T2R2 東京科学大学 リサーチリポジトリ
Science Tokyo Research Repository

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	非ガウス性不規則励振を受ける振動系の応答解析に関する研究
Title(English)	
著者(和文)	土田崇弘
Author(English)	Takahiro Tsuchida
出典(和文)	学位:博士（工学）, 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:乙第4129号, 授与年月日:2016年4月30日, 学位の種別:論文博士, 審査員:木村　康治,笹島　和幸,髙原　弘樹,天谷　賢治,中尾　裕也
Citation(English)	Degree:, Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:乙第4129号, Conferred date:2016/4/30, Degree Type:Thesis doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

Powered by T2R2 (Science Tokyo Research Repository)

平成27年度　学位論文

非ガウス性不規則励振を受ける振動系の応答解析に関する研究

土田　崇弘

平成28年2月9日

目 次

第 1 章　緒 論 **1**
1.1　緒 言 1
1.2　従来の研究 2
1.2.1　非ガウス性不規則励振のモデル化 2
1.2.2　非ガウス性不規則励振を受ける系の応答解析 8
1.3　本研究の目的と概要 18

第 2 章　帯域幅を考慮した非ガウス性不規則励振を受ける線形系・非線形系の応答分布 **23**
2.1　緒 言 23
2.2　系の運動方程式 23
2.3　非ガウス性不規則励振 25
2.3.1　励振のパワースペクトルと確率密度関数 25
2.3.2　非ガウス性励振の生成方法 29
2.3.3　励振の標本関数 31
2.4　非ガウス性不規則励振を受ける系の応答分布 42
2.4.1　計算方法とパラメータ 42
2.4.2　系の帯域幅に比べて励振の帯域幅が広い場合 43
2.4.3　系の帯域幅に比べて励振の帯域幅が狭い場合 46
2.5　結 言 56

第 3 章　等価非ガウス励振化法を用いた非ガウス性不規則励振を受ける振動系の応答モーメントの解析 **57**
3.1　緒言 57
3.2　解析モデル 58
3.2.1　系の運動方程式 58
3.2.2　非ガウス性不規則励振 58
3.3　等価非ガウス励振化法 59

3.3.1 モーメント方程式 59
3.3.2 等価非ガウス励振化法 60
3.4 計算例 1：対称型励振分布 62
3.4.1 励振分布と拡散係数 62
3.4.2 等価非ガウス励振化法の適用 68
3.4.3 計算パラメータ 70
3.4.4 計算結果 70
3.5 計算例 2：非対称型励振分布 75
3.5.1 励振分布と拡散係数 75
3.5.2 等価非ガウス励振化法の適用 79
3.5.3 計算パラメータ 80
3.5.4 計算結果 81
3.6 等価励振分布 $p_{Ueq}(u)$ ともとの励振分布 $p_U(u)$ の歪度と尖度の比較 . . 83
3.7 結 言 87

第 4 章 最小クロスエントロピー法による非ガウス不規則励振系の応答分布の解析 88
4.1 緒 言 88
4.2 解析モデル 88
4.2.1 系の運動方程式 88
4.2.2 非ガウス性不規則励振 89
4.3 最小クロスエントロピー法を用いた応答分布推定 91
4.3.1 最小クロスエントロピー法による確率密度関数の推定 91
4.3.2 拘束条件の設定 92
4.3.3 先験確率分布 $q(\boldsymbol{x})$ の設定 94
4.4 計算例 96
4.4.1 励振の非ガウス分布 96
4.4.2 計算パラメータ 98
4.4.3 励振分布の情報のみを考慮した $q(\boldsymbol{x})$(式 (4.16)) を用いた場合 . 98
4.4.4 励振帯域幅が狭い時の応答分布に関する情報を考慮した $q(\boldsymbol{x})$(式 (4.17)) を用いた場合 101
4.4.5 励振帯域幅が広い時の応答分布に関する情報を考慮した $q(\boldsymbol{x})$(式 (4.18)) を用いた場合 101

4.5 結 言 106

第 5 章 包絡線分布を用いた狭帯域非ガウス確率過程の生成法 107

5.1 緒 言 107
5.2 狭帯域非ガウス過程のパワースペクトル 107
5.3 生成方法 108
5.3.1 狭帯域非ガウス過程の生成方法 109
5.3.2 包絡線分布を用いた標本関数の生成法 111
5.4 計算例 114
5.4.1 一様分布にしたがう狭帯域非ガウス過程 114
5.4.2 ラプラス分布にしたがう狭帯域非ガウス過程 117
5.4.3 t 分布にしたがう狭帯域非ガウス過程 120
5.4.4 バイモーダル分布にしたがう狭帯域非ガウス過程 125
5.5 結 言 131

第 6 章 結 論 132

第1章　緒 論

1.1　緒 言

現実の機械・構造物系は，地震動や風・波浪荷重など，非周期的で再現性の無い不規則な励振を受け，そのような励振を受ける系の応答もまた不規則に変動する．これらの振動波形は，同一条件下で測定した場合でも，測定するたびに異なるものとなるが，その振動に共通する特徴を確率または統計量に見出すことができる場合がある．そのような振動を解析する際，確定論的な手法では不十分となり，確率論的なアプローチが必要とされるが，これは不規則振動問題と呼ばれ，1950 年代に航空宇宙工学で生じたジェットエンジン周りの音響加振に関連する振動問題に端を発し，現在までに機械工学，土木工学，海洋工学など，様々な工学分野で研究が進められてきた [1]-[5].

不規則振動問題においては，励振と系の応答は一般に確率過程でモデル化される．このとき，従来の多くの研究では，励振はガウス過程としてモデル化されてきた．これはガウス過程の確率的な性質を 2 次までの統計量で完全に記述できるといった取扱いの際の利点や，ガウス分布に近い形状の確率密度関数を有し，非ガウス性の影響を無視できる不規則励振が多く存在するという事実に起因する．また，大振幅励振を受ける系やクーロン摩擦力が作用する系，流体荷重を受ける系などはその復元力や減衰力に顕著な非線形性が現れることが知られているが，ガウス性励振の場合には，線形系だけでなく，そのような非線形系に対しても応答・信頼性解析手法が数多く開発されてきた [1]-[7].

ガウス性励振を扱った研究がこれまで広く行われてきたが，実在する不規則励振の中には，顕著な非ガウス性を示し，非ガウス確率過程として取り扱うことが適当である励振も存在する．これらの非ガウス性励振は，分布の裾が重く，実現値として大きい値をとる確率がガウス性励振と比べて非常に高いものが多い．分布の裾の広がりに関連する大きい実現値の発生確率の上昇は，その励振を受ける機械・構造物の動的挙動や信頼性に大きく影響することが予想されるため，このような励振を従来のようにガウス性と仮定して解析を行っても，設計等に活用可能な正しい解析

結果が得られない可能性がある．そのため，近年，励振の非ガウス性を適切に考慮した系の応答・信頼性解析に関心が高まりつつあり，特に非ガウス性不規則励振が多く観測されている土木工学や海洋工学の分野で研究が増えてきている．

非ガウス性励振は，衝撃荷重に見られる断続的な励振と，時間と共に連続的に変動する励振に分類することができる．従来研究においては，断続的に生じるパルス励振を受ける系に対しては比較的多くの研究が行われている．一方，連続非ガウス性励振の場合については，実在する非ガウス性励振の確率分布特性が非常に多様であり，その一般的な取扱いが難しいことから，未だ十分に研究が行われていない状況にある．

本章では以降，従来研究における非ガウス性励振のモデル化および非ガウス励振系の応答解析手法を概観し，その後，本研究の目的と概要を述べる．

1.2 従来の研究

1.2.1 非ガウス性不規則励振のモデル化

本節では，非ガウス性不規則励振の実例および従来研究における非ガウス性励振のモデル化手法について，断続非ガウス性励振と連続非ガウス性励振に分けて述べる．

断続非ガウス性励振

橋梁に加わる交通荷重 [8] や航空機の尾翼に作用する間欠的な突風励振 [9]，路面の隆起や段差 [10]，船体や海洋構造物が受ける船首底衝撃（Slamming）[11] や流氷衝突力 [12] など，不規則な時刻に発生するパルス列からなる励振は非ガウス性励振の重要なクラスである．このようなランダムパルス励振は多くの場合，ポアソンホワイトノイズまたはポアソンホワイトノイズのフィルタ出力としてモデル化されている．ここで，ポアソンホワイトノイズは，ポアソン過程に従って不規則な時刻に生起する同一の確率分布にしたがう互いに独立なパルスの列であり，複合ポアソン過程の形式的な微分で与えられる [13][14]．また，系は断続的な励振だけでなく，連続的な励振も同時に受ける場合が多いため，そのような同時励振はポアソンホワイトノイズ＋調和励振 [15] やポアソンホワイトノイズ＋ガウス性ホワイトノイズ [16] としてモデル化され，応答解析が行われている．一方，交通荷重などはパルスの到着時刻がポアソン過程に従わない場合があるため，到着時刻がアーラン過程 [17] や

再生過程 [18]，またより一般的な計数過程に従うパルス励振 [19]-[21] もしばしば取り扱われている．

連続非ガウス性励振

時間と共に連続的に変動する非ガウス性励振は多様に存在し，それぞれの確率分布は大きく異なる特徴を有している．例えば，非ガウス性の考慮の重要性が比較的古くから認識されてきた風圧 [22]-[24] や流体力 [25][26] の確率密度関数は，ガウス分布に比べて片裾が大きく広がった形状をしている．また，水深の浅い場所で生じる浅海波は高く鋭い波頂と浅く平坦な波底をもつ非対称なランダム波形を示し，その非対称性は海が荒れるほど強まることが知られている [27]-[29]．走行中の車には，路面の凹凸や段差により，垂直方向に大きな加速度が発生することがあり，その垂直加速度の確率密度は両裾の広がった形状となる [30][31]．これに関連して，貨物の輸送時の安全性を評価するために実施される貨物振動試験において，実測された加速度のパワースペクトルのみが考慮される従来のガウス性振動試験機で発生する波形と．実輸送時に生じる非ガウス性をもつ垂直加速度の波形の間に差異があること，および振動試験の精度向上のための非ガウス性の取扱いの重要性がいくつかの文献で指摘されている [32][33]．裾の重い分布をもつ励振として，他にも超音速航空機に加わる変動圧力 [34] や強地震動 [35] などが報告されている．特徴的な非ガウス性が確認されているその他の例としては，路面凹凸の確率密度関数が二峰性の特徴を有する場合があることが知られている [14][36]．また，ガウス性励振を受ける非線形系の応答は一般に非ガウス性であることが知られているが [1][2][5]，この応答が次の系に入力として作用する場合，その系は非ガウス性の入力を受けることになる．

上記のような非ガウス現象を確率過程でモデル化するために，これまでに様々な手法が提案されてきた．非ガウス過程を数学的に厳密な形で規定するためには，一般に全ての次数の結合確率分布，すなわち任意の時刻の組み合わせに対する結合分布を与える必要がある．しかし，限られた測定データから精度良く得られる情報は低次の相関関数 (等価的にスペクトル)・統計モーメントや，周辺確率密度に制限される．そのため，非ガウス性励振がモデル化されるとき，多くの場合，モデルが，

1) 与えられた周辺確率密度関数とパワースペクトル

または

2) 与えられた 4 次までのモーメント (平均，分散，歪度，尖度) とパワースペクトル

に一致するように構築される．これらの方法の先行研究について，次以降の段落で述べる．また，以上の 2 通りのモデル化手法がよく用いられる一方で，様々なランダム現象の中に強い高次相関の存在が確認されているため [37][38]，3 次以上の相関関数を与えてモデル化する手法も少数ながら提案されている [39]-[41].

1) 非ガウス周辺確率密度とパワースペクトルで規定される確率過程モデル

非ガウス周辺確率密度とパワースペクトルによって規定される確率過程モデルの主要なクラスの 1 つとして，Grigoriu によって提案された translation process がある [42][43]．translation process はガウス過程のゼロメモリ非線形変換によって定義される定常非ガウス確率過程である．入力となるガウス過程のパワースペクトルと非線形変換の構造は，与えられた非ガウス過程の確率密度関数とパワースペクトルにしたがって決定されるが，このとき，それらの解析的な決定は一般に不可能なため，多数回の二重積分を伴う数値計算が必要となる [43]．またこれとは別に，translation process の適用を難しくする問題として，モデル化可能な非ガウス周辺分布とパワースペクトルの組み合わせに制限が存在し，分布とスペクトルを個別に指定できないということがある [43][44]．この問題に対しては，いくつかの異なるアプローチによって，モデル化可能な組み合わせの範囲を広げる研究が行われており，それらの研究に共通する指針は，与えられた分布とパワースペクトルのどちらかまたは両方をわずかに変形し，モデル化可能な組み合わせに近似することである [44]-[48][58][59]．一方，この translation process の方法で与えられた確率過程モデルの長所としては，信頼性評価の際に重要な指標となる閾値通過率を解析的に求められる [42] ことや，多次元の確率ベクトル過程に比較的容易に拡張できる [48][49] ことが挙げられる．

translation process によるモデル化手法は，他の方法と組み合わせることでも用いられている．Yamazaki and Shinozuka は，ガウス過程生成のための代表的なモデルであるフーリエ級数モデル（spectral representation）[50][51] に translation process の方法を組み合わせ，反復計算を行うことによって，与えられた周辺分布とパワースペクトルにしたがう非ガウス標本関数を生成する手法を開発した [52]．その後，この方法は多変数多次元非ガウス確率ベクトル場の生成の場合にも拡張されており [53]，現在，その改良法を含め，不規則振動分野で最も広く応用されている．しかし，この方法は与えられた分布が強い非ガウス性をもつとき，その分布にしたがう確率過程を生成できない，あるいは生成可能な場合でも多くの反復計算が必要となるという問題がある [54]．そのため，この問題を解決し，広いクラスの分布にしたがう確率過程の効率的な生成を可能とするための手法の改良が現在進められている [54]-[59].

また，非ガウス性の強さだけでなく，対象とするパワースペクトルの形状も生成計算時の計算量に関係しており，地震動などにしばしば見られる複雑な形状をもつパワースペクトルに対しては計算コストの観点から適用が難しいことが示唆されているが [44][54]，現在，これについては詳細には調べられていない．translation process の拡張のその他の取り組みとしては，自己回帰モデルを組み合わせた方法の提案 [60] や，translation process によって非定常非ガウス過程をモデル化するための研究も行われている [61][62].

与えられた非ガウス周辺分布とパワースペクトルにしたがう確率過程のモデル化手法のもう 1 つの主要なクラスとして，確率微分方程式を用いるものがある．このとき，その確率過程はマルコフ過程となるため，不規則振動問題に応用する際に，その性質を利用した解析手法を用いることができる．これは，確率微分方程式モデルのもつ，上で述べた translation process モデルなどに対する有利な点と言える．また，標本関数の生成時に，他の多くの手法と異なり，反復計算を必要としないため，効率的に所望の非ガウス過程を生成することができる．

Kontrovich and Lyandres は，周辺確率密度と指数減衰型自己相関関数にしたがう非ガウス過程を，ガウス性ホワイトノイズを入力とする 1 次元非線形フィルターを用いてモデル化する手法を開発した [63]．この手法では，フィルターの式中に含まれるドリフト係数と拡散係数は，与えられた非ガウス分布と相関時間をもとに決定される．このとき，拡散係数が定数で与えられるため，標本関数を数値的に生成する際，常微分方程式の数値解析で用いられる高次精度の計算法を使用できる点が長所である．一方，短所としては，ドリフト係数と拡散係数を決定する際に近似が含まれるため，モデル化された確率過程の分布・自己相関関数が一般にターゲットに一致しないことが挙げられる．また，より一般の自己相関関数にしたがう非ガウス過程 $x(t)$ を，上記の方法でモデル化された非ガウス過程 $s(t)$ と任意の自己相関をもつガウス過程 $n(t)$ の積で与える方法も提案されたが [64]，この方法の中で行われる $x(t)$ の分布から $s(t)$ の分布を決定する手続きが難しく，また $s(t)$ のモデル化の際に上述の近似が含まれるため，$x(t)$ のモデルの分布・自己相関関数とターゲットの間には誤差が生じる．

Cai and Lin もまた，ターゲットの非ガウス分布とパワースペクトルの情報をもとに決定される確率微分方程式を用いて，非ガウス確率過程をモデル化する手法を提案した [65]．この方法では，ドリフト係数と拡散係数の決定時に近似が含まれないため，ターゲットの情報を正確に反映したモデルが得られる．また，実在の不規則

励振にも多く見られる狭帯域スペクトルをもつ非ガウス過程の記述が，前段落で述べた文献 [64] の方法に比べて容易なことも利点である．この狭帯域非ガウス過程を表すために用いられる 2 次元の確率微分方程式の拡散係数を決定する際，与えられた非ガウス分布を周辺分布にもち，加えて Fokker-Planck 方程式から導かれる条件を満たす 2 変数の結合確率分布を見つける必要がある．しかしながら，これまでの先行研究 [65]-[67] では，数例の非ガウス周辺分布に対応する結合分布が示されているのみで，結合分布を求めるための一般的な方法が示されておらず，これが実際の不規則振動問題への応用を難しくしている．そのため，上記の条件を満たす結合確率分布を得る方法の開発は，このモデルを多様な非ガウス分布をもつ狭帯域励振に応用するための重要な課題となっている．

非ガウス周辺分布とパワースペクトルで規定される確率過程の他のモデル化手法としては，マルコフ連鎖モデル [68]，振幅と周波数が確率変数で与えられる spectral representation モデル [69]，Karhunen-Loeve 展開モデル [70]-[72]，多項式カオス展開モデル [73]-[76] などがある．以上に挙げたような方法により，近年では，多次元・非定常な場合を含めた様々な非ガウス過程のモデル化が可能となってきているが，いずれの方法もモデル化可能な確率分布・パワースペクトルの範囲に制限がある，あるいはモデルの構築時に過大な反復計算が要求されるなどの問題を有している．そのため，実在する様々な非ガウス性をもつ励振のモデル化に応用可能な簡便かつ効率的な手法の開発が現在も進められている．

2) 4 次までのモーメントとパワースペクトルで規定される確率過程モデル

次に，4 次までのモーメントとパワースペクトルによって規定される確率過程モデルの先行研究を紹介する．ガウス過程のゼロメモリ非線形変換に基づく方法が広く提案されてきた．Gurley et al. は，Winterstein によって与えられたエルミート多項式モデル [77] を用いてモデル化する手法を開発した [78]-[80]．ここで，エルミート多項式モデルに含まれるパラメータは，モデルが与えられた歪度と尖度にしたがうように決定され，また，パワースペクトルを合わせるために反復計算が行われる．モデル化可能な歪度・尖度の範囲はエルミート多項式モデルのパラメータの決定式に依存しており，その決定式としていくつかの形が提案されている [24][78][81]．Iyenger and Jaiswal もまたエルミート多項式を利用し，上とは別のモデルを提案した [82]．このモデルでは，パワースペクトルを反復計算せずに正確に合わせることができるが，歪度と尖度に関する適用可能範囲が明らかでない．上記の方法はいずれも非線

形変換の構造をエルミート多項式を用いて与えているが，所望の歪度・尖度を実現する変換は一意ではなく，様々な変換式が考えられる．文献 [83] では，他の変換式が数例示されている．

ガウス過程の非線形変換を使用しない方法としては次のようなものがある．Li and Li は，残差項を非ガウス性ホワイトノイズで与えた AR・ARMA モデルを用いる方法を開発した [84]．AR または ARMA モデルの係数は与えられたパワースペクトルに基づいて決定され，非ガウス性ホワイトノイズの歪度と尖度は，出力の歪度と尖度がターゲットに一致するように決められる．この際，モデル次数の適切な選択も重要となるが，その次数の決定に曖昧さがあることがこの方法の欠点であると述べられている．Poirion は，ポアソンホワイトノイズが入力される線形フィルタを用いたモデルを提案した [85]．モデル化可能なモーメントの組合せに強い制約が存在することが欠点であるが，その制約を満たすとき，既知であれば 4 次より高い次数のモーメントの情報も考慮したモデルを得ることができる．Steinwolf は，spectral representation モデルを応用し，任意のパワースペクトルと尖度にしたがう確率過程（ただし歪度 0）を生成する手法を開発した [86]．従来，spectral representation モデルはガウス過程の生成に用いられ，このときそのモデルに含まれる全ての位相角は一様確率変数で与えられる．一方，提案された手法では，位相角の一部を拘束条件を満たす確定値とし，残りを一様確率変数とすることで，所望の尖度をもつ確率過程の生成を実現している．Seong and Peterka[87] と Kumar and Stathopoulos[88][89] もまた同様の方法を提案しているが，これらの方法は歪度が非ゼロの場合にも適用できる．また Steinwolf の方法とは位相角の決定法が異なり，文献 [87] では exponential autoregressive peak generation model 法，文献 [88][89] では exponential peak generation model 法と呼ばれる手法をそれぞれ用い，反復計算によって位相角を決定している．その後，Wu は，文献 [87]-[89] の方法の歪度と尖度に関する適用可能範囲が狭いことを指摘し，改良法を提案している [90]．以上で挙げたもの以外の方法については，文献 [91] で広く取り上げられている．

4 次までのモーメントによる規定は，1) の確率分布による規定に比べて容易にモデル化が達成される場合が多く，風・波荷重のように，歪度と尖度によって，その非ガウス性の特徴が良く捉えられる励振のモデル化の際に適している [23][24]．しかし，確率分布形状が複雑 (例えば多峰分布) な場合や，分布形状，特に裾の正確な再現が重要となる場合には，4 次までのモーメントだけでは情報が不足し，応答・信

頼性解析に用いることのできる有効なモデルが得られない可能性がある．そのような場合には，モーメントに比べてより多くの情報をもつ確率密度関数を与える 1) の規定法を用いる必要がある．

これまでに述べた 2 つの規定方法を採用した非ガウス過程モデルが多いが，これ以外にもいくつかのモデルが存在する．最後にそれらを紹介する．一つは，定数の振幅と平均振動数をもち，位相がウィーナー過程で与えられる正弦波モデルである [66][92]．このモデルは 1 つまたは複数のピークをもつパワースペクトルを有する非ガウス過程を容易に記述できるが，その確率密度の形状は固定のため，与えられた分布やモーメントを持つように調整することができない．そのため，励振のモデル化の際に，その非ガウス性の正確な特徴付けが重要となる場合には用いることができない．風荷重や波力を受ける系の応答解析時には，それらの励振のモデルとして，ガウス過程の多項式が広く用いられている [93]-[98]．その理由は，流体速度が系の速度に比べて十分に速いとき，系が受ける抗力が流体速度 (多くの場合，ガウス過程でモデル化される) の二乗に比例することや，波高が高いとき，波により生じる不規則転倒モーメントがガウス過程の多項式で良くモデル化されるためである．このモデルでは，ガウス過程の性質を利用できるため，解析的な取扱いが他の励振モデルに比べて容易であるが，確率分布やパワースペクトルの詳細な規定を行うことは一般にできない．したがって，これを非ガウス性励振の汎用的なモデルとして用いることは難しい．また，海洋構造物に作用する波力のモデルとしては，流体粒子の速度・加速度で決まる線形慣性力項と非線形抗力項の和で表される Morison 型波力モデルがよく用いられている [25][99]-[103]．

1.2.2　非ガウス性不規則励振を受ける系の応答解析

本節では，前節で示したような形でモデル化された非ガウス性励振を受ける系の応答解析手法について，断続非ガウス性励振と連続非ガウス性励振に分けて述べる．

断続非ガウス性励振

1) 線形系の応答解析

ポアソンホワイトノイズを受ける系に対しては，これまで様々な応答解析手法が提案されてきた．Roberts は，ポアソンホワイトノイズを受ける 1 自由度線形系を扱

い，応答キュムラントを求める方法 [13] と，Edgeworth 級数 [10] または saddle point approximation[104] によって応答分布を近似的に求める方法を示した．解析結果から，系の固有振動数とパルスの期待到着率の比が大きいほど，加えて系の減衰比が大きいほど，応答の非ガウス性が強まることが明らかとなった．また，変位と速度の結合キュムラントと Gram-Charlier 級数を用いて，変位・速度の結合応答分布と閾値通過率も求められた [105]．応答のキュムラントについては，文献 [13] 以外の方法として，その時間発展を支配する微分方程式から求める方法も Hu によって提案されている [106]．高次キュムラントを求める際には，この方法を用いることで，煩雑な積分計算が必要となる文献 [13] の方法よりも容易に解が得られる．Lutes and Hu は，ポアソンホワイトノイズまたはその線形フィルタ出力を受ける線形系の定常応答分散・尖度を，2 次と 4 次の応答のスペクトルを用いて導出した [107]．計算例では，系とフィルタの固有振動数比の変化に対する応答尖度の変化が調べられ，(i) 固有振動数比が大きいとき，系が準静的となり，応答尖度が励振尖度に近い値となること，(ii) 固有振動数比が 0 に近いとき，系は本質的に励振の白色部のみを受けるため，応答尖度は 0(ガウス性) に近い値となることが示された．Muscolino[108] と Grigoriu and Waisman[109]，Di Paola[110] は，ポアソンホワイトノイズの線形フィルタ出力の多項式励振を受ける線形系に対して，モーメント方程式を導出し，応答モーメントの厳密解を求める方法を提示した．また，パルスの平均到着率の増加と共に，励振がガウス性ホワイトノイズに近いものとなるため，応答がガウス性に近付くことが解析結果を用いて示された [108][109]．これに加えて，文献 [109] では，パルスの平均到着率に依らず，系の減衰比または固有振動数が 0 に近付くにつれて，応答の歪度と尖度がガウス分布の歪度と尖度に近付くことが示され，この変化傾向が，非ガウス性入力を受ける線形系の応答がガウス性となる必要条件を定義する Rosenblatt の定理 [14] に一致することが言及された．モーメント方程式を用いるこの解析手法は，後に，摂動法を組み合わせることによって，同じ励振を受ける非線形系の場合にも拡張された [111][112]．多自由度線形系については，Muscolino and Ricciardo が，モーメント方程式と Gram-Charlier 級数を用いて応答分布を求めた [113]．また，ポアソンホワイトノイズの線形フィルタ出力を受ける多自由度線形系の応答モーメントを，モード解析の方法を用いて効率的に計算する方法が，Di Paola and Falsone によって提案された [114]．連続体に関しては，交通荷重を受ける橋梁のモデルとして，ポアソン過程に従いランダムに到着し，一定速度で移動する点荷重を受ける梁の応答解析が行われた [115][116]．そして，応答の歪度と尖度の解析結果を用いて，系の減衰比の増加と点荷重の到着率の減少が応答の非ガウス性を増加させることが

示された．また点荷重の移動速度と応答統計量の関係も調べられており，移動速度の変動係数が応答の平均と標準偏差に大きな影響を与えること [8] や，移動速度と応答の歪度・尖度の間には単調な関係が無く，移動速度がある値のときに応答尖度・歪度が最大となることが明らかにされた [116].

2) 非線形系の応答解析

非線形系に対しては，従来，ガウス性励振の場合に適用されてきた手法がポアソンホワイトノイズ励振の場合に拡張されて応答解析が行われている．解析手法の例として，等価線形化法 [117]-[119]，確率平均法 [120]-[123]，cumulant-neglect closure[124]-[126]，モーメント方程式と混合ガウスモデルを組み合わせた方法 [127] が挙げられる．これらの手法は，Duffing 系 [117][119][120][124]-[127]，ヒステリシス系 [118][123]，van der Pol 振動子 [121]，Rayleigh 振動子 [121]，冪型非線形減衰をもつ系 [121]，衝突を伴う系 [122] など，多様な非線形系かつパルスの到着率と振幅分布を様々に変化させた場合に適用され，その有効性が検証されている．

3) パラメトリック励振系の応答解析

Di Paola and Falsone は，任意の次数の相関関数がデルタ関数の積で表される non-normal delta-correlated process をパラメトリック励振の形で受ける系について，ガウス性ホワイトノイズ励振の場合の Wong-Zakai の修正項に対応する項を導出し [128][129]，non-normal delta-correlated process の代表例であるポアソンホワイトノイズの場合について，いくつかの応答解析例を示した [130][131].

4) Kolmogorov-Feller 方程式の解法

ポアソンホワイトノイズを受ける系の応答分布を支配する方程式は，generalized Fokker-Planck-Kolmogorov 方程式または Kolmogorov-Feller 方程式と呼ばれる．この方程式の厳密解は，非常に限られたクラスの非線形系に対してではあるものの，Vasta[132] と Proppe[133] によって求められた．厳密解が得られない系については，摂動法 [134] や経路積分法 [12][135]-[137]，確率分布の関数形を仮定してその未知パラメータを決める方法の 1 つである exponential-polynomial closure[138]-[141]，また Kolmogorov-Feller 方程式の Mellin 変換から導かれる方程式を解くことで得られる複素分数次モーメントから応答分布を復元する方法 [142][143] など，様々な近似解法が提案されている．

2)〜4) で取り上げた文献 [117]-[143] の研究は解析手法の提案及びその妥当性の検証に主眼が置かれているため，応答特性に関する考察は多くないが，いくつかの文献では，同じ強度を持つガウス性ホワイトノイズとの比較が行われ，パルス励振が応答分布の裾を大きく広げる効果を有することが示されている [120][122][135][138][139]. また，初めに文献 [134] で，その後に文献 [120] において，(i) パルスの期待到着率と系の緩和時間の積がパルス励振の非ガウス性を評価する尺度に適していることや，(ii) パラメトリック励振系の場合，応答の非ガウス性に及ぼす励振の非ガウス性の影響が，外部励振系の場合に比べてはるかに小さいことが述べられた.

5) 信頼性解析

ポアソンホワイトノイズを受ける系の信頼性解析を行った研究は，現在のところ，それほど多くない．Koyluoglu et al. は，状態空間上に安全領域の境界が課された Kolmogorov-Feller 方程式を経路積分法で解くことによって，ポアソンホワイトノイズを受ける非線形系の信頼度関数と初通過時刻の確率密度を求めた [135]．また，文献 [144][145] では，モンテカルロ・シミュレーションにより初通過破壊確率が計算され，パルス強度が一定の条件下では，パルスの平均到着率が低いとき，同じ強度をもつガウス性ホワイトノイズに比べて，系の破壊確率が大きくなることが確認された.

6) 同定問題

Roverts and Vasta は，ポアソンホワイトノイズを受ける線形系を対象とし，系のパラメータと励振の 2 次と 4 次の強度パラメータを，系の応答時刻歴から計算されるパワースペクトルと 4 次のスペクトルを用いて同定する手法を提案した [146].

7) ポアソンホワイトノイズとガウス性ホワイトノイズの同時励振系の応答解析

実際の系は連続的な不規則励振と断続的な不規則励振を同時に受ける場合が多いため，それらの励振の代表的なモデルであるガウス性ホワイトノイズとポアソンホワイトノイズを同時に受ける系の応答解析が近年増えている．系の応答分布を求めるために，応答の特性関数の支配方程式を有限差分法で解く方法 [147]，確率平均法 [148]-[151]，経路積分法 [16]，exponential-polynomial closure[152]，モーメント方程式と混合ガウスモデルを組み合わせる方法 [153] などが提案されている.

8) ポアソンホワイトノイズ以外の不規則パルス励振を受ける系の応答解析

1) 線形系の応答解析の最後で述べた交通荷重を受ける橋梁の問題において，交通量が多い場合には，車両の到着に相関が見られ，独立到着の仮定を置くことができない [155]．この例のように，実際にはパルスの到着時刻がポアソン過程に従わない状況が存在するため，指数分布以外の到着時間間隔分布を考慮可能な再生過程に従う，あるいはパルス到着の相関性が考慮されたより一般の計数過程に従う場合の研究が，ポアソンホワイトノイズの場合に比べて数は少ないものの，いくつか報告されている [17]-[21][154]-[158].

以上のように，断続非ガウス性励振の場合ついては，その主要なモデルであるポアソンホワイトノイズや，パルスの到着時刻がより一般的な計数過程に従う励振を受ける種々の系に対して，応答解析手法の開発・拡張がこれまでに広く研究され，期待到着率や振幅分布などのパルスの性質と応答特性の関係が調べられてきた.

連続非ガウス性励振

使用された励振モデルごとに分けて述べていく.

1) 非ガウス周辺確率密度とパワースペクトルで規定される励振モデル

Cai and Suzuki[159] と Cai and Lin[160] は，文献 [65] で提案された確率微分方程式モデルで表される励振を受ける非線形系に対して，等価線形化法を用いて応答モーメントを求める方法を提案した．この方法は，同じ励振を受ける線形系の任意の次数の応答モーメントがモーメント方程式から厳密に得られることを利用したもので，従来の等価線形化法のように応答のガウス性の仮定を行う必要が無いため，非線形性が強い系かつ強い非ガウス性をもつ励振に対しても精度良く応答モーメントを求められる．しかし，この手法は励振分布がある限られたクラスに属する場合のみ適用可能であり，一般の非ガウス分布にしたがう励振を受ける系には適用することができない．Wu and Cai は，同じモデルで記述される励振を受ける非線形系の応答分布をモンテカルロ・シミュレーションによって求め，励振分布の違いが応答分布に与える影響を調べた [161]．計算結果から，(i) 励振分布は系の過渡応答に大きな影響を及ぼし，応答が定常に近づくときその影響は弱まること，(ii) 励振分布の影響は系の非線形性が強いほど顕著なこと，(iii) 励振分布が二乗平均応答に与える影響は

応答分布形状に与える影響に比べて小さいことが示された．これらの観察結果は励振帯域幅が系の帯域幅に比べて十分に広い場合のものであり，励振帯域幅が狭い場合については未だ明らかになっていない．

Gioffre and Gusella は，多自由度系の応答の歪度，尖度および確率密度を有限要素法とモンテカルロ・シミュレーションで求め，系が非線形性を有するとき，線形系に比べて，応答に与える励振の非ガウス性の影響が大きくなる場合があることを示した [162]．しかし，文献中には計算に用いた励振帯域幅の値が示されていないため，このような傾向がいずれの励振帯域幅でも現れるかは明らかでない．

Grigoriu は，同じ非ガウス分布とパワースペクトルで規定される励振を異なる 2 つの方法でモデル化し，それらの励振モデルを入力とする系の応答シミュレーションを行った [163]．そして，たとえ励振モデルが同じ非ガウス分布とパワースペクトルを有していても，モデル化手法の違いによって，応答の歪度や尖度また確率密度関数に差異が生じることを計算結果を用いて示し，選択する励振モデルによっては，応答の不正確な予測に繋がりうることに言及した．

2) 4 次までのモーメントとパワースペクトルで規定される励振モデル

この励振モデルは，非ガウス性風荷重自体の特徴を明らかにする研究 [22][164][165] や，非ガウス振動試験機の開発を目的とした研究 [30][32][166] などで多く用いられているが，応答解析の先行研究はそれほど多くない．

Gong and Chen は，風荷重をエルミート多項式モデル [39] によって表し，非ガウス性風荷重を受ける風力タービンの応答特性に関する包括的な調査を行った [167]．ガウス性励振の場合に比べて，応答分布の裾が広がることや極値応答が非常に大きくなることなどを多数のシミュレーション結果を用いて示し，安全性・信頼性の高いタービンの設計のためには，風荷重の非ガウス性の考慮が重要であることを述べた．Steinwolf and Ibrahim は，Steinwolf が提案した spectral representation を応用した励振モデル [86] を用いて，線形系のモンテカルロ・シミュレーションを実施し，次のような知見を得た [168]．(i) 系の減衰比が大きいとき，励振の非ガウス性の影響が応答に強く現れ，応答分布の裾が広がる．(ii) 系の減衰比が小さいとき，応答分布はガウス分布に近くなる．(iii) 広帯域励振のとき，励振尖度のガウス分布尖度からの小さな変化が応答尖度を大きく変化させ，応答分布は励振分布に比べて広い裾をもつ．

3) ガウス過程の多項式で与えられる励振モデル

次に，最も多くの研究が行われてきたガウス過程の二乗または多項式で与えられる励振を受ける系の応答解析を取り上げる．Kotulski and Sobczyk は，非ガウス性励振を受ける線形系の応答がガウス性となる必要条件を示した Rosenblatt の定理が減衰を含む線形系には適用できないことを述べた上で，減衰を含む非ガウス励振系の応答解析を行った [169]．具体的には，指数減衰相関関数をもつガウス過程の二乗で与えられる励振を受ける線形系の応答の歪度と尖度を解析的に求め，系と励振のパラメータとの関係を定量的に評価した．解析結果を通して，(i) 線形系は，いずれのパラメータをもつ場合でも,「ガウス化」の効果をもつこと，(ii) 系と励振のパラメータとして実際の車のサスペンションと路面を考慮した値を用いたとき，応答は強い非ガウス性を示すため，この状況では，従来用いられてきた系の応答のガウス近似が不適当であることを示した．

Grigoriu は，ガウス過程をランダム位相をもつ調和関数の和で表し，その二乗で与えられる風励振モデルを受ける線形系の応答の分散と周辺分布を解析的に求めた [93]．さらに，応答をガウス過程のゼロメモリ非線形変換で与えられる translation process[42] として表すことで，応答の平均閾値通過率を近似的に得た．また，同様の系の応答の平均閾値通過率を近似的に求めるためのいくつかの方法が，Buss and Grigoriu によっても開発されている [94]．Winterstein and Kashef もまた，風力を受ける構造物をモデル化した同様の系を扱った [170]．この文献では，応答を分散・歪度・尖度の情報をもとにエルミート多項式モデルで表すことで応答分布を求め，歪度・尖度の大きい非ガウス性の強い応答分布も正確に得られることを示した．その後，このエルミート多項式モデルを用いて，同じ系の初通過破壊確率も求められている [171]．Benfratello et al. は，風速をホワイトノイズを受ける 1 自由度線形系の速度応答と定数で与えられる平均風速の和でモデル化し，その風速の二乗で表される風力に対する線形系の 4 次までの応答モーメントを，モーメント方程式を用いて厳密に求めた [95]．そして，系と励振のパラメータ変化に対する応答モーメントの変化傾向について，以下のような観察結果が述べられた．(i) 系の固有振動数の増加とともに，応答の分散，歪度，尖度は増加する (非ガウス性が強まる)．(ii) 系の減衰比の増加とともに，応答の分散は減少する一方，歪度と尖度は増加する．(iii) 平均風速の増加 (＝励振のガウス性と強度の増加) とともに，応答の分散は増加する一方，歪度と尖度は減少する (非ガウス性が弱まる)．また，Gullo et al. は，同じ系を対象とし，4 次までのモーメント方程式と C-type Gram-Charlier 級数を用いて応答分布を近似的に求め，正確な結果が得られることを示した [96]．一方で，A-type Gram-Charlier

級数を用いた場合には，6 次まで考慮しても，不正確かつ負の値をもつ分布しか得られないことも述べられた．Gusella and Materazzi もまた，Gram-Charlier 級数によって応答分布を表し，その応答分布をもとに応答の極値分布が求められた [172][173]．ここで，Gram-Charlier 級数の係数は，応答のパワースペクトルとバイスペクトルを用いて決定された．

Grigoriu and Ariaratnam は，ガウス性ホワイトノイズの線形フィルタ出力の多項式励振を受ける 1 自由度線形系を対象とし，その応答モーメントをモーメント方程式から厳密に求める方法を示した [174]．さらに得られた応答モーメントをもとに，既存の複数の方法を用いて応答の平均閾値通過率を近似的に求め，計算例での比較により，translation process の方法による結果が最も妥当であることを示した．同じ系の応答分布と平均閾値通過率は，Panday and Ariaratnam によって，最大エントロピー法からも求められた [175]．その後，Grigoriu and Field は，多自由度系となった場合の応答の平均，自己相関関数，高次モーメント，周辺分布，平均閾値通過率を求める方法を提案し，乱流境界層内の変動圧力を受ける平板の応答解析を通して，その有効性を示した [176]．また，系が非線形系となった場合には，等価線形化法を用いた反復計算によって応答モーメントを求める方法が，Di Paola and Floris により開発された [177]．

Jensen は，非ガウス性波力を受ける海洋プラットフォームを，ガウス過程の多項式励振を受ける 1 自由度線形系でモデル化し，その応答の極値を 2 つの異なる方法：準静的な解法と，モーメント方程式を用いた動的解析法によって求めた [97]．波浪の卓越周期を変化させながら両手法を適用し，それぞれの手法の有効性が検証された．また，波力と応答間の歪度比と尖度比も調べられ，応答が波力に比べてガウス性に近いことが観察された．

Sobiechowski and Socha は，1. ガウス過程の多項式，2. Iyenger and Jaiswal のエルミート多項式モデル [82]，3. ポアソンホワイトノイズ，4. 到着時刻がアーラン過程にしたがうパルス列の計 4 通りの励振を考え，それぞれの励振を受ける Duffing 系の分散を等価線形化法を用いて求める際の等価線形係数の適当な決定法について調べた [178]．4 通りの係数決定法が比較検討され，励振モデルの違い，特に連続励振か断続励振かの違いによって適当な決定法が異なることが述べられた．Nichols et al. は，系の非線形性の検出に主眼を置いた研究として，ガウス過程の多項式入力を受ける非線形系の応答のバイスペクトルを，Volterra 級数展開の方法を用いて導出し，入力の多項式に含まれる係数を変化させることで，系の二次非線形性の検出に適した入力確率密度を調べた [179]．

4) 位相がウィーナー過程で与えられる正弦波によって表される励振モデル

位相がウィーナー過程で与えられる正弦波励振モデル [66] を扱った研究は，Hou et al. によって多く行われ [180]-[184]，その中では，励振振幅にも擾乱が含まれる場合 [181] や，励振の位相と振幅の擾乱間に相関がある場合 [183] などの発展的な内容も扱われた．いずれの文献でも，モーメント方程式から導出した応答尖度と系・励振のパラメータの関係が調べられ，次の変化傾向などが示された．(i) 応答尖度は，励振の位相と振幅の擾乱のいずれの強度も大きいとき 0(ガウス分布) に近い値となり，いずれの強度も小さいとき -1.5(確定正弦波) に近い値となる．(ii) 系の減衰比が小さいほど，応答尖度は 0 に近づく．(iii) 系の固有振動数と励振の平均振動数の比が 1 に近い共振点付近のとき，尖度の意味で応答の非ガウス性が強くなる．最も非ガウス性の強くなる振動数比は，励振の位相と振幅の擾乱が無相関のとき 1 であり，擾乱間に相関があるとき 1 からわずかに変化する．(iv) 励振の位相と振幅の擾乱間の相関について，正の相関が強いほど，応答の非ガウス性が強くなる．

5) Morison 型波力モデル

波力を受ける海洋構造物の応答解析の際に用いられる．Moshchuk and Ibrahim は，Morison 型波力を受ける線形系の応答分布を確率平均法と分布の直交多項式展開の 2 つの方法で求め，波力モデルに含まれる非線形抗力によって，応答分布の裾が狭まる傾向があることを示した [25]．Zheng and Liaw は，高次キュムラント関数を用いて線形系の応答の歪度と尖度を求め，観測データを反映した計算例によって，応答の非ガウス性が励振の非ガウス性に比べて弱いことを示した [26]．この解析の中で励振の高次相関関数を導出する際，非線形抗力は三次多項式で近似的に置き換えられたが (statistical drag cubicization)，この手続きにより，非線形抗力を絶対値が含まれない形式で表すことができ，解析が容易となるため，他の文献でもしばしば用いられている [185]-[187]．Koliopulos は，高次キュムラント関数を用いて評価した応答の歪度と尖度をもとに，応答分布，平均閾値通過率，ピーク値の分布関数を近似的に求めた [103]．このとき，励振の高次キュムラント関数を自己相関関数の積で記述できるという仮定のもとで解析が行われ，その仮定が励振の非ガウス性が弱いとき妥当であることが述べられた．Hu and Muin は，高次スペクトルの理論とモンテカルロ・シミュレーションを組み合わせ，応答尖度と系の固有振動数の関係を調べた [101]．文献 [146] では，系の応答時刻歴から計算されるパワースペクトルと 4 次のスペクトルを用いて，Morison 型波力モデルのパラメータ同定が行われた．

連続非ガウス性励振を受ける系に関する課題

実在する連続非ガウス性励振は様々な非ガウス分布特性を有しているため，それに対応して多くのモデルが存在する．そのため，現在のところ，風工学や海洋工学の分野を中心に，対象とする励振現象を良く表すことのできるモデルを用いて個別に応答解析が行われているが，これまでの先行研究で報告された応答特性を比較すると，いくつかの類似した性質を確認することができる．したがって，励振の非ガウス性の違いによって，個々の励振に対する応答の特徴はそれぞれ異なるものの，それらの中には共通する一般的な性質が存在することが予想される．しかし，連続非ガウス性励振を受ける系の一般的な応答特性については未だ十分に明らかになっていない．

励振モデルの多様性や，ガウス性励振あるいは断続励振の代表モデルであるポアソンホワイトノイズに比べて解析的な取扱いが一般に煩雑となるなどの理由により，連続非ガウス性励振の場合には，汎用的な応答解析手法の開発もまた十分に進んでいない．これまでに提案された解析手法については，それぞれの問題で考慮される特定の非ガウス性励振の場合のみに適用可能で，励振の非ガウス性の特徴が異なるとき用いることが困難となるものが多い．

応答解析の際には，励振モデルの適切な選択もまた重要となる．Cai and Lin が提案した確率微分方程式モデル [65] は，様々な非ガウス分布を対象とすることができ，また励振がマルコフ過程で表されるため，その性質を利用して応答解析を行うことができる．さらに，モデルの構築時に近似が含まれず，与えた非ガウス分布とパワースペクトルの情報を正確に反映したモデルが得られることも他のモデルに対する利点である．しかし，狭帯域型スペクトルをもつ非ガウス性励振をモデル化する際，与えた非ガウス分布を周辺分布にもち，加えて Fokker-Planck 方程式から導かれる条件を満たす 2 変数の結合確率分布を見つける必要があるが，現在，その結合分布を求めるための一般的な方法が示されておらず，実在する多様な非ガウス分布をもつ狭帯域励振への応用を困難にしている．

以上のような背景から，多様な非ガウス分布特性をもつ励振を受ける系に広く適用可能な応答解析手法，および Cai and Lin モデルにおいて上述の結合分布を求める方法の開発を行うこと，また，応答解析の結果を用いて，励振の非ガウス性に起因して現れる一般的な応答特性を調べ，整理することは，連続非ガウス性励振を受ける種々の機械・構造物の安全性や信頼性の向上に繋がる重要な課題と考えられる．

1.3 本研究の目的と概要

本研究では，連続非ガウス性不規則励振を受ける振動系を対象とし，

1. 励振の非ガウス性によって現れる一般的な応答特性を調べる
2. 様々な非ガウス分布をもつ励振を受ける振動系に広く適用可能な応答解析手法を提案する
3. Cai and Lin モデルを応用した狭帯域非ガウス確率過程の生成手法を提案する

ことを目的とする．以下に，2 章以降で行う研究の概要を示す.

第 2 章：帯域幅を考慮した非ガウス性不規則励振を受ける線形系・非線形系の応答分布

非ガウス性不規則励振を受ける線形系と非線形系の定常応答分布をモンテカルロ・シミュレーションによって求め，その応答分布に現れる一般的な傾向について調べる．本研究では 3 章以降を含め，様々な非ガウス性をもつ励振を広く対象とするため，4 次までのモーメントではなく，非ガウス確率密度関数とパワースペクトルの 2 つによって励振を規定する．また，そのモデル化手法として，Cai and Lin により示された確率微分方程式によって表す手法を用いる．先に述べたように，この方法で励振モデルを構築する際，近似が含まれないため，与えた分布やパワースペクトルの情報を正確に反映したモデルが得られ，また，励振がマルコフ過程として記述されるため，その性質を利用した解析手法を考えることができる．したがって，2 章で行うモンテカルロ・シミュレーションだけでなく，3 章以降で行う応答解析の際にも適していると考え，このモデルを採用することとした.

2 章では，応答に現れる励振の非ガウス性の影響が明確となるように，また非ガウス性の異なる励振に対する応答に共通の傾向を見出すために，シミュレーションに用いる励振の非ガウス分布として，ガウス分布とは形状が大きく異なり，さらに互いの分布形状にも明瞭な差があるバイモーダル分布とラプラス分布の 2 種類を用いる．励振のパワースペクトルついては，実在する多くの不規則励振が顕著な周波数依存性を有する狭帯域過程であるため，そのパワースペクトルがもつ 2 つのパラメータである卓越振動数と帯域幅の両方を考慮することが重要であると考えられる．しかしながら，現在，励振帯域幅の変化に対する応答の変化傾向も十分に明らかでないため，本研究では，帯域幅のみに着目し，励振帯域幅と応答分布特性の関係を調べる．このとき，帯域幅のみをパラメータにもつパワースペクトルを与え，その

帯域幅が系の周波数応答の帯域幅に比べて広い場合から狭い場合まで幅広く考慮する．また，系については，線形系に加えて，Duffing 系と非対称非線形系を扱う．与えた非ガウス確率密度関数とパワースペクトルにしたがって Cai and Lin により与えられた確率微分方程式モデルを構築し，それを数値的に解くことで，励振の標本関数を生成する．そして，生成した励振標本を使用して，系の応答分布を数値計算によって求め，励振の非ガウス性と帯域幅および系の非線形性が応答分布に与える影響を考察する．

第 3 章：等価非ガウス励振化法を用いた非ガウス性不規則励振を受ける振動系の応答モーメントの解析

非ガウス応答特性を把握するために，分布の非対称性の強さと裾の重さの指標となる歪度と尖度の情報が活用されている．例えば，風荷重や波荷重に代表される強い非対称性を有する非ガウス性励振を受ける振動系について，その応答分布や信頼性を，応答の歪度と尖度の情報をもとに近似的に求める手法がいくつか提案されている [170][171][174]．このような背景から，非ガウス励振系の応答の歪度と尖度を精度良く求めることが重要である．しかし，これまでに提案された解析手法は，特定の非ガウス性をもつ励振の場合のみに適用可能で，励振の非ガウス性の特徴が異なるとき用いることが困難となるものが多い．そのため，現在，様々な非ガウス分布をもつ励振に対して適用可能な一般的な方法として，モンテカルロ・シミュレーションが多くの場合に用いられているが，この方法によって正確に応答の歪度と尖度を求めようとする際，励振の非ガウス性が強く分布の裾が重い場合には，高い計算コストが要求される．

3 章では，非ガウス性不規則励振を受ける振動系の 4 次までの応答モーメントを解析的に求めるために，等価非ガウス励振化法という手法を提案する．非ガウス性励振を Cai and Lin の確率微分方程式モデルで記述するとき，その確率微分方程式と系の運動方程式から，応答のモーメント方程式を導出することができる．しかし，励振分布として一般的な非ガウス分布形状のものを対象とするとき，励振の確率微分方程式の拡散係数が複雑な形となり，得られたモーメント方程式は一般に閉じた形とならない．そこで提案手法では，閉じたモーメント方程式を得るために，励振の確率微分方程式の拡散係数を，近似的に等価拡散係数で置き換える．等価拡散係数の二乗は 2 次多項式で与えられ，その多項式の係数は，もとの拡散係数と等価拡散係数の二乗平均誤差が最小となるように決定される．

1つ目の計算例として，対称型非ガウス分布を有する非ガウス性励振を受ける線形系に提案手法を適用する．対称型励振分布として，一般化ガウス分布 [188] とバイモーダル分布を考える．一般化ガウス分布は，その形状パラメータを変化させることで，多様な尖度をもつ非ガウス分布を表現することができる．一方，バイモーダル分布は一般化ガウス分布が表現できない二峰性の特徴を持っている．手法の有効性を検証するために，励振分布の尖度および励振パワースペクトルの帯域幅を広い範囲で変化させて，変位応答の分散と尖度を求める．解析結果をモンテカルロ・シミュレーションから得られた結果と比較し，励振の尖度と帯域幅がいずれの場合でも，応答の分散と尖度が精度良く得られることを示す．

2つ目の計算例として，非対称型非ガウス分布にしたがう励振を受ける線形系に適用する．非対称型の励振分布として，Nandi and Mämpel によって提案された拡張一般化ガウス分布 [189] を用いる．この分布は1つ目の計算例で用いる通常の一般化ガウス分布では表現できなかった非対称な分布形状を表すことが可能となったものである．計算例では，励振分布の形状パラメータを変化させて，大きく異なる歪度・尖度を有する3通りの励振の場合について解析を行い，等価非ガウス励振化法によって，いずれの励振分布形状の場合でも，応答の分散と尖度だけでなく，励振の非対称性によって生じる非ゼロの応答歪度についても精度良く求められることを示す．

最後に，等価拡散係数に対応する等価非ガウス性励振の確率密度関数を Fokker-Planck 方程式から導出し，その導出された分布の歪度と尖度を，もとの励振分布の歪度，尖度と比較することで，4次までの応答モーメントが精度良く得られる理由を考察する．

第4章：最小クロスエントロピー法による非ガウス不規則励振系の応答分布の解析

系の信頼性評価を行う際には，応答の確率密度関数が必要となるが，非ガウス性励振を受ける系に対して，応答分布の厳密解は一般に得られない．また，上で述べたように，応答の歪度・尖度の情報は分布の推定にしばしば有効であるが，励振の非ガウス性や系の非線形性により，応答分布が強い非ガウス性 (例えば多峰分布) を示すとき，歪度や尖度だけでは応答の非ガウス性の特徴を十分に捉えられない可能性がある．このような場合には，歪度や尖度だけでなく，より多くの情報を考慮しながら応答分布を推定する必要がある．不規則振動系の応答分布を近似的に求める手法として，極値エントロピー法を用いるものがある．極値エントロピー法には，最大エントロピー法 [190] と最小クロスエントロピー法 [191][192] の2つがある．最大

エントロピー法による解析では，いくつかの応答モーメントの値が拘束条件として与えられたとき，その拘束条件の下でエントロピーが最大となるように応答の確率密度関数が決定される．また，応答モーメントの値だけでなく，応答分布のおよその形状などに関する先験情報も有しているとき，最小クロスエントロピー法を用いることができる．この際，その先験情報は先験確率分布として反映され，応答モーメントに関する拘束条件を満足する中で，先験確率分布とのクロスエントロピーを最小にする分布が応答分布の推定結果として求められる．これらの手法は，既知の情報にしたがう一方でそれ以外の未知の情報に対して最も non-bias な確率密度関数を推定できるという特徴を有する．また，推定する確率分布の関数形の仮定を必要としないことも利点であり，これは関数形の仮定が一般的である他の応答分布解析手法と異なる点である．

先行研究では，ガウス性白色励振を受ける非線形系に最大エントロピー法が適用され，系の非線形性の違いに由来する様々な形状の応答分布が精度良く求められている [190][193]-[195]．また，適当な先験確率分布が与えられた最小クロスエントロピー法を用いるとき，最大エントロピー法に比べて，強い非ガウス性を示す応答分布をより正確に推定できることが報告されている [191]．そのため，先験確率分布として適切な分布を設定するとき，最小クロスエントロピー法を用いることによって，応答分布の関数形の仮定がなされる従来の解析手法では困難な，様々な非ガウス分布をもつ励振に対する多様な形状の応答分布の推定が可能であることが期待される．しかし，現在のところ，最小クロスエントロピー法は非ガウス励振系には適用されていない．

4 章では，多様な非ガウス分布と，帯域幅をパラメータにもつパワースペクトルの 2 つによって規定される励振を対象とし，その非ガウス性励振を受ける非線形系の応答分布を最小クロスエントロピー法によって求める方法を提案する．この際，最大エントロピー法を用いた先行研究 [190] を参考にし，最小クロスエントロピー法で用いる拘束条件を，確率密度関数の正規化条件とモーメント方程式とする．また，先験確率分布の与え方は，最小クロスエントロピー法によって良い推定結果を得る上で，重要な問題となる．しかし，非ガウス励振系に対する有効な先験確率分布の与え方は知られていない．そのため，本研究では，様々な非ガウス励振分布の場合に，さらに励振と系の帯域幅比の広い範囲で，系の応答分布を求めることを可能とするために，既知である励振の非ガウス確率密度関数を用いることに加え，2 章で得られた，非ガウス励振系の応答分布特性と，励振と系の帯域幅比の関係についての情報をもとに，その帯域幅比に応じた先験確率分布の与え方を提案する．

計算例として，ピークに大きな特徴をもつバイモーダル分布と顕著な非対称性をもつガンマ分布という非ガウス性の特徴が大きく異なる 2 種類の励振を受ける Duffing 系に対して提案手法を適用し，その解析結果をモンテカルロ・シミュレーションによる結果および先験分布を用いない最大エントロピー法による結果と比較することで，本提案手法の妥当性を検証する．

第 5 章：包絡線分布を用いた狭帯域非ガウス確率過程の生成法

実在する多くの不規則励振のパワースペクトルは顕著な卓越振動数を有する狭帯域型スペクトルであるため，系の応答や信頼性を正確に評価するためには，励振の非ガウス性だけでなく，パワースペクトルの狭帯域性の考慮もまた重要となる．非ガウス周辺分布と狭帯域型パワースペクトルで規定される励振を Cai and Lin の方法でモデル化するとき，励振は 2 次元の確率微分方程式によって表される．このとき，その拡散係数を決定するために，与えられた非ガウス分布を周辺分布にもち，加えて Fokker-Planck 方程式から導かれる条件を満たす 2 変数の結合分布を見つける必要がある．しかしながら，これまでの先行研究 [65]-[67] では，その結合分布を求めるための具体的な方法が示されておらず，これが実際の不規則振動問題への応用を難しくしている．

5 章では，Cai and Lin の方法を用いて様々な対称型確率密度を有する狭帯域非ガウス過程を生成するために，上述の結合分布を求める方法を提案する．本手法では，狭帯域確率過程の確率密度とその包絡線分布が関係付けられることに着目し，与えられた非ガウス分布に対応する包絡線分布を用いて結合分布を求める．提案手法を，非ガウス分布とパワースペクトルの帯域幅・卓越振動数が異なる 4 通りの確率過程の生成に用い，得られた標本関数から計算した確率密度関数とパワースペクトルを，与えた確率密度関数とパワースペクトルと比較することによって，手法の有効性を示す．本提案手法では，他の多くの非ガウス過程生成法で要求される反復計算の手続きが無いため，効率的に所望の非ガウス過程を生成することができる．

第 6 章：結 論

最後に，上記の研究を通して得られた結果を整理し，本研究の結論として述べる．

第2章　帯域幅を考慮した非ガウス性不規則励振を受ける線形系・非線形系の応答分布

2.1　緒 言

非ガウス分布とパワースペクトルの2つによって規定される非ガウス性不規則励振を受ける線形系と非線形系の定常応答分布をモンテカルロ・シミュレーションによって求め，応答分布に現れる一般的な傾向を調べる．励振の非ガウス分布として，ガウス分布とは形状が大きく異なり，互いの分布形状にも明瞭な差があるバイモーダル分布とラプラス分布の2種類を用いる．また，帯域幅のみをパラメータにもつパワースペクトルを与え，その帯域幅が系の周波数応答の帯域幅に比べて広い場合から狭い場合まで広く考慮する．系については，線形系に加え，Duffing系と非対称非線形系を扱う．与えた非ガウス分布とパワースペクトルにしたがう励振の標本関数を生成し，その励振標本を使用して，系の応答分布を数値計算により求め，励振の非ガウス性と帯域幅および系の非線形性が応答分布に与える影響を考察する．

2.2　系の運動方程式

次式の運動方程式によって記述される1自由度非線形系を考える．

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + kg(X) = U(t) \tag{2.1}$$

ここで，m は系の質量，c は減衰定数，k はばね定数，$g(X)$ はばね特性である．本章では，$g(X)$ として次式で表される非対称非線形ばね特性を考える．

$$g(X) = X + \eta X^2 + \varepsilon X^3 \tag{2.2}$$

ここで，η と ε はそれぞれ剛性の 2 次と 3 次の非線形パラメータである．2 次の非線形パラメータ η はばねの非対称性の強さを表し，$\eta > 0$ の場合には，η の値が大きいほど，正の変位に対しては硬く，負の変位に対しては軟らかいという非対称な性質が顕著になる．一方，3 次の非線形パラメータ $\varepsilon > 0$ はばねの漸硬性を表すもので，大きい変位に対して，より大きな復元力がはたらくばね特性を表す．図 2.1 に，線形系 ($\eta = 0$，$\varepsilon = 0$) と Duffing 系 ($\eta = 0$，$\varepsilon = 0.1$) および 2 通りの非対称非線形系 ($\eta = 0.1$，0.3，$\varepsilon = 0.1$) のばね特性を示す．また，式 (2.1) 右辺の $U(t)$ は確率密度関数とパワースペクトルによって規定される非ガウス性不規則励振であり，$U(t)$ の確率密度とパワースペクトルおよび標本関数の生成方法については次節で述べる．

対応する線形系の不減衰固有振動数 $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ と減衰比 $\zeta = \dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$ を用いると，式 (2.1) は次のように表すことができる．

$$\ddot{X} + 2\zeta\omega_n\dot{X} + \omega_n^2(X + \eta X^2 + \varepsilon X^3) = \frac{U(t)}{m} \tag{2.3}$$

ここで，無次元化時間 $t^* = \omega_n t$ を導入すると，式 (2.3) は，

$$\ddot{X} + 2\zeta\dot{X} + X + \eta X^2 + \varepsilon X^3 = U(t^*) \tag{2.4}$$

となる．ただし，

$$U(t^*) = \frac{U(t)}{m\omega_n^2} \tag{2.5}$$

であり，ドットは無次元化時間 t^* での微分を表す．(以下では，特に断ることなく，t を用いる場合は，無次元化時間 t^* を意味するものとする．)

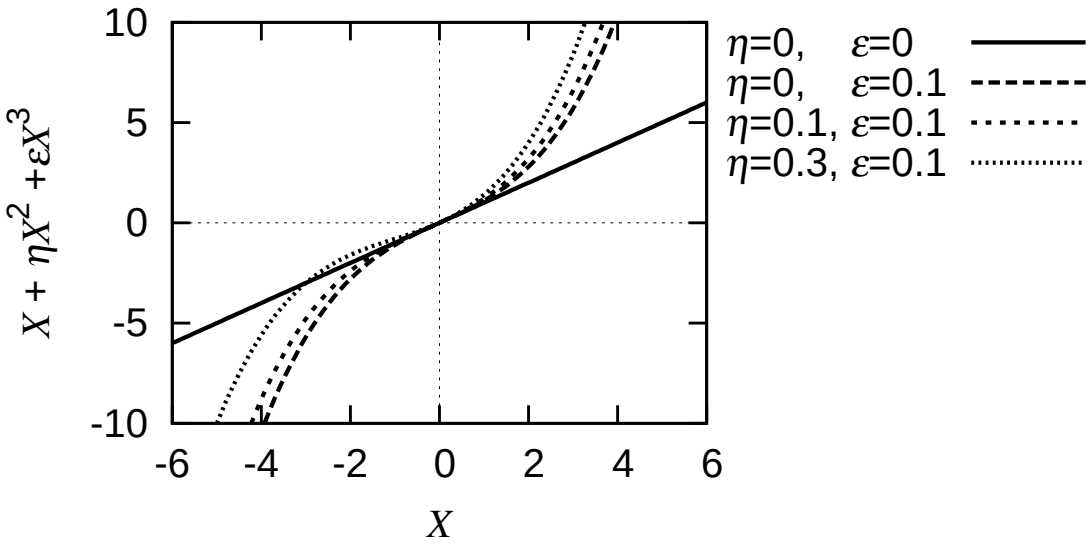


図 2.1　線形系 ($\eta = 0$，$\varepsilon = 0$) と Duffing 系 ($\eta = 0$，$\varepsilon = 0.1$)，および 2 通りの非対称非線形系 ($\eta = 0.1$，0.3，$\varepsilon = 0.1$) のばね特性

2.3　非ガウス性不規則励振

2.3.1　励振のパワースペクトルと確率密度関数

パワースペクトル

不規則励振 $U(t)$ のパワースペクトル $S_U(\omega)$ として，次式を考える．

$$S_U(\omega) = \frac{\alpha \mathrm{E}[U^2]}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)} \tag{2.6}$$

ここで，α は励振の帯域幅，$\mathrm{E}[U^2]$ は二乗平均値である．励振のパワースペクトルについては，実在する多くの不規則励振が狭帯域過程であるため，そのパワースペクトルがもつ 2 つのパラメータである卓越振動数と帯域幅の両方を考慮することが重要であると考えられる．しかしながら，現在，励振帯域幅のみの変化に対する応答の変化傾向も十分に明らかでないため，本研究では，帯域幅のみに着目し，式 (2.6) のパワースペクトルを用いることとする．このパワースペクトルは，5 章で用いられる卓越振動数パラメータ ρ を含むパワースペクトル (式 (5.1)) において $\rho = 0$ としたものに対応する．図 2.2 に，$\alpha = 1$，0.1，0.05，0.02，0.01 かつ $\mathrm{E}[U^2] = 1$ のときの $S_U(\omega)$ を示す．このパワースペクトルは $\omega = 0$ にピークをもち，α が大きい場合

には広帯域な励振となる．一方，α が小さい場合には $\omega = 0$ の直流成分が卓越した励振となる．

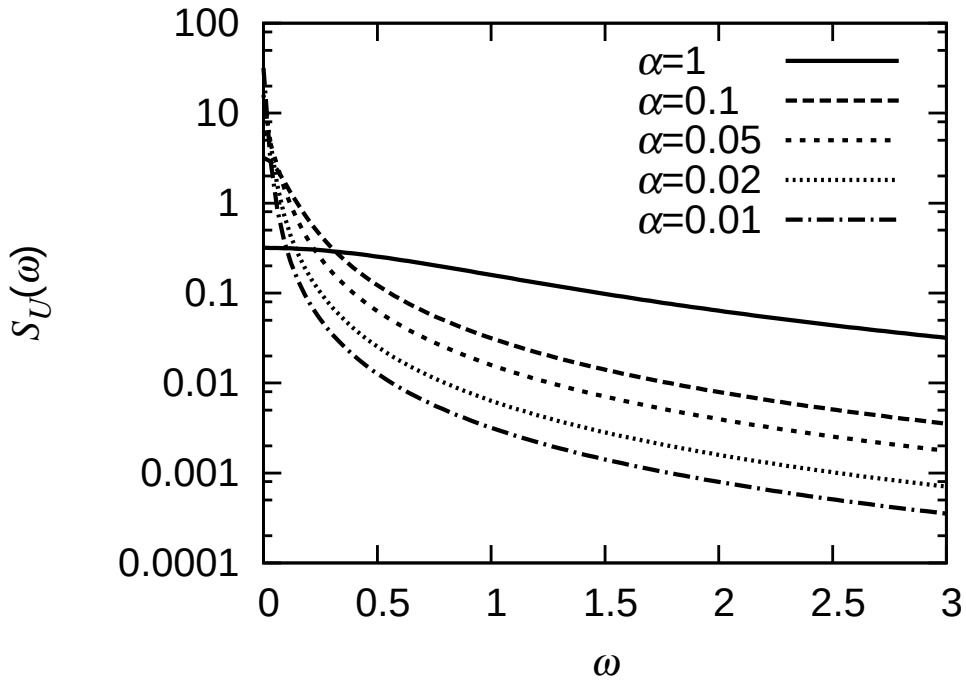


図 2.2　励振のパワースペクトル (帯域幅パラメータ：$\alpha = 1$，0.1，0.05，0.02，0.01，二乗平均値：$\mathrm{E}[U^2] = 1$)

非ガウス確率密度関数

系の応答に及ぼす励振の非ガウス性の影響が明確となるように，また非ガウス性の異なる励振に対する応答に共通の傾向を見出すために，励振の非ガウス確率密度関数 $p_U(u)$ として，ガウス分布とは形状が大きく異なり，さらに互いの分布の特徴にも明らかな違いがある次の 2 つを用いる．

・バイモーダル分布

$$p_U(u) = C \exp(au^2 + bu^4) \quad (a > 0,\ b < 0) \tag{2.7}$$

・ラプラス分布

$$p_U(u) = \frac{\beta}{2} \exp(-\beta\,|u|) \qquad (\beta > 0) \tag{2.8}$$

ここで，a，b，β は分布形状を決定するパラメータ，C は正規化定数である．本研究では，a，b，C，β の値を次のように設定する．

$$a = 0.8935,\ b = -0.3991,\ C = 0.2269,\ \beta = \sqrt{2} \tag{2.9}$$

このとき，両分布の二乗平均値は $\mathrm{E}[U^2] = 1.0$ となり，帯域幅パラメータ α を揃えると，パワースペクトルが一致する．図 2.3，2.4 に，a，b，C，β が式 (2.9) の場合のバイモーダル分布とラプラス分布をそれぞれ示す．

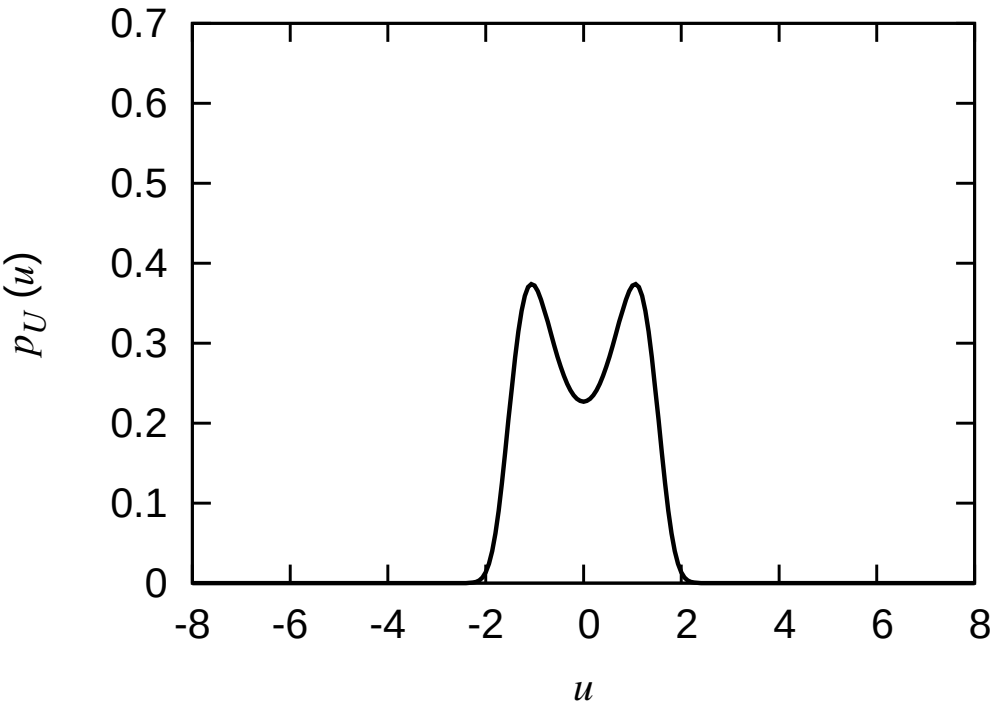


図 2.3　バイモーダル分布 ($a = 0.8935$，$b = -0.3991$，$C = 0.2269$)

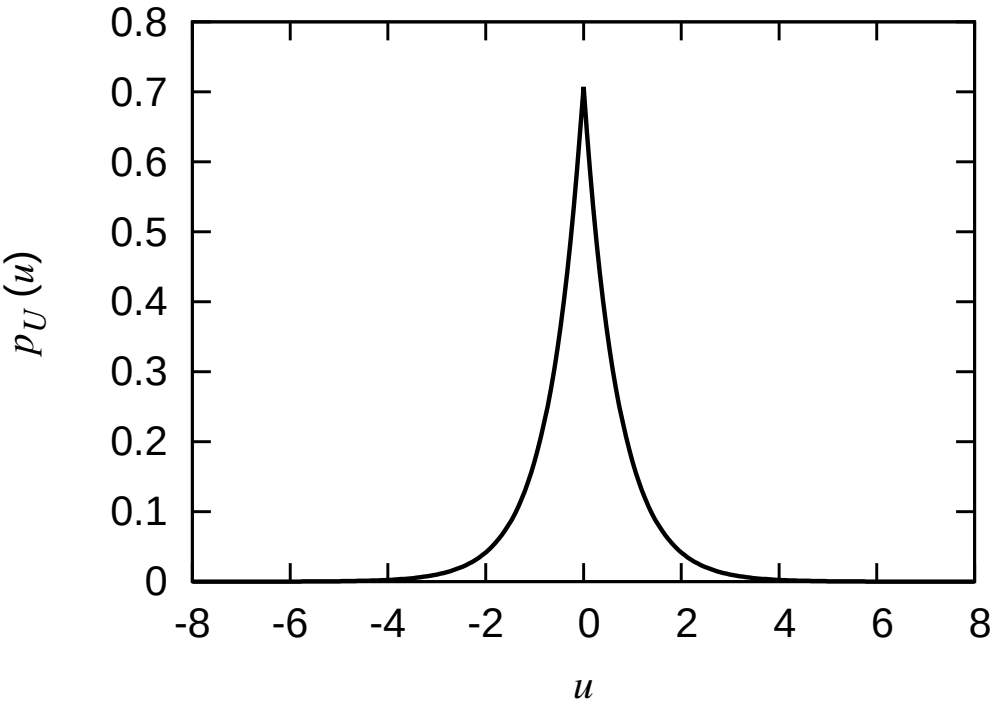


図 2.4　ラプラス分布 ($\beta = \sqrt{2}$)

2.3.2 非ガウス性励振の生成方法

2.3.1 節に示したパワースペクトルと非ガウス確率密度関数の両方にしたがう励振 $U(t)$ の標本関数を生成するために，Cai and Lin により提案された手法 [65] を用いる．この手法は，与えたパワースペクトルと確率密度関数から確率微分方程式を構築し，その式を数値的に解くことで標本関数を生成するというものであり，他の多くの生成法と異なり，生成モデルを構築する際，近似が含まれないため，与えた非ガウス分布とパワースペクトルを正確に反映したモデルが得られる．本節では，この手法について簡潔に述べる．

式 (2.6) のパワースペクトルを有する平均 0 の定常確率過程 $U(t)$ は，次式に示す伊藤型確率微分方程式の解過程として表される．

$$dU = -\alpha U dt + D(U) dB(t) \tag{2.10}$$

ここで，α は式 (2.6) の帯域幅パラメータと同じであり，$B(t)$ はウィーナー過程である．また，$-\alpha u$ と $D(u)$ はそれぞれドリフト係数と拡散係数と呼ばれるものである．式 (2.10) の両辺に $U(t-\tau)$ を掛けて，平均をとると，

$$\frac{dR_U(\tau)}{d\tau} = -\alpha R_U(\tau) \tag{2.11}$$

となり，$U(t)$ の自己相関関数 $R_U(\tau)$ を支配する微分方程式が導かれる．$R_U(0) = \mathrm{E}[U^2]$ を課して，式 (2.11) を解くと，

$$R_U(\tau) = \mathrm{E}[U^2] \exp(-\alpha|\tau|) \tag{2.12}$$

が得られ，次式の Wiener-Khintchine の定理より，$U(t)$ のパワースペクトルが式 (2.6) であることが確かめられる．

$$S_U(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_U(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \tag{2.13}$$

式 (2.10) の確率微分方程式にしたがう定常過程 $U(t)$ の確率密度関数 $p_U(u)$ は，次式の時間微分項を 0 とした Fokker-Planck 方程式を満足する．

$$\frac{d}{du}G = \frac{d}{du}\left(-\alpha u p_U(u) - \frac{1}{2}\frac{d}{du}[D^2(u) p_U(u)]\right) = 0 \tag{2.14}$$

ここで，G は確率の流れであるが，$p_U(u)$ が $u = \pm\infty$ で 0 であることと，$U(t)$ が一次元であることを考慮すると，至る所で $G = 0$ でなければならない．したがって，この条件のもとで式 (2.14) を変形すると，$p_U(u)$ と α をもとに拡散係数 $D(u)$ を決定する式が得られる．

$$D^2(u) = -\frac{2\alpha}{p_U(u)} \int_{-\infty}^{u} s p_U(s) ds \tag{2.15}$$

上記の解析結果を利用すると，2.3.1 節に示すパワースペクトルと確率密度関数の両方にしたがう標本関数を，数値計算によって生成することができる．その計算の流れを以下に記す．

1. 生成する励振の確率密度関数 $p_U(u)$ とパワースペクトルの帯域幅 α を与える．
2. $p_U(u)$ と α を用いて，式 (2.15) を計算し，拡散係数 $D(u)$ を求める．
3. α と $D(u)$ を式 (2.10) に代入し，式 (2.10) を確率微分方程式の数値解法 (オイラー・丸山法，ミルシュタイン法など [196]) を利用して解く．

最後にバイモーダル分布とラプラス分布に対応する拡散係数 $D(u)$ を以下に示す．

・バイモーダル分布 (式 (2.7))

$$D^2(u) = \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-b}} \exp\left\{-b\left(u^2 + \frac{a}{2b}\right)^2\right\} \mathrm{erfc}\left\{\sqrt{-b}\left(u^2 + \frac{a}{2b}\right)\right\} \tag{2.16}$$

ここで，

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-t^2} dt \tag{2.17}$$

・ラプラス分布 (式 (2.8))

$$D^2(u) = \frac{2\alpha}{\beta^2}(1 + \beta|u|) \tag{2.18}$$

2.3.3 励振の標本関数

2.3.2 節で述べた方法で生成した励振 $U(t)$ の標本関数の一例と，100 本の標本関数から計算した確率密度関数とパワースペクトルを示し，使用した手法の妥当性の確認と，励振の時間変動の特徴について観察を行う．

確率微分方程式の数値解法として，オイラー・丸山法 [196] を使用し，計算条件を以下の通りとする．

- 時間刻み幅　　$\Delta t = 0.05$
- 標本長さ　　$T = 6553.6$

また，各時間間隔におけるウィーナー過程の増分 $dB(t)$ を，同一のガウス分布 $N(0, \Delta t)$ にしたがう独立な乱数で近似する [196]．

励振の帯域幅パラメータについては，次の値を用いる．

- 励振帯域幅　　$\alpha = 1$，0.1，0.05，0.02，0.01

また，励振の確率密度関数 $p_U(u)$ として，2.3.1 節に示したバイモーダル分布 (式 (2.7)，図 2.3) とラプラス分布 (式 (2.8)，図 2.4)，さらにこれらの非ガウス分布との比較対象としてガウス分布を用い，分布形状を決定するパラメータを式 (2.9) (ガウス分布については，平均 0，分散 1) の通りとした．

図 2.5 に，上記の 5 通りの α で計算した，バイモーダル分布励振の標本関数の一例を示す．また，図 2.6，2.7 には，生成したバイモーダル分布励振の 100 本の標本関数から計算した確率密度関数とパワースペクトルをそれぞれ示す．ここで，図 2.6，2.7 については，$\circ$ が計算結果を表している．一方，実線はそれぞれ式 (2.7)(図 2.6) と式 (2.6)(図 2.7) をプロットしたものである．以上のバイモーダル分布励振に関する図と同じ順番・配置で，ラプラス分布励振に関する図を図 2.8，2.9，2.10 に，ガウス分布励振に関する図を図 2.11，2.12，2.13 に示す．

生成したいずれの励振についても，確率密度関数とパワースペクトルの計算結果 ($\circ$) はターゲット (実線) にほぼ一致しており，Cai and Lin の手法によって，与えた確率密度とパワースペクトルに正確にしたがう標本関数が生成できることが分かる．また，これらの確率密度関数とパワースペクトルの図から，生成した 3 種類の確率過程は，確率密度関数が全く異なる一方，パワースペクトルは同一となっていることも確かめられる．

帯域幅 α と励振の時間変動の関係

図 2.5，2.8，2.11 に示すいずれの標本関数についても，帯域幅の広い $\alpha = 1$ の場合には，微小時間で激しく変動している．そして，α が小さくなる，すなわち帯域幅が狭くなるにつれて，時間的な変動が緩やかになる．この帯域幅 α と時間変動の関係については，励振のパワースペクトル $S_U(\omega)$ から理解することができる．図 2.2 より，$\alpha = 1$ のときは，ピークのある $\omega = 0$ 付近の低周波数成分の強度とそれより高い周波数成分の強度の差が小さく，ホワイトノイズに近いパワー分布であるため，短時間に急激な変動を示す波形になる．一方，α が小さくなると，$\omega = 0$ のピークが鋭くかつ大きくなり，直流成分が卓越するため，時間変動が緩やかになる．

バイモーダル分布励振の標本関数の特徴

図 2.6 に示す確率密度関数は，正と負の位置 (式 (2.7) より $u = \pm 1.058$) に 1 つずつピークをもつため，図 2.5 の標本関数には，正値 ($u = 1.058$ 付近の値) が集中する区間と負値 ($u = -1.058$ 付近の値) が集中する区間が存在し，これらの区間が交互に現れるような波形となる．また，帯域幅パラメータ α が小さくなるにつれて，両区間は時間的に広がり，区間を移り変わる時間も長くなる．

ラプラス分布励振の標本関数の特徴

図 2.9 に示す確率密度関数は，$u = 0$ の位置にガウス分布 (図 2.12) と比べて大きく鋭いピークをもつため，図 2.8 の標本関数には，ガウス分布励振の標本関数 (図 2.11) と比べて小さい値が現れることが多くなっている．さらに，ラプラス分布は裾が広がっているため，波形の所々に大きな値が現れることも，この励振の大きな特徴である．

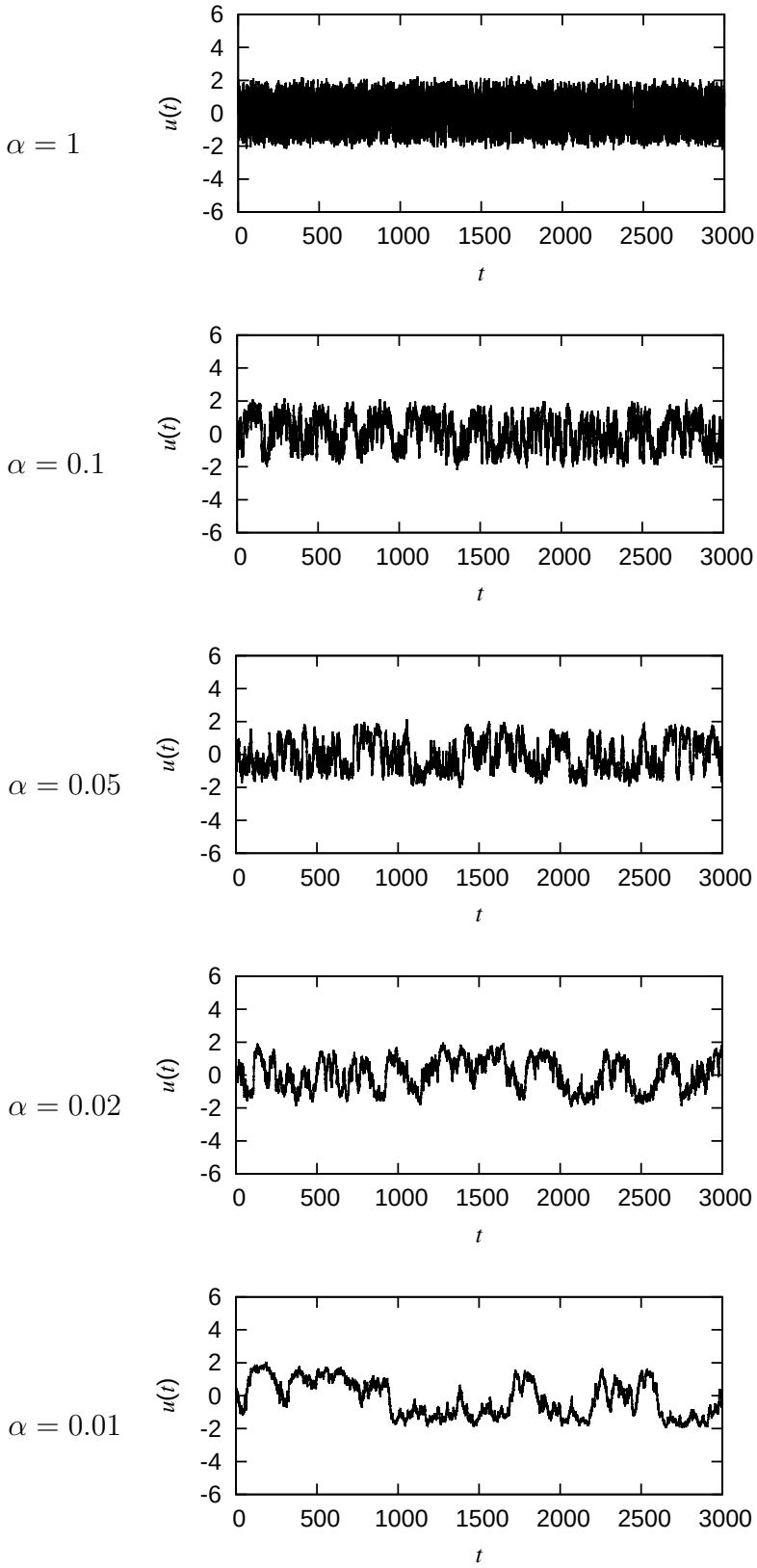


図 2.5　バイモーダル分布励振の標本関数

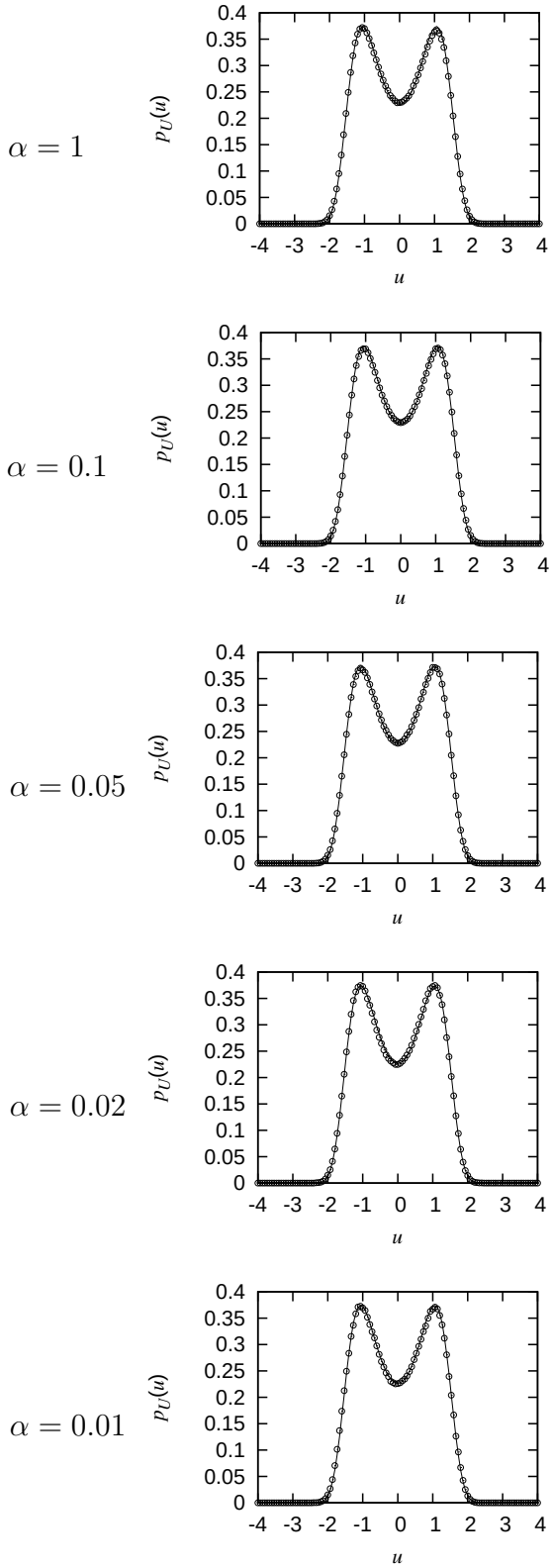


図 2.6　バイモーダル分布励振の 100 本の標本関数から計算した確率密度関数
(○：計算結果，—：式 (2.7))

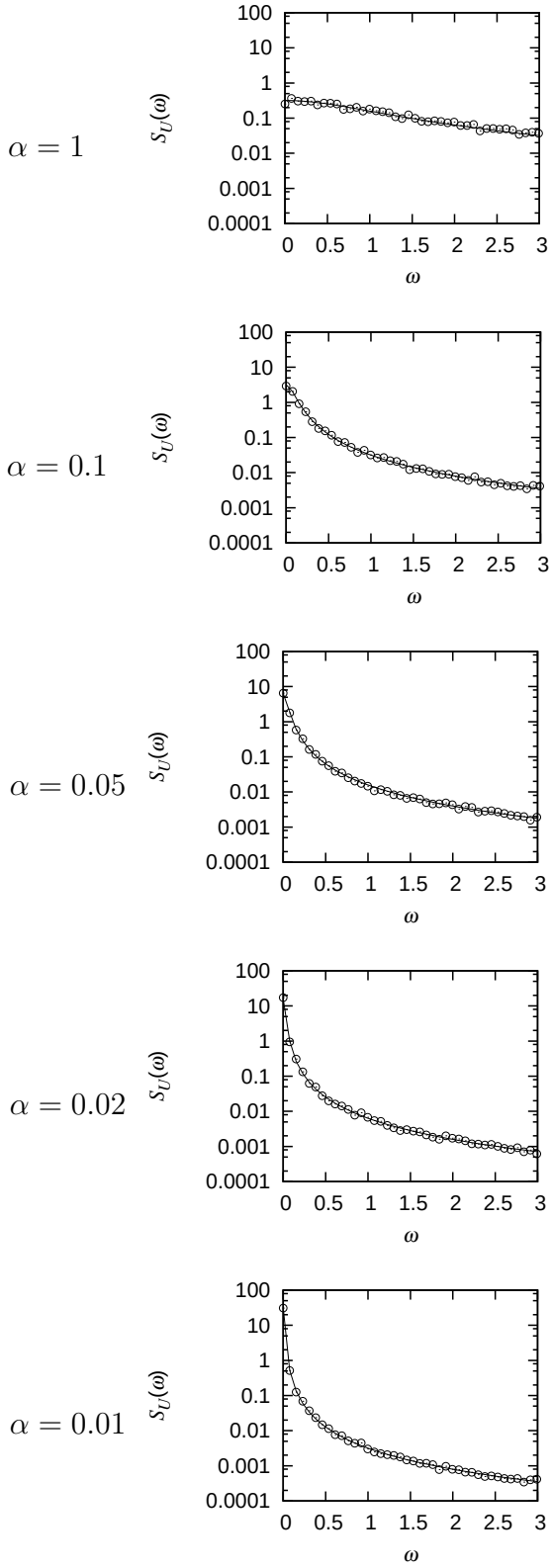
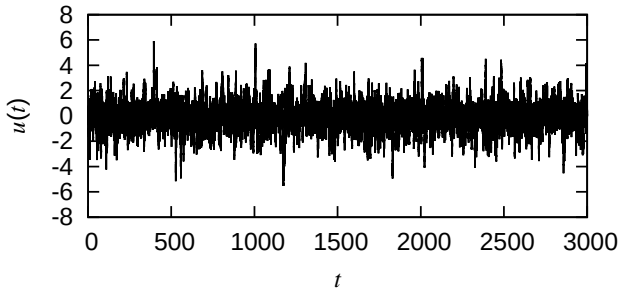
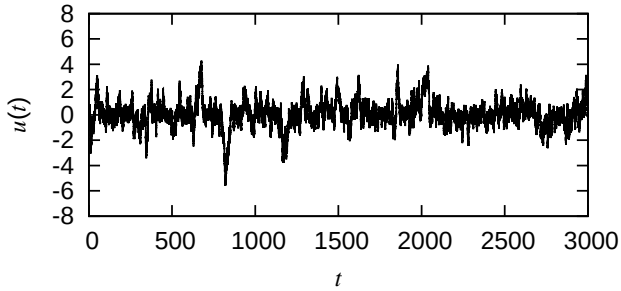


図 2.7　バイモーダル分布励振の 100 本の標本関数から計算したパワースペクトル (○：計算結果，—：式 (2.6))

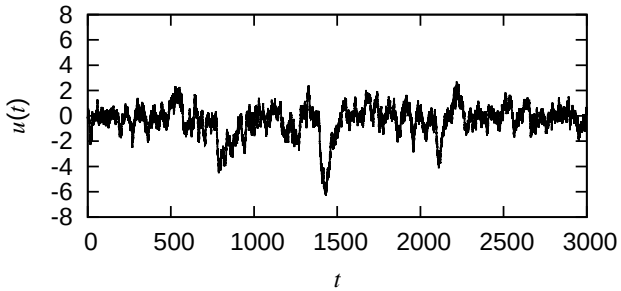
$\alpha = 1$



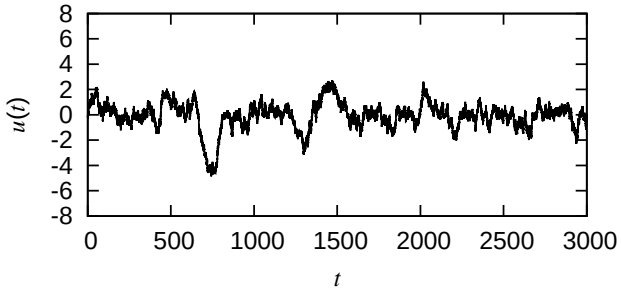
$\alpha = 0.1$



$\alpha = 0.05$



$\alpha = 0.02$



$\alpha = 0.01$

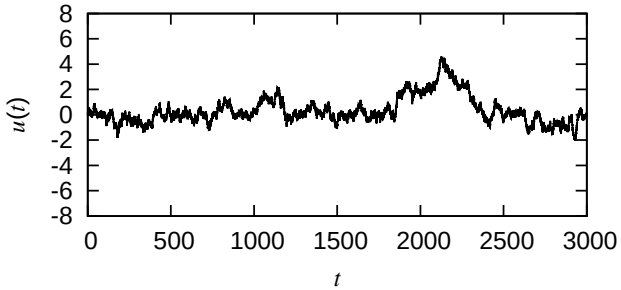


図 2.8　ラプラス分布励振の標本関数

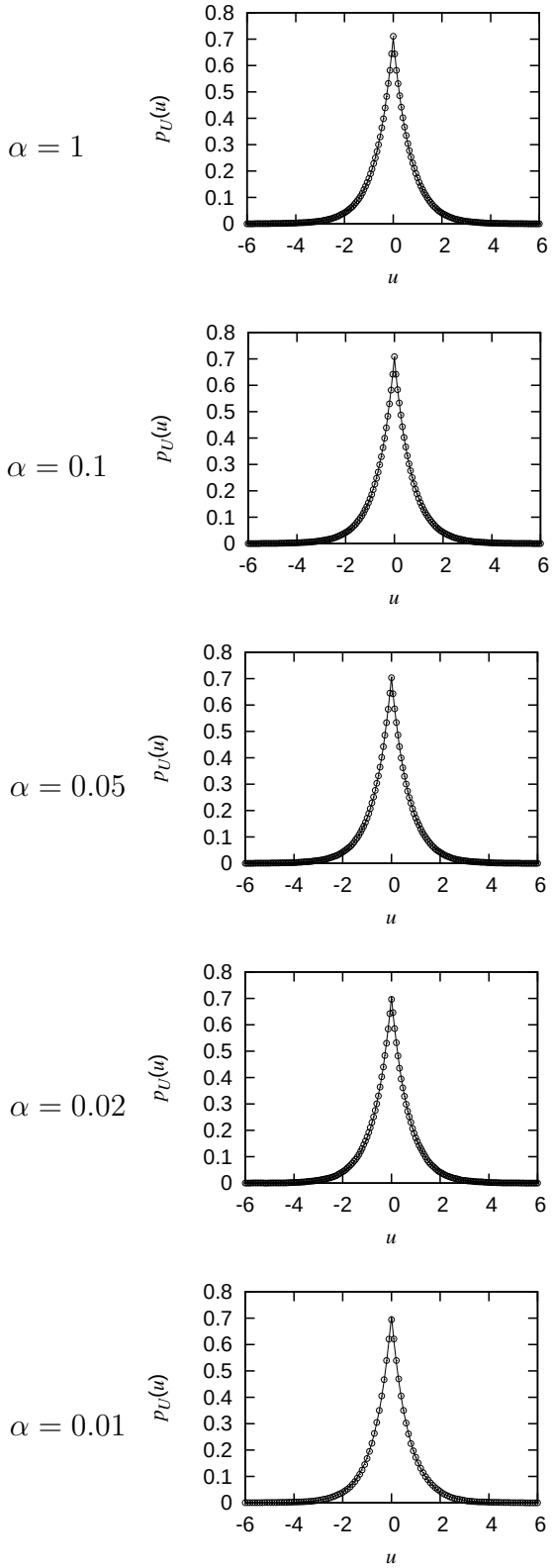


図 2.9　ラプラス分布励振の 100 本の標本関数から計算した確率密度関数 (○：計算結果，—：式 (2.8))

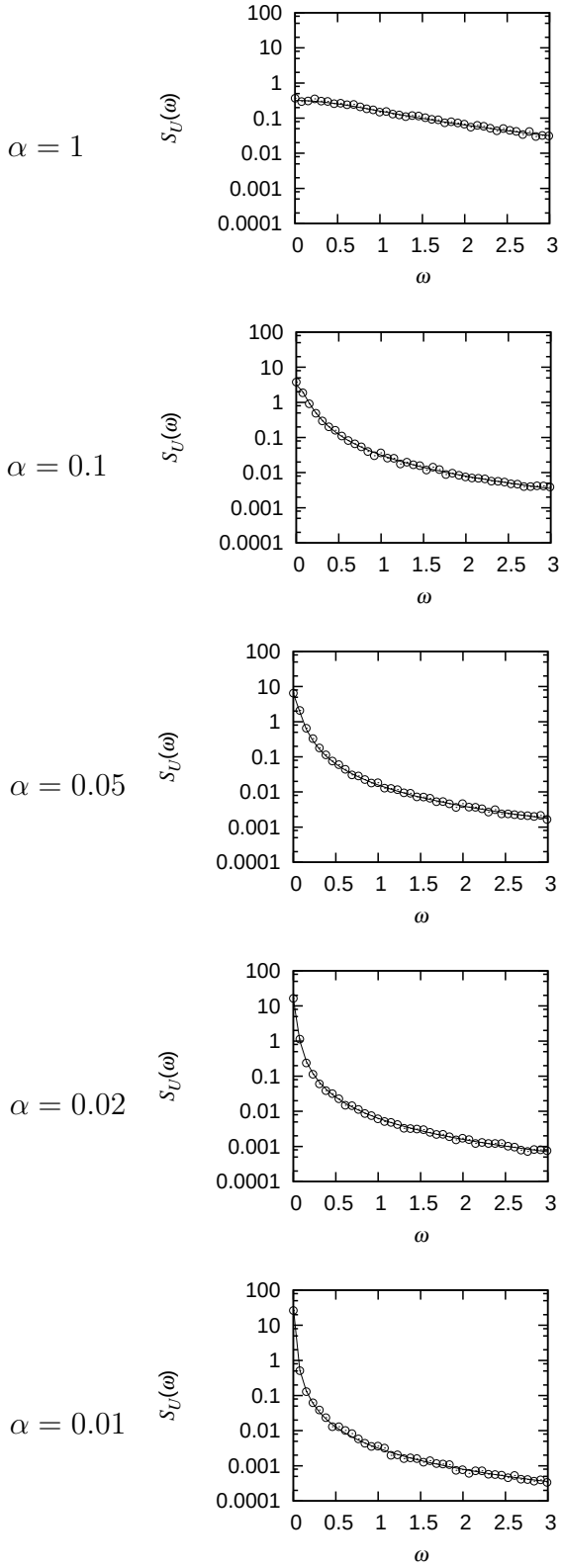
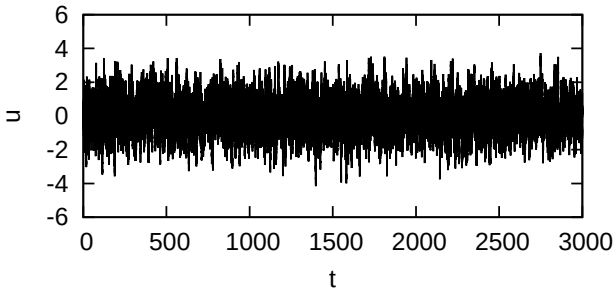
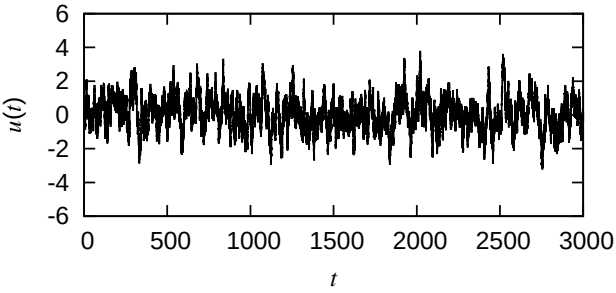


図 2.10　ラプラス分布励振の 100 本の標本関数から計算したパワースペクトル
(○：計算結果，—：式 (2.6))

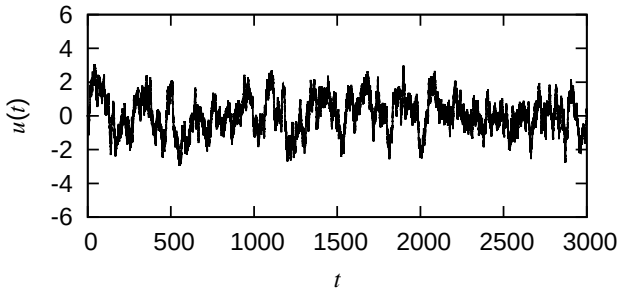
$\alpha = 1$



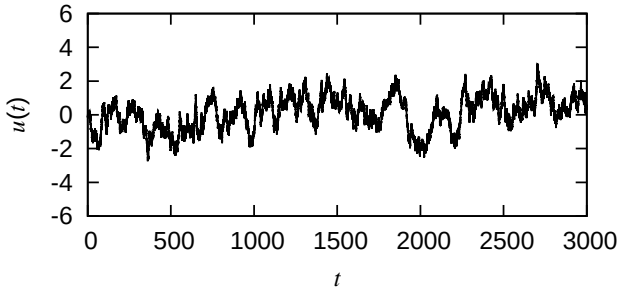
$\alpha = 0.1$



$\alpha = 0.05$



$\alpha = 0.02$



$\alpha = 0.01$

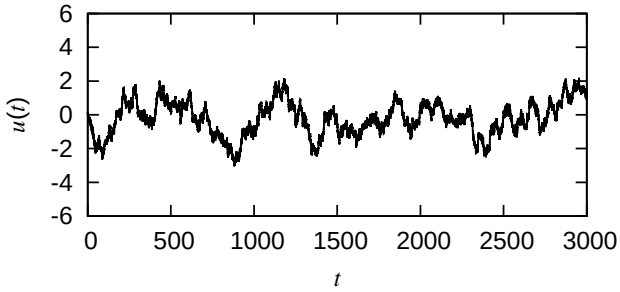


図 2.11　ガウス分布励振の標本関数

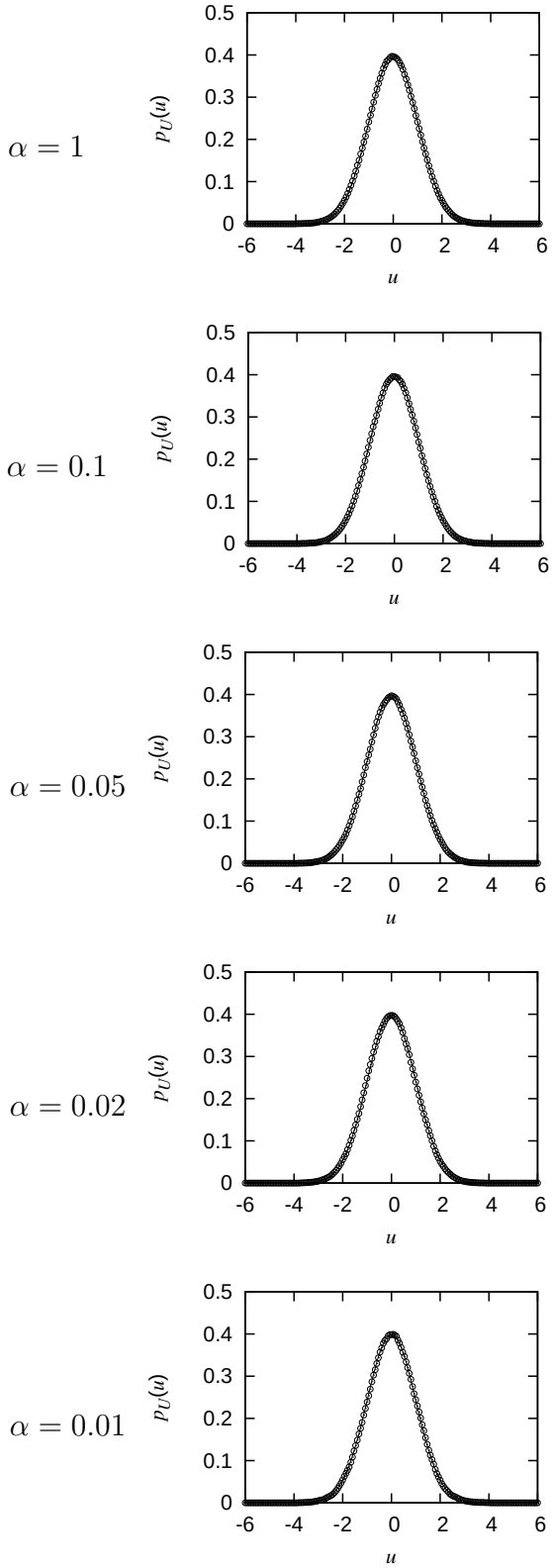


図 2.12　ガウス分布励振の 100 本の標本関数から計算した確率密度関数 (○：計算結果，—：$p_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2})$)

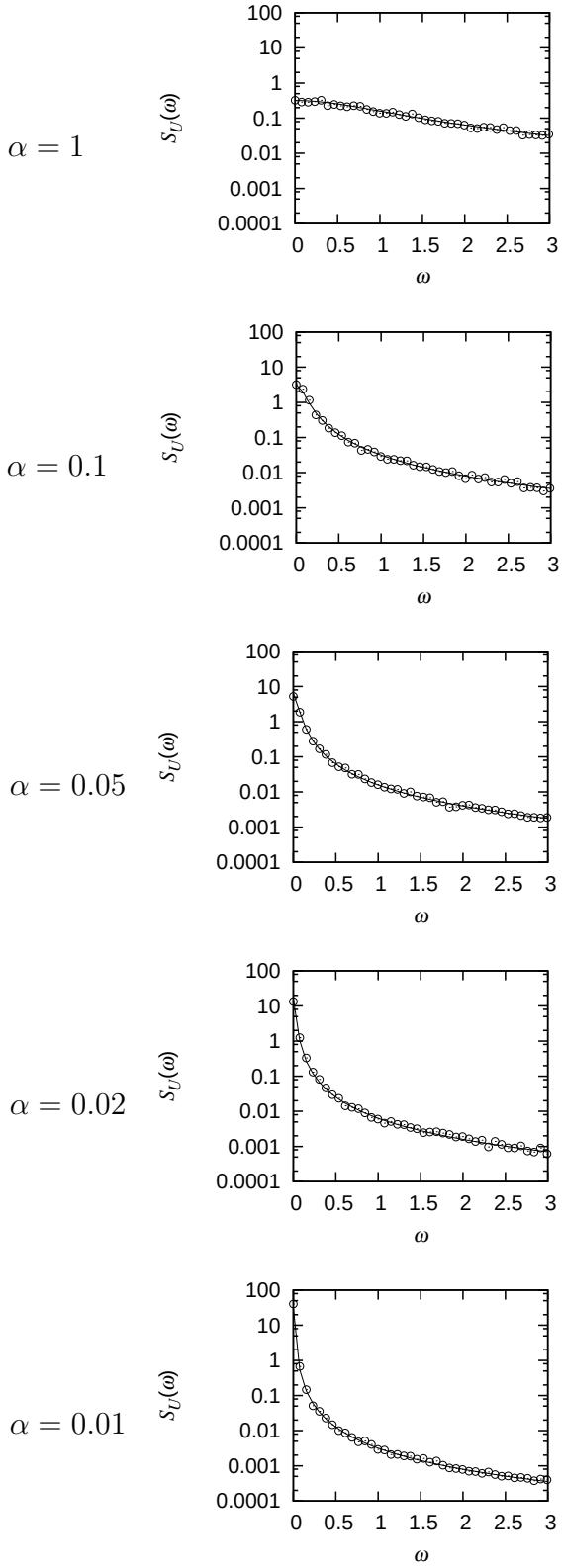


図 2.13　ガウス分布励振の 100 本の標本関数から計算したパワースペクトル (○：計算結果，—：式 (2.6))

2.4 非ガウス性不規則励振を受ける系の応答分布

2.4.1 計算方法とパラメータ

式 (2.4) で表される非ガウス性不規則励振を受ける非線形系の定常変位応答分布を，モンテカルロ・シミュレーションにより求める．応答分布は，2.3.2，2.3.3 節で述べた方法で生成した 100 本の励振標本を用いて 100 回の応答計算を実行し，それによって得られた応答標本をもとに計算される．このとき，応答計算には 4 次の Runge-Kutta 法を使用する．2.3.3 節の励振生成計算の条件に合わせて，応答計算の条件を以下の通りとする．

- 時間刻み幅： $\Delta t = 0.05$
- 標本長さ： $T = 6553.6$

また，系と励振の計算パラメータとして，次に示す値を用いる．

- 減衰比：$\zeta = 0.05$
- 非線形パラメータ：
  ・線形系：$\eta = 0$，$\varepsilon = 0$
  ・Duffing 系：$\eta = 0$，$\varepsilon = 0.1$
  ・非対称非線形系：$\eta = 0.1$，0.3，$\varepsilon = 0.1$
- 励振帯域幅：$\alpha = 1$，0.05，0.01

まず，系のパラメータについては，減衰比 ζ を 0.05 で固定し，非線形パラメータ η，ε がいずれも 0 の線形系の場合と，3 次の非線形パラメータを $\varepsilon = 0.1$ として，非対称性の強さを表す 2 次の非線形パラメータを $\eta = 0$(Duffing 系)，0.1，0.3 と 3 通り変化させた場合の計算を行う．次に励振のパラメータである帯域幅 α については，図 2.14 に示す線形系 ($\eta = \varepsilon = 0$) の周波数応答関数の帯域幅を表す減衰比 ζ と比較して，大きい値 $\alpha = 1$ ($\alpha/\zeta = 20$)，同じ値 $\alpha = 0.05$ ($\alpha/\zeta = 1$)，小さい値 $\alpha = 0.01$ ($\alpha/\zeta = 0.2$) の 3 つの場合を調べる．また，励振の非ガウス確率密度関数 $p_U(u)$ として，2.3.1 節に示したバイモーダル分布 (式 (2.7)，図 2.3) とラプラス分布 (式 (2.8)，図 2.4) を用い，分布形状を決定するパラメータを式 (2.9) の通りとする．次節以降

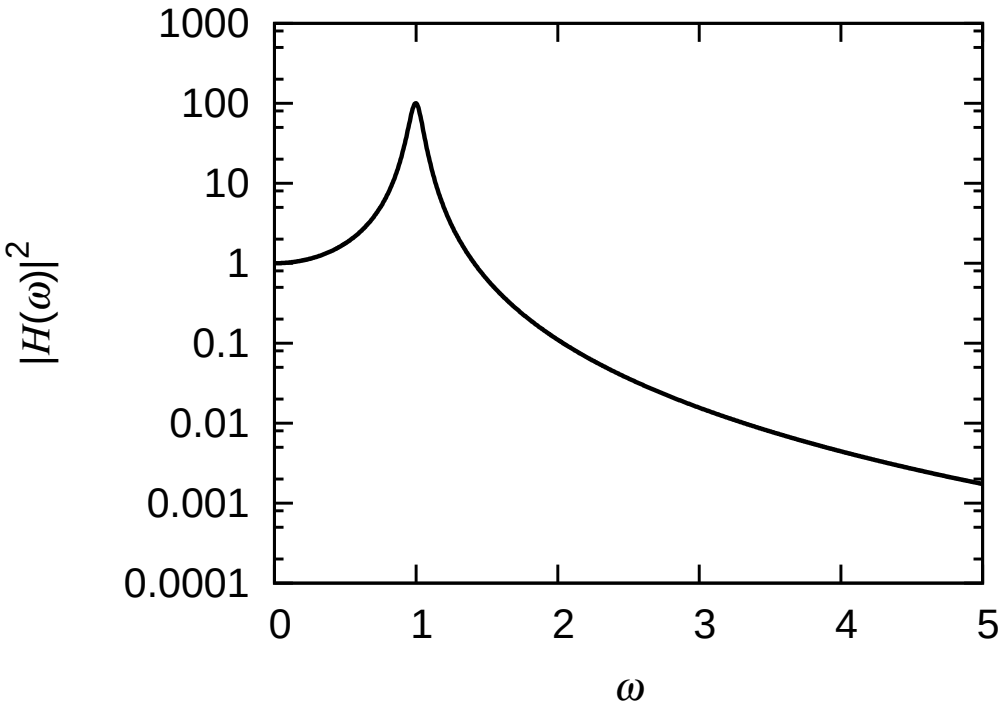


図 2.14　線形系の周波数応答関数 (減衰比 $\zeta = 0.05$)

では，以上のパラメータで計算して得られた応答分布を励振の帯域幅によって大別しながら示し，その応答分布に現れる特徴を考察していく．

2.4.2　系の帯域幅に比べて励振の帯域幅が広い場合

励振の帯域幅が線形系の周波数応答の帯域幅に比べて広い場合にあたる，$\alpha = 1$ $(\alpha/\zeta = 20)$ の非ガウス性励振を受ける線形系の応答分布を図 2.15 に示す．また同じ $\alpha = 1$ で，3 次の非線形パラメータを $\varepsilon = 0.1$ とし，系の非対称性の強さを表す 2 次の非線形パラメータ η を 3 通り変化させて計算した非線形系の応答分布を図 2.16 に示す．両図とも (a) はバイモーダル分布励振，(b) はラプラス分布励振の場合である．それぞれの非線形パラメータの値ごとに，(a) と (b) の応答分布を比較すると，励振分布に大きな違いがある (図 2.3，2.4) にも関わらず，ほぼ同一の分布形状となっている．次に，系の非線形性が応答分布に及ぼす影響を見ていく．図 2.15 の線形系と図 2.16-1 段目の Duffing 系の応答分布の比較から，その硬性ばね特性 (図 2.1) によっ

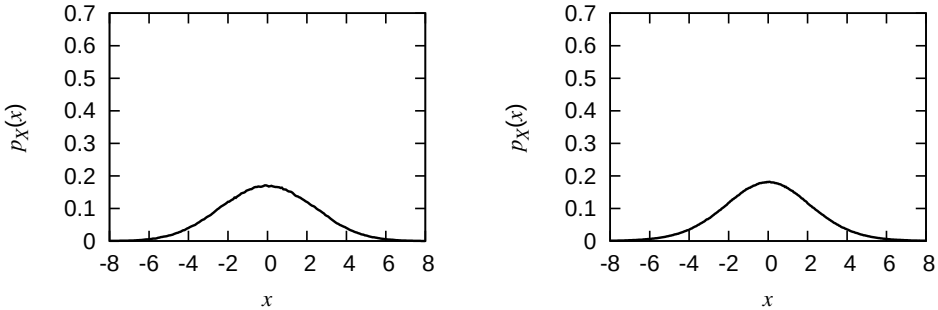
て，Duffing 系の方が応答分布の幅が狭まることが分かる．また，図 2.16 の 3 通りの η における計算結果から，ばねの非対称性が強いほど，右裾が狭まり左裾が広がった非対称な形状の応答分布となることが確認できる．この結果は，2.1 節で述べたように，η の値が大きいほど，正の変位に対しては硬く、負の変位に対しては軟らかいというばねの非対称な特性が強くなることに起因するものである．

励振帯域幅が系の帯域幅に比べて広い場合には，応答分布に励振の非ガウス性の影響はほとんど現れず，系の非線形性によってその分布の特徴が決まる．このような応答分布となるのは，帯域幅パラメータの大きい $\alpha = 1$ の励振が，図 2.2 に示すように，ホワイトノイズに近いためであることが考えられる．式 (2.4) で記述される 1 自由度非対称非線形系が強度 S_0 のガウス性ホワイトノイズを受けるとき，その定常変位応答分布の厳密解は次式で与えられる [197].

$$p_X(x) = C \exp\left[-\frac{2\zeta}{\pi S_0}\left(\frac{x^2}{2} + \eta\frac{x^3}{3} + \varepsilon\frac{x^4}{4}\right)\right] \tag{2.19}$$

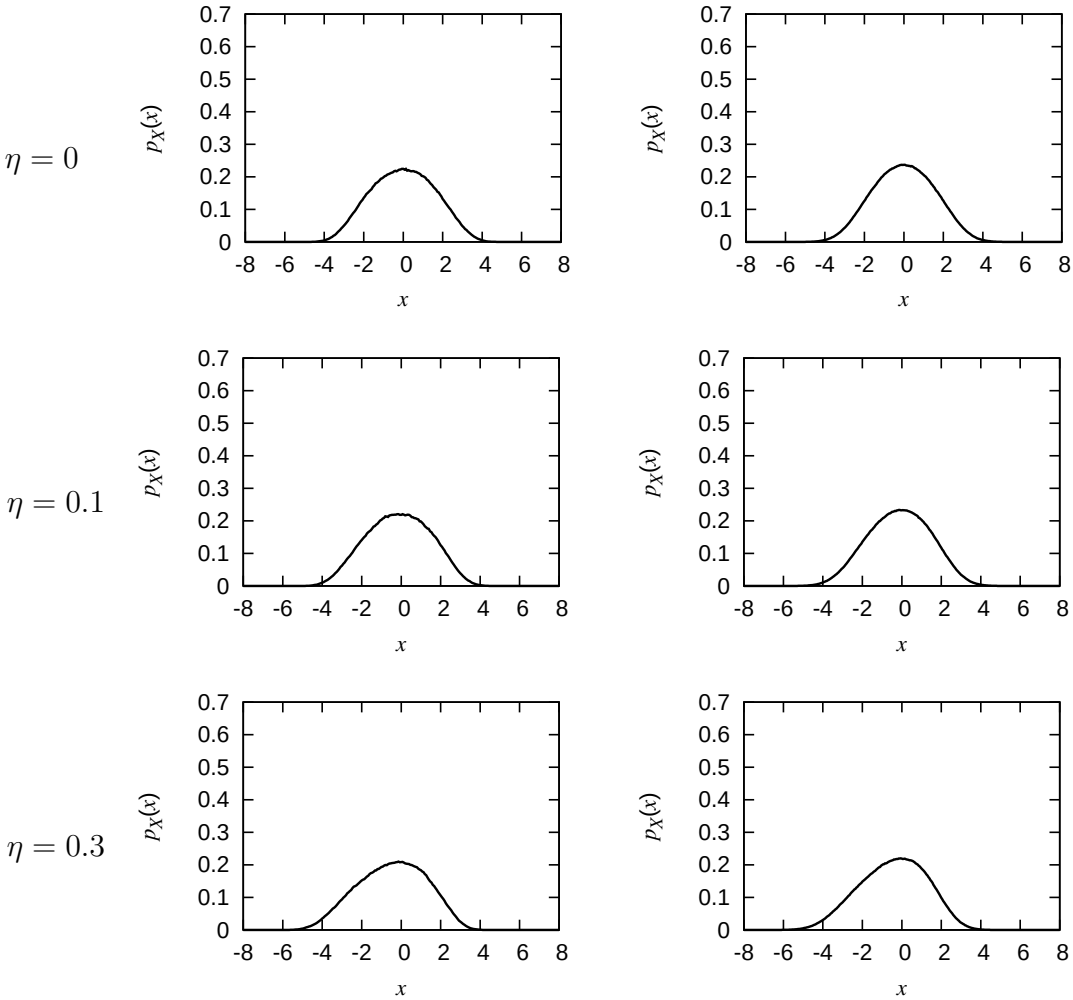
ここで，$\eta = 0$，$\varepsilon > 0$ の場合は Duffing 系に，$\eta = 0$，$\varepsilon = 0$ の場合は線形系にそれぞれ対応する．本研究では，図 2.15，2.16 に示したいずれの応答分布も，式 (2.19) に近い形状であることを確認した．以上の結果から，励振帯域幅が系の帯域幅に比べて広い場合の応答分布は，励振分布の違いによらず，ガウス性ホワイトノイズを受ける系の応答分布に近い形状となることが確認できた．

最後に，本節で得られた結果と先行研究で報告された知見を関連付ける．非ガウス性励振を受ける線形系の応答特性が調べられた先行研究ではほとんどの場合，励振帯域幅 α ではなく，系の帯域幅を表す減衰比 ζ を変化させて，応答の変化傾向が考察された．そして，系の減衰比 ζ が減少するとき，応答はガウス性に近づくことがいくつかの文献で報告された [109][168][169]．この知見と，本節で示された応答分布の変化傾向は，励振と系の帯域幅比パラメータ $A = \alpha/\zeta$ を用いて統一的に述べることができる．すなわち，線形系の場合，A が大きい ($=\alpha$ が大きい，または ζ が小さい) とき，応答分布はガウス分布に近づくことが言える．より一般に，非線形系の場合には，本節に示した計算結果から，A が大きいとき，応答分布はガウス性ホワイトノイズを受ける系の応答分布に近い形状となることが言える．



(a) バイモーダル分布励振　　(b) ラプラス分布励振

図 2.15　帯域幅パラメータが $\alpha = 1$ $(\alpha/\zeta = 20)$ の非ガウス性励振を受ける線形系 $(\zeta = 0.05,\ \eta = 0,\ \varepsilon = 0)$ の応答分布



(a) バイモーダル分布励振　　(b) ラプラス分布励振

図 2.16　帯域幅パラメータが $\alpha = 1$ $(\alpha/\zeta = 20)$ の非ガウス性励振を受ける非線形系 $(\zeta = 0.05,\ \eta = 0,\ 0.1,\ 0.3,\ \varepsilon = 0.1)$ の応答分布

2.4.3 系の帯域幅に比べて励振の帯域幅が狭い場合

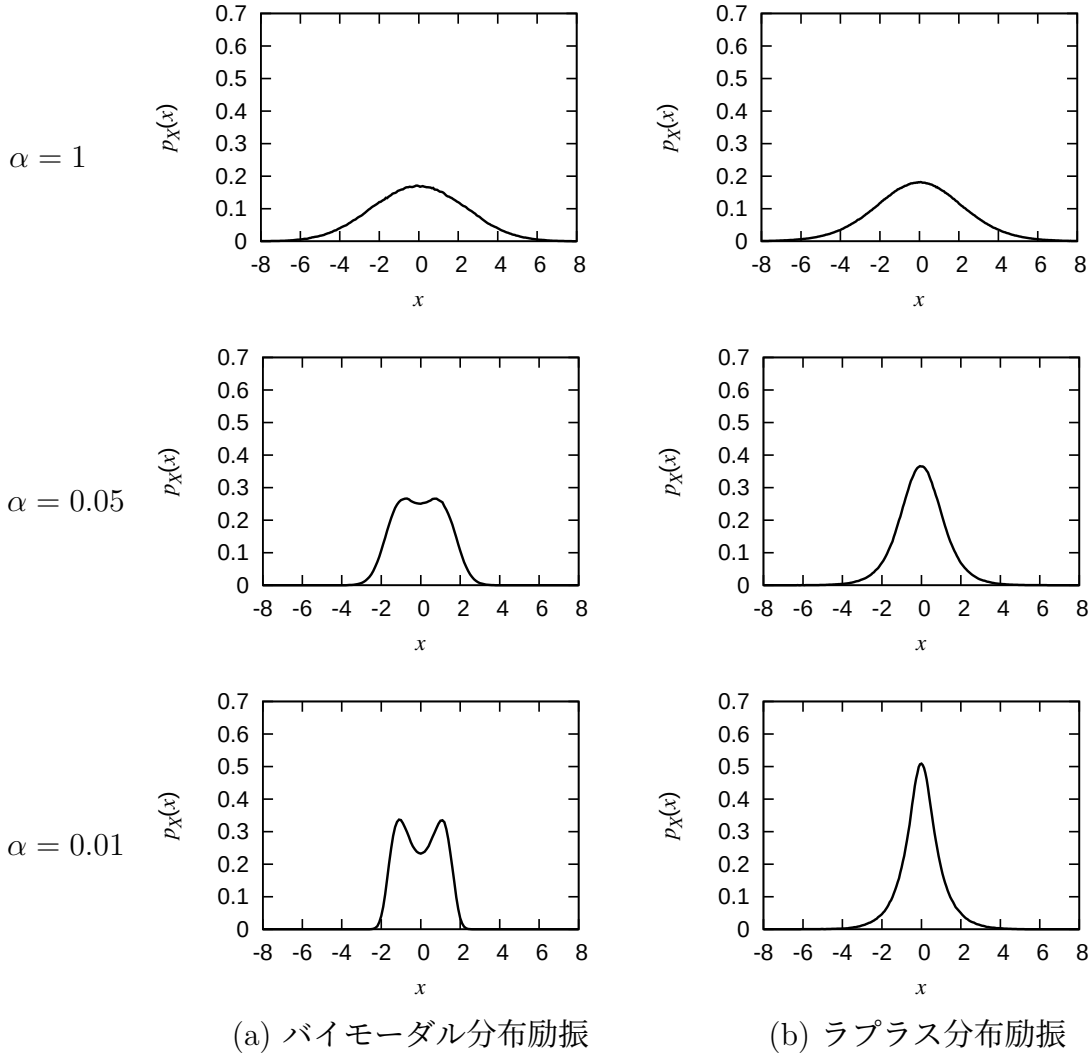
線形系と Duffing 系の応答分布

2 種類の非ガウス性励振を受ける線形系 ($\eta = 0$, $\varepsilon = 0$) と Duffing 系 ($\eta = 0$, $\varepsilon = 0.1$) について，励振の帯域幅パラメータ α を 3 通り変化させたときの応答分布を図 2.17，2.18 にそれぞれ示す．これらの図も 2.4.2 節の図 2.15，2.16 と同じように，(a) がバイモーダル分布励振，(b) がラプラス分布励振の場合である．線形系と Duffing 系の応答分布を比較すると，2.4.2 節で示した結果と同様，Duffing 系の方が分布の幅が狭まっているという違いはあるものの，どちらの系でも α が小さくなる，すなわち励振帯域幅が狭くなり，$\omega = 0$ の直流成分がより卓越していくにつれて，励振のそれぞれの非ガウス分布 (図 2.3，2.4) に近い形状の応答分布へと変化していくことが確認できる．そして，広帯域励振の場合にあたる $\alpha = 1$ ($\alpha/\zeta = 20$) のときには，(a) と (b) で同じ分布形状であったものが，励振の帯域幅が系の帯域幅に比べて狭い $\alpha = 0.01$ ($\alpha/\zeta = 0.2$) では，その励振分布の違いによって，形状の全く異なる非ガウス応答分布が現れている．

励振のパワースペクトルは，図 2.2 に示されるように，帯域幅パラメータ α が小さいほど，直流成分 ($\omega = 0$) が大きな値となり，その他の周波数成分は小さくなる．そのため，α が十分に小さいときは，変動の非常に緩やかな励振となる．このとき，その励振を受ける系は，速度応答・加速度応答がともに小さい準静的な状態となり，系の支配方程式 (式 (2.4)) は近似的に「剛性項 = 励振」という式で表せるようになる．そして，励振の実現値は確率密度関数 $p_U(u)$ にしたがって選ばれるため，剛性項全体の確率密度関数を考えると，それは $p_U(u)$ にほぼ等しくなる．線形系の場合には剛性項が X であるため，変位応答分布 $p_X(x)$ が励振分布 $p_U(u)$ と同様の形状になる．また剛性の非線形項を $h(X)$ として，剛性項全体が $X + h(X)$ の形で表される非線形系の場合には,「剛性項 = 励振」の式が $X + h(X) = U$ として表されるが，この式の左辺において，線形項 X が非線形項 $h(X)$ に比べて十分大きい場合には，$X \simeq U$ が成り立つため，このとき変位応答分布は励振分布に近い形状となることが考えられる．今回計算した $\alpha = 0.01$ の場合，図 2.2 に示すように，直流成分が支配的な励振となっている．この $\alpha = 0.01$ のバイモーダル分布励振の標本関数と，その励振を受ける線形系と Duffing 系の変位応答の標本関数を図 2.19 に示す．両系の応答波形は励振波形に似通っている．また同様のことが図 2.20 に示す，$\alpha = 0.01$ のラプラス分布励振と，その励振を受ける線形系と Duffing 系の応答の標本関数からも

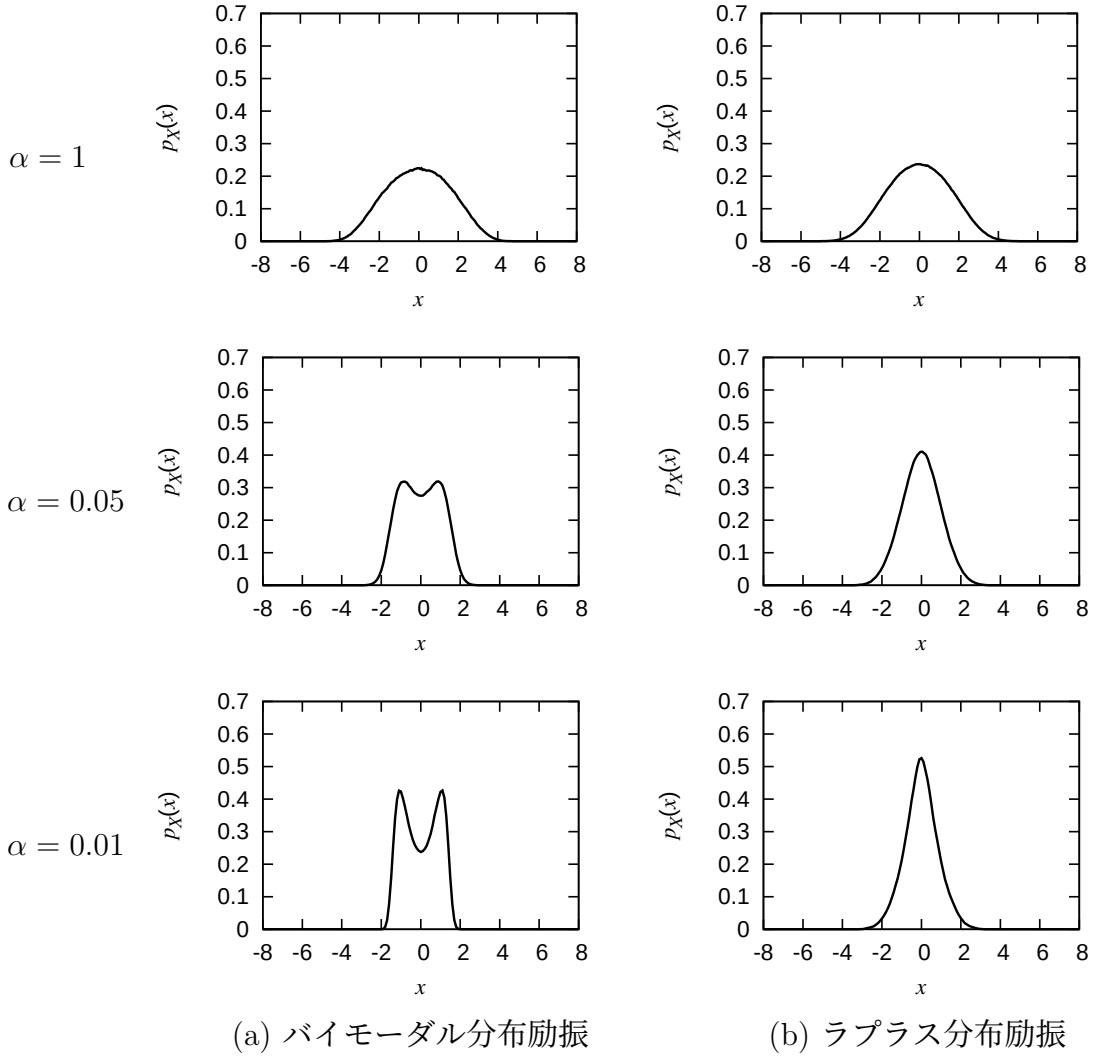
確認することができる．したがって，両励振分布の場合で，剛性の線形項すなわち変位応答が励振に近い状況となっており，これが，励振帯域幅が狭い場合に，線形系と Duffing 系の応答分布が励振の非ガウス分布と同様の形状となる理由であると考えられる．

先行研究では，線形系の減衰比 ζ が増加するとき，応答の非ガウス性が強まることが示されている [95][116][168]．2.4.2 節同様，励振と系の帯域幅比パラメータ $A = \alpha/\zeta$ を用いるとき，この減衰比の変化に対する応答分布の変化傾向と，本節で示した励振帯域幅 α に対する応答分布の変化傾向を合わせて述べることができる．すなわち，A が小さい ($=\alpha$ が小さい，または ζ が大きい) とき，励振の非ガウス性の影響が応答に強く現れ，応答分布の非ガウス性が強まることが言える．



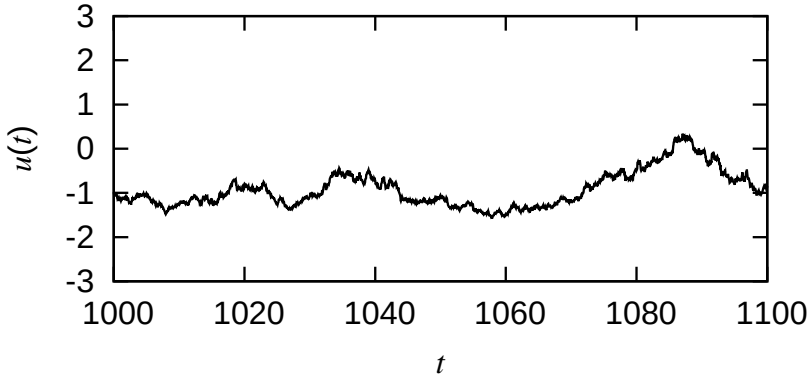
(a) バイモーダル分布励振　　(b) ラプラス分布励振

図 2.17　3 通りの異なる帯域幅パラメータ $\alpha = 1$ $(\alpha/\zeta = 20)$，$\alpha = 0.05$ $(\alpha/\zeta = 1)$，$\alpha = 0.01$ $(\alpha/\zeta = 0.2)$ をもつ非ガウス性励振を受ける線形系 $(\zeta = 0.05,\ \eta = 0,\ \varepsilon = 0)$ の応答分布

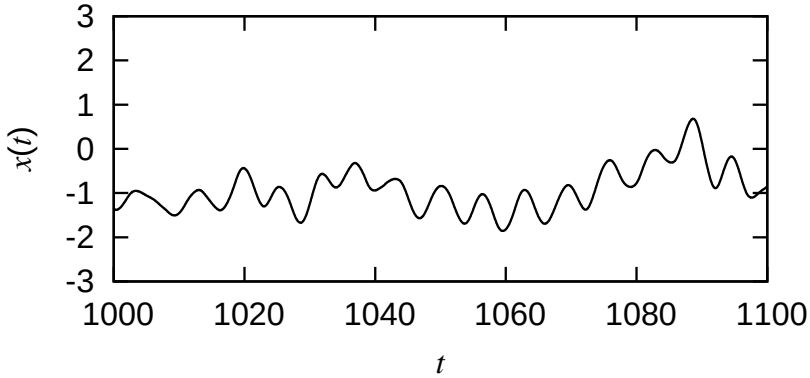


(a) バイモーダル分布励振　　(b) ラプラス分布励振

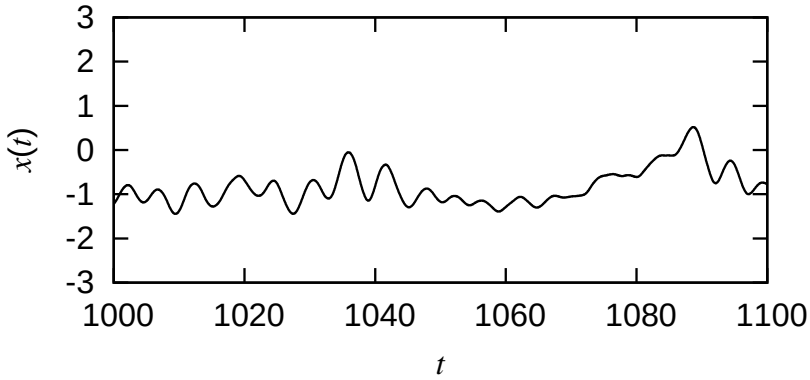
図 2.18　3 通りの異なる帯域幅パラメータ $\alpha = 1$ $(\alpha/\zeta = 20)$，$\alpha = 0.05$ $(\alpha/\zeta = 1)$，$\alpha = 0.01$ $(\alpha/\zeta = 0.2)$ をもつ非ガウス性励振を受ける Duffing 系 $(\zeta = 0.05,\ \eta = 0,\ \varepsilon = 0.1)$ の応答分布



(a) 励振

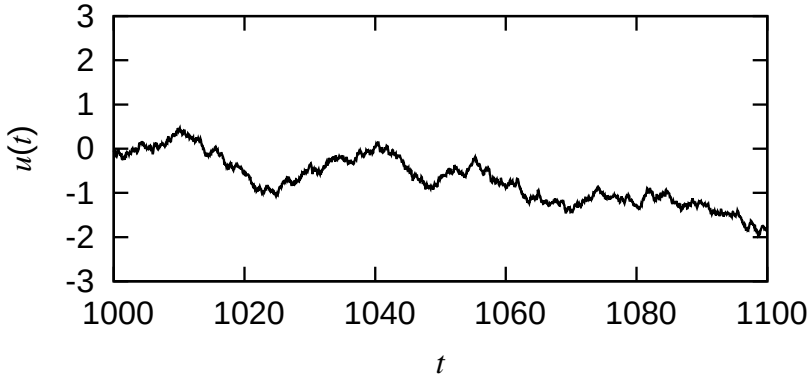


(b) 線形系の応答

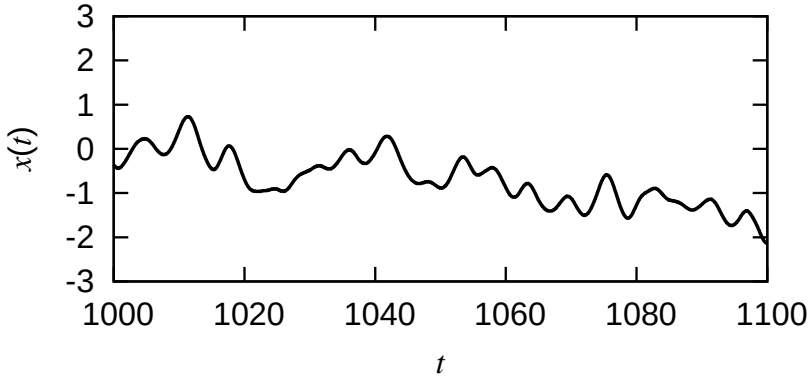


(c) Duffing 系の応答

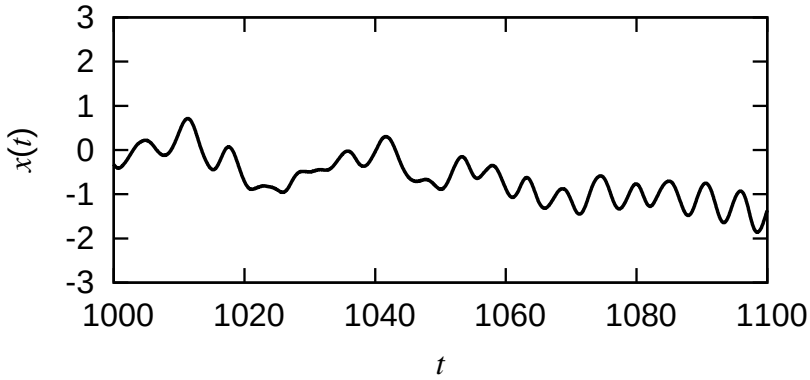
図 2.19　(a) 帯域幅パラメータが $\alpha = 0.01$ $(\alpha/\zeta = 0.2)$ のバイモーダル分布励振の標本関数と，その励振を受ける (b) 線形系 $(\zeta = 0.05,\ \eta = 0,\ \varepsilon = 0)$ と (c) Duffing 系 $(\zeta = 0.05,\ \eta = 0,\ \varepsilon = 0.1)$ の応答の標本関数



(a) 励振



(b) 線形系の応答



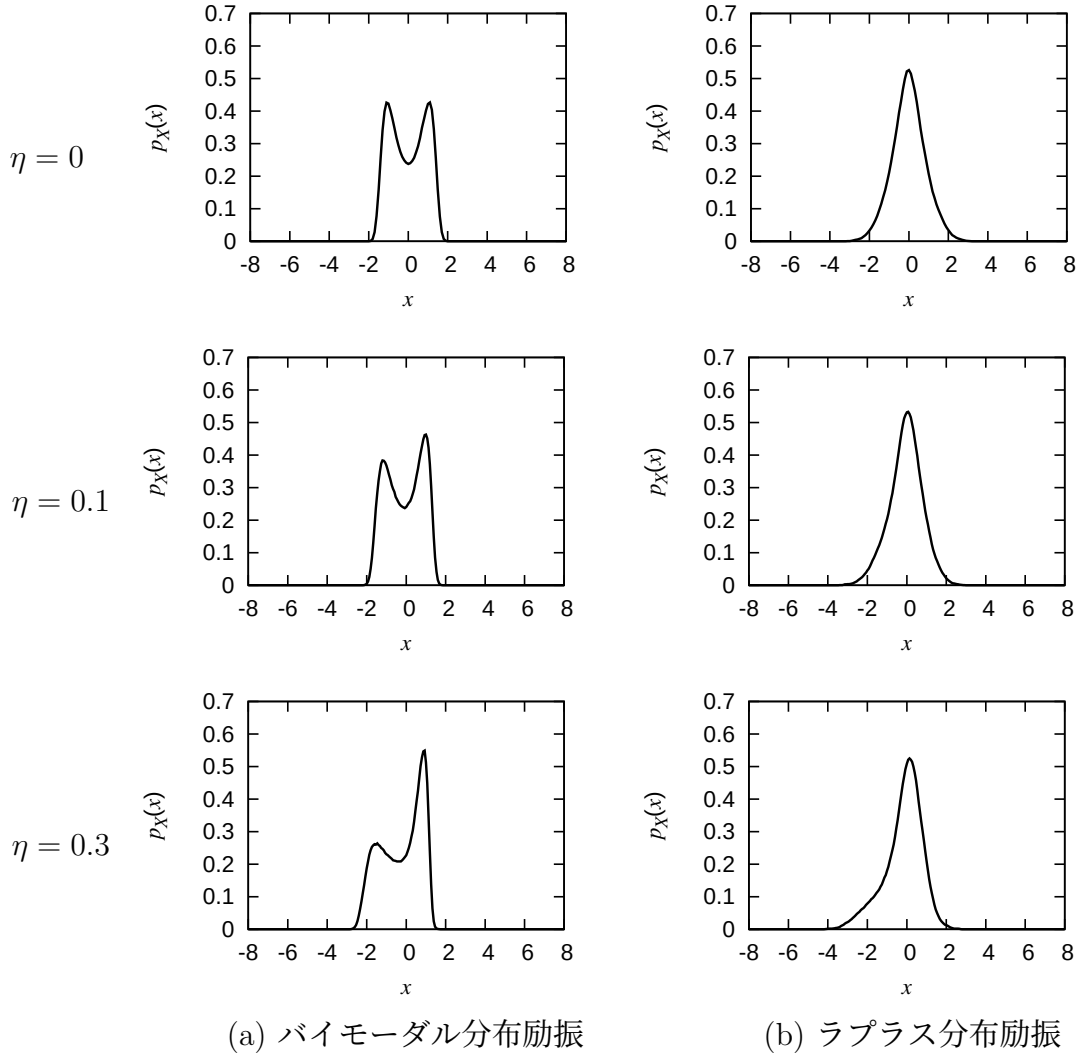
(c) Duffing 系の応答

図 2.20　(a) 帯域幅パラメータが $\alpha = 0.01$ $(\alpha/\zeta = 0.2)$ のラプラス分布励振の標本関数と，その励振を受ける (b) 線形系 $(\zeta = 0.05,\ \eta = 0,\ \varepsilon = 0)$ と (c) Duffing 系 $(\zeta = 0.05,\ \eta = 0,\ \varepsilon = 0.1)$ の応答の標本関数

非対称非線形系の応答分布

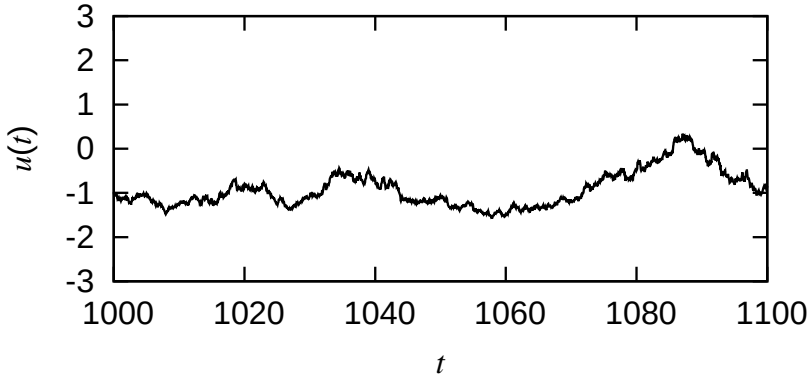
次に，線形系と Duffing 系の応答分布が励振分布に近い形状となった励振帯域幅が $\alpha = 0.01$ ($\alpha/\zeta = 0.2$) の場合において，3 次の非線形パラメータを $\varepsilon = 0.1$ とし，系の非対称性の強さを表す 2 次の非線形パラメータ η を変化させたときの応答分布を図 2.21 に示す．応答分布はいずれも，(a) のバイモーダル分布励振の場合にはピークを 2 つもつ，(b) のラプラス分布励振の場合には鋭いピークをもつといった，励振分布の特徴を有しているが，その中の $\eta = 0.1$，0.3 の応答分布は，2.4.2 節の結果と同様，系の非対称ばね特性により，線形系 (図 2.17，3 段目) と Duffing 系 (図 2.21，$\eta = 0$) の応答分布に比べて，右裾が狭まり，左裾が広がった非対称な分布形状となっている．また，$\eta = 0.1$ と $\eta = 0.3$ の比較から，系の非対称性が強いほど応答分布は負側に大きく広がり，より非対称な形状となることが分かる．

$\alpha = 0.01$ のバイモーダル分布励振とラプラス分布励振，それらの励振を受ける非対称非線形系の応答の標本関数を図 2.22, 2.23 にそれぞれ示す．ここで，図 2.22(a), 2.23(a) の励振はそれぞれ，図 2.19(a), 2.20(a) に示した励振と同じものである．図 2.22(b), 2.23(b) の $\eta = 0.1$ の系では，応答波形が励振波形と近い値をとっており，図 2.19(c), 2.20(c) の Duffing 系の応答と比べて，系の非対称性による大きな変化は見られない．したがって，先に示した線形系と Duffing 系の場合と同様に，系の剛性項の中でも線形項 X が大きく，$X \simeq U$ となるために，応答分布は図 2.21 の 2 段目のように励振分布に比較的近い形状になる．一方，(c) の $\eta = 0.3$ の系の変位応答には，多くの時間で (a) の励振と比べて負の大きな値が現れていることから，$X \simeq U$ が成り立つような状況ではなく，剛性の非線形項も無視できない大きさを有していることが分かる．そして，この非線形項が応答分布の形状に強く影響し，図 2.21 の 3 段目のように非対称性の強い応答分布となる．ただし，図 2.21 の 1, 2 段目の Duffing 系と $\eta = 0.1$ の非対称非線形系の応答分布についても，線形系 (図 2.17，3 段目) の応答分布と比べてそれぞれ，分布の幅が狭まる，非対称な形状になるという非線形項の影響が認められる．そのため，本研究では，変位応答の標本関数を観察することで応答分布に現れる系の非線形性の影響を考察したが，今後はその非線形性の影響をより明確にするために，剛性の線形項と非線形項の大小関係の定量的な評価が必要であると考えられる．

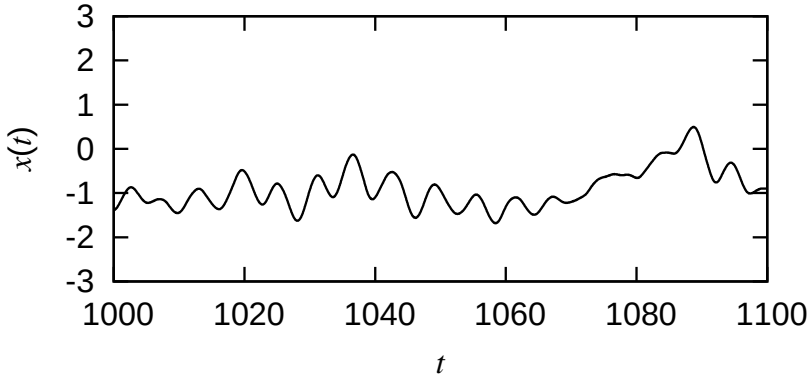


(a) バイモーダル分布励振　　(b) ラプラス分布励振

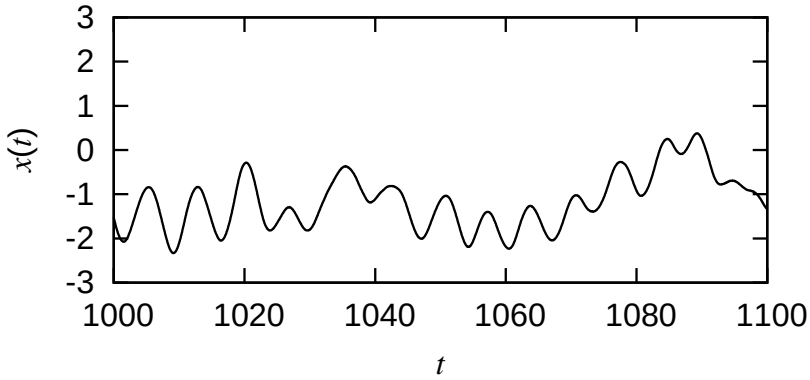
図 2.21　帯域幅パラメータが $\alpha = 0.01$ $(\alpha/\zeta = 0.2)$ の非ガウス性励振を受ける非線形系 $(\zeta = 0.05,\ \eta = 0,\ 0.1,\ 0.3,\ \varepsilon = 0.1)$ の応答分布



(a) 励振

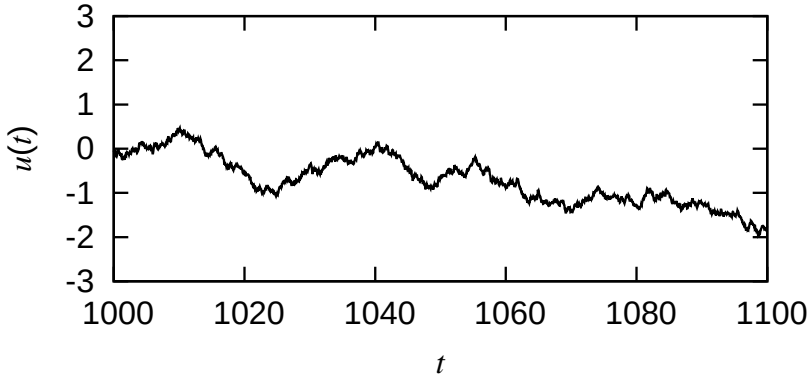


(b) $\eta = 0.1$，$\varepsilon = 0.1$ の系の応答

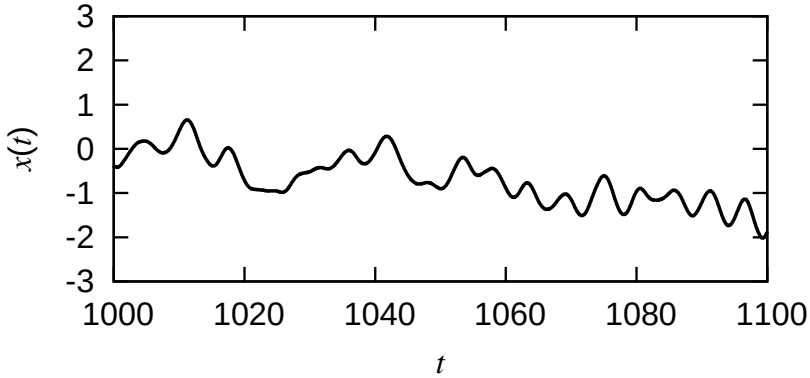


(c) $\eta = 0.3$，$\varepsilon = 0.1$ の系の応答

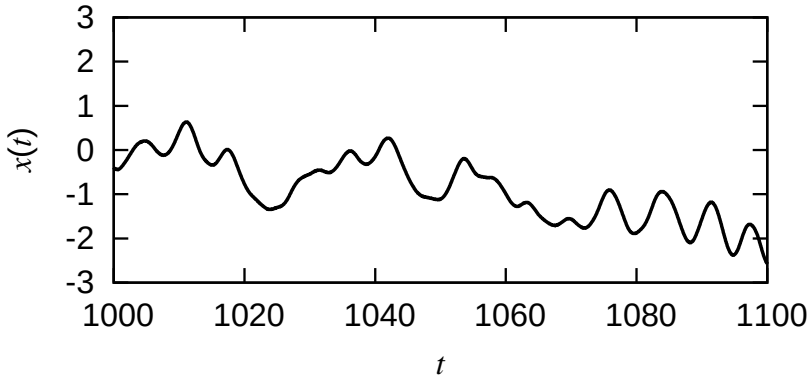
図 2.22　(a) 帯域幅パラメータが $\alpha = 0.01$ $(\alpha/\zeta = 0.2)$ のバイモーダル分布励振の標本関数と，その励振を受ける (b)，(c) 非対称非線形系 $(\zeta = 0.05$，$\eta = 0.1$，0.3，$\varepsilon = 0.1)$ の応答の標本関数



(a) 励振



(b) $\eta = 0.1$，$\varepsilon = 0.1$ の系の応答



(c) $\eta = 0.3$，$\varepsilon = 0.1$ の系の応答

図 2.23　(a) 帯域幅パラメータが $\alpha = 0.01$ $(\alpha/\zeta = 0.2)$ のラプラス分布励振の標本関数と，その励振を受ける (b)，(c) 非対称非線形系 $(\zeta = 0.05$，$\eta = 0.1$，0.3，$\varepsilon = 0.1)$ の応答の標本関数

2.5 結 言

確率密度関数とパワースペクトルによって規定される非ガウス性不規則励振を受ける非線形系の応答分布を調べた．励振の非ガウス分布として，ガウス分布とは形状が大きく異なり，互いの形状にも明らかな違いがあるバイモーダル分布とラプラス分布の 2 種類を用いた．また，励振のパワースペクトルについては，その帯域幅に着目し，線形系の周波数応答関数の帯域幅に比べて狭い場合から広い場合まで幅広く考慮した．これらの非ガウス分布とパワースペクトルを有する励振の標本関数を生成し，その励振を受ける線形系と Duffing 系および非対称非線形系の定常応答分布を数値計算で求め，励振の非ガウス性と帯域幅，そして系の非対称非線形性の違いによって現れる応答分布の特徴を調べ，以下の知見が得られた．

- 励振帯域幅が系の帯域幅に比べて広い場合の応答分布は，励振の非ガウス分布の違いによらず，ガウス性ホワイトノイズを受ける系の応答分布に近い形状となる．

- 励振帯域幅が系の帯域幅に比べて狭いとき，励振の非ガウス性の影響が応答に強く現れ，応答分布は励振分布に近い形状の非ガウス分布となる．この理由を，直流成分が卓越した励振とその励振を受ける系の応答の特徴と，系の剛性の線形項と非線形項の大きさに着目して考察した．

- 励振帯域幅が狭い場合において，系の非線形性が強くなり，剛性の非線形項が線形項と比較して大きくなるにしたがって，応答分布に与える非線形性の影響が顕著になることを，非対称非線形系の計算結果を用いて示した．

第3章　等価非ガウス励振化法を用いた非ガウス性不規則励振を受ける振動系の応答モーメントの解析

3.1　緒言

非ガウス性不規則励振を受ける振動系の4次までの応答モーメントを解析的に求めるために，等価非ガウス励振化法という手法を提案する．非ガウス性励振をCai and Linの確率微分方程式モデルで記述するとき，その確率微分方程式と系の運動方程式から，応答のモーメント方程式を導出することができる．しかし，励振分布として一般的な非ガウス分布形状のものを対象とするとき，励振の確率微分方程式の拡散係数が複雑な形となり，得られたモーメント方程式は一般に閉じた形とならない．そこで提案手法では，閉じたモーメント方程式を得るために，励振の確率微分方程式の拡散係数を，近似的に等価拡散係数で置き換える．等価拡散係数の二乗は2次多項式で与えられ，その多項式の係数は，もとの拡散係数と等価拡散係数の二乗平均誤差が最小となるように決定される．

計算例では，解析結果とモンテカルロ・シミュレーションから得られた結果の比較を通して，励振の歪度・尖度と帯域幅が大きく異なるいずれの場合でも，応答の分散，歪度，尖度が正確に得られることを示す．また，等価拡散係数に対応する等価非ガウス性励振の確率密度関数をFokker-Planck方程式から導出し，その導出された分布の尖度と歪度を，もとの励振分布の歪度と尖度と比較することによって，4次までの応答モーメントが精度良く得られる理由を考察する．

3.2 解析モデル

3.2.1 系の運動方程式

次式の運動方程式で記述される 1 自由度線形系を考える．

$$\ddot{X} + 2\zeta\dot{X} + X = U(t) \tag{3.1}$$

ここで，ζ は減衰比，$U(t)$ は次に示す非ガウス性不規則励振である．また，t は系の不減衰固有振動数によって無次元化された時間を表す．

3.2.2 非ガウス性不規則励振

対象とする非ガウス性不規則励振 $U(t)$ は，非ガウス確率密度関数 $p_U(u)$ と次式のパワースペクトル $S_U(\omega)$ によって規定される．

$$S_U(\omega) = \frac{\alpha \mathrm{E}[U^2]}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)} \tag{3.2}$$

ここで，α は励振の帯域幅パラメータである．図 3.1 に，$\alpha = 1$，0.1，0.05，0.02，0.01，$\mathrm{E}[U^2] = 1$ とした場合の $S_U(\omega)$ を示す．

与えられた非ガウス分布 $p_U(u)$ と式 (3.2) で与えられるパワースペクトル $S_U(\omega)$ にしたがう励振 $U(t)$ は，次の 1 次元伊藤型確率微分方程式で記述される [65]．

$$dU = -\alpha U dt + D(U) dB(t) \tag{3.3}$$

ここで，α は $S_U(\omega)$ に含まれる帯域幅パラメータと同じであり，$dB(t)$ はウィーナー過程の増分を表す．また，式中に含まれる拡散係数 $D(u)$ は，次式で与えられる．

$$D^2(u) = -\frac{2\alpha}{p_U(u)} \int_{-\infty}^{u} s p_U(s) ds \tag{3.4}$$

この式から，非ガウス分布 $p_U(u)$ についての情報は拡散係数 $D(u)$ に含まれることが分かる．一方，パワースペクトル $S_U(\omega)$ についての情報はドリフト係数に含まれる．

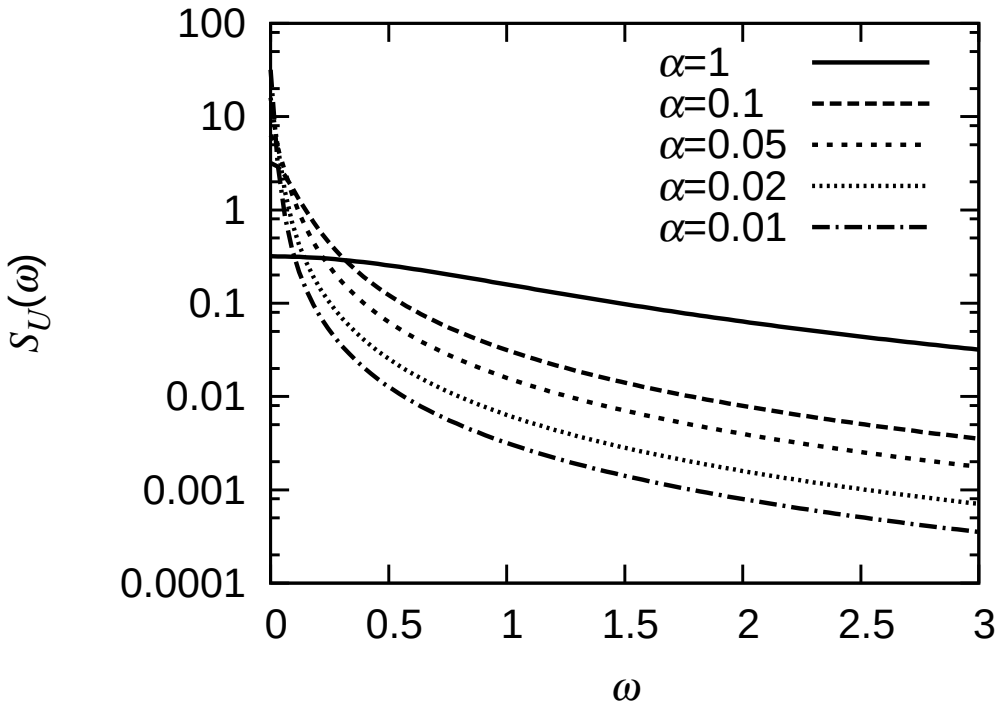


図 3.1　励振のパワースペクトル

3.3　等価非ガウス励振化法

3.3.1　モーメント方程式

系の運動方程式 (3.1) と励振の支配方程式 (3.3) を組み合わせて拡大システムとして捉えると，そのシステムを記述する伊藤型確率微分方程式の組は次式で表される．

$$dX = \dot{X}dt \tag{3.5}$$

$$d\dot{X} = (-2\zeta\dot{X} - X + U)dt \tag{3.6}$$

$$dU = -\alpha U dt + D(U)dB(t) \tag{3.7}$$

伊藤の公式 [198] を用いると，変位 X，速度 $\dot{X}$，励振 U についての $(i+j+k)$ 次のモーメント方程式が式 (3.5)-(3.7) より，次のように導かれる．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{E}[X^i\dot{X}^jU^k] =& i\mathrm{E}[X^{i-1}\dot{X}^{j+1}U^k] - j\mathrm{E}[X^{i+1}\dot{X}^{j-1}U^k] - (2j\zeta + k\alpha)\,\mathrm{E}[X^i\dot{X}^jU^k] \\ &+ j\mathrm{E}[X^i\dot{X}^{j-1}U^{k+1}] + \frac{1}{2}k(k-1)\mathrm{E}[X^i\dot{X}^jU^{k-2}D^2(U)]\end{aligned} \tag{3.8}$$

モーメント方程式の右辺に現れる $\mathrm{E}[X^i\dot{X}^jU^{k-2}D^2(U)]$ は，式 (3.4) から決定される拡散係数 $D(u)$ が一般に複雑な形となるため，$(i+j+k)$ 次以下のモーメントにならず，モーメント方程式 (3.8) は閉じた形とならない．そこで本研究では，閉じたモーメント方程式を近似的に得るために，等価非ガウス励振化法という手法を提案する．

3.3.2 等価非ガウス励振化法

励振の確率微分方程式に含まれる拡散係数 $D(U)$ を，等価拡散係数 $D_{eq}(U)$ で近似的に置き換える．$D_{eq}(U)$ の二乗は次式に示すように 2 次多項式で与えられる．

$$D_{eq}^2(U) = A_{eq}U^2 + B_{eq}U + C_{eq} \tag{3.9}$$

多項式の係数 A_{eq}，B_{eq}，C_{eq} は，もとの拡散係数の二乗 $D^2(U)$ と等価拡散係数の二乗 $D_{eq}^2(U)$ の二乗平均誤差

$$\mathrm{E}[e^2] = \mathrm{E}[(D^2(U) - A_{eq}U^2 - B_{eq}U - C_{eq})^2] \tag{3.10}$$

が最小となるように決定される．この基準にしたがって計算すると，

$$\frac{\partial \mathrm{E}[e^2]}{\partial A_{eq}} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{E}[e^2]}{\partial B_{eq}} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{E}[e^2]}{\partial C_{eq}} = 0 \tag{3.11}$$

より，係数 A_{eq}，B_{eq}，C_{eq} は次式のように与えられる．

$$\begin{aligned} A_{eq} =& \frac{(\mathrm{E}[U^2] - \mathrm{E}[U]^2)(\mathrm{E}[U^2D^2(U)] - \mathrm{E}[U^2]\mathrm{E}[D^2(U)])}{(\mathrm{E}[U^4] - \mathrm{E}[U^2]^2)(\mathrm{E}[U^2] - \mathrm{E}[U]^2) - (\mathrm{E}[U^3] - \mathrm{E}[U]\mathrm{E}[U^2])^2} \\ &- \frac{(\mathrm{E}[U^3] - \mathrm{E}[U]\mathrm{E}[U^2])(\mathrm{E}[U^2D^2(U)] - \mathrm{E}[U^2]\mathrm{E}[D^2(U)])}{(\mathrm{E}[U^4] - \mathrm{E}[U^2]^2)(\mathrm{E}[U^2] - \mathrm{E}[U]^2) - (\mathrm{E}[U^3] - \mathrm{E}[U]\mathrm{E}[U^2])^2} \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$B_{eq} = \frac{(\mathrm{E}[U^4] - \mathrm{E}[U^2]^2)(\mathrm{E}[UD^2(U)] - \mathrm{E}[U]\mathrm{E}[D^2(U)])}{(\mathrm{E}[U^4] - \mathrm{E}[U^2]^2)(\mathrm{E}[U^2] - \mathrm{E}[U]^2) - (\mathrm{E}[U^3] - \mathrm{E}[U]\mathrm{E}[U^2])^2} \tag{3.13}$$

$$C_{eq} = \mathrm{E}[D^2(U)] - A_{eq}\mathrm{E}[U^2] - B_{eq}\mathrm{E}[U] \tag{3.14}$$

ここで，式 (3.8) において $(i,j,k)=(0,0,2),(0,0,3),(0,0,4)$ とおくことで得られる定常非ガウス性励振 $U(t)$ の 2 次，3 次，4 次のモーメント方程式は次式となる．

$$-2\alpha \mathrm{E}[U^2]+\mathrm{E}[D^2(U)]=0 \tag{3.15}$$

$$-3\alpha \mathrm{E}[U^3]+3\mathrm{E}[UD^2(U)]=0 \tag{3.16}$$

$$-4\alpha \mathrm{E}[U^4]+6\mathrm{E}[U^2D^2(U)]=0 \tag{3.17}$$

式 (3.12)-(3.17) より，係数 A_{eq}，B_{eq}，C_{eq} は $U(t)$ の 4 次までのモーメントにより決定されることが分かる．これらのモーメント $\mathrm{E}[U^n]$ $(n=1,2,3,4)$ は，励振の規定時に与えられる非ガウス確率密度関数 $p_U(u)$ を用いて，解析的または数値的に求めることができる．

式 (3.7) に含まれる $D(U)$ を上記の計算で得られた $D_{eq}(U)$ で置き換えると，もとの励振を記述する確率微分方程式に対応する，等価的な確率微分方程式が得られる．

$$dU=-\alpha U dt+\sqrt{A_{eq}U^2+B_{eq}U+C_{eq}}dB(t) \tag{3.18}$$

したがって，式 (3.18) で表される励振は，もとの非ガウス性励振に対応する等価非ガウス性励振としてみなすことができる．また，以上の解析手順の中で，ドリフト係数の置き換えは行っていないため，式 (3.18) にしたがう等価非ガウス性励振のパワースペクトルは式 (3.2) で表されるものに等しく，二乗平均値もまたもとの励振と同じ値となる．

式 (3.18) と式 (3.5)，(3.6) より，応答と励振に関する $(i+j+k)$ 次のモーメント方程式が次のように得られる．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{E}[X^i\dot{X}^jU^k]=&i\mathrm{E}[X^{i-1}\dot{X}^{j+1}U^k]-j\mathrm{E}[X^{i+1}\dot{X}^{j-1}U^k]\\&+\left(-2j\zeta-k\alpha+\frac{1}{2}k(k-1)A_{eq}\right)\mathrm{E}[X^i\dot{X}^jU^k]\\&+j\mathrm{E}[X^i\dot{X}^{j-1}U^{k+1}]+\frac{1}{2}k(k-1)B_{eq}\mathrm{E}[X^i\dot{X}^jU^{k-1}]\\&+\frac{1}{2}k(k-1)C_{eq}\mathrm{E}[X^i\dot{X}^jU^{k-2}]\end{aligned} \tag{3.19}$$

式 (3.19) の両辺に含まれるモーメントはいずれも $(i+j+k)$ 次以下であるため，式 (3.19) は閉じた形となっており，これを解くことで，応答モーメントの近似解が得られる．定常応答を対象とする場合には，式 (3.19) 左辺の時間微分項を 0 とおいた代数方程式を解くことで応答モーメントが求められる．

3.4 計算例 1：対称型励振分布

これ以降の 2 つの節では，励振のパワースペクトル $S_U(\omega)$ が式 (3.2) で表され，励振の非ガウス分布 $p_U(u)$ として様々な形状の分布が与えられる場合に等価非ガウス励振化法を適用し，モーメント方程式から得られる応答の分散，歪度，尖度をモンテカルロ・シミュレーションで得られる結果と比較することで，提案手法の有効性を検証する．本節では，対称型励振分布の場合の計算例を示す．

3.4.1 励振分布と拡散係数

2 種類の対称型励振分布 $p_U(u)$ を考える．1 つ目は，次式で表される一般化ガウス分布 [188] である．

$$p_U(u) = \frac{\kappa}{2a\Gamma(1/\kappa)} \exp\left(-\frac{|u-\mu|^\kappa}{a^\kappa}\right) \tag{3.20}$$

ここで，$\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数，μ は平均であり，本研究では $\mu = 0$ とする．$\kappa > 0$ は分布の形状を決定するパラメータで，κ を変化させることで様々な大きさの尖度をもつ確率密度関数を表現することができる．特に，$\kappa = 2$ のときはガウス分布，$\kappa = 1$ のときはラプラス分布，$\kappa \to \infty$ のときは一様分布となる．a は分散を決定するパラメータであり，一般化ガウス分布の分散 σ_U^2 は次式で与えられる．

$$\sigma_U^2 = a^2 \Gamma\left(\frac{3}{\kappa}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\kappa}\right)^{-1} \tag{3.21}$$

本研究では，形状パラメータ κ の値によらず，その分散が $\sigma_U^2 = 1$ となるように，以降，a を次のように与える．

$$a = \sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{\kappa}\right)\Gamma\left(\frac{3}{\kappa}\right)^{-1}} \tag{3.22}$$

また，一般化ガウス分布の尖度 γ_{4U} は次式で表される．

$$\gamma_{4U} = \Gamma\left(\frac{5}{\kappa}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\kappa}\right)\Gamma\left(\frac{3}{\kappa}\right)^{-2} - 3 \tag{3.23}$$

ここで，この式はガウス分布 ($\kappa = 2$) の尖度が 0 となるように与えている．図 3.2 と図 3.3 に，κ を様々に変化させたときの一般化ガウス分布を示す．図 3.3 は，縦軸を対数軸として図示したものである．また，κ の変化に対する尖度の変化の様子を図 3.4 にまとめた．これらの図より，一般化ガウス分布が非常に広い範囲の尖度をもつ非ガウス分布を表現できることが分かる．$\kappa < 2$ のときはガウス分布 ($\kappa = 2$) に比べて尖度が大きい分布となる．一方，$\kappa > 2$ のときはガウス分布に比べて尖度の小さい分布となり，κ が大きいほど一様分布に近い分布形状となる．

式 (3.20) の一般化ガウス分布に対応する拡散係数 $D(u)$ は，式 (3.4) より，

$$D^2(u) = \frac{2\alpha a^2}{\kappa}\Gamma\left(\frac{2}{\kappa}, \frac{|u|^\kappa}{a^\kappa}\right)\exp\left(\frac{|u|^\kappa}{a^\kappa}\right) \tag{3.24}$$

で与えられる．ここで，$\Gamma(\cdot,\cdot)$ は次式で表される第 2 種不完全ガンマ関数である．

$$\Gamma(c, x) = \int_x^\infty t^{c-1}e^{-t}dt \tag{3.25}$$

図 3.5 に，$D^2(u)/\alpha$ を示す．$D^2(u)$ の特徴は $\kappa = 2$ を境に変化し，$\kappa < 2$ のときは $u = 0$ で最小値をとり，$\kappa > 2$ のときは $u = 0$ で最大値をとる．

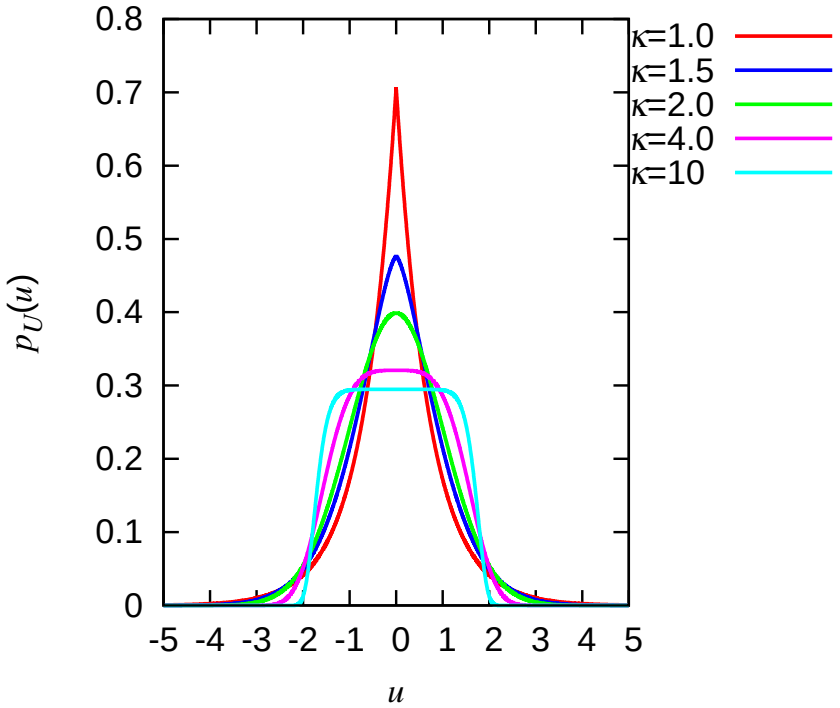


図 3.2　一般化ガウス分布 (平均 $\mu = 0$，分散 $\sigma_U^2 = 1$)

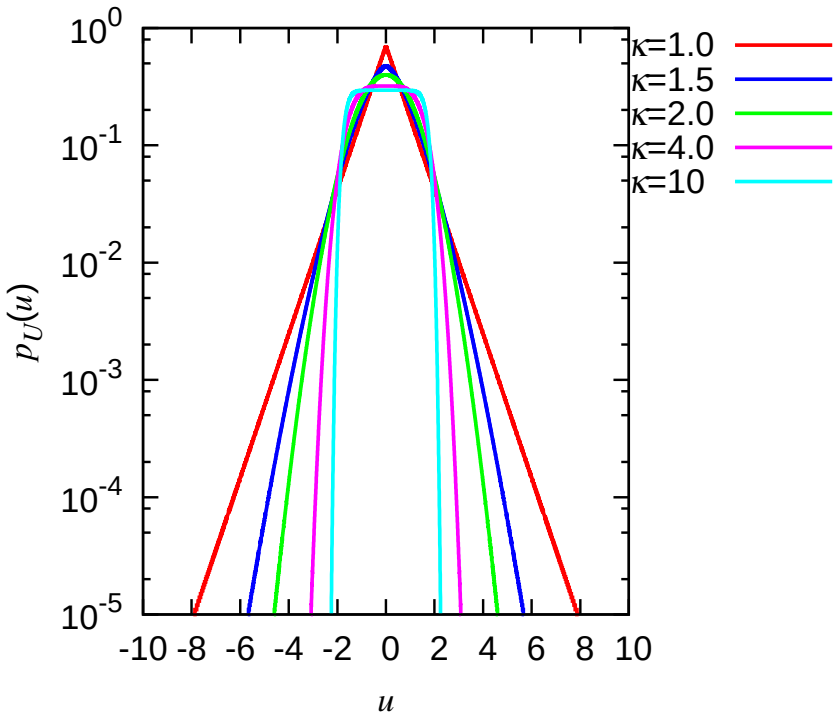


図 3.3　一般化ガウス分布 (平均 $\mu = 0$，分散 $\sigma_U^2 = 1$)．縦軸：対数軸

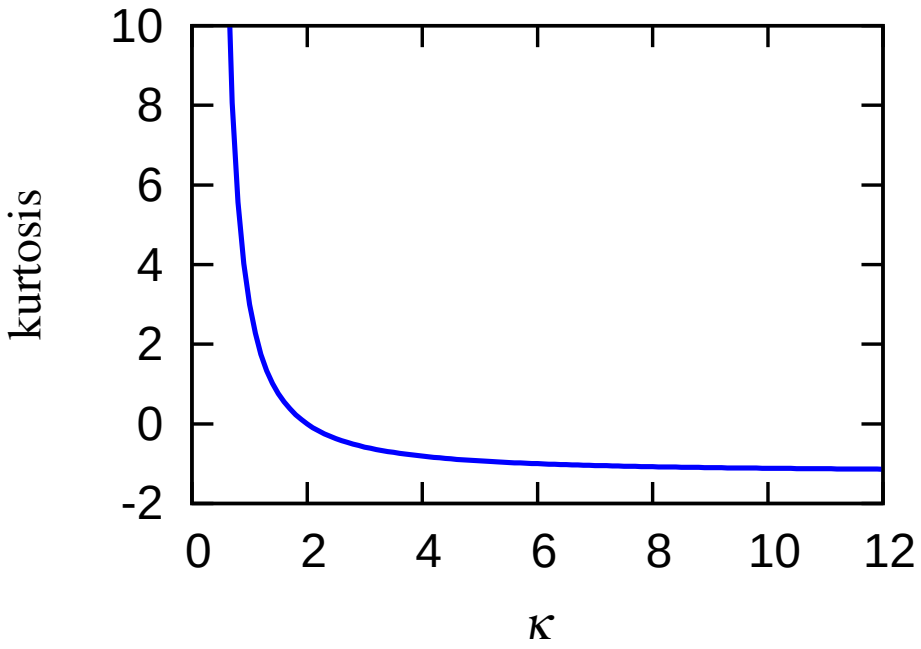


図 3.4　一般化ガウス分布の尖度

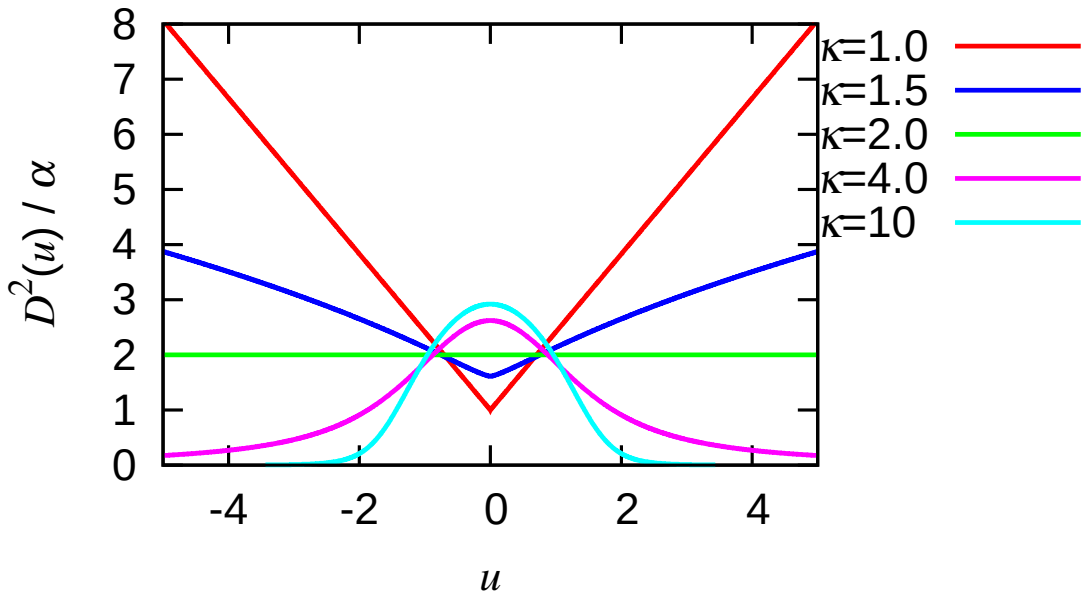


図 3.5　一般化ガウス分布に対応する拡散係数

2つ目の励振分布 $p_U(u)$ として，1例目の一般化ガウス分布が表現できない形状をもつ，バイモーダル分布を考える．

$$p_U(u) = C\exp(au^2 + bu^4) \quad (a > 0,\ b < 0) \tag{3.26}$$

ここで，a，b は分布形状を決定するパラメータ，C は正規化定数である．本研究では，二乗平均値が $\mathrm{E}[U^2] = 1.0$ となるよう，a，b，C の値を次のように設定する．

$$a = 0.8935,\ b = -0.3991,\ C = 0.2269 \tag{3.27}$$

図 3.6 に，このパラメータ値をもつバイモーダル分布を示す．また，バイモーダル分布に対応する拡散係数 $D(u)$ は，式 (3.4) より，次式で与えられる．

$$D^2(u) = \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-b}}\exp\left\{-b\left(u^2 + \frac{a}{2b}\right)^2\right\}\mathrm{erfc}\left\{\sqrt{-b}\left(u^2 + \frac{a}{2b}\right)\right\} \tag{3.28}$$

図 3.7 に，式 (3.27) のパラメータ値での $D^2(u)/\alpha$ を示す．この拡散係数は，図 3.5 中の $\kappa > 2$ の一般化ガウス分布に対応する拡散係数と同様，$u = 0$ で最大値をとる．

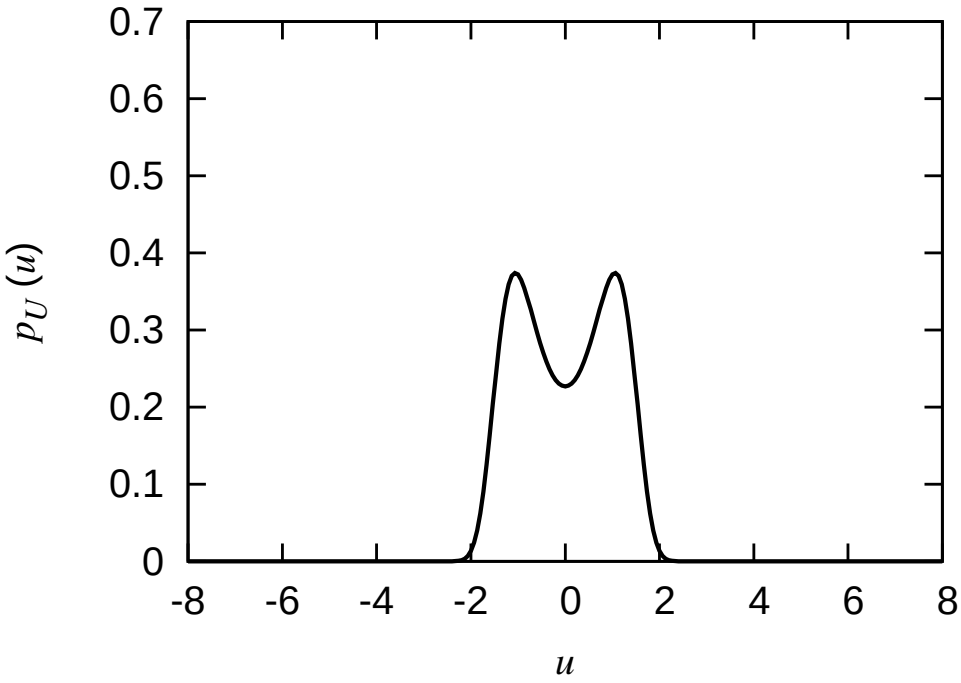


図 3.6　バイモーダル分布（$a = 0.8935$，$b = -0.3991$，$C = 0.2269$）

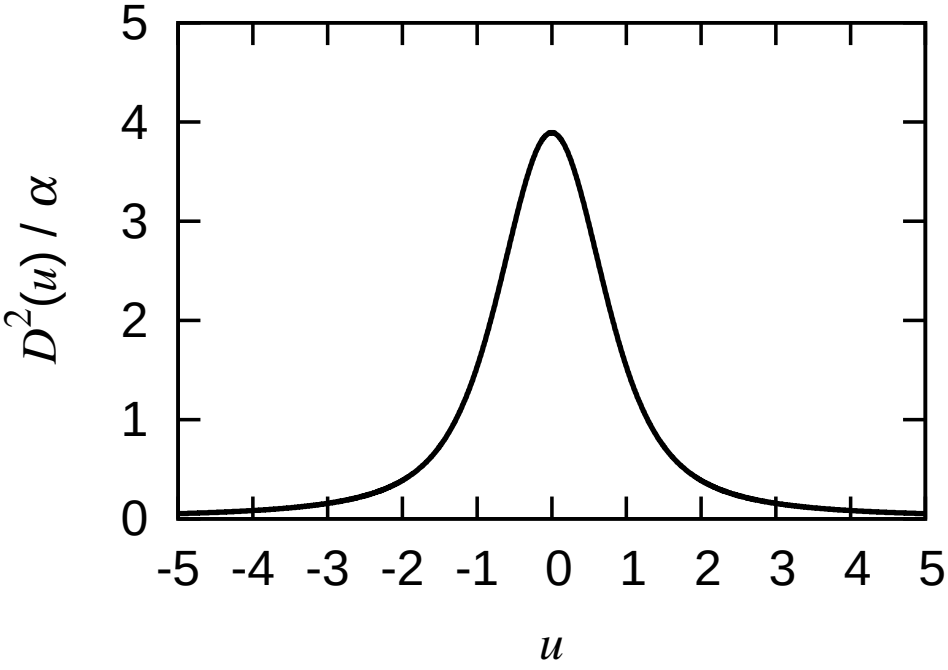


図 3.7　バイモーダル分布に対応する拡散係数

3.4.2 等価非ガウス励振化法の適用

式 (3.24), (3.28) に示されるように，拡散係数 $D(U)$ が非常に複雑な形であるため，モーメント方程式 (3.8) は閉じた形とならない．閉じたモーメント方程式を近似的に得るために，3.3 節で述べたように，もとの拡散係数を近似的に式 (3.9) で表される等価拡散係数 $D_{eq}(U)$ で置き換える．本節で対象とする励振分布は平均 0 の対称型であるため，奇数次のモーメントが 0 となる．したがって，式 (3.9) に含まれる係数 B_{eq} は 0 となる．また，A_{eq} と C_{eq} はそれぞれ次式で与えられる．

$$A_{eq} = \frac{\mathrm{E}[U^2 D^2(U)] - \mathrm{E}[U^2]\mathrm{E}[D^2(U)]}{\mathrm{E}[U^4] - \mathrm{E}[U^2]^2} \tag{3.29}$$

$$C_{eq} = \mathrm{E}[D^2(U)] - A_{eq}\mathrm{E}[U^2] \tag{3.30}$$

これらの式中に含まれるモーメントは，一般化ガウス分布の場合には，式 (3.20) と式 (3.24) から解析的に求めることができ，それぞれ，

$$\mathrm{E}[U^n] = a^n \Gamma\left(\frac{n+1}{\kappa}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\kappa}\right)^{-1}, \quad n = 2, 4 \tag{3.31}$$

$$\mathrm{E}[D^2(U)] = 2\alpha a^2 \Gamma\left(\frac{3}{\kappa}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\kappa}\right)^{-1} \tag{3.32}$$

$$\mathrm{E}[U^2 D^2(U)] = \frac{2}{3}\alpha a^4 \Gamma\left(\frac{5}{\kappa}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\kappa}\right)^{-1} \tag{3.33}$$

となる．一方，バイモーダル分布の場合には，式 (3.26), (3.28) を用いて数値的に求めた．

式 (3.7) に含まれる $D(U)$ を式 (3.29) と式 (3.30) を係数にもつ等価拡散係数 $D_{eq}(U)$ で置き換え (式 (3.18))，置き換えられた式 (3.18) と式 (3.5)，(3.6) から，式 (3.19) にしたがって導出される応答と励振に関する 4 次までのモーメント方程式を解くことで，応答の分散と尖度を求める．この計算例では，励振分布が平均 0 の対称型かつ系が線形であるため，奇数次の応答モーメントは全て 0 となる．そのため，次に示す 2 次と 4 次のモーメント方程式 (ただし，ここでは $B_{eq} = 0$) のみを用いた．

2 次のモーメント方程式

$$2\mathrm{E}[X\dot{X}] = 0 \tag{3.34}$$

$$-\mathrm{E}[X^2] + \mathrm{E}[\dot{X}^2] - 2\zeta\mathrm{E}[X\dot{X}] + \mathrm{E}[XU] = 0 \tag{3.35}$$

$$-\alpha\mathrm{E}[XU] + \mathrm{E}[\dot{X}U] = 0 \tag{3.36}$$

$$-2\mathrm{E}[X\dot{X}] - 4\zeta\mathrm{E}[\dot{X}^2] + 2\mathrm{E}[\dot{X}U] = 0 \tag{3.37}$$

$$-\mathrm{E}[XU] - (2\zeta + \alpha)\mathrm{E}[\dot{X}U] + 2\mathrm{E}[U^2] = 0 \tag{3.38}$$

$$(-2\alpha + A_{eq})\mathrm{E}[U^2] + B_{eq}\mathrm{E}[U] + C_{eq} = 0 \tag{3.39}$$

4 次のモーメント方程式

$$4\mathrm{E}[X^3\dot{X}] = 0 \tag{3.40}$$

$$-\mathrm{E}[X^4] - 2\zeta\mathrm{E}[X^3\dot{X}] + 3\mathrm{E}[X^2\dot{X}^2] + \mathrm{E}[X^3U] = 0 \tag{3.41}$$

$$-2\mathrm{E}[X^3\dot{X}] - 4\zeta\mathrm{E}[X^2\dot{X}^2] + 2\mathrm{E}[X\dot{X}^3] + \mathrm{E}[X^2\dot{X}U] = 0 \tag{3.42}$$

$$-3\mathrm{E}[X^2\dot{X}^2] - 6\zeta\mathrm{E}[X\dot{X}^3] + 3\mathrm{E}[X\dot{X}^2U] + \mathrm{E}[\dot{X}^4] = 0 \tag{3.43}$$

$$-\alpha\mathrm{E}[X^3U] + 3\mathrm{E}[X^2\dot{X}U] = 0 \tag{3.44}$$

$$(-2\alpha + A_{eq})\mathrm{E}[X^2U^2] + 2\mathrm{E}[X\dot{X}U^2] + B_{eq}\mathrm{E}[X^2U] + C_{eq}\mathrm{E}[X^2] = 0 \tag{3.45}$$

$$(-3\alpha + 3A_{eq})\mathrm{E}[XU^3] + \mathrm{E}[\dot{X}U^3] + 3B_{eq}\mathrm{E}[XU^2] + 3C_{eq}\mathrm{E}[XU] = 0 \tag{3.46}$$

$$-\mathrm{E}[X^3U] - (2\zeta + \alpha)\mathrm{E}[X^2\dot{X}U] + \mathrm{E}[X^2U^2] + 2\mathrm{E}[X\dot{X}^2U] = 0 \tag{3.47}$$

$$-2\mathrm{E}[X^2\dot{X}U] - (4\zeta + \alpha)\mathrm{E}[X\dot{X}^2U] + 2\mathrm{E}[X\dot{X}U^2] + \mathrm{E}[\dot{X}^3U] = 0 \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned} &- \mathrm{E}[X^2U^2] - (2\zeta + 2\alpha - A_{eq})\mathrm{E}[X\dot{X}U^2] + \mathrm{E}[XU^3] + \mathrm{E}[\dot{X}^2U^2] \\ &+ B_{eq}\mathrm{E}[X\dot{X}U] + C_{eq}\mathrm{E}[X\dot{X}] = 0 \end{aligned} \tag{3.49}$$

$$-4\mathrm{E}[X\dot{X}^3] - 8\zeta\mathrm{E}[\dot{X}^4] + 4\mathrm{E}[\dot{X}^3U] = 0 \tag{3.50}$$

$$-3\mathrm{E}[X\dot{X}^2U] - (6\zeta + \alpha)\mathrm{E}[\dot{X}^3U] + 3\mathrm{E}[\dot{X}^2U^2] = 0 \tag{3.51}$$

$$-2\mathrm{E}[X\dot{X}U^2] - (4\zeta + 2\alpha - A_{eq})\mathrm{E}[\dot{X}^2U^2] + 2\mathrm{E}[\dot{X}U^3] + B_{eq}\mathrm{E}[\dot{X}^2U] + C_{eq}\mathrm{E}[\dot{X}^2] = 0 \tag{3.52}$$

$$-\mathrm{E}[XU^3] - (2\zeta + 3\alpha - 3A_{eq})\mathrm{E}[\dot{X}U^3] + \mathrm{E}[U^4] + 3B_{eq}\mathrm{E}[\dot{X}U^2] + 3C_{eq}\mathrm{E}[\dot{X}U] = 0 \tag{3.53}$$

$$(-4\alpha + 6A_{eq})\mathrm{E}[U^4] + 6B_{eq}\mathrm{E}[U^3] + 6C_{eq}\mathrm{E}[U^2] = 0 \tag{3.54}$$

3.4.3 計算パラメータ

計算時には，以下のパラメータの値を使用した．

- 系の減衰比 $\zeta = 0.05$
- 一般化ガウス分布の形状パラメータ

$$\begin{aligned}
&\kappa = 1 \quad (\text{分布の尖度}\ \gamma_{4U} = 3,\ \text{ラプラス分布}) \\
&\kappa = 1.5\ (\text{分布の尖度}\ \gamma_{4U} = 0.761954) \\
&\kappa = 4 \quad (\text{分布の尖度}\ \gamma_{4U} = -0.811560) \\
&\kappa = 10\ \ (\text{分布の尖度}\ \gamma_{4U} = -1.11584)
\end{aligned}$$

一般化ガウス分布の形状パラメータ κ については，分布の尖度 γ_{4U} がガウス分布に比べて大きい場合に対応する 2 通り ($\kappa = 1, 1.5$) と，小さい場合に対応する 2 通り ($\kappa = 4, 10$) を採用し，励振分布の尖度を広く変化させて応答解析を行う．バイモーダル分布に含まれるパラメータについては，式 (3.27) のように与える．

3.4.4 計算結果

初めに，励振分布が一般化ガウス分布の場合の結果を示す．定常変位応答の分散と尖度の解析結果を図 3.8 と図 3.9 にそれぞれ示す．図 3.9 については，実線が解析結果を，$\odot$ がモンテカルロ・シミュレーションによる結果をそれぞれ表している．また，これらの図の横軸は，励振の帯域幅パラメータ α と系の周波数応答関数の帯域幅 ζ の比をとった

$$A = \alpha/\zeta \tag{3.55}$$

である．$A < 1$ は励振の帯域幅が系の帯域幅に比べて狭い場合に対応し，$A > 1$ は励振の帯域幅が系の帯域幅に比べて広い場合に対応する．

図 3.8 に示す分散の解析結果については，励振の分布形状パラメータ κ の違いによらず，同じ値となる．これは，線形系の応答分散を決定する励振のパワースペクトルが，κ に依存せず，同じ式 (3.2) で表されるためである．変位応答の分散 σ_X^2 の厳密解は，式 (3.2) と系の周波数応答関数より，次式で与えられる．

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_U(\omega) d\omega = \frac{\mathrm{E}[U^2]}{2} \frac{A+2}{\zeta^2(1+A)^2 + 1 - \zeta^2} \tag{3.56}$$

本研究では，図 3.8 に示す結果と式 (3.56) で与えられる厳密解が一致することを確認した．

次に，図 3.9 に示す尖度の解析結果は，いずれの分布形状パラメータ κ と帯域幅パラメータ A の場合でも，モンテカルロ・シミュレーションの結果と良く一致しており，提案手法が広い範囲の尖度と帯域幅をもつ励振に対して適用可能であることを示している．また，応答分散と異なり，応答の尖度については，κ の変化にしたがって，その値が変化することが分かる．

解析結果より，A が 0 に近い，すなわち励振の帯域幅が系の帯域幅に比べて狭いほど，応答の分散と尖度は，励振の分散 ($\sigma_U^2 = 1$) と尖度 (3.4.3 節に記載) に近い値となることが分かる．この理由は 2 章で述べたことと同様であると考えられる．すなわち，励振帯域幅が狭いほど，図 3.1 に示すように，励振の直流成分 ($\omega = 0$) が大きな値となり，その他の周波数成分は小さくなるため，励振の変動は非常に緩やかなものとなる．このとき，その励振を受ける系の速度応答と加速度応答もまた非常に小さくなるため，系の運動方程式 (3.1) から近似的に，

$$X \approx U \tag{3.57}$$

という関係が成立する．また，励振 U は非ガウス分布 $p_U(u)$ にしたがうため，結果的に変位応答分布 $p_X(x)$ は $p_U(u)$ に近いものとなる (応答分布の形状は 2 章の 2.4.3 節を参照)．これが励振帯域幅が十分狭い場合に，応答の分散と尖度が，励振の分散と尖度に近い値となる理由であると考えられる．

帯域幅パラメータ A が大きいとき，いずれの励振分布形状パラメータ κ の場合でも，A の変化に対する応答尖度の変化は小さくなり，その値は 0（ガウス分布）に近いものとなっている．また，A がさらに大きいとき，応答尖度はより 0 に近づく．1 例として，$\kappa = 1$ とし，A を 500 まで変化させた結果を図 3.10 に示す．このような変化傾向が現れるのは，大きい帯域幅パラメータ A をもつ励振がホワイトノイズに近いためであると考えられる．

次に，バイモーダル分布励振の場合について，定常変位応答の尖度の計算結果を図 3.11 に示す．応答分散については，先に述べたように厳密に得られ，図 3.8 と同じになる．図 3.11 の応答尖度の解析結果はモンテカルロ・シミュレーションの結果と良く一致しており，等価非ガウス励振化法が二峰性の特徴をもつ励振分布にも適用可能であることが確認できる．また，帯域幅パラメータ A の変化に対する応答尖度の変化傾向は，一般化ガウス分布の場合と同様であることも確かめられる．(バイモーダル分布の尖度：-1.25446)

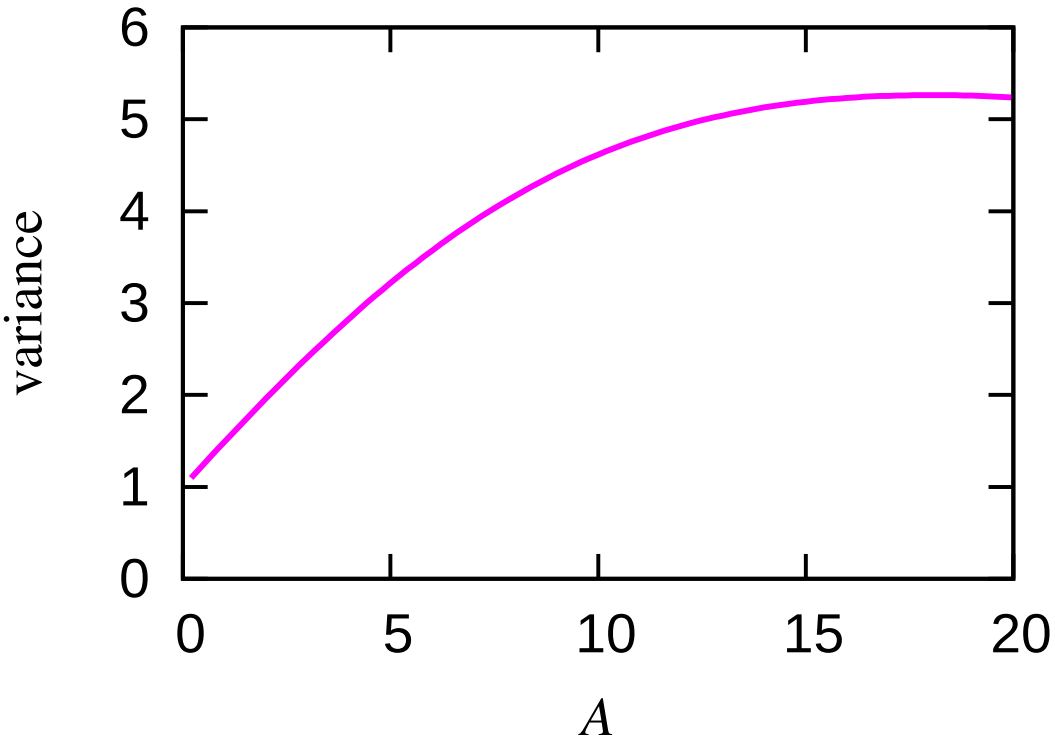


図 3.8　定常変位応答の分散

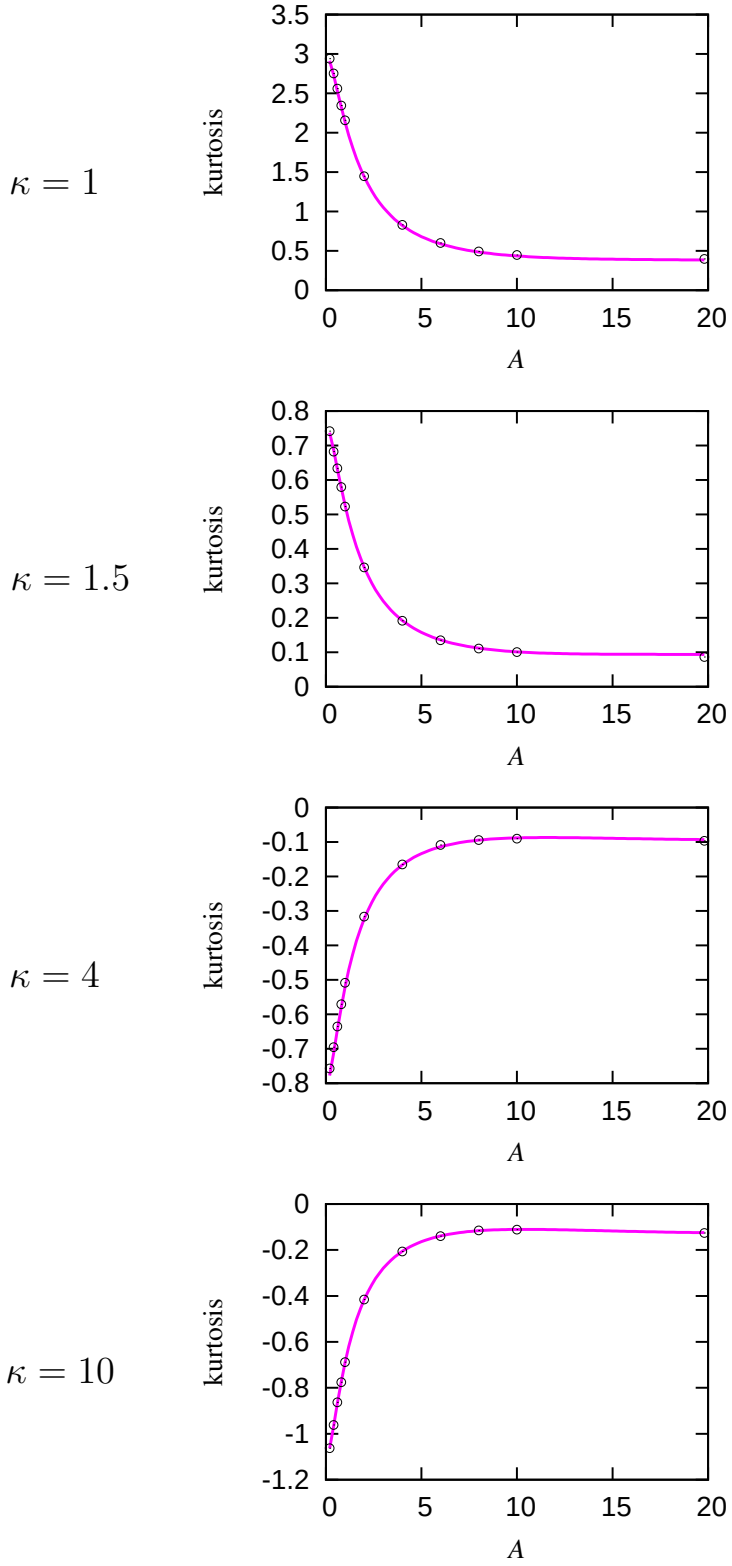


図 3.9　定常変位応答の尖度．励振分布：一般化ガウス分布．—：提案手法，
⊙：モンテカルロ・シミュレーション

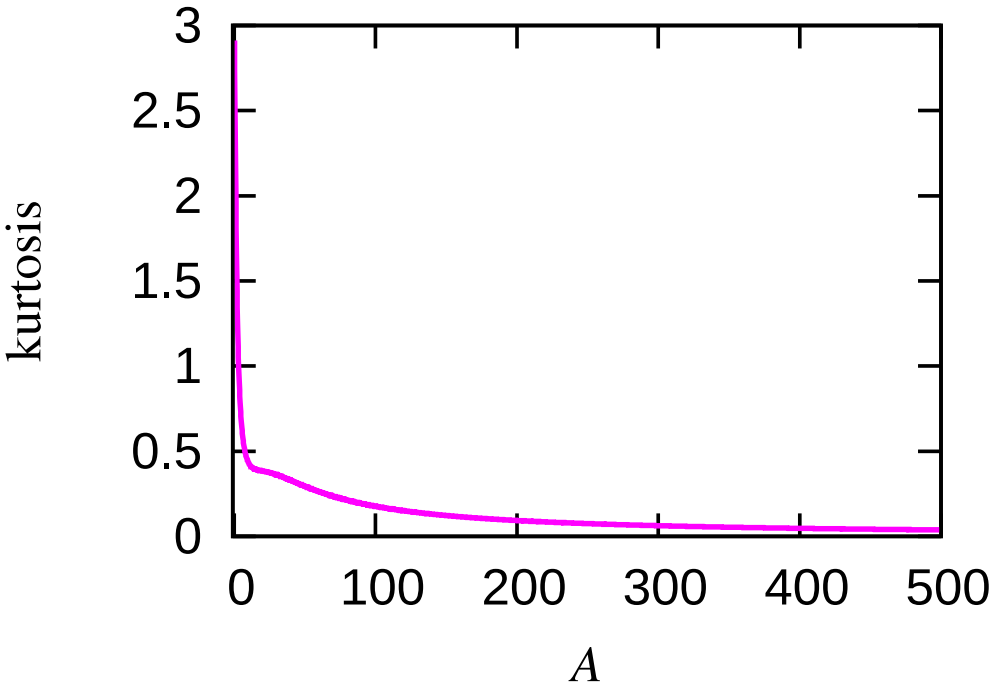


図 3.10　定常変位応答の尖度．一般化ガウス分布の形状パラメータ $\kappa = 1$

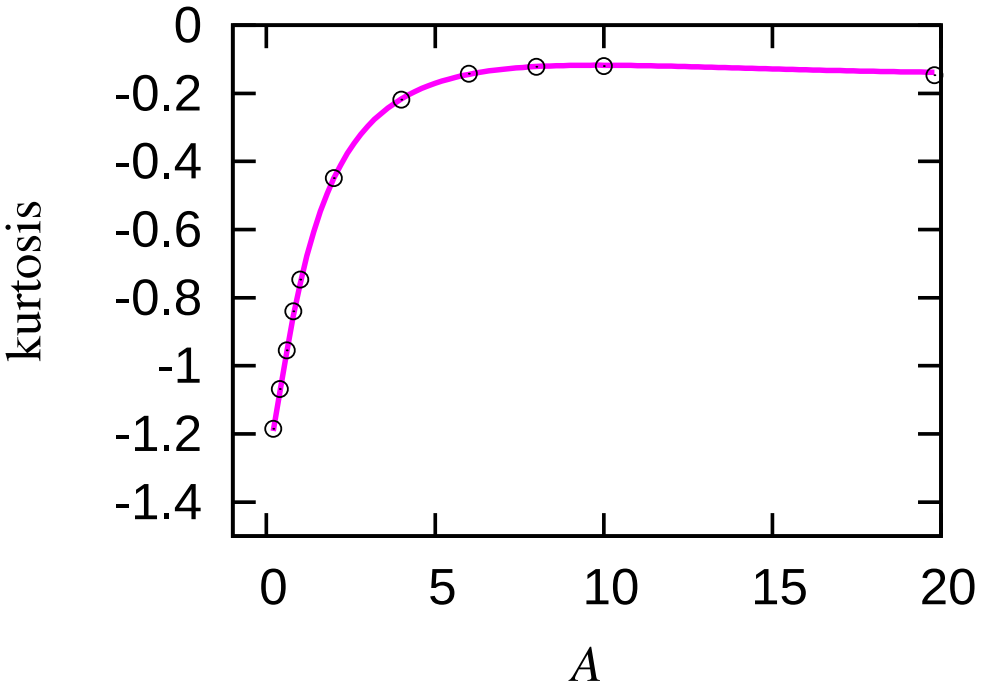


図 3.11　定常変位応答の尖度．励振分布：バイモーダル分布．—：提案手法，
⊙：モンテカルロ・シミュレーション

3.5 計算例2：非対称型励振分布

本節では，非対称型励振分布を用いた計算例を示す．尖度の違いに加えて分布の非対称性を考慮可能な拡張一般化ガウス分布 [189] を対象とし，応答の分散・尖度および励振分布の非対称性に起因する非ゼロの応答歪度を，等価非ガウス励振化法によって求める．

3.5.1 励振分布と拡散係数

拡張一般化ガウス分布は，前節で扱った一般化ガウス分布が拡張されて非対称な分布形状が表現可能となったもので，次式で与えられる [189].

$$p_U(u) = \begin{cases} \frac{\kappa_1}{2a\Gamma(\frac{1}{\kappa_1})} \exp\left[-\left(\frac{|u+\delta|}{a}\right)^{\kappa_1}\right] & \text{for } u < -\delta, \\ \frac{\kappa_1}{2a\Gamma(\frac{1}{\kappa_1})} \exp\left[-\left(\frac{\kappa_1\Gamma(\frac{1}{\kappa_2})|u+\delta|}{a\kappa_2\Gamma(\frac{1}{\kappa_1})}\right)^{\kappa_2}\right] & \text{for } u \geq -\delta. \end{cases} \tag{3.58}$$

ここで，$\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である．$\kappa_1 > 0$ と $\kappa_2 > 0$ はそれぞれ分布の左裾と右裾の広がりを支配する形状パラメータであり，$\kappa_1 < 2$ ($\kappa_2 < 2$) のとき，分布の左裾 (右裾) がガウス分布に比べて広がり，$\kappa_1 > 2$ ($\kappa_2 > 2$) のとき，分布の左裾 (右裾) がガウス分布に比べて狭まる．また，$\kappa_1 = \kappa_2$ のとき，通常の一般化ガウス分布となる．a は分散を決めるパラメータである．δ は平均を決定するパラメータを表し，$u = -\delta$ は分布のピークの位置となる．式 (3.58) で表される分布の平均 μ_U と分散 σ_U^2 は次式で与えられる．

$$\mu_U = -\delta + aM_1 \tag{3.59}$$

$$\sigma_U^2 = a^2(M_2 - M_1^2) \tag{3.60}$$

ここで， $n = 1, 2, 3, 4, \cdots$ として，

$$M_n = \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{\kappa_1})} \left\{ \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)^n \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{\kappa_1})}{\Gamma(\frac{1}{\kappa_2})}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{\kappa_2}\right) + (-1)^n \left(\frac{n+1}{\kappa_1}\right) \right\} \tag{3.61}$$

である．本節では，形状パラメータ κ_1 と κ_2 の値によらず，その平均が $\mu_U = 0$，分散が $\sigma_U^2 = 1$ となるように，δ と a を次のように与える．

$$\delta = aM_1 \tag{3.62}$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{M_2 - M_1^2}} \tag{3.63}$$

式 (3.58) の拡張一般化ガウス分布の歪度 γ_{3U} と尖度 γ_{4U} は，式 (3.61) の M_n を用いると，それぞれ次式のように表される．

$$\gamma_{3U} = \frac{M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3}{(M_2 - M_1^2)^{3/2}} \tag{3.64}$$

$$\gamma_{4U} = \frac{M_4 - 4M_1M_3 + 6M_1^2M_2 - 3M_1^4}{(M_2 - M_1^2)^2} - 3 \tag{3.65}$$

ただし，尖度については，ガウス分布 ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$) の尖度が 0 となるように定義している．

図 3.12，3.13 に，形状パラメータ κ_1，κ_2 を変化させた 3 例の分布形状と，比較のための同じ平均・分散をもつガウス分布を示す．図 3.13 は縦軸を対数表示したものである．これらの図の通り，式 (3.58) で表される拡張一般化ガウス分布は非対称性と裾の重さの異なる多様な非ガウス分布形状を表現することが可能である．

式 (3.58) の拡張一般化ガウス分布に対応する拡散係数 $D(u)$ は，式 (3.4) より，次のように与えられる．

$u < -\delta$：

$$
\begin{aligned}
D^2(u) = -2\alpha \exp\left(\frac{|u+\delta|^{\kappa_1}}{a^{\kappa_1}}\right) \\
\times \left\{ -\frac{a^2}{\kappa_1}\Gamma\left(\frac{2}{\kappa_1}, -\left(\frac{u+\delta}{a}\right)^{\kappa_1}\right) - \frac{\delta a}{\kappa_1}\Gamma\left(\frac{1}{\kappa_1}, -\left(\frac{u+\delta}{a}\right)^{\kappa_1}\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

$u \geq -\delta$：

$$
\begin{aligned}
D^2(u) = -2\alpha \exp\left\{\left(\frac{\kappa_1\Gamma(\frac{1}{\kappa_2})(u+\delta)}{a\kappa_2\Gamma(\frac{1}{\kappa_1})}\right)^{\kappa_2}\right\} \\
\times \left[-\frac{1}{\kappa_2}\left(\frac{a\kappa_2\Gamma(\frac{1}{\kappa_1})}{\kappa_1\Gamma(\frac{1}{\kappa_2})}\right)^2 \Gamma\left(\frac{2}{\kappa_2}, \left(\frac{\kappa_1\Gamma(\frac{1}{\kappa_2})(u+\delta)}{a\kappa_2\Gamma(\frac{1}{\kappa_1})}\right)^{\kappa_2}\right)\right. \\
+ \frac{\delta}{\kappa_2}\left(\frac{a\kappa_2\Gamma(\frac{1}{\kappa_1})}{\kappa_1\Gamma(\frac{1}{\kappa_2})}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\kappa_2}, \left(\frac{\kappa_1\Gamma(\frac{1}{\kappa_2})(u+\delta)}{a\kappa_2\Gamma(\frac{1}{\kappa_1})}\right)^{\kappa_2}\right) \\
+ \frac{1}{\kappa_2}\left\{\left(\frac{a\kappa_2\Gamma(\frac{1}{\kappa_1})}{\kappa_1\Gamma(\frac{1}{\kappa_2})}\right)^2 \Gamma\left(\frac{2}{\kappa_2}\right) - \delta\left(\frac{a\kappa_2\Gamma(\frac{1}{\kappa_1})}{\kappa_1\Gamma(\frac{1}{\kappa_2})}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\kappa_2}\right)\right\} \\
\left. - \frac{1}{\kappa_1}\left\{a^2\Gamma\left(\frac{2}{\kappa_1}\right) + \delta a\Gamma\left(\frac{1}{\kappa_1}\right)\right\}\right]
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

ここで，$\Gamma(\cdot,\cdot)$ は式 (3.25) に示した第 2 種不完全ガンマ関数である．図 3.14 に，図 3.12, 3.13 の分布に対応する $D^2(u)/\alpha$ を示す．$D^2(u)$ と κ_2 の関係について見ると，$\kappa_2 < 2$ のとき，$D^2(u)$ は $u \geq -\delta$ の範囲で単調増加する．一方，$\kappa_2 > 2$ のとき，$D^2(u)$ は $u \geq -\delta$ の範囲で単調減少する．$u < -\delta$ の範囲についても同様に，$D^2(u)$ は κ_1 の値に応じて，単調増加または単調減少する．

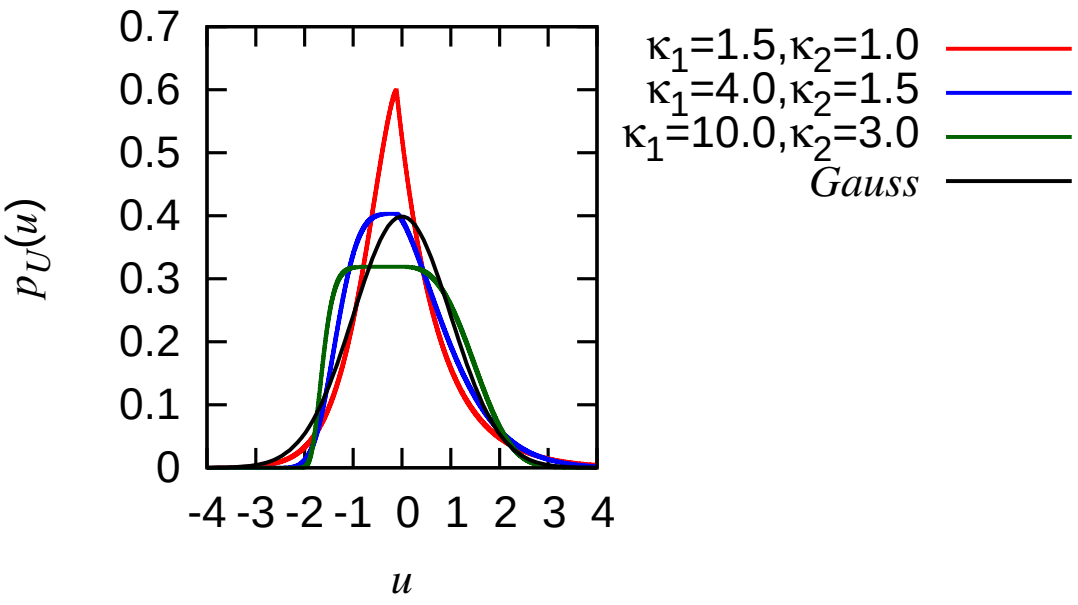


図 3.12　拡張一般化ガウス分布 (平均 $\mu_U = 0$，分散 $\sigma_U^2 = 1$)

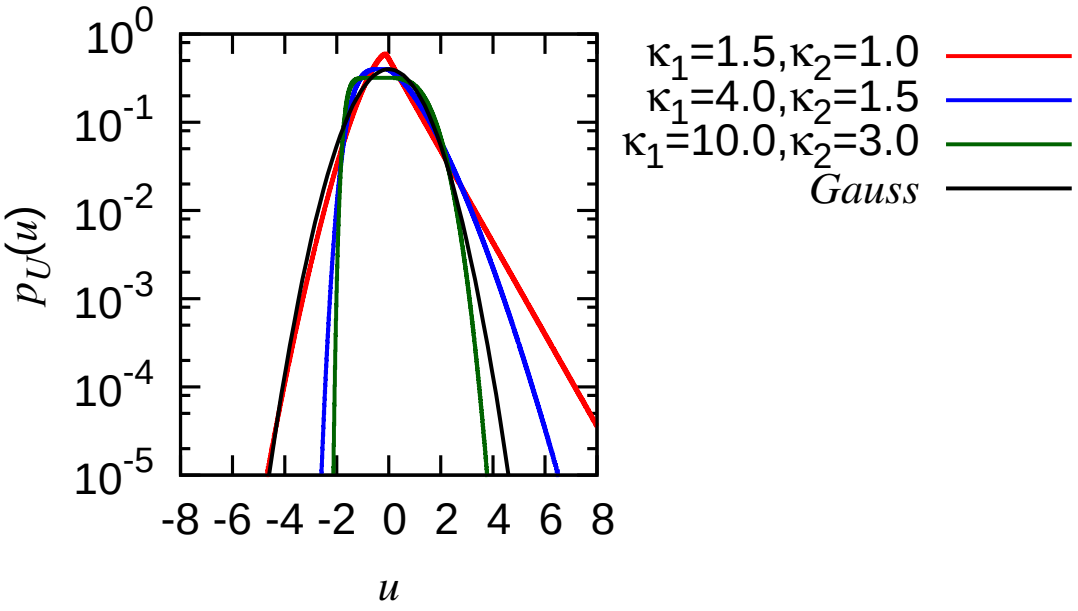


図 3.13　拡張一般化ガウス分布 (平均 $\mu_U = 0$，分散 $\sigma_U^2 = 1$)

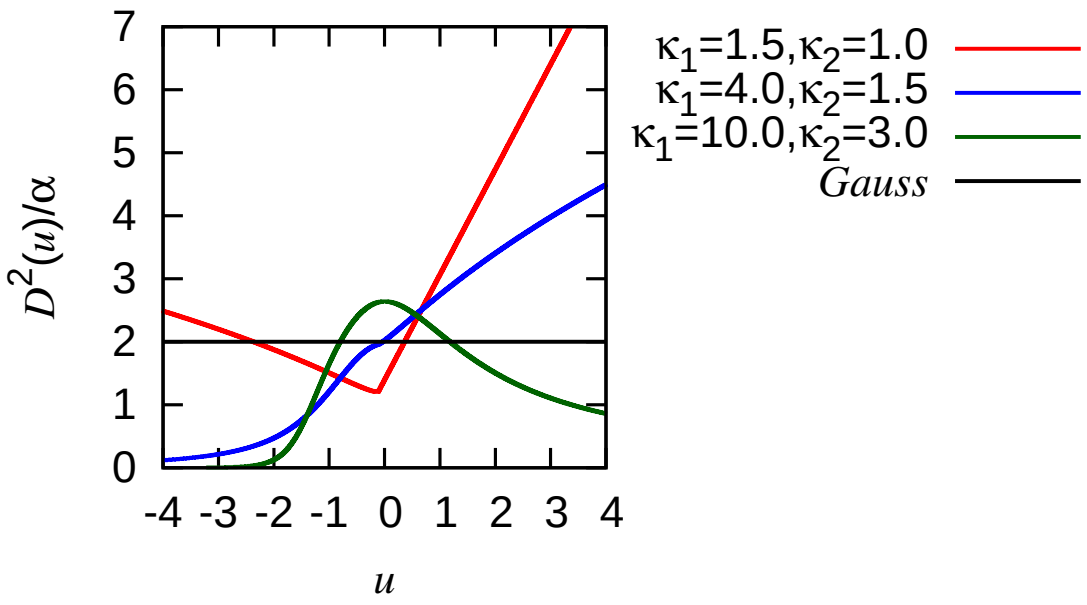


図 3.14　拡張一般化ガウス分布に対応する拡散係数

3.5.2　等価非ガウス励振化法の適用

等価拡散係数 $D_{eq}(U)$ に含まれる 3 つの係数 A_{eq}，B_{eq}，C_{eq}(式 (3.12)-(3.14)) は，式 (3.58) と式 (3.66)(3.67) を用いて計算される．本研究では，A_{eq}，B_{eq}，C_{eq} の算出に必要なモーメントについて，$\mathrm{E}[U^n]$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ を，分布の平均が 0，分散が 1 であることと式 (3.64), (3.65) から求め，$\mathrm{E}[D^2(U)]$，$\mathrm{E}[UD^2(U)]$，$\mathrm{E}[U^2D^2(U)]$ を数値的に求めた．

本節では，非対称型励振分布を対象とするため，式 (3.34)-(3.54) の 2 次と 4 次のモーメント方程式だけでなく，以下に示す 3 次のモーメント方程式も同時に解くことで，応答の分散，歪度，尖度を求める．

3 次のモーメント方程式

$$3\mathrm{E}[X^2\dot{X}] = 0 \tag{3.68}$$

$$-\mathrm{E}[X^3] + 2\mathrm{E}[X\dot{X}^2] - 2\zeta\mathrm{E}[X^2\dot{X}] + \mathrm{E}[X^2U] = 0 \tag{3.69}$$

$$\mathrm{E}[\dot{X}^3] - 2\mathrm{E}[X^2\dot{X}] - 4\zeta\mathrm{E}[X\dot{X}^2] + 2\mathrm{E}[X\dot{X}U] = 0 \tag{3.70}$$

$$2\mathrm{E}[X\dot{X}U] - \alpha\mathrm{E}[X^2U] = 0 \tag{3.71}$$

$$\mathrm{E}[\dot{X}U^2] + (-2\alpha + A_{eq})\mathrm{E}[XU^2] + B_{eq}\mathrm{E}[XU] + C_{eq}\mathrm{E}[X] = 0 \tag{3.72}$$

$$\mathrm{E}[\dot{X}^2U] - \mathrm{E}[X^2U] - (2\zeta + \alpha)\mathrm{E}[X\dot{X}U] + \mathrm{E}[XU^2] = 0 \tag{3.73}$$

$$-3\mathrm{E}[X\dot{X}^2] - 6\zeta\mathrm{E}[\dot{X}^3] + 3\mathrm{E}[\dot{X}^2U] = 0 \tag{3.74}$$

$$-2\mathrm{E}[X\dot{X}U] - (4\zeta + \alpha)\mathrm{E}[\dot{X}^2U] + 2\mathrm{E}[\dot{X}U^2] = 0 \tag{3.75}$$

$$-\mathrm{E}[XU^2] - (2\zeta + 2\alpha - A_{eq})\mathrm{E}[\dot{X}U^2] + \mathrm{E}[U^2] + B_{eq}\mathrm{E}[\dot{X}U] + C_{eq}\mathrm{E}[\dot{X}] = 0 \tag{3.76}$$

$$(-3\alpha + 3A_{eq})\mathrm{E}[U^3] + 3B_{eq}\mathrm{E}[U^2] + 3C_{eq}\mathrm{E}[U] = 0 \tag{3.77}$$

3.5.3 計算パラメータ

本計算例に用いるパラメータの値を以下に示す.

- 系の減衰比 $\zeta = 0.05$
- 励振分布の形状パラメータ $\kappa_1 = 1.5,\ \kappa_2 = 1$
  $\kappa_1 = 4,\ \ \kappa_2 = 1.5$
  $\kappa_1 = 10,\ \ \kappa_2 = 3$
- 励振と系の帯域幅比　　$A = \alpha/\zeta = 0.2 \sim 10$

励振分布の形状パラメータ κ_1 と κ_2 の組み合わせを 3 通り変化させる．これらの組み合わせに対応する分布形状は図 3.12，3.13 に示されている．それぞれの組み合わせごとに，分布の裾に以下のような違いがある．

- 1 例目の $\kappa_1 = 1.5$，$\kappa_2 = 1$ の場合では，正側の裾と負側の裾のどちらもガウス分布に比べて広がっている．
  （歪度：0.967100，尖度：3.06690）
- 2 例目の $\kappa_1 = 4$，$\kappa_2 = 1.5$ の場合では，負側の裾はガウス分布に比べて狭まっており，正側の裾はガウス分布に比べて広がっている．
  （歪度：0.731079，尖度：0.667200）
- 3 例目の $\kappa_1 = 10$，$\kappa_2 = 3$ の場合では，正側の裾と負側の裾のどちらもガウス分布に比べて狭まっている．
  （歪度：0.241721，尖度：−0.770199）

また，いずれの場合についても，分布の歪度と尖度はガウス分布 (歪度 0，尖度 0) の場合と大きく異なる．

帯域幅変化については，励振と系の帯域幅比パラメータ A で考慮し，励振の帯域幅が系の帯域幅に比べて狭い場合に対応する $A < 1$ と，励振の帯域幅が系の帯域幅に比べて広い場合に対応する $A > 1$ の両範囲で大きく変化させる．

3.5.4 計算結果

定常変位応答の歪度と尖度の計算結果を，図 3.15 と図 3.16 にそれぞれ示す．図中の実線は解析結果を，◯，△，◊ はモンテカルロ・シミュレーションによる結果をそれぞれ表しており，図の横軸は帯域幅比パラメータ A である．前節で述べたように，応答分散は厳密に得られる (図 3.8) ため，本節では結果の図示を省略する．応答の歪度，尖度の解析結果は，いずれの励振分布形状パラメータ κ_1，κ_2 と帯域幅比 A の場合でも，シミュレーション結果と良く一致しており，これは，等価非ガウス励振化法が，前節で扱った対称型励振分布だけでなく，様々な歪度を有する非対称型励振分布の場合にも適用可能であることを示している．

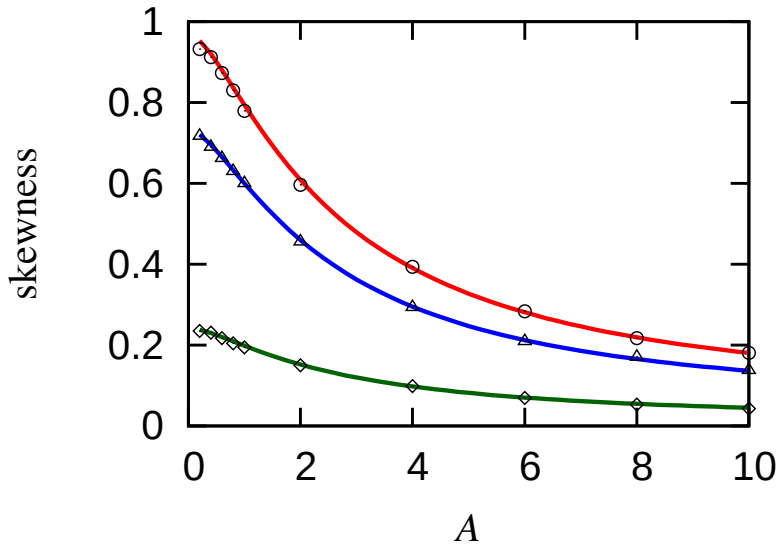


図 3.15　定常変位応答の歪度.

$\kappa_1 = 1.5$, $\kappa_2 = 1$, —: 提案手法, ◯: モンテカルロ・シミュレーション,

$\kappa_1 = 4$, $\kappa_2 = 1.5$, —: 提案手法, △: モンテカルロ・シミュレーション,

$\kappa_1 = 10$, $\kappa_2 = 3$, —: 提案手法, ◊: モンテカルロ・シミュレーション

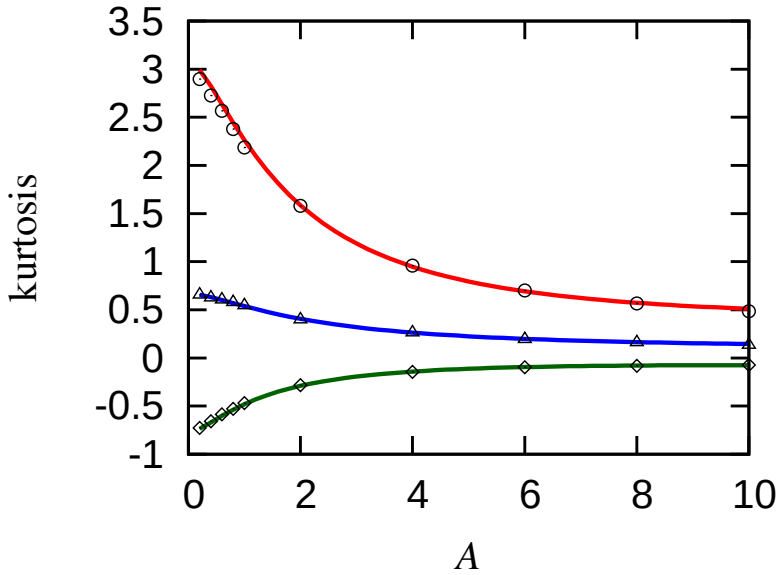


図 3.16　定常変位応答の尖度.

$\kappa_1 = 1.5$, $\kappa_2 = 1$, —: 提案手法, ◯: モンテカルロ・シミュレーション,

$\kappa_1 = 4$, $\kappa_2 = 1.5$, —: 提案手法, △: モンテカルロ・シミュレーション,

$\kappa_1 = 10$, $\kappa_2 = 3$, —: 提案手法, ◊: モンテカルロ・シミュレーション

3.6 等価励振分布 $p_{Ueq}(u)$ ともとの励振分布 $p_U(u)$ の歪度と尖度の比較

式 (3.7) に含まれる拡散係数 $D(U)$ を等価拡散係数 $D_{eq}(U)$ で置き換えることで得られる確率微分方程式 (3.18) から，等価非ガウス性励振の確率密度関数 $p_{Ueq}(u)$ を支配する Fokker-Planck 方程式が次式のように導かれる．

$$-\frac{d}{du}\left(\alpha u p_{Ueq}(u) + \frac{1}{2}\frac{d}{du}[D_{eq}^2(u)p_{Ueq}(u)]\right) = 0 \tag{3.78}$$

ここで，$p_{Ueq}(u)$ は時間に依存しないため，$p_{Ueq}(u)$ の時間微分項は 0 としている．$D_{eq}(U)$ が式 (3.9) で与えられるとき，境界条件

$$p_{Ueq}(\pm\infty) = 0, \quad \frac{d}{du}p_{Ueq}(\pm\infty) = 0 \tag{3.79}$$

を課して式 (3.78) を解くことで，$p_{Ueq}(u)$ が次式のように得られる．

$$p_{Ueq}(u) = C\exp\left(-\int \frac{2(A_{eq}+\alpha)u + B_{eq}}{A_{eq}u^2 + B_{eq}u + C_{eq}}du\right) \tag{3.80}$$

ここで，C は正規化定数である．

3.4 節の計算例 1 で励振分布として用いた平均 0 の一般化ガウス分布 (式 (3.20)) の場合，$B_{eq} = 0$ となり，式 (3.29), (3.30) から計算される A_{eq} と C_{eq} については，分布形状パラメータ κ が，$0 < \kappa < 2$ のとき $A_{eq} > 0$，$C_{eq} > 0$ となり，$\kappa > 2$ のときは $A_{eq} < 0$，$C_{eq} > 0$ となる．それぞれの κ の場合の $p_{Ueq}(u)$ は，式 (3.80) に含まれる積分を計算することで次式のようになる．

$0 < \kappa < 2$：

$$p_{Ueq}(u) = \frac{A_{eq}^{\frac{1}{2}}C_{eq}^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu-\frac{1}{2})}(A_{eq}u^2 + C_{eq})^{-\nu}, \quad \nu = 1 + \frac{\alpha}{A_{eq}} \tag{3.81}$$

$\kappa > 2$：

$$
\begin{aligned}
p_{Ueq}(u) =& \frac{|A_{eq}|^{\frac{1}{2}} C_{eq}^{-|\nu|-\frac{1}{2}} \Gamma(|\nu| + \frac{3}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(|\nu| + 1)} (A_{eq} u^2 + C_{eq})^{-\nu}, \\
& -\sqrt{-\frac{C_{eq}}{A_{eq}}} \leq u \leq \sqrt{-\frac{C_{eq}}{A_{eq}}}, \quad \nu = 1 + \frac{\alpha}{A_{eq}}
\end{aligned}
\tag{3.82}
$$

ここで，$\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である．これらの式中には励振の帯域幅パラメータ α が現れているが，式 (3.29)-(3.33) を考慮すると，$p_{Ueq}(u)$ の分布形状が α の値に依存しないことが確かめられる．また，式 (3.81), (3.82) の分布の尖度 $\gamma_{4U_{eq}}$ は，次式で与えられる．

$$
\gamma_{4U_{eq}} = \frac{3C_{eq}^2}{4A_{eq}^2 \left(\nu - \frac{3}{2}\right) \left(\nu - \frac{5}{2}\right)} - 3 \tag{3.83}
$$

ここで，式 (3.29)-(3.33) を用いて整理すると，式 (3.83) は式 (3.23) になる．したがって，等価励振分布 $p_{Ueq}(u)$ ともとの励振分布 $p_U(u)$ の尖度は一致する．

対称型励振分布 $p_U(u)$ の 2 例目として用いたバイモーダル分布 (式 (3.26)，尖度：-1.25446) の場合には，等価励振分布 $p_{Ueq}(u)$ は式 (3.82) で与えられ，その尖度は式 (3.83) より -1.25394 と計算される．バイモーダル分布励振の場合については，もとの励振分布の尖度，および A_{eq}，C_{eq} に含まれるモーメントを，数値積分で評価したため，上で示した $p_U(u)$ と $p_{Ueq}(u)$ の尖度の値には僅かな誤差が含まれることが考えられ，両者の値は完全には一致しないが，ほぼ同じとなることが分かる．

次に，3.5 節の計算例 2 で用いた拡張一般化ガウス分布 (式 (3.58)) の場合を考える．等価励振分布 $p_{Ueq}(u)$ は，式 (3.80) から，以下のように求められる．

$4A_{eq}C_{eq} - B_{eq}^2 < 0$：

$$p_{Ueq}(u) = C\exp\left[-\frac{A_{eq}+\alpha}{A_{eq}}\ln(A_{eq}u^2 + B_{eq}u + C_{eq}) + \frac{2B_{eq}}{\sqrt{B_{eq}^2 - 4A_{eq}C_{eq}}}\left(1 - \frac{A_{eq}+\alpha}{A_{eq}}\right)\operatorname{arctanh}\left(\frac{2A_{eq}u + B_{eq}}{\sqrt{B_{eq}^2 - 4A_{eq}C_{eq}}}\right)\right] \tag{3.84}$$

$4A_{eq}C_{eq} - B_{eq}^2 = 0$：

$$p_{Ueq}(u) = C\exp\left[-\frac{A_{eq}+\alpha}{A_{eq}}\ln(A_{eq}u^2 + B_{eq}u + C_{eq}) + \frac{2B_{eq}}{2A_{eq}u + B_{eq}}\left(1 - \frac{A_{eq}+\alpha}{A_{eq}}\right)\right] \tag{3.85}$$

$4A_{eq}C_{eq} - B_{eq}^2 > 0$：

$$p_{Ueq}(u) = C\exp\left[-\frac{A_{eq}+\alpha}{A_{eq}}\ln(A_{eq}u^2 + B_{eq}u + C_{eq}) - \frac{2B_{eq}}{\sqrt{4A_{eq}C_{eq} - B_{eq}^2}}\left(1 - \frac{A_{eq}+\alpha}{A_{eq}}\right)\arctan\left(\frac{2A_{eq}u + B_{eq}}{\sqrt{4A_{eq}C_{eq} - B_{eq}^2}}\right)\right] \tag{3.86}$$

ここで，C は正規化定数であり，分布の定義域は $\{u \mid A_{eq}u^2 + B_{eq}u + C_{eq} > 0\}$ である．また，これらの式中には励振帯域幅パラメータ α が現れているが，式 (3.81), (3.82) と同様，A_{eq}，B_{eq}，C_{eq} に数値を代入し，式を整理することで，$p_{Ueq}(u)$ が α の値に依存しないことが確認できる．分布形状パラメータ κ_1，κ_2 の組み合わせに対して，式 (3.84)-(3.86) のいずれの形となるかは，それぞれの場合で計算される $4A_{eq}C_{eq} - B_{eq}^2$ の値に依存して決まる．また，もとの励振分布 $p_U(u)$ が対称型 ($\kappa_1 = \kappa_2$) であるとき，$B_{eq} = 0$ となり，式 (3.84)-(3.86) は式 (3.81), (3.82) に帰着する．

もとの励振分布 $p_U(u)$ が拡張一般化ガウス分布の場合について，等価励振分布 $p_{Ueq}(u)$ ともとの励振分布 $p_U(u)$ の歪度と尖度を，図 3.12, 3.13 に示した 3 通りの $p_U(u)$ の場合で比較した結果を表 3.1 に示す．ここで，$p_{Ueq}(u)$ の歪度と尖度は数値積分によって，$p_U(u)$ の歪度と尖度は式 (3.64), (3.65) を用いることで，それぞれ求められた．数値積分を用いているため，$p_{Ueq}(u)$ の歪度と尖度の値には僅かな誤差が含まれると考えられるが，3 通りの全ての場合で，$p_{Ueq}(u)$ の歪度と尖度は，$p_U(u)$

表 3.1　等価励振分布 $p_{Ueq}(u)$ (式 (3.84)-(3.86)) ともとの励振分布 $p_U(u)$ (拡張一般化ガウス分布) の歪度と尖度の比較

Shape parameters of $p_U(u)$	Skewness		Kurtosis	
	$p_{Ueq}(u)$	$p_U(u)$	$p_{Ueq}(u)$	$p_U(u)$
$\kappa_1 = 1.5,\ \kappa_2 = 1$	0.967095	0.967100	3.066834	3.066904
$\kappa_1 = 4,\quad \kappa_2 = 1.5$	0.731099	0.731079	0.667208	0.667200
$\kappa_1 = 10,\ \kappa_2 = 3$	0.241699	0.241721	−0.770195	−0.770199

の歪度と尖度とほとんど一致していることが分かる．また，表 3.1 に示していない形状パラメータ κ_1，κ_2 の他の組み合わせについても広い範囲で調査を行い，$p_{Ueq}(u)$ と $p_U(u)$ の歪度と尖度が非常に良く一致することを確認した．

これまでに示したように，等価励振分布 $p_{Ueq}(u)$ ともとの励振分布 $p_U(u)$ の歪度と尖度は良く一致する．この理由として，次のことが考えられる．等価励振分布 $p_{Ueq}(u)$ は等価拡散係数 $D_{eq}(U)$ に含まれる係数 A_{eq}，B_{eq}，C_{eq} によって決定されるが，これらの係数は，式 (3.12)-(3.17) に示すように，もとの励振分布 $p_U(u)$ の 1 次〜4 次のモーメントの情報から決まる．そのため，$p_{Ueq}(u)$ の中に $p_U(u)$ の 4 次以下のモーメントに関する情報が正確に反映され，結果として，$p_{Ueq}(u)$ と $p_U(u)$ の歪度と尖度が良く一致することが考えられる．また，分散については，3.3.2 節で述べたように，等価非ガウス性励振の分散はもとの励振の分散に完全に一致する．等価非ガウス性励振がもとの非ガウス性励振の統計モーメントの一部を正確に保持するこのような性質は，不規則励振を受ける非線形系に対して等価線形化法を適用する際，等価線形係数を評価する際にもとの非線形系の応答分布の厳密解を用いると，等価線形系ともとの非線形系の二乗平均応答が等しくなる性質 (true linearization)[199] に類似している．

等価非ガウス励振化法では拡散係数の置換が行われるが，以上のように，応答モーメントの解析を行う際，励振の 4 次までのモーメントについてはもとの励振分布と非常に良く一致した値を用いることができる．この利点により，3.4, 3.5 節に示した計算結果のように，正確に応答の分散，歪度，尖度を求めることができる．

3.7 結 言

非ガウス性不規則励振を受ける振動系の 4 次までの応答モーメントを求めるために，等価非ガウス励振化法という手法を開発した．非ガウス性励振は確率微分方程式によって記述されるため，伊藤の公式を用いることで，この励振の支配方程式と系の運動方程式から，応答のモーメント方程式を導出することができる．しかし，一般的な非ガウス分布を有する励振を対象とするとき，励振の確率微分方程式に含まれる拡散係数が複雑な形となり，導出されたモーメント方程式は一般に閉じた形とならない．そこで本研究では，閉じたモーメント方程式を得るために，もとの拡散係数を近似的に等価拡散係数で置き換える手法を提案した．等価拡散係数の二乗は 2 次多項式で与えられ，その多項式の係数は，等価拡散係数ともとの拡散係数の二乗平均誤差が最小となるように決定される．

提案手法を，一般化ガウス分布，バイモーダル分布，拡張一般化ガウス分布という 3 種類の非ガウス分布にしたがう励振を受ける線形系に適用し，変位応答の分散，歪度，尖度を求めた．そして，応答分散が厳密に得られること，また，解析結果とモンテカルロ・シミュレーションの結果の比較から，応答の歪度と尖度についても，様々な分布形状と帯域幅をもつ励振の場合で，精度良く得られることを示した．

等価拡散係数に対応する等価非ガウス性励振の分布を Fokker-Planck 方程式から導出し，計算例で用いた 3 種の非ガウス励振分布を対象として，等価励振分布の歪度と尖度がもとの励振分布の歪度と尖度に非常に良く一致することを示した．

第4章　最小クロスエントロピー法による非ガウス不規則励振系の応答分布の解析

4.1　緒 言

多様な非ガウス分布と，帯域幅をパラメータにもつパワースペクトルの2つによって規定される励振を対象とし，その非ガウス性励振を受ける非線形系の応答分布を最小クロスエントロピー法によって求める方法を提案する．最小クロスエントロピー法で用いる拘束条件を，確率密度関数の正規化条件とモーメント方程式とする．また，先験確率分布の与え方は良い推定結果を得るために重要となるが，非ガウス励振系に対する有効な先験確率分布の与え方は知られていない．そのため，本研究では，既知である励振の非ガウス分布を用いることに加え，2章で得られた，非ガウス励振系の応答分布特性と励振と系の帯域幅比の関係についての情報をもとに，その帯域幅比に応じた先験確率分布の与え方を提案する．計算例として，非ガウス性の特徴が異なる2種類の励振を受けるDuffing系に対して提案手法を適用し，その解析結果をモンテカルロ・シミュレーションによる結果および先験分布を用いない最大エントロピー法による結果と比較することで，提案手法の妥当性を検証する．

4.2　解析モデル

4.2.1　系の運動方程式

本研究では，非線形系として，次式の運動方程式によって表される1自由度Duffing系を考える．

$$\ddot{X} + 2\zeta\dot{X} + X + \varepsilon X^3 = U(t) \tag{4.1}$$

ここで，ζ は減衰比，ε は系の非線形パラメータであり，本研究では，漸硬ばねとなる $\varepsilon > 0$ の場合を考える．図 4.1 に，$\varepsilon = 0.1$ の場合と，比較のための線形系 $(\varepsilon = 0)$ の復元力特性を示す．また，$U(t)$ は次に示す非ガウス性不規則励振であり，t は対応する線形系の不減衰固有振動数によって無次元化された時間を表す．

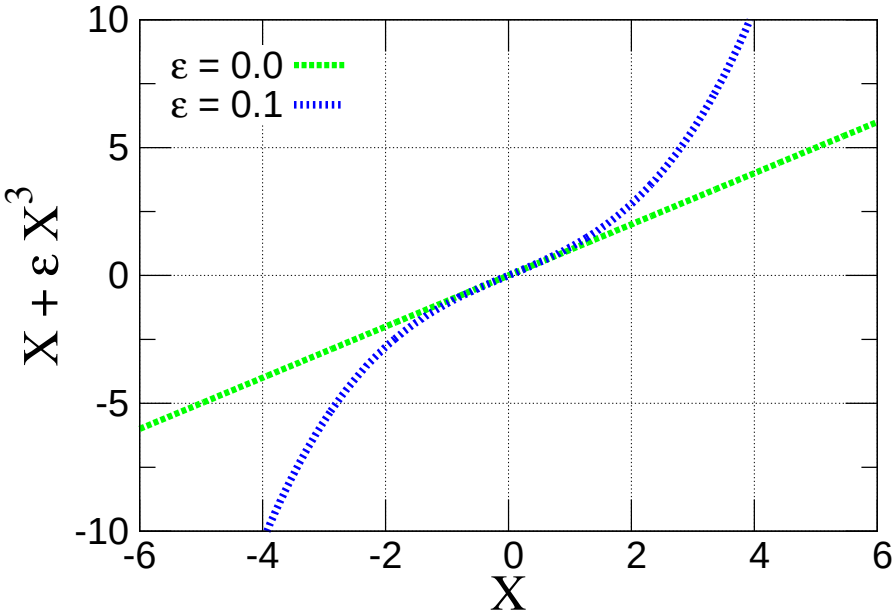


図 4.1　系の復元力特性

4.2.2　非ガウス性不規則励振

対象とする非ガウス性不規則励振 $U(t)$ は，平均 0 の定常過程であり，非ガウス確率密度関数 $p_U(u)$ と次式で表されるパワースペクトル $S_U(\omega)$ の 2 つによって規定される．

$$S_U(\omega) = \frac{\alpha \mathrm{E}[U^2]}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)} \tag{4.2}$$

ここで，α は励振の帯域幅パラメータである．図 4.2 に，$\alpha = 0.01$，0.03，0.05，0.1，0.5，$\mathrm{E}[U^2] = 1$ の場合の $S_U(\omega)$ を示す．α が小さいとき低周波数成分が卓越した励振となり，α が大きいとき広帯域励振となる．

与えられた非ガウス分布 $p_U(u)$ と式 (4.2) で表されるパワースペクトル $S_U(\omega)$ の両方にしたがう励振 $U(t)$ は，Cai and Lin により提案されたモデル [65] を採用するとき，次式の 1 次元伊藤型確率微分方程式で記述される．

$$dU = -\alpha U dt + D(U) dB(t) \tag{4.3}$$

ここで，α は $S_U(\omega)$ に含まれる帯域幅パラメータと同じであり，$B(t)$ はウィーナー過程を表す．また，式 (4.3) に含まれる拡散係数 $D(u)$ は次式で与えられる．

$$D^2(u) = -\frac{2\alpha}{p_U(u)} \int_{-\infty}^{u} s p_U(s) ds \tag{4.4}$$

この式から，非ガウス分布 $p_U(u)$ の情報は拡散係数に含まれることが分かる．

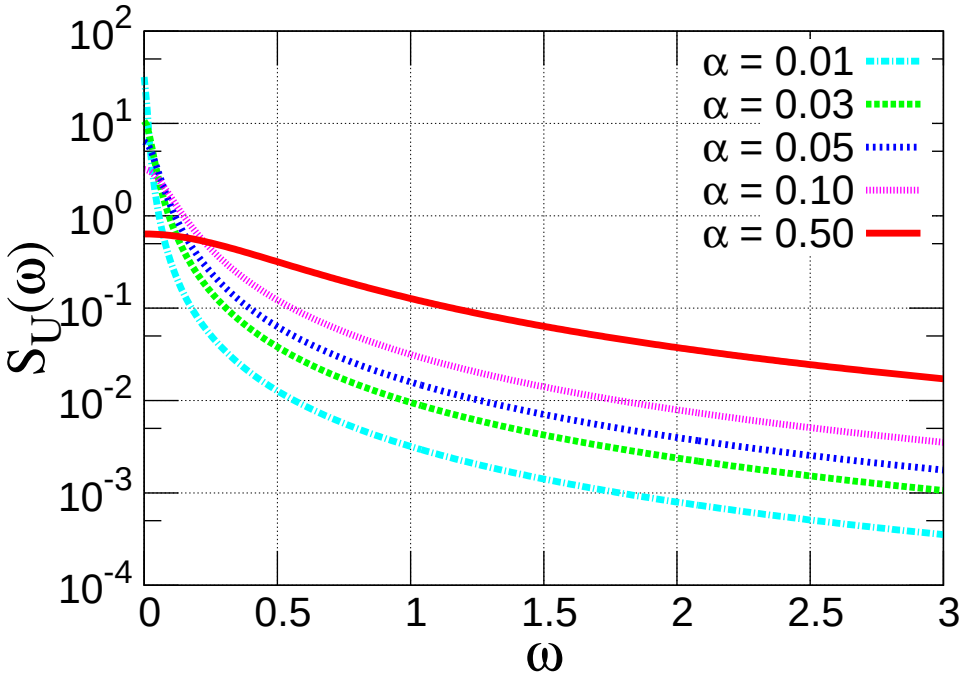


図 4.2　励振のパワースペクトル ($\mathrm{E}[U^2] = 1$).

4.3 最小クロスエントロピー法を用いた応答分布推定

4.3.1 最小クロスエントロピー法による確率密度関数の推定

最小クロスエントロピー法を用いた確率密度関数の推定法について簡潔に説明する [191].

最小クロスエントロピー法による推定は，1. 限られた数のモーメントに関する情報

$$\mathrm{E}[\phi_i(\boldsymbol{x})] = \int \phi_i(\boldsymbol{x}) p(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \psi_i \,, \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{4.5}$$

および 2. 真の確率密度 $p(\boldsymbol{x})$ を近似する先験確率密度 $q(\boldsymbol{x})$ ($\simeq p(\boldsymbol{x})$) が利用可能である時，$p(\boldsymbol{x})$ に対する最も適当な推定結果 $\tilde{p}(\boldsymbol{x})$ が，モーメントに関する条件 (式 (4.5)) を満足する中で，$q(\boldsymbol{x})$ とのクロスエントロピー (またはカルバック・ライブラーダイバージェンス，相対エントロピー)

$$D[\tilde{p}(\boldsymbol{x}), q(\boldsymbol{x})] = \int \tilde{p}(\boldsymbol{x}) \ln \left[\frac{\tilde{p}(\boldsymbol{x})}{q(\boldsymbol{x})} \right] d\boldsymbol{x} \tag{4.6}$$

を最小にするものであるという最小クロスエントロピーの原理に基づいている．式 (4.6) で表されるクロスエントロピーは 2 つの確率密度関数間の統計的距離の尺度を与えるものである．したがって，最小クロスエントロピー法は，与えられたモーメントの拘束条件下で，クロスエントロピーで定義される距離の意味で，先験確率密度 $q(\boldsymbol{x})$ に最も近い確率密度 $\tilde{p}(\boldsymbol{x})$ を求める手続きとみなすことができる．

上記の問題は拘束条件付きの最適化問題と考えることができるため，ラグランジュの未定乗数法を用いる．ラグランジュ関数は次のように表される．

$$L[\tilde{p}(\boldsymbol{x}), q(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{\lambda}] = \int \tilde{p}(\boldsymbol{x}) \ln \left[\frac{\tilde{p}(\boldsymbol{x})}{q(\boldsymbol{x})} \right] d\boldsymbol{x} - (\lambda_0 - 1) \left(1 - \int \tilde{p}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \right) \tag{4.7}$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left(\psi_i - \int \phi_i(\boldsymbol{x}) \tilde{p}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \right) \tag{4.8}$$

ここで，λ_0，$\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, N)$ はラグランジュの未定乗数であり，右辺第二項は確率密度関数の正規化条件に起因する項である．なお，λ_0 ではなく $\lambda_0 - 1$ としているのは，次に示す式 (4.9) から導かれる $\tilde{p}(\boldsymbol{x})$ をより簡潔な形で記述するためであり，最終的な推定精度等には影響しない．次に，ラグランジュ関数 L の $\tilde{p}$ に関する汎関数微分を 0 とおく，すなわち

$$\frac{\delta L}{\delta \tilde{p}} = 0 \tag{4.9}$$

とすることで，$\tilde{p}$ について次式が得られる．

$$\tilde{p}(\boldsymbol{x}) = \exp\left(-\lambda_0 - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \phi_i(\boldsymbol{x})\right) q(\boldsymbol{x}) = C_D \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \phi_i(\boldsymbol{x})\right) q(\boldsymbol{x}) \tag{4.10}$$

ここで，$C_D = \exp(-\lambda_0)$ は正規化定数である．式 (4.10) を制約条件である式 (4.5) および正規化条件

$$\int \tilde{p}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 1 \tag{4.11}$$

に代入し，未知数 $\lambda_i (i = 0, 1, \cdots, N)$ に関する非線形連立方程式を解くことで，推定結果 $\tilde{p}(\boldsymbol{x})$ が得られる．一般に，この非線形連立方程式は複雑な積分を含み解析的に解くことが出来ないため，数値的に解が求められる．

4.3.2 拘束条件の設定

本研究では，最大エントロピー法を用いた先行研究 [190] と同様に，モーメント方程式を拘束条件として与える．これはモーメント方程式が系と励振の両方の特性を多く含んだものとなっているためである．

状態変数 $X = x_1,\ \dot{X} = x_2,\ U = x_3$ を導入し，系の運動方程式 (4.1) と励振の確率微分方程式 (4.3) を組み合わせて拡大システムとして考えると，そのシステムを記述する伊藤型確率微分方程式の組は次式で表される．

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 dt \\ dx_2 &= (-x_1 - \varepsilon x_1^3 - 2\zeta x_2 + x_3) dt \\ dx_3 &= -\alpha x_3 dt + D(x_3) dB(t) \end{aligned} \tag{4.12}$$

伊藤の公式 [198] を用いると，変位 x_1，速度 x_2，励振 x_3 についての $(i + j + k)$ 次モーメントの時間発展を支配するモーメント方程式が，式 (4.12) より，次のように導かれる．

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathrm{E}[x_1^i x_2^j x_3^k] =& i\mathrm{E}[x_1^{i-1}x_2^{j+1}x_3^k] - j\mathrm{E}[x_1^{i+1}x_2^{j-1}x_3^k] - j\varepsilon\mathrm{E}[x_1^{i+3}x_2^{j-1}x_3^k] \\
& - (2j\zeta + k\alpha)\,\mathrm{E}[x_1^i x_2^j x_3^k] + j\mathrm{E}[x_1^i x_2^{j-1} x_3^{k+1}] \\
& + \frac{1}{2}k(k-1)\mathrm{E}[x_1^i x_2^j x_3^{k-2} D^2(x_3)]
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

式 (4.13) から分かるように，モーメント方程式中には系の非線形性に起因する $-j\varepsilon\mathrm{E}[x_1^{i+3}x_2^{j-1}x_3^k]$ や，励振特性に関連する $\frac{1}{2}k(k-1)\mathrm{E}[x_1^i x_2^j x_3^{k-2} D^2(x_3)]$ が含まれているため，モーメント単体を拘束条件とする場合に比べて，系と励振の情報をより多く考慮した応答分布推定が可能であることが期待される．

本研究では，以下に示す 2 次までのモーメント方程式を考える．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[x_2] = 0 \\
&\mathrm{E}[-2\zeta x_2 - x_1 - \varepsilon x_1^3 + x_3] = 0 \\
&\mathrm{E}[-\alpha x_3] = 0 \\
&\mathrm{E}[2x_1x_2] = 0 \\
&\mathrm{E}[-4\zeta x_2^2 - 2x_1x_2 - 2\varepsilon x_1^3 x_2 + 2x_2x_3] = 0 \\
&\mathrm{E}[-2\alpha x_3^2 + D^2(x_3)] = 0 \\
&\mathrm{E}[x_2^2 - 2\zeta x_1x_2 - x_1^2 - \varepsilon x_1^4 + x_1x_3] = 0 \\
&\mathrm{E}[x_2x_3 - \alpha x_1x_3] = 0 \\
&\mathrm{E}[-(2\zeta+\alpha)x_2x_3 - x_1x_3 - \varepsilon x_1^3x_3 + x_3^2] = 0
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

ここで，定常応答分布を推定するため，式 (4.13) の左辺，時間微分項を 0 とおいている．また 4 次のモーメント方程式から導かれる $\mathrm{E}[x_1^3x_2] = 0$ を考慮して，式 (4.14) を整理すると，応答分布推定に用いる 6 つの拘束条件が得られる．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[\phi_1] = \mathrm{E}[-x_1 - \varepsilon x_1^3] = 0 \\
&\mathrm{E}[\phi_2] = \mathrm{E}[-2\zeta x_2^2 + x_2x_3] = 0 \\
&\mathrm{E}[\phi_3] = \mathrm{E}[-2\alpha x_3^2 + D^2(x_3)] = 0 \\
&\mathrm{E}[\phi_4] = \mathrm{E}[x_2^2 - x_1^2 - \varepsilon x_1^4 + x_1x_3] = 0 \\
&\mathrm{E}[\phi_5] = \mathrm{E}[x_2x_3 - \alpha x_1x_3] = 0 \\
&\mathrm{E}[\phi_6] = \mathrm{E}[-(2\zeta+\alpha)x_2x_3 - x_1x_3 - \varepsilon x_1^3x_3 + x_3^2] = 0
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

4.3.3 先験確率分布 $q(\boldsymbol{x})$ の設定

最小クロスエントロピー法による確率密度関数の推定時には，先験確率分布 $q(\boldsymbol{x})$ とのクロスエントロピーをもとに分布が推定されるため，$q(\boldsymbol{x})$ の与え方が重要となる．しかし，現在のところ，非ガウス励振系に対して有効な先験確率分布の与え方は報告されていない．そのため，本研究では，様々な非ガウス励振分布の場合に，さらに励振と系の帯域幅比の広い範囲で，系の応答分布を求めることを可能とするために，2 章で得られた知見をもとに $q(\boldsymbol{x})$ を設定する．

2 章では，式 (4.2) のパワースペクトルと非ガウス分布をもつ励振を対象として，その非ガウス性励振を受ける線形系・非線形系の応答分布の特徴を調べた．そして，励振帯域幅 α と対応する線形系の帯域幅を表す減衰比 ζ の比 α/ζ と，応答分布の関係について以下の知見が得られた．

1. 励振帯域幅が系の帯域幅に比べて狭いとき ($\alpha/\zeta < 1$)，変位応答分布は励振分布に近い形状となる．

2. 励振帯域幅が系の帯域幅に比べて広いとき ($\alpha/\zeta \geq 1$)，ガウス性白色雑音を受ける系の応答分布に近くなる．

上の知見を考慮し，先験確率分布 $q(\boldsymbol{x})$ として，次のような 3 通りの関数を考える．

$$q(\boldsymbol{x}) = p_U(x_3) \tag{4.16}$$

$$q(\boldsymbol{x}) = p_U(x_1)p_U(x_3), \quad \alpha/\zeta < 1 \tag{4.17}$$

$$q(\boldsymbol{x}) = p_{X_W}(x_1)p_U(x_3), \quad \alpha/\zeta \geq 1 \tag{4.18}$$

本研究では，励振分布 $p_U(x_3)$ が既知であるため，いずれの $q(\boldsymbol{x})$ にも $p_U(x_3)$ を含めている．式 (4.16) は前段落で述べた知見を用いず，励振分布の情報のみを利用したものであり，励振と系の帯域幅比がいずれの場合でも使用可能である．式 (4.17) は前段落の知見 1. を反映したもので，励振帯域幅が系の帯域幅よりも狭いときに有効であると考えられる．また，式 (4.18) は前段落の知見 2. を考慮したものであり，励振帯域幅が系の帯域幅よりも広いときに有効であると考えられる．ここで，式 (4.18) 中の $p_{X_W}(x_1)$ は，式 (4.1) の Duffing 系が強度 S_0 のガウス性ホワイトノイズを受けるときの定常変位応答分布の厳密解である [197].

$$p_{X_W}(x_1) = C_{X_W} \exp\left\{-\frac{2\zeta}{\pi S_0}\left(\frac{x_1^2}{2} + \varepsilon\frac{x_1^4}{4}\right)\right\} \tag{4.19}$$

ただし，C_{X_W} は正規化定数である．本段落では，特に式 (4.17)，(4.18) の使用範囲を $\alpha/\zeta = 1$ を境におおまかに分けたが，次節において，励振の帯域幅を広い範囲で変化させた計算結果をもとに，3 通りの先験確率分布のそれぞれの有効範囲についてのより詳細な検討を行う．

最後に，4.3 節で示した最小クロスエントロピー法を用いた解析方法の手順を整理する．

1. 励振と系の帯域幅比を考慮しながら，式 (4.16)〜(4.18) に示した先験確率分布 $q(\boldsymbol{x})$ のうち，いずれか 1 つを与える．式 (4.18) を用いる場合には，式 (4.19) 中に含まれるパラメータ S_0 の値を，励振パワースペクトル (式 (4.2)，図 4.2) を考慮しながら設定する．

2. $q(\boldsymbol{x})$ と，式 (4.15) の $\mathrm{E}[\cdot]$ で囲まれた部分に当たる x_1, x_2, x_3 についての関数 $\phi_i(\boldsymbol{x})$ $(i = 1, 2, \cdots, 6)$ を，式 (4.10) に代入する．

3. 式 (4.10) を拘束条件であるモーメント方程式 (4.15) および正規化条件 (4.11) に代入し，未知数 λ_i $(i = 0, 1, \cdots, 6$，ここで λ_0 は C_D と等価) に関する非線形連立方程式を数値的に解くことで，応答分布 $\tilde{p}(\boldsymbol{x})$ を得る．この際，本研究では，合成シンプソン公式とニュートン・ラフソン法を用いて λ_i を求める．

4.4 計算例

前節で述べた最小クロスエントロピー法による応答分布推定手法を，バイモーダル分布およびガンマ分布にしたがう励振を受ける Duffing 系に適用し，モンテカルロ・シミュレーションで得られる結果と比較することで，提案手法の妥当性を検証する．この際，先験確率分布 $q(\boldsymbol{x})$ を用いない (または $q(\boldsymbol{x}) = 1$ とおくことに相当する) 最大エントロピー法を用いた解析結果も合わせて示し，励振分布および非ガウス励振系の応答分布に関する先験情報を $q(\boldsymbol{x})$ として用いることの有効性を確認する．

4.4.1 励振の非ガウス分布

励振の非ガウス確率密度関数 $p_U(u)$ として，顕著な非ガウス性を有する，バイモーダル分布とガンマ分布の 2 つを扱う．

バイモーダル分布は次式で表される．

$$p_U(u) = C_U \exp(au^2 + bu^4),\ \ a > 0,\ b < 0 \tag{4.20}$$

ここで a，b は分布形状を決定するパラメータ，C_U は正規化定数である．今回は二乗平均値が $\mathrm{E}[U^2] = 1.0$ となるよう，a，b，C_U の値を次のように設定する．

$$a = 0.8935,\ b = -0.3991,\ C_U = 0.2269 \tag{4.21}$$

ガンマ分布については，本来の定義域は $u > 0$ であるが，本研究では平均が 0 となるように定義域をずらした次式を用いる．

$$p_U(u) = \frac{(u + k\theta)^{k-1} \exp\left\{-\frac{u+k\theta}{\theta}\right\}}{\Gamma(k)\theta^k},\ k > 0,\ \theta > 0,\ u > -k\theta \tag{4.22}$$

ここで k，θ はそれぞれ形状母数，尺度母数と呼ばれる分布形状を決定するパラメータであり，$\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である．ガンマ分布の分散は $k\theta^2$ で与えられるが，本研究では分散を 1 とするため $\theta = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ とし，強い非ガウス性を示すように k と θ を次のように設定する．

$$k = 1,\ \theta = 1 \tag{4.23}$$

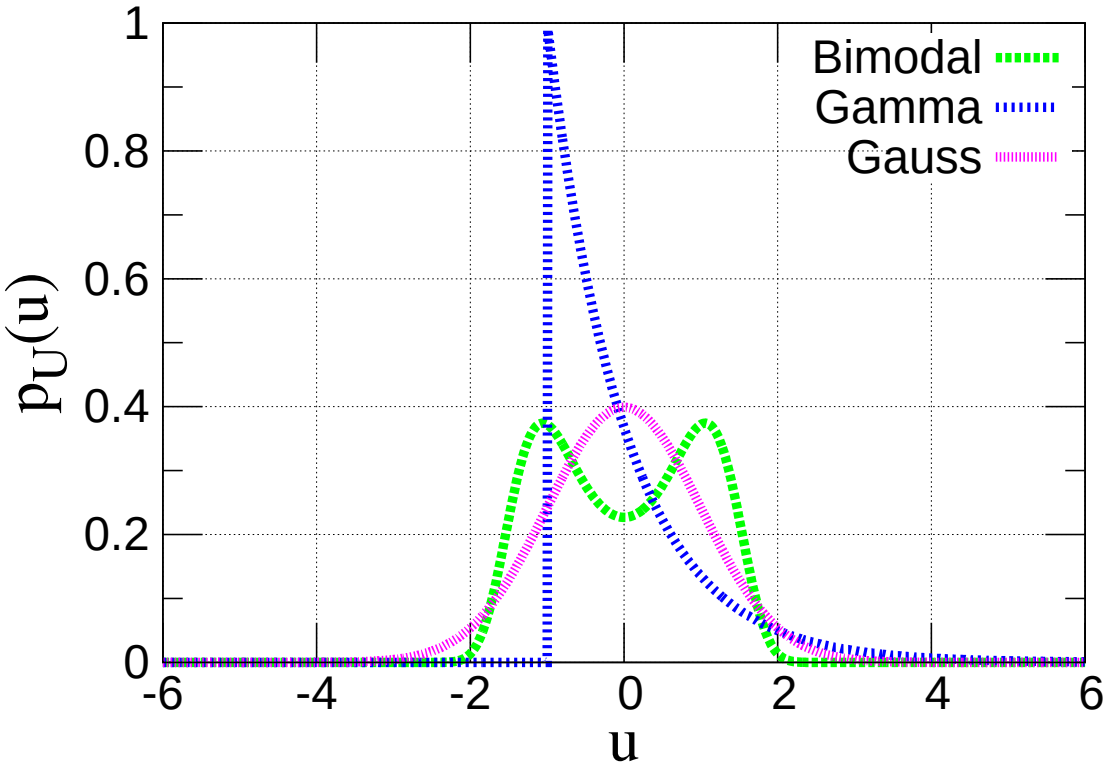


図 4.3　励振の非ガウス確率密度関数

図 4.3 に，式 (4.21), (4.23) のパラメータをもつバイモーダル分布とガンマ分布を示す．同図中の同じ分散をもつガウス分布に比べて，バイモーダル分布はピークに，ガンマ分布は非対称性にそれぞれ大きな特徴があり，いずれの分布も強い非ガウス性を有することが確認できる．これらの励振分布に対応して，応答分布もまた二峰性や強い非対称性を示す場合があり，このときモーメントのみを用いた推定では，その非ガウス性の特徴を十分に捉えられないことが考えられる．このような例に提案手法を適用することで，特に 3 通りの先験分布の有効性を明らかにすることを目的とする．

バイモーダル分布に対応する拡散係数は，式 (4.4), (4.20) より，

$$D^2(u) = \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-b}}\exp\left\{-b\left(u^2+\frac{a}{2b}\right)^2\right\}\mathrm{erfc}\left\{\sqrt{-b}\left(u^2+\frac{a}{2b}\right)\right\} \tag{4.24}$$

となる．ここで，

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt \tag{4.25}$$

である．ガンマ分布に対応する拡散係数は，式 (4.4), (4.22) より，次式で表される．

$$D^2(u) = 2\alpha\theta(u + k\theta), \quad u > -k\theta \tag{4.26}$$

4.4.2 計算パラメータ

系と励振の計算パラメータとして，次に示す値を用いる．

- 減衰比 $\zeta = 0.05$
- 非線形パラメータ $\varepsilon = 0.1$
- 励振帯域幅 $\alpha = 0.01,\ 0.02,\ 0.03,\ 0.05,\ 0.1,\ 0.5,\ 1$

励振帯域幅パラメータである α を，対応する線形系の周波数応答関数の帯域幅を表す減衰比 ζ と比較して，小さい値から大きい値までとるように広い範囲 $(0.2 \leq \alpha/\zeta \leq 20)$ で変化させる．次節以降では，用いた先験分布 $q(\boldsymbol{x})$ ごとに応答分布の解析結果を示していく．

4.4.3 励振分布の情報のみを考慮した $q(\boldsymbol{x})$(式 (4.16)) を用いた場合

バイモーダル分布励振の場合

先験分布 $q(\boldsymbol{x})$ として，励振分布の情報のみを考慮した式 (4.16) を用いた場合の結果を示す．初めに，バイモーダル分布励振の場合の定常変位応答分布 $p_X(x)$ の解析結果を図 4.4 の左列に示す．図中の緑線が提案する最小クロスエントロピー法 (MCEM) による解析結果を，赤線は比較のためのモンテカルロ・シミュレーションによる結果をそれぞれ表している．また，先験情報を先験確率分布 $q(\boldsymbol{x})$ として用いることの有効性を検証するために，$q(\boldsymbol{x})$ を与えずにモーメント方程式による拘束条件のみから応答分布を推定する最大エントロピー法 (MEM) で得られた結果を同図中に青線で示している．

モンテカルロ・シミュレーションの結果との比較から，最小クロスエントロピー法により得られた結果は，励振帯域幅 α の変化に従い，バイモーダルな形状から単峰な形状へと変化する応答分布形状をよく推定できていることが分かる．一方で最

大エントロピー法では，励振帯域幅 α が狭い場合に現れる二峰性の応答分布形状を求めることができず，ピークが 1 つの分布形状となっている．これは，最大エントロピー法の場合には，先験分布 $q(\boldsymbol{x})$ を用いないため，励振の非ガウス性の情報を拘束条件であるモーメント方程式 (特に励振の確率微分方程式の拡散係数 $D(x_3)$ を含むもの) からしか得られないためであると考えられる．最小クロスエントロピー法と最大エントロピー法の推定結果を比較することで，励振の非ガウス分布形状の情報を $q(\boldsymbol{x})$ として利用することが有効に機能していることが確認できる．

ガンマ分布励振の場合

ガンマ分布励振の場合の定常変位応答分布 $p_X(x)$ の解析結果を図 4.4 の右列に示す．最小クロスエントロピー法による解析結果は，長い右裾に特徴づけられる非対称な分布形状を，$q(\boldsymbol{x})$ を用いない最大エントロピー法による結果と比較して，良く捉えられている．しかし，応答分布に励振の非対称性の影響がほとんど現れなくなる $\alpha = 0.5$(広帯域励振) の場合には，その分布形状を十分に求められていないことが分かる．このときの解析精度は，先験分布を変更することによって，向上することを 4.4.5 節で示す．また，図 4.4 左列のバイモーダル分布励振の場合と比べて，いずれの結果もわずかに精度が低下しているが，これに関しては，より高次のモーメント方程式を拘束条件として与えることで改善できることが考えられる．

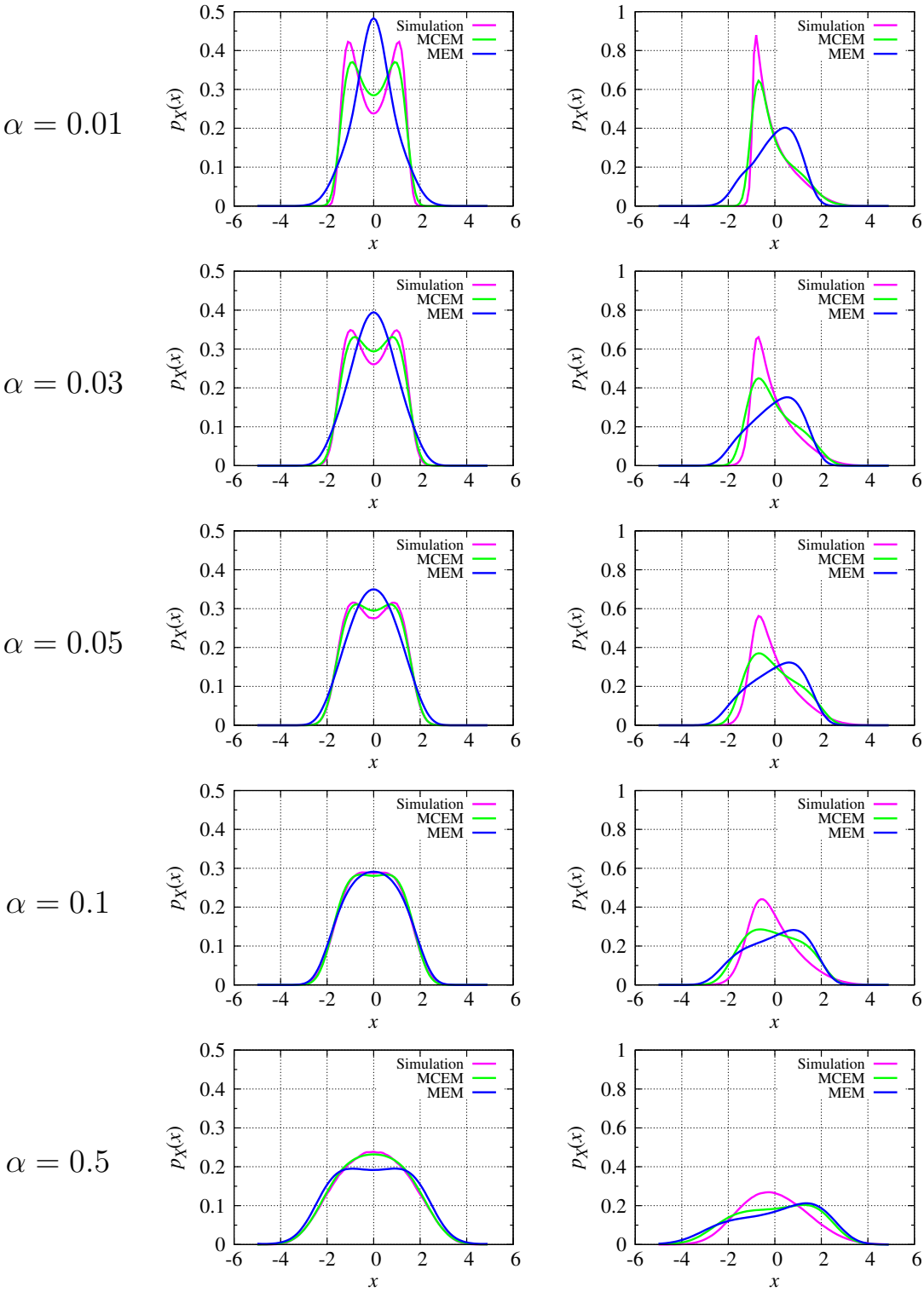


図 4.4　バイモーダル分布 (左列) とガンマ分布 (右列) にしたがう非ガウス性励振を受ける Duffing 系の定常変位応答分布

4.4.4 励振帯域幅が狭い時の応答分布に関する情報を考慮した $q(\boldsymbol{x})$(式 (4.17)) を用いた場合

4.3.3 節で述べた知見 1. を考慮した式 (4.17) の先験分布 $q(\boldsymbol{x})$ を用いた場合の結果を図 4.5 (左列：バイモーダル分布励振，右列：ガンマ分布励振) に示す．緑線が式 (4.17) の $q(\boldsymbol{x})$ を用いた場合の結果，青線は比較のための前節で用いた励振分布のみを考慮した $q(\boldsymbol{x})$(式 (4.16)) を使用した場合の結果である．赤線はモンテカルロ・シミュレーションによる結果を表す．また，図 4.6 には，励振帯域幅パラメータ $\alpha = 0.01$ の場合に，式 (4.17) の $q(\boldsymbol{x})$ を用いた場合の応答分布の解析結果 (緑線) と比較用のシミュレーション結果 (赤線)，また励振分布 (黒線) を示す．この図については，縦軸を対数表示している．

図 4.5 の赤線のシミュレーション結果から，励振と系の帯域幅比 α/ζ が小さいほど，励振の非ガウス性の影響が顕著に応答分布に現れるという 4.3.3 節に示した知見 1. の特徴が観察できるが，そのような非ガウス性の強い応答分布を，式 (4.17) の $q(\boldsymbol{x})$ を用いることで，式 (4.16) の $q(\boldsymbol{x})$ を用いた時に比べて，より良く捉えられていることが分かる．励振の非ガウス性の影響に加え，Duffing 系の硬性ばね特性により，応答分布は励振分布に比べて裾が狭まる傾向にあるが，図 4.6 より，そのような傾向を最小クロスエントロピー法により正確に推定できていることが分かる．これは，モーメント方程式を拘束条件に用いることで，系の非線形性も考慮した応答分布推定が可能なためである．

図 4.5 の下段に示す，励振と系の帯域幅比 α/ζ が 1 となる $\alpha = 0.05$ の場合については，式 (4.17) の $q(\boldsymbol{x})$ を用いるとき解析結果の精度が落ちていることが確認できる．したがって，式 (4.17) の $q(\boldsymbol{x})$ は励振帯域幅が系の帯域幅に比べて十分に狭い場合 (本研究の計算結果の範囲内では $\alpha/\zeta < 0.4$) に使用し，励振帯域幅がそれよりも広い場合 ($0.4 < \alpha/\zeta < 1$) には，励振分布のみを考慮した式 (4.16) の $q(\boldsymbol{x})$ を使用するのが適していると言える．

4.4.5 励振帯域幅が広い時の応答分布に関する情報を考慮した $q(\boldsymbol{x})$(式 (4.18)) を用いた場合

4.3.3 節で述べた知見 2. を考慮した式 (4.18) の $q(\boldsymbol{x})$ を用いた場合の結果を図 4.7 (左列：バイモーダル分布励振，右列：ガンマ分布励振) に示す．本研究では，式 (4.19)

中に含まれるパラメータ S_0 を，図 4.2 の励振パワースペクトルの形状を考慮して，$S_0 = 0.1$ と与えた．図には示さないが，S_0 について，$0.05 \leq S_0 \leq 0.5$ の範囲で他にいくつか変化させて解析を行っており，そのときの結果が図 4.7 とほとんど同じであることを確認した．したがって，S_0 の違いが解析精度に与える影響は小さく，式 (4.18) の $q(\boldsymbol{x})$ が用いられる帯域幅比 $\alpha/\zeta \geq 1$ の範囲では，$0.05 \leq S_0 \leq 0.5$ にあるいずれかの S_0 を与えることによって，図 4.7 と同精度の解析結果が得られる．

励振と系の帯域幅が同程度となる $\alpha = 0.05$ のときには，緑線で示す式 (4.18) の場合の結果と青線で示す式 (4.16) の場合の結果がほぼ同じであるが，$\alpha = 0.5,\ 1$ のように，励振帯域幅が系の帯域幅に比べて十分広いとき，式 (4.18) の $q(\boldsymbol{x})$ を用いた方が，式 (4.16) の $q(\boldsymbol{x})$ を用いた場合に比べて，良い精度の応答分布が得られることが確認できる．したがって，式 (4.18) で表される $q(\boldsymbol{x})$ が有効である範囲は，励振と系の帯域幅比が 1 以上の全ての範囲であり，また，励振の帯域幅が十分に広くホワイトノイズに近い場合に，特に有効となることが言える．

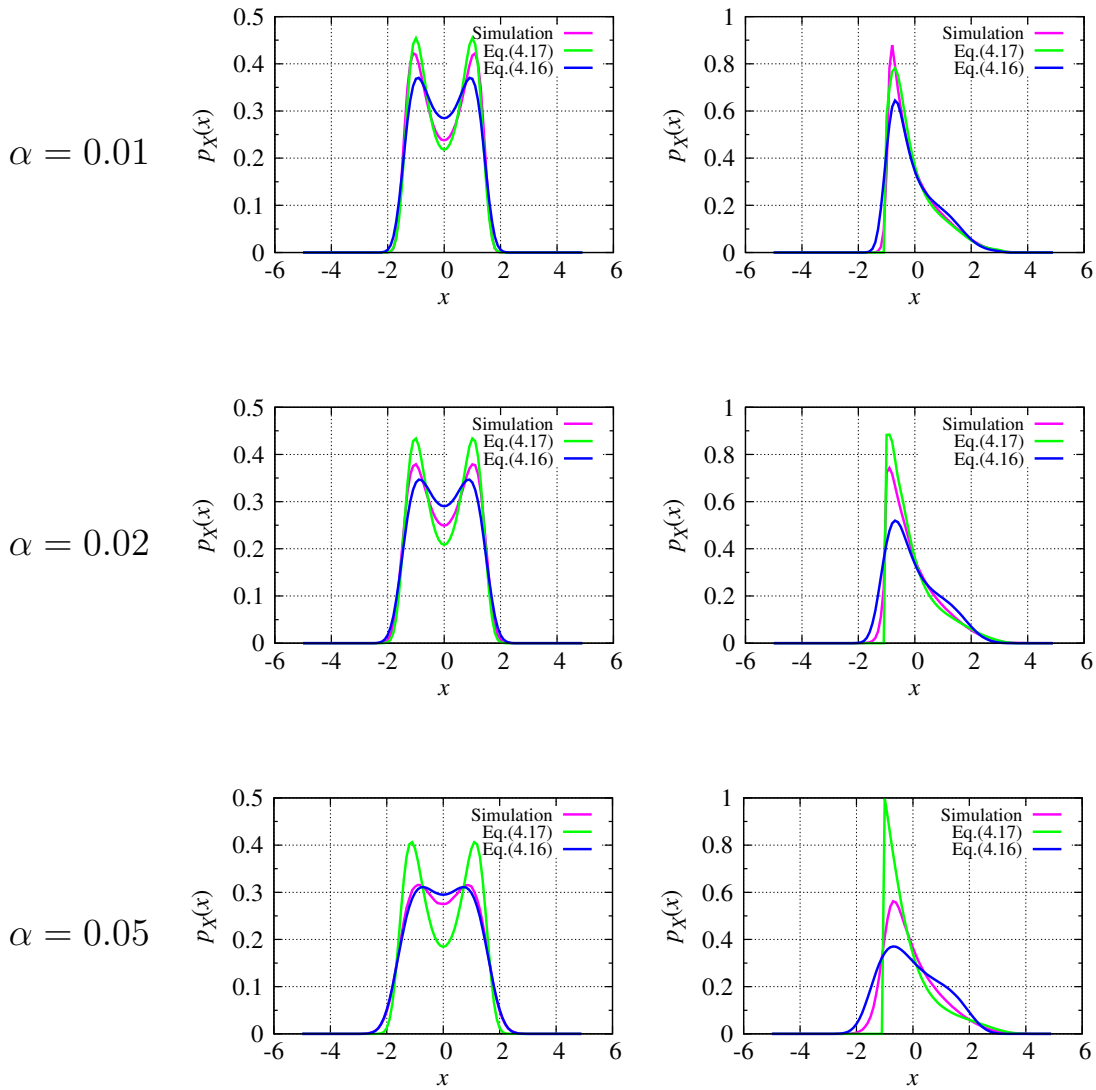


図 4.5　バイモーダル分布 (左列) とガンマ分布 (右列) にしたがう非ガウス性励振を受ける Duffing 系の定常変位応答分布．励振帯域幅が系の帯域幅に比べて狭い場合 ($\alpha/\zeta \leq 1$，$\zeta = 0.05$)

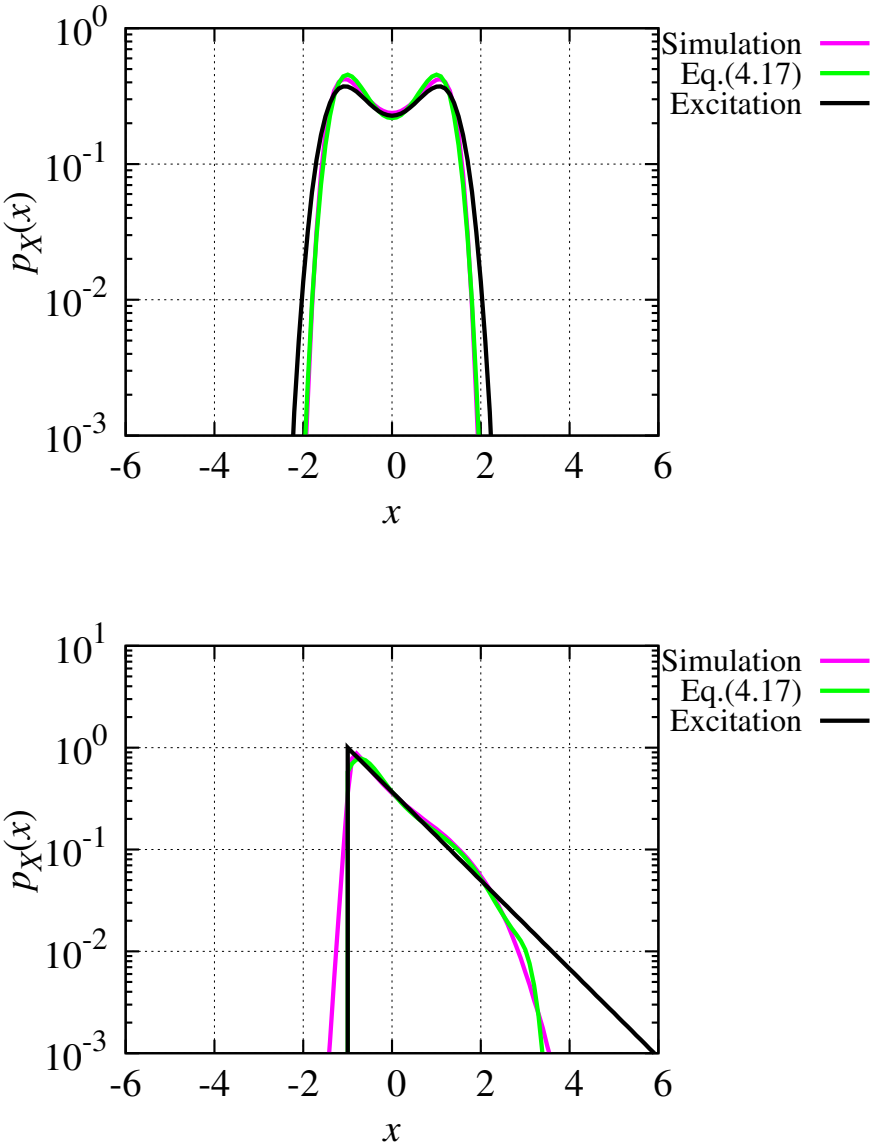


図 4.6　バイモーダル分布 (上段) とガンマ分布 (下段) にしたがう非ガウス性励振を受ける Duffing 系の定常変位応答分布と励振分布の比較 ($\alpha/\zeta = 0.2$，$\alpha = 0.01$，$\zeta = 0.05$)

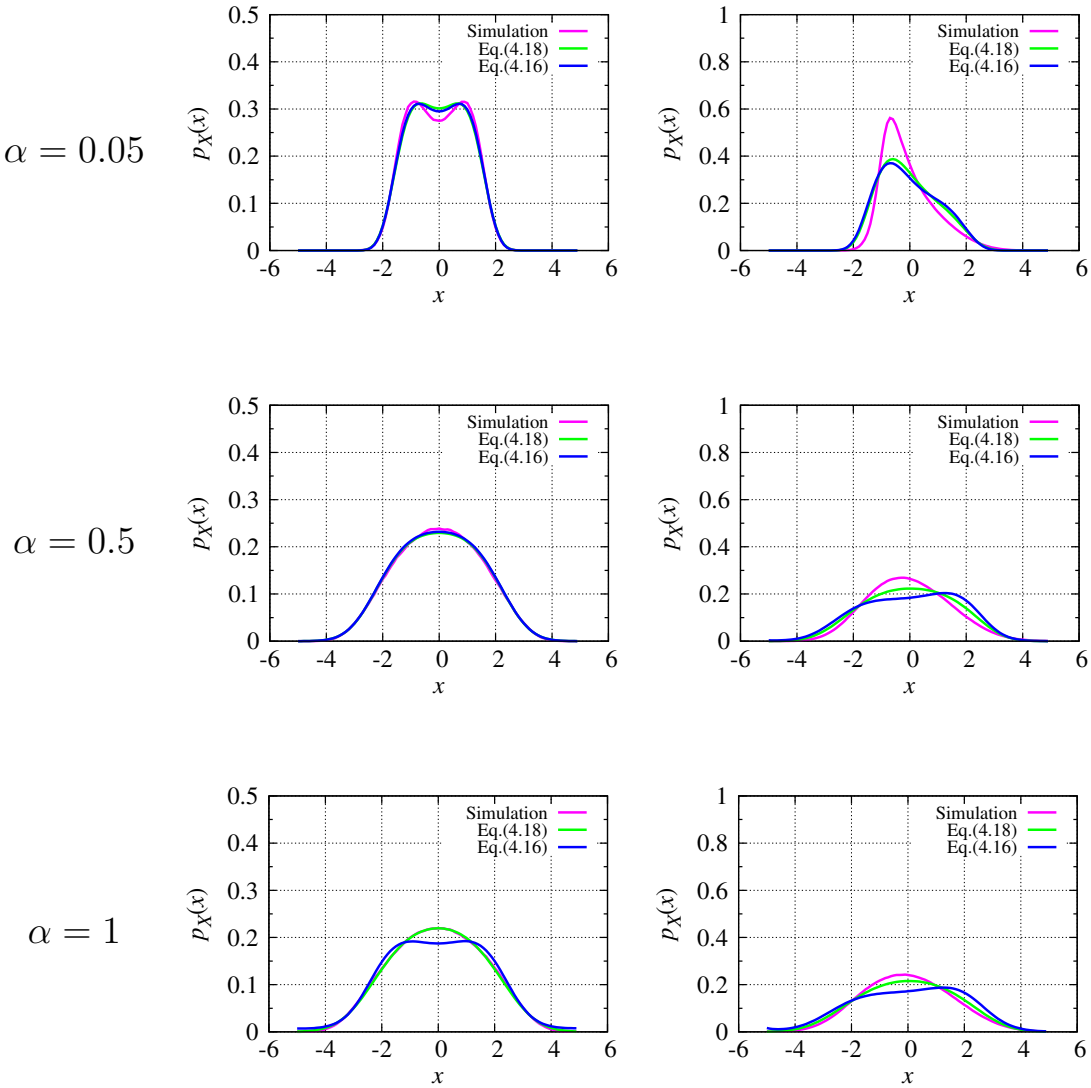


図 4.7　バイモーダル分布 (左列) とガンマ分布 (右列) にしたがう非ガウス性励振を受ける Duffing 系の定常変位応答分布．励振帯域幅が系の帯域幅に比べて広い場合 ($\alpha/\zeta \geq 1$，$\zeta = 0.05$)

4.5 結 言

最小クロスエントロピー法を用いて，非ガウス性不規則励振を受ける非線形系の応答分布を求める手法を提案した．本研究では，最小クロスエントロピー法のための拘束条件として，確率密度関数の正規化条件と 2 次までのモーメント方程式を用いた．モーメント方程式を拘束条件に用いた理由は，モーメント単体を拘束条件とする場合に比べて，系と励振の情報をより多く考慮した応答分布推定が可能であることが考えられるためである．また，最小クロスエントロピー法を用いる際，先験確率分布の与え方が重要となるが，現在のところ，非ガウス励振系に対して有効な先験分布の与え方は報告されていない．そのため，本研究では，既知である励振の非ガウス確率密度関数をいずれの場合にも用いた．さらに，2 章で得られた，非ガウス励振系の応答分布特性と励振と系の帯域幅比の関係についての知見をもとに，系の帯域幅に比べて励振帯域幅が狭いときと広いときのそれぞれの場合について，先験分布の与え方を提案した．

計算例として，ピークに大きな特徴をもつバイモーダル分布と顕著な非対称性をもつガンマ分布という非ガウス性の特徴が大きく異なる 2 種類の励振を受ける Duffing 系に提案手法を適用した．その解析結果をモンテカルロ・シミュレーションによる結果および先験分布を用いない最大エントロピー法による結果と比較することで，以下の知見が得られた．

- バイモーダル分布励振とガンマ分布励振のいずれの場合についても，励振の非ガウス分布の情報を先験確率分布として用いるとき，励振と系の帯域幅比の広い範囲で，最大エントロピー法よりも最小クロスエントロピー法の方が良い推定結果が得られることを示した．

- 励振帯域幅が系の帯域幅に比べて十分に狭い場合には，変位応答の先験分布として励振分布と同じものを与えることで，推定精度が向上することを示した．

- 励振帯域幅が系の帯域幅に比べて広く，励振がホワイトノイズに近い場合には，ガウス性白色雑音を受ける系の応答分布の厳密解を先験分布として用いることで，より精度の高い推定結果が得られることを示した．

第5章　包絡線分布を用いた狭帯域非ガウス確率過程の生成法

5.1　緒 言

Cai and Lin によって提案された方法を応用して，様々な対称型確率密度を有する狭帯域非ガウス過程を生成するための手法を提案する．その非ガウス過程は 2 次元の確率微分方程式によって表される．このとき，その拡散係数を決定するために，与えられた非ガウス分布を周辺分布にもち，加えて Fokker-Planck 方程式から導かれる条件を満たす 2 変数の結合確率分布を見つける必要がある．提案手法では，狭帯域確率過程の確率密度とその包絡線分布が関係付けられることに着目し，与えられた非ガウス分布に対応する包絡線分布を用いて結合分布を求める．

提案手法を用いて，非ガウス分布とパワースペクトルの帯域幅・卓越振動数が異なる 4 通りの確率過程の生成を行い，得られた標本関数から計算した確率密度関数とパワースペクトルを，与えた確率密度関数とパワースペクトルと比較することによって，手法の有効性を示す．

5.2　狭帯域非ガウス過程のパワースペクトル

非ガウス確率過程を $U(t)$ で表す．$U(t)$ は平均 0 の定常過程であると仮定し，そのパワースペクトル $S_U(\omega)$ として，本研究では，次のような狭帯域型のスペクトルを考える．

$$S_U(\omega) = \frac{E[U^2]}{\pi} \frac{\alpha(\alpha^2 + \rho^2 + \omega^2)}{(\alpha^2 + \rho^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \tag{5.1}$$

ここで，α は帯域幅，ρ は卓越振動数，$\mathrm{E}[U^2]$ は二乗平均値である．図 5.1 に，二乗平均値を $\mathrm{E}[U^2] = 1$ と固定し，α と ρ を変えたときの $S_U(\omega)$ の変化の様子を示す．

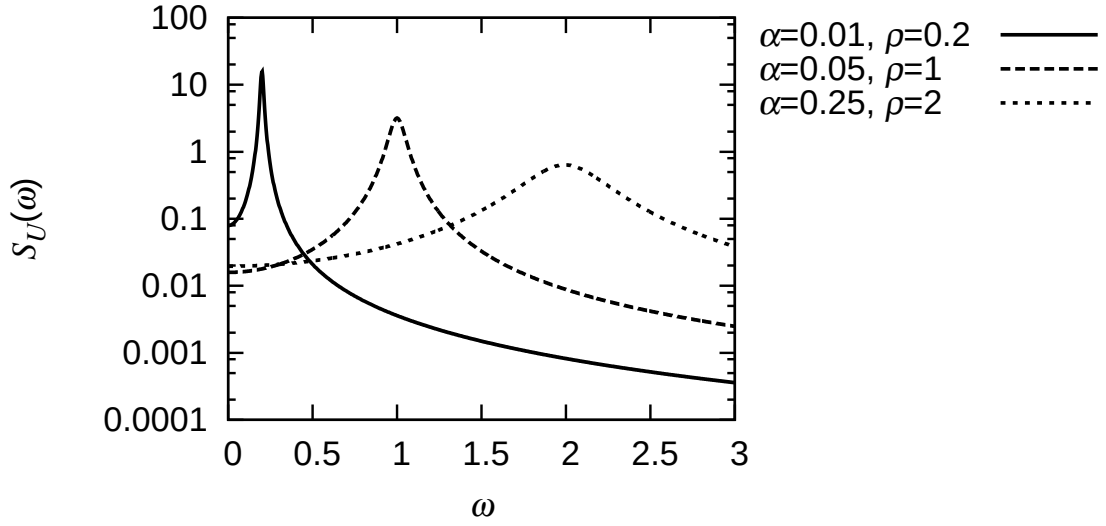


図 5.1　対象とするパワースペクトル ($\mathrm{E}[U^2] = 1$)

5.3　生成方法

式 (5.1) のパワースペクトルにしたがう非ガウス確率過程 $U(t)$ を生成するために，Cai and Lin により開発された手法 [65] を用いる．この手法では，与えた非ガウス確率密度関数とパワースペクトルから 2 次元の確率微分方程式を構築し，その式を数値的に解くことで，所望の狭帯域非ガウス過程の標本関数を生成する．このとき，その確率微分方程式を得るために，周辺分布が生成する確率過程の非ガウス分布に一致し，加えて後述する条件を満たす 2 変数の結合確率分布を見つけなければならない．しかし，これまでの先行研究 [65]-[67] では，数例の非ガウス周辺分布に対応する結合分布が示されているのみで，結合分布を求めるための一般的な方法が示されていない．

本研究では，上記の結合分布を求めるために，狭帯域確率過程の解析の際に広く用いられている包絡線分布を利用する手法を新たに導入して，所望の対称型非ガウス分布と帯域幅・卓越振動数をもつ確率過程を生成する．本章では，まず Cai and Lin によって示された手法について述べ，続いて包絡線分布から結合分布を求める本研究の提案手法を説明する．なお，確率過程の生成においては，与えた確率密度や統計量に正確にしたがう標本関数を得ることが目的となるため，これ以降，与えた非ガウス分布とパワースペクトルを「ターゲット」と呼ぶ．

5.3.1 狭帯域非ガウス過程の生成方法

本節では，Cai and Lin により開発された，狭帯域非ガウス過程 $U(t)$ の生成法を要約する [65].

(i) 確率微分方程式

対象とする非ガウス確率過程 $U(t)$ は，次に示す 2 次元の伊藤型確率微分方程式で記述される.

$$dU = (a_{11}U + a_{12}V)dt + D_1(U,V)dB_1(t) \tag{5.2}$$

$$dV = (a_{21}U + a_{22}V)dt + D_2(U,V)dB_2(t) \tag{5.3}$$

ここで，$V(t)$ は $U(t)$ に直交する定常狭帯域過程である．また，a_{ij} は $U(t)$ のパワースペクトルにしたがって決定される定数であり，拡散係数 $D_1(u,v)$, $D_2(u,v)$ は，$U(t)$ と $V(t)$ の結合確率密度関数 $p_{UV}(u,v)$ から決定される．$B_1(t)$ と $B_2(t)$ は互いに独立なウィーナー過程である.

(ii) 定数 a_{ij}

式 (5.2), (5.3) の両辺に $U(t-\tau)$ を掛けて，平均をとると，次式が導かれる.

$$\frac{d}{d\tau}R_U(\tau) \ = a_{11}R_U(\tau) + a_{12}R_{UV}(\tau) \tag{5.4}$$

$$\frac{d}{d\tau}R_{UV}(\tau) = a_{21}R_U(\tau) + a_{22}R_{UV}(\tau) \tag{5.5}$$

ここで，$R_U(\tau)$ は $U(t)$ の自己相関関数，$R_{UV}(\tau)$ は $U(t)$ と $V(t)$ の相互相関関数である.

定数 a_{ij} はターゲットのパワースペクトルにしたがって選ばれるが，式 (5.1) のパワースペクトルをもつ確率過程を生成するために，a_{ij} として，

$$a_{11} = -\alpha, \quad a_{12} = \rho, \quad a_{21} = -\rho, \quad a_{22} = -\alpha \tag{5.6}$$

を選択するのが適切であることを示す．式 (5.6) を代入した式 (5.4), (5.5) について，自己相関関数と，直交する確率過程の相互相関関数の満たすべき条件

$$R_U(0) = \mathrm{E}[U^2(t)], \quad R_{UV}(0) = \mathrm{E}[U(t)V(t)] = 0 \tag{5.7}$$

を課して解くと，$U(t)$ の自己相関関数として次式が得られる．

$$R_U(\tau) = \mathrm{E}[U^2]\exp(-\alpha|\tau|)\cos\rho\tau \tag{5.8}$$

そして，Wiener-Khintchine の定理より，$U(t)$ のパワースペクトルは次式のようになる．

$$S_U(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_U(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = \frac{\mathrm{E}[U^2]}{\pi}\frac{\alpha(\alpha^2+\rho^2+\omega^2)}{(\alpha^2+\rho^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2} \tag{5.9}$$

これは式 (5.1) のパワースペクトルと一致している．したがって，定数 a_{ij} として式 (5.6) を選ぶことで，本研究で対象とするパワースペクトルをもつ非ガウス過程を生成することができる．

(iii) 拡散係数

次に，拡散係数 $D_1(u,v)$, $D_2(u,v)$ の決定方法を要約する．$U(t)$ と $V(t)$ の定常結合分布 $p_{UV}(u,v)$ を支配する Fokker-Planck 方程式は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}[(a_{11}u+a_{12}v)p_{UV}(u,v)] + \frac{\partial}{\partial v}[(a_{21}u+a_{22}v)p_{UV}(u,v)] \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}[D_1^2(u,v)p_{UV}(u,v)] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}[D_2^2(u,v)p_{UV}(u,v)] = 0\end{aligned} \tag{5.10}$$

式 (5.10) は，次の 3 つの条件が満たされるとき，満足する [66].

$$a_{12}v\frac{\partial p_{UV}(u,v)}{\partial u} + a_{21}u\frac{\partial p_{UV}(u,v)}{\partial v} = 0 \tag{5.11}$$

$$a_{11}up_{UV}(u,v) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}[D_1^2(u,v)p_{UV}(u,v)] = 0 \tag{5.12}$$

$$a_{22}vp_{UV}(u,v) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}[D_2^2(u,v)p_{UV}(u,v)] = 0 \tag{5.13}$$

式 (5.11) の一般解は次式で与えられる．

$$p_{UV}(u,v) = p_{UV}(k_1u^2 + k_2v^2), \quad k_1a_{12} + k_2a_{21} = 0 \tag{5.14}$$

ここで，k_1 と k_2 は定数であり，$p_{UV}(u,v)$ は $k_1u^2 + k_2v^2$ の関数である．

本研究では，a_{12}，a_{21} として式 (5.6) を与えるので，$k_1 = k_2$ となる．よって，$k_1 = k_2 = 1$ を選ぶと，

$$p_{UV}(u,v) = p_{UV}(u^2 + v^2) \tag{5.15}$$

となる．これを式 (5.12), (5.13) に代入して，式 (5.6) を考慮すると，2 つの拡散係数 $D_1(u,v)$，$D_2(u,v)$ を決定する式が以下のように得られる．

$$D_1^2(u,v) = -\frac{2\alpha}{p_{UV}(u,v)} \int_{-\infty}^{u} sp_{UV}(s,v)ds \tag{5.16}$$

$$D_2^2(u,v) = -\frac{2\alpha}{p_{UV}(u,v)} \int_{-\infty}^{v} sp_{UV}(u,s)ds \tag{5.17}$$

以上で得られた 2 次元確率微分方程式を数値的に解くことで，式 (5.1) のパワースペクトルと $p_{UV}(u,v)$ の周辺確率密度 $p_U(u)$ にしたがう狭帯域非ガウス過程 $U(t)$ を生成することができる．

5.3.2 包絡線分布を用いた標本関数の生成法

5.3.1 節に示した Cai and Lin の手法を用いて，狭帯域非ガウス過程 $U(t)$ の標本関数を生成するためには，ターゲットの非ガウス分布 $p_U(u)$ を周辺分布にもち，式 (5.15) を満たす結合分布 $p_{UV}(u,v)$ を見つける必要がある．しかし，その結合分布を得るための方法については示されていない．そこで本研究では，ターゲットの非ガウス分布が対称型の場合を考え，狭帯域過程の分布とその包絡線分布が関係づけられることを用いて，包絡線分布から結合分布 $p_{UV}(u,v)$ を求める手法を提案する．以下では，その手法について説明する．

卓越振動数 ρ をもつ狭帯域過程 $U(t)$ が次式で表されると仮定する．

$$U(t) = A(t)\cos[\rho t + \Phi(t)] = A(t)\cos\Psi(t) \tag{5.18}$$

ここで，$A(t)$ と $\Phi(t)$ はそれぞれ包絡線と位相であり，いずれも $\cos\rho t$ に比べてゆっくり変化する確率過程である．また，$\Psi(t) = \rho t + \Phi(t)$ である．同様に，$U(t)$ に直交する成分 $V(t)$ を以下のように表せると仮定する．

$$V(t) = A(t)\sin[\rho t + \Phi(t)] = A(t)\sin\Psi(t) \tag{5.19}$$

ここで，

$$A(t) = \sqrt{U^2(t) + V^2(t)} \tag{5.20}$$

$$\Psi(t) = \tan^{-1}\left[\frac{V(t)}{U(t)}\right] \tag{5.21}$$

包絡線 $A(t)$ と位相 $\Phi(t)$ が互いに独立で，$\Phi(t)$ が $[0, 2\pi]$ の一様分布にしたがうものと仮定する．これらの仮定は，後に示す式 (5.27), (5.28) の使用を可能にするためになされる．$\Phi(t)$ が一様分布にしたがうとき，$\Psi(t)$ の ρt を含むことによる時間依存性はなくなり，$\Psi(t)$ の分布 $p_\Psi(\psi)$ もまた $[0, 2\pi]$ の一様分布

$$p_\Psi(\psi) = \frac{1}{2\pi} \tag{5.22}$$

となる．したがって，$A(t)$ と $\Psi(t)$ の結合分布 $p_{A\Psi}(a, \psi)$ は，$A(t)$ と $\Psi(t)$ が独立となることを考慮すると，包絡線 $A(t)$ の分布 $p_A(a)$ を用いて，次式のように表される．

$$p_{A\Psi}(a, \psi) = \frac{1}{2\pi}p_A(a) \tag{5.23}$$

式 (5.23) の $p_{A\Psi}(a, \psi)$ と，$U(t)$ と $V(t)$ の結合分布 $p_{UV}(u, v)$ の関係は次式で与えられる．

$$p_{UV}(u, v) = p_{A\Psi}(a, \psi)|J| \tag{5.24}$$

ここで，$|J|$ はヤコビアンであり，式 (5.20), (5.21) より，

$$|J| = \frac{1}{a} \tag{5.25}$$

である．したがって，式 (5.20), (5.23), (5.24), (5.25) から，$U(t)$ と $V(t)$ の結合分布 $p_{UV}(u,v)$ は，包絡線分布 $p_A(a)$ を用いて，

$$p_{UV}(u,v) = \frac{1}{2\pi}\frac{p_A(\sqrt{u^2+v^2})}{\sqrt{u^2+v^2}} \tag{5.26}$$

と求められる．

定常狭帯域過程 $U(t)$ の確率密度関数 $p_U(u)$ と包絡線分布 $p_A(a)$ の関係式として，Blanc-Lapierre et al. により，次式の変換対が示されている [200].

$$p_U(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} J_0(xa)p_A(a)e^{-iux}dadx \tag{5.27}$$

$$\frac{p_A(a)}{a} = \int_{0}^{\infty} xJ_0(xa)\int_{-\infty}^{\infty} p_U(u)e^{iux}dudx \tag{5.28}$$

ここで，$J_0(\cdot)$ は 0 次の第 1 種ベッセル関数である．先に述べたように，この関係式は，包絡線 $A(t)$ と位相 $\Phi(t)$ が互いに独立で，$\Phi(t)$ が $[0,2\pi]$ の一様分布にしたがう場合に成立する．例として，$p_U(u)$ がガウス分布の場合を考えると，式 (5.28) から，$U(t)$ の包絡線分布 $p_A(a)$ がレイリー分布であることが確かめられる．また，式 (5.27), (5.28) から，$p_A(a)/a$ と $U(t)$ の特性関数 ($\int_{-\infty}^{\infty} p_U(u)e^{iux}du$) がハンケル変換対になっていることも分かる．

本研究の提案手法では，$U(t)$ の生成時に必要な結合確率分布 $p_{UV}(u,v)$ を，ターゲットの非ガウス周辺分布 $p_U(u)$ と式 (5.27), (5.28) で関係づけられる包絡線分布 $p_A(a)$ を用いて，式 (5.26) より求める．

5.4 計算例

本節では，前節で示した包絡線分布を用いた方法によって，式 (5.1) のパワースペクトルと 4 例の対称型非ガウス分布にしたがう狭帯域過程を生成し，生成した標本関数の非ガウス分布とパワースペクトルをターゲットと比較することで，手法の有効性を検証する．

5.4.1 一様分布にしたがう狭帯域非ガウス過程

包絡線分布と拡散係数

式 (5.1) のパワースペクトルを有する狭帯域確率過程 $U(t)$ が一様分布

$$p_U(u) = \frac{1}{2\Delta}\,, \quad -\Delta \leq u \leq \Delta \tag{5.29}$$

にしたがう場合を考える．式 (5.28) を用いると，$p_U(u)$ に対応する包絡線分布 $p_A(a)$ が次式のように得られる．

$$p_A(a) = \frac{a}{\Delta\sqrt{\Delta^2 - a^2}}\,, \quad 0 \leq a \leq \Delta \tag{5.30}$$

式 (5.30) を式 (5.26) に代入すると，$U(t)$ と $V(t)$ の結合分布は，

$$p_{UV}(u,v) = \frac{1}{2\pi\Delta}\frac{1}{\sqrt{\Delta^2 - u^2 - v^2}} \tag{5.31}$$

となる．この結合分布と式 (5.16), (5.17) から，生成計算で用いる拡散係数は次式で与えられる．

$$D_1(u,v) = D_2(u,v) = \sqrt{2\alpha(\Delta^2 - u^2 - v^2)} \tag{5.32}$$

これらを式 (5.2), (5.3) に代入し，式 (5.2), (5.3) を数値的に解くことで，式 (5.1) のパワースペクトルと式 (5.29) の一様分布の両方にしたがう標本関数が得られる．

計算結果

上記の手順で生成した確率過程 $U(t)$ の標本関数と，200 本の標本関数から計算した確率密度関数，パワースペクトルを示す．

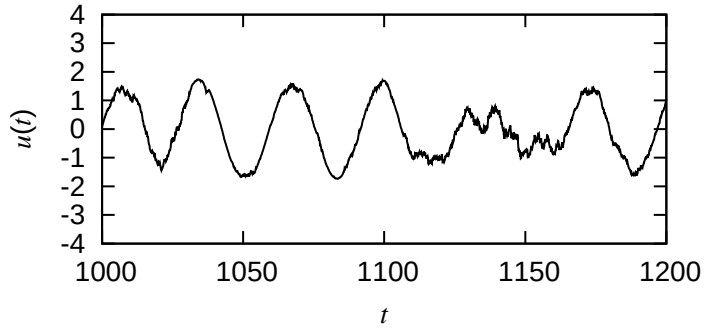
確率微分方程式の数値解法として，オイラー・丸山法 [196] を使用し，計算条件を以下の通りとする．

- 時間刻み幅：$\Delta t = 0.01$
- 標本長さ：$T = 1310.72$

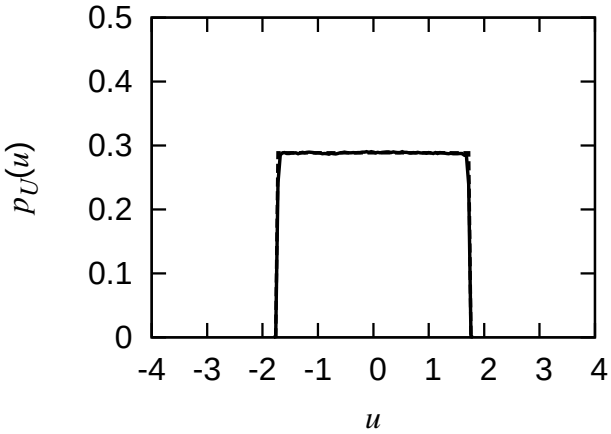
$U(t)$ のパワースペクトルと分布に関するパラメータとして，以下の値を用いる．

- 帯域幅：$\alpha = 0.01$
- 卓越振動数：$\rho = 0.2$
- 分布のパラメータ：$\Delta = \sqrt{3}$

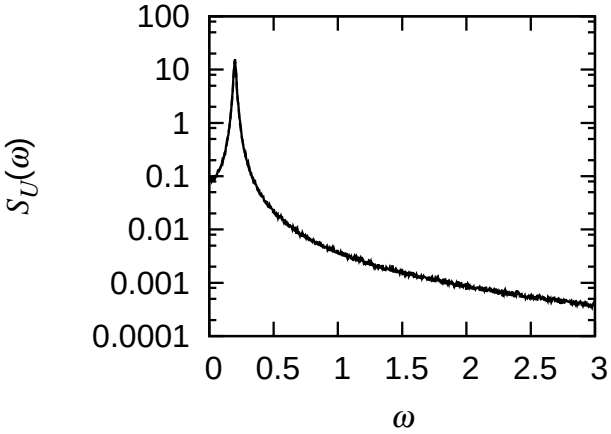
図 5.2 に，計算結果を示す．(a) が $U(t)$ の標本関数の一例，(b) が確率密度関数，(c) がパワースペクトルの結果である．また，図 5.2(b), (c) の実線は計算結果を，破線はターゲットの確率密度 (式 (5.29)) またはパワースペクトル (式 (5.1)) をそれぞれ表している．生成した標本関数の確率密度関数とパワースペクトルはターゲットとほぼ完全に一致していることが確認できる．



(a)



(b)



(c)

図 5.2　(a) 狭帯域一様分布過程の標本関数 (帯域幅パラメータ $\alpha = 0.01$, 卓越振動数パラメータ $\rho = 0.2$);
(b) 確率密度関数 (実線：200 本の標本関数，破線：式 (5.29));
(c) パワースペクトル (実線：200 本の標本関数，破線：式 (5.1))

5.4.2 ラプラス分布にしたがう狭帯域非ガウス過程

包絡線分布と拡散係数

式 (5.1) のパワースペクトルを有する狭帯域過程 $U(t)$ がラプラス分布

$$p_U(u) = \frac{\beta}{2}\exp(-\beta\,|u|) \tag{5.33}$$

にしたがう場合を考える．式 (5.33) に含まれる β は分散を決定するパラメータである．式 (5.28) を用いると，ラプラス分布に対応する包絡線分布 $p_A(a)$ は，

$$p_A(a) = \beta^2 a K_0(\beta a) \tag{5.34}$$

と得られる．ここで，$K_0(\cdot)$ は 0 次第 2 種変形ベッセル関数である．

式 (5.34) を式 (5.26) に代入すると，結合分布 $p_{UV}(u,v)$ が得られ，その結合分布と式 (5.16), (5.17) から，生成計算時に用いる拡散係数は次式のようになる．

$$D_1(u,v) = D_2(u,v) = \sqrt{\alpha\beta\sqrt{u^2+v^2}\frac{K_1(\beta\sqrt{u^2+v^2})}{K_0(\beta\sqrt{u^2+v^2})}} \tag{5.35}$$

ここで，$K_1(\cdot)$ は 1 次第 2 種変形ベッセル関数である．式 (5.35) を式 (5.2), (5.3) に代入し，式 (5.2), (5.3) を数値計算することで，式 (5.1) のパワースペクトルと式 (5.33) のラプラス分布にしたがう標本関数を生成することができる．

計算結果

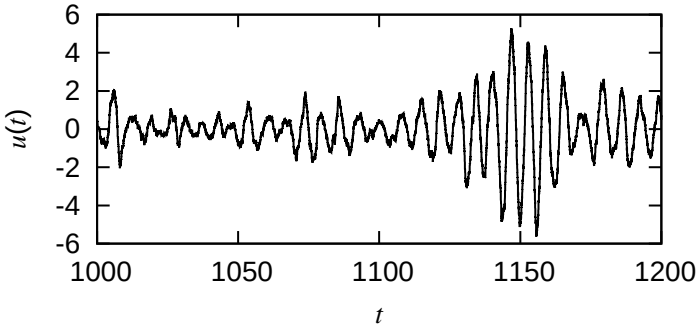
上記の手順で生成した確率過程 $U(t)$ の標本関数と，200 本の標本関数から計算した確率密度関数，パワースペクトルを示す．

計算に用いた $U(t)$ のパワースペクトルと分布のパラメータは，以下の通りである．

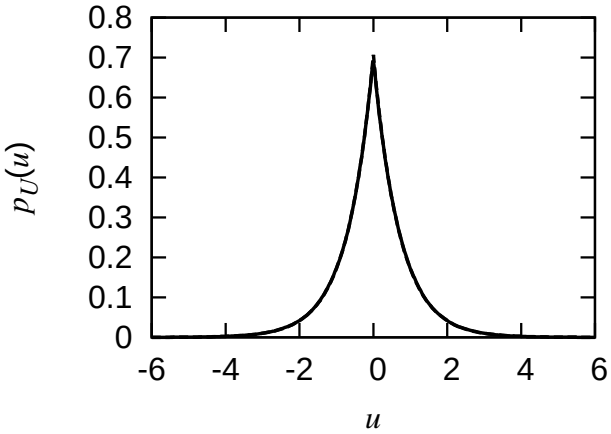
- 帯域幅：$\alpha = 0.05$
- 卓越振動数：$\rho = 1$
- 分布のパラメータ：$\beta = \sqrt{2}$

計算方法及び計算条件は，時間刻み幅 Δt を除き，5.4.1 節と同様である．与えた非ガウス分布とパワースペクトルに正確にしたがう結果を得るためには，パワースペクトルの卓越振動数 ρ が大きくなるにしたがって，Δt を小さく設定する必要があることを，実際にいくつかの計算を行うことで確認した．そのため本計算例では，先程の一様分布過程の生成時に比べて小さい $\Delta t = 0.001$ とする．

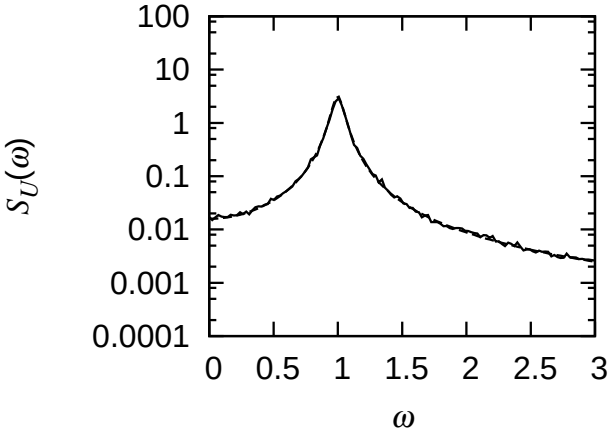
図 5.3 に，計算結果を示す．(a) は標本関数，(b) は確率密度関数，(c) はパワースペクトルの結果である．図 5.3(b), (c) の実線は計算結果を，破線はターゲットの分布 (式 (5.33)) またはパワースペクトル (式 (5.1)) をそれぞれ表している．これらの計算結果より，ラプラス分布の場合でも，生成した標本関数の確率密度関数とパワースペクトルは，ターゲットとよく一致していることが分かる．



(a)



(b)



(c)

図 5.3　(a) 狭帯域ラプラス分布過程の標本関数 (帯域幅パラメータ $\alpha = 0.05$, 卓越振動数パラメータ $\rho = 1$);

(b) 確率密度関数 (実線：200 本の標本関数，破線：式 (5.33));

(c) パワースペクトル (実線：200 本の標本関数，破線：式 (5.1))

5.4.3 t 分布にしたがう狭帯域非ガウス過程

包絡線分布と拡散係数

式 (5.1) のパワースペクトルを有する狭帯域過程 $U(t)$ が t 分布

$$p_U(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{m\pi}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(1+\frac{u^2}{m}\right)^{-\left(\frac{m+1}{2}\right)} \tag{5.36}$$

にしたがう場合を考える．式 (5.36) に含まれる m は分布形状を決定する整数のパラメータであり，自由度と呼ばれる．t 分布の尖度 γ_{4U} は,

$$\gamma_{4U} = \frac{6}{m-4}, \quad m > 4 \tag{5.37}$$

で与えられるため，パラメータ m を変化させることで，ガウス分布 $(m \to \infty)$ よりも尖度の大きい範囲で，様々な尖度をもつ分布を表すことができる．

式 (5.28) を用いると，t 分布に対応する包絡線分布 $p_A(a)$ は,

$$p_A(a) = m^{\frac{m+2}{2}}\frac{a}{(a^2+m)^{\frac{m+2}{2}}} \tag{5.38}$$

と得られる．式 (5.38) を式 (5.26) に代入することで，結合分布 $p_{UV}(u,v)$ を求め，その結合分布と式 (5.16), (5.17) を用いると，生成計算時に用いる拡散係数は次式のように導かれる．

$$D_1(u,v) = D_2(u,v) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}(u^2+v^2+m)} \tag{5.39}$$

式 (5.39) を式 (5.2), (5.3) に代入し，式 (5.2), (5.3) を数値計算することで，式 (5.1) のパワースペクトルと式 (5.36) の t 分布にしたがう標本関数を生成することができる．

計算結果

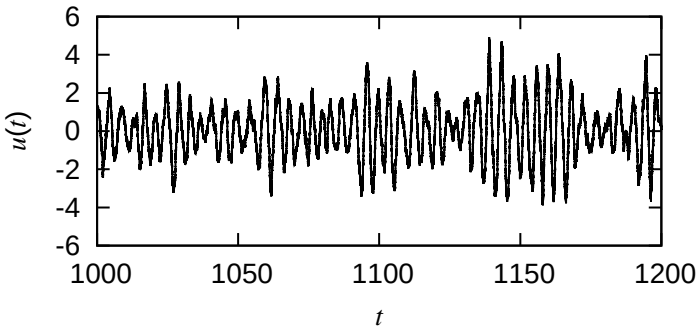
生成した確率過程 $U(t)$ の標本関数と，200 本の標本関数から計算した確率密度関数，パワースペクトルを示す．

計算方法及び計算条件は 5.4.1 節と同様であり，時間刻み幅を $\Delta t = 0.001$ とする．また，計算に用いた $U(t)$ のパワースペクトルと分布のパラメータは，以下の通りである．

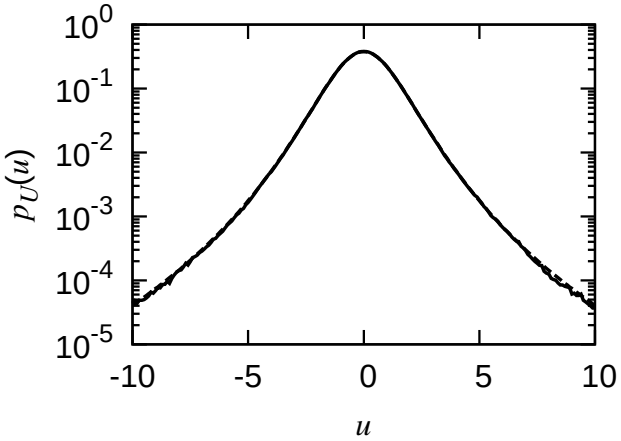
- 帯域幅：$\alpha = 0.1$
- 卓越振動数：$\rho = 1.5$
- 分布のパラメータ：$m = 5$ ($\gamma_{4U} = 6$)，$m = 6$ ($\gamma_{4U} = 3$)，$m = 10$ ($\gamma_{4U} = 1$)

分布の尖度が異なる 3 通りの m の場合で生成計算を行う．

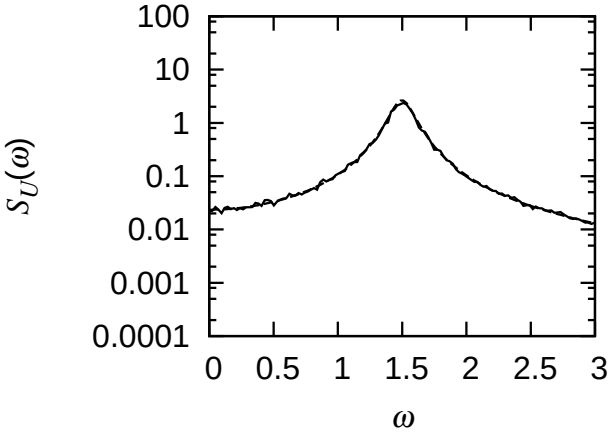
図 5.4-5.6 に，計算結果を示す．(a) は標本関数，(b) は確率密度関数，(c) はパワースペクトルの結果である．(b), (c) の実線は計算結果を，破線はターゲットの確率密度 (式 (5.36)) またはパワースペクトル (式 (5.1)) をそれぞれ表している．なお，本計算例では，パラメータ m の異なる 3 通りの分布の違いを明瞭にするため，(b) の図の縦軸を対数軸としている．尖度の異なるいずれの場合でも，生成した標本関数の確率密度関数とパワースペクトルは，ターゲットとよく一致していることが確認できる．



(a)

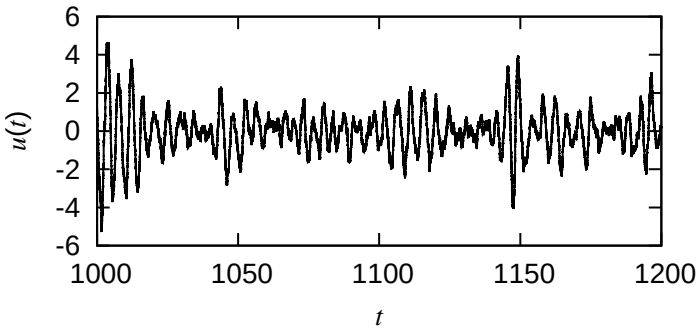


(b)

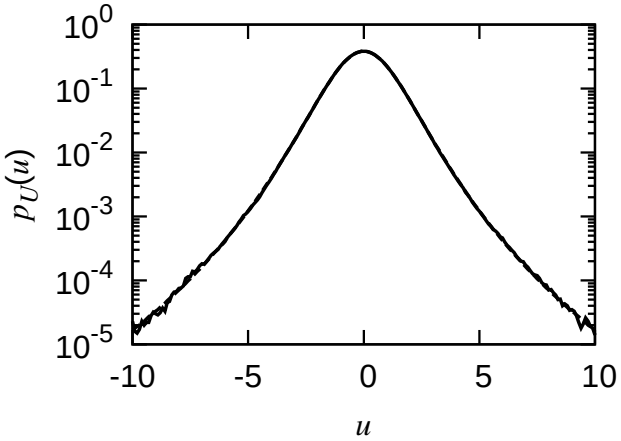


(c)

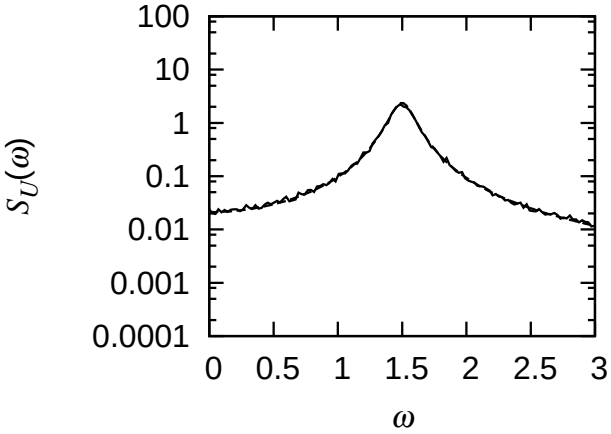
図 5.4　(a) 狭帯域 t 分布過程の標本関数 (帯域幅パラメータ $\alpha = 0.1$,
卓越振動数パラメータ $\rho = 1.5$，分布のパラメータ：$m = 5$);
(b) 確率密度関数 (実線：200 本の標本関数，破線：式 (5.33));
(c) パワースペクトル (実線：200 本の標本関数，破線：式 (5.1))



(a)

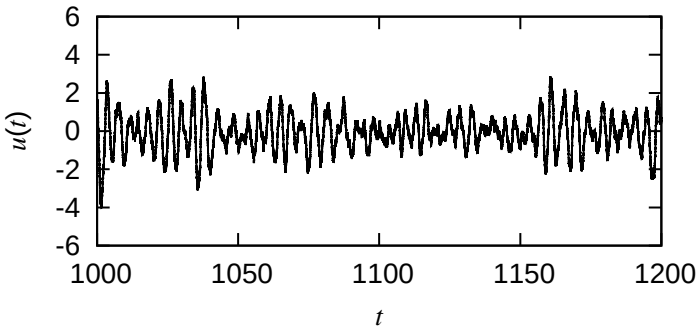


(b)

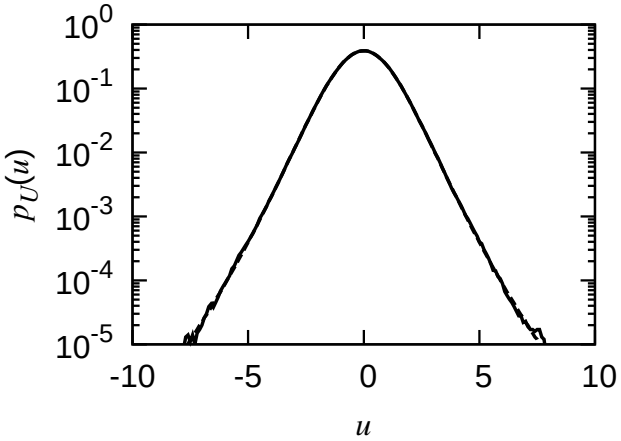


(c)

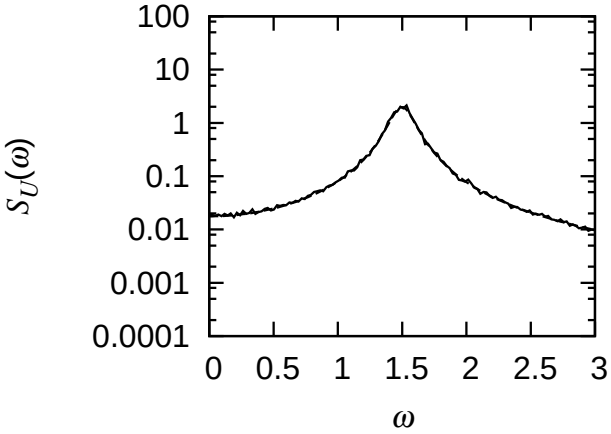
図 5.5　(a) 狭帯域 t 分布過程の標本関数 (帯域幅パラメータ $\alpha = 0.1$,
卓越振動数パラメータ $\rho = 1.5$，分布のパラメータ：$m = 6$);
(b) 確率密度関数 (実線：200 本の標本関数，破線：式 (5.33));
(c) パワースペクトル (実線：200 本の標本関数，破線：式 (5.1))



(a)



(b)



(c)

図 5.6　(a) 狭帯域 t 分布過程の標本関数 (帯域幅パラメータ $\alpha = 0.1$,
卓越振動数パラメータ $\rho = 1.5$，分布のパラメータ：$m = 10$);
(b) 確率密度関数 (実線：200 本の標本関数，破線：式 (5.33));
(c) パワースペクトル (実線：200 本の標本関数，破線：式 (5.1))

5.4.4 バイモーダル分布にしたがう狭帯域非ガウス過程

包絡線分布と拡散係数

式 (5.1) のパワースペクトルを有する狭帯域過程 $U(t)$ が，次式で与えられるバイモーダル分布

$$p_U(u) = \frac{1}{24\sqrt{\pi\Omega}} \exp\left(-\frac{4}{\Omega}u^2\right)\left(\frac{512}{\Omega^3}u^6 + \frac{192}{\Omega^2}u^4 + \frac{72}{\Omega}u^2 + 15\right) \tag{5.40}$$

にしたがう場合を考える．このバイモーダル分布は，以下に示す仲上-m 分布と呼ばれる包絡線分布 [201]

$$p_A(a) = \frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\Omega}\right)^m a^{2m-1} \exp\left(-\frac{ma^2}{\Omega}\right) \tag{5.41}$$

で，パラメータ m を $m = 4$ としたものから，式 (5.27) を通して導かれる．式 (5.41) に含まれる m と Ω は，それぞれ分布形状と分散を決定するパラメータである．

式 (5.41) の包絡線分布 $p_A(a)$ を用いることで，式 (5.26) から結合分布 $p_{UV}(u,v)$ が得られ，その結合分布を式 (5.16), (5.17) に代入すると，拡散係数は次式のようになる．

$$\begin{aligned} D_1(u,v) = D_2(u,v) &= D(u^2+v^2) \\ &= \sqrt{\alpha\left\{\frac{\Omega}{4} + \frac{3\Omega^2}{16}\frac{1}{u^2+v^2} + \frac{3\Omega^3}{32}\frac{1}{(u^2+v^2)^2} + \frac{3\Omega^4}{128}\frac{1}{(u^2+v^2)^3}\right\}} \end{aligned} \tag{5.42}$$

式 (5.42) について，その一例として，$\alpha = 0.25$，$\Omega = 2$ の場合の拡散係数 $D(u^2+v^2)$ を図 5.7 に示す．$D(u^2+v^2)$ は α と Ω の値によらず，u^2+v^2 が小さいとき，非常に大きくなる ($D(0) = \infty$)．したがって，式 (5.42) を用いて生成計算を行うとき，計算中に u^2+v^2 が小さい値をとるとき，式 (5.2), (5.3) において，$D_1(u,v)dB_1(t)$, $D_2(u,v)dB_2(t)$ が非常に大きくなる．このとき，$U(t)$ の値もまた大きくなるため，結果として，得られる標本関数から計算した確率密度関数の裾が，ターゲットの分布と比べて広がるという問題が生じる．そのため，図 5.8 に示すような，u^2+v^2 が小さいときの拡散係数の出力値の大きさを制限した計算用拡散係数を新たに導入し，これを用いることでバイモーダル分布にしたがう狭帯域過程を精度良く生成する．次で詳細に述べる．

一様分布，ラプラス分布，t 分布にしたがう確率過程の生成時には上記のような問題は生じないため，解析的に得られる式 (5.32), (5.35), (5.39) の拡散係数をそのまま用いて計算することができる．

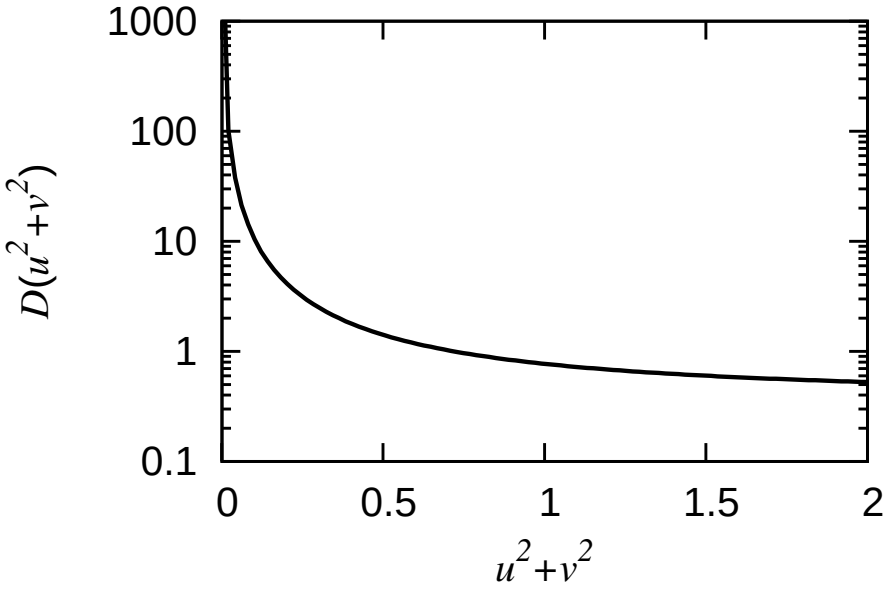


図 5.7　バイモーダル分布に対応する拡散係数 ($\alpha = 0.25$，$\Omega = 2$)

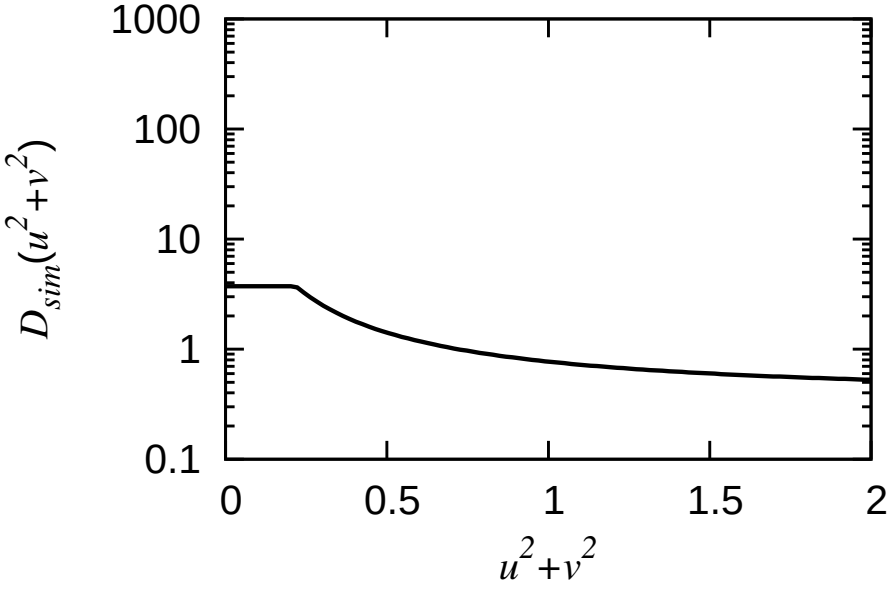


図 5.8　計算用拡散係数 ($\alpha = 0.25$，$\Omega = 2$，$K_{sim} = 0.22$)

計算用拡散係数

先に述べた拡散係数の問題を回避するために，本研究では，式 (5.42) で表される拡散係数 $D(u^2+v^2)$ の代わりに，以下に示す計算用拡散係数 $D_{sim}(u^2+v^2)$ を用いる．

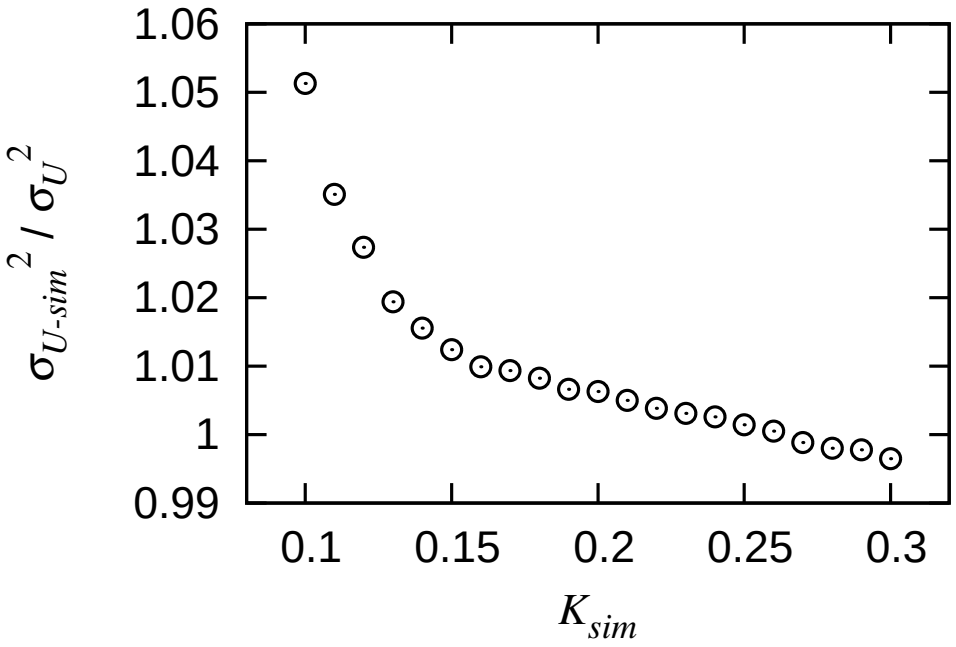
$$D_{sim}(u^2+v^2) = D(u^2+v^2), \quad u^2+v^2 > K_{sim} \tag{5.43}$$

$$D_{sim}(u^2+v^2) = D(K_{sim}), \quad u^2+v^2 \leq K_{sim} \tag{5.44}$$

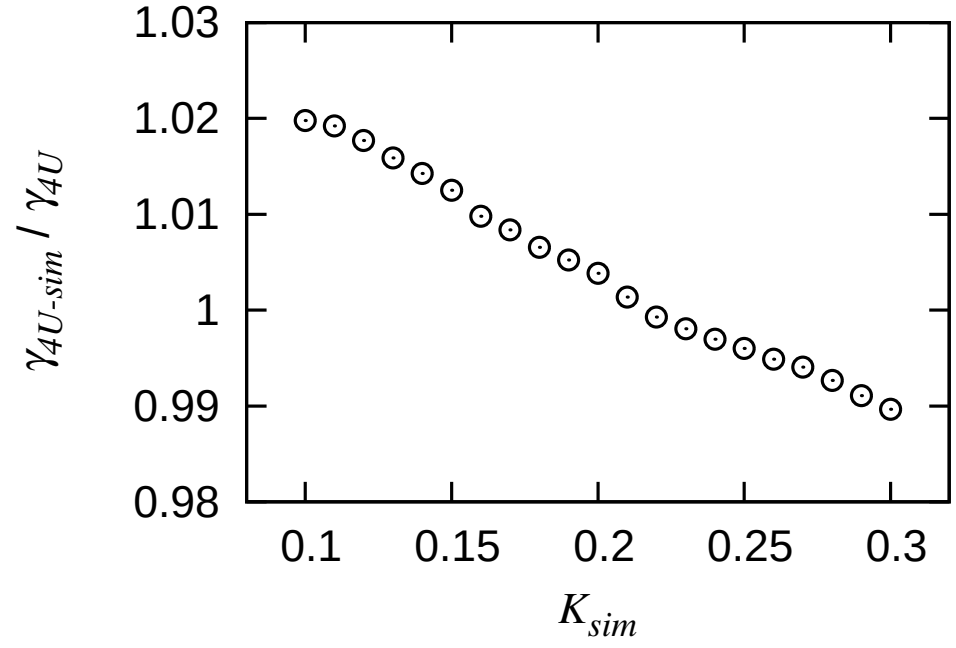
$D_{sim}(u^2+v^2)$ は，ある基準値 K_{sim} を設定したときに，K_{sim} より大きい u^2+v^2 が $D_{sim}(u^2+v^2)$ の引数となる場合には，$D(u^2+v^2)$ の値をそのまま返し (式 (5.43))，K_{sim} 以下の u^2+v^2 が引数となる場合には，$D(K_{sim})$ の値を返す (式 (5.44))．これにより，計算中に u^2+v^2 が 0 に近い値となったときに，拡散係数の値が大きくなるのを防ぐ．実際に計算する際の K_{sim} の値は，計算結果の精度を確認しながら，試行錯誤的に決定される．

次の計算例で使用する $\alpha = 0.25$，$\Omega = 2$ の場合について，横軸に K_{sim}，縦軸に 200 本の標本関数から計算された分散 σ^2_{U-sim}，尖度 γ_{4U-sim} と式 (5.40) から求められた分散 σ^2_U，尖度 γ_{4U} の比をとった図を，図 5.9 に示す．(a) は分散に関する結果，(b) は尖度に関する結果であり，値が 1 に近いほど，計算結果とターゲットとの誤差が小さいことを示す．また，K_{sim} については，$0.1 \leq K_{sim} \leq 0.3$ の範囲で 0.01 刻みで変化させた．考慮した K_{sim} の範囲内で，計算結果 σ^2_{U-sim}，γ_{4U-sim} の誤差は数パーセントに収まっていることが確かめられる．詳細に見ると，σ^2_{U-sim} と γ_{4U-sim} は，K_{sim} が小さいとき，ターゲットの値である σ^2_U と γ_{4U} に比べて大きく，K_{sim} が大きくなるにつれて単調に減少し，ある K_{sim} を超えると σ^2_U，γ_{4U} よりも小さくなる．この変化傾向は，α と Ω の他の組み合わせでも観察された．

式 (5.42) の通り，もとの拡散係数 $D(u^2+v^2)$ には帯域幅パラメータ α が含まれるため，K_{sim} の値は α に依存し，α が大きいほど適切な K_{sim} の値は大きくなる．しかし，α の変化に対して，K_{sim} の値はそれほど大きく変化せず，例えば，$\alpha = 0.02$ のときは $K_{sim} \simeq 0.19$，$\alpha = 0.5$ のときは $K_{sim} \simeq 0.26$ とすることで，良い精度の結果が得られることを確認した．また，それぞれのパラメータ条件で，計算結果とターゲットとの誤差を最小とする最適な K_{sim} が存在することが考えられるが，図 5.9 に示すように，最適値を少し外れても，適当な範囲の K_{sim} を選べば，精度の違いはほとんどないことが分かる．



(a)



(b)

図 5.9　200 本の標本関数とターゲットの分布 (式 (5.40)) から求めた (a) 分散と (b) 尖度の比 ($\alpha = 0.25$，$\Omega = 2$)

計算結果

生成した確率過程 $U(t)$ の標本関数と，200 本の標本関数から計算した確率密度関数，パワースペクトルを示す．

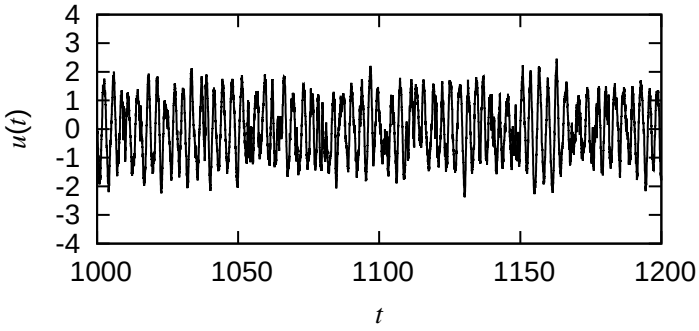
計算時の時間刻み幅を $\Delta t = 0.001$ とする．また，拡散係数の大きさを制限する基準値 K_{sim} を，図 5.9 の結果を参考に，$K_{sim} = 0.22$ と設定する．このときの計算用拡散係数 $D_{sim}(u^2 + v^2)$ は，図 5.8 の通りである．

計算に用いた $U(t)$ のパワースペクトルと分布に関するパラメータを以下に示す．

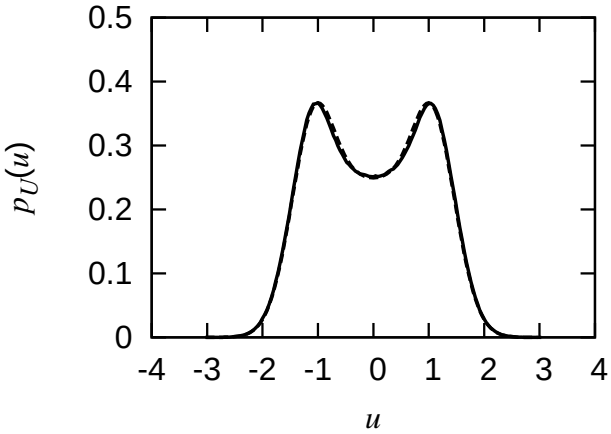
- 帯域幅：$\alpha = 0.25$
- 卓越振動数：$\rho = 2$
- 分布のパラメータ：$\Omega = 2$

図 5.10 に，計算結果を示す．(a) が標本関数，(b) が確率密度関数，(c) がパワースペクトルの結果である．図 5.10(b), (c) の実線は計算結果を，破線はターゲットの分布 (式 (5.40)) とパワースペクトル (式 (5.1)) をそれぞれ表している．これらの計算結果より，バイモーダル分布の場合についても，生成した標本関数の確率密度とパワースペクトルは，ターゲットとよく一致していることが分かる．

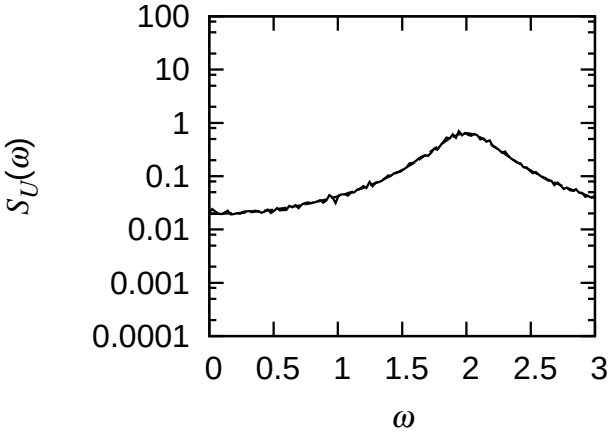
これまでに示した 4 種類の対称型分布にしたがう非ガウス過程について，計算例で用いた α と ρ の値だけでなく，様々な α と ρ の組み合わせで生成計算を行い，得られた標本関数の確率密度関数とパワースペクトルの精度検証を行った．そして，いずれの非ガウス分布の場合でも，広い範囲の帯域幅 α と卓越振動数 ρ に対して，本提案手法が有効であることを確認した．



(a)



(b)



(c)

図 5.10　(a) 狭帯域バイモーダル分布過程の標本関数
(帯域幅パラメータ $\alpha = 0.25$，卓越振動数パラメータ $\rho = 2$);
(b) 確率密度関数 (実線：200 本の標本関数，破線：式 (5.40));
(c) パワースペクトル (実線：200 本の標本関数，破線：式 (5.1))

5.5 結 言

対称型非ガウス分布と狭帯域型パワースペクトルにしたがう非ガウス過程を生成するために，包絡線分布を用いる手法を提案した．本提案手法は，Cai and Lin によって開発された，与えた確率密度関数とパワースペクトルから 2 次元の確率微分方程式を構築し，その式を数値的に解くことで標本関数を生成する手法 [65] に基づいている．確率微分方程式の拡散係数を求める際，周辺分布が生成する確率過程の非ガウス分布に一致し，加えて Fokker-Planck 方程式から導かれる条件を満たす 2 変数の結合確率分布を得なければならないが，その結合分布を得るための方法はこれまで示されていなかった．

本研究では，対象とする狭帯域過程の非ガウス分布とその包絡線分布が関係付けられることに着目し，ターゲットの非ガウス分布に対応する包絡線分布から，必要となる結合分布を求める方法を新たに提案した．本手法は，多くの種類の対称型非ガウス分布に適用可能である．また，本提案手法では，他の多くの非ガウス過程生成法において必要となる反復計算の手続きが無いため，効率的に所望の非ガウス過程を生成することができる．

提案手法を，非ガウス分布とパワースペクトルの帯域幅・卓越振動数が異なる 4 通りの確率過程を生成するために適用し，生成した標本関数から計算した確率密度関数とパワースペクトルを，ターゲットの分布とパワースペクトルと比較することで精度を検証した．また，4 例目のバイモーダル分布過程の生成計算において，計算中に拡散係数の値が非常に大きくなり，正確な計算結果が得られない問題を回避するために，拡散係数の出力値の大きさを制限した計算用拡散係数を用いる方法を示した．いずれの例でも得られた計算結果はターゲットとよく一致し，本提案手法を用いて，様々な非ガウス分布，帯域幅，卓越振動数を有する狭帯域過程を精度良く生成できることを示した．

第6章　結 論

確率密度関数とパワースペクトルによって規定される非ガウス性不規則励振を受ける振動系を対象とし，励振の非ガウス性により現れる一般的な応答特性を調べること，また，様々な非ガウス分布にしたがう励振を受ける振動系に広く適用可能な応答解析手法と，非ガウス過程を確率微分方程式で記述する Cai and Lin モデルを応用した狭帯域非ガウス確率過程の生成法を開発することを目的として研究行った．以下には，2 章以降で行ったそれぞれの研究で得られた結果および今後の課題を示す．

第 2 章：帯域幅を考慮した非ガウス性不規則励振を受ける線形系・非線形系の応答分布

非ガウス性不規則励振を受ける非線形系の応答分布を，モンテカルロ・シミュレーションによって調べた．励振の非ガウス分布として，ガウス分布とは形状が大きく異なり，互いの形状にも明らかな違いがあるバイモーダル分布とラプラス分布の 2 種類を用いた．また，励振のパワースペクトルについては，その帯域幅に着目し，線形系の周波数応答関数の帯域幅に比べて狭い場合から広い場合まで幅広く考慮した．そのような非ガウス性励振を受ける線形系と Duffing 系および非対称非線形系の定常応答分布を数値計算で求め，励振の非ガウス性と帯域幅，また系の非線形性の違いによって現れる応答分布の特徴を調べ，以下の知見が得られた．

- 励振帯域幅が系の帯域幅に比べて広い場合の応答分布は，励振の非ガウス分布の違いによらず，ガウス性ホワイトノイズを受ける系の応答分布に近い形状となる．

- 励振帯域幅が系の帯域幅に比べて狭いとき，応答分布は励振分布に近い形状の非ガウス分布となる．この理由を，直流成分が卓越した励振とその励振を受ける系の応答の特徴と，系の剛性の線形項と非線形項の大きさに着目して考察した．

- 励振帯域幅が狭い場合において，剛性の非線形項が線形項と比較して大きくな

るにしたがって，応答分布に与える非線形性の影響が顕著になることを，非対称非線形系の計算結果を用いて示した．

第 3 章：等価非ガウス励振化法を用いた非ガウス性不規則励振を受ける振動系の応答モーメントの解析

非ガウス性不規則励振を受ける振動系の 4 次までの応答モーメントを求めるために，等価非ガウス励振化法という手法を開発した．一般的な非ガウス分布を有する励振を対象とするとき，励振を記述する確率微分方程式に含まれる拡散係数が複雑な形となるため，励振の確率微分方程式と系の運動方程式から導出される応答のモーメント方程式は一般に閉じた形とならない．等価非ガウス励振化法では，閉じたモーメント方程式を得るために，もとの拡散係数を近似的に等価拡散係数で置き換える．等価拡散係数の二乗は 2 次多項式で与えられ，その多項式の係数は，等価拡散係数ともとの拡散係数の二乗平均誤差が最小となるように決定される．

提案手法を，一般化ガウス分布，バイモーダル分布，拡張一般化ガウス分布という 3 種類の非ガウス分布にしたがう励振を受ける線形系に適用し，変位応答の分散，歪度，尖度を求めた．そして，応答分散が厳密に得られること，また，解析結果とモンテカルロ・シミュレーションから得られた結果の比較から，応答の歪度と尖度についても，様々な非ガウス分布形状と帯域幅をもつ励振の場合で，精度良く得られることを示した．

等価拡散係数に対応する等価非ガウス性励振の分布を Fokker-Planck 方程式から導出し，等価励振分布の歪度と尖度がもとの励振分布の歪度と尖度に非常に良く一致することを示した．

今後の課題として，等価非ガウス励振化法を通して得られた応答の分散・歪度・尖度を用いた，非ガウス励振系の応答分布の推定と信頼性の評価が挙げられる．

第 4 章：最小クロスエントロピー法による非ガウス不規則励振系の応答分布の解析

最小クロスエントロピー法を用いて，非ガウス性不規則励振を受ける非線形系の応答分布を求める手法を提案した．最小クロスエントロピー法のための拘束条件として，確率密度関数の正規化条件と 2 次までのモーメント方程式を用いた．モーメント方程式を拘束条件に用いることで，モーメント単体を拘束条件とする場合に比べて，系と励振の情報をより多く考慮した応答分布推定が可能となる．また，最小

クロスエントロピー法を用いる際，先験確率分布の与え方が重要となるが，本研究では，既知である励振の非ガウス確率密度関数を与えることに加え，2 章で得られた，非ガウス励振系の応答分布特性と励振と系の帯域幅比の関係についての知見を考慮し，励振帯域幅が系の帯域幅に比べて狭いときと広いときのそれぞれの場合について，先験分布の与え方を提案した．

計算例として，ピークに大きな特徴をもつバイモーダル分布と顕著な非対称性をもつガンマ分布という非ガウス性の特徴が大きく異なる 2 種類の励振を受ける Duffing 系に提案手法を適用し，その解析結果をモンテカルロ・シミュレーションによる結果および先験分布を用いない最大エントロピー法による結果と比較することで，以下の知見が得られた．

- 励振の非ガウス分布を先験確率分布として用いることによって，励振と系の帯域幅比の広い範囲で，最大エントロピー法よりも最小クロスエントロピー法の方が良い推定結果が得られる．
- 励振帯域幅が系の帯域幅に比べて十分に狭い場合，変位応答の先験分布として励振分布と同じものを与えることで，推定精度が向上する．
- 励振帯域幅が系の帯域幅に比べて広い場合，ガウス性白色雑音を受ける系の応答分布の厳密解を先験分布として用いることで，より精度の高い推定結果が得られる．

今後の課題として，励振の非ガウス分布または系の非線形性が異なる場合を対象とした本手法の有効性のさらなる検証や，提案手法により得られた応答分布を用いた系の信頼性解析が挙げられる．

第 5 章：包絡線分布を用いた狭帯域非ガウス確率過程の生成法

対称型非ガウス分布と狭帯域型パワースペクトルによって規定される非ガウス過程を生成するために，包絡線分布を用いる手法を提案した．本提案手法は，Cai and Lin によって開発された，与えた確率密度関数とパワースペクトルから 2 次元の確率微分方程式を構築し，その式を数値的に解くことで確率過程を生成する手法 [65] に基づいている．確率微分方程式の拡散係数を求める際，周辺分布が生成する確率過程の非ガウス分布に一致し，加えて Fokker-Planck 方程式から導かれる条件を満たす 2 変数の結合確率分布を求める必要がある．本研究では，対象とする非ガウス分布に対応する包絡線分布から，その結合分布を求める方法を新たに提案した．

提案手法を，非ガウス分布とパワースペクトルの帯域幅・卓越振動数が異なる 4 通りの確率過程を生成するために適用し，その妥当性を検証した．また，4 例目のバイモーダル分布過程の生成計算において，計算中に拡散係数の値が非常に大きくなり，正確な計算結果が得られない問題を回避するために，拡散係数の出力値の大きさを制限した計算用拡散係数を用いる方法を示した．いずれの計算例においても，生成した標本関数から得られた確率密度関数とパワースペクトルは，ターゲットとよく一致し，本提案手法を用いて，様々な対称型非ガウス分布，帯域幅，卓越振動数を有する狭帯域過程を精度良く生成できることを示した．

今後は，本手法を通して生成した狭帯域非ガウス過程を励振として用い，2 章で行ったような系の応答のモンテカルロ・シミュレーションを実行することによって，また，励振を記述する 2 次元確率微分方程式と系の運動方程式を組み合わせ，3, 4 章で示した系の応答解析手法の拡張を行うことによって，励振の卓越振動数の違いが非ガウス励振系の応答特性に与える影響を調べていく予定である．

参考文献

[1] Y.K. Lin, Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1967.

[2] Y.K. Lin and G.Q. Cai, Probabilistic Structural Dynamics: Advanced Theory and Applications, McGraw-Hill, New York, 1995.

[3] L.D. Lutes and S. Sarkani, Random Vibrations: Analysis of Structural and Mechanical Systems, Elsevier Butterworth-Heinemann, Burlington, 2004.

[4] D.E. Newland, An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis: Third Edition, Dover Publications, 2005.

[5] J.B. Roberts and P.D. Spanos, Random Vibration and Statistical Linearization, Dover Publications, New York, 2003.

[6] S.H. Crandall and W.Q. Zhu, Random vibration - A survey of recent developments, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.50, No.4B, pp.953-962, 1983.

[7] W.Q. Zhu and G.Q. Cai, Nonlinear stochastic dynamics: A survey of recent developments, *Acta Mechanica Sinica*, Vol.18, No.6, pp.551-566, 2002.

[8] P. Sniady, S. Biernat, R. Sieniawska and S. Zukowski, Vibrations of the beam due to a load moving with stochastic velocity, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.16, No.1, pp.53-59, 2001.

[9] H.W. Liepmann, On the application of statistical concepts to the buffeting problem, *Journal of Aeronautical Sciences*, Vol.19, No.1, pp.793-800, 1952.

[10] J.B. Roberts, On the response of a simple oscillator to random impulses, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.19, No.1, pp.51-61, 1966.

[11] Y.H. Chen, Ship Vibrations in Random Seas, *Journal of Ship Research*, Vol.24, No.3, pp.156-169, 1980.

[12] G. Cotton, M. Di Paola, R. Ibrahim, A. Pirrotta and R. Santoro, Stochastic ship roll motion via path integral method, *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*, Vol.2, pp.119-126, 2010.

[13] J.B. Roberts, The response of linear vibratory systems to random impulses, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.2, No.4, pp.375-390, 1965.

[14] M. Grigoriu, Applied Non-Gaussian Processes: Examples, Theory, Simulation, Linear Random Vibration, and MATLAB Solutions, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.

[15] X. Yue, W. Xu, W. Jia and L. Wang, Stochastic response of a ϕ 6 oscillator subjected to combined harmonic and Poisson white noise excitations, *Physica A*, Vol.392, No.14, pp.2988-2998, 2013.

[16] A. Pirrotta and R. Santoro, Probabilistic response of nonlinear systems under combined normal and Poisson white noise via path integral method, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.26, No.1, pp.26-32, 2011.

[17] A. Rystwel and P. Sniady, Dynamic response of an infinite beam and plate to a stochastic train of moving forces, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.299, No.4-5, pp.1033-1048, 2007.

[18] R. Iwankiewicz and S.R.K. Nielsen, Dynamic response of non-linear systems to renewal-driven random pulse trains, *International Journal of Non-Linear Mechanics* , Vol.29, No.4, pp.555-567, 1994.

[19] R. Iwankiewicz and K. Sobczyk, Dynamic response of linear structures to correlated random impulses, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.86, No.3, pp.303-317, 1983.

[20] K. Mazur-Sniady and P. Sniady, Dynamic response of linear structures to random streams of arbitrary impulses in time and space, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.110, No.1, pp.59-68, 1986.

[21] R. Iwankiewicz, Equations for probability density of response of dynamic systems to a class of non-Poisson random impulse process excitations, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.23, No.2-3, pp.198-207, 2008.

[22] N.H. Ko, K.P. You and Y.M. Kim, The effect of non-Gaussian local wind pressures on a side face of a square building, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol.93, No.5, pp.383-397, 2005.

[23] S.B. Ayed, L.D. Aponte-Bermudez, M.R. Hajj, H.W. Tieleman, K.R. Gurley and T.A. Reinhold, Analysis of hurricane wind loads on low-rise structures, *Engineering Structures*, Vol.33, No.2, pp.3590-3596, 2011.

[24] L. Yang, K.R. Gurley and D.O. Prevatt, Probabilistic modeling of wind pressure on low-rise buildings, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol.114, pp.18-26, 2013.

[25] N. Moshchuk and R.A. Ibrahim, Response statistics of ocean structures to non-linear hydrodynamic loading. Part II: Non-gaussian ocean waves, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.191, No.1, pp.107-128, 1996.

[26] X.Y. Zheng and C.Y. Liaw, Response cumulant analysis of a linear oscillator driven by Morison force, *Applied Ocean Research*, Vol.26, No.3-4, pp.154-161, 2004.

[27] E.M. Bitner, Non-linear effects of the statistical model of shallow-water wind waves, *Applied Ocean Research*, Vol.2, No.2, pp.63-73, 1980.

[28] M.K. Ochi, Non-Gaussian random processes in ocean engineering, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.1, No.1, pp.28-39, 1986.

[29] R.W. Butler, U.B. Machado and I. Rychlik, Distribution of wave crests in a non-Gaussian sea, *Applied Ocean Research*, Vol.31, No.1, pp.57-64, 2009.

[30] A. Steinwolf, Random Vibration Testing Beyond PSD Limitations, *Sound and Vibration*, Vol.40, No.9, pp.12-21, 2006.

[31] V. Rouillard and M.A. Sek, Synthesizing Nonstationary, Non-Gaussian Random Vibrations, *Packaging Technology and Science*, Vol.23, pp.423-439, 2010.

[32] A. Steinwolf, Random vibration testing with kurtosis control by IFFT phase manipulation, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.28, pp.561-573, 2012.

[33] 細山亮，中嶋隆勝，台車振動と試験振動における蓄積疲労の比較 -確率密度分布が蓄積疲労に与える影響-，日本包装学会誌，Vol.19，No.2，pp.113-121，2010.

[34] A. Steinwolf，Non-Gaussian Analysis of Turbulent Boundary Layer Fluctuating Pressure on Aircraft Skin Panels，*Journal of Aircraft*，Vol.43，No.6，pp.1662-1675，2006.

[35] C. Kafili and M. Grigoriu，Non-Gaussian model for spatially coherent seismic ground motions，*In: Proceedings of the 9th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering*，San Francisco，2003.

[36] W.R. Graham, F. Liu, M.P.F. Sutcliffe and M. Dale，Characterisation and simulation of asphalt road surfaces，*Wear*，Vol.271，No.5-6，pp.734-737，2011.

[37] Y.C. Kim and E.J. Powers，Digital Bispectral Analysis and Its Applications to Nonlinear Wave Interactions，*IEEE Transactions on Plasma Science*，Vol.7，No.2，pp.120-131，1979.

[38] M.R. Hajj R.W. Miksad and E.J. Powers，Perspective: Measurements and Analyses of Nonlinear Wave Interactions With Higher-Order Spectral Moments，*Journal of Fluids Engineering*，Vol.119，No.1，pp.3-13，1997.

[39] K.R. Gurley, A. Kareem and M.A. Tognarelli，Simulation of a class of nonnormal random processes，*International Journal of Non-Linear Mechanics*，Vol.31，No.5，pp.601-607，1996.

[40] B. Vanhoff, S. Elgar and R.T. Guza，Numerically Simulating Non-Gaussian Sea Surfaces，*Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*，Vol.123，No.2，pp.68-72，1997.

[41] H.S. Bakouch，Higher-order moments, cumulants and spectral densities of the NGINAR(1) process，*Statistical Methodology*，Vol.7，No.1，pp.1-21，2010.

[42] M. Grigoriu，Crossings of non-Gaussian translation processes，*Journal of Engineering Mechanics*，Vol.110，No.4，pp.610-620，1984.

[43] M. Grigoriu, Simulation of stationary non-Gaussian translation processes, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.124, No.2, pp.121-126, 1998.

[44] R. Vio, P. Andreani and W. Wamsteker, Numerical Simulation of Non-Gaussian Random Fields with Prescribed Correlation Structure, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, Vol.113, pp.1009-1020, 2001.

[45] M. Grigoriu, Existence and construction of translation models for stationary non-Gaussian processes, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.24, No.4, pp.545-551, 2009.

[46] B. Puig and F. Poirion and C. Soize, Non-Gaussian simulation using Hermite polynomial expansion: convergences and algorithms, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.17, No.3, pp.253-264, 2002.

[47] B. Puig and J. Akian, Non-Gaussian simulation using Hermite polynomials expansion and maximum entropy principle, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.19, No.4, pp.293-305, 2004.

[48] F. Poirionb and B. Puig, Simulation of non-Gaussian multivariate stationary processes, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.45, No.5, pp.587-597, 2010.

[49] M. Gioffre, V. Gusella and M. Grigoriu, Simulation of non-Gaussian field applied to wind pressure fluctuations, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.15, No.4, pp.339-345, 2000.

[50] M. Shinozuka and C.M. Jan, Digital simulations of random processes and its applications, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.25, No.1, pp.111-128, 1972.

[51] M. Shinozuka and G. Deodatis, Simulation of stochastic processes by spectral representation, *Applied Mechanics Reviews*, Vol.44, No.4, pp.191-204, 1991.

[52] F. Yamazaki and M. Shinozuka, Digital Generation of Non-Gaussian Stochastic Fields, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.114, No.7, pp.1183-1197, 1988.

[53] R. Popescu, G. Deodatis and J.H. Prevost, Simulation of homogeneous nonGaussian stochastic vector fields, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.13, No.1, pp.1-13, 1998.

[54] G. Deodatis and R. Micaletti, Simulation of Highly Skewed Non-Gaussian Stochastic Processes, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.127, No.12, pp.1284-1295, 2001.

[55] F. Masters and K.R. Gurley, Non-Gaussian Simulation: Cumulative Distribution Function Map-Based Spectral Correction, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.129, No.12, pp.1418-1428, 2003.

[56] P. Bocchini and G. Deodatis, Critical review and latest developments of a class of simulation algorithms for strongly non-Gaussian random fields, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.23, No.4, pp.393-407, 2008.

[57] M.D. Shields, G. Deodatis and P. Bocchini, A simple and efficient methodology to approximate a general non-Gaussian stationary stochastic process by a translation process, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.26, No.4, pp.511-519, 2011.

[58] M.D. Shields and G. Deodatis, A simple and efficient methodology to approximate a general non-Gaussian stationary stochastic vector process by a translation process with applications in wind velocity simulation, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.31, pp.19-29, 2013.

[59] L. Yang and K.R. Gurley, Efficient stationary multivariate non-Gaussian simulation based on a Hermite PDF model, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.42, pp.31-41, 2015.

[60] D. Kugiumtzis and E. Bora-Senta, Simulation of multivariate non-gaussian autoregressive time series with given autocovariance and marginals, *Simulation Modelling Practice and Theory*, Vol.44, pp.42-53, 2014.

[61] F.J. Ferrante, S.R. Arwade and L.L. Graham-Brady, A translation model for non-stationary, non-Gaussian random processes, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.20, No.3, pp.215-228, 2005.

[62] M.D. Shields and G. Deodatis, Estimation of evolutionary spectra for simulation of non-stationary and non-Gaussian stochastic processes, *Computers & Structures*, Vol.126, pp.149-163, 2013.

[63] V.Y. Kontorovich and V.Z. Lyandres, Stochastic differential equations: an approach to the generation of continuous non-Gaussian processes, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol.43, No.10, pp.2372-2385, 1995.

[64] S. Primak, Generation of compound non-Gaussian random processes with a given correlation function, *Physical Review E*, Vol.61, No.1, pp.100-103, 2000.

[65] G.Q. Cai and Y.K. Lin, Generation of non-Gaussian stationary stochastic processes, *Physical Review E*, Vol.54, No.1, pp.299-303, 1996.

[66] G.Q. Cai and C. Wu, Modeling of bounded stochastic processes, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.19, No.3, pp.299-303, 1996.

[67] G.Q. Zhu and G.Q. Cai, Generation of non-Gaussian stochastic processes using nonlinear filters, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.36, pp.56-562, 2014.

[68] J. Nakayama, Generation of Stationary Random Signals with Arbitrary Probability Distribution and Exponential Correlation, *IEICE transactions on fundamentals of electronics, communications and computer sciences*, Vol.E77-A, No.5, pp.917-922, 1994.

[69] S. Kay, Representation and Generation of Non-Gaussian Wide-Sense Stationary Random Processes With Arbitrary PSDs and a Class of PDFs, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol.58, No.7, pp.3448-3458, 2010.

[70] K.K. Phoon, S.P. Huang and S.T. Quek, Simulation of second-order processes using Karhunen-Loeve expansion, *Computers & Structures*, Vol.80, No.12, pp.1049-1060, 2002.

[71] L.B. Li, K.K. Phoon and S.T. Quek, Comparison between Karhunen-Loeve expansion and translation-based simulation of non-Gaussian processes, *Computers & Structures*, Vol.85, No.5-6, pp.264-276, 2007.

[72] F. Poirion andI. Zentner, Stochastic model construction of observed random phenomena, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.36, pp.63-71, 2014.

[73] S. Sakamoto and R. Ghanem, Simulation of multi-dimensional non-gaussian non-stationary random fields, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.17, No.2, pp.167-176, 2002.

[74] S. Sakamoto and R. Ghanem, Polynomial Chaos Decomposition for the Simulation of Non-Gaussian Nonstationary Stochastic Processes, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.128, No.2, pp.190-201, 2002.

[75] C. Soize, Identification of high-dimension polynomial chaos expansions with random coefficients for non-Gaussian tensor-valued random fields using partial and limited experimental data, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.199, No.33-36, pp.2150-2164, 2010.

[76] C. Soize, A computational inverse method for identification of non-Gaussian random fields using the Bayesian approach in very high dimension, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.200, No.45-46, pp.3083-3099, 2011.

[77] S.R. Winterstein, Nonlinear vibration models for extremes and fatigue, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.114, No.10, pp.1772-1790, 1988.

[78] K. Gurley and A. Kareem, Analysis interpretation modeling and simulation of unsteady wind and pressure data, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol.69-71, pp.657-669, 1997.

[79] K. Gurley and A. Kareem, Simulation of Correlated Non-Gaussian Pressure Fields, *Meccanica*, Vol.33, No.3, pp.309-317, 1998.

[80] K.R. Gurley, M.A. Tognarelli and A. Kareem, Analysis and simulation tools for wind engineering, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.12, No.1, pp.9-31, 1997.

[81] S.R. Winterstein, T.C. Ude and G. Kleiven, Springing and Slow-Drift Responses: Predicted Extremes and Fatigue vs. Simulation, *In: Proceedings of BOSS-94*, Vol.3, Cambridge, pp.1-15, 1994.

[82] R.N. Iyengar and O.R. Jaiswal, A new model for non-Gaussian random excitations, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.8, No.3-4, pp.281-287, 1993.

[83] D.O. Smallwood, Generating Non-Gaussian Vibration for Testing Purposes, *Sound and Vibration*, October 2005, pp.18-24, 2005.

[84] J. Li and C. Li, Simulation of Non-Gaussian Stochastic Process with Target Power Spectral Density and Lower-Order Moments, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.138, No.5, pp.391-404, 2012.

[85] F. Poirion, Numerical simulation of homogeneous non-Gaussian random vector fields, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.160, No.1, pp.25-42, 1993.

[86] A. Steinwolf, Approximation and simulation of probability distributions with a variable kurtosis value, *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol.21, No.2, pp.163-180, 1996.

[87] S.H. Seong and J.A. Peterka, Computer simulation of non-Gaussian multiple wind pressure time series, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol.72, pp.95-105, 1997.

[88] K.S. Kumar and T. Stathopoulos, Computer simulation of fluctuating wind pressures on low building roofs, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol.69-71, pp.485-495, 1997.

[89] K.S. Kumar and T. Stathopoulos, Synthesis of non-Gaussian wind pressure time series on low building roofs, *Engineering Structures*, Vol.21, No.12, pp.1086-1100, 1999.

[90] J-J. Wu, Simulation of non-Gaussian surfaces with FFT, *Tribology International*, Vol.37, No.4, pp.339-346, 2004.

[91] D.O. Smallwood, Generation of Stationary Non-Gaussian Time Histories with a Specified Cross-spectral Density, *Shock and Vibration*, Vol.4, No.5-6, pp.361-377, 1997.

[92] M.F. Dimentberg, Statistical dynamics of nonlinear and time-varying systems, New York, Wiley, 1988.

[93] M. Grigoriu, Response of Linear Systems to Quadratic Gaussian Excitations, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.112, No.6, pp.523-535, 1986.

[94] A. Buss and M. Grigoriu, Reliability of linear oscillators subject to wind loads, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol.36, No.1, pp.571-577, 1990.

[95] S. Benfratello, G. Falsone and G. Muscolino, Influence of the quadratic term in the alongwind stochastic response of SDOF structures, *Engineering Structures*, Vol.18, No.9, pp.685-695, 1996.

[96] I. Gullo, G. Muscolino and M. Vasta, Non-Gaussian probability density function of SDOF linear structures under wind actions, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol.74-76, pp.1123-1134, 1998.

[97] J.J. Jensen, Dynamic amplification of offshore steel platform responses due to non-Gaussian wave loads, *Marine Structures*, Vol.7, No.1, pp.91-105, 1994.

[98] V. Bouyssy and R. Rackwitz , Polynomial Approximation of Morison Wave Loading, *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Vol.119, No.1, pp.30-36, 1997.

[99] M. Grigoriu, Extremes of Wave Forces, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.110, No.12, pp.1731-1742, 1984.

[100] S.-L.J. Hu and L.D. Lutes, Non - Normal Descriptions of Morison - Type Wave Forces, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.113, No.2, pp.196-209, 1987.

[101] S.-L.J. Hu and M. Muin, Dynamic Response Statistics of Linear System Under Morison-Type Wawe Force, *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Vol.112, No.1, pp.42-52, 1989.

[102] J.J.M. Baar, Extreme values of Morison-type processes, *Applied Ocean Research*, Vol.14, No.1, pp.65-68, 1992.

[103] P.K. Koliopulos, Quasi-static and dynamic response statistics of linear SDOF systems under Morison-type wave forces, *Engineering Structures*, Vol.10, No.1, pp.24-36, 1988.

[104] J.B. Roberts, Distribution of the response of linear systems to poisson distributed random pulses, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.28, No.1, pp.93-103, 1973.

[105] J.B. Roberts, System response to random impulses, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.24, No.1, pp.23-34, 1972.

[106] S. Hu, Response Cumulant Equations for Dynamic Systems under Delta-Correlated Processes, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.123, No.2, pp.174-177, 1997.

[107] L.D. Lutes and S. Hu, Non-Normal Stochastic Response of Linear Systems, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.112, No.2, pp.127-141, 1986.

[108] G. Muscolino, Linear systems excited by polynomial forms of non-Gaussian filtered processes, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.10, No.1, pp.35-44, 1995.

[109] M. Grigoriu and F. Waisman, Linear systems with polynomials of filtered Poisson processes, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.12, No.2, pp.97-103, 1997.

[110] M. Di Paola, Linear Systems Excited by Polynomials of Filtered Poisson Pulses, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.64, No.3, pp.712-717, 1997.

[111] A. Pirrotta, Non-linear systems under delta correlated processes handled by perturbation theory, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.13, No.4, pp.283-290, 1998.

[112] F. Waisman and M. Grigoriu, Nonlinear systems driven by polynomials of filtered Poisson processes, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.14, No.1-2, pp.195-203, 1999.

[113] G. Muscolino and G. Ricciardi, Probability density function of MDOF structural systems under non-normal delta-correlated inputs, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.168, No.1-4, pp.121-133, 1999.

[114] M. Di Paola and G. Falsone, Stochastic dynamics of MDOF structural systems under non-normal filtered inputs, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.9, No.4, pp.265-272, 1994.

[115] G. Ricciardi, Random Vibration of Beam under Moving Loads, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.120, No.11, pp.2361-2380, 1994.

[116] H.S. Zibdeh and R. Rackwitz, RESPONSE MOMENTS OF AN ELASTIC BEAM SUBJECTED TO POISSONIAN MOVING LOADS, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.188, No.4, pp.479-495, 1995.

[117] A. Tylikowski and W. Marowski, Vibration of a non-linear single degree of freedom system due to Poissonian impulse excitation, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.21, No.3, pp.229-238, 1986.

[118] R. Iwankiewicz and S.R.K. Nielsen, Dynamic response of hysteretic systems to Poisson-distributed pulse trains, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.7, No.3, pp.135-148, 1992.

[119] M. Grigoriu, Equivalent linearization for Poisson white noise input, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.10, No.1, pp.45-51, 1995.

[120] Y. Wu and W. Q. Zhu , Stationary Response of MDOF Dissipated Hamiltonian Systems to Poisson White Noises, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.75, No.4, pp.044502-1–044502-5, 2008.

[121] Y. Zeng and W.Q. Zhu, Stochastic averaging of quasi-linear systems driven by Poisson white noise, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.25, No.1, pp.99-107, 2010.

[122] Y. Zeng and W.Q. Zhu, Stochastic Averaging of Quasi-Nonintegrable-Hamiltonian Systems Under Poisson White Noise Excitation, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.78, No.2, pp.021002-1–021002-11, 2011.

[123] Y. Zeng and G. Li, Stationary response of bilinear hysteretic system driven by Poisson white noise, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.33, pp.135-143, 2013.

[124] R. Iwankiewicz, S.R.K. Nielsen and P. Thoft-Christensen, Dynamic response of non-linear systems to poisson-distributed pulse trains: Markov approach, *Structural Safety*, Vol.8, No.1-4, pp.223-238, 1990.

[125] R. Iwankiewicz and S.R.K. Nielsen, Dynamic response of non-linear systems to poisson-distributed random impulses, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.156, No.3, pp.407-423, 1992.

[126] S. Hu, Responses of Dynamic Systems Excited by Non - Gaussian Pulse Processes, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.119, No.9, pp.1818-1827, 1993.

[127] 木村康治，高原弘樹，萩谷忍，坂田勝，不規則インパルス列を受ける非線形系の応答分布，日本機械学会論文集（C 編），Vol.61，No.583，pp.836-841，1995.

[128] M. Di Paola and G. Falsone, Itô and Stratonovich integrals for delta-correlated processes, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.8, No.3-4, pp.197-208, 1993.

[129] M. Di Paola and G. Falsone, Stochastic Dynamics of Nonlinear Systems Driven by Non-normal Delta-Correlated Processes, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.60, No.1, pp.141-148, 1993.

[130] M. Di Paola and M. Vasta, Stochastic integro-differential and differential equations of non-linear systems excited by parametric Poisson pulses, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.32, No.5, pp.855-862, 1999.

[131] M. Di Paola and G. Falsone, Higher order statistics of the response of linear systems excited by polynomials of filtered Poisson pulses, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.14, No.1-2, pp.55-62, 1997.

[132] M. Vasta, Exact stationary solution for a class of non-linear systems driven by a non-normal delta-correlated process, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.30, No.4, pp.407-418, 1995.

[133] C. Proppe, Exact stationary probability density functions for non-linear systems under Poisson white noise excitation, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.38, No.4, pp.557-564, 2003.

[134] G.Q. Cai and Y.K. Lin, Response distribution of non-linear systems excited by non-Gaussian impulsive noise, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.27, No.6, pp.955-967, 1992.

[135] H.U. Koyluoglu, S.R.K. Nielsen and R. Iwankiewicz, Response and Reliability of Poisson-Driven Systems by Path Integration, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.121, No.1, pp.117-130, 1995.

[136] H.U. Koyluoglu, S.R.K. Nielsen and A.S. Cakmak, Fast cell-to-cell mapping (path integration) for nonlinear white noise and Poisson driven systems, *Structural Safety*, Vol.17, No.3, pp.151-165, 1995.

[137] M. Di Paola and R. Santoro, Path integral solution for non-linear system enforced by Poisson White Noise, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.23, No.2-3, pp.164-169, 2008.

[138] G.K. Er, H.T. Zhu, V.P. Iu and K.P. Kou, Probabilistic Solution of Nonlinear Oscillators Under External and Parametric Poisson Impulses, *AIAA Journal*, Vol.46, No.11, pp.2839-2847, 2008.

[139] G.K. Er, H.T. Zhu, V.P. Iu and K.P. Kou, PDF solution of nonlinear oscillators subject to multiplicative Poisson pulse excitation on displacement, *Nonlinear Dynamics*, Vol.55, No.4, pp.337-348, 2009.

[140] H.T. Zhu, Nonzero mean response of nonlinear oscillators excited by additive Poisson impulses, *Nonlinear Dynamics*, Vol.69, No.4, pp.2181-2191, 2012.

[141] H.T. Zhu, G.K. Er, V.P. Iu and K.P. Kou, Responses of Nonlinear Oscillators Excited by Nonzero-Mean Parametric Poisson Impulses on Displacement, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.138, No.5, pp.450-457, 2012.

[142] A. Di Matteo, M. Di Paola and A. Pirrotta, Probabilistic characterization of nonlinear systems under Poisson white noise via complex fractional moments, *Nonlinear Dynamics*, Vol.77, No.3, pp.729-738, 2014.

[143] A. Di Matteo, M. Di Paola and A. Pirrotta, Poisson white noise parametric input and response by using complex fractional moments, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.38, pp.119-126, 2014.

[144] M. Grigoriu, Reliability of linear systems under Poisson white noise, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.24, pp.397-406, 2009.

[145] Y. Zeng and G. Li, Stationary response and first-passage failure of hysteretic systems under random excitations of Poisson white noise and its filtered processes, *Procedia Engineering*, Vol.31, pp.1200-1205, 2012.

[146] J.B. Roberts and M. Vasta, Parametric identification of systems with non-Gaussian excitation using measured response spectra, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.15, No.1, pp.59-71, 2000.

[147] S.F. Wojtkiewicz, E.A. Johnson, L.A. Bergman, Mircea Grigoriu and B.F. Spencer Jr., Response of stochastic dynamical systems driven by additive Gaussian and Poisson white noise: Solution of a forward generalized Kolmogorov equation by a spectral finite difference method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.168, No.1-4, pp.73-89, 1999.

[148] W. Jia, W. Zhu and Y. Xu, Stochastic averaging of quasi-non-integrable Hamiltonian systems under combined Gaussian and Poisson white noise excitations, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.51, pp.45-53, 2013.

[149] W. Jia, W. Zhu, Y. Xu and W. Liu, Stochastic Averaging of Quasi-Integrable and Resonant Hamiltonian Systems Under Combined Gaussian and Poisson White Noise Excitations, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.81, No.4, pp.041009-1–041009-13, 2014.

[150] W. Jia and W. Zhu, Stochastic averaging of quasi-partially integrable Hamiltonian systems under combined Gaussian and Poisson white noise excitations, *Physica A*, Vol.398, pp.125-144, 2014.

[151] W. Liu, W. Zhu, W. Jia and X. Gu, Stochastic stability of quasi-partially integrable and non-resonant Hamiltonian systems under parametric excitations of combined Gaussian and Poisson white noises, *Nonlinear Dynamics*, Vol.77, No.4, pp.1721-1735, 2014.

[152] H.T. Zhu, G.K. Er, V.P. Iu and K.P. Kou, Probabilistic solution of nonlinear oscillators excited by combined Gaussian and Poisson white noises, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.330, No.12, pp.2900-2909, 2011.

[153] 木村康治，須田紘司，白色励振と不規則パルス励振を同時に受ける非線形系の応答解析，日本機械学会論文集（C 編），Vol.77, No.779, pp.2642-2649, 2011.

[154] P. Sniady, Dynamic response of linear structures to a stream of random impulses in a " space-time " system, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.95, No.1, pp.41-47, 1984.

[155] P. Sniady, Vibration of a beam due to a random stream of moving forces with random velocity, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.97, No.1, pp.23-33, 1984.

[156] R. Iwankiewicz and S.R.K. Nielsen, DYNAMIC RESPONSE OF NONLINEAR SYSTEMS TO RENEWAL IMPULSES BY PATH INTEGRATION, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.195, No.2, pp.175-193, 1996.

[157] M. Tellier and R. Iwankiewicz, Response of linear dynamic systems to non-Erlang renewal impulses: Stochastic equations approach, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.20, No.4, pp.281-295, 2005.

[158] R. Iwankiewicz, Response of dynamic systems to renewal impulse processes: Generating equation for moments based on the integro-differential Chapman-Kolmogorov equations, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.35, pp.52-66, 2014.

[159] G.Q. Cai and Y. Suzuki, Response of Systems Under Non-Gaussian Random Excitations, *Nonlinear Dynamics*, Vol.45, No.1, pp.95-108, 2005.

[160] G.Q. Cai and Y.K. Lin, An improved equivalent linearization procedure for non-linear systems under bounded random excitations, *Structural Control and Health Monitoring*, Vol.13, No.1, pp.336-346, 2005.

[161] C. Wu and G.Q. Cai, Effects of excitation probability distribution on system responses, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.39, No.9, pp.1463-1472, 2004.

[162] M. Gioffre and V. Gusella, Numerical Analysis of Structural Systems Subjected to Non-Gaussian Random Fields, *Meccanica*, Vol.37, No.1, pp.115-128, 2002.

[163] M. Grigoriu, Non-Gaussian models for stochastic mechanics, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.15, No.1, pp.15-23, 2000.

[164] M. Huang, W. Lou, C. Chan, N. Lin and X. Pan, Peak Distributions and Peak Factors of Wind-Induced Pressure Processes on Tall Buildings, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.139, No.12, pp.1744-1756, 2013.

[165] M. Huang, W. Lou, C. Chan and S. Bao, Peak factors of non-Gaussian wind forces on a complex-shaped tall building, *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, Vol.22, No.14, pp.1105-1118, 2013.

[166] A. Steinwolf, Shaker Random Testing with Low Kurtosis: Review of the Methods and Application for Sigma Limiting, *Shock and Vibration*, Vol.17, No.3, pp.219-231, 2010.

[167] K. Gong , X. Chen, Influence of non-Gaussian wind characteristics on wind turbine extreme response, *Engineering Structures*, Vol.59, pp.727-744, 2014.

[168] A. Steinwolf and R.A. Ibrahim, Numerical and experimental studies of linear systems subjected to non-Gaussian random excitations, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.14, No.4, pp.289-299, 1999.

[169] Z. Kotulski and K. Sobczyk, Linear systems and normality *Journal of Statistical Physics*, Vol.24, No.2, pp.359-373, 1981.

[170] S.R. Winterstein and T. Kashef, Moment-Based Load and Response Models With Wind Engineering Applications, *Journal of Solar Energy Engineering*, Vol.122, No.3, pp.122-128, 2000.

[171] J. Hea and Y.G. Zhao, First passage times of stationary non-Gaussian structural responses, *Computers & Structures*, Vol.85, No.7-8, pp.431-436, 2007.

[172] V. Gusella and A.L. Materazzi, Non-Gaussian Response of MDOF Wind-Exposed Structures: Analysis by Bicorrelation Function and Bispectrum, *Meccanica*, Vol.33, No.3, pp.299-307, 1998.

[173] V. Gusella and A.L. Materazzi, Non-Gaussian along-wind response analysis in time and frequency domains, *Engineering Structures*, Vol.22, No.1, pp.49-57, 2000.

[174] M. Grigoriu and S.T. Ariaratnam, Response of Linear Systems to Polynomials of Gaussian Processes, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.55, No.4, pp.905-910, 1988.

[175] M.D. Pandey and S.T. Ariaratnam, Crossing Rate Analysis of NonGaussian Response of Linear Systems, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.122, No.6, pp.507-511, 1996.

[176] M. Grigoriu and R.V. Field Jr., A method for analysis of linear dynamic systems driven by stationary non-Gaussian noise with applications to turbulence-induced random vibration, *Applied Mathematical Modelling*, Vol.38, No.1, pp.336-354, 2009.

[177] M. Di Paola and C. Floris, Iterative closure method for non-linear systems driven by polynomials of Gaussian filtered processes, *Computers & Structures*, Vol.86, No.1-2, pp.1285-1296, 2008.

[178] C. Sobiechowski and L. Socha, Statistical Linearization of the Duffing Oscillator under Non-Gaussian External Excitation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.231, No.1, pp.19-35, 2000.

[179] J.M. Nichols, J.V. Michalowicz and F. Bucholtz, The Bispectrum and Bicoherence for Quadratically Nonlinear Systems Subject to Non-Gaussian Inputs, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol.57, No.10, pp.3879-3890, 2009.

[180] Z. Hou, Y. Zhou, M.F. Dimentberg and M. Noori, A non-stationary stochastic model for periodic excitation with random phase modulation, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.10, No.2, pp.73-81, 1995.

[181] Z. Hou, Y. Zhou, M.F. Dimentberg and M. Noori, A stationary model for periodic excitation with uncorrelated random disturbances, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.11, No.4, pp.191-203, 1996.

[182] M.F. Dimentberg, Z. Hou, M. Noori and W. Zhang, RESPONSE OF AN SDOF SYSTEM TO PERIODIC EXTERNAL AND PARAMETRIC EXCITATIONS WITH RANDOM PHASE MODULATIONS *Journal of Sound and Vibration*, Vol.192, No.3, pp.621-627, 1996.

[183] Z. Hou, Y. Zhou, M.F. Dimentberg and M. Noori, Random Response to Periodic Excitation with Correlated Disturbances, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.122, No.11, pp.1101-1108, 1996.

[184] Z. Hou, Y. Wang, M.F. Dimentberg and M. Noori, Random response of Duffing oscillator to periodic excitation with random disturbance, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.14, No.1-2, pp.83-95, 1999.

[185] X.M. Li, S.T. Quek and C.G. Koh, Stochastic Response of Offshore Platforms by Statistical Cubicization, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.121, No.10, pp.1056-1068, 1995.

[186] S. Benfratello and G. Falsone, Non-Gaussian Approach for Stochastic Analysis of Offshore Structures, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.121, No.11, pp.1173-1180, 1995.

[187] C. Floris and R. Pulega, Stochastic Response of Offshore Structures via Statistical Cubicization, *Meccanica*, Vol.37, No.1, pp.15-31, 2002.

[188] K. Sharifi and A. Leon-Garcia, Estimation of shape parameter for generalized Gaussian distributions in subband decompositions of video, *IEEE Transac-*

tions on Circuits and Systems for Video Technology, Vol.5, No.1, pp.52-56, 1995.

[189] A.K. Nandi and D. Mämpel, An extension of the generalized Gaussian distribution to include asymmetry, *Journal of the Franklin Institute*, Vol.332, No.1, pp.67-75, 1995.

[190] K. Sobczyk and J. Trebicki, Approximate probability distributions for stochastic systems: maximum entropy method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.168, No.1, pp.91-111, 1999.

[191] G. Ricciardi and I. Elishakoff, A novel local stochastic linearization method via two extremum entropy principles, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.37, No.4, pp.785-800, 2002.

[192] K. Sobczyk and P. Holobut, Information-theoretic approach to dynamics of stochastic systems, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.27, No.1, pp.47-56, 2012.

[193] K. Sobczyk and J. Trebicki, Maximum entropy principle in stochastic dynamics, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.5, No.3, pp.102-110, 1990.

[194] K. Sobczyk and J. Trebicki, Maximum entropy principle and nonlinear stochastic oscillators, *Physica A*, Vol.193, No.3-4, pp.448-468, 1993.

[195] J. Trebicki and K. Sobczyk, Maximum entropy principle and non-stationary distributions of stochastic systems, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.11, No.3, pp.169-178, 1996.

[196] P.E. Kloeden and E. Platen, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer, Berlin, 1992.

[197] T.K. Caughey, Derivation and Application the Fokker-Planck Equation to Discrete Nonlinear Dynamics Systems Subjected to White Random Excitation, *The Journal of Acoustical Society of America*, Vol.35, No.11, pp. 1687-1692, 1963.

[198] C. Gardiner, Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences 4th ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.

[199] S.H. Crandall, On using non-Gaussian distributions to perform statistical linearization, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.39, No.9, pp.1395-1406, 2004.

[200] S.M. Rytov, Yu.A. Kravtsov and V.I. Tatarskii, Principles of Statistical Radiophysics, Vol.2, Correlation Theory of Random Processes, Springer-Verlag New York, 1988.

[201] M.D. Yacoub, J.E.V. Bautista and L. Guerra de Rezende Guedes, On higher order statistics of the Nakagami-m distribution, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Vol.48, No.3, pp.790-794, 1999.