

論文 / 著書情報
Article / Book Information

論題(和文)	両軸異タップ数による2次元最大平坦ダイヤモンド型ハーフバンドFIRフィルタの設計
Title(English)	Design of 2-D Maximally-Flat Diamond-Shaped Half-Band FIR Filters with Rectangular Supports of Impulse Response
著者(和文)	乾 究, 吉田俊之, 西原明法, 藤井信生
Authors(English)	Kiwamu Inui, Toshiyuki Yoshida, AKINORI NISHIHARA, NOBUO FUJII
出典(和文)	電子情報通信学会論文誌(A), Vol. J77A, No. 10, pp. 1336-1345
Citation(English)	, Vol. J77A, No. 10, pp. 1336-1345
発行日 / Pub. date	1994, 10
URL	http://search.ieice.org/
権利情報 / Copyright	本著作物の著作権は電子情報通信学会に帰属します。 Copyright (c) 1994 Institute of Electronics, Information and Communication Engineers.

両軸異タップ数による2次元最大平坦ダイヤモンド型ハーフバンドFIRフィルタの設計

非会員 乾 究^{†*} 正員 吉田 俊之[†]
正員 西原 明法[†] 正員 藤井 信生[†]

Design of 2-D Maximally-Flat Diamond-Shaped Half-Band FIR Filters with Rectangular Supports of Impulse Response

Kiwamu INUI^{†*}, Nonmember, Toshiyuki YOSHIDA[†], Akinori NISHIHARA[†]
and Nobuo FUJII[†], Members

あらまし 2次元ダイヤモンド型フィルタは種々の応用分野を有する実用上重要なフィルタで、2次元ハーフバンド(HB)FIRフィルタとして効率良く設計・実現できることが知られている。一方、応用によっては両軸同タップ数のフィルタよりも、むしろ一方の軸方向のタップ数を減らした両軸異タップ数のフィルタの方が適している場合がある。そこで、本論文では両軸異タップ数の2次元ダイヤモンド型低域通過フィルタを最大平坦設計する一方法を提案する。まず、両軸のタップ数が異なる場合に原点に与え得る最大平坦度とその条件式を考察すると共に、フィルタ形状をダイヤモンド形に近似するための条件式の導出を行う。次に、導出した条件式を組み合わせて独立なインパルス応答係数に関する連立方程式を導くことにより、両軸のタップ数差が2の場合および4, 6の場合の実設計法を示す。最後にいくつかの設計例を挙げると共に他の設計法との比較を行い、提案する方法の有効性を確認する。

キーワード デジタルフィルタ, 多次元信号処理, FIRフィルタ, 最大平坦型フィルタ

1. ま え が き

マルチレートデジタル信号処理における基本操作の一つに、インタポレーションやデシメーションによるサンプリングレート変換がある。特に2:1のサンプリングレート変換は、1次元のみならず2次元信号処理の分野でもしばしば必要とされ、実用上非常に重要な変換操作である^{(1)~(3)}。

直交格子状にサンプリングされた2次元信号の場合、2:1のデシメートに対応するいくつかのサンプリングパターンが存在するが、図1に示す五の目状のサンプリングパターンが最も広く用いられている^{(3)~(5)}。また、多次元信号をデシメートする場合、折返しひずみを生じないベースバンド形状は無数に存在する⁽⁴⁾が、その代表的なものに「第1ブリリアン領

域」⁽⁶⁾がある。図1の五の目状パターンの第1ブリリアン領域はダイヤモンド形となる⁽⁶⁾ため、図2に示す2次元ダイヤモンド型低域通過フィルタは五の目状サンプリングパターンに対する帯域制限フィルタとして用いることができる。

2.で詳しく述べるように、2次元ダイヤモンド型FIRフィルタは2次元ハーフバンド(HB)FIRフィルタとして非常に効率良く設計・実現が可能で、既にい

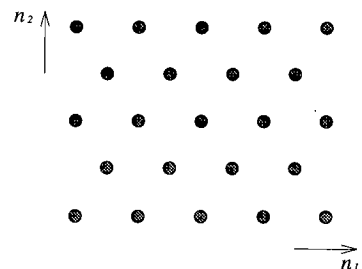


図1 五の目状サンプリングパターン
Fig.1 Quincuncial sampling pattern.

[†] 東京工業大学工学部電子物理工学科, 東京都
Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Tokyo,
152 Japan

* 現在, トヨタ自動車株式会社

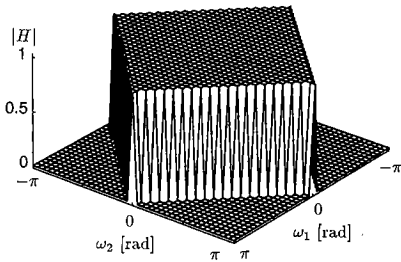


図2 2次元ダイヤモンド型低域通過フィルタ
Fig. 2 2-dimensional diamond-shaped lowpass filter.

くつかの設計法が提案されている^{(5)~(8)}。Tonge は文献(5)でダイヤモンド型 HBFIR フィルタの最大平たん近似法⁽⁵⁾を提案しているが、必要となるタップ数や乗算回数が多いという欠点を有していた。筆者らは、これらの欠点を解決する新しい最大平たん近似法を提案している⁽⁶⁾。一方、リップルを有する HB フィルタの設計法も提案されており^{(7),(8)}、最大平たん近似に比べて急しゅんな特性の実現が可能である。しかし、時空間域におけるリンギングが大きいため、特に画像処理等の分野ではむしろ最大平たん型フィルタが好まれる場合が多い。

ところで、文献(5)においても指摘されているように、応用によっては両軸同タップ数の2次元フィルタよりも、どちらか一方のタップ数を極力小さくしたフィルタが必要となる場合がある。例えば、ダイヤモンド型 HBFIR フィルタをインタレース走査されたテレビ信号 (NTSC 信号等) の走査線補間フィルタとして用いる応用⁽³⁾を考える。この場合、 n_1 軸は時間方向、 n_2 軸は垂直方向に対応するため、 n_1 軸のタップ数に等しいフィールドすべてをメモリに保持しておかなければならない。通常、1枚のフィールドメモリには数メガビットのメモリ量が必要であるから、フィルタ係数の対称性を失う代償を払ったとしてもメモリ量、すなわち n_1 軸方向のタップ数の削減は実用上非常に重要である。文献(5)では両軸で異なるタップ数を有するダイヤモンド型 HBFIR フィルタのいくつかの設計例が示されているが、得られる特性は良好なダイヤモンド形とは言いがたく、基本的に1次元フィルタの積による設計であるため効率が悪い⁽⁶⁾。

このような背景に基づき、本論文では両軸のタップ数が異なる場合の2次元ダイヤモンド型 HBFIR フィルタを最大平たん設計する新しい方法を提案する。但し、両軸のタップ数差が任意の場合についての一般的な設計法を示すことは非常に困難であるため、ここでは

実用上特に重要と考えられる両軸のタップ数差が2の場合および4, 6の場合についての設計法を示す。以下、まず準備として2次元ハーフバンド FIR フィルタの定義と性質について説明し、その振幅特性の原点での平たん条件と共に通過域形状をダイヤモンド形に近似する条件について考察する。次に、導いた条件に基づく実際の設計法を説明し、いくつかの設計例を挙げる。最後に本論文のまとめを述べる。

2. 2次元 HBFIR フィルタの定義とその性質

2次元零位相 FIR フィルタの伝達関数は、

$$H(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-\frac{N_1-1}{2}}^{\frac{N_1-1}{2}} \sum_{n_2=-\frac{N_2-1}{2}}^{\frac{N_2-1}{2}} h(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} \\ (h(n_1, n_2) = h(-n_1, -n_2)) \quad (1)$$

と書ける。ここで、 $h(n_1, n_2)$ はフィルタのインパルス応答を表し、両軸のタップ数 N_1 と N_2 はともに奇数で $N_2 \geq N_1$ を仮定する。式(1)の周波数応答は $z_1 = e^{j\omega_1}$, $z_2 = e^{j\omega_2}$ (ω_1, ω_2 は規格化角周波数) を代入することにより、

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = h(0, 0) + 2 \sum_{n_1=1}^{\frac{N_1-1}{2}} h(n_1, 0) \cos n_1 \omega_1 \\ + 2 \sum_{n_2=1}^{\frac{N_2-1}{2}} h(0, n_2) \cos n_2 \omega_2 \\ + 2 \sum_{n_1=1}^{\frac{N_1-1}{2}} \sum_{n_2=1}^{\frac{N_2-1}{2}} h(n_1, n_2) \cos(n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2) \\ + 2 \sum_{n_1=1}^{\frac{N_1-1}{2}} \sum_{n_2=1}^{\frac{N_2-1}{2}} h(n_1, -n_2) \cos(n_1 \omega_1 - n_2 \omega_2) \quad (2)$$

と計算できる。

一般に、2次元零位相 FIR フィルタの周波数応答が任意の ω_1, ω_2 に対して、

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) + H(e^{j(\pi-\omega_1)}, e^{j(\pi-\omega_2)}) = 1 \quad (3)$$

を満たすとき、このフィルタは2次元 HBFIR フィルタと呼ばれる。式(3)を満たす2次元 HBFIR フィルタの振幅応答は、 $\omega_1 - \omega_2 - H$ 空間内の点 $(\pi/2, \pi/2, 1/2)$ に関して対称となる。このため、図2のダイヤモンド型フィルタは、2次元 HBFIR フィルタの代表的な特性であることがわかる。

一方、式(2), (3)より、2次元 HBFIR フィルタのインパルス応答 $h(n_1, n_2)$ は、

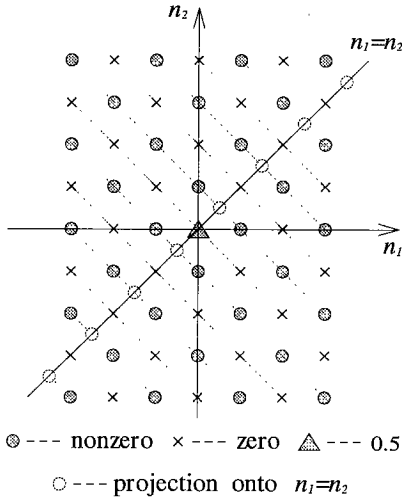


図3 7×9タップHBFIRフィルタのインパルス応答
Fig. 3 Impulse response of a 7×9 tap HB FIR filter.

$$\begin{cases} h(n_1, n_2) = \frac{1}{2} & (n_1 = n_2 = 0) \\ h(n_1, n_2) = 0 & (n_1 + n_2 = \text{EVEN}) \end{cases} \quad (4)$$

を満たすことが容易に導かれる⁽⁶⁾。図3に7×9タップの2次元HBFIRフィルタのインパルス応答の例を示す。図より明らかなように、2次元HBFIRフィルタはタップ係数のほぼ50%がゼロであるため、非常に効率良く設計・実現が可能である。なお、2次元HBFIRフィルタは両軸のタップ数がともに奇数の場合に限り定義できるため、両軸のタップ数差は0, 2, 4, 6, …のように必ず偶数でなければならない。

3. 設計のための準備

本論文では文献(6)の設計方法と同様に、独立なタップ係数を変数にとり、変数の数(自由度)と同数の条件式を導いて連立方程式として解くことによりフィルタ設計を行う。文献(6)の設計法では、フィルタ係数に4軸対称性をもたせることでフィルタ形状は自動的にダイヤモンド形となるため、設計の自由度すべてを原点での平坦条件に用いることができた。しかしながら、ここでは $N_1 \neq N_2$ で4軸対称性はもはや成り立たないため、自由度すべてを平坦条件に当てることはできず、その一部をフィルタ形状(ダイヤモンド形)の近似に用いなければならない。しかも n_1 軸と n_2 軸方向ではタップ長が異なるため、原点において与え得る最大の平坦度は方向によって異なるといった問題も生じる。

本章では、まず、ダイヤモンド型HBFIRフィルタの設計を対象としている点および両軸で異なるタップ長に起因する特殊性を考慮に入れ、原点での平坦度(高階微分係数の値がゼロである階数)の決定方法について考察する。次に、振幅特性に平坦性をもたせるための条件式およびフィルタ形状をダイヤモンド形に近似するための条件式について論じる。

3.1 原点における平坦度の決定

式(1)および式(4)で表される2次元HBFIRフィルタ $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ の $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ 軸上の周波数応答 $H_{45}(e^{j\omega})$ を考える。 $H_{45}(e^{j\omega})$ は、図3に示すように $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ のインパルス応答 $h(n_1, n_2)$ を $n_2 = n_1 \equiv n$ 軸上に射影したインパルス応答 $h_{45}(n)$ を有するため、実際に、

$$H_{45}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\frac{N_1+N_2-2}{2}}^{\frac{N_1+N_2-2}{2}} h_{45}(n) e^{-jn\omega} \quad \left(h_{45}(n) = \sum_{n_1+n_2=n} h(n_1, n_2) \right) \quad (5)$$

と書くことができる。ここで、式(4)の関係をを用いると、

$$\begin{cases} h_{45}(0) = \frac{1}{2} & (n=0) \\ h_{45}(n) = 0 & (n=\text{EVEN}) \end{cases} \quad (6)$$

が得られるため、式(5)はタップ数 (N_1+N_2-1) の1次元HBFIRフィルタ⁽⁹⁾に対応することが容易に確認できる。また、 $H_{45}(e^{j\omega})$ と同様に ω_1 軸上および ω_2 軸上の1次元周波数応答、それぞれ $H_0(e^{j\omega})$ および $H_{90}(e^{j\omega})$ を考える。 $H_0(e^{j\omega})$ と $H_{90}(e^{j\omega})$ も $h(n_1, n_2)$ を対応する軸上に射影したインパルス応答、それぞれ $h_0(n)$ および $h_{90}(n)$ を有するため、

$$H_0(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\frac{N_1-1}{2}}^{\frac{N_1-1}{2}} h_0(n) e^{-jn\omega} \quad \left(h_0(n) = \sum_{n_2=-\frac{N_2-1}{2}}^{\frac{N_2-1}{2}} h(n, n_2) \right) \quad (7)$$

$$H_{90}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\frac{N_2-1}{2}}^{\frac{N_2-1}{2}} h_{90}(n) e^{-jn\omega} \quad \left(h_{90}(n) = \sum_{n_1=-\frac{N_1-1}{2}}^{\frac{N_1-1}{2}} h(n_1, n) \right) \quad (8)$$

と表される。

ここでは、 $\omega_1 = \omega_2$ 方向の特性が1次元HBFIRフィルタに対応するという2次元HBFIRフィルタに特徴的な性質を考慮し、 ω_1, ω_2 軸方向と同様に $\omega_1 = \omega_2$ 方向に関する1次元特性を考察することにより、設計する

フィルタに与え得る原点での平坦度を決定する。今、設計する2次元ダイヤモンド型低域通過 HBFIR フィルタ $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ が原点において最大平坦特性を有すると仮定すると、前述の3方向の1次元フィルタ $H_0(e^{j\omega}), H_{45}(e^{j\omega}), H_{90}(e^{j\omega})$ も最大平坦型低域通過特性でなければならない。従って、この3方向に関して $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ がもち得る最大の平坦度は、逆に式(5)および式(7), (8)の1次元フィルタを最大平坦設計したときに得られる平坦度に等しい。

次に、式(5)および式(7), (8)の特性に与え得る最大の平坦度について考察する。まず、 N タップの1次元 HBFIR フィルタの周波数応答は、一般に

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} + 2 \sum_{n_1=1}^{\lfloor \frac{N+1}{4} \rfloor} h(2i-1) \cos(2i-1)\omega \quad (9)$$

と表され、これを最大平坦低域通過フィルタとなるように設計した場合の平坦度 F は、

$$F = 2 \left\lfloor \frac{N-3}{4} \right\rfloor + 1 \quad (10)$$

と与えられる⁽⁹⁾。但し、 $[\cdot]$ はガウス記号を表している。一方、式(7), (8)の周波数応答は HB とはならず、タップ長を N とすると共に

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} H_0(e^{j\omega}) \\ H_{90}(e^{j\omega}) \end{aligned} \right\} &\equiv H(e^{j\omega}) \\ &= h(0) + 2 \sum_{n_1=1}^{\frac{N-1}{2}} h(n) \cos n\omega \end{aligned} \quad (11)$$

と書かれる。ダイヤモンド型 HBFIR フィルタは図2の特性をもつため、その対称性と HB 性により原点における振幅値は $1, (0, \pm\pi), (\pm\pi, 0)$ の4点における振幅値は $1/2$ となる。このため、式(11)の自由度 $(N+1)/2$ のうち二つを $\omega=0$ および $\omega=\pi$ における振幅値の決定に用いなければならない。また、式(11)は $\cos$ の級数であるため原点における奇数階微係数は常にゼロとなり、全自由度のうち m 個を用いて原点での高階微係数をゼロにすると、 $(2m+1)$ 階の平坦度が得られる⁽⁹⁾。従って、この場合の平坦度 F は、

$$F = 2 \left(\frac{N+1}{2} - 2 \right) + 1 = N - 2 \quad (12)$$

と計算される。

設計を行うフィルタが式(1)のように $N_1 \times N_2$ タップ ($N_2 \geq N_1$) であると仮定すると、 H_0, H_{45}, H_{90} のタップ長はそれぞれ N_1, N_1+N_2-1, N_2 となるため、 $n_1, m_1 = n_2$ および n_2 軸上での平坦度、それぞれ F_0, F_{45} および F_{90} は、

$$\begin{cases} F_0 = N_1 - 2 \\ F_{45} = 2 \left\lfloor \frac{N_1 + N_2}{4} \right\rfloor - 1 \\ F_{90} = N_2 - 2 \end{cases} \quad (13)$$

となる。

本論文では、式(13)のように3方向の特性が原点において最大平坦性を有し、かつこれらのうちの最も小さい平坦度 F_0 が原点であらゆる方向に関して成り立つ場合に最大平坦特性を有すると定める。両軸異タップの2次元フィルタに対する最大平坦性としては、このほかにもいくつかの可能な定義が考えられる。これらの定義を用いた場合との比較検討は、設計結果を含めて5.において論ずる。

3.2 各方向の平坦条件

設計する2次元ダイヤモンド型フィルタは、図2に示すように ω_1, ω_2 および $\omega_1 = \omega_2$ 軸に関して対称である。一方のインパルス応答は n_1, n_2 軸に関しては対称であるが、両軸のタップ数が異なるため $n_1 = n_2$ 軸に関しては対称とはならない。式(1), (4)およびインパルス応答の軸対称性を考慮すると、設計する2次元ダイヤモンド型 HBFIR フィルタの周波数応答は、

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) &= \frac{1}{2} + 2 \sum_{n_1=1}^{\lfloor \frac{N_1+1}{4} \rfloor} h(2n_1-1, 0) \cos(2n_1-1)\omega_1 \\ &\quad + 2 \sum_{n_2=1}^{\lfloor \frac{N_2+1}{4} \rfloor} h(0, 2n_2-1) \cos(2n_2-1)\omega_2 \\ &\quad + 4 \sum_{n_1=1}^{\lfloor \frac{N_1+1}{4} \rfloor} \sum_{n_2=1}^{\lfloor \frac{N_2+1}{4} \rfloor} h(2n_1-1, 2n_2) \\ &\quad \cdot \cos(2n_1-1)\omega_1 \cos 2n_2\omega_2 \\ &\quad + 4 \sum_{n_1=1}^{\lfloor \frac{N_1+1}{4} \rfloor} \sum_{n_2=1}^{\lfloor \frac{N_2+1}{4} \rfloor} h(2n_1, 2n_2-1) \\ &\quad \cdot \cos 2n_1\omega_1 \cos(2n_2-1)\omega_2 \end{aligned} \quad (14)$$

と書ける。

式(14)の周波数応答に最大平坦性をもたせるためには、適当な方向 θ に関する r 階方向微係数を1階から指定された階数まですべてゼロとすることがある。

式(14)の ω_1 と ω_2 を

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega \cos \theta \\ \omega_2 = \omega \sin \theta \end{cases} \quad (15)$$

とおくと、 $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ の方向 θ における r 階微分係数は、

$$\begin{aligned} & \frac{d^r H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})}{d\omega^r} \\ &= \left(-\frac{\partial}{\partial \omega_1} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial \omega_2} \sin \theta \right)^r H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) \\ &= \sum_{s=0}^r r C_s \frac{\partial^s H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})}{\partial \omega_1^s \partial \omega_2^{r-s}} \cos^s \theta \sin^{r-s} \theta \quad (16) \end{aligned}$$

と書ける⁽¹⁰⁾。今、任意の方向 θ について、

$$\left. \frac{d^r H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})}{d\omega^r} \right|_{\omega_1=\omega_2=0} = 0 \quad (17)$$

となるための条件を考える。式(14)からわかるように $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ は $\cos$ の級数になっているため、 r が奇数のとき式(17)は常に成り立つ。 r が偶数のときは式(16)より、

$$\left. \frac{\partial^r H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})}{\partial \omega_1^s \partial \omega_2^{r-s}} \right|_{\omega_1=\omega_2=0} = 0 \quad (s=0, 1, 2, \dots, r) \quad (18)$$

が満たされなければならない。しかし、 s が奇数のときは式(18)は常に成り立つため、結局のところ必要な条件式は

$$\left. \frac{\partial^r H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})}{\partial \omega_1^s \partial \omega_2^{r-s}} \right|_{\omega_1=\omega_2=0} = 0 \quad (s=0, 2, 4, \dots, r) \quad (19)$$

と表される。簡単のため、

$$H_{s, r-s} = \left. \frac{\partial^r H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})}{\partial \omega_1^s \partial \omega_2^{r-s}} \right|_{\omega_1=\omega_2=0} \quad (s=0, 2, 4, \dots, r) \quad (20)$$

とおくと、式(19)の条件は、

$$H_{0,r} = H_{2,r-2} = H_{4,r-4} = \dots = H_{r,0} = 0 \quad (21)$$

と表され、全部で $(r/2+1)$ 本の条件式が必要であることがわかる。

一方、原点における $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ の $\omega_1 = \omega_2$ 軸方向に関する r 階方向微係数は式(16)に $\theta = \pi/4$ を代入すれば得られるため、条件

$$\sum_{i=0}^{r/2} r C_{2i} H_{2i, r-2i} = 0 \quad (r=\text{EVEN}) \quad (22)$$

が成り立てばこの方向の r 階微係数がゼロとなる。同様に、 ω_1, ω_2 軸方向に関する条件はそれぞれ、

$$H_{r,0} = 0 \quad (r=\text{EVEN}) \quad (23)$$

$$H_{0,r} = 0 \quad (r=\text{EVEN}) \quad (24)$$

と表される。

以上、導出した式(21)～(24)の条件を $r=2$ から指定された階数まで用いれば、式(14)の周波数応答を最大平坦とすることができる。

3.3 フィルタ形状をダイヤモンド形とするための条件式

今、第1象限内で振幅値が $1/2$ であるような等振幅

線

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \frac{1}{2} \quad (25)$$

に着目する。HB 性により、式(25)は常に点 $(\omega_1, \omega_2) = (\pi/2, \pi/2)$ を通る。ここでは、式(25)の等振幅線 $(\pi/2, \pi/2)$ において傾き -1 の直線に近づく条件式を用いて、フィルタ特性をダイヤモンド形に近似する方法を提案する。これは、

$$\left. \frac{\partial^r \omega_2}{\partial \omega_1^r} \right|_{\omega_1=\omega_2=\pi/2} = \begin{cases} -1 & (r=1) \\ 0 & (r=2, 3, 4, \dots) \end{cases} \quad (26)$$

なる条件として表現される。式(26)は更に、

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i r C_i \left. \frac{\partial^r H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})}{\partial \omega_1^{r-i} \partial \omega_2^i} \right|_{\omega_1=\omega_2=\pi/2} = 0 \quad (r=1, 3, 5, \dots) \quad (27)$$

のように変形できる。証明は付録1に示す。

4. 提案する設計法

本章では、3.で導いた平坦条件とフィルタ形状に関する条件を組み合わせることにより、実際にタップ数差2、4および6の場合の設計法を示す。以下、タップ数差2の場合を詳細に説明し、4および6の場合については、2の場合との相違点を中心にそれぞれ付録2および3.において述べる。

今、設計するフィルタのタップ数を $N_1 \times N_2 = N \times (N+2)$ (N は奇数) とおく。定めるべき独立なインパルス応答 $h(n_1, n_2)$ は、原点を除き軸上を含む第1象限内に存在する非ゼロのインパルス応答で、その総数 k_N^2 は、

$$k_N^2 = \frac{N^2 + 4N + 3}{8} \quad (28)$$

と表される。 k_N^2 の上付き添字は、両軸でのタップ数差を示している(以下同様)。例えば、図3に示される 7×9 タップのフィルタでは、独立なインパルス応答の総数は10となる。

設計するフィルタの自由度 k_N^2 のうちの二つを振幅値に関する条件

$$\begin{cases} H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})|_{\omega_1=\omega_2=0} = 1 \\ H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})|_{\omega_1=0, \omega_2=\pi} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (29)$$

に用いる。このとき、式(3)のHB性により点 $(\pi, 0)$ における振幅値も $1/2$ となる。

一方、式(13)より原点での各平坦度は、

$$\begin{cases} F_0 = N-2 \\ F_{45} = N \\ F_{90} = N \end{cases} \quad (30)$$

と計算され、更に任意の方向に関する平坦度 $F_a \equiv F_0 = N-2$ を満たさなければならない。まず、式(21)より、

$$H_{s,r-s}=0 \quad (s=0, 2, 4, \dots, r) \quad (r=2, 4, \dots, N-3) \quad (31)$$

なる条件式が導出される。また、式(22)、(24)より、

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{\frac{N-2}{2}} (N-1) C_{2i} H_{2i, N-1-2i} = 0 \\ H_{0, N-1} = 0 \end{cases} \quad (32)$$

が導かれる。以上、式(29)、(31)、(32)によって表される条件式の総数は $(N^2+23)/8$ と計算され、独立なインパルス応答を一意的に定めるためには、なお

$$\frac{N-5}{2} \quad (33)$$

本の条件式が必要となる。

ところで、 $N=3$ の場合、式(32)より

$$\begin{cases} H_{0,2} + H_{2,0} = 0 \\ H_{0,2} = 0 \end{cases} \quad (34)$$

が得られるが、これは

$$H_{2,0} = 0 \quad (35)$$

を表すため $F_0=3$ となり、式(30)の第1式に矛盾する。このため、以下では $N=3$ の場合を除外し、 $N \geq 5$ を設計対象とする。 $N \geq 5$ の場合には、不足する式(33)の条件に、式(27)で表されるフィルタ形状に関する条件

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i r C_i \left. \frac{\partial^r H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})}{\partial \omega_1^{r-i} \partial \omega_2^i} \right|_{\omega_1=\omega_2=\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (r=1, 3, 5, \dots, N-6) \quad (36)$$

を用いる。例えば、 7×9 タップのフィルタの設計に必要な条件式は、

$$\begin{cases} H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})|_{\omega_1=\omega_2=0} = 1 \\ H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})|_{\omega_1=0, \omega_2=\pi} = \frac{1}{2} \\ H_{0,2} = H_{2,0} = 0 \\ H_{0,4} = H_{2,2} = H_{4,0} = 0 \\ H_{0,6} + 15H_{2,4} + 15H_{4,2} + H_{6,0} = 0 \\ H_{0,6} = 0 \\ \left(\frac{\partial H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})}{\partial \omega_1} - \frac{\partial H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})}{\partial \omega_2} \right) \Big|_{\omega_1=\omega_2=\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases} \quad (37)$$

の10本で、実際の方程式は、

$$A \cdot h = b \quad (38)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 2 & 4 & 4 & -4 \\ -2 & -18 & 0 & -16 & -64 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -4 & -16 \\ 2 & 162 & 0 & 64 & 1024 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 64 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 64 \\ -1 & -729 & -1 & -730 & -16354 & -730 \\ -2 & -1458 & 0 & -256 & -16384 & -4 \\ 2 & 6 & -2 & 4 & -4 & -4 \\ & 4 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ & -4 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ & -36 & 0 & -16 & -64 & -4 \\ & -16 & -18 & -36 & -36 & -4 \\ & 324 & 0 & 64 & 1024 & 4 \\ & 144 & 0 & 144 & 576 & 4 \\ & 64 & 162 & 324 & 324 & 4 \\ -15626 & -729 & -15626 & -117650 & -117650 & -4 \\ -2916 & 0 & -256 & -16384 & -16384 & -4 \\ & 12 & 6 & -12 & -12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$h = [h_{01} \ h_{03} \ h_{10} \ h_{12} \ h_{14} \ h_{21} \ h_{23} \ h_{30} \ h_{32} \ h_{34}]^t$$

$$b = [0.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^t$$

となる。

これらの条件は、すべて独立なインパルス応答の1次結合となっているため、線形な連立方程式を導く。この方程式を適当な数値計算法により解くことで、目的のフィルタの設計は完了する。なお、任意の N に対して方程式の正則性を数学的に示すには至っていないが、経験上、数10タップ程度の範囲で非正則となることはない。

5. 設計例および比較検討

本章では、まず提案する設計法の有効性・妥当性を確認するため設計例を挙げて相互に比較すると共に、他の設計法によるフィルタとの比較を行う。また、3.で述べたように、本論文で用いた最大平坦性の定義とは異なる定義について考察し、その設計結果を含めて比較検討を行う。

5.1 設計例および Tonge の設計法との比較

最初の例は、 7×9 、 7×11 および 7×13 タップの最大平坦ダイヤモンド型 HBFIR フィルタである。各周波数応答の等振幅線図 (Contour plot) を図4(a)～(c)に示す。また、これら三つのフィルタと文献(6)

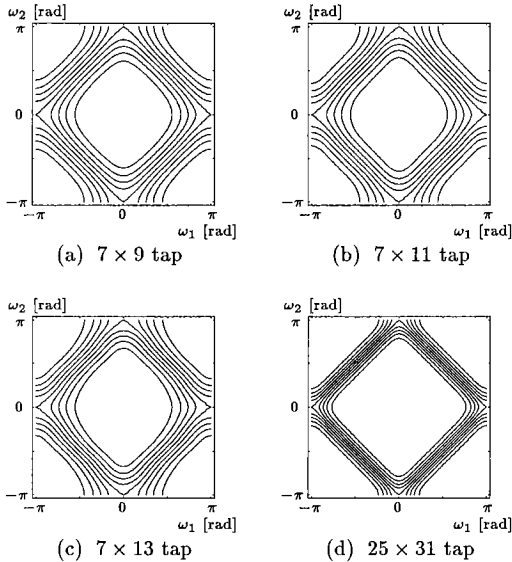


図4 提案方法により設計した最大平坦ダイヤモンド型 HB FIR フィルタの等振幅線図

Fig. 4 Contour plot of maximally-flat diamond-shaped HB FIR filters designed by the proposed method.

表1 設計した HB FIR フィルタの ω_1 および ω_2 軸上での遮断周波数

	7 × 7	7 × 9	7 × 11	7 × 13
ω_1 [rad]	$2\pi \times 0.368$	$2\pi \times 0.368$	$2\pi \times 0.368$	$2\pi \times 0.368$
ω_2 [rad]	$2\pi \times 0.368$	$2\pi \times 0.385$	$2\pi \times 0.397$	$2\pi \times 0.406$

の方法による 7×7 タップのフィルタに関する ω_1 および ω_2 軸上での遮断周波数を表1に示す。但し、遮断周波数には振幅応答が 3 dB 低下する周波数を用いている。図4(a)~(c)より、良好な平坦特性が得られていることがわかる。また、表1より N_2 軸のタップ数が大きくなると、 ω_1 軸方向の遮断周波数は一定のまま ω_2 軸方向の遮断周波数が大きくなり、振幅特性が急しゅんとなっていることが確認できる。

次に、よりタップ数の大きなフィルタとして、 25×31 タップの最大平坦ダイヤモンド型 HBFIR フィルタの設計例を図4(d)に示す。タップ数が大きくなると両軸のタップ数差は相対的に小さくなるため、4軸対称特性に近い特性が得られている。

最後に、Tonge による設計方法⁽⁶⁾との比較を行う。 5×11 タップ最大平坦ダイヤモンド型 HBFIR フィルタを二つの方法で設計した結果を図5に示す。Tonge の方法によるフィルタは ω_1 軸上での振幅が常

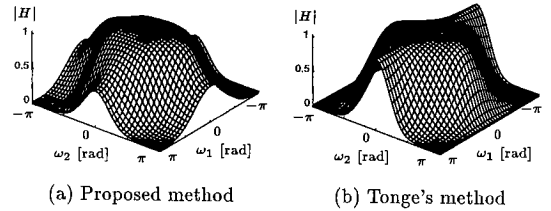


図5 提案方法および Tonge の方法による 5×11 タップ最大平坦ダイヤモンド型 HBFIR フィルタの周波数応答

Fig. 5 Frequency response of 5×11 -tap maximally-flat diamond-shaped HB FIR filters designed by the proposed and Tonge's methods.

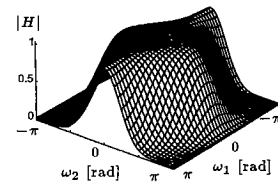


図6 (a)の場合の 7×9 タップダイヤモンド型 HB FIR フィルタの周波数応答

Fig. 6 Frequency response of 7×9 -tap diamond-shaped HB FIR filter designed in (a).

に1で、その通過域形状はダイヤモンド型から大きく外れている。一方の提案方法では、両軸のタップ数が相対的に大きいことによる影響が現れているもののおおむね良好なダイヤモンド特性が得られている。以上により、提案方法の有効性が確認できる。

5.2 他の最大平坦性の定義を用いた場合との比較検討

3.1において述べたように、最大平坦性に関しては本論文で用いた定義のほかにも可能なものが考えられる。本節では、タップ数差が2の場合を例にとり、他のいくつかの定義を用いた場合との比較検討を行う。

(a) 原点で全方向に平坦度 N を与えた場合

設計するフィルタのタップ数を $N_1 \times N_2 = N \times (N+2)$ とおくと、式(13)において $F_{90} = N$ が与え得る最も大きな平坦度となる。ここでは、この平坦度が原点であらゆる方向に対して成り立つ場合を最大平坦と定義して設計を行う。

この場合、式(21)の条件が $r=2, \dots, N-1$ に対して成立する必要がある、更に原点での振幅を決定する式(29)の第1式を用いると全部で式(28)に等しい数の条

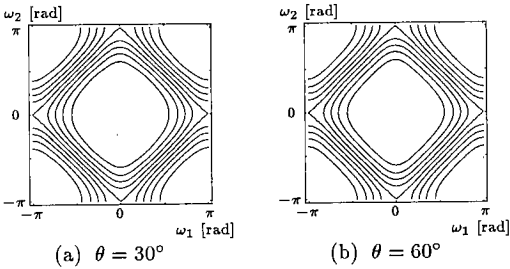
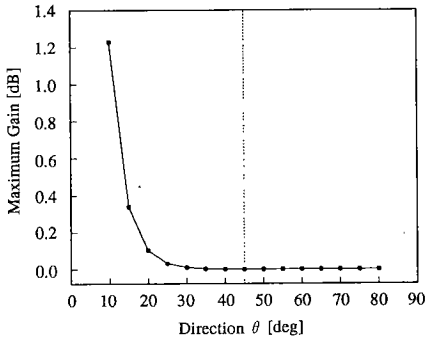
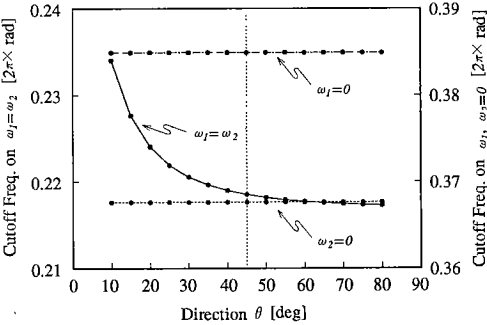


図 7 (b) の場合の 7×9 タップダイヤモンド型 HB FIR フィルタの等振幅線図
Fig. 7 Contour plot of 7×9-tap diamond-shaped HB FIR filter designed in (b).



(a) Maximum gain



(b) Cutoff frequencies

図 8 方向 θ と最大利得 (dB) および 3 dB 遮断周波数の関係
Fig. 8 Maximum gain (dB) and 3 dB cutoff frequencies versus direction θ .

件式が得られる。図 6 に 7×9 タップの場合の設計例を示す。この定義に基づいて設計を行うと、タップ数にかかわらず ω_1 軸上での振幅は常に 1 となり、図 5 と同様に通過域形状がダイヤモンド型から大きく外れる結果となっている。これは短軸方向に大きな平坦度を

与えた弊害で、 F_0 と F_{90} を式 (13) に従って決定する妥当性が確認できる。

(b) $\omega_1 = \omega_2$ 以外の方向を考慮した場合

3.1 では、 $\omega_1 = \omega_2$ の平坦度 F_{45} を用いて最大平坦性を定義したが、ここではある方向 $\theta (0^\circ < \theta < 90^\circ)$ の平坦度 F_θ を用いて設計を行う。すなわち、式 (13) において第 2 式の F_{45} を F_θ と置き換えた定義を用いる。

この場合は、与えられた θ を式 (16) に代入した条件式を式 (32) の第 1 式の代わりに用いることにより、4. と全く同様の方法で設計が可能である。7×9 タップに対して $\theta = 30$ および 60 とした場合の設計結果を図 7 に示す。図 4 (a) と比較すると、特性に大きな差はないことがわかる。そこで、 θ の方向を 10° から 80° まで変化させた場合の通過内の最大利得 (dB) および $\omega_1, \omega_1 = \omega_2, \omega_2$ の各方向の 3 dB 遮断周波数を図 8 に示す。図 8 より、 θ を小さくすると振幅特性にピークが生じる反面、 $\omega_1 = \omega_2$ 方向の遮断は急しゅんになることがわかる (ω_1, ω_2 方向の遮断周波数は θ によらず一定)。この傾向は、7×9 以外のタップ数に対しても同様に成り立つ。従って、特に大きなピークが許容される場合には、 θ として 45° 以下を指定しても問題なく設計が可能であるが、最大平坦フィルタの場合、一般には大きなピークを生じる特性は好ましくない。 θ を 30 度以上に選ぶと、実用上はほとんどピークを生じない、ほぼ同等の特性が得られるため、3.1 では特に 45 度方向の特性が 1 次元 HBFIR フィルタに対応するという著しい特徴に着目し、 F_{45} を用いて設計を行った。

6. むすび

本論文では、両軸のタップ数が異なる場合の 2 次元最大平坦ダイヤモンド型 HBFIR フィルタの一設計法を提案した。まず、両軸同タップ数の場合とは異なり、原点において与え得る最大の平坦度がその方向に依存するため、 ω_1, ω_2 および $\omega_1 = \omega_2$ 軸の 3 方向の平坦度を考察することにより両軸異タップ数の場合の最大平坦条件を考察した。また、4 軸対称性が成り立たないため、設計の自由度の一部を用いて通過域形状をダイヤモンド形に近似する条件式を提案した。これらの準備に基づき、両軸のタップ数差が 2, 4 および 6 の場合にインパルス応答係数が一意的に決定されるように条件式の組合せ法を工夫し、実際の設計方法を示した。本方法はインパルス応答係数に関する連立方程式を導いて解くことに基礎をおいているため、設計

が非常に簡単であるという利点を有している。最後に、いくつかの設計例を挙げると共に Tonge の方法との比較を行い、本方法の有効性を確認した。また、本論文で用いた最大平坦性の定義について、他の定義と比較することにより検討を行った。

本論文では両軸のタップ数差が 2, 4, 6 の場合に限って設計法を示しているがタップ数差のより大きい場合の設計法の確立、更に両軸のタップ数差が任意の場合の統一的設計法の導出等が今後の課題として残されている。

文 献

- (1) Crochiere R. E. and Rabiner L. R.: "Multirate Digital Signal Processing", Prentice-Hall (1983).
- (2) Vaidyanathan P. P.: "Multirate Systems and Filter Banks", Prentice-Hall (1993).
- (3) 吹枝敏彦: "TV 画像の多次元信号処理", 日刊工業新聞社 (1988).
- (4) Dudgeon D. E. and Mersereau R. M.: "Multidimensional Digital Signal Processing", Prentice-Hall (1984).
- (5) Tonge G. J.: "The sampling of television images", Experimental & Development Rep., 112/81, Independent Broadcasting Authority (May 1981).
- (6) Yoshida, T., Nishihara A. and Fujii N.: "A design method of 2-D maximally-flat diamond-shaped half-band FIR filters", Trans. IEICE, E73, 6, pp. 901-907 (June 1990).
- (7) 吉田俊之, 中西 衛, 西原明法: "2 次元ハーフバンド FIR フィルタの簡易設計", 1989 信学春季大会, SA-2-3.
- (8) Siohan P. and Ouyard V.: "Design of optimal non-separable 2-D half-band filters", Proc. 1993 IEEE Int. Symp. on Circuits and Syst., pp. 914-917 (May 1993).
- (9) 吉田俊之, 西原明法, 藤井信生: "最大平坦型ハーフバンド FIR フィルタの設計法", 信学技報, CAS88-130 (1989-03).
- (10) 高木貞次: "解析概論", 岩波書店 (1961).

付 録

1. 式(27)の導出

簡単のため, $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = H$ とおく。まず

$$\left. \frac{\partial^l \omega_2}{\partial \omega_1^l} \right|_{\omega_1=\omega_2=\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} -1 & (l=1) \\ 0 & (l=2, 3, \dots, r-1) \end{cases} \quad (\text{A} \cdot 1)$$

が成り立つとき, $\frac{\partial H}{\partial \omega_2} \neq 0$ であれば

$$\frac{d^r \omega_2}{d\omega_1^r} = -\frac{1}{\frac{\partial H}{\partial \omega_2}} \sum_{i=0}^r (-1)^i C_i \frac{\partial^r H}{\partial \omega_1^{r-i} \partial \omega_2^i} \quad (r \geq 2) \quad (\text{A} \cdot 2)$$

と書けることを数学的帰納法により証明する。式(25)

を ω_1 で 2 階微分し $\frac{d\omega_2}{d\omega_1} = -1$ を代入すると,

$$\frac{d^2 \omega_2}{d\omega_1^2} = -\frac{1}{\frac{\partial H}{\partial \omega_2}} \sum_{i=0}^2 (-1)^i C_i \frac{\partial^2 H}{\partial \omega_1^{2-i} \partial \omega_2^i} \quad (\text{A} \cdot 3)$$

が得られるため, 式(A・2)は $r=2$ に對し成り立つ。 $r=k(k \geq 2)$ のとき式(A・2)が成り立つと仮定すると, $r=k+1$ のとき,

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1} \omega_2}{d\omega_1^{k+1}} &= -\frac{1}{\frac{\partial H}{\partial \omega_2}} \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i (C_i + {}_k C_{i-1}) \frac{\partial^{k+1} H}{\partial \omega_1^{k+1-i} \partial \omega_2^i} \\ &\quad - \frac{\frac{\partial^2 H}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} - \frac{\partial^2 H}{\partial \omega_2^2}}{\frac{\partial H}{\partial \omega_2}} \frac{d^k \omega_2}{d\omega_1^k} \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 4)$$

より $({}_k C_{k+1}, {}_k C_{-1}) = 0$ とする), $\frac{d^k \omega_2}{d\omega_1^k} = 0$ であれば,

$$\frac{d^{k+1} \omega_2}{d\omega_1^{k+1}} = -\frac{1}{\frac{\partial H}{\partial \omega_2}} \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i ({}_{k+1} C_i) C_i \frac{\partial^{k+1} H}{\partial \omega_1^{k+1-i} \partial \omega_2^i} \quad (\text{A} \cdot 5)$$

となり, 式(A・2)が成り立つ。従って, 任意の $r(\geq 2)$ について式(A・2)が成立する。

式(25)の等振幅線は, フィルタのハーフバンド性により点 $(\pi/2, \pi/2)$ について点対称となるため, r が偶数のときは $d^r \omega_2 / d\omega_1^r = 0$ が常に成り立つ。よって, 式(27)の条件は式(A・2)を順に用いれば,

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i {}_r C_i \frac{\partial^r H}{\partial \omega_1^{r-i} \partial \omega_2^i} \Big|_{\omega_1=\omega_2=\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (r=1, 3, 5, \dots) \quad (\text{A} \cdot 6)$$

と表すことができる。

2. タップ数の差が 4 の場合の設計法

タップ数を $N_1 \times N_2 = N \times (N+4)$ (N は奇数, $N \geq 5$) とおくと, 独立なインパルス応答の総数 k_N は,

$$k_N = \frac{N^2 + 4N + 3}{8} + \left\lceil \frac{N+1}{4} \right\rceil \quad (\text{A} \cdot 7)$$

と表される。

式(13)より各方向の平坦度を計算すると, 式(31)および条件

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{\frac{N-1}{2}} (N-1) C_{2i} H_{2i, N-1-2i} = 0 \\ H_{0, N-1} = H_{0, N+1} = 0 \end{cases} \quad (\text{A} \cdot 8)$$

が必要となる。式(29), (31)および(A・8)の条件式の総数は $(N^2+31)/8$ と計算され, 更に

$$\frac{4N-28}{8} + \left\lceil \frac{N+1}{4} \right\rceil \quad (\text{A} \cdot 9)$$

本の条件式が必要である。この条件すべてを式(27)に

割り当てると、式(27)の条件が強くなり過ぎ、逆に通過域形状がダイヤモンド形から外れる結果となる。そこで式(36)を参照し、 $N=7$ で変数と条件式の数が一致するように、

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i C_i \frac{\partial^r H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})}{\partial \omega_1^{r-i} \partial \omega_2^i} \Big|_{\omega_1=\omega_2=\frac{\pi}{2}} = 0$$
$$(r=1, 3, 5, \dots, N-4) \quad (\text{A}\cdot 10)$$

を用いる。残りの $[(N-3)/4]$ 本の条件式には種々のものが考えられるが、ここでは式(13)で与えられる平坦度と矛盾しないように、かつ可能な限り高階微係数をゼロに近づけるため、

$$H_{s,N-1-s}=0 \quad \left(s=2, 4, 6, \dots, 2\left[\frac{N-3}{4}\right] \right) \quad (\text{A}\cdot 11)$$

なる条件式を用いる。以上、式(29)、(31)、(A・8)、(A・10)および(A・11)を用いることにより式(A・7)と同数の条件式が得られるため、変数について解くことにより設計が完了する。

3. タップ数の差が6の場合の設計法

タップ数を $N_1 \times N_2 = N \times (N+6)$ (N は奇数, $N \geq 5$) とおくと、独立なインパルス応答の総数 k_N^6 は、

$$k_N^6 = \frac{(N+1)(N+7)}{8} \quad (\text{A}\cdot 12)$$

と表される。この場合には、式(29)、(31)および

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{\frac{N-1}{2}} N-1-C_{2i} H_{2i,N-1-2i}=0 \\ \sum_{i=0}^{\frac{N+1}{2}} N+1-C_{2i} H_{2i,N+1-2i}=0 \\ H_{0,N-1}=H_{0,N+1}=H_{0,N+3}=0 \end{cases} \quad (\text{A}\cdot 13)$$

なる条件、更に式(A・10)を用いる。以上の結果、フィルタ係数を一意的に定めるためには更に $(N-7)/2$ 本の条件式が必要となり、前節と同じように

$$H_{s,N-1-s}=0 \quad (s=2, 4, 6, \dots, N-7) \quad (\text{A}\cdot 14)$$

なる条件式を割り当てる。以上により、式(A・12)と同数の条件式が得られる。

(平成5年10月25日受付、6年3月15日再受付)



吉田 俊之

昭61東工大・工・電子物理卒、平3同大大学院博士課程了。工博。同年より同大工学部電子物理工学科助手。デジタル信号処理・1次元および多次元デジタルフィルタの設計等の研究に従事。



西原 明法

昭48東工大・工・電子物理卒。昭53同大大学院博士課程了。工博。同年より同大勤務。現在、同大工学部電子物理工学科助教授。回路理論、電子回路等の研究、教育に従事。信号処理と信号処理用プロセッサにも興味をもつ。IEEE, EURASIP, ECS

各会員。



藤井 信生

昭41慶大・工・電気卒。昭43東工大学院修士。昭46同博士課程了。工博。同年東工大・工・助手、昭50同助教授、昭63同教授。昭59～60カリフォルニア大学客員研究員。50年度本会米澤記念学術奨励賞、昭57年度本会論文賞受賞。電子回路、回路網理論、能動フィルタなどの研究に従事。著者「アナログ電子回路」、「デジタル電子回路」(昭晃堂)、「Opアンプの基礎と応用」(オーム社)など。電気学会、テレビジョン学会、IEEE各会員。



乾 究

平3東工大・工・電子物理卒。平5同大大学院修士課程了。同年、トヨタ自動車(株)入社。在学中、多次元フィルタに関する研究に従事。