A}_e \leftarrow \tilde{\mathbf{A}}_e - \boldsymbol{\mu}_e\boldsymbol{\mu}_e^T. \quad (3.4)$$

- 9: **else if** $f(\mathbf{x}_s) \geq \theta$ and $\mathbf{x}_s \in (E \cup R_{\text{orig_infeasible}})$ **then**
- 10: Update the ellipsoid :

$$\boldsymbol{\mu}_e \leftarrow (1 + \gamma)\boldsymbol{\mu}_e - \gamma\mathbf{x}_s, \quad (3.5)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_e \leftarrow (1 + \gamma)\tilde{\mathbf{A}}_e - \gamma\mathbf{x}_s\mathbf{x}_s^T, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{A}_e \leftarrow \tilde{\mathbf{A}}_e - \boldsymbol{\mu}_e\boldsymbol{\mu}_e^T. \quad (3.7)$$

- 11: **end if**
 - 12: **until** $\text{count} > N_{\text{samples}}$
 - 13: **return** the ellipsoid $(\boldsymbol{\mu}_e, (n+2)\mathbf{A}_e)$.
-

3.3.2 大谷領域推定機構のアルゴリズム

本論文で用いる超楕円体を以下の式で定義する。

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_e)^T \mathbf{A}_e^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_e) \leq 1.0 \quad (3.1)$$

$\boldsymbol{\mu}_e \in \mathbb{R}^n$ を中心ベクトル, $\mathbf{A}_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を係数行列とよび, 以後, $\boldsymbol{\mu}_e, \mathbf{A}_e$ を持つ超楕円体を $(\boldsymbol{\mu}_e, \mathbf{A}_e)$ で表す. ここで, \mathbf{A}_e は正定値対称行列である.

BEにおける大谷領域推定機構のアルゴリズムを Algorithm 2 に示す. 最初に超楕円体とカウンタを初期化する (1–2 行目). ここで, k は微小なスカラー値, \mathbf{I} は単位行列である. 次に, 以下の手順を一定回数繰り返す (3–12 行目). カウンタを更新し (4 行目), パラメータ α, γ の適応を行う (5 行目). この適応アルゴリズムは後述する. その後, 現在の超楕円体をパラメータ α で拡大した超楕円体内の一様分布よりサンプル \mathbf{x}_s を生成し (6 行目), \mathbf{x}_s の位置と評価値に基づいて超楕円体を更新する (7–11 行目). ここで, $f(\mathbf{x}_s)$ はサンプル \mathbf{x}_s の評価値を, E は現在の超楕円体内の領域をそれぞれ表す. $R_{\text{orig_infeasible}}$ は問題に元々存在する実行不可能領域であり, 評価値が定義されない場合を考慮し, この領域は覆われないように更新を行う³. 以上の手順を繰り返し, 最終的に得られた超楕円体を推定領域として返す (13 行目). なお, 式 (3.2)–(3.7) は平均, 分散共分散行列の漸化式表現から作成されており, 超楕円体内一様分布の平均ベクトルと分散共分散行列を用いて超楕円体 (3.1) を再構成すると,

³ 今までの推定領域 $R_{\text{infeasible}} \setminus R_{\text{orig_infeasible}}$ と新たな推定領域との重なりは許すことに注意されたい.

Algorithm 3 *AdaptUpdateParameters()*

- 1: Set the number of updates in last N_{hist} iterations to N_{used} .
- 2: Adapt parameters:

$$r \leftarrow N_{\text{used}}/N_{\text{hist}} \quad (3.8)$$

$$\alpha \leftarrow r \times (\alpha_{\text{max}} - \sqrt[n]{2}) + \sqrt[n]{2} \quad (3.9)$$

$$\gamma \leftarrow r \times \gamma_{\text{max}} \quad (3.10)$$

- 3: **return** (α, γ) .
-

本来のものより各軸の長さが $1/\sqrt{n+2}$ 倍となる。この補正のために 6, 13 行目で係数行列に $(n+2)$ を乗じてある。

パラメータ α, γ の適応アルゴリズムを Algorithm 3 に示す。まず直近の N_{hist} 反復において、超楕円体が更新された回数を N_{used} としてカウントする (1 行目)。次に、その比率 $r = N_{\text{used}}/N_{\text{hist}}$ を用いて α と γ を適応する (2 行目)。 α は $\sqrt[n]{2}$ から α_{max} の間を、 γ は 0 から γ_{max} の間をそれぞれ線形に適応する。 α の下限値 $\sqrt[n]{2}$ は、現在の超楕円体の内外にサンプルが生成される確率が等しくなる値である。 α, γ はともに超楕円体の更新における一種の学習率の役割を持ち、更新序盤は r が比較的大きい値をとるため、 α, γ も大きい値とすることで超楕円体の積極的な拡大を促す。一方、更新が停滞してくると r が徐々に小さい値となるため、これに従い α, γ ともに小さい値にすることで超楕円体の精緻化を促す。適応後、これらのパラメータを返す (3 行目)。

3.3.3 適応的初期化機構のアルゴリズム

BE における RCGA の適応的初期化機構のアルゴリズムを Algorithm 4 に示す。第 1 反復では、探索空間全体に一樣に初期集団を生成する (2 行目)。第 2 反復以降では、初期化領域を超楕円体を用いて生成した (4–16 行目) 後に、その内部に一樣に初期集団を生成する (17 行目)。超楕円体を用いて生成するアルゴリズムは第 3.3.2 節の大谷領域推定機構のアルゴリズムとほぼ同等である。ただし、初期超楕円体の中心ベクトルの生成方法と更新式を適用する条件の 2 点が異なる。初期超楕円体の中心ベクトルはランダムに生成した実行可能点とし (4 行目)、超楕円体の更新では、生成したサンプル \mathbf{x}_s の位置と実行可能性をもって判定を行う (11, 13 行目)。

3.4 実験

3.4.1 目的

提案手法 BE が大域的多峰性関数、特に最適解を含む大谷が他の大谷に比べて狭い関数において、既存手法より優れた性能を示すことを確認する。また、大域的単峰性関数においても既存手法と同等の性能を示すことを確認する。

Algorithm 4 *AdaptiveInitialization*($n_{\text{itr}}, R_{\text{infeasible}}$)

```
1: if  $n_{\text{itr}} == 1$  then
2:   Initialize a population uniformly over the whole search space.
3: else
4:   Generate  $\mathbf{x}_0 \notin R_{\text{infeasible}}$ .
5:   Initialize an ellipsoid  $(\boldsymbol{\mu}_e, \mathbf{A}_e) = (\mathbf{x}_0, k\mathbf{I})$ .
6:    $\text{count} = 0$ .
7:   repeat
8:      $\text{count} \leftarrow \text{count} + 1$ 
9:      $(\alpha, \gamma) \leftarrow \text{AdaptUpdateParameters}()$ .
10:    Generate  $\mathbf{x}_s$  in the ellipsoid  $(\boldsymbol{\mu}_e, \alpha^2(n+2)\mathbf{A}_e)$ .
11:    if  $\mathbf{x}_s \notin (R_{\text{infeasible}} \cup E)$  then
12:      Update the ellipsoid with Eq(3.2)–(3.4).
13:    else if  $\mathbf{x}_s \in (R_{\text{infeasible}} \cap E)$  then
14:      Update the ellipsoid with Eq(3.5)–(3.7).
15:    end if
16:  until  $\text{count} > N_{\text{samples}}$ 
17:  Initialize a population uniformly in the generated ellipsoid  $(\boldsymbol{\mu}_e, (n+2)\mathbf{A}_e)$ .
18: end if
```

3.4.2 比較手法

提案手法 BE と比較する手法として、ISM および Multi-start RCGA (MS-RCGA) を利用した。MS-RCGA は探索空間全体に集団を初期化する RCGA であり、一度探索を終了するごとに集団を再初期化し、探索を繰り返す枠組みである。3 手法の内部で利用する RCGA として、現在もっとも良い性能を示している RCGA である mAREX/JGG[27, 24] を利用した。3 手法で同じ RCGA を利用しているのは、それぞれの戦略部分のみの性能差を明らかにするためである。また、RCGA 以外の良好な性能を示している確率的多点探索手法のひとつである、CMA-ES[14] を用いた Multi-start CMA-ES (MS-CMA-ES) でも実験を行った。MS-CMA-ES は MS-RCGA において mAREX/JGG の代わりに CMA-ES を利用した手法であり、CMA-ES の初期化領域 (再初期化領域) は探索空間全体⁴とした。

3.4.3 評価方法

それぞれの関数で、50 試行中の探索成功試行数、探索成功時の平均評価回数、および探索成功時の平均反復数の 3 つの指標をもって手法を評価する。探索成功試行数はより多い方が、平均評価回数と平均反復数はより少ない方が優れているとする。なお、BE では大谷領域推定時のサンプルの評価も評価回数に含まれる。

⁴ 初期平均ベクトルを $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ 、初期分散は探索空間の幅 L_b に対して $\sigma = L_b/2$ とした。

Table 3.1: ベンチマーク関数. 左から関数名, 定義式, 探索空間, 最適解の位置を表す. n は問題の次元数.

関数名 (略記名)	定義式	探索空間	最適解
Double-Cone [40] (f_{DC})	$f_{DC}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^2 \left(1 - \frac{1}{b_k \ \mathbf{x} - \mathbf{c}_k\ + 1}\right)$ $b_1 = 1, b_2 = 2, \mathbf{c}_1 = [-2, \dots, -2]^T, \mathbf{c}_2 = [4, \dots, 4]^T$	$[-5, 5]^n$	$[4, \dots, 4]^T$
Double-Rosenbrock [41] (f_{DRos})	$f_{DRos}(\mathbf{x}) = \min \{f_{ros}(\mathbf{x}_o), f_{ros}(\mathbf{x}_l) + 0.1\}$ $f_{ros} = \sum_{i=2}^n (100(x_1 - x_i)^2 + (x_i - 1)^2)$ $\mathbf{x}_o = -2(\mathbf{x} - [-1, \dots, -1]^T), \mathbf{x}_l = \mathbf{x} - [0.5, \dots, 0.5]^T$	$[-2, 2]^n$	$[-1.5, \dots, -1.5]^T$
Double-Rastrigin [29] (f_{DRas})	$f_{DRas}(\mathbf{x}) = \min \{f_{sph}(\mathbf{x}_o), f_{sph}(\mathbf{x}_l) + 1.0\} + f_{cos}$ $f_{sph}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2, f_{cos} = \sum_{i=1}^n 10(1 - \cos(2\pi(x_i - 2.5)))$ $\mathbf{x}_o = 2(\mathbf{x} - [2.5, \dots, 2.5]^T), \mathbf{x}_l = \mathbf{x} - [-2.5, \dots, -2.5]^T$	$[-5.12, 5.12]^n$	$[2.5, \dots, 2.5]^T$
Rastrigin (f_{Rast})	$f_{Rast}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + 10(1 - \cos(2\pi x_i)))$	$[-5.12, 5.12]^n$	$[0, \dots, 0]^T$

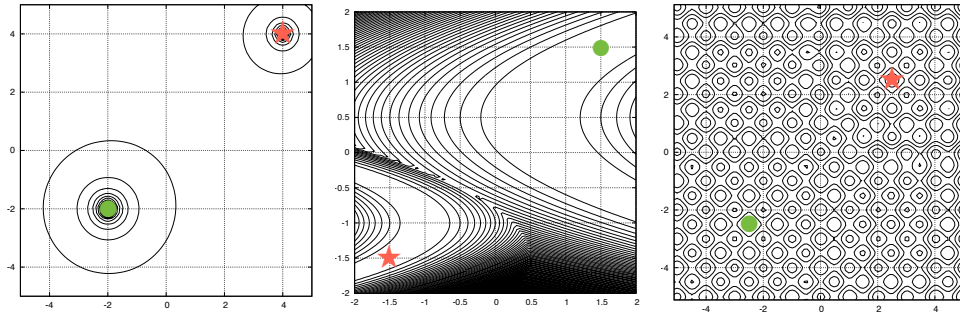


Fig. 3.4: 2次元でのベンチマーク関数景観. それぞれ左から f_{DC} , f_{DRos} , f_{DRas} . ★は最適解を, ●は最適解とは異なる大谷の底に存在する有力局所解を表す.

3.4.4 ベンチマーク関数

利用するベンチマーク関数を Table 3.1 に示す. Double-Cone 関数 [40] (f_{DC}), Double-Rosenbrock 関数 [41] (f_{DRos}), および Double-Rastrigin 関数 [29] (f_{DRas}) は大域的な多峰性関数であり, それぞれの2次元における景観を Fig. 3.4 に示す. これらは全て探索空間内に2つの大谷が存在し, 最適解を含む大谷の方が狭いため, 既存のRCGAでは最適解を発見するのが非常に困難な関数である. f_{DC} と f_{DRos} では, それぞれの大谷内に谷底以外の局所解が存在しない. f_{DC} は等高線が超楕円体で比較的近似可能であり, f_{DRos} は谷が非常に湾曲しているため, 等高線が超楕円体で近似不可能な関数である. f_{DRas} はそれぞれの大谷内に谷底以外に多くの局所解が存在し, ゆえに等高線が超楕円体で近似不可能な関数である. また, 既存のRCGAで最適解の発見が可能である大域的な単峰性関数として, Rastrigin 関数 (f_{Rast}) を利用する. f_{Rast} は, 細かい局所解が非常に多く存在するものの, 探索空間全体からみると1つの大きな谷状になっており, その中心に最適解が存在する. 全ての関数で次元数を $n = 10$ とし, 探索空間の外部を実行不可能領域として実験を行った.

Table 3.2: 実験結果. #s は 50 試行中の成功試行数, avg(EV) と avg(itr) は探索成功試行での平均評価回数と平均反復数, avg(EV) の単位は $[\times 10^4]$ である. 太字はその関数において最も性能の良かった値.

	f_{DC}			f_{DRos}		
	#s	avg(EV)	avg(itr)	#s	avg(EV)	avg(itr)
BE	50	6.63	3.04	49	10.95	4.24
ISM	3	7.20	3.33	4	12.73	5.0
MS-RCGA	0	-	-	0	-	-
MS-CMA-ES	0	-	-	0	-	-
	f_{DRas}			f_{Rast}		
	#s	avg(EV)	avg(itr)	#s	avg(EV)	avg(itr)
BE	42	13.44	2.12	50	7.15	1.0
ISM	13	41.10	5.92	50	8.37	1.04
MS-RCGA	0	-	-	50	7.15	1.0
MS-CMA-ES	0	-	-	50	3.68	1.0

3.4.5 設定

mAREX/JGG のパラメータは集団サイズを除き, 推奨値に従った. 集団サイズは次元数 n に対し, f_{DC} と f_{DRos} では $10n$, f_{DRas} と f_{Rast} では $25n$ とした. mAREX/JGG による 1 回の探索は, 集団中の評価値のうち最良値と平均値の差が 10^{-7} 以下になった時点で集団が収束したと見なし, 打ち切った.

BE の大谷領域推定機構および適応的初期化機構中の超楕円体更新に利用するパラメータは, 事前実験により決定し, 全ての実験で $k = 10^{-4}$, $\alpha_{\max} = 2.0$, $\gamma_{\max} = 0.5/(n + 2)$, $N_{\text{hist}} = 100$, $N_{\text{samples}} = 20,000$ とした.

ISM の r , および BE の g_{θ} は, f_{DRos} での事前実験により最も良好な性能を示した値を採用し, それぞれ $r = 0.1$, $g_{\theta} = 6$ とした.

CMA-ES による 1 回の探索は, 分散共分散行列の最大固有値が 10^{-10} を下回った時点で収束したとみなし, 打ち切った. パラメータの値は集団サイズ λ を除いて推奨値 [14] とした. λ は事前実験により最も良好な性能を示した値である $\lambda = 600$ を採用した⁵

全ての手法で, 最適解を発見した時点で探索成功として試行を打ち切った. また, 最適解を発見できずに反復数が 10 回を超えた場合, 探索失敗とした. 最適解の発見とは, 集団中の最良評価値と最適解の評価値の差が 10^{-6} を下回った時点とした. 全ての関数において, それぞれの手法で 50 試行ずつ実験を行った.

3.4.6 結果

Table 3.2 に結果を示す. #s は 50 試行中の成功試行数, avg(EV) と avg(itr) はそれぞれ, 探索成功試行における平均評価回数と平均反復数を表す. なお, avg(EV) の単位は $[\times 10^4]$ であることに注意されたい.

⁵ それぞれの関数で $\lambda = 4 + \lfloor 3\ln n \rfloor, 100, 200, 300, \dots, 700$ の中から選択した.

Table 3.3: ISM_{estimate} の実験結果. #s は 50 試行中の成功試行数, avg(EV) と avg(itr) は探索成功試行での平均評価回数と平均反復数, avg(EV) の単位は $[\times 10^4]$ である. 太字はその関数において最も性能の良かった値. BE と ISM の結果は 3.2 の再掲.

	f_{DC}			f_{DRos}			f_{DRas}		
	#s	avg(EV)	avg(itr)	#s	avg(EV)	avg(itr)	#s	avg(EV)	avg(itr)
BE	50	6.63	3.04	49	10.95	4.24	42	13.44	2.12
ISM _{estimate}	49	11.64	4.14	22	15.34	5.5	34	23.67	3.26
ISM	3	7.20	3.33	4	12.73	5.0	13	41.10	5.92

大域的多峰性関数である f_{DC} , f_{DRos} , f_{DRas} では, MS-RCGA および MS-CMA-ES が一度も最適解を発見できていないのに対し, BE と ISM では最適解を発見できている. さらに, BE は ISM より最適解の発見回数が大幅に向上している. また, 平均評価回数および平均反復数をもて, BE は ISM に比べて f_{DC} , f_{DRos} でおよそ同程度, f_{DRas} ではおよそ 30% 程度削減できており, BE が探索効率の観点からも優れた手法であるといえる.

大域的単峰性関数である f_{Rast} では, すべての手法が 50 試行中 50 試行で最適解を発見できている. 平均評価回数を比較すると MS-CMA-ES が最も少ない回数となっている. 戦略による差をみるために BE, ISM および MS-RCGA の結果を比較すると, BE と MS-RCGA が評価回数および反復数の両方で同程度の値をとり, 対して ISM がやや劣っている.

以上の実験結果より, BE は大域的多峰性関数において ISM の問題点を克服し, 有効に働く手法であり, また, 大域的単峰性関数においても既存手法と同等の性能を示す手法であるといえる.

3.5 考察

3.5.1 実験結果の考察

本節では第 3.4.6 節での実験結果の考察を行う.

大域的多峰性関数である f_{DC} , f_{DRos} , f_{DRas} では, 最適解の存在しない大谷が大きさの意味で支配的であるため, 探索空間全体に初期化を行う MS-RCGA と MS-CMA-ES では最適解を発見できていない. これらの手法ではすべての試行で間違った大谷の底へと収束してしまっていることを確認している. これに対して, ISM では, 初期化領域を制限することで, わずかながら最適解の発見に成功している. しかし, ISM の初期化領域の位置は探索空間全体より一様ランダムに決定されるため, うまく最適解のある大谷上に初期化されないと探索に失敗する. BE は ISM に比べて探索成功試行数が大幅に向上しており, この問題点を解決できていることがうかがえる. また, BE では既探索領域を除外することで重複探索を防いでおり, これが有効に働いたことが, 平均評価回数および平均反復数の削減につながったと考えられる. f_{DRos} と f_{DRas} における BE の探索失敗試行を見ると, f_{DRos} での 1 試行と f_{DRas} での 4/8 試行では既探索大谷推定において, 必要以上に大きな領域を推定してしまい, その結果最適解を実行不可能としてしまっていた. これは, これらの関数が超楕円体で

大谷を近似できない関数であることが原因と考えられる。一方、 f_{DRas} における残りの4試行では、最適解を持たない支配的な大谷の除外には成功したものの、最適解を持つ大谷内の探索において、RCGAが最適解に到達できずに初期収束を起こしていた。その後、探索後の大谷推定により最適解を含む大谷が実行不可能領域とされていた。これらの問題点を解消することで、BEのさらなる性能向上が実現できると考えられる。これに関しては今後の課題である。

大域的単峰性関数である f_{Rast} では MS-CMA-ES が最も効率よく探索を行うことが出来ている。MS-CMA-ES と同じ戦略をとる MS-RCGA との比較により、これは、BE、ISM、および MS-RCGA で利用した mAREX/JGG と CMA-ES の性能の差に起因するものであると考えられる。ゆえに、BE、ISM、および MS-RCGA を比較することで、この差を除いた戦略のみの差をみることができる。BE は、第1反復では探索空間全体に RCGA を初期化するため、MS-RCGA と等価となる。このため、既存の RCGA でも第1反復で最適解の発見が可能である f_{Rast} においては、BE と MS-RCGA は同じ手法と見なせるため、性能も等しくなる。一方、ISM では小領域を用いた初期化を行うため、 f_{Rast} のような細かい局所解を多く持つ関数では、RCGA が大域的な景観をうまくとらえられず、初期収束を起こす恐れがある。実際、今回の実験においても、50 試行中2試行において ISM は第1反復で局所解へと収束していた。そのため、ISM では $avg(itr)$ が 1.0 を超えており、これに伴い $avg(EV)$ も BE および MS-RCGA に比べて増加している。

3.5.2 大谷領域推定機構と適応的初期化機構の効果

BE は大谷領域推定機構および適応的初期化機構の2つの機構を持ち、これらにより良好な探索性能を実現している。本節では、これらの機構がそれぞれどのように性能向上に寄与しているのかを実験により確認する。

それぞれの機構の効果を確認するため、ISM に大谷領域推定機構を組み込んだ手法を新たに構成し、これを $ISM_{estimate}$ とよぶ。 $ISM_{estimate}$ と ISM の性能比較により大谷領域推定機構の、BE と $ISM_{estimate}$ の性能比較により適応的初期化機構の効果をそれぞれ確認する。

関数は大域的多峰性関数 f_{DC} 、 f_{DRos} 、および f_{DRas} を利用し、実験設定は第3.4.5節に準じた。実験結果を Table 3.3 に示す。BE と ISM の結果は Table 3.2 の再掲である。以下、大谷領域推定機構の効果、適応的初期化機構の効果をそれぞれ順に考察する。

大谷領域推定機構の効果 $ISM_{estimate}$ と ISM の比較を行うと、すべての関数で $ISM_{estimate}$ の方が探索成功試行数が向上していることがわかる。一方、平均評価回数および平均反復数をみると、 f_{DRas} では $ISM_{estimate}$ が優れるものの、 f_{DC} と f_{DRos} では劣っている。この原因としては、推定した大谷領域を実行不可能領域とすることによる景観の変化があげられる。大谷領域推定機構では、大谷領域を推定し、実行不可能領域とすることで重複探索に対処している。これに伴い、景観が変化することで多くの場合、新たな局所解が発生する。このとき、ISM のような小領域への初期化を行うと、第3.5.1節で述べたように初期収束を起こす可能性があり、これゆえに多くの反復数、評価回数が必要となっていると考えられる。さら

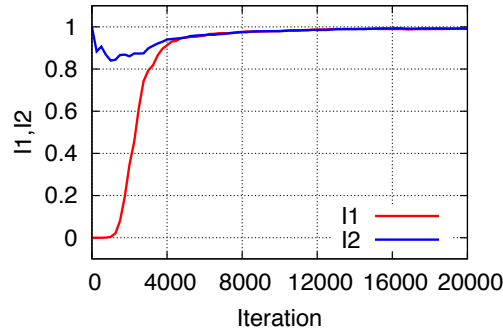


Fig. 3.5: 大谷領域推定における指標値 I_1 (赤), I_2 (青) の変化. 典型的な 1 試行を図示.

に, 大谷領域推定時にもサンプルの評価を行うため, ISM_{estimate} は ISM に比べて余分に評価回数が必要であることも評価回数増加の原因としてあげられる.

適応的初期化機構の効果 BE と ISM_{estimate} の性能の比較を行うと, すべての関数において探索成功試行数, 平均評価回数, および平均反復数の観点で BE の方が優れていることがわかる. 前節で述べたように, ISM のような小領域を用いた初期化を行うと, $RCGA$ が大域的な景観を上手くとらえられずに初期収束を起こす恐れがある. 適応的初期化機構を用いて出来るだけ広い領域へと初期化を行うことで, この問題点を解消でき, その結果, 性能が向上しているのだと考えられる.

3.5.3 超楕円体更新アルゴリズムの推定精度に関する検証

BE では大谷領域推定機構と適応的初期化機構の両機構中で, 超楕円体で特定の条件を満たすような領域を推定するアルゴリズムを利用している. ここではこれを超楕円体更新アルゴリズムとよぶ. 大谷領域推定機構ではこれで既探索大谷領域を推定し, 適応的初期化機構では第 2 反復以降の初期化領域として広い実行可能領域を推定している. 本節では, この超楕円体更新アルゴリズムの推定精度について検証を行う. 具体的には, 理想的な条件下, すなわち推定すべき領域が超楕円体で近似でき, かつ推定時のパラメータとして真の値が与えられた条件のもとで, 超楕円体更新アルゴリズムが正しい領域を推定することができるかを確認する.

アルゴリズムにより推定した領域の精度の評価指標として, 以下の I_1 , I_2 を用いる.

$$I_1 = \frac{V(R_{\text{ideal}} \cap R_{\text{estimated}})}{V(R_{\text{ideal}})} \quad (3.11)$$

$$I_2 = \frac{V(R_{\text{ideal}} \cap R_{\text{estimated}})}{V(R_{\text{estimated}})} \quad (3.12)$$

ここで, $R_{\text{estimated}}$ は推定した領域, R_{ideal} は理想的な推定領域, $V(\cdot)$ は体積を表す. I_1 は再現率, I_2 は適合率ともよばれ, とともに 1.0 に近い方がより優れているとする. これらの値

Table 3.4: g_θ の変化に対する性能の変化. #s は 50 試行中の成功試行数. avg(EV) と avg(itr) は成功試行での平均評価回数と平均反復数.

g_θ	f_{DC}			f_{DRos}		
	#s	avg(EV)	avg(itr)	#s	avg(EV)	avg(itr)
1	46	9.47	4.30	44	10.38	4.14
3	50	8.38	3.74	48	9.95	3.96
6	50	6.63	3.04	49	10.95	4.24
10	50	5.58	2.5	47	18.81	6.36

を解析的に計算するには、2つの領域の共通部分を計算する必要があり、これは容易ではない。そこで、実験では体積をモンテカルロ推定することで、これらの指標値を計算する。

推定の実験は、10次元 Sphere 関数 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ において、評価値が $\theta = 5^2$ 未満の領域を理想領域として、原点 $\mathbf{0}$ を初期点として与えて超楕円体の生成を行った。すなわち、大谷領域推定機構において、閾値 $\theta = 5^2$ 、初期点 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ を与えて超楕円体の推定を行った。アルゴリズム中のパラメータ k , α_{\max} , γ_{\max} , N_{hist} , および N_{samples} は第3.4.5節の値を利用した。この関数では、理想領域は半径5の超球内部となり、超楕円体で表現可能であるため、指標値 I_1 , I_2 を同時に1.0とすることが可能である。

推定を進めていったときの指標値の変化を Fig. 3.5 に示す。理想領域の内部の微小な超球より推定を開始するため、推定開始時には I_1 は0, I_2 は1となっている。推定を進めていくと、一旦 I_2 は低下するものの、その後、 I_1 , I_2 ともに上昇していき、最終的には両指標でほぼ1.0となっていることがわかる。これより、理想的な状況下においては、提案したアルゴリズムはほぼ完全な領域の推定が可能であると考えられる。

3.5.4 ユーザパラメータに関する考察

超楕円体更新に関するパラメータについて BE の大谷領域推定機構および適応的初期化機構の両方のアルゴリズムに含まれる、サンプリングによる超楕円体更新アルゴリズムには、 k , α_{\max} , γ_{\max} , N_{hist} , N_{samples} の5つのパラメータが存在する。 k は初期超楕円体の半径であり、ある程度微小な正の値としておけばよく、最終的な超楕円体の推定精度に対して鈍感なパラメータであることが実験的に分かっている。 α_{\max} , γ_{\max} , N_{hist} は、超楕円体を更新する際の更新率 α , γ の適応のためのパラメータであり、本論文では事前実験により、第3.4.5節であげた $\alpha_{\max} = 2.0$, $\gamma_{\max} = 0.5/(n+2)$, $N_{\text{hist}} = 100$ を推奨値としてあげておく。これらの値は次元数によらず良い性能を示す値であることを実験的に確認している。超楕円体の更新回数に相当する N_{samples} は他のパラメータとは異なり、対象とする問題、特に次元数 n にあわせて増加させる必要がある。どの程度の推定精度が要求されるかにより必要な値は異なるが、予備実験により、おおよそ $N_{\text{samples}} = 200n^{1.9}$ 程度の値に設定すれば十分な精度で推定が可能であると考えられる。

パラメータ g_θ について 前述のパラメータの他に、BE にはパラメータ g_θ が存在する。これは大谷領域推定に用いる閾値 θ を取得するためのパラメータである。閾値 θ は、 g_θ の値を

用いて RCGA による探索中に取得されるため、 g_θ の値は大谷領域推定精度に影響し、その結果、BE の探索性能にも影響を及ぼすと考えられる。パラメータ g_θ の変化に対する探索性能への影響を調べるために、第 3.4 節と同様の実験で、 f_{DC} と f_{DRos} で g_θ の値のみを変化させたときの探索性能の変化を調べた。

Table 3.4 に実験結果を示す。両関数において、 g_θ を変化させても成功試行数には大きな変化は見られず、依然として高い成功試行数を示している。一方、平均反復数では最大 1.5 倍以上の差が見られ、これに伴い平均評価回数にも差が出ている。これは、既探索大谷領域の推定精度に差が出ることによって探索効率が下がってしまっていることが原因と考えられる。これに対する性能のロバスト性向上は今後の課題である。 g_θ の設定値としては、利用する RCGA の収束速度にもよるものの、おおよそ 10 以下の値とすることを設定の方針としてあげておく。

3.6 おわりに

本章では大域的多峰性に対処した RCGA の枠組みである Big-valley Explorer (BE) を提案した。BE は RCGA を繰り返し問題に適用する反復的探索手法であり、大谷領域推定機構と適応的初期化機構という 2 つの機構からなる。大谷領域推定機構では、一度 RCGA による探索が終了するごとに、その反復で探索が行われたと考えられる大谷領域を推定し、その領域を実行不可能領域と見なすことで以降の探索領域から除外する。これにより、同じ大谷を何度も探索してしまう重複探索の問題点に対処する。適応的初期化機構では、RCGA の持つ大域的探索能力を活かすため、初期化時点での関数景観におけるできるだけ広い未探索領域を適応的に取得し、初期化領域とする。大域的多峰性関数を用いた実験により、BE は大域的多峰性関数に対処した有力な手法の 1 つである ISM と比較して大幅な性能向上を実現した。また、大域的単峰性関数を用いた実験により、BE が大域的単峰性関数では探索空間全体に初期化を行う従来の RCGA と同等の性能を示すことを確認した。

今後の課題としては、ユーザパラメータの削減があげられる。提案手法には性能に影響を及ぼすユーザパラメータが存在している。これらについて、実験的な推奨値や設定の方針はあるものの、パラメータの自動調整や削減などで、よりパラメータ値にロバストな手法とすることはユーザビリティの観点からも重要であると考えられる。さらに、提案手法の改良として、より積極的な初期化領域の適応方法の開発や、探索履歴を利用した既探索領域推定の効率化があげられる。また、提案手法は、大谷推定領域に隙間が生じるなどの理由により、無駄な探索の繰り返しを必ず抑制することを保証できていない。このような現象はこれまでに観察されていないものの、そのような景観の調査や、提案手法の改良も重要な課題である。他にも、大域的多峰性関数を持つと報告されている実問題への適用も今後の課題である。

第4章 非明示アクティブ制約と稜構造を考慮したRCGA：Adaptive Extrapolation RCGA

概要

本章では非明示アクティブ制約および稜構造を考慮したRCGAであるAdaptive Extrapolation RCGA (AEGA)を提案する。AEGAでは、集団分布の移動や拡大が必要な状況で、安定して集団分布に対する外挿的な子個体生成を実現することを目的としている。mAREX/JGGの問題点の解決のため、AEGAでは集団全体の情報を用いて子個体生成分布を構成する。また、集団分布に対して2種類の方向を定め、それぞれの方向に別々の方針に従い子個体生成分布を広げることで、効率のよい集団分布の移動や拡大をねらう。ベンチマーク問題を用いて性能評価実験を行い、AEGAのmAREX/JGGに対する有効性を示し、AEGAの挙動やユーザパラメータに関する考察を行う。さらに、困難な実問題への適用を通じて、実問題におけるAEGAの性能評価を行う。

本章の構成は以下の通りである。第4.2節でAEGAの基本的な考え方を示し、第4.3節でその実現方法を述べる。その後、第4.4節で全体のアルゴリズムにまとめる。第4.5節でベンチマーク問題を用いた性能評価実験を行い、第4.6節でいくつかの追加実験を含む考察を行う。第4.7節で実問題である4枚組固定焦点レンズ系設計問題への適用を行う。最後に第4.8節で本章の内容と今後の課題についてまとめる。

第5章 結論

5.1 研究成果のとりまとめ

本論文では、大域的多峰性、非明示アクティブ制約、および稜構造において、効率よく最適解を探索するための RCGA の提案を行った。本論文の成果は大きく以下の2つにまとめられる。

1. 大域的多峰性に対処した RCGA の初期化領域適応手法である Big-valley Explorer (BE) を提案し、その評価を行った。
2. 非明示アクティブ制約と稜構造を考慮した RCGA である Adaptive Extrapolation RCGA (AEGA) を提案し、その評価を行った。

以下、それぞれの成果についてまとめる。

BE の提案と評価 大域的多峰性とは、探索空間で目的関数の景観が複数の大谷から構成されることを指す。Exploitation を重視して設計された従来の RCGA では、目的関数の景観が探索空間全体でひとつの大谷から構成されていることを暗に想定していることから、大域的多峰性において探索効率が劣化したり最適解発見に失敗する現象が観察される。この問題点を解決するため、RCGA の初期化領域適応手法である ISM が提案されている。ISM では従来の RCGA のように探索領域内全体ではなく、小領域内に限定した RCGA の初期化を行う。ISM ではこの小領域の位置をランダムに変更しつつ RCGA を繰り返し問題に適用することで、大域的多峰性においてうまく最適解を含む大谷内に RCGA が初期化されることをねらう。しかし、ISM では、同じ大谷を繰り返し探索するという重複探索や、小領域の大きさを決定するユーザパラメータの設定の困難さという問題点がある。これらの問題点を解決するために、RCGA の初期化領域適応手法である Big-valley Explorer (BE) を提案した。BE は初期化領域を変更しつつ RCGA による探索を反復する枠組みであり、大谷領域推定機構と適応的初期化機構から構成される。ISM の重複探索の問題点に対処するため、大谷領域推定機構により探索済みの大谷領域を推定し、以降の探索空間から除外する。さらに、ISM の小領域の大きさの決定の困難さの問題点に対処するため、適応的初期化機構により、RCGA の初期化時点でのできるだけ広い未探索領域を適応的に推定し、RCGA の初期化領域として利用する。大域的多峰性ベンチマーク問題を用いた性能評価実験により、従来の Exploitation 重視の RCGA が一度も探索を発見できない問題において、BE が8割以上の試行で最適解発見に成功することを確認した。さらに、最適解発見に要する評価回数の観点より、BE が ISM に比べて最大 70% もの評価回数の削減に成功することを確認した。大

域的単峰性ベンチマーク問題を用いた性能評価実験により、ISMが従来のRCGAに比べ最適解発見までに要する評価回数が1割以上増大してしまうのに対して、BEが従来のRCGAと同等の評価回数で最適解を発見できることを確認した。

AEGAの提案と評価 非明示アクティブ制約とは、問題に課される制約が非明示かつアクティブであることを指し、稜構造とは、関数景観内に細長い湾曲した谷が存在することを指す。非明示アクティブ制約や稜構造を持つ問題では、初期化時から探索を通して、または探索過程の途中で、集団分布が最適解を覆わない状況が生じる。従来のExploitation重視のRCGAでは、探索を通して常に集団分布が最適解を覆い続けることを暗に想定していることから、集団分布の外の領域に新たな子個体を生成する能力が低く、ゆえに集団分布を移動や拡大することが困難となる。したがって、Exploitation重視の手法を非明示アクティブ制約や稜構造を持つ問題に適用すると、しばしば探索効率の低下や最適解以外の場所での収束が観察される。この問題点を解決するため、mAREX/JGGが提案されている。mAREX/JGGは集団分布の外の領域に子個体を生成できることから、集団分布の移動や拡大を行うことができる。しかし、mAREX/JGGには子個体生成に用いる親個体の選択のランダムネスに起因する、探索効率の低下という問題点がある。これを解決するため、新たなRCGAであるAdaptive Extrapolation RCGA (AEGA)を提案した。AEGAでは親個体だけでなく集団全体の情報を用いて子個体を生成することで、安定的に集団の移動や拡大を実現する。さらに、AEGAでは集団分布に対して二種類の方向を定め、それぞれの方向に必要な応じた子個体生成分布の拡大を行うことで、無駄のない外挿的な子個体生成をねらう。非明示アクティブ制約および稜構造をそれぞれ持つベンチマーク問題を用いた性能評価実験により、AEGAがmAREX/JGGに対して、最適解発見までに要する評価回数を非明示アクティブ制約付き問題で最大50%、稜構造を持つ問題で最大45%削減できることを確認した。さらに、両方の性質を持つとされている4枚組固定焦点レンズ系設計問題への適用により、AEGAがmAREX/JGGに比べて高速に既知最良解に到達できることを確認した。

5.2 今後の課題

本論文の成果に対して、今後の課題と展望を以下に述べる。

BEにおけるユーザパラメータの削減 BEにはいくつかのユーザパラメータが存在する。第3.5.4節ではこれらのユーザパラメータの役割について述べ、それぞれの推奨値や設定指針を定めた。しかし、その多くは実験的な知見から定めたものであるため、これらのパラメータについて、BEのダイナミクスの解析を通して理論的な妥当性を与えられると望ましい。これにより、実験的な推奨値に理論的な保証を与えたり、もしくはより良い推奨値を与えることができるようになると考えられる。

BEにおけるより積極的な適応的初期化の実現 適応的初期化領域では、推定した探索済み領域の情報を用いて広い未探索領域を適応的に獲得し、これをRCGAの初期化領域として

利用する。一方で、内部探索器である RCGA が効率よく探索することができる景観は、一つの大谷からなる景観であることから、広い未探索領域というだけではなく、広い未探索の大谷領域に RCGA を初期化することで、さらに効率の良い探索が可能になると考えられる。この実現方法として、適応的初期化機構に大谷領域推定機構の機能を導入し、未探索領域内の大谷領域を獲得することで、実現することができると考えられる。この推定における初期点としては、未探索領域内の適当な点を利用するのが妥当であると考えられる。ただし、大谷領域の推定においては追加的なサンプル点の評価が必要となることから、現状のアルゴリズムでは BE による探索全体の評価回数が大きく増加してしまうという課題がある。この課題の解決のためには、大谷領域推定機構そのものの効率化も必要であると考えられる。

BE における大谷領域推定の効率化 大谷領域推定機構では、新たにサンプルを生成し、その評価値情報をもとに大谷領域を推定する。大谷推定の精度を向上させるには、比較的多くのサンプルが必要であることから、アルゴリズムを改良し、効率化を図ることは重要な課題である。この実現方法として、例えば RCGA による探索中に生成した個体を利用することがあげられる。RCGA による探索が進むにつれ、大谷の中心付近に多くの個体が生成されるようになることから、RCGA の終了時点で探索済みの大谷内に多くのサンプルが存在する。従って、これらのサンプルを保存し、大谷領域推定時に再利用することで、新たなサンプルを生成して評価するコストを削減することができると考えられる。さらに、RCGA の探索過程において随時大谷領域の推定を行うことができれば、RCGA の個体を保存しておく必要もなくなり、空間計算量の意味でも効率化できるようになると期待される。

BE における大谷領域推定の精度の向上 大谷領域推定では一つの超楕円体をもって大谷を近似している。超楕円体を用いることで、座標系のスケール変換や回転に依存しない推定が可能となる。また、比較的単純な数式で表現される超楕円体を用いることで、推定の更新式の構築や実装が容易であり、さらに超楕円体の保存のコストも大きくないという利点がある。しかし、そもそも超楕円体で近似できない大谷である場合には、時間をかけて多くのサンプルを用いて推定を行ったとしても、近似精度は一定以上の値にならない。BE の探索性能は探索済み大谷領域の推定精度に依存していることから、この推定精度の向上は重要な課題である。ひとつの実現方法としては、複数の超楕円体でひとつの大谷を近似する方法が考えられる。大谷の推定時において、現在の超楕円体が過去の正例サンプルを含まなくなりそうである場合に新たな超楕円体を生成して、できるだけ多くの正例サンプルを含むような領域を推定することで、精度の向上が実現できると考えられる。

BE における実行不可能確率の導入によるロバスト性の向上 BE では推定した探索済み領域を実行不可能領域として、以降の探索空間から除外している。この方法は正しい推定ができていない場合には非常に効率的であるものの、そうではない場合に、未探索領域まで除外してしまうことがある。また、場合によっては未発見の最適解を実行不可能としてしまうおそれがある。この問題点を解決し、推定性能に対するロバスト性を向上させる方法として、実行可能確率の導入があげられる。実行可能確率とは、ある解について、その位置に定めら

れた実行可能確率に従い、ランダムに実行可能か不可能かを決定するというものである。探索済みの大谷の底に近いほど実行可能確率を低く、そこから離れるにつれ高く設定することで、もし推定した領域が未探索領域に重なっていたとしても、完全に探索空間から除外されることがなくなり、その結果ロバスト性が向上すると考えられる。

BEの並列化による多数の大谷を持つ問題への拡張 BEでは探索空間内に高々可算個程度の大谷がある問題を想定している。大谷数が非常に多い問題にBEを適用すると、BEはRCGAを1回ずつ適用していく直列的な手法であるため、大谷の数が増加するほど狭い大谷を発見するのに必要な反復数が増大してしまう。この解決方法のひとつとして、BEの並列化があげられる。BEの第2反復以降では、探索済み領域が探索空間内に存在するため、未探索領域が複数の部分に分割されている可能性がある。そこで、BEを同時に並列に実行し、それぞれで推定した探索済み領域の情報を共有させることで、より短い時間で多くの大谷の探索が可能になると考えられる。

BEの実問題への適用 BEを大域的な多峰性を持つとされている実問題に適用することも重要な課題である。こういった問題の例としては、ズームレンズ系設計問題 [46]、遺伝子ネットワーク構造推定問題 [47, 48]、Lennard-Jones クラスタ構造推定問題 [49, 50] などがあげられる。これらの困難な実問題に適用するにあたっては、大域的な多峰性の他にも様々な問題を困難にする性質に対処する必要があると考えられる。そこで、実問題への適用を通して、BEが有効に働く性質の解明や、さらなる課題発見が期待される。

AEGAにおけるユーザパラメータの考察 AEGAにはいくつかのユーザパラメータが存在し、第4.6.3節ではそれぞれの役割を考察し、そのいくつかに理論的もしくは実験的な推奨値や設定指針を与えた。これらのパラメータについてのAEGAのダイナミクスの解析を含めたさらなる考察により、まだ推奨値がないパラメータにそれを与えたり、また、実験的な推奨値に理論的な妥当性を与えたりすることができると考えられる。

AEGAの複雑な行列計算の削減 AEGAでは行列のcholesky分解や逆行列の演算が必要となる。実問題には評価計算に膨大な時間を要する問題も多く存在することから、これらの行列演算に伴う時間計算量の削減は実用上大きな課題であるとはいえない。しかし、数値的にこれらの演算を行うにあたり、計算の不安定性が生じる。この数値計算に伴う不安定性は、場合によっては手法の予期せぬ挙動を引き起こすことから、これらの不安定性の解消は実用上重要であると考えられる。方法としては、大きく2つあげられる。1つめは、現在のアルゴリズムの式をさらに展開し、分解や逆行列計算を含まない形に定式化する方法である。しかし、これは場合によっては実現できない可能性もある。2つめは、現在のアルゴリズムと同様の機能を、分解や逆行列を含まない手段で実現する方法である。AEGAのアルゴリズムは、基本的な考え方を比較的ナイーブに実現したものであることから、より単純な方法で同様の考え方を実現できる可能性がある。

BE と AEGA の組合せによる性能評価 提案した BE と AEGA を組み合わせた手法で実験を行い、これらの手法の相性や悪影響がないかを確認することも今後の課題である。例えば、BE を複雑な制約付き問題に適用する際に、問題の制約による実行不可能個体と既探索領域による実行不可能個体を区別して扱うことで、より効率的な探索を実現できる可能性がある。さらに、大域的多峰性、非明示アクティブ制約、および稜構造を併せ持つ実問題に本手法を適用し、その有効性を検証することも重要な課題である。大域的多峰性であるされている実問題であるズームレンズ系設計問題 [46] などは、非明示制約付き問題であり、かつ稜構造を持つとされている。本問題のような従来手法では最適化が非常に困難である問題に適用し、提案手法の未解決問題における有効性を検証することは非常に重要である。

謝辞

本研究を行うにあたり、終始多大なるご指導を頂きました小野功准教授に心より感謝の意を表します。また、貴重なご助言を頂きました小林重信名誉教授、宮崎和光准教授、永田裕一准教授、本研究のために特別研究員奨励費を助成して頂いた日本学術振興会に深く感謝いたします。最後に、本論文の完成に力を貸して頂いた小野研究室、元小林研究室の皆様には厚く御礼申し上げます。

公表論文

〈学術論文〉

- 上村 健人, 木下 峻一, 永田 裕一, 小林 重信, 小野 功, “大域的多峰性関数最適化のための実数値 GA の枠組み Big-valley Explorer の提案”, 進化計算学会論文誌, Vol.4, No.1, pp.1–12, 2013.

〈国際会議〉

- Kento Uemura, Naotoshi Nakashima, Yuichi Nagata and Isao Ono, “A New Real-coded Genetic Algorithm for Implicit Constrained Black-box Function Optimization”, In *Proceedings of 2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC 2013)*, pp. 2887–2894, Cancun, Mexico, June 20–23, 2013.
- Kento Uemura, Shun-ichi Kinoshita, Yuichi Nagata, Shigenobu Kobayashi and Isao Ono, “A New Framework taking account of Multi-funnel Functions for Real-coded Genetic Algorithms”, In *Proceedings of 2011 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC 2011)*, pp. 2091–2098, New Orleans, USA, June 5–8, 2011.

〈国内学会〉

- 上村 健人, 永田 裕一, 小野 功, “非明示アクティブ制約と稜構造を考慮した実数値 GA の提案”, 進化計算シンポジウム 2014, pp. 250–257, 広島, 2014.
- 中島 直敏, 上村 健人, 永田 裕一, 小野 功, “集団の振る舞いを重視した実数値 GA の提案”, システム・情報部門学術講演会 2013, pp. 343–348, 滋賀, 2013.
- 上村 健人, 中島 直敏, 永田 裕一, 小野 功, “非明示制約付き関数最適化のための実数値 GA のロバスト性の向上”, 第 5 回進化計算学会研究会, pp. 68–73, 北海道, 2013.
- 佐山 雄一, 上村 健人, 永田 裕一, 小野 功, “Big-valley Explorer のための超楕円体更新アルゴリズムの効率化”, 第 4 回進化計算学会研究会, pp. 58–63, 神奈川, 2013.
- 上村 健人, 中島 直敏, 永田 裕一, 小野 功, “非明示制約付きブラックボックス関数最適化のための実数値 GA の提案”, 第 40 回知能システムシンポジウム, pp. 143–148, 京都, 2013.

- 上村 健人, 中島 直敏, 永田 裕一, 小野 功, “ブラックボックス制約付き関数最適化のための実数値 GA の提案”, 第 25 回自律分散システムシンポジウム, pp. 69–74, 宮城, 2013.
- 上村 健人, 永田 裕一, 小野 功, “Big-valley Explorer のための新たな超楕円体更新アルゴリズムの提案”, 第 8 回進化計算フロンティア研究会, pp. 82–87, 大阪, 2012.
- 上村 健人, 木下 俊一, 永田 裕一, 小林 重信, 小野 功, “大域的多峰性を考慮した実数値 GA の探索戦略: Big-valley Explorer の提案と評価”, 第 6 回進化計算フロンティア研究会, pp. 165–173, 愛知, 2011.
- 上村 健人, 木下 俊一, 永田 裕一, 小林 重信, 小野 功, “UV 景観における V 谷探索のための実数値 GA の枠組みの提案”, 第 4 回進化計算フロンティア研究会, pp. 32–37, 東京, 2010.
- 上村 健人, 永田 裕一, 小林 重信, 小野 功, “大域的多峰性関数最適化のための実数値 GA の枠組みとその性能評価”, 第 22 回自律分散システムシンポジウム, pp. 321–326, 愛知, 2010.

参考文献

- [1] Lawrence Davis. *Handbook of Genetic Algorithms*. Van Nostrand Reinhold, 1991.
- [2] Alden H. Wright. Genetic algorithms for real parameter optimization. In *Foundations of Genetic Algorithms*, pp. 205–218. Morgan Kaufmann, 1991.
- [3] L. Eshelman. Real-coded genetic algorithms and interval-schemata. In *Foundations of Genetic Algorithms*, pp. 187–202, 1993.
- [4] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *SCIENCE*, Vol. 220, No. 4598, pp. 671–680, 1983.
- [5] David G. Luenberger and Yinyu Ye. *Linear and Nonlinear Programming*, Vol. 116 of *International Series in Operations Research & Management Science*. Springer, 3 edition, 2008.
- [6] 小野功, 山村雅幸, 喜多一. 実数値 GA とその応用. 人工知能学会誌, Vol. 15, No. 2, pp. 259–266, 2000.
- [7] 小林重信. 実数値 GA のフロンティア. 人工知能学会論文誌, Vol. 24, No. 1, pp. 147–160, 2009.
- [8] Hans-Paul Schwefel. *Numerical Optimization of Computer Models*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1981.
- [9] Thomas Bäck, Frank Hoffmeister, and Hans-Paul Schwefel. A survey of evolution strategies. In *Proceedings of the Fourth International Conference on Genetic Algorithms*, pp. 2–9, 1991.
- [10] R. Eberhart and J. Kennedy. A new optimizer using particle swarm theory. In *Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science 1995*, pp. 39–43, 1995.
- [11] J. Kennedy and R. Eberhart. Particle swarm optimization. In *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Neural Networks*, Vol. 4, pp. 1942–1948, 1995.
- [12] R. Storn and K. Price. Minimizing the real functions of the ICEC’96 contest by differential evolution. In *Proceedings of IEEE International Conference on Evolutionary Computation 1996*, pp. 842–844, 1996.

- [13] Rainer Storn and Kenneth Price. Differential evolution — a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, Vol. 11, No. 4, pp. 341–359, 1997.
- [14] Nikolaus Hansen. The CMA evolution strategy: A comparing review. In Jose A. Lozano, Pedro Larrañaga, Iñaki Inza, and Endika Bengoetxea, editors, *Towards a New Evolutionary Computation*, Vol. 192 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, pp. 75–102. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [15] D. Wierstra, T. Schaul, J. Peters, and J. Schmidhuber. Natural evolution strategies. In *Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation 2008*, pp. 3381–3387, June 2008.
- [16] Pedro Larrañaga and Jose A. Lozano. *Estimation of Distribution Algorithms: A New Tool for Evolutionary Computation*. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [17] Kenneth D. Boese. Cost versus distance in the traveling salesman problem. Technical report, UCLA CS Department, 1995.
- [18] 佐藤浩, 小野功, 小林重信. 遺伝的アルゴリズムにおける世代交代モデルの提案と評価. *人工知能学会誌*, Vol. 12, No. 5, pp. 734–744, 1997.
- [19] I Ono and S Kobayashi. A real-coded genetic algorithm for function optimization using unimodal normal distribution crossover. In *Proceedings of the 7th International Conference on Genetic Algorithms*, pp. 246–253, 1997.
- [20] Shigeyoshi Tsutsui, Masayuki Yamamura, and Takahide Higuchi. Multi-parent recombination with simplex crossover in real coded genetic algorithms. In *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference 1999 (GECCO '99)*, pp. 657–664, 1999.
- [21] 喜多一, 小野功, 小林重信. 実数値 GA のための正規分布交叉の多数の親を用いた拡張法の提案. *計測自動制御学会論文集*, Vol. 36, No. 10, pp. 875–883, 2000.
- [22] 木村周平, 小野功, 喜多一, 小林重信. 交叉の設計指針に基づく undx の拡張: Endx の提案と評価. *計測自動制御学会論文集*, Vol. 36, No. 12, pp. 1162–1171, 2000.
- [23] 樋口隆英, 筒井茂義, 山村雅幸. 実数値 GA におけるシンプレクス交叉の提案. *人工知能学会論文誌*, Vol. 16, No. 1, pp. 147–155, 2001.
- [24] 秋本洋平, 羽生田理恵, 佐久間淳, 小野功, 小林重信. 多親を用いた実数値 GA のための世代交代モデル—Just Generation Gap (JGG) の提案と評価. 第 19 回自律分散システム・シンポジウム資料, pp. 341–346, 2007.

- [25] Kokolo Ikeda and Shigenobu Kobayashi. GA based on the UV-structure hypothesis and its application to JSP. In *Proceedings of the 6th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature (PPSN VI)*, pp. 273–282, 2000.
- [26] 池田心, 小林重信. 生得分離モデルを用いた GA と JSP への適用. 人工知能学会論文誌, Vol. 17, No. 5, pp. 530 – 538, 2002.
- [27] 秋本洋平, 永田裕一, 佐久間淳, 小野功, 小林重信. 適応的実数値交叉 AREX の提案と評価. 人工知能学会論文誌, Vol. 24, No. 6, pp. 446–458, 2009.
- [28] Andrew M. Sutton, Darrell Whitley, Monte Lunacek, and Adele Howe. PSO and multi-funnel landscapes: How cooperation might limit exploration. In *Proceedings of the 8th annual conference on Genetic and evolutionary computation (GECCO '06)*, pp. 75–82, 2006.
- [29] Monte Lunacek, Darrell Whitley, and Andrew Sutton. The impact of global structure on search. In *Proceedings of the 10th international conference on Parallel Problem Solving from Nature (PPSN X)*, pp. 498–507, 2008.
- [30] Christian L. Müller, Benedikt Baumgartner, and Ivo F. Sbalzarini. Particle swarm CMA evolution strategy for the optimization of multi-funnel landscapes. In *Proceedings of 2009 Congress on Evolutionary Computation (CEC '09)*, pp. 2685–2692, 2009.
- [31] 山村雅幸. モンテカルロ法による遺伝的オペレータの解析. SICE システム/情報合同シンポジウム, 1998, pp. 157–162, 1998.
- [32] 喜多一, 山村雅幸. 機能分担仮説に基づく GA の設計指針. 計測と制御, Vol. 38, No. 10, pp. 612–617, 1999.
- [33] 喜多一, 小野功, 小林重信. 実数値 GA のための正規分布交叉に関する理論的考察. 計測自動制御学会論文集, Vol. 35, No. 11, pp. 1333–1339, 1999.
- [34] 池田心, 小林重信. GA の探索における UV 現象と UV 構造仮説. 人工知能学会論文誌, Vol. 17, No. 3, pp. 239–246, 2002.
- [35] Efrén Mezura-Montes and Carlos A. Coello Coello. Constraint-handling in nature-inspired numerical optimization: Past, present and future. *Swarm and Evolutionary Computation*, Vol. 1, No. 4, pp. 173–194, 2011.
- [36] Alice E. Smith and David W. Coit. Constraint handling techniques - penalty functions. In *Handbook of Evolutionary Computation*. Institute of Physics Publishing and Oxford University Press, 1997.

- [37] Kalyanmoy Deb. An efficient constraint handling method for genetic algorithms. In *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 311–338, 1998.
- [38] Efrén Mezura-Montes and Carlos A. Coello Coello. Constrained optimization via multiobjective evolutionary algorithms. In Joshua Knowles, David Corne, Kalyanmoy Deb, and DevaRaj Chair, editors, *Multiobjective Problem Solving from Nature*, Natural Computing Series, pp. 53–75. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [39] Hajime Kita, Isao Ono, and Shigenobu Kobayashi. Multi-parental extension of the unimodal normal distribution crossover for real-coded genetic algorithms. In *Proceedings of 1999 Congress on Evolutionary Computation (CEC '99)*, pp. 1581–1587, 1999.
- [40] 木下峻一, 唐津直哉, 佐久間淳, 小野功, 小林重信. 関数最適化における UV 構造を考慮した進化アルゴリズムの提案. 第 36 回知能システム・シンポジウム資料, pp. 85–90, 2009.
- [41] Naoya Karatsu, Yuichi Nagata, Isao Ono, and Shigenobu Kobayashi. Globally multimodal function optimization by real-coded genetic algorithms using traps. In *Proceedings of 2011 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC '10)*, pp. 1–8, 2010.
- [42] Dirk V. Arnold and Nikolaus Hansen. A (1+1)-CMA-ES for constrained optimisation. In *Proceedings of the 8th annual conference on Genetic and evolutionary computation (GECCO '12)*, pp. 297–304, 2012.
- [43] Zbigniew Michalewicz and Marc Schoenauer. Evolutionary algorithms for constrained parameter optimization problems. *Evolutionary Computation*, Vol. 4, pp. 1–32, 1996.
- [44] 小野功. 進化的計算のレンズ設計への応用. 精密工学会誌, Vol. 64, No. 10, pp. 1443–1446, 1998.
- [45] Isao Ono, Shigenobu Kobayashi, and Koji Yoshida. Optimal lens design by real-coded genetic algorithms using UNDX. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 186, No. 2-4, pp. 483–497, 2000.
- [46] 木下峻一, 佐久間淳, 小野功, 小林重信. 実数値 GA によるズームレンズ系の進化的設計. 第 19 回自律分散システム・シンポジウム資料, pp. 189–194, 2007.
- [47] T. Ueda, N. Koga, I. Ono, and M. Okamoto. Efficient numerical optimization technique based on real-coded genetic algorithm for inverse problem. In *Proceedings of 7th International Symposium on Artificial Life and Robotics (AROB '02)*, Vol. 1, pp. 290–293, 2002.

- [48] Isao Ono, Yoshiaki Seike, Ryohei Morishita, Norihiko Ono, Masahiko Nakatsui, and Masahiro Okamoto. An evolutionary algorithm taking account of mutual interactions among substances for inference of genetic networks. In *Proceedings of 2004 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC '04)*, Vol. 2, pp. 2060–2067, 2004.
- [49] Jonathan P. K. Doye, Mark A. Miller, and David J. Wales. The double-funnel energy landscape of the 38-atom Lennard-Jones cluster. *The Journal of Chemical Physics*, Vol. 110, No. 14, pp. 6896–6906, 1999.
- [50] Christian L. Müller and Ivo F. Sbalzarini. A tunable real-world multi-funnel benchmark problem for evolutionary optimization (and why parallel island models might remedy the failure of CMA-ES on it). In *Proceedings of the Intl. Conf. Evolutionary Computation (ICEC)*, pp. 248–253, 2009.

付録A BEに関して

A.1 超楕円体 $(\boldsymbol{\mu}_e, \alpha^2(n+2)\mathbf{A}_e)$ 内一様分布に従うサンプルの生成方法

BEの大谷領域推定機構および適応的初期化機構の両方のアルゴリズム中において、超楕円体一様分布に従うサンプルを生成する必要がある。本節ではこの生成方法を示す。

本文アルゴリズム表記に従い、 n 次元超楕円体 $(\boldsymbol{\mu}_e, \alpha^2(n+2)\mathbf{A}_e)$ 内一様分布に従うサンプル \mathbf{x}_s を生成する。はじめに、 n 次元単位超球内一様分布に従うベクトル \mathbf{z}_s を生成し、これを超楕円体内に射影するという手順をとる。 n 次元正規分布に従うベクトル

$$\mathbf{n}_s \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n) \quad (\text{A.1})$$

を生成し、これをノルムの意味で正規化したベクトル

$$\mathbf{u}_s := \frac{\mathbf{n}_s}{\|\mathbf{n}_s\|} \quad (\text{A.2})$$

は n 次元単位超球面上の一様分布に従う。このベクトル \mathbf{u}_s を

$$\mathbf{z}_s := r^{1/n} \mathbf{u}_s, \quad r \sim \mathcal{U}(0, 1) \quad (\text{A.3})$$

に従い変換することで、 \mathbf{z}_s を得ることができる。ここで、 $\mathcal{U}(0, 1)$ は区間 $[0, 1]$ の一様乱数である。次に、ベクトル \mathbf{z}_s を

$$\mathbf{x}_s := \alpha \sqrt{n+2} \mathbf{L}_e \mathbf{z}_s + \boldsymbol{\mu} \quad (\text{A.4})$$

で変換することで、目的とするサンプル \mathbf{x}_s を得る。ここで、 \mathbf{L}_e は \mathbf{A}_e の cholesky 分解 $\mathbf{A}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{L}_e^T$ である。

A.2 超楕円体更新アルゴリズムの効率的な実装方法

大谷領域推定機構および適応的初期化機構において、超楕円体は式 (3.2)–(3.4) により $\boldsymbol{\mu}_e$ と \mathbf{A}_e の形で更新される。一方、前節で示したように、毎反復サンプル \mathbf{x}_s を生成するためには、 \mathbf{A}_e の cholesky 分解 $\mathbf{A}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{L}_e^T$ を計算する必要がある。この計算コストは一般に $\mathcal{O}(n^3)$ である。本節では \mathbf{A}_e ではなく、 \mathbf{L}_e の形で直接更新する更新式を導く。これにより、毎世代 cholesky 分解を行うコストを削減することができる。なお、本論文での実験では全て本節の更新式を用いて実装してある。

まず、式 (3.2)–(3.4) より、更新後のパラメータをそれぞれ \mathbf{A}'_e , $\tilde{\mathbf{A}}'_e$, $\boldsymbol{\mu}'_e$ でかくと、

$$\mathbf{A}' = \tilde{\mathbf{A}}'_e - \boldsymbol{\mu}'_e \boldsymbol{\mu}'_e{}^T \quad (\text{A.5})$$

$$= (1 - \gamma) \tilde{\mathbf{A}}_e + \gamma \mathbf{x}_s \mathbf{x}_s^T - ((1 - \gamma) \boldsymbol{\mu}_e + \gamma \mathbf{x}_s) ((1 - \gamma) \boldsymbol{\mu}_e + \gamma \mathbf{x}_s)^T \quad (\text{A.6})$$

$$= (1 - \gamma) \{ \mathbf{A}_e + \gamma (\mathbf{x}_s - \boldsymbol{\mu}_e) (\mathbf{x}_s - \boldsymbol{\mu}_e)^T \} \quad (\text{A.7})$$

が導ける。ここで、式 (A.4) を代入し、さらに変形すると、

$$\mathbf{A}'_e = (1 - \gamma) \{ \mathbf{A}_e + \gamma (\alpha \sqrt{n+2} \mathbf{L}_e \mathbf{z}_s) (\alpha \sqrt{n+2} \mathbf{L}_e \mathbf{z}_s)^T \} \quad (\text{A.8})$$

$$= (1 - \gamma) \{ \mathbf{L}_e \mathbf{L}_e^T + \alpha^2 \gamma (n+2) \mathbf{L}_e \mathbf{z}_s \mathbf{z}_s^T \mathbf{L}_e^T \} \quad (\text{A.9})$$

$$= (1 - \gamma) \mathbf{L}_e \{ \mathbf{I}_n + \alpha^2 \gamma (n+2) \mathbf{z}_s \mathbf{z}_s^T \} \mathbf{L}_e^T \quad (\text{A.10})$$

$$= \left\{ \sqrt{1 - \gamma} \mathbf{L}_e (\mathbf{I}_n + \omega_1 \mathbf{z}_s \mathbf{z}_s^T) \right\} \left\{ \sqrt{1 - \gamma} \mathbf{L}_e (\mathbf{I}_n + \omega_1 \mathbf{z}_s \mathbf{z}_s^T) \right\}^T \quad (\text{A.11})$$

を得る。ここで、

$$\omega_1 := \frac{-1 + \sqrt{1 + \alpha^2 \gamma (n+2) \|\mathbf{z}_s\|^2}}{\|\mathbf{z}_s\|^2} \quad (\text{A.12})$$

である。以上より、 $\mathbf{A}'_e = \mathbf{L}'_e \mathbf{L}'_e{}^T$ であることを用いると、新たな更新式

$$\mathbf{L}_e \leftarrow \sqrt{1 - \gamma} \mathbf{L}_e (\mathbf{I}_n + \omega_1 \mathbf{z}_s \mathbf{z}_s^T) \quad (\text{A.13})$$

を得る¹。一方で、負例の場合の更新式 (3.5)–(3.7) については、同様に

$$\mathbf{L}_e \leftarrow \sqrt{1 + \gamma} \mathbf{L}_e (\mathbf{I}_n + \omega_2 \mathbf{z}_s \mathbf{z}_s^T) \quad (\text{A.14})$$

を得る。ここで、

$$\omega_2 := \frac{-1 + \sqrt{1 - \alpha^2 \gamma (n+2) \|\mathbf{z}_s\|^2}}{\|\mathbf{z}_s\|^2} \quad (\text{A.15})$$

である。ここで、 $\omega_2 \in \mathbb{R}$ であるためには、式 (A.15) の根号内が非負である必要がある。本更新式が適用されるサンプルは、超楕円体内部のサンプルであるため、

$$0 \leq \alpha \|\mathbf{z}_s\| \leq 1 \quad (\text{A.16})$$

であることを考慮すると、ユーザパラメータ γ は、

$$1 - \alpha^2 \gamma (n+2) \|\mathbf{z}_s\|^2 \geq 1 - \gamma (n+2) \geq 0 \Leftrightarrow \gamma \leq \frac{1}{n+2} \quad (\text{A.17})$$

を満たすように設定する必要があることに注意されたい。

¹ なお、この更新式では式通りに計算すると行列積により $\mathcal{O}(n^3)$ であるものの、括弧を展開して $\mathbf{L}_e \mathbf{z}_s$ を先に計算することで、 $\mathcal{O}(n^2)$ で計算可能である。

付録B AEGAに関して

概要

本章では第4章の内容に関する付録を示す。第B.1節では、AEGAの子个体生成時に利用される、直交方向への分布拡大行列 \mathbf{B} の導出方法を示す。第B.2節では、AEGAの β 適応で利用する、 τ の厳密解の導出方法を示す。