

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	トラス梁から成る空間構造の崩壊挙動再現のためのトラス梁要素に関する研究
Title(English)	Study on a truss beam element to simulate collapse behavior of spatial structures composed of truss beams
著者(和文)	沖佑典
Author(English)	Yusuke Oki
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第10523号, 授与年月日:2017年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:元結 正次郎,翠川 三郎,笠井 和彦,盛川 仁,佐藤 大樹
Citation(English)	Degree:Doctor (Engineering), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第10523号, Conferred date:2017/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

トラス梁から成る空間構造の崩壊挙動再現のための
トラス梁要素に関する研究

2017年3月

沖 佑典

謝辞

本論文は、筆者が東京工業大学 総合理工学研究科 人間環境システム専攻において、東京工業大学教授 元結正次郎博士の下で、トラス梁要素について研究をおこない、その成果を纏めたものです。この論文を纏めるにあたり、筆者は幾人もの素晴らしい先生方によってここまで導かれて来たことを強く感じています。

指導教官である東京工業大学教授 元結正次郎博士には、東京工業大学大学院に入学以来5年に亘って、時に叱咤され、時に激励をいただきながら、終始懇切丁寧かつ熱心なご指導を賜りました。先生は研究に対する誠実かつ情熱的な姿勢を、研究者の有るべき姿として常に筆者に示し続けてくださいました。また、公私共に今後の人生を歩む上で大切なことを多くご教示いただきました。ここに、心より感謝申し上げます。

東京工業大学教授 笠井和彦博士には、本論文の全体を通して懇切丁寧なご指導と多くのご助言を賜りました。ここに、厚く御礼申し上げます。

東京工業大学教授 翠川三郎博士には、トラス梁要素の実用性に関するご助言など、本論文を纏めるにあたっての貴重なご意見を賜りました。心より感謝いたします。

東京工業大学教授 盛川仁博士には、研究内容に対する貴重なご助言をいただいただけでなく、折に触れて熱く激励を賜りました。心より御礼申し上げます。

東京工業大学准教授 佐藤大樹博士には、常に温かい励ましと、論文全体に亘って大変貴重なご助言を賜りました。ここに、心より感謝いたします。

筆者が学部4年時に指導教官としてお世話になりました、東京工業大学准教授 堀田久人博士には、1年間という短期間でしたが、研究生生活の礎となる丁寧なご指導を賜りました。堀田研究室での所属期間以降も、折に触れて現状を気にかけてくださいました。深く感謝いたします。

本論文を執筆するにあたり、多くのご指導と励ましの言葉をいただきました東京工業大学 助教 金子健作博士に心から感謝申し上げます。鹿島建設技術研究所研究員 緒方誠二郎博士には、本研究をはじめた当初から多くのご指導とご助言をいただきました。深く感謝申し上げます。

竹中工務店技術研究所研究員 佐藤恭章博士には、公私共にお世話になり、研究に対しても熱く議論を共有できただけでなく、常に激励を頂戴しました。福井大学特命助教 寺西正輝博士には、応用力学分野の研究の先輩として多くのご助言をいただいただき、研究に取り組む姿勢など多くのことを学ばせていただきました。両氏は、元結研究室への所属当初から先輩として常に目標であり続けた方々です。ここに、厚く御礼申し上げます。

また、修士課程での生活を共にし、各自の研究について議論を共有することができただけでなく、折に触れ筆者を気にかけてくださった元結研究室の修了生の方々、各々の多忙な活動の中でも雑務を引き受けてくれるなど、本論文を纏めるにあたって筆者を支えてくれた研究室の皆様には心から感謝いたします。

最後に、筆者の研究生生活を絶えず気にかけて、陰ながら支えてくれた両親、家族に、深く感謝申し上げます。

内容梗概

トラス梁から成る空間構造は、多数のトラス梁部材を組み合わせて無柱空間を形成する方法として広く普及している。構造設計者はこのような構造物の崩壊挙動を考える時、空間構造特有の全体座屈はもとより、トラス梁の構成部材である弦材の座屈等に起因する応力再配分が空間構造全体の崩壊挙動に与える影響を正しく捉えなければならない。近年では離散化手法等の数値計算手法が普及の途上にあるが、検討の際の作業の煩雑さの面で、設計業務の中で常に使用する方法としては不向きである。そこで、トラス梁の弾性設計の際に用いられる線材置換手法に基づき、トラス梁部材を単一の梁要素に置換し、構造設計者が必要とする部材の材端力のみを抽出して取得することを可能としつつ、座屈現象を適切に考慮することができる新たな手法が望まれる。以上の背景より、トラス梁に生じる主要な座屈現象である弦材の構面外座屈後挙動を再現可能な「トラス梁要素」が提案されてきた。しかしながら、この手法は弦材の接合条件が限定的であり、それ故実在する空間構造に含まれる境界条件を設定可能なものではなかった。境界条件の差異はトラス梁の座屈荷重および座屈後挙動に影響を与えるため、トラス梁要素によって空間構造全体の崩壊挙動を追跡するには再度考察が必要である。そこで本研究では、空間構造における崩壊挙動を再現することを目的とし、弦材同士が剛な接合条件において単一の梁要素でトラス梁に生ずる構面外座屈後挙動を考慮した上で追跡可能な「トラス梁要素」を提案する。本論文は以下の6章により構成される。

第1章「序論」では、本研究の背景として、設計に資する構造解析は単純な線形解析が主流であること、この理由として、空間構造を構成するトラス梁弦材の座屈現象を簡便かつ高精度に再現するための解析法が存在しないことを指摘し、線材置換手法に基づくトラス梁の解析法における重要性を述べている。また、既往の研究を概説するとともに、既往の「トラス梁要素」を空間構造の数値解析に適用するときに生じる問題点に言及し、本論文の目的を述べている。

第2章「弦材の弾性座屈後挙動解析法」では、材端に回転拘束を受けたトラス梁の弦材を抽出し、斜材から中間軸方向力が入力される弦材の構面外弾性座屈後挙動を単一要素により解析する手法を提案している。まず、弦材の材端力を追跡するための基本式である軸力、中間軸方向力、材端モーメン

トに対する弾性構成則および内部のモーメント釣合い式を、熱力学の基本原理に基づく誘導過程に準じて導出する。次に座屈の進展に伴う材端力の計算手順を示す。さらに数値計算例を通して、本章の解析法と離散化手法の数値解の比較により、座屈の進展に対する本章の解析法の妥当性を示している。

第3章「弦材の弾塑性座屈後挙動解析法」では、弦材の塑性化に伴って座屈が進行する場合について、第2章で提案した弦材の解析法を拡張し、塑性ヒンジ法に基づいて定式化をおこなう。第2章と同様に抽出した弦材において、塑性ヒンジが最大3箇所が生じると仮定し、新たに定義した塑性変位成分によるエネルギーの散逸を熱力学の第2法則に基づき誘導する。次に、トラス梁の構成部材として一般的に用いられる断面を想定し、塑性化に伴う変位の進展を考慮するための塑性流れ則を導出する。さらに、数値計算に用いる際の接線剛性の算出方法および数値計算手順を示す。本章で提案した基本式、塑性流れ則および数値計算手順の妥当性を、様々な細長比や境界条件を想定した例題に対する本章の解析法および離散化手法による数値解との比較を通して示している。

第4章「剛な接合条件における構面外座屈後挙動を考慮したトラス梁要素の提案」では、第2章および第3章で導出してきた弦材の座屈後挙動に関する解析法をトラス梁要素の評価手法に適用する。既往のトラス梁要素は、弦材の接合条件がピンである場合のみを想定していた。しかしながら、弦材の材端条件が拡張されたことにより、トラス梁に対する自由度も拡張する必要がある。そこで、まずはトラス梁要素を構面外回転および振り率を考慮した自由度数とし、弦材とトラス梁要素の変数間の関係則を得る。次に、追加した自由度を含む全自由度に対して熱力学第2法則および最大塑性散逸の原理に基づく弾性構成則、エネルギー散逸および塑性流れ則を導出している。さらに、トラス梁要素によって座屈や塑性の進展を追跡するための数値計算手順を示している。以上の解析法の妥当性を、円形鋼管の弦材によって構成されるトラス梁一部材を対象に、提案手法と離散化手法の数値計算結果を比較することで明らかにしている。

第5章「トラス梁要素の空間構造への適用例」では、空間構造を想定した解析対象に対する崩壊挙動の再現を目的として、離散化手法により部材を細かく要素分割した解析モデルと第4章に基づくト

ラス梁要素を用いた解析モデルの荷重変位関係を比較し、トラス梁要素を空間構造の崩壊挙動の解析に適用した時の妥当性を示すとともに、トラス梁要素を使用する際の留意点について言及している。

第6章「結論」では、トラス梁からなる空間構造の崩壊挙動を再現することを目的として提案したトラス梁要素による数値解析法の妥当性について、構築の際に提案した弦材の数値解析法の妥当性とともに総括して述べている。

目次

第1章 序論	1
1. 1 はじめに	2
1. 2 本研究に関連した既往の研究	7
1. 3 本研究の目的	9
第2章 弦材の弾性座屈後挙動解析法	10
2. 1 はじめに	11
2. 2 基本式の定式化	12
2. 2. 1 対象とする弦材	12
2. 2. 2 左側モデルの基本式	13
2. 2. 3 右側モデルの基本式	15
2. 2. 4 弦材モデルの基本式	16
2. 3 数値解析	17
2. 3. 1 座屈時の接線剛性	17
2. 3. 2 数値解析例による妥当性検証	19
2. 4 まとめ	21
Chapter 2 Figures	22
第3章 弦材の弾塑性座屈後挙動解析法	30
3. 1 はじめに	31
3. 2 弦材の基本式の弾塑性座屈への拡張	32
3. 2. 1 対象とする弦材	32
3. 2. 2 左側モデルの基本式	33
3. 2. 3 右側モデルの基本式	35
3. 2. 4 弦材モデルの基本式	37
3. 2. 5 塑性流れ則	38
3. 3 数値解析	39
3. 3. 1 弾塑性接線剛性	39
3. 3. 2 数値解析手順	41
3. 3. 3 数値解析例による妥当性検証 -1 単一部材による検証	43
3. 3. 4 数値解析例による妥当性検証 -2 複数部材による検証	45
3. 4 まとめ	47
Chapter 3 Figures	48

第4章 剛な接合条件における構面外座屈後挙動を考慮したトラス梁要素の提案

.....	60
4. 1 はじめに.....	61
4. 2 弦材とトラス梁要素の関係則.....	62
4. 3 トラス梁要素に関する数値解析法.....	67
4. 3. 1 トラス梁要素の基本式.....	67
4. 3. 2 塑性流れ則.....	69
4. 3. 3 弾塑性接線剛性.....	71
4. 3. 4 数値計算手順.....	74
4. 4 数値解析例による妥当性検証.....	76
4. 4. 1 解析対象及び解析モデル.....	76
4. 4. 2 解析結果及び考察.....	77
4. 5 まとめ.....	82
Chapter 4 Tables and Figures.....	84

第5章 トラス梁要素の空間構造への適用例

5. 1 はじめに.....	130
5. 2 解析仮定.....	131
5. 2. 1 解析対象.....	131
5. 2. 2 細分化モデルのモデル化過程と座屈固有値解析.....	132
5. 2. 3 提案手法による解析モデル.....	134
5. 3 数値解析結果および考察.....	135
5. 4 トラス梁要素の空間構造への適用に関する留意点.....	138
5. 5 まとめ.....	139
Chapter 5 Tables and Figures.....	140

第6章 結論

本研究に関連して著者が発表した論文.....	166
参考文献.....	168
Appendix.....	173

第 1 章 序論

- 1. 1 本研究の背景
- 1. 2 本研究に関する既往の研究
- 1. 3 本研究の目的

1. 1 本研究の背景

空間構造(Spatial structure)は、「その内部に無柱の大空間を内包するような建築構造」(文献1より抜粋)の総称であり、事務所ビルなどの「重層構造物」と対比される構造形式である。特に鉄骨部材によって空間構造を構築する場合、多数の構成部材によって1つの単位を形成し、さらにその繰り返しによって多様な無柱空間を形成するため、鉄板やコンクリートシェル等とくらべてスパンの割に自重が小さいことが特徴である。鉄骨部材による空間構造の中でも、平行弦トラス梁から成る空間構造は、一部材を上・下弦材、斜材および束材といった構成部材によって「梁」を形成する。これにより、建設資材の運搬が容易になるのみならず、非充腹材として梁せいを高くすることで建物の総重量に対する面外剛性を高くすることができることから、経済的な架構形式といえる。また、100mを超える無柱空間の需要がある野球ドームや空港、企業の生産施設から、地域の小中学校体育館に至るまで、幅広い規模の空間構造で採用されている、典型的な架構形式とされる。

小中学校は台風や地震などの大規模な災害時においては地域の指定避難場所とされていることが多く、一度に大人数を収容できる体育館に一時収容される場合が現実的にも多い^{2),3)}。したがって、被災時においても雨風を凌ぐために、外力に対する人命保護の観点からはもちろん、震災時にも大人数が使用する機能維持の能力を有することが求められる。また、倉庫や工場などの生産施設や駅周辺、空港などは、震災後も以前と同等の役割を維持するか、いち早く復旧することが求められる。近年では想定を超える地震や台風により甚大な被害を受けた空間構造も多数存在し^{4),5)}、社会的にも想定外の事象にいかに対応するかを議論する場が増えている。

地震動などの外力に対する伝達機構の特性として、空間構造は「形態抵抗構造」と呼ばれ¹⁾、主に軸力に代表される面内断面力によって地盤に伝達する構造である。この外力伝達機構により、構造設計や解析の際の条件設定において重層構造物ではおこなわれない考察を含めた検討を必要とする。空間構造においては変形前後の状態によって座屈荷重に大きな差異が生じ、架構の幾何学的非線形挙動である「全体座屈」が生じる。また、ライズを有する空間構造は水平外力でも躯体が上下動することが知られている¹²⁾。したがって、解析においては材料的非線形性に加えて幾何学的非線形性をも考慮することが必要となるほか、屋根面における剛床仮定は通常採用できない。また、崩壊過程において、空間構造における構成部材の座屈や塑性化が先行する場合が多い。これらを考慮すると、空間構造の中の一個材の不安定現象が発生したときに、自己釣合を保持するために応力再配分が生じ、線形弾性

系の固有値解析等による推測結果とは異なる系に次々と移行する。その崩壊挙動は複雑であり、構造設計者に要求される多様な業務の中で精確に追跡することは困難であると言える。

このような設計時の困難さから、空間構造の構造設計は弾性設計を基本的な方針としており、二次設計における保有水平耐力計算における D_s 値は 0.5 程度とされることが多い。この値は、空間構造そのものには損傷を考慮しない、すなわち構造物の靱性をほとんど考慮しない値とされ、線形状態を保持するために、設計外力に対して大きな安全率が採られているといえる。また、空間構造の全体座屈を防ぐ方針に基づく弾性座屈耐力の推定方法として、単層ラチス構造を対象に、IASS の "Recommendations For Reinforced Concrete Shells and Folded Plates¹³⁾" を基に提唱された「修正ダンカレー式」(加藤・小河ら^{14)~19)}など)があり、球形、円筒、鞍型など、特定の単層ラチス構造においては簡易に推定することができる。これらの知見を踏まえて、1996 年の「鋼構造座屈設計指針²⁰⁾」に「スペース・フレーム」の章が追加された。さらに 2016 年には、単層および複層ラチスシェルに対して、立体骨組モデルによる時刻歴応答計算を耐震性能の確認の選択肢とする指針¹²⁾が示された。以上の指針等の刊行により、空間構造における耐震設計の際の検討項目に一定の要求水準が設けられたと考えられ、上記の方針で構造設計をおこなうことで、設計要件としては損傷後の挙動を追跡していなくとも空間構造の耐震性能を有することになる。

しかしながら、ここまで述べた設計要件を満たす検討のみでは、想定外の外力時の挙動を含む真の耐震安全性を確認したとは言い難い。そこで、想定外の事象に対しては、設計基準に対する耐力計算と別個に把握すべきである。例えば屋根部分の損傷を制御した構造物¹²⁾に対しても、屋根部分の損傷後の倒壊メカニズムを事前に把握しておく。構造物の保有耐力と変形の関係が最大耐力後まで求められていれば、構造物における震災後の使用可否の判断がスムーズになる。場合によっては、屋根部分の詳細な検討により、再現期間の長い地震動に対して大幅に安全側の耐力を設定した構造設計は不経済となることもあるため、最大耐力後の状態が安定していることが確認できれば、構造物の靱性を考慮した終局状態に基づく設計方針を選択肢の一つとすることもあり得る。以上の観点からも、構造設計者は、構造設計の段階において想定する外力に対する耐震安全性の確保のほか、仮に想定外のあらゆる事態が生じた時のために終局挙動を把握し、空間構造の耐震性能の範囲について施主と合意形成を図る必要がある。また災害が発生した場合は、空間構造の躯体や非構造部材等の損傷の有無や度合い、さらには補修の必要性などを、強震動データ等を基に設計者が確認し、使用者や施主に対して説明する責任がある。

多様な空間構造に対して、縮小試験体による実験的研究や^{6),9)}、有限要素法による解析的研究^{7),8),10),11)}による崩壊挙動の確認がおこなわれた例も存在する。実験的研究は特殊な架構に関する安全性を検討するためにおこなわれているが、同様の検討が全ての空間構造で可能なわけではない。一方、解析的研究は、上記に関しては特定の空間構造に対するモデル化がなされた例ではあるものの、大規模な実験施設を必要とせずに検討が可能なことから、一般的な構造設計業務の際に使用する期待ができる方法である。コンピュータ性能が発展し、モデル化が効率化されれば、様々な設計変数に対して設計者の選択肢を広げる事が可能になると考えられる。

空間構造において各種の非線形挙動を考慮した数値解析は、有限要素法などの「離散化手法」と呼ばれる方法により可能である。この方法は構造躯体を梁要素やシェル要素の「構造要素」に置換することで構築した数値解析モデルを用いて数値計算をおこなうものである。この手法においても、モデル化の方針によって2つの考え方に大別することができる。一つは「細分化」という考え方で、個材に対して複数の構造要素に置換し、多くの自由度数を有する解析モデルである。細分化モデルによる空間構造の解析的研究はすでに多くの研究者によっておこなわれており^{例えば 21)~31)}、個材レベルの座屈後挙動や構造物全体の損傷の進展など、限りなく実態に近い挙動を近似的に再現可能である一方、自由度数が多くなるために解析モデル自体が複雑となる。特に多くの構成部材から成る空間構造においては、その自由度数は膨大となる。近年ではコンピュータ性能の発展と汎用数値解析ソフトウェアの普及により、これまでできなかった自由度数の解析モデルによる非線形解析が実務でもおこなわれるようになりつつある。たとえば、空間構造全体の振動特性等を取得するための線形固有値解析を線材置換モデルによっておこない、部材断面の詳細や外力の検討が確定したところで、少ない質点系での時刻歴応答計算をおこなった例がある^{8),9),11)}。しかしながら、2種類の解析モデルの構築による手間がかかるほか、両者の間の解析モデルとしての整合性確認が必要であるなどの問題も生じる。また、出力される結果自体を設計者が判断するために、個材の断面力を組み合わせて巨視的な単位(組立梁など)の材端力として算出する必要があることから、ヒューマンエラー発生の危険が伴う手法であるといえる。

上記の煩雑さに加えて、特にトラス梁から成る空間構造は、全体座屈が生じる前に個材の不安定現象が生じる。このような場合、線材置換モデルによる固有値計算では追跡できない現象も存在する危険性があり、進行する崩壊挙動に応じて正しく考察をしていくことが求められる。このような知見は、重層構造物の設計経験が豊富な構造設計者でも十分に持っていない場合がある。空間構造の数値解析

における憂慮点や手順などの理解を助けるために、日本建築学会が各種の指針やガイドラインを発行している^{1,20),32~35)}他、学会が主催する講習会³⁶⁾や書籍等^(例えば37),38)で啓発活動に取り組んでいる。文献32には、単層および立体トラス構造における個材の塑性化を考慮した全体座屈耐力の予測式が示されているほか、連続体置換による座屈解析法の概要が示されている。ここに示されている方法は日置ら³⁹⁾の文献を基にした方法である。ただし、この方法は弾性座屈耐力を追跡するための座屈解析法が示されているのみであることを誤解してはならず、崩壊挙動を追跡する方法とはそもそもの目的が異なる。また、文献34には単層ラチスおよび立体トラス構造をシェル要素として連続体置換する方針が主に示されているが、構面外座屈などのトラス梁に生じる局所的不安定挙動は、シェル要素ではなく梁要素で置換する方が力学挙動として自然であると考えられる。こうした中で、文献1では、設計者が空間構造の解析に離散化手法を採用するにあたっての指南書として、数値計算分野で広く用いられている有限要素法の概要から、モデル化や解析結果の評価に関する留意事項までを詳細に説明している。また、部材の弾塑性状態を考慮した全体座屈後挙動の追跡の必要性にも言及している。文献33においても、地震応答解析などにより耐震性を評価するための解析モデルの構築方法などを解説している。また、学生や実務経験の浅い設計者を対象に、「シェル・空間構造 チュートリアルセミナー」^{注1}と題して、空間構造を解析する基礎となる知識の提供や、設計に応用した例などを啓発している。

しかしながら、このような普及活動も未だ浸透したとは言い難く、細分化モデルによる数値解析を判断材料とした発展的な設計方法を採用することができるのは一部の設計者に留まっているといえる。また、膨大な自由度数に対する数値計算は高度な数値計算用コンピュータを必要とするため、数値解析を実行する十分な環境が構造設計者に提供されているとは言い難い。そこで、離散化手法による数値解析のモデル化方針のもう一つの考え方である「線材置換」の使用が見込まれる。

「線材置換」によるモデル化は、細分化モデルとは逆に、複数の個材を纏めて単一の構造要素とすることで、解析において不必要と判断される自由度を縮減する、という考え方である。線材置換モデルを用いた解析で得られる結果は、設計者が設計時に必要とする材端力が最低限の自由度数で得られるため、部材の材端力を効率よく取得でき、設計者が構造特性を把握しやすいという利点を有する一方、自由度数縮減の度合いは設計者の判断に委ねられ、その判断が適切でない場合は、必要な崩壊系が出現しないような結果が出力される恐れがある。場合によっては、空間構造全体の崩壊挙動に寄与する不安定現象をも無視した状態で解析する危険があるが、その考察をしながら設計することは、かえって非効率である。そこで、研究者が設計者を支援する形で、工学的な知見に基づいて主要な不安

定現象を抽出し、要素の荷重変位関係に考慮した梁要素を提案することで、設計者は使用のみに注力することができ、結果として多くの手間を省略することができるだけでなく、一定の精度を保証した崩壊現象の再現を両立することが可能になると考えられる。本研究は、このような「線材置換」手法に基づく数値解析法に対する需要が背景にある。

1. 2 本研究に関する既往の研究

立体および平行弦トラス梁から成る空間構造における構成部材の連続体・線材置換手法に関する既往の研究は古くから存在するが、多くは解析負荷の軽減を目的としたものである。例えば、トラス平板構造の有効剛性を概算的に把握する研究として、齋藤らの研究がある^{40),41)}。これらは、スペースフレームの解析自由度数の縮減を目的として、立体トラスユニットの集合とし、各ユニットにおける部材の組み合わせ方に応じた有効剛性の算出方法を示し(文献 40)、解析例を示している(文献 41)。また、日置・坂ら^{例えば 39)}では、局所的な不安定現象である個材の弾性座屈が生じる時の、空間構造全体の耐力を「有効強度」と定義し、ラチス構造を連続体と捉えて算定法を示している。また、「有効剛性」に関する研究もなされている⁴²⁾。しかしながら、これらの方法は線形・弾性時から最初の不安定挙動が発生する時までを対象としているため、その後の挙動まで追跡する手法とはなっていない。

上谷ら^{51),52)}は、平行弦トラス梁の個材が弾性座屈後挙動を連続体置換手法に基づき解析する手法を提案している。この手法は、弾性座屈荷重の生ずる個材の骨格曲線をバイリニアとすることで、弦材の座屈が進展する過程でのトラス梁の剛性低下を再現している。また、断面が塑性化する事による個材の軸力の低下を再現するために、擬似的な塑性流動則を数値実験から導出し、トラス骨組の軸力低下を再現している。しかしながら、これらは弾性座屈荷重後の荷重変位関係や塑性流動則に仮定を含む手法であり、置換した連続体も要素分割を施しており、要素数の大幅な縮減とはなっていない。小川らは、個材の不安定現象として弦材の構面外座屈を対象に、弦材端部の境界条件に応じた座屈後の変形能力に関して、鋼管断面の個材の局部座屈が生じるまでの変形能力に関する予測式を提案し⁵³⁾、それがトラス梁の構面外座屈を決定づける因子と特定した上で、座屈後の変形能力について言及している⁵⁴⁾。

一方で、局所的な変形を考慮する連続体置換の考え方として提案されていた Cosserat 兄弟による Couple Stress 理論⁴³⁾およびその拡張された「一般多重有向連続体」の概念^{44), 45)}に基づき、空間構造の解析に応用するための考察も多く存在する。例えば松岡・横井はトラス梁やフィーレンディール梁を「局所変形の生じる一次元モデル(梁要素)」と捉え、弦材と束材の接合部の回転を考慮した連続体置換手法について、「一般多重有向連続体」とトラス梁などの変形の物理的相似性を考察している他⁴⁶⁾、トラス梁およびフィーレンディールに適用する例⁴⁷⁾や、同様の手法でフィーレンディール平板に適用する例を示している⁴⁸⁾。その後、小河・鈴木⁴⁹⁾は、立体トラス構造もしくは平行弦トラス梁構造の繰

り返し部分に生じる局所的な回転を考慮するため、Cosserat らの連続体理論に基づく要素の展開をおこなっている。堀田・鈴木・小河⁵⁰⁾によると、弾性範囲ではあるものの、構面内座屈を考慮したたわみ図と同等の結果が得られている。しかしながら、梁要素の自由度を拡張する概念である上、自由度の物理的解釈や弾性構成則の係数の計算に複雑な考察を要するなど、構造設計者の使用するツールとして求められる実用性には遠いのが現状である。

こうした背景を受け、元結・大塚^{55),57)}は、個材の塑性化および構面内座屈によりトラス梁の巨視的な荷重変位関係が非線形となる場合を単一の梁要素で追跡する手法が提案されている。この時の個材の座屈挙動の解析法は文献 56) に示すトラス要素の簡易解析法を適用したものである。また、同様にして、元結・緒方は個材の不安定挙動として弦材の構面外座屈に着目し、文献 56 を拡張した定式化により弦材を単一要素として解析する手法を提案している^{58),59)}。また、この手法を「トラス梁要素」に適用する手法を提案している⁶⁰⁾。以上の手法について、トラス梁の基本式等の定式化は塑性論およびその根本となる熱力学の基本原理に整合するものとなっており、単一要素とすることで自由度数を縮減するだけでなく、力学的整合性を有するものとして一定の精度を保証している。しかしながら、これらの手法は弦材の接合条件がピンであった。これは、弦材の数値計算手法において、個材の手法である文献 57 を拡張することで定式化を試みており、この時の材端の接合条件がピンとなっていたためである。単独のトラス梁で見ると、材端をピンとすることにより座屈長さが最も長い状況となり、材端に固定度を有する場合に比べて安全側の座屈荷重を得られるため、トラス梁部材の設計に使用方法としては十分に適用可能である。しかしながら、一般的なトラス梁から成る空間構造において弦材は連続しているか、大スパンのものでは溶接処理もしくは鋳鋼接合部が用いられ、中規模のものでもガセットプレートにより弦材同士が接合されることで、トラス梁の構面外回転を拘束した例が多く見受けられる。一般に座屈現象は端部の接合条件が異なることにより、座屈耐力や座屈モードに多大な影響を与える。特にトラス梁から成る空間構造においては、弦材同士が剛接合であることにより周辺部材の補剛効果があるため、座屈耐力がピン接合の想定より大きくなることが考えられる。また、空間構造全体としてみると、互いの弦材の接合条件が剛であるトラス梁に構面外座屈が生じた際に、座屈耐力に達していない周辺のトラス梁弦材が構面外への強制変形を受けることになり、座屈等の不安定挙動を誘発する恐れがあるなど、ピン接合である既往の手法では追跡できない現象があり、崩壊挙動の再現のためにはより実態に近い接合条件における手法とすべきである。

1. 3 本研究の目的

想定を超える外力に対する空間構造の真の安全性の検証が求められる中で、空間構造の崩壊挙動を再現するために離散化手法を用いることは、より詳細な再現を求めるほど膨大な自由度数を要し、解析モデルの整合性、結果の考察過程における作業量の多さや収束性などの問題が生じるため、設計業務で崩壊現象を常に確認しながら設計することは現実的ではない。そこで本研究は、トラス梁から成る空間構造において、弦材の構面外座屈による耐力の低下を考慮した全体崩壊挙動の再現を少ない自由度数でなおかつ精確に可能とする「トラス梁要素」の提案を目的とする。特に、実際の空間構造に見られる弦材の接合に適う条件でトラス梁の構面外座屈を追跡可能とするため、接合条件を拡張した新たな弦材の解析法を提案する。また、弦材の接合条件が変更されることにより、トラス梁要素の材端条件および自由度も拡張した手法とする。さらに、提案したトラス梁要素を空間構造の数値解析に適用し、数値解析をおこなうことにより、トラス梁要素の妥当性と適用範囲を検証する。

第2章 弦材の弾性座屈後挙動解析法

2.1 はじめに

2.2 基本式の定式化

2.2.1 対象とする弦材

2.2.2 左側モデルの基本式

2.2.3 右側モデルの基本式

2.2.4 弦材モデルの基本式

2.3 数値解析

2.3.1 座屈時の接線剛性

2.3.2 数値解析例による妥当性検証

2.4 まとめ

2. 1 はじめに

本章では、トラス梁の弦材に弾性座屈が生じる時の座屈後挙動までを考慮した数値解析法を提案することが目的である。

座屈の生じる部材の履歴則に関する研究は従来おこなわれており、主に塑性ヒンジモデルによるもの^{例えば 61)~66)}と、実験的知見に基づいて荷重変位関係を複数の近似関数で示すもの^{例えば 67),68)}に大別される。これらは部材に単一の軸方向力が生じる部材ブレース材などに関する研究が多く、弦材のような、中間に軸方向力が生じる場合までを反映した履歴モデルではない。トラス梁においては、弦材が斜材から受ける軸力によってトラス梁としての構面内せん断力を伝達するため、弦材の中間軸方向力はトラス梁の材端力変数として考えなくてはならない。弦材のみを取り出すと、中間軸方向力が変化することにより座屈荷重や座屈モードが変化するため、座屈荷重や座屈後の耐力評価を近似化する手法は困難を伴う。

こうした考えもあり、元結・緒方は前者の塑性ヒンジモデルに立脚した立場から、トラス梁弦材を「軸力勾配を有する圧縮材」と称して数値解析法を提案しており^{58),59)}、トラス梁要素まで拡張する方法を示している⁶⁰⁾。しかしながら、この手法では対象とする弦材の接合条件がピンのみに限定されており、実際の接合条件に適うモデル化となっていない。弦材端部の接合条件を考慮するためには、これまで軸力の接線剛性に関わる変数を材端の回転とは独立に定義していた評価手法を、材端との相互作用を考慮した新たな手法として再定義する必要がある。

本研究では Fig.2-1 に示すトラス梁における長さ L の弦材が構面外座屈する状態を対象とし、弦材のみを抽出し、材端に回転拘束を受ける部材の軸方向(r 方向)と構面外座屈の方向(s 方向)による 2 次元問題として、弦材に中間軸方向力が入力される場合の解析法を提案する。特に本章では弾性座屈を対象とする。2. 2 節では熱力学の基本原則に基づく定式化より基本式を導出し、2. 3 節では数値計算例として、弦材に弾性座屈が生じる場合の定式化に則った解析法(提案手法)と離散化手法による解析結果の比較により、座屈の進展に対する提案手法の妥当性を検証する。

なお、本章および第 3 章では上弦材を対象に定式化をおこなう。下弦材についても同様に定式化が可能であるが、ここでは割愛する。また、第 2 章および第 3 章において示す諸変数は、第 4 章以降と Appendix 1 に示す記号表における上・下弦材を示す添字 ζ を省略して記述する。

2. 2 基本式の定式化

2. 2. 1 対象とする弦材

対象とする弦材を Fig.2-1 に示す。材端点 I、J で回転拘束を受ける長さ L の弦材 IJ を考える。この弦材が圧縮力を受けて、点 J から αL の点 K で最大横たわみとなる弾性座屈が生じるとする。このことを踏まえ、この部材に軸力 N 、部材の中間位置において等間隔に $(S-1)$ 個の中間軸方向力 $\bar{N}$ 、そして点 I、J に曲げモーメント M_i および M_j が生じ、Fig.2-2(a)から Fig.2-2(b)に示す変形後に平衡状態に達した場合を考える。弦材が $\bar{N}$ によって区切られた区間の中で、J から $(m-1) \sim m$ 番目の $\bar{N}$ 作用位置の間に K が位置するときの条件は、

$$\frac{m-1}{S} < \alpha < \frac{m}{S}, \quad m=1,2,\dots,S \quad (2.1)$$

である。Fig.2-3 に本章における回転の定義を示す。 u_i, u_k, u_j および $\theta_i, \theta_k, \theta_j$ は対象モデルの点 I、K、J の r 方向変位および回転角を、それぞれ表す。 $u_{L(1)}, u_{L(2)}, \dots, u_{L(S-m)}$ および $u_{R(1)}, u_{R(2)}, \dots, u_{R(m-1)}$ は、 $\bar{N}$ の生じる位置の r 方向変位を示す。また、座屈による点 K の s 方向変位 v_k に比べて IJ の軸方向変位量は非常に小さいとし、部材 IK、KJ の部材角をそれぞれ R_{ik}, R_{kj} とする。作用する荷重および変位は右向き、曲げモーメントおよび回転変位は反時計回りを正とする。

部材各点の軸力 N_i, N_j, N_k は N および $\bar{N}$ を用いて次式のように示される。

$$N_i = N + \frac{S-1}{2} \bar{N}, N_j = N - \frac{S-1}{2} \bar{N} \quad (2.2a,b)$$

$$N_k = \frac{(m-1)N_i + (S-m)N_j}{S-1} = N + \left(m-1 - \frac{S-1}{2}\right) \bar{N} \quad (2.2c)$$

また、座屈後のモーメントの釣り合いより、せん断力は次式となる。

$$Q = \frac{\bar{N}}{2S} \left\{ (-R_{kj})(m-1)m + R_{ik}(S-m)(S-m+1) \right\} - \frac{M_i + M_j}{L} \quad (2.3)$$

ここで、文献 59 と同様の手順で基本式を導出する。弦材に対して、点 K を境に左側モデルと右側モデルに分けて定式化をおこなう。

2. 2. 2 左側モデルの基本式

左側モデルを Fig.2-4 に示す。点 I に (N_i, M_i) 、点 K に (N_k, M_{kL}) の材端力が生じている。 $(S-m)$ 個の $\bar{N}$ は IK の直線上に分布すると考えると、左側部分における Helmholtz 自由エネルギーおよび Clausius-Duhem 不等式は次式によって表現される。

Helmholtz 自由エネルギー

$$\begin{aligned} \Psi_L = & \frac{1}{2} \frac{SEa_c}{L} \left(u_{L(1)} - u_i + \frac{LR_{ik}^2}{2S} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{SEa_c}{L} \sum_{s=2}^{S-m} \left(u_{L(s)} - u_{L(s-1)} + \frac{LR_{ik}^2}{2S} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} \frac{SEa_c}{(m-S\alpha)L} \left\{ u_k - u_{L(S-m)} + \frac{LR_{ik}^2}{2} \left(\frac{m}{S} - \alpha \right) \right\}^2 + \frac{1}{2} \theta_L^e \mathbf{k}_{ML} \theta_L^e \end{aligned} \quad (2.4)$$

Clausius-Duhem 不等式

$$-\dot{\Psi}_L - N_i \dot{u}_i + \bar{N} \sum_{s=1}^{S-m} \dot{u}_{L(s)} + N_k \dot{u}_k + \mathbf{M}_L \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_L + Q(1-\alpha) L \dot{R}_{ik} = 0 \quad (2.5)$$

ただし、式(2.5)については、本章においては弾性のみを考慮するため等号が成立する。式(2.2c)の条件の下に、式(2.5)に式(2.4)の変化率を代入し、全ての変位成分の変化率に対して式(2.5)が成立する条件から、次式が得られる。

$$\frac{N_k L}{SEA} = \frac{1}{m-S\alpha} \left\{ u_k - u_{L(S-m)} - u_{kL}^p + \frac{LR_{ik}^2}{2} \left(\frac{m}{S} - \alpha \right) \right\}, \quad (2.6a)$$

$$\frac{\bar{N}L}{SEA} = u_{L(S-m)} - u_{L(S-m-1)} - \frac{1}{m-S\alpha} (u_k - u_{L(S-m)}), \quad \frac{\bar{N}L}{SEA} = -u_{L(t+2)} + 2u_{L(t+1)} - u_{L(t)}; t=1,2,\dots,S-m-2, \quad (2.6b,c)$$

$$\frac{\bar{N}L}{SEA} = -u_{L(2)} + 2u_{L(1)} - u_i, \quad \frac{N_i L}{SEA} = u_{L(1)} - u_i + \frac{LR_{ik}^2}{2S}, \quad (2.6d,e)$$

$$\mathbf{M}_L = \mathbf{k}_{ML} \boldsymbol{\theta}_L^e \quad (2.6f)$$

$$-\left\{ N_k + \frac{(S-m)(S-m+1)}{2S(1-\alpha)} \bar{N} \right\} (1-\alpha) LR_{ik} + M_i + M_{kL} + Q(1-\alpha)L = 0 \quad (2.6g)$$

さらに整理すると、次の諸関係が得られる。

点 K における軸力・中間軸方向力と軸方向変位の関係：

$$N_k = \frac{Ea_c}{(1-\alpha)L} \left\{ u_k - u_{kL}^p + \frac{(1-\alpha)LR_{ik}^2}{2} \right\} - \frac{(S-m)(S-m+1)}{2S(1-\alpha)} \bar{N} \quad (2.7)$$

曲げモーメント弾性構成則：式(2.6f)

点 K から左側におけるモーメントの釣り合い関係：式(2.6g)

これらが左側モデルにおける基本式である。以上の定式化において、

$$\mathbf{M}_L = \{M_i \quad M_{kl}\}^T, \boldsymbol{\theta}_L^e = \{\theta_i^e \quad \theta_{kl}^e\}^T = \boldsymbol{\theta}_L - \{\mathbf{1}\}R_{ik}, \boldsymbol{\theta}_L = \{\theta_i \quad \theta_k\}^T, \quad (2.8a-c)$$

であり、 $\mathbf{M}_L$ は左側材端曲げモーメントを、 M_{kl} は左側モデルにおける点 K の曲げモーメントを、 $u_{L(s)}$ ($s=1, \dots, S-m$) は各中間軸方向力作用位置における水平変位を、 $\boldsymbol{\theta}_L$ は左側モデルの回転に関する変形角を示す。 $\mathbf{k}_{ML}$ は左側モデルの回転剛性マトリクスをそれぞれ示すが、各係数は座屈たわみ角法の修正定式化^{69),70)}を、さらに材端点 I 及び J の回転拘束を考慮した形に拡張した時の係数を用いている。また、 $\{\mathbf{1}\}$ は全成分が 1 の定数ベクトルを、式中の $(*)$ は各変数の変化率を示す。

2. 2. 3 右側モデルの基本式

右側モデルを Fig.2-5 に示す。点 K に (N_k, M_{kR}) 、点 J に (N_j, M_j) が作用し、中間に生じる $\bar{N}$ は $(m-1)$ 個である。基本式は 2.2.2 項と同様の算出過程で得られる。

Helmholtz 自由エネルギー

$$\begin{aligned} \Psi_R = & \frac{1}{2} \frac{SEa_c}{L} \left(u_j - u_{R(1)} + \frac{LR_{kj}^2}{2S} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{SEa_c}{L} \sum_{t=1}^{m-2} \left(u_{R(t)} - u_{R(t+1)} + \frac{LR_{kj}^2}{2S} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} \frac{SEa_c}{(S\alpha - m + 1)L} \left\{ u_{R(m-1)} - u_k + \frac{LR_{kj}^2}{2} \left(\alpha - \frac{m-1}{S} \right) \right\}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}_R^{eT} \mathbf{k}_{MR} \boldsymbol{\theta}_R^e \end{aligned} \quad (2.9)$$

Clausius-Duhem 不等式

$$-\dot{\Psi}_R + N_j \dot{u}_j + \bar{N} \sum_{t=1}^{m-1} \dot{u}_{R(t)} - N_k \dot{u}_k + \mathbf{M}_R \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_R + Q \alpha L \dot{R}_{kj} = 0 \quad (2.10)$$

式(2.10)第1項に式(2.9)の変化率を代入し、全ての変位成分の変化率に対して式(2.10)が成立する条件から得られた式をさらに整理すると、以下の3つの式が得られる。

点 K における軸力、中間軸方向力と軸方向変位の関係：

$$N_k = \frac{Ea_c}{\alpha L} \left(u_j + \frac{\alpha LR_{kj}^2}{2} \right) + \frac{(m-1)m}{2S\alpha} \bar{N} \quad (2.11a)$$

$$\text{曲げモーメント弾性構成則：} \mathbf{M}_R = \mathbf{k}_{MR} \boldsymbol{\theta}_R^e \quad (2.11b)$$

点 K から右側におけるモーメントの釣り合い関係：

$$-\left[N_k - \frac{m(m-1)}{2S\alpha} \bar{N} \right] \alpha LR_{kj} + M_{kR} + M_j - Q \alpha L = 0 \quad (2.11c)$$

これらが右側モデルにおける基本式である。ここに、

$$\mathbf{M}_R = \{M_{kR} \quad M_j\}^T, \boldsymbol{\theta}_R^e = \{\theta_{kR}^e \quad \theta_j^e\}^T = \boldsymbol{\theta}_R - \{1\} R_{kj}, \boldsymbol{\theta}_R = \{\theta_k \quad \theta_j\}^T \quad (2.12a-c)$$

であり、 $\mathbf{M}_R$ は右側材端曲げモーメントを、 M_{kR} は右側モデルにおける点 K の曲げモーメントを示し、 $u_{R(t)}$ ($t=1, \dots, m-1$) は各中間軸方向力作用位置における水平変位を、 $\boldsymbol{\theta}_R$ は右側モデルの回転に関する変形角を、 $\boldsymbol{\theta}_R^e$ は $\boldsymbol{\theta}_R$ の弾性成分を、それぞれ示す。 $\mathbf{k}_{MR}$ は右側モデルの回転剛性マトリクスを示し、導出方法は 2.2.2 項の $\mathbf{k}_{ML}$ と同様である。

2. 2. 4 弦材モデルの基本式

2.2.2、2.2.3 項で得られた左右の基本式の釣り合いを考える。まず、式(2.6g)または式(2.11c)に式(2.3)を代入することにより次式が得られる。

$$(1-\alpha)R_{ik} = -\alpha R_{kj} \quad (2.13)$$

のちの式の便宜上、左右の部材の相対部材角 R を定義し、次式のように表す。

$$R_{kj} = -(1-\alpha)R, R_{ik} = \alpha R \quad (2.14a,b)$$

これは幾何学的関係とも整合し、さらに文献 58 における式(9)および(10)とも等しい。次に、式(2.6f)および式(2.11b)と点 K における節点方程式 $M_{kL} + M_{kR} = 0$ を用いて、次式が得られる。

$$\theta_k = (-1+2\alpha)R - \frac{1}{2}(1-\alpha)\theta_j^e - \frac{1}{2}\alpha\theta_i^e \quad (2.15)$$

以上の関係と式(2.2a-c)、(2.3)を用いて、左右の基本式(2.6a-g)および(2.11a-c)を改めて整理することで、弦材モデルの基本式が得られる。

$$N = \frac{Ea_c}{L} [u + CR^2] \quad (2.16a)$$

$$\bar{N} = k_{\bar{N}} [\bar{u} + (2\alpha-1)CR^2] \quad (2.16b)$$

$$\mathbf{M} = \{M_i \quad M_k \quad M_j\}^T = \mathbf{k}_M \boldsymbol{\theta}^e \quad (2.16c)$$

$$\Xi = -(2N + D\bar{N})CR + \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (2.16d)$$

ここに、 $u = u_j - u_i$, $\bar{u} = u_k - \{\alpha u_i + (1-\alpha)u_j\}$, $\boldsymbol{\theta}^e = \boldsymbol{\theta} - \alpha \mathbf{R}$, $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_i \quad 0 \quad \theta_j\}^T$, $\mathbf{a} = \{\alpha \quad 1 \quad -(1-\alpha)\}^T$,

$$\mathbf{k}_M = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ik} & k_{ij} \\ k_{ki} & k_{kk} & k_{kj} \\ k_{ji} & k_{jk} & k_{jj} \end{bmatrix}, k_{\bar{N}} = \frac{2S}{(1-\alpha)(m-1)m + \alpha(S-m)(S-m+1)} \frac{Ea_c}{L}, C = \frac{\alpha(1-\alpha)L}{2},$$

$$D = 2 \left\{ m-1 - \frac{S-1}{2} \right\} - \frac{(1-\alpha)(m-1)m}{S\alpha} + \frac{\alpha(S-m)(S-m+1)}{S(1-\alpha)} \quad (2.17a-i)$$

である。式(2.16a-c)は要素の軸力、中間軸方向力および曲げに関する弾性構成則を、(2.16d)は点 K におけるモーメントの釣り合い関係をそれぞれ示す。ただし、 $M_{kL} = -M_{kR} = M_k$ としている。

2.3 数値解析

2.3.1 座屈時の接線剛性

全ての降伏条件は材端変位ベクトル $\mathbf{u}$ および座屈の進展を表す変数 R のみにより表現されると仮定し、式(2.16d)が常に成り立つことから、次式が成立する。

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \Phi}{\partial R} \dot{R} = \mathbf{b}_1 \dot{\mathbf{u}} + G \dot{R} = 0 \quad (2.18a)$$

$$\therefore \dot{R} = -G^{-1} \mathbf{b}_1 \dot{\mathbf{u}} \quad (2.18b)$$

一方、軸力および材端曲げモーメントの変化率は式(2.19a)となり、さらに式(2.18b)を代入することにより式(2.19b)を得る。

$$\dot{\mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial R} \dot{R} = \mathbf{K}^e \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{b}_2^T \dot{R} \quad (2.19a)$$

$$= (\mathbf{K}^e + \mathbf{b}_2^T G^{-1} \mathbf{b}_1) \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{K}^{eb} \dot{\mathbf{u}} \quad (2.19b)$$

以上に示した $\mathbf{K}_M^{eb}$ が弾塑性接線係数である。ここに、

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}}, \mathbf{b}_2^T = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial R}, \mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} k_{N\pm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{\bar{N}\pm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{Mii\pm} & k_{Mij\pm} \\ 0 & 0 & k_{Mji\pm} & k_{Mjj\pm} \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{f}} = \left\{ \dot{N} \quad \dot{\bar{N}} \quad \dot{M}_i \quad \dot{M}_j \right\}^T, \dot{\mathbf{u}} = \left\{ \dot{u} \quad \dot{\bar{u}} \quad \dot{\theta}_i \quad \dot{\theta}_j \right\}^T \quad (2.20a-e)$$

であり、 $\dot{\mathbf{f}}$ は材端力ベクトルの変化率、 $\dot{\mathbf{u}}$ は変位の変化率、 $\mathbf{b}_1$ は変位ベクトルに関する微係数、 $\mathbf{b}_2$ は材端力の $\dot{R}$ に関する微係数、 $\mathbf{K}^e$ は部材の弾性剛性マトリクスである。さらに、 G は座屈の進展増分に対する係数であり、モーメントの釣り合い条件式(2.16d)の、 $\dot{R}$ による各偏微分より得られる係数である。

具体的には以下のようなになる。

$$G = \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial R} = -4 \left[k_N + D \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) k_{\bar{N}} \right] C^2 R^2 - [2N + D\bar{N}] C - \mathbf{a}^T \mathbf{k}_M \mathbf{a} \quad (2.21)$$

また、 4×1 のマトリクスとなる $\mathbf{b}_1$ および $\mathbf{b}_2$ を以下に示す。

$$\mathbf{b}_1^T = \left[\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial u} \quad \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \bar{u}} \quad \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \theta_i} \quad \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \theta_j} \right], -\mathbf{b}_2^T = \left[\frac{\partial N}{\partial R} \quad \frac{\partial \bar{N}}{\partial R} \quad \frac{\partial M_i}{\partial R} \quad \frac{\partial M_j}{\partial R} \right] \quad (2.22a,b)$$

以上より、式(2.19b)の幾何学的非線形項は次の通りである。

$$-\mathbf{b}_2^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{b}_1 = \left(\frac{\partial \Xi}{\partial \mathbf{R}} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Xi}{\partial u} \frac{\partial N}{\partial R} & \frac{\partial \Xi}{\partial \bar{u}} \frac{\partial N}{\partial R} & \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_i} \frac{\partial N}{\partial R} & \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_j} \frac{\partial N}{\partial R} \\ \frac{\partial \Xi}{\partial u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial R} & \frac{\partial \Xi}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \bar{N}}{\partial R} & \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_i} \frac{\partial \bar{N}}{\partial R} & \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_j} \frac{\partial \bar{N}}{\partial R} \\ \frac{\partial \Xi}{\partial u} \frac{\partial M_i}{\partial R} & \frac{\partial \Xi}{\partial \bar{u}} \frac{\partial M_i}{\partial R} & \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_i} \frac{\partial M_i}{\partial R} & \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_j} \frac{\partial M_i}{\partial R} \\ \frac{\partial \Xi}{\partial u} \frac{\partial M_j}{\partial R} & \frac{\partial \Xi}{\partial \bar{u}} \frac{\partial M_j}{\partial R} & \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_i} \frac{\partial M_j}{\partial R} & \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_j} \frac{\partial M_j}{\partial R} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

ここに、

$$\frac{\partial \Xi}{\partial u} = \frac{\partial N}{\partial R} = 2CRk_N, \quad \frac{\partial \Xi}{\partial \bar{u}} = DCRk_{\bar{N}}, \quad \frac{\partial \bar{N}}{\partial R} = 2(2\alpha - 1)CRk_{\bar{N}}, \quad \frac{\partial M_i}{\partial R} = \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_i} = k_{Mii}(\alpha + \kappa_i) + k_{Mij}\{-(1 - \alpha) + \kappa_j\},$$

$$\frac{\partial M_j}{\partial R} = \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_j} = k_{Mji}(\alpha + \kappa_i) + k_{Mjj}\{-(1 - \alpha) + \kappa_j\} \quad (2.24a-e)$$

である。ここに、 κ_i, κ_j は Appendix 5 の式(A5.5a,b)に示す係数である。

なお、係数 $\mathbf{G}$ および各マトリクス $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ は Ξ に対して逐次判定をおこなう過程で、例えば $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ かつ材端モーメントが生じない、所謂まっすぐの状態では、式(2.16d)は既に満足しており、接線剛性の計算などは必要ない。

2. 3. 2 数値解析例による妥当性検証

以上の数値解析法の妥当性を検証するために、部材を有限要素で細分化した離散化手法の解析解との比較をおこなう。

Fig.2-5 に対象とする弦材を示す。両材端に回転拘束を受け、材端および中間に軸方向力を受ける弦材が弾性座屈を生じる問題とする。部材の軸力分布は一定とすることで、内部変位成分に対しては式(2.16a,b)より得られる以下の関係を用いる。

$$u_k = (\alpha - B)u_i + \{(1 - \alpha) + B\}u_j + \{B - (2\alpha - 1)\}CR^2 \quad \text{ここに、} B = \frac{(Ea_c/L)\bar{N}}{k_{\bar{N}}N} \quad (2.25)$$

である。部材の諸元は端部を拘束した時に対して細長比 150 の中空円断面(外径 32.0mm、内径 24.0mm)、ヤング係数は 205000N/mm² とする。本章の定式化による手法(以下、提案手法)は対象の弦材を単一要素とする。点 K の位置を示す α の位置は文献 59 に示した固有値解析法を準用する。

離散化手法の解析モデルは弦材の横座屈を考慮するため、材端と中間軸方向力によって区切られる区間に対して 50 等分した梁要素により構成される。数値計算の際には、与えた外力ベクトルに対する線形座屈固有値解析により得られる 1 次モードの最大振幅が $L/20000$ となる横たわみ R_{ini} を与える。元たわみを導入した基本式(2.16a-c)は以下のようになる。

$$N = \frac{Ea_c}{L} \left[u + C(R^2 - R_{ini}^2) \right] \quad (2.26a)$$

$$\bar{N} = k_{\bar{N}} \left[\bar{u} + (2\alpha - 1)C(R^2 - R_{ini}^2) \right] \quad (2.26b)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{k}_M \{ \boldsymbol{\theta} - \mathbf{a}(R - R_{ini}) \} \quad (2.26c)$$

解析例は Fig.2-6 に示す以下の 3 つをおこなう。全て単調载荷とする。

Case (i) 中間軸力数 1、 $N_i/N_j = 0.8$ 、材端境界条件：両端回転拘束

Case (ii) 中間軸力数 1、 $N_i/N_j = 0.8$ 、材端境界条件：両端ピン

Case (iii) 中間軸力数 3、 $N_i/N_j = 0.4$ 、材端境界条件：両端回転拘束

Case(i)と Case(ii)は材端境界条件の違いであり、Case (ii)は元結・緒方の手法と同様に材端がピン接合の条件である。また、Case(iii)によって中間軸方向力の数、材端の軸力比が異なる場合でも追跡が可能かを確認する。

Fig.2-7 に Case(i)および Case(ii)の、Fig.2-8 に Case(iii)の数値解析結果を示す。いずれの図においても、

シンボルが提案手法、線が離散化手法による結果である。各図の(a)は弦材の点 J 近傍付近の軸力と部材の軸縮み関係を、(b)は軸方向変位に対する座屈の進展を表す変数 R の関係を、(c)は弦材の点 I における M-N 相関図を、(d)は点 J における M-N 相関図を、それぞれ示す。ただし、各図の(b)において、離散化手法による横変形 v は、 R との次式の関係によって算出される。

$$v = \alpha(1 - \alpha)LR \quad (2.27)$$

各図の軸力および軸縮み、モーメントは、ここで用いている断面の、降伏応力度 235N/mm^2 とした時の降伏時軸力およびその時の軸伸縮量、全塑性モーメントで無次元化している。荷重変位関係から、弦材の座屈荷重および座屈後に軸力が停留する様子が確認できる。3つの例の結果から、提案手法は細分モデルの解と同等に弾性座屈後の評価が可能な手法であるといえる。また、Fig.2-7(a)における2本の点線は、中間軸方向力が生じない弦材が両端固定された時およびピン支持された時の Euler 座屈荷重を示しているが、中間軸方向力が生じることによる座屈耐力の変化を提案手法では自動的に評価していることかわかる。各図の(b)が示す通り、弦材の構面外変位には若干の差異が見られるが、この影響が軸力に与える影響は大きくはない。ただし、各図の(c)および(d)の▼の位置が示す通り、内部の変数 R の差異の影響が材端モーメントの差異として表れているが、概ね適正な材端力が得られていると言える。

以上の考察より、材端の回転が拘束された弦材に対して、提案手法により妥当な数値解が得られることが確認された。

2. 4 まとめ

本章では、トラス梁架構の弦材に対して、既往の研究で仮定していた条件より現実的な状態である剛な接合条件を想定した弦材の弾性座屈後挙動を追跡可能な手法を提案した。本章で得られた知見を以下に示す。

1. 弦材の基本式は軸力、中間軸方向力および材端曲げモーメントに関する弾性構成則、モーメントの釣り合い式を導出することにより、端部の拘束を考慮した手法となっている。また、提案した手法を単一要素として数値計算に組み込む場合の接線剛性を導出した。
2. 以上の定式化に基づく提案手法に対して、Bernoulli の梁理論に基づく梁要素によって弦材を細かく細分化した離散化手法によるモデルの解析結果との比較により、提案手法の妥当性を確認した。提案手法は弦材の座屈を考慮した材端力の推移を再現することが可能であり、剛に接合される条件でも、弦材の弾性座屈後挙動を単一要素で追跡可能な手法である。また、提案手法は材端力に加えて、横変形量も再現できていることが確認できる。

Chapter 2

Figures

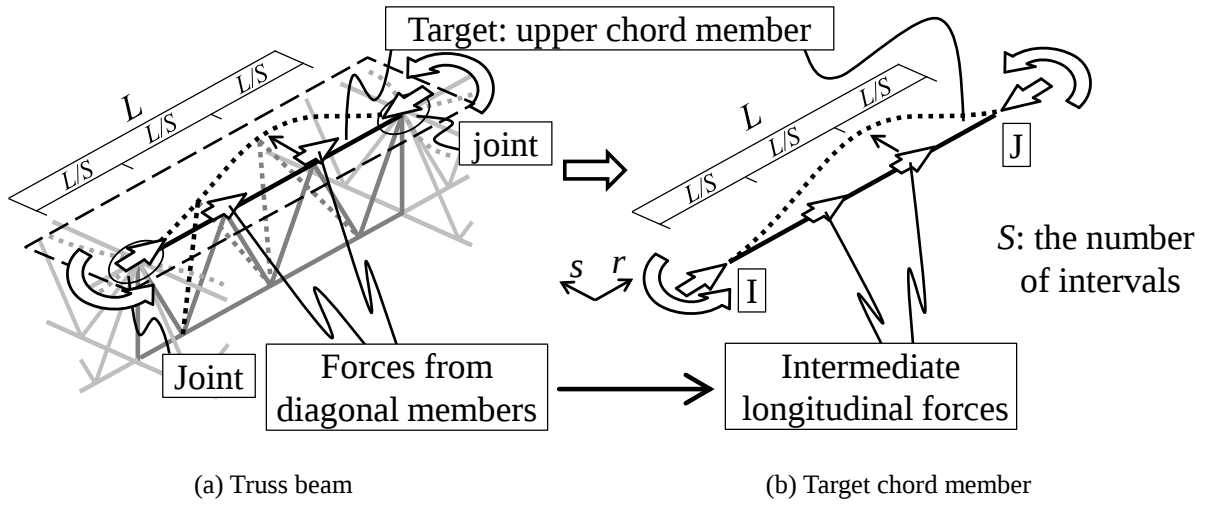


Fig.2-1 Target chord member in a truss beam

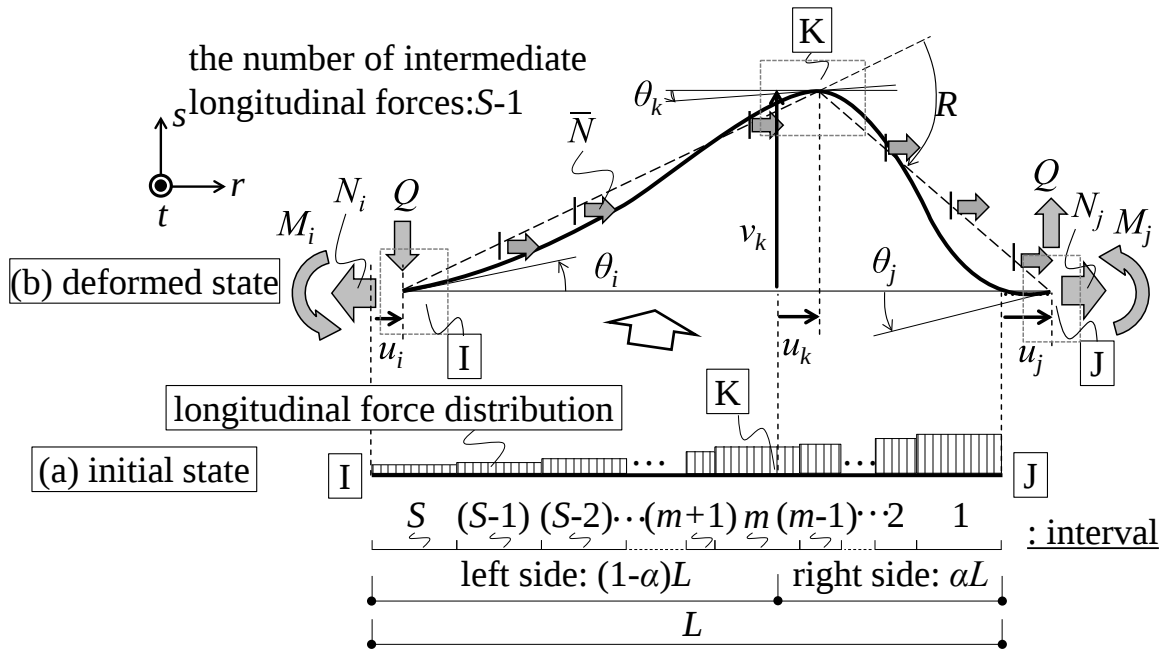


Fig.2-2 Target model

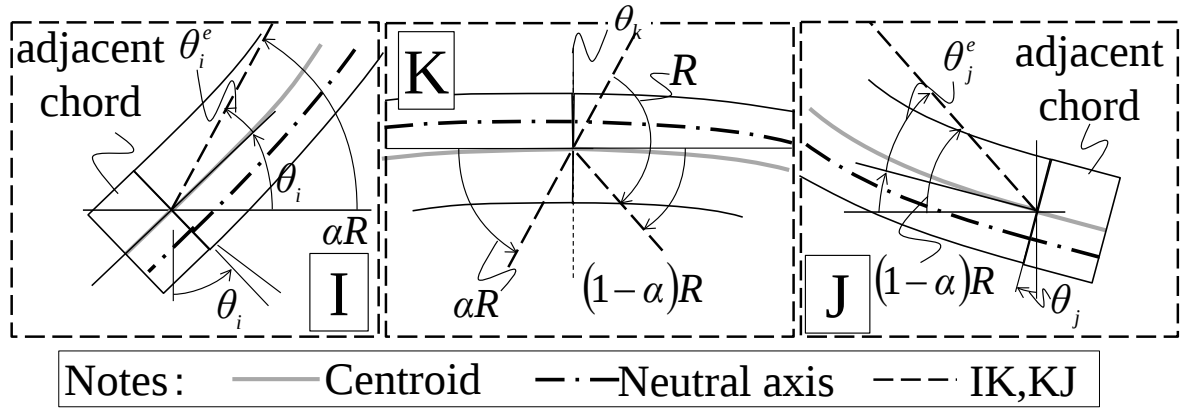


Fig.2-3 Rotations (See Fig.2-2)

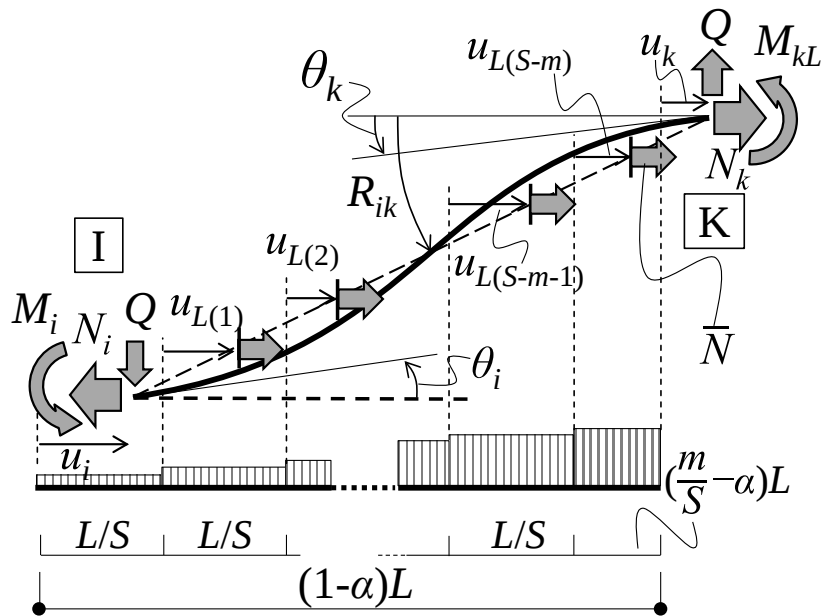


Fig.2-4 Left-hand side part of the target model

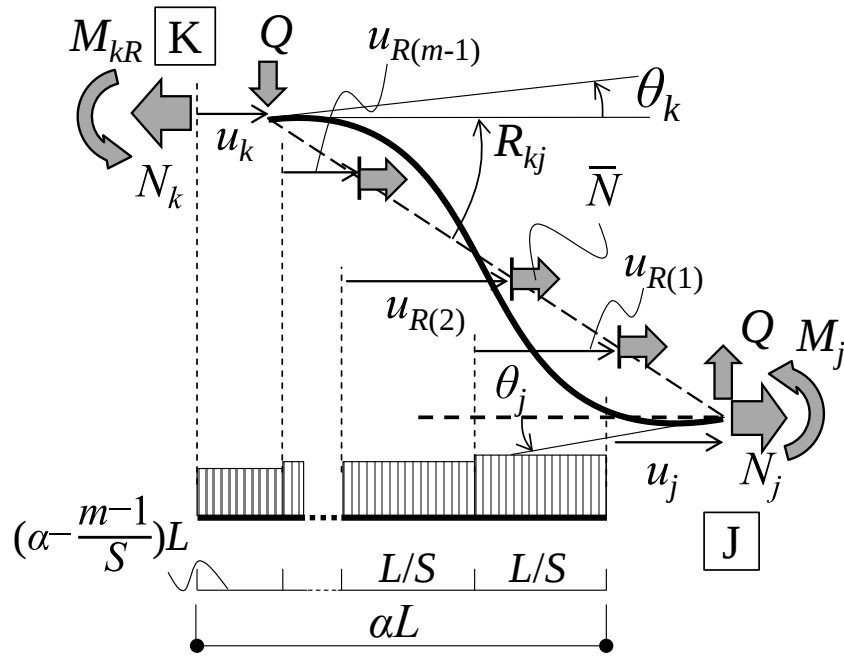


Fig.2-5 Right-hand side part of the target model

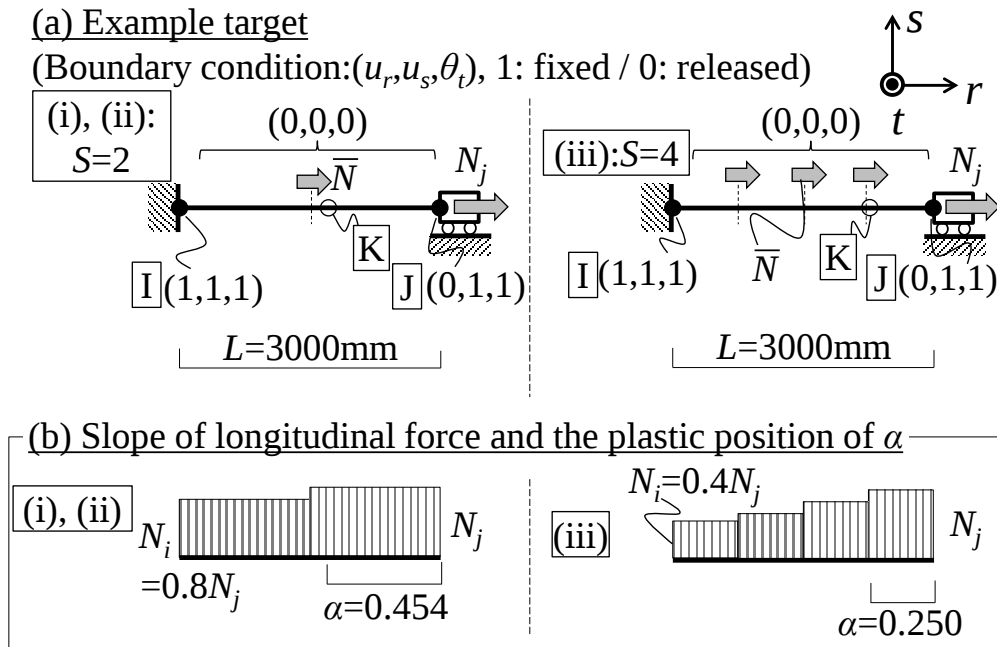
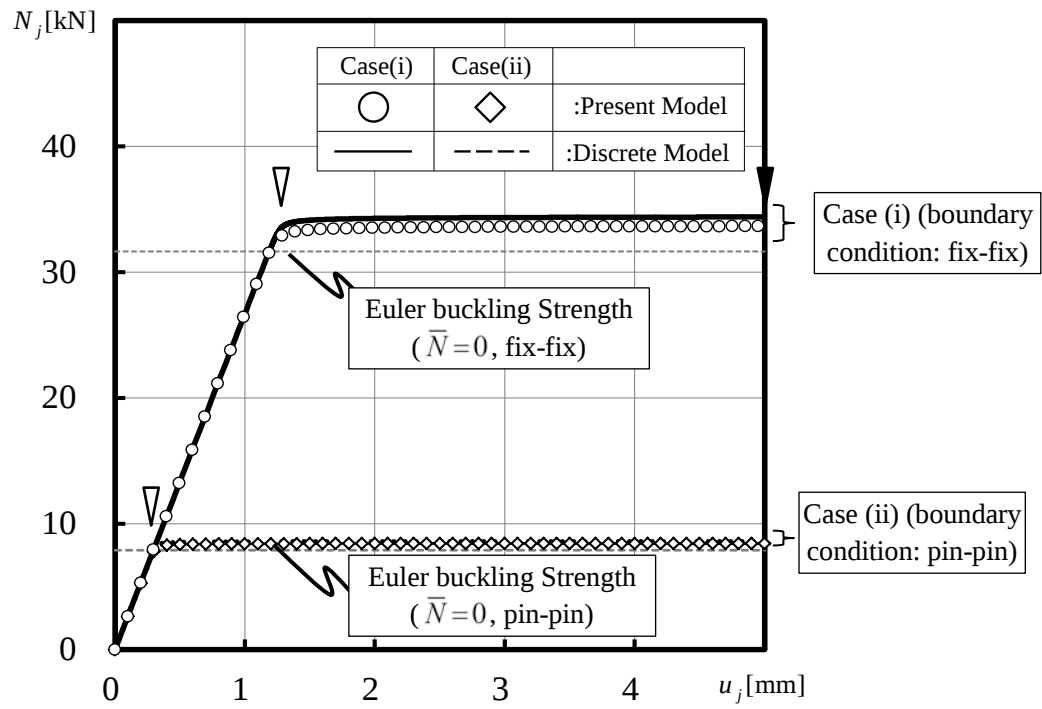


Fig.2-6 Analysis model



(a) Axial force – stretch relation

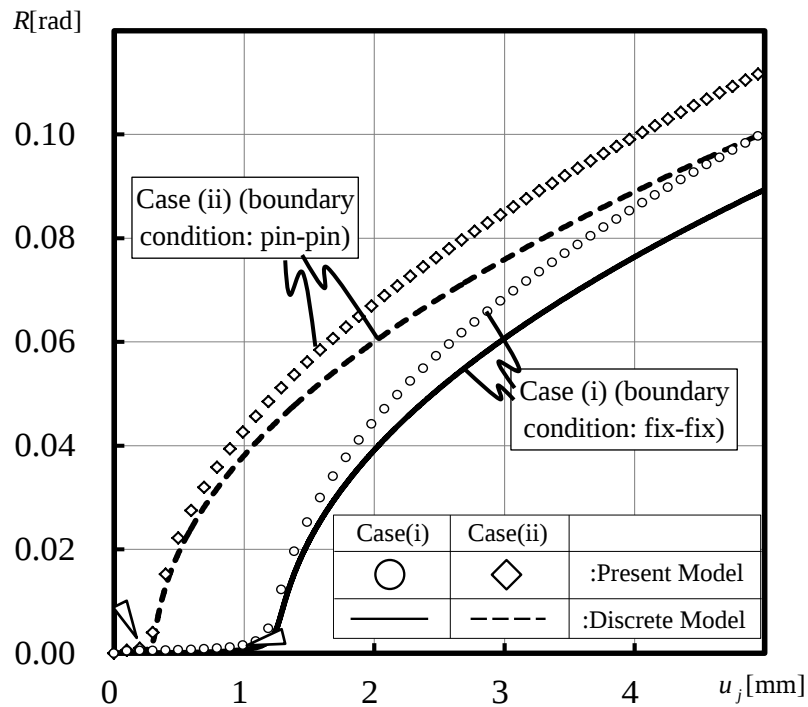
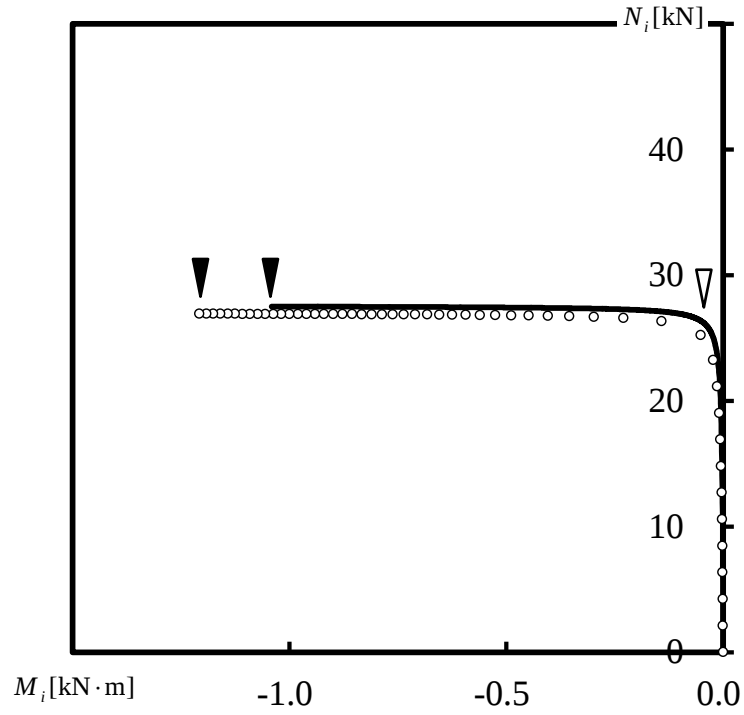
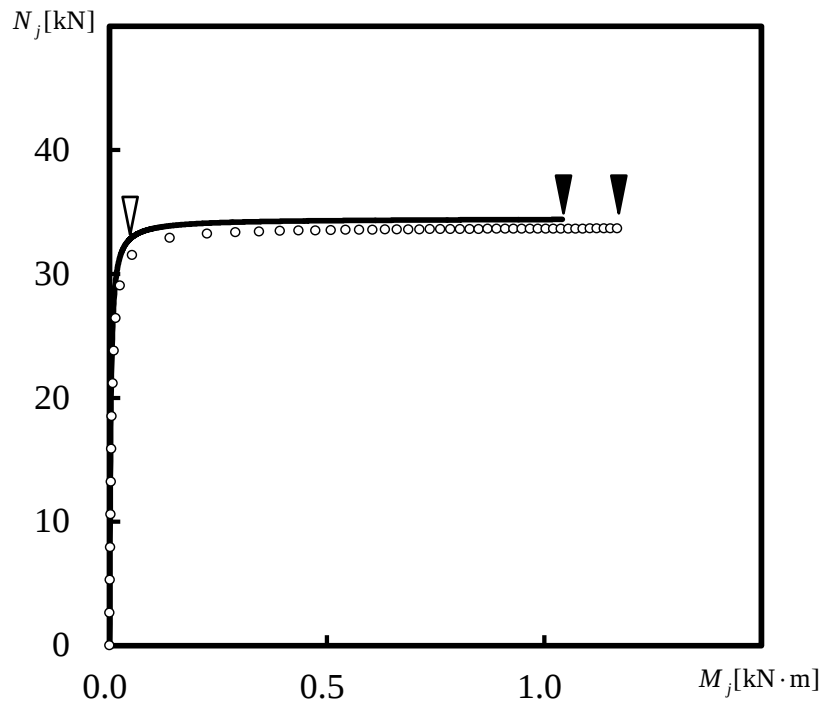

 (b) Lateral deformation(R) – stretch relation

 Fig.2-7 Numerical results (Case (i) and (ii): $N_j/N_j=0.8$, Symbol: Present model, Line: Discrete model)

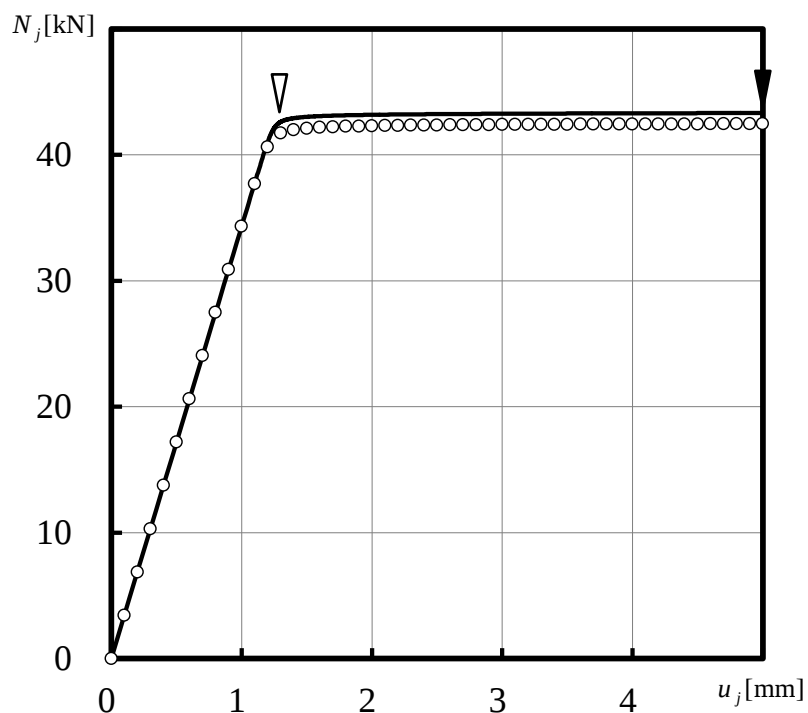


(c) Bending moment (M_i) – axial force(N_i) relation (Case(i))



(d) Bending moment (M_j) – axial force(N_j) relation(Case (i))

Fig.2-7 Numerical results (Case (i) and (ii): $N_i/N_j=0.8$, Symbol: Present model, Line: Discrete model)



(a) Axial force – stretch relation

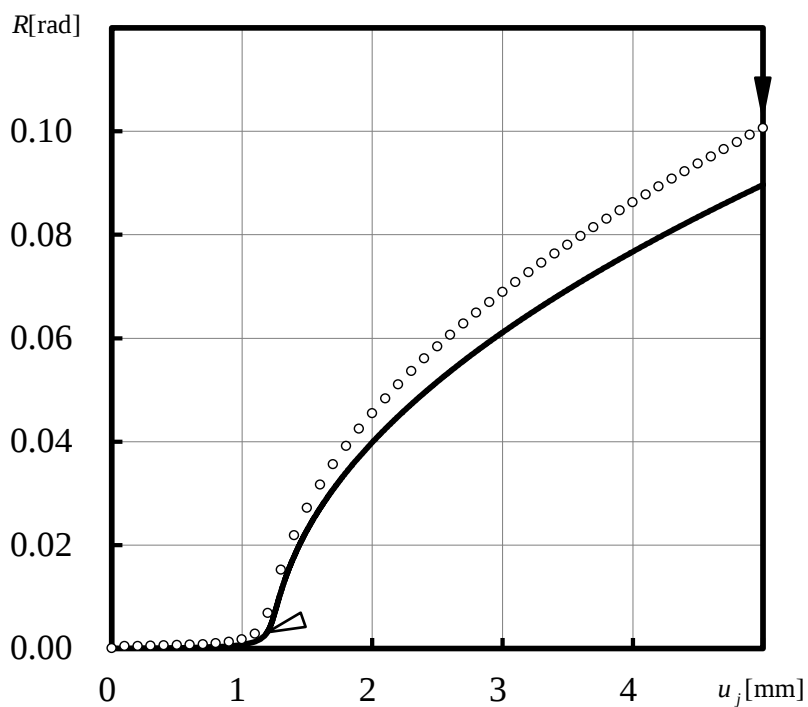
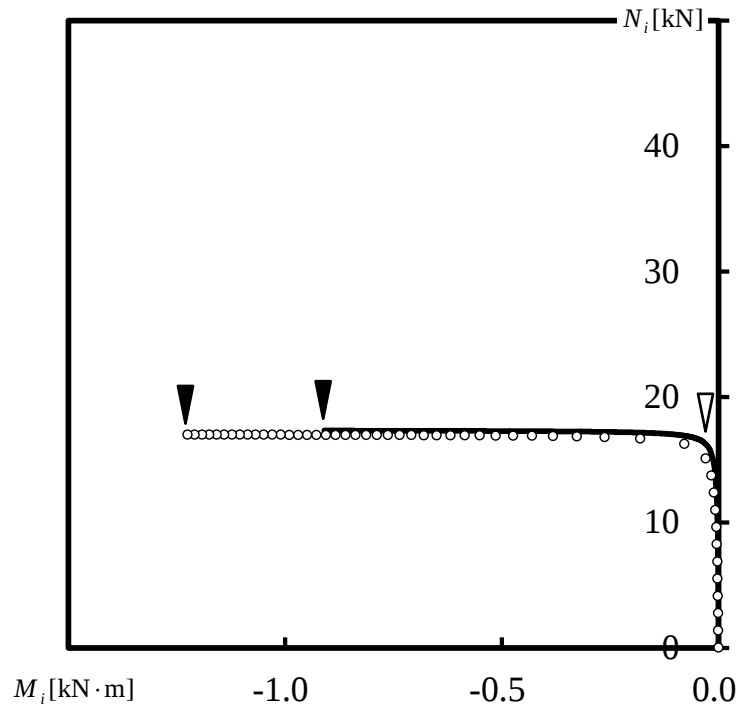
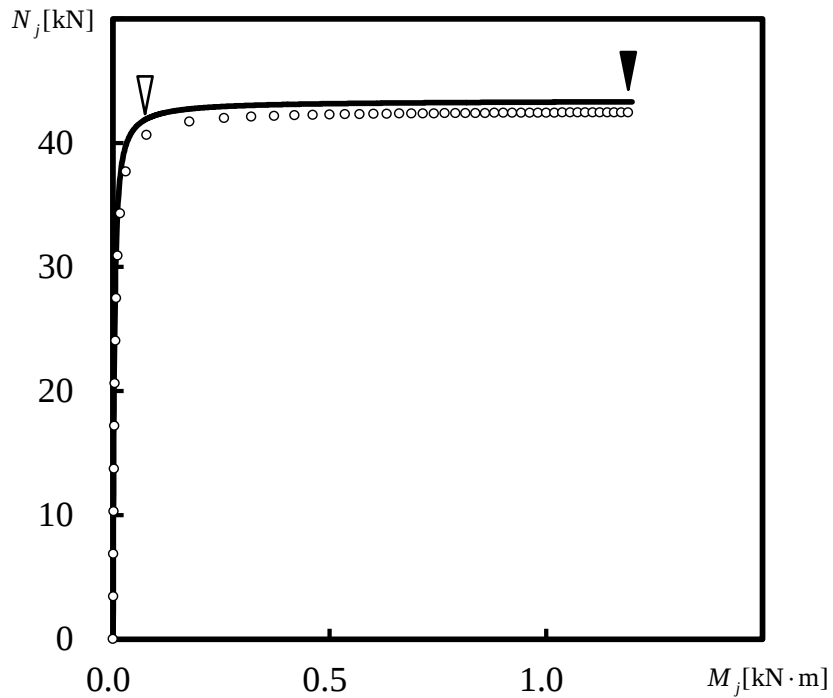

 (b) Lateral deformation(R) – stretch relation

 Fig.2-8 Numerical results (Case (iii)): $N_i/N_j=0.4$, Symbol: Present model, Line: Discrete model)



(c) Bending moment(M_i) – axial force(N_i) relation



(d) Bending moment(M_j) – axial force(N_j) relation

Fig.2-8 Numerical results (Case (iii): $N_i/N_j=0.4$, Symbol: Present model, Line: Discrete model)

第3章 弦材の弾塑性座屈後挙動解析法

- 3. 1 はじめに
- 3. 2 弦材の基本式の弾塑性座屈への拡張
 - 3. 2. 1 対象とする弦材
 - 3. 2. 2 左側モデルの基本式
 - 3. 2. 3 右側モデルの基本式
 - 3. 2. 4 弦材モデルの基本式
 - 3. 2. 5 塑性流れ則
- 3. 3 数値解析
 - 3. 3. 1 弾塑性接線剛性
 - 3. 3. 2 数値解析手順
 - 3. 3. 3 数値解析例による妥当性検証 -1 単一部材による検証-
 - 3. 3. 4 数値解析例による妥当性検証 -2 複数部材による検証-
- 3. 4 まとめ

3. 1 はじめに

本章においても第2章と同様に、Fig.2-2 に示した弦材のみを抽出して論ずる。

本論文第2章では、材端の接合条件を任意に設定できる弦材の弾性座屈後挙動を単一で詳細に再現する方法を提案した。しかしながら、実際の弦材は細長比の小さい部材が多いこともあり、弦材断面の塑性化に伴って座屈が進行する例が多く考えられる。そこで本章では、第2章の手法を、塑性ヒンジ法により断面の弾塑性状態が生じる手法へと拡張する。なお、ピン接合の条件下で弾塑性座屈が生じる弦材の手法は、元結・緒方⁵⁸⁾が提案している。したがって、本章の手法は元結・緒方の手法を包括するものとなる。

Fig.2-2 に示した弦材は、最も軸力の大きい区間において点 K、J が塑性化した後、弦材の最左端にさらに1つ、計3箇所では塑性化が生じたときに崩壊機構を形成する。このことを踏まえ、塑性ヒンジとして想定しうる位置は最大3箇所とする。ただし、塑性ヒンジが全て同じタイミングで生じるわけではないことに注意する。

本章の流れは以下の通りである。

- ・上記の考察より、弦材に最大3箇所では生じる塑性変形を定義し、座屈後の塑性変形を考慮した基本式の導出を、第2章から拡張する形で定義する。
- ・断面の塑性化の発生を考慮するための塑性流れ則を導出する。既往の研究においては矩形断面のみを対象として定式化していたが、本研究において考慮する断面はトラス梁として一般的に用いられる中空円断面やH形断面を想定し、構面外回転方向に対して対称な断面とし、より汎用的な定式化とする。
- ・弦材の塑性化による座屈の進展を考慮し、数値計算に用いる際の接線剛性の算出方法および数値計算手順を示す。
- ・最後に、幾つかの数値解析例に対する離散化手法による数値解との比較により、弦材の様々な設計変数および接合条件に対する提案手法の妥当性を検証する。

3. 2 弦材の基本式の弾塑性座屈への拡張

3. 2. 1 対象とする弦材

第2章の Fig.2-2 で示した弦材 IJ が材端点 I、J で回転拘束を受けると、塑性ヒンジ法においては、塑性ヒンジが点 I、J に加え、点 J から αL の点 K で生じた場合に崩壊機構を形成する。このことを踏まえ、この部材に軸力 N 、部材の中間位置において等間隔に $(S-1)$ 個の中間軸方向力 $\bar{N}$ 、そして点 I、J に曲げモーメント M_i および M_j が生じ、平衡状態に達した場合を考える。対象とする弦材の材端力および変位に関する変数は Fig.2-2 と同等である。ここでは、第2章における Fig.2-3 の弾性回転および座屈による回転に加え、Fig.3-1 に本研究における塑性変位および塑性回転変位を新たに定義する。材端の点 I、J は軸方向変位および回転変位の各 2 変数とする。中間塑性ヒンジ点 K においては、基本式の定式化の際に左右で分割したのち、点 K の右側と左側でそれぞれ定義するため、計 4 変数となり、定義した塑性変位は四角で囲われた 8 個である。文献 58 の手法では、塑性変形及び塑性回転変形に対する成分は、最終的に各 1 つとなっているが、本論文においては 3 つの想定される塑性ヒンジ点に対応するため、変数が増加している。

次に、第2章と同様に、弦材モデルについて点 K を境に左右に分けて定式化をおこなう。

3. 2. 2 左側モデルの基本式

Fig.2-4 に示した左側モデルに対して、点 I に (N_i, M_i) 、点 K に (N_k, M_{kL}) の材端力、 $(S-m)$ 個の $\bar{N}$ が IK の直線上に生じる時、左側端部の塑性変位を考慮した Helmholtz 自由エネルギーおよび Clausius-Duhem 不等式は次式によって表現される。

Helmholtz 自由エネルギー

$$\begin{aligned} \Psi_L = & \frac{1}{2} \frac{SEa_c}{L} \left(u_{L(1)} - u_i - u_i^p + \frac{LR_{ik}^2}{2S} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{SEa_c}{L} \sum_{i=2}^{S-m} \left\{ u_{L(i)} - u_{L(i-1)} + \frac{LR_{ik}^2}{2S} \right\}^2 \\ & + \frac{1}{2} \frac{SEa_c}{(m-S\alpha)L} \left\{ u_k - u_{L(S-m)} - u_{kL}^p + \frac{LR_{ik}^2}{2} \left(\frac{m}{S} - \alpha \right) \right\}^2 + \frac{1}{2} \theta_L^{eT} \mathbf{k}_{ML} \theta_L^e \end{aligned} \quad (3.1)$$

Clausius-Duhem 不等式

$$-\dot{\Psi}_L - N_i \dot{u}_i + \bar{N} \sum_{s=1}^{S-m} \dot{u}_{L(s)} + N_k \dot{u}_k + \mathbf{M}_L \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_L + Q(1-\alpha)L\dot{R}_{ik} \geq 0 \quad (3.2)$$

ここに、本章では塑性散逸を考慮するため、式(3.2)は不等号となっている。式(3.2)に式(3.1)の変化率を代入し、全ての変位成分の変化率に対して式(3.2)が成立する条件から、次式が得られる。

$$\frac{N_k L}{SEA} = \frac{1}{m-S\alpha} \left\{ u_k - u_{L(S-m)} - u_{kL}^p + \frac{LR_{ik}^2}{2} \left(\frac{m}{S} - \alpha \right) \right\}, \quad (3.3a)$$

$$\frac{\bar{N}L}{SEA} = u_{L(S-m)} - u_{L(S-m-1)} - \frac{1}{m-S\alpha} (u_k - u_{L(S-m)}), \quad \frac{\bar{N}L}{SEA} = -u_{L(t+2)} + 2u_{L(t+1)} - u_{L(t)}; (t=1,2,\dots,S-m-2), \quad (3.3b,c)$$

$$\frac{\bar{N}L}{SEA} = -u_{L(2)} + 2u_{L(1)} - u_i - u_i^p, \quad \frac{N_i L}{SEA} = u_{L(1)} - u_i - u_i^p + \frac{LR_{ik}^2}{2S}, \quad (3.3d,e)$$

$$\mathbf{M}_L = \mathbf{k}_{ML} \theta_L^e \quad (3.3f)$$

$$-\left\{ N_k + \frac{(S-m)(S-m+1)}{2S(1-\alpha)} \bar{N} \right\} (1-\alpha)LR_{ik} + M_i + M_{kL} + Q(1-\alpha)L = 0 \quad (3.3g)$$

$$\frac{SEA}{L} \left\{ u_{L(1)} - u_i - u_i^p + \frac{LR_{ik}^2}{2S} \right\} \dot{u}_i^p + \frac{SEA}{(m-S\alpha)L} \left\{ u_k - u_{L(S-m)} - u_{kL}^p + \frac{LR_{ik}^2}{2} \left(\frac{m}{S} - \alpha \right) \right\} \dot{u}_{kL}^p + (\mathbf{k}_{ML} \theta_L^e)^T \dot{\boldsymbol{\theta}}_L^e \geq 0 \quad (3.3h)$$

さらに整理すると、次の諸関係が得られる。

点 K における軸力・中間軸方向力と軸方向変位の関係：

$$N_k = \frac{Ea_c}{(1-\alpha)L} \left\{ u_k - u_{kL}^p + \frac{(1-\alpha)LR_{ik}^2}{2} \right\} - \frac{(S-m)(S-m+1)}{2S(1-\alpha)} \bar{N} \quad (3.4a)$$

曲げモーメント弾性構成則：式(3.3f)

点 K から左側におけるモーメントの釣り合い関係：式(3.3g)

$$\text{点 K から左側における塑性散逸項： } N_i \dot{u}_i^p + N_k \dot{u}_{kL}^p + \mathbf{M}_L^T \dot{\boldsymbol{\theta}}_L^p \geq 0 \quad (3.4b)$$

これらが左側モデルにおける基本式である。ここに、

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_L &= \{M_i \quad M_{kL}\}^T, \boldsymbol{\theta}_L^e = \{\theta_i^e \quad \theta_{kL}^e\}^T = \boldsymbol{\theta}_L - \boldsymbol{\theta}_L^p - \{1\}R_{ik}, \boldsymbol{\theta}_L^p = \{\theta_i^p \quad \theta_{kL}^p\}^T, \boldsymbol{\theta}_L = \{\theta_i \quad \theta_k\}^T, \\ \mathbf{k}_{ML} &= \frac{EI}{(1-\alpha)L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5a-e)$$

であり、 $\mathbf{M}_L$ は左側材端曲げモーメントを、 M_{kL} は左側モデルにおける点 K の曲げモーメントを、 $u_{L(s)}$ ($s=1, \dots, S-m$) は各中間軸方向力作用位置における水平変位を、 $\boldsymbol{\theta}_L$ は左側モデルの回転に関する変形角を、 $\boldsymbol{\theta}_L^p$ は同塑性変形角を、 $\mathbf{k}_{ML}$ は左側モデルの回転剛性マトリクスをそれぞれ示す。 $\mathbf{k}_{ML}$ は第2章と同様に座屈たわみ角法により導出されるが、細長比が小さく、弾性座屈より断面の塑性化が損傷耐力を決定する場合は、軸力の影響を考慮しない剛性、すなわちたわみ角法の剛性に近似することができる⁵⁸⁾。

3. 2. 3 右側モデルの基本式

Fig.2-5 に示した右側モデルについて、点 K に (N_k, M_{kR}) 、点 J に (N_j, M_j) 、中間に $(m-1)$ 個の $\bar{N}$ が生じた時、右側モデル材端の塑性変位を考慮した基本式は 3.2.2 項と同様に得られる。

Helmholtz 自由エネルギー

$$\begin{aligned} \Psi_R = & \frac{1}{2} \frac{SEa_c}{L} \left(u_j - u_j^p - u_{R(1)} + \frac{LR_{kj}^2}{2S} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{SEa_c}{L} \sum_{t=1}^{m-2} \left(u_{R(t)} - u_{R(t+1)} + \frac{LR_{kj}^2}{2S} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} \frac{SEa_c}{(S\alpha - m + 1)L} \left\{ u_{R(m-1)} - u_k - u_{kR}^p + \frac{LR_{kj}^2}{2} \left(\alpha - \frac{m-1}{S} \right) \right\}^2 + \frac{1}{2} \theta_R^{eT} \mathbf{k}_{MR} \theta_R^e \end{aligned} \quad (3.6)$$

Clausius-Duhem 不等式

$$-\dot{\Psi}_R + N_j \dot{u}_j + \bar{N} \sum_{t=1}^{m-1} \dot{u}_{R(t)} - N_k \dot{u}_k + \mathbf{M}_R \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_R + Q\alpha L \dot{R}_{kj} \geq 0 \quad (3.7)$$

式(3.7)第1項に式(3.6)の変化率を代入し、全ての変位成分の変化率に対して式(3.7)が成立する条件から、次式が得られる。

$$\frac{N_j L}{SEa_c} = u_j - u_{R(1)} - u_j^p + \frac{LR_{kj}^2}{2S}, \quad (3.8a)$$

$$\frac{\bar{N} L}{SEa_c} = -u_j + u_j^p + 2u_{R(1)} - u_{R(2)}, \quad \frac{\bar{N} L}{SEa_c} = -u_{R(t)} + 2u_{R(t+1)} - u_{R(t+2)} \quad (t=1, 2, \dots, m-3), \quad (3.8b,c)$$

$$\frac{\bar{N} L}{SEa_c} = -u_{R(m-2)} + u_{R(m-1)} + \frac{1}{S\alpha - m + 1} (u_{R(m-1)} - u_k - u_{kR}^p), \quad (3.8d)$$

$$\frac{N_k L}{SEa_c} = \frac{1}{S\alpha - m + 1} \left\{ u_{R(m-1)} - u_k - u_{kR}^p + \frac{LR_{kj}^2}{2} \left(\alpha - \frac{m-1}{S} \right) \right\} \quad (3.8e)$$

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{k}_{MR} \theta_R^e \quad (3.8f)$$

$$-\left\{ N_k - \frac{m(m-1)}{2S\alpha} \bar{N} \right\} \alpha L R_{kj} + M_{kR} + M_j - Q\alpha L = 0 \quad (3.8g)$$

$$\begin{aligned} & \frac{SEa_c}{L} \frac{1}{S\alpha - m + 1} \left\{ u_{R(m-1)} - u_k - u_{kR}^p + \frac{LR_{kj}^2}{2} \left(\alpha - \frac{m-1}{S} \right) \right\} \dot{u}_{kR}^p \\ & + \frac{SEa_c}{L} \left(u_j - u_{R(1)} - u_j^p + \frac{LR_{kj}^2}{2S} \right) \dot{u}_j^p + \mathbf{M}_R^T \dot{\boldsymbol{\theta}}_R^p \geq 0 \end{aligned} \quad (3.8h)$$

得られた式をさらに整理すると、以下の4つの式が得られる。

点 K における軸力、中間軸方向力と軸方向変位の関係：

$$N_k = \frac{Ea_c}{\alpha L} \left(u_j - u_j^p + \frac{\alpha L R_{kj}^2}{2} \right) + \frac{(m-1)m}{2S\alpha} \bar{N} \quad (3.9a)$$

曲げモーメント弾性構成則：式(3.8f)

点 K から右側におけるモーメントの釣り合い関係：式(3.8g)

$$\text{点 K から左側における塑性散逸項： } N_k \dot{u}_{kR}^p + N_j \dot{u}_j^p + \mathbf{M}_R^T \dot{\boldsymbol{\theta}}_R^p \geq 0 \quad (3.9b)$$

これらが右側モデルにおける基本式である。ここに、

$$\mathbf{M}_R = \{M_{kR} \quad M_j\}^T, \boldsymbol{\theta}_R^e = \{\theta_{kR}^e \quad \theta_j^e\}^T = \boldsymbol{\theta}_R - \boldsymbol{\theta}_R^p - \{1\} R_{kj}, \boldsymbol{\theta}_R^p = \{\theta_{kR}^p \quad \theta_j^p\}^T, \boldsymbol{\theta}_R = \{\theta_k \quad \theta_j\}^T, \mathbf{k}_{MR} = \frac{EI}{\alpha L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.10a-e)$$

であり、 $\mathbf{M}_R$ は右側材端曲げモーメントを、 M_{kR} は右側モデルにおける点 K の曲げモーメントを示し、 $u_{R(t)} (t=1, \dots, m-1)$ は各中間軸方向力作用位置における水平変位を、 $\boldsymbol{\theta}_R$ は右側モデルの回転に関する変形角を、 $\boldsymbol{\theta}_R^e$ は $\boldsymbol{\theta}_R$ の弾性成分を、 $\boldsymbol{\theta}_R^p$ は塑性成分を、 $\mathbf{k}_{MR}$ は右側モデルの回転剛性マトリクスを、それぞれ示す。

3. 2. 4 弦材モデルの基本式

3.2.2 項および 3.2.3 項で得られた左右の基本式の釣り合いを考える。まず、式(3.3g)または式(3.8g)に式(2.3)を代入することにより式(2.13)、式(2.14a,b)と同様の関係が得られる。次に、式(3.3f)および式(3.8f)と点 K における節点方程式 $M_{kL} + M_{kR} = 0$ を用いて、次式が得られる。

$$\theta_k = (1-2\alpha)\left\{-R - (\theta_{kL}^p - \theta_{kR}^p)\right\} - \frac{1}{2}(1-\alpha)\theta_j^e - \frac{1}{2}\alpha\theta_i^e \quad (3.11)$$

以上の関係と前項までの左右両側モデルに対する基本式より、弦材モデルの基本式が得られる。

$$N = \frac{Ea_c}{L} \left[u - (u_L^p + u_R^p) + CR^2 \right] \quad (3.12a)$$

$$\bar{N} = k_{\bar{N}} \left[\bar{u} - \{\alpha u_L^p - (1-\alpha)u_R^p\} + (2\alpha-1)CR^2 \right] \quad (3.12b)$$

$$\mathbf{M} = \{M_i \quad M_k \quad M_j\}^T = \mathbf{k}_M \boldsymbol{\theta}^e \quad (3.12c)$$

$$\boldsymbol{\Xi} = -(2N + D\bar{N})CR + \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (3.12d)$$

$$\Gamma = N(\dot{u}_L^p + \dot{u}_R^p) + \frac{S-1}{2}\bar{N}(\dot{u}_L^p - \dot{u}_R^p) + \mathbf{M} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}^p \geq 0 \quad (3.12e)$$

ここに、 $u = u_j - u_i$, $\bar{u} = u_k - \{\alpha u_i + (1-\alpha)u_j\}$, $u_L^p = u_i^p + u_{kL}^p$, $u_R^p = u_{kR}^p + u_j^p$, $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_i \quad 0 \quad \theta_j\}^T$,

$$\boldsymbol{\theta}^e = \{\theta_i^p \quad \theta_k^p \quad \theta_j^p\}^T = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^p - \mathbf{a}R, \quad \boldsymbol{\theta}^p = \{\theta_i^p \quad (\theta_{kL}^p - \theta_{kR}^p) \quad \theta_j^p\}^T, \quad \mathbf{a} = \{\alpha \quad 1 \quad -(1-\alpha)\}^T,$$

$$\mathbf{k}_M = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} (4-\alpha)/(1-\alpha) & 2 & -1 \\ & 4 & -2 \\ \text{sym.} & & \{4-(1-\alpha)\}/\alpha \end{bmatrix}, \quad k_{\bar{N}} = \frac{2S}{(1-\alpha)(m-1)m + \alpha(S-m)(S-m+1)} \frac{Ea_c}{L},$$

$$C = \frac{\alpha(1-\alpha)L}{2}, \quad D = 2 \left\{ m-1 - \frac{S-1}{2} \right\} - \frac{(1-\alpha)(m-1)m}{S\alpha} + \frac{\alpha(S-m)(S-m+1)}{S(1-\alpha)} \quad (3.13a-l)$$

である。式(3.12a-c)は要素の軸力、中間軸方向力およびモーメントに関する弾性構成則を、式(3.12d)

は点 K におけるモーメントの釣り合い関係を、式(3.12e)は弦材モデルの塑性散逸項を、それぞれ示す。

ただし、 $M_{kL} = -M_{kR} = M_k$ としている。

3. 2. 5 塑性流れ則

基本式を用いて各点 I, K, J 降伏後の挙動を追跡するために、回転軸に対称な断面に対する各変位成分の塑性流れ則を求める。Fig.3-2 に示すように、各点における降伏条件式は、軸力、中間軸方向力、各点の曲げモーメントの関数として次式のように示される。

$$\Phi_{\eta}^{\pm} = \Phi_{\eta}^{\pm}(N_{\eta}, \bar{N}_{\eta}, M_{\eta}); \quad \eta = i, j, k \quad (3.14)$$

当該点における曲げモーメントおよび軸力がなす応力空間において、式(3.14)が示す曲線(M-N 曲線) が常に外側に対して凸であり、断面形状が当該部材の回転軸に対して対称であることを仮定する。最大塑性散逸の原理を導入し、目的関数を塑性散逸項、制約条件を active となった点の降伏条件式として、以下の Lagrangian を考える。

$$L = -\Gamma + \sum_{\eta} \dot{\lambda}_{\eta}^{p\pm} \Phi_{\eta}^{\pm}, \quad \{\eta = i, j, k | \eta \in \text{active}\} \quad (3.15)$$

ここに、 $\dot{\lambda}_i^{p\pm}, \dot{\lambda}_k^{p\pm}, \dot{\lambda}_j^{p\pm}$ は Lagrange 乗数であり、塑性進展パラメータと呼ばれるものである。これらは点 I、K、J において次式に示す Kuhn-Tucker 条件を常に満たす必要がある。

$$\dot{\lambda}_{\eta}^{p\pm} \geq 0, \Phi_{\eta}^{\pm} \leq 0, \Phi_{\eta}^{\pm} \cdot \dot{\lambda}_{\eta}^{p\pm} = 0 \quad (3.16a-c)$$

ここに、式(3.16c)の添え字の複号は同一のものを示す。式(3.15)を材端力の独立な成分である $N, \bar{N}, M_i, M_k, M_j$ で偏微分した各式が零であるという条件より各式を整理すると、以下の塑性流れ則を得る。

$$\dot{u}_L^p, \dot{u}_R^p = \frac{1}{2} \sum_{\eta} \left(\frac{\partial \Phi_{\eta}^{\pm}}{\partial N} \pm \frac{2}{S-1} \frac{\partial \Phi_{\eta}^{\pm}}{\partial \bar{N}} \right) \dot{\lambda}_{\eta}^{p\pm}, \quad (3.17a,b)$$

$$\dot{\theta}_i^p = \dot{\lambda}_i^{p\pm} \frac{\partial \Phi_i^{\pm}}{\partial M_i}, \dot{\theta}_k^p \equiv \dot{\theta}_{kL}^p - \dot{\theta}_{kR}^p = \dot{\lambda}_k^{p\pm} \frac{\partial \Phi_k^{\pm}}{\partial M_k}, \dot{\theta}_j^p = \dot{\lambda}_j^{p\pm} \frac{\partial \Phi_j^{\pm}}{\partial M_j} \quad (3.17c-e)$$

ここに、式(3.17a,b)右辺カッコ内第2項の複号は+が $\dot{u}_L^p$ を、-が $\dot{u}_R^p$ をそれぞれ示し、 $\Phi_{\eta}^{\pm}, \dot{\lambda}_{\eta}^{p\pm}$ の添え字 η の示す $\pm$ の意味とは異なる。式(3.17a-e)に示した塑性流れ則は、塑性散逸項が熱力学の第2法則を満たすものである。

3.3 数値解析

本節では、弦材を解析プログラムに実装する場合の弾塑性接線剛性および逐次計算の際の数値計算手順を示す。計算手順は Newton 法によって塑性および座屈の進展を収束計算する方法に基づく。また、本章を通して提案した手法(提案手法)によるいくつかの数値解析例を示すとともに、提案手法と同じ対象の弦材を細分化した数値解(離散化手法)と比較することにより、提案手法の妥当性を検証する。

3.3.1 弾塑性接線剛性

全ての降伏条件は材端変位成分 $\mathbf{u}$ 、塑性進展に関する変数 λ^p および座屈の進展を表す変数 R のみにより表現されると仮定し、active と判定された降伏関数に対して式(3.16a-c)が成り立つことから、次式が成立する。

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \dot{\lambda}^p = \mathbf{b}_1 \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{G} \dot{\lambda}^p = 0 \quad (3.18)$$

$$\therefore \dot{\lambda}^p = -\mathbf{G}^{-1} \mathbf{b}_1 \dot{\mathbf{u}} \quad (3.19)$$

一方、軸力およびモーメントの変化率は式(3.20a)となるため、式(3.19)を代入することにより式(3.20b)を得る。

$$\dot{\mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \lambda} \dot{\lambda}^p = \mathbf{K}^e \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{b}_2^T \dot{\lambda}^p \quad (3.20a)$$

$$= (\mathbf{K}^e + \mathbf{b}_2^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{b}_1) \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{K}^{ep} \dot{\mathbf{u}} \quad (3.20b)$$

以上に示した $\mathbf{K}^{ep}$ が弾塑性接線剛性である。ここに、

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \left\{ \dot{\Phi}_i^+ \quad \dot{\Phi}_i^- \quad \dot{\Phi}_k^+ \quad \dot{\Phi}_k^- \quad \dot{\Phi}_j^+ \quad \dot{\Phi}_j^- \quad \dot{\Xi} \right\}^T, \dot{\lambda}^p = \left\{ \dot{\lambda}_i^{p+} \quad \dot{\lambda}_i^{p-} \quad \dot{\lambda}_k^{p+} \quad \dot{\lambda}_k^{p-} \quad \dot{\lambda}_j^{p+} \quad \dot{\lambda}_j^{p-} \quad \dot{R} \right\}^T, \\ \mathbf{K}^e &= \begin{bmatrix} k_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{\bar{N}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{Mii} & k_{Mij} \\ 0 & 0 & k_{Mji} & k_{Mjj} \end{bmatrix}, \mathbf{b}_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}}, \mathbf{b}_2^T = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \lambda^p}, \dot{\mathbf{f}} = \left\{ \dot{N} \quad \dot{\bar{N}} \quad \dot{M}_i \quad \dot{M}_j \right\}^T, \dot{\mathbf{u}} = \left\{ \dot{u} \quad \dot{\bar{u}} \quad \dot{\theta}_i \quad \dot{\theta}_j \right\}^T \end{aligned} \quad (3.21a-g)$$

であり、 $\dot{\mathbf{f}}, \dot{\mathbf{u}}$ は材端力および変位の各変化率、 $\dot{\Phi}$ は降伏関数 $\Phi_\eta^\pm$ およびモーメントの釣合い関数 Ξ の変化率からなるベクトル、 $\dot{\lambda}^p$ は塑性化および座屈の進展を表す変数ベクトル、 $\mathbf{b}_1$ は変位ベクトルに関する微係数、 $\mathbf{b}_2$ は材端力の $\dot{\lambda}^p$ に関する微係数、 $\mathbf{K}^e$ は弾性剛性マトリクスである。さらに、 $\mathbf{G}$ は塑性

化および座屈の進展を得る際の係数マトリクスであり、**active**と判断された式(3.14)および式(3.12d)の、 $\dot{\lambda}^p$ の変数による各偏微分より得られる。ただし、各ベクトル $\dot{\Phi}, \dot{\lambda}^p$ および係数マトリクス $\mathbf{G}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ は $\dot{\Phi}$ の各成分に対して降伏判定をおこない、**active**となった成分のみにより構成される。例えば、弦材がFig.3-3に示す応力状態のとき、 $\Phi_i^+, \Phi_i^-, \Phi_k^+, \Phi_j^- < 0$ かつ $\Phi_k^- = \Phi_j^+ = 0$ となる。このとき、ベクトル $\dot{\Phi}$ の成分は Φ_k^-, Φ_j^+ および釣合い関係 Ξ のみとなり、接線剛性は、**active**となっている降伏関数 Φ_k^-, Φ_j^+ および Ξ の計3つに対応する成分(第4行/列、第5行/列および第7行/列)のみによる $\dot{\lambda}^p, \dot{\Phi}, \mathbf{G}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ を用いて計算する。また、仮に全条件式が**active**となる場合(Fig.3-4)に $\mathbf{G}$ は最大7×7のマトリクスとなるが、このような場合は全部材が軸降伏する特異な条件である。一方、通常の弾塑性座屈あるいは曲げによる塑性化が生じた状態は高々4つの条件式が**active**となる。また、弾性除荷あるいは断面の塑性化以前の状態においては、すべての降伏関数が**active**ではなく、かつ座屈が進展(もしくは後退)することが考えられる。このときは、第2章の式(2.19b)で示した接線剛性となる。

3.3.2 数値解析手順

次に、中空円断面を対象に Newton 法による数値計算手順を提示する。時刻 t における各変位と塑性変位、時刻 $t+\Delta t$ における全変位成分と中間軸方向力比 $(\bar{N}/N)$ が既知であるとする。

$${}_{(p=1)}^{trial}\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}, {}_{(p=1)}^{trial}\mathbf{u}^p = {}^t\mathbf{u}^p, {}_{(p=1)}^{trial}\mathbf{R} = {}^t\mathbf{R}, {}_{(p=1)}^{trial}\dot{\lambda}_{\eta}^{p\pm} = {}^t\dot{\lambda}_{\eta}^{p\pm} \quad (3.22a-d)$$

ここに、左上添字は時刻 $(t, t + \Delta t)$ もしくは収斂計算上の試行値 ($trial$) を、左下添字 ($p=1$) は収斂回数 $p=1$ 回目であることを示す。

<弾性試行過程>

試行材端力をこの段階で計算する。

$${}_{(p)}^{trial}N = k_N \left[{}_{(p)}^{trial}u - \left({}_{(p)}^{trial}u_L^p + {}_{(p)}^{trial}u_R^p \right) + C_{(p)}^{trial}R^2 \right] \quad (3.23a)$$

$${}_{(p)}^{trial}\bar{N} = k_{\bar{N}} \left[{}_{(p)}^{trial}\bar{u} - \left\{ \alpha {}_{(p)}^{trial}u_L^p - (1-\alpha) {}_{(p)}^{trial}u_R^p \right\} + (2\alpha-1) C_{(p)}^{trial}R^2 \right] \quad (3.23b)$$

$${}_{(p)}^{trial}\mathbf{M} = \mathbf{k}_M {}_{(p)}^{trial}\boldsymbol{\theta}^e \quad (3.23c)$$

<塑性化および座屈判定>

中空円断面の降伏関数は次に示すとおりである。

$${}_{(p)}^{trial}\boldsymbol{\Phi}_{\eta}^{\pm} \left({}_{(p)}^{trial}N, {}_{(p)}^{trial}\bar{N}, {}_{(p)}^{trial}M_{\eta} \right) = -\cos(\xi {}_{(p)}^{trial}N_{\eta}) \pm {}_{(p)}^{trial}M_{\eta} / M_p \quad (\text{複号同順、} \eta = i, j, k) \quad (3.24a)$$

$${}_{(p)}^{trial}\Xi = - \left(2 {}_{(p)}^{trial}N + D {}_{(p)}^{trial}\bar{N} \right) C_{(p)}^{trial}R + {}_{(p)}^{trial}\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{a} \quad (3.24b)$$

ここに、 $\xi = \pi/2N_y$ 、 N_y および M_p はそれぞれ、弦材の軸力およびモーメントに関する全塑性耐力を示す。

ここで、式(3.24a)において、同じ η に対する 2 つの式の交点 $(N_{\eta}, M_{\eta}) = (\pm N_y, 0)$ のみは特異点となる。

そこで提案手法においては、Multi-surface に対する Koiter の考え方^{71),72)}に従い、以下を計算する。式(3.24a)の降伏条件は弦材 1 要素に対して 6 個の式があり、これと式(3.24b)の計 7 個の式に対して以下の判定をおこなう。

$${}_{(p)}^{trial}\boldsymbol{\Phi}_{\eta} \left({}_{(p)}^{trial}N, {}_{(p)}^{trial}\bar{N}, {}_{(p)}^{trial}M_{\eta} \right) < tolerance, \quad \left| {}_{(p)}^{trial}\Xi \right| < tolerance \quad (3.25a,b)$$

以上の判定のうち 1 個以上が満たされなかった場合、その判定式を **active** とし、以下の塑性/座屈進展過程に進む。

<塑性/座屈進展過程>

式(3.24a,b)のいずれかの降伏条件およびモーメントの釣合い条件が **active** となったので、該当する条件に対応する塑性化もしくは座屈の変数を計算することにより、塑性変位、座屈変位を修正する。提案手法の塑性および座屈の進展に関する変数は、以下の連立方程式を解くことにより得る。

$$\Delta \Phi = \mathbf{G} \Delta \lambda \quad (3.26)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \left\{ \begin{matrix} {}^{trial}_{(p)}\Phi_i^+ & {}^{trial}_{(p)}\Phi_i^- & {}^{trial}_{(p)}\Phi_k^+ & {}^{trial}_{(p)}\Phi_k^- & {}^{trial}_{(p)}\Phi_j^+ & {}^{trial}_{(p)}\Phi_j^- & {}^{trial}_{(p)}\Xi \end{matrix} \right\}^T, \\ \Delta \lambda &= \left\{ \delta \Delta \lambda_i^{p+}, \delta \Delta \lambda_i^{p-}, \delta \Delta \lambda_k^{p+}, \delta \Delta \lambda_k^{p-}, \delta \Delta \lambda_j^{p+}, \delta \Delta \lambda_j^{p-}, \delta \Delta R \right\}^T, \end{aligned} \quad (3.27a,b)$$

およびそれらの微係数成分マトリクス $\mathbf{G}$ の全成分の中で、降伏関数が **active** となった成分のみにより構成されるベクトルおよびマトリクスである。塑性変位増分は以下の式によって更新される。

$$\begin{aligned} \delta \Delta u_L^p &= \xi \left(\delta \Delta \lambda_i^{p+} + \delta \Delta \lambda_i^{p-} \right) \sin(\xi N_i), \quad \delta \Delta u_R^p = \xi \left[\left(\delta \Delta \lambda_k^{p+} + \delta \Delta \lambda_k^{p-} \right) \sin(\xi N_k) + \left(\delta \Delta \lambda_j^{p+} + \delta \Delta \lambda_j^{p-} \right) \sin(\xi N_j) \right], \\ \delta \Delta \theta_\eta^p &= \frac{\delta \Delta \lambda_\eta^{p+} - \delta \Delta \lambda_\eta^{p-}}{M_p}, \quad {}^{trial}_{(p+1)}\Delta \lambda_\eta^{p\pm} = {}^{trial}_{(p)}\Delta \lambda_\eta^{p\pm} + \delta \Delta \lambda_\eta^{p\pm} \quad (\eta = i, j, k) \end{aligned} \quad (3.28a-d)$$

これらをもとに塑性変位成分および部材角を更新する。

$$\begin{aligned} {}^{trial}_{(p+1)}u_L^p &= {}^{trial}_{(p)}u_L^p + \delta \Delta u_L^p, \quad {}^{trial}_{(p+1)}u_R^p = {}^{trial}_{(p)}u_R^p + \delta \Delta u_R^p, \quad {}^{trial}_{(p+1)}R = {}^{trial}_{(p)}R + \delta \Delta R, \quad {}^{trial}_{(p+1)}\theta_\eta^p = {}^{trial}_{(p)}\theta_\eta^p + \delta \Delta \theta_\eta^p \quad (\eta = i, j, k) \end{aligned} \quad (3.29a-d)$$

式(3.29a-d)を各材端力成分の式(3.23a-c)に代入し、塑性化および座屈の進展により修正された材端力を算出する。

<修正値の収束判定>

全判定式が収斂するまで、式(3.25a,b)による収束の判定および塑性進展過程をおこなう。収束が完了した場合、当該部材の計算を終了してここまでの計算の試行値を真値とし、式(3.20b)から接線剛性を算出し、次の時刻へ進む。

3.3.3 数値解析例による妥当性検証 -1 単一部材による検証-

ここでは、トラス梁弦材に想定されうる様々なパラメータに対する提案手法の妥当性を検証するために、単一の弦材を対象に数値解析をおこなう。

3.3.3.1 解析対象および解析条件

解析対象を Fig.3-5(a,b)に示す。両材端は回転拘束とする。材端の軸力に加え中間軸方向力が作用する弦材とし、基本となる対象(i)に加え、(i)から(ii)細長比、(iii)軸力分布、(iv)中間軸方向力数を変えた4種類について検証する。中間軸方向力数は(i)~(iii)を1つ($S=2, m=1$)、(iv)は3つ($S=4, m=1$)とし、Fig.3-5(c,d)に示す軸力分布を保持した载荷をおこなう。すべて部材断面は中空円断面とし、材端回転拘束時の弦材に対して細長比40($D=108.7\text{mm}, d=103.4\text{mm}$)もしくは80($D=57.62\text{mm}, d=47.14\text{mm}$)とする。材料特性はヤング係数 205000N/mm^2 、降伏応力度 235N/mm^2 による完全弾塑性体とするが、離散化手法に関しては微小な2次勾配を入力している。また、 N と $\bar{N}$ は比例载荷とし、軸伸縮量 u を $\pm 3u_y$ の振幅で増減させることによりおこなう。载荷履歴を Fig.3-6 に示す。ここに、 u_y は N_j が軸力の降伏耐力 N_y に達した時の軸伸縮量である。提案手法においては、内部変位成分 u_k に対して式(3-12a,b)から得られる以下の関係を用いて縮約する。

$$u_k = (\alpha - B)(u_i + u_L^p) + \{(1 - \alpha) + B\}(u_j - u_R^p) + \{B - (2\alpha - 1)\}CR^2 \quad (3.30)$$

ここに、 $B = (k_N/k_{\bar{N}}) \cdot (\bar{N}/N)$ である。塑性ヒンジ位置 α は Appendix 3 に示されるように、点 K が塑性化する場合に塑性散逸量が最大となる位置から求める。提案手法の数値計算手順については大塚ら⁵⁶⁾による定式化 I を準用し、 $(\bar{N}/N)$ 一定下で材端の点 J に強制変位を与える。ただし、本項においては中空円断面を仮定したため、次式に示す I、K、J の3箇所の塑性ヒンジに対して、計6個の式の降伏判定をおこなうとしている。

$$\Phi_\eta^\pm(N, \bar{N}, M_\eta) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{N_\eta}{N_y}\right) \pm \frac{M_\eta}{M_p} \leq 0 \quad (\eta = i, j, k, \text{複号同順}) \quad (3.31)$$

ここに、 M_p は弦材の全塑性モーメントである。中空円断面の塑性流れ則の具体的な定式化に関しては Appendix 2 に示す。なお、数値計算の際に Φ_η^+, Φ_η^- の両方が active と判断された場合、いずれか一方の active 条件を解除することにより、特異点における問題を回避している。

離散化手法の解析モデルは、部材の任意の位置における断面の降伏および座屈による横変形を考慮するため、細かく分割された Bernoulli の梁理論に基づく梁要素により構成される。(i)~(iii)については

IJ 間を 100 等分、(iv)は 200 等分する。Fig.3-7 に示すように、分割された各要素軸方向 2 点の位置について Gauss 積分をおこなう。また、断面周方向に 20 の Newton-Cotes 積分点を設ける。さらに、線形座屈固有値解析により得られる 1 次モードの最大振幅が $L/20000$ となる横たわみを与えた上で数値計算をおこなう。

3.3.3.2 各モデルの解析結果の考察

Fig.3-8~3-11 に解析結果を示す。いずれの図においても、シンボル(○△□)が提案手法、線が離散化手法による結果であり、繰返し载荷による結果の進展度合い(cycle 1~3)によって記号および線種を変えて示している。矢印①~④は 1 回目の繰返し载荷履歴において、各図の材端力成分が推移する方向を示している。各図の(a)は弦材の点 J の軸力と軸伸縮量($N_f/N_y-u/u_y$)関係、(b)は点 I のモーメント-軸力相関($M_f/M_p-N_f/N_y$)関係、(c)は点 I のモーメント-軸力相関($M_f/M_p-N_f/N_y$)関係をそれぞれ示し、細実線は降伏条件式 $\Phi_\eta(N, \bar{N}, M_\eta) = 0$ である。部材は図(c)中▼A において断面 J および K を含む軸力区間が全塑性状態に達することで耐力が最大値に達しており、軸力が低下すると同時に部材の曲げモーメントが増加する。その後、断面 I の全断面が塑性化する(図(b)中▽B)ことによって終局状態となる。各図(a)より、座屈の発生および発生後の $N_f/N_y-u/u_y$ 関係をよく捉えており、繰返し 2 回目以降の最大荷重時(▼)および断面 I、K、J の全塑性状態到達時(▽)に対しても適切に評価されている。 $N_f/N_y-u/u_y$ 関係の引張負荷段階において見られる差異(各図中の C)は、離散化手法が梁断面の部分的な降伏の進展を考慮する手法であるのに対し、提案手法が塑性ヒンジ法に基づくため、断面の部分的降伏を考慮しないことにより生じるものである。部分的降伏による差異が最も顕著に表れる(iii)の結果において、特に Fig.3-10(b)の D の位置で差異が生じていることから、全塑性状態となっていない断面 I の曲げモーメントが過大に評価されているが、 $N_f/N_y-u/u_y$ 関係はよく一致していることが分かる。また Fig.3-10(b)に、(iii)の単調载荷による $M_f/M_p-N_f/N_y$ 関係を示している。 $N_f/N_y-u/u_y$ 関係、 $M_f/M_p-N_f/N_y$ 関係に関しては繰返し载荷と同様に整合する結果を得たので、ここでは割愛する。断面 I の塑性化の進展とともに差異は減少し、終局状態(▽B')は両者の結果が一致していることから、提案手法は終局状態の崩壊機構を精度よく再現する手法であるといえる。

以上より、いずれの例題においても提案手法および離散化手法の解析結果がよく一致しているため、提案手法が種々のパラメータに対して、弦材の弾塑性座屈後挙動を追跡可能であるといえる。

3.3.4 数値解析例による妥当性検証 -2 複数部材による検証-

3.3.3項において、材端の回転に関する境界条件を拘束した弦材に対して、細長比や $\bar{N}$ の条件を変更した場合においても提案手法が妥当な解を得られることを確認した。本項では、構面外に強制回転が加わるような弦材の境界条件における妥当性を検証するために、Fig.3-12に示すように2つの弦材により構成される弦材の連梁を対象に、3.3.3項と同等に提案手法および詳細モデルの比較をおこなう。

3.3.4.1 解析対象

解析対象はFig.3-12に示す2つの上弦材(Member-1,2)から成る構造である。両弦材の接合部(Node151)で互いに剛接合され、他端(Node1、Node301)は回転拘束される。中間軸方向力数は各部材2つ($S=3$)とし、Fig.3-12に示す軸力分布を保持した単調載荷をおこなう。部材断面は3.3.3項の(i)と同様とする。したがって、各弦材の部材長に対して、両端拘束時の細長比は60相当となる。

提案手法においては各弦材に対して1要素とみなす。材端力に関する収斂計算は3.3.2に準ずる。内部変位成分 u_k に対しては式(3.30)の關係を用いる。塑性ヒンジ位置 α は、本例においてはいずれの部材も $\alpha=0.333$ とする。

離散化手法に用いる解析モデルは、各弦材を150等分したBernoulliの梁理論により構成される。なお、数値計算の際には、与えた外力ベクトルに対する線形座屈固有値解析により得られる1次モードの最大振幅が $L/20000$ となる横たわみを与える。

3.3.4.2 解析結果および考察

Fig.3-13,14に解析結果を示す。Fig.3-13は $N_f/N_y-u/u_y$ 關係を、Fig.3-14(a)~(d)はMember-1およびMember-2の $M_f/M_p-N_f/N_y$ 關係および $M_f/M_p-N_f/N_y$ 關係を、Fig.3-14(e)は接合されたNode151の回転角 θ とMember-2の u/u_y 關係を、Fig.3-14(f)はMember-2とMember-1の軸伸縮量關係を、それぞれ示す。ここに、 u_y はMember-2におけるNode301に近い位置の軸力 N_{J2} が N_y に達した時の軸伸縮量である。図中の▼においてMember-2の右端(点J)と中間点Kが塑性化することによって最大耐力に達し、急激な劣化となる。この現象は離散化手法においても、同じ2つの位置で同時に塑性ヒンジが生じる結果となっている。その際、Member-2の軸伸縮量 u に対してMember-1の軸伸縮量 u が戻り、Member-1の軸力が弾性除荷される。このとき、Member-2から見ればMember-1により回転が拘束され、Member-1から見

ると、Node151 を介して Member-1 に曲げが生じる。この結果は、既往の手法⁵⁸⁾より空間構造に想定されうる接合条件における弦材の挙動を追跡できる手法となっている。その後、▽で Member-2 の点 I が全塑性状態に達する。以上の挙動が生じる解析例に対して、2 つの手法の $N_j/N_y-u/u_y$ 関係、 $M_j/M_p-N_j/N_y$ 関係および $M_j/M_p-N_j/N_y$ 関係に關しても応力の分配経路まで精度よく追跡し、変位の進展に關しても、塑性率 3 程度までは非常に精度が良いと言える。

3. 4 まとめ

本章では、トラス梁弦材の塑性化により座屈が進展する挙動を単一の弦材で追跡する事を目的として、弦材に対する基本式の定式化をおこなった。本章で得られた知見を以下に示す。

1. 断面の塑性化を考慮した基本式は、弦材の両材端および中間に仮定した最大 3 箇所の塑性ヒンジに対応する塑性変形を仮定し、熱力学の基本原則より Helmholtz 自由エネルギーおよび Clausius-Duhem 不等式を導入した。結果として得られる基本式は、第 2 章で導出した弾性座屈に対する手法に塑性散逸項を追加した形となっている。
2. 塑性化の進展を評価するために、トラス梁で一般的に用いられるトラス梁の構面外回転方向に対称な断面に対する塑性流れ則を導出した。定式化の際には最大塑性散逸の原理を導入した。得られた塑性流れ則は既往の研究で示してきた矩形断面を包括する手法である。また、定式化した基本式等を用いて数値計算により解を得るための弾塑性接線剛性と、Newton 法に基づく数値計算手順を示した。
3. 得られた基本式を用いた提案手法の妥当性を、離散化手法による解析解と比較することにより検証した。提案手法は材端の拘束条件が剛である場合に対しても離散化手法と同等の軸力-軸方向変位関係および各塑性ヒンジ位置のモーメント-軸力相関関係を得ることができ、座屈後の材端力および塑性流れ則が適切に評価可能な手法と言える。また、上記の手法は細長比、中間軸方向力数、弦材内の軸力比を変更しても一定の精度を保って追跡可能であり、単調および繰返し外力に対しても適切に追跡が可能である。さらに、材端の接合条件をピンとすることで、既往の研究を包括する手法となる。ただし、離散化手法と異なり、提案手法では断面の部分的降伏領域が再現されないが、この差異の改善は今後の課題とする。
4. 単一の弦材による数値解析法の妥当性に加え、複数の弦材が剛に連結する例を通して、材端の接合条件が既往の数値解析法より現実的な接合条件での提案手法の妥当性を確認した。

Chapter 3

Figures

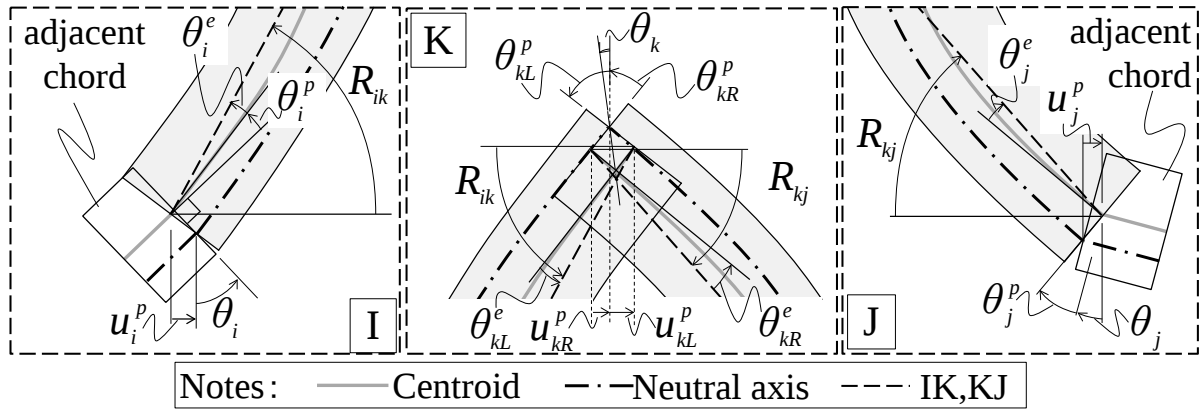


Fig.3-1 Plastic deformations and rotations

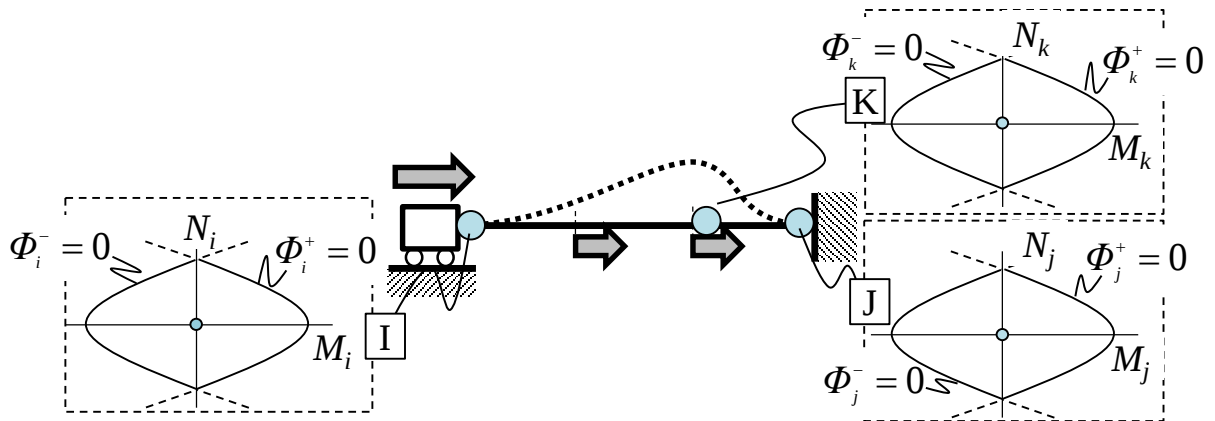


Fig.3-2 Yield judgement (Initial state)

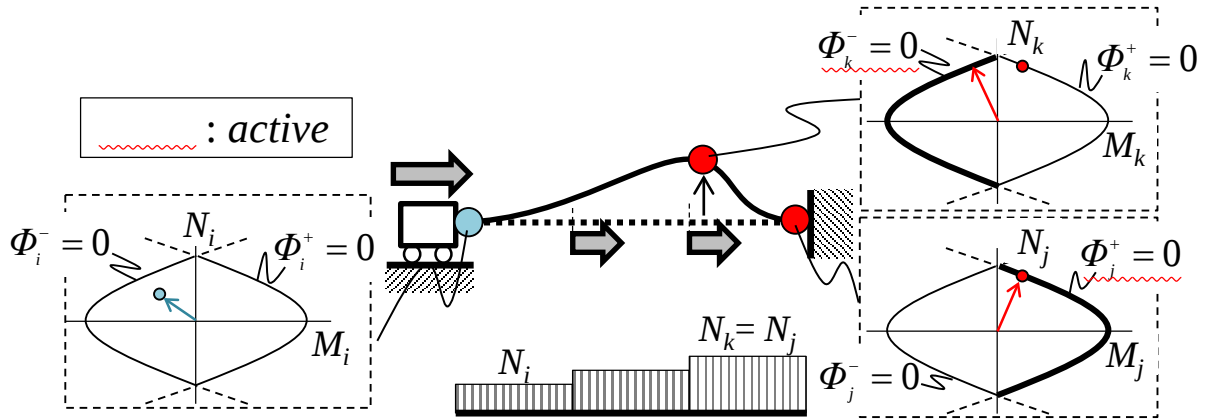


Fig.3-3 Yield judgement

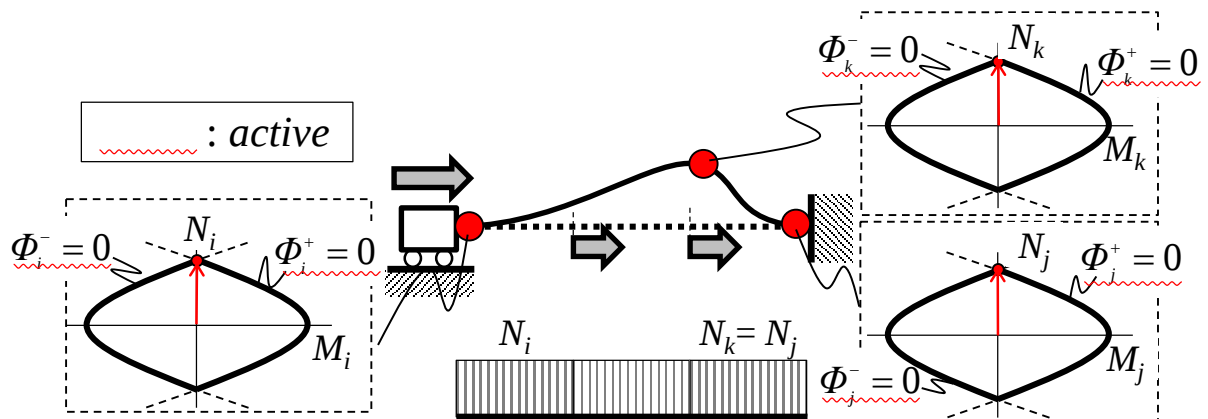


Fig.3-4 Yield judgement (Singular state)

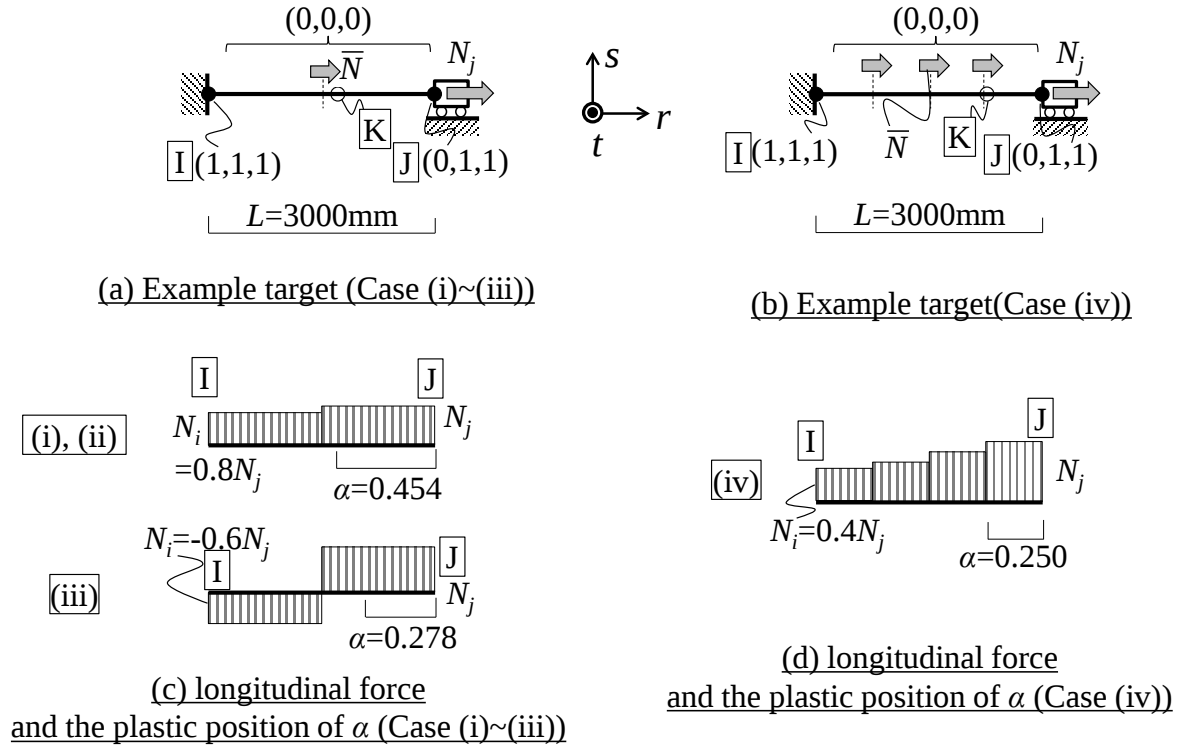


Fig.3-5 Plastic deformations and rotations
(Boundary condition : (u_r, u_s, θ_t) , 1: fixed / 0: released)

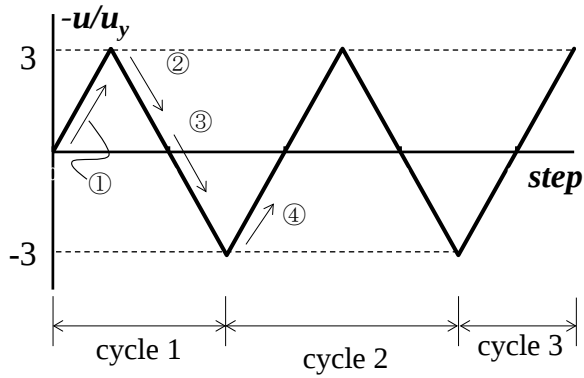


Fig.3-6 Load condition

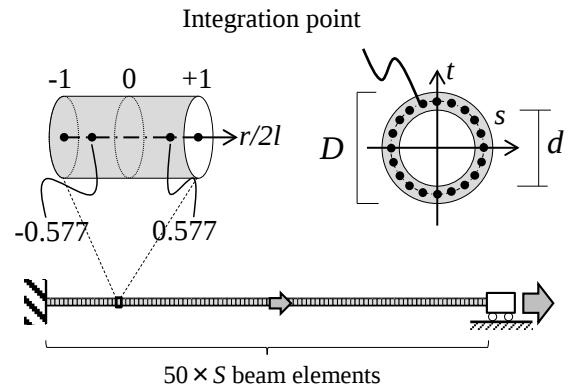


Fig.3-7 Integration points of discrete model

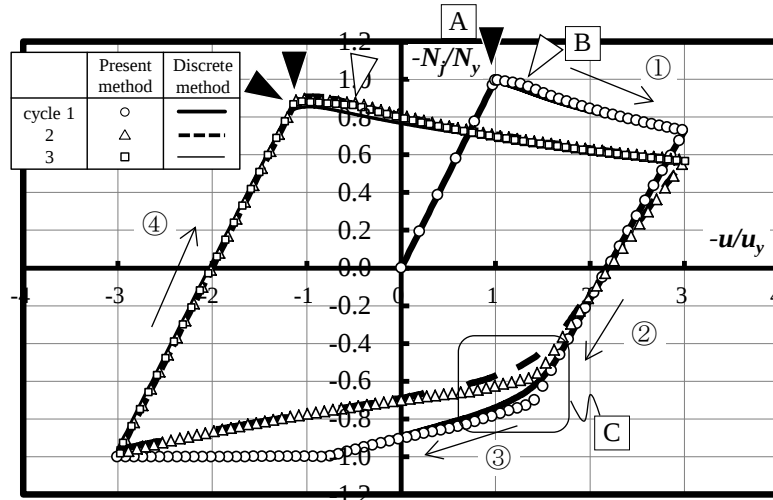
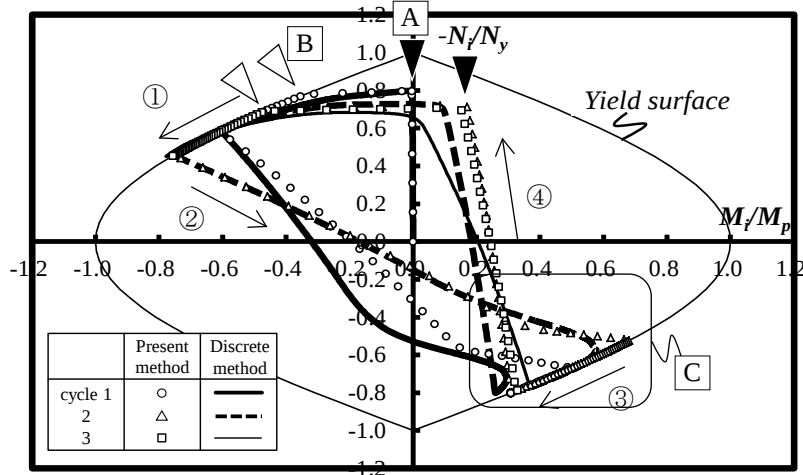
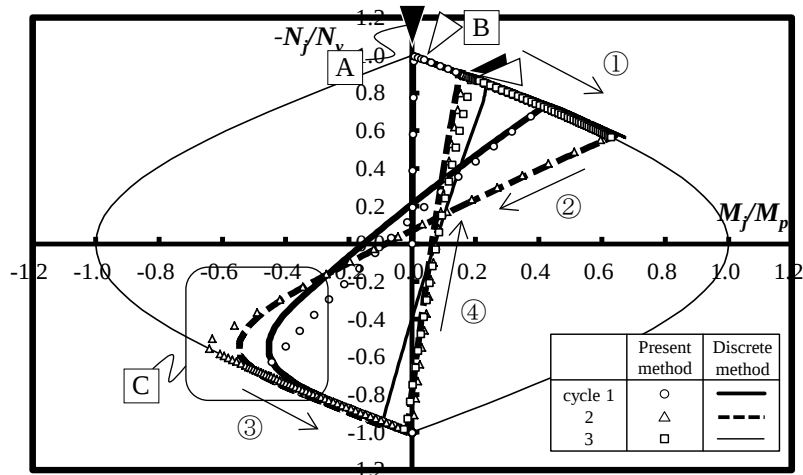

 (a) N_f/N_y - u/u_y relation

 (b) M_f/M_p - N_f/N_y relation

 (c) M_f/M_p - N_f/N_y relation

 Fig.3-8 Numerical results (Case (i), $S = 2$, $\lambda = 40$, $N_f/N_y=0.8$)

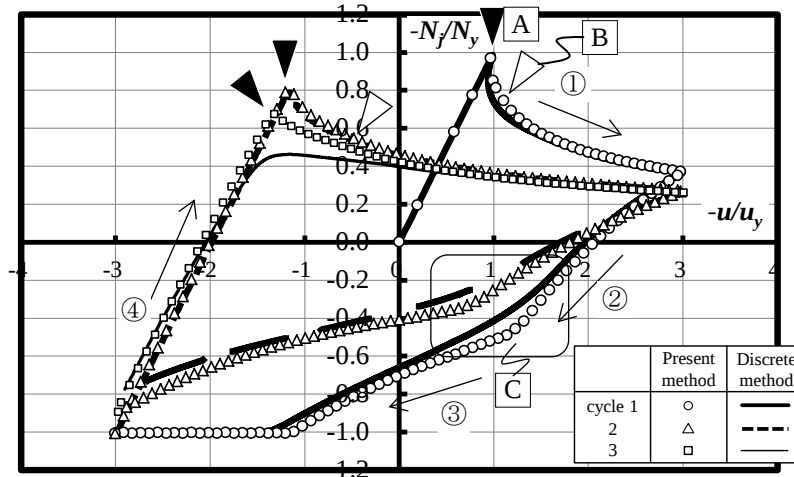
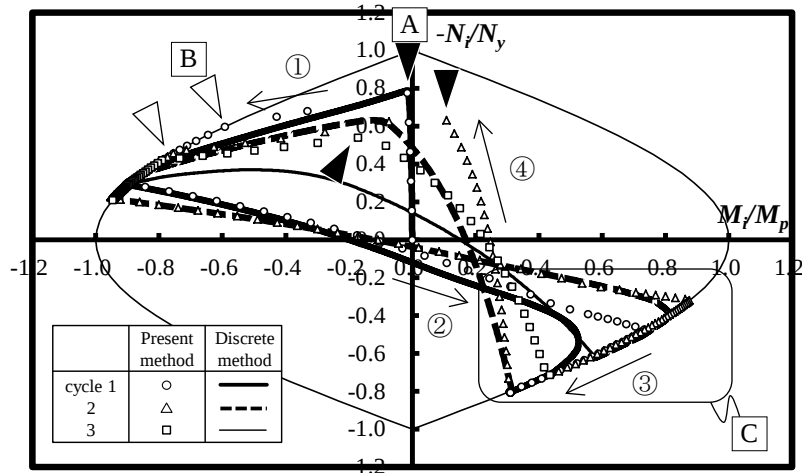
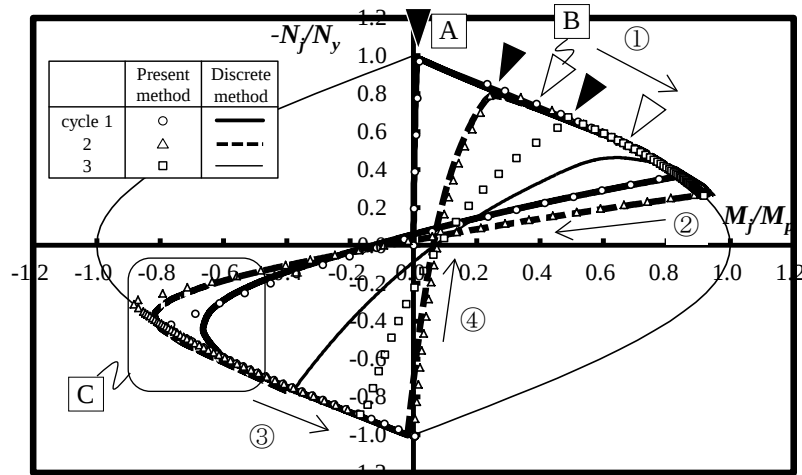

 (a) N_f/N_y - u/u_y relation

 (b) M_f/M_p - N_f/N_y relation

 (c) M_f/M_p - N_f/N_y relation

 Fig.3-9 Numerical results (Case (ii), $S = 2$, $\lambda = 80$, $N_f/N_y=0.8$)

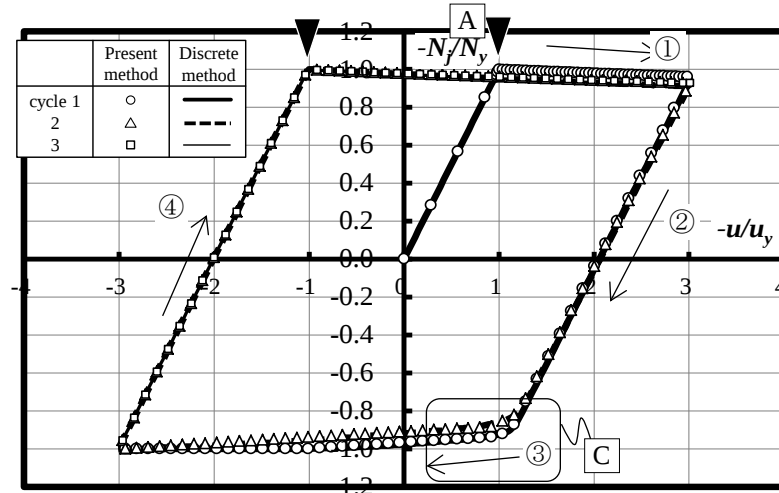
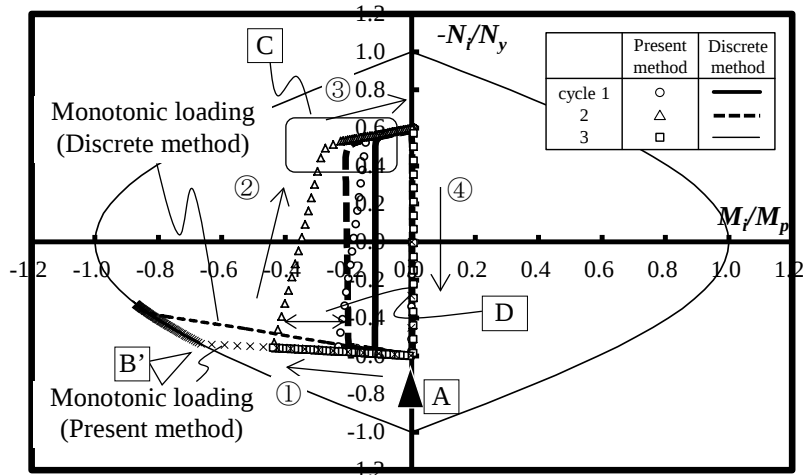
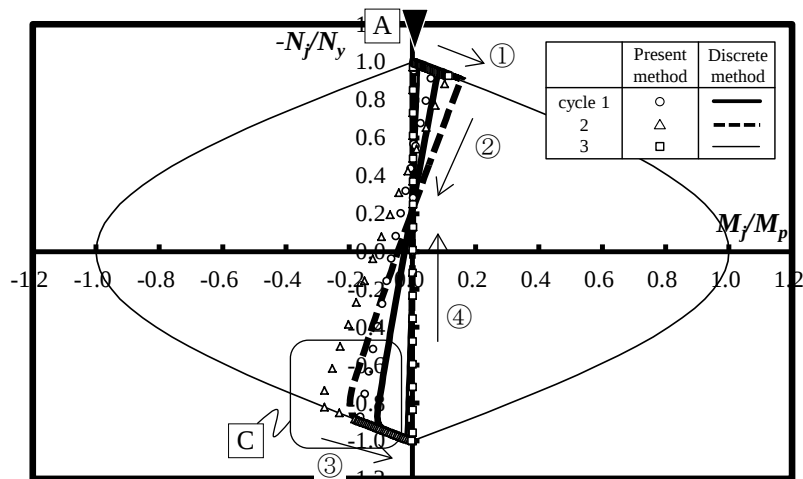

 (a) N_f/N_y - u/u_y relation

 (b) M_f/M_p - N_f/N_y relation

 (c) M_f/M_p - N_f/N_y relation

 Fig.3-10 Numerical results (Case (iii), $S = 2$, $\lambda = 40$, $N_f/N_y = -0.6$)

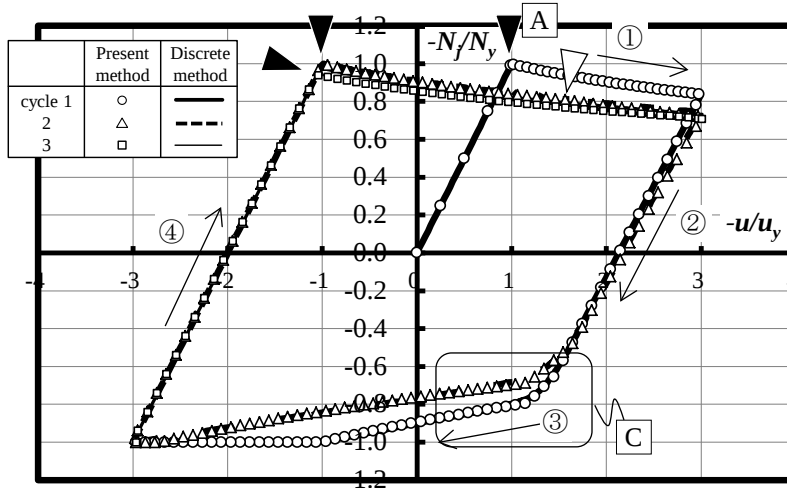
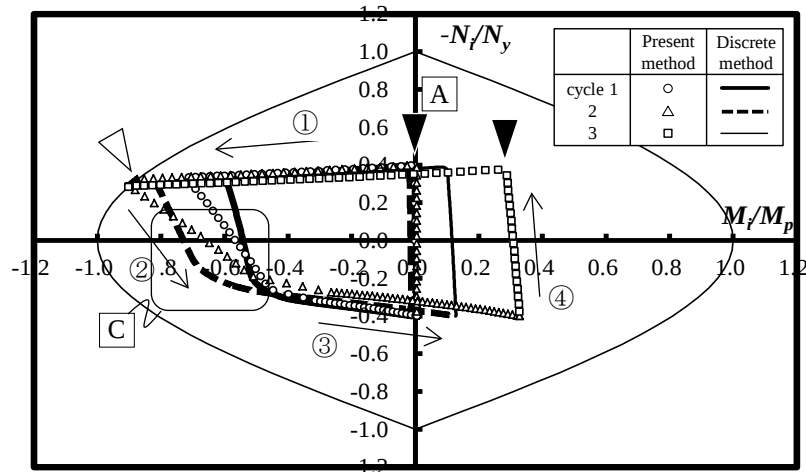
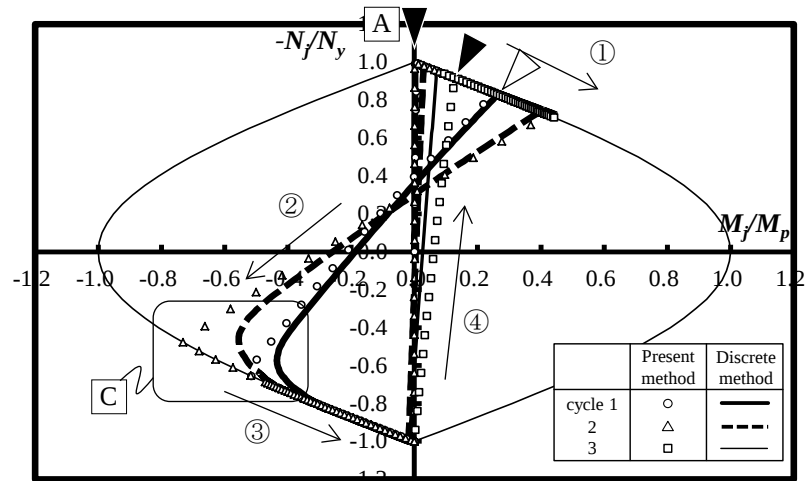

 (a) $N_f/N_y - u/u_y$ relation

 (b) $M_i/M_p - N_f/N_y$ relation

 (c) $M_f/M_p - N_f/N_y$ relation

 Fig.3-11 Numerical results (Case (iv), $S = 4$, $\lambda = 40$, $N_f/N_y = 0.4$)

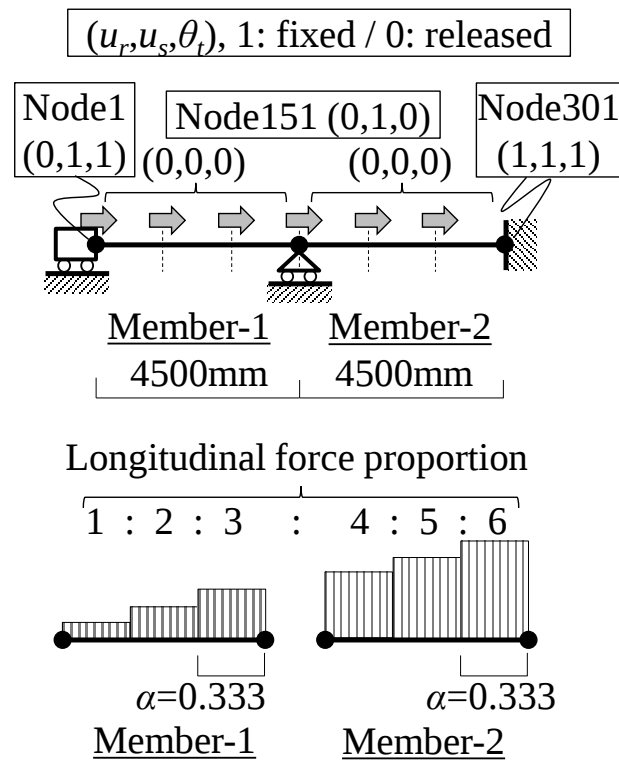
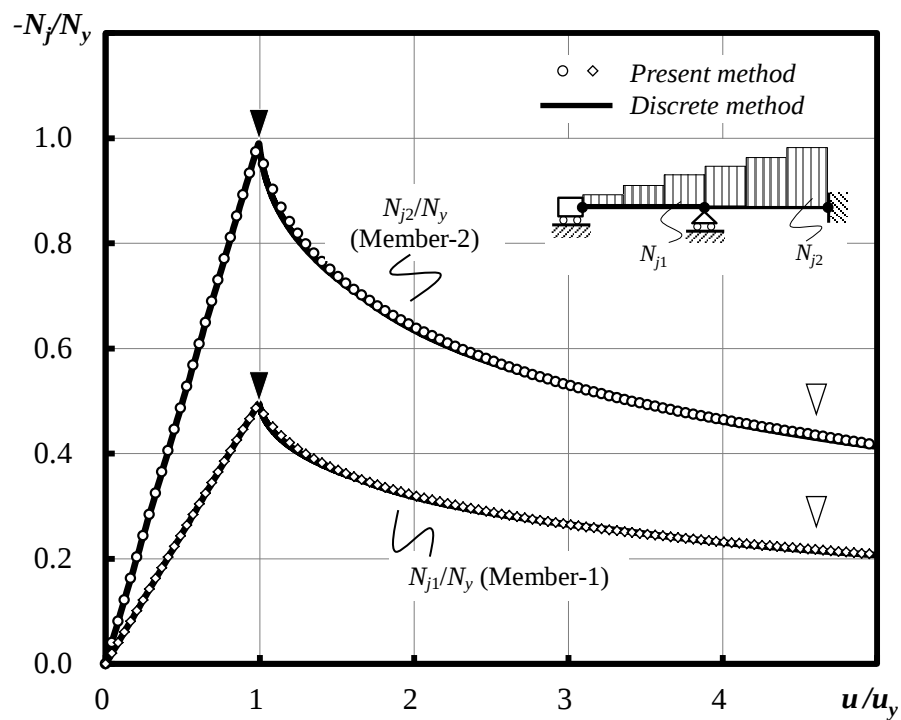
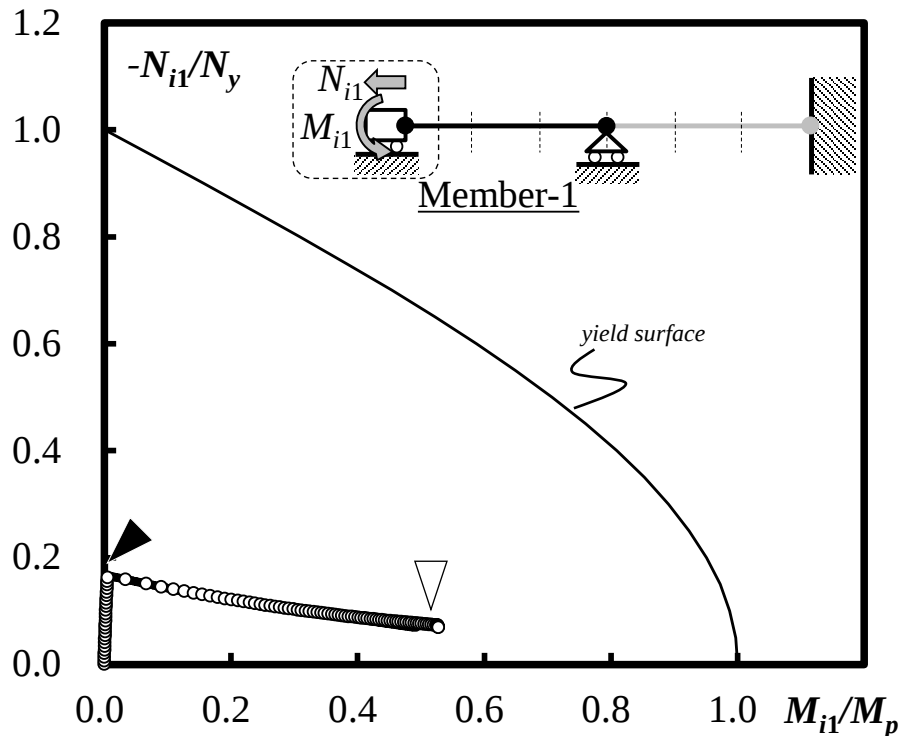
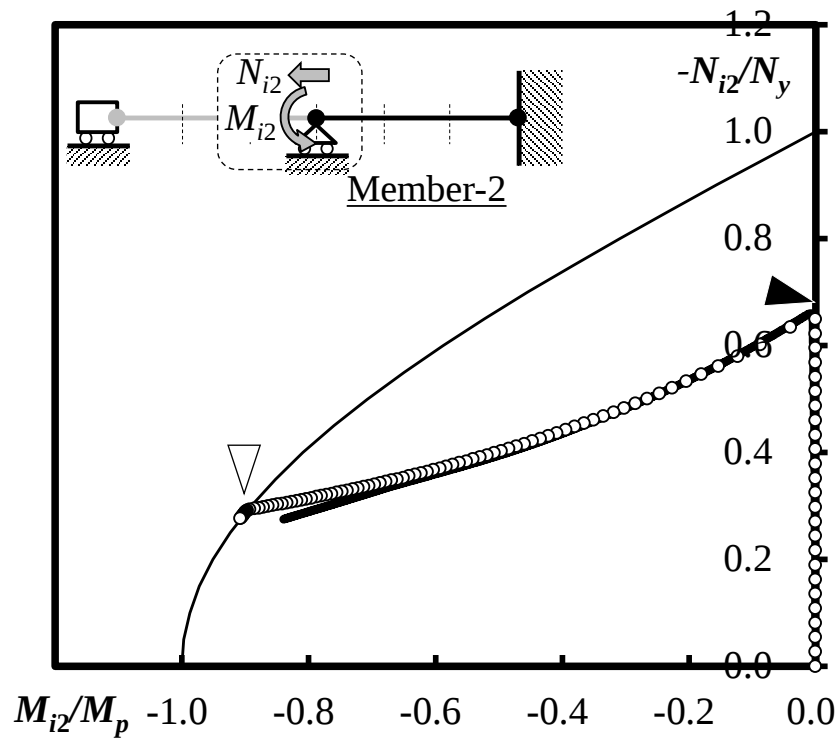
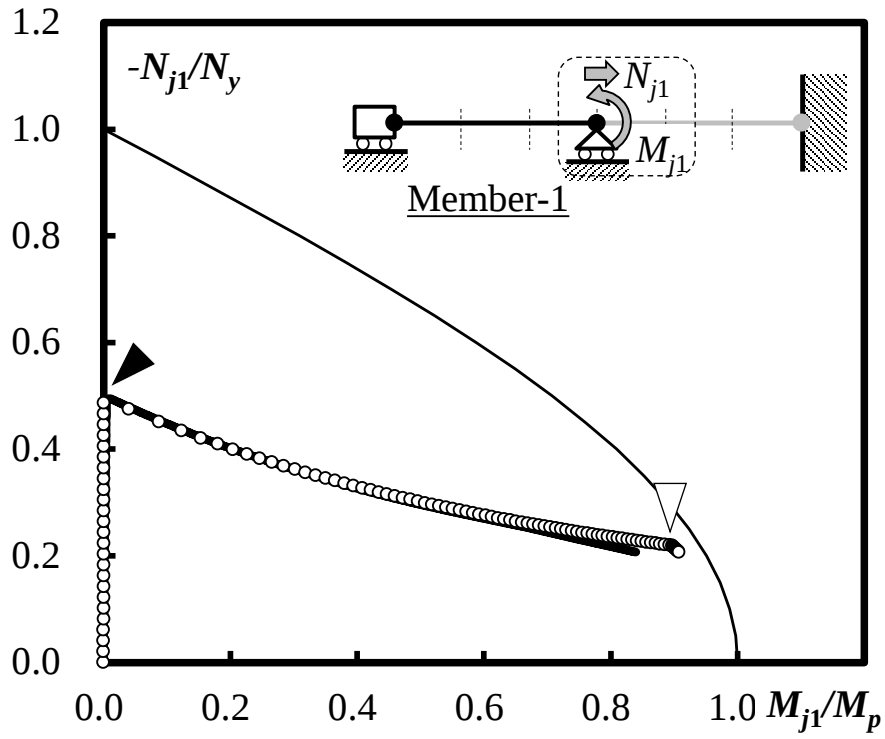
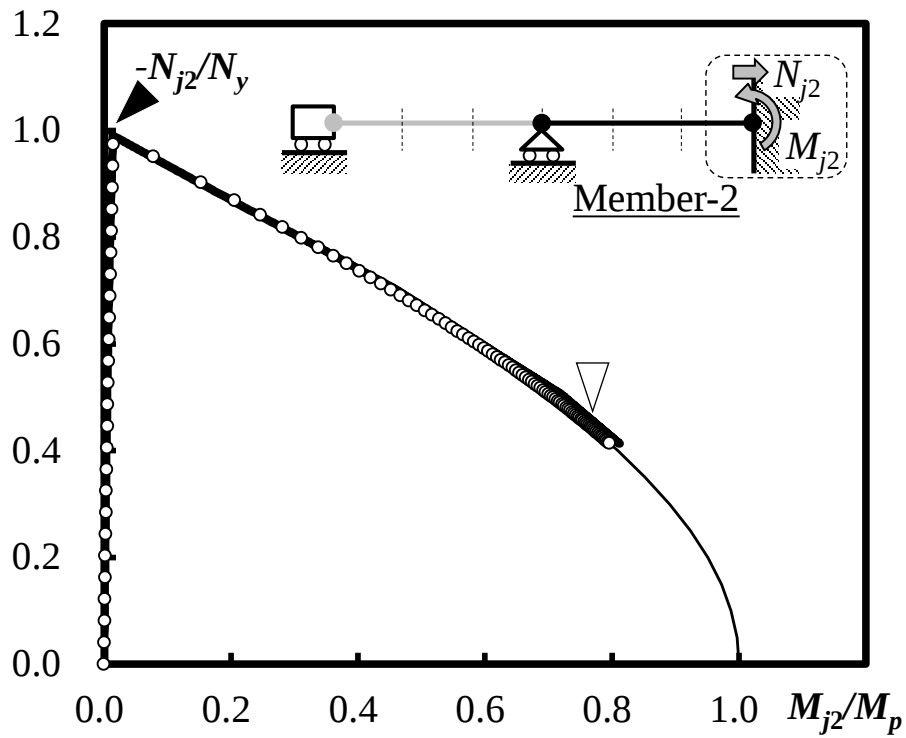


Fig.3-12 Analysis model


 Fig.3-13 N_j/N_y - u/u_y relation


 Fig.3-14(a) M_i/M_p - N_i/N_y relation (Member-1)

 Fig.3-14(b) M_i/M_p - N_i/N_y relation (Member-2)


 Fig.3-14(c) M_j/M_p - N_j/N_y relation (Member-1)

 Fig.3-14(d) M_j/M_p - N_j/N_y relation (Member-2)

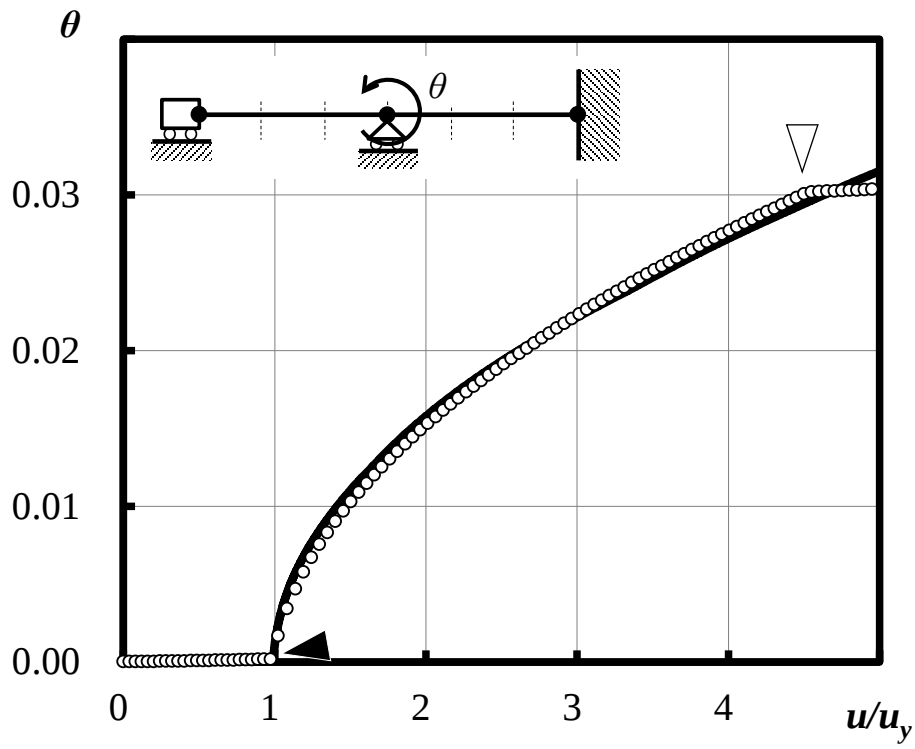


Fig.3-14(e) Rotation and u/u_y relation

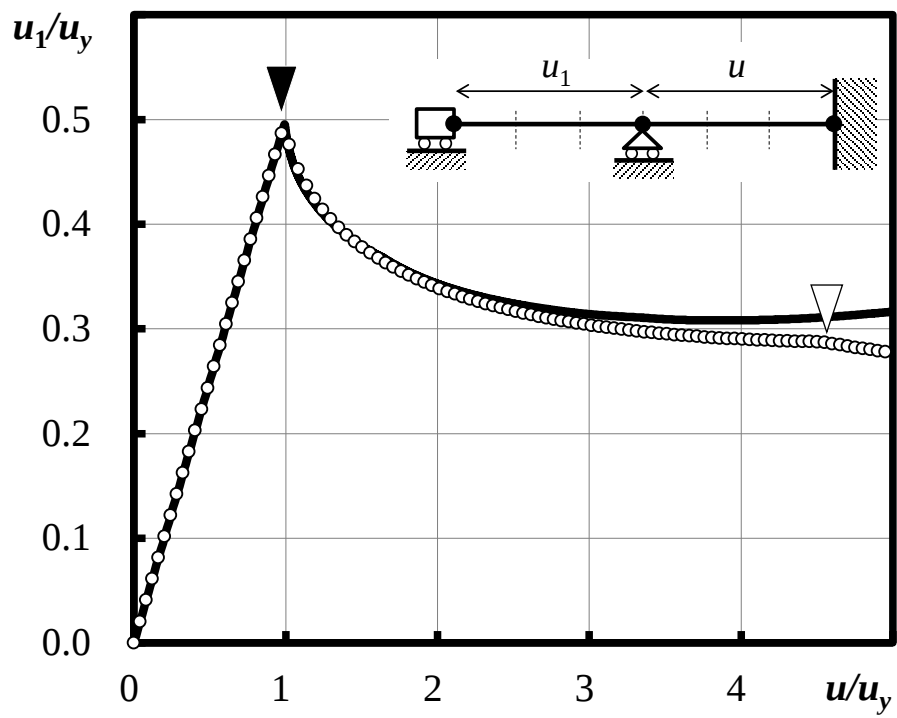


Fig.3-14(f) Stretch relation between members

第4章 剛な接合条件における構面外座屈後挙動を考慮した トラス梁要素の提案

- 4. 1 はじめに
- 4. 2 弦材とトラス梁要素の関係則
- 4. 3 トラス梁要素に関する数値解析法
 - 4. 3. 1 トラス梁要素の基本式
 - 4. 3. 2 塑性流れ則
 - 4. 3. 3 弾塑性接線剛性
 - 4. 3. 4 数値計算手順
- 4. 4 数値解析例による妥当性検証
 - 4. 4. 1 解析対象及び解析モデル
 - 4. 4. 2 解析結果及び考察
- 4. 5 まとめ

4. 1 はじめに

本章では第2章および第3章で導出してきた弦材の座屈後挙動に関する解析法を、トラス梁要素に適用する。

トラス梁要素に関しては、元結・大塚⁵⁷⁾が構面内座屈後挙動を追跡可能な手法を提案している。この手法は、構面内座屈が生じる弦材における軸力低下を軟化特性の材料と同等に評価する手法としたことで、トラス梁個材の降伏後の硬化現象を考慮したトラス梁要素⁵⁵⁾と同等に評価可能な手法となっている。また、元結・緒方⁶⁰⁾は、この手法を構面外座屈に適用し、弾性座屈および弾塑性座屈に対応する手法を提案している。文献57、55、60のいずれも、弦材の座屈により生じる材端力の劣化現象を、単調および繰返し載荷に対して十分な精度で追跡可能であることを確認している。

しかしながら、第1章で述べた通り、以上の方法は弦材の材端条件に対してピン接合に限定された手法である。ピン接合に対して座屈を考慮することで、トラス梁部材の設計に使用する場合、耐力評価は安全側となる。一方、隣接部材の拘束効果や進行性破壊状況を詳細に評価するという立場に立つと、現状の境界条件のみでは適切な設定が可能な手法とはいえない。そこで本章では、既往の研究を基礎としながら、弦材の接合条件が任意に設定可能な方法を提案する。

既往の研究からの拡張を試みるにあたり、以下のとおり考察をおこなう。

1. 既往の手法はトラス梁要素に対して、軸力(1自由度)および構面内曲げモーメント(材端2自由度)の計3自由度を考慮した手法であった。しかしながら、これではトラス梁要素の構面外回転に対して追跡できない。さらに、弦材の構面外座屈を材端の回転拘束も併せて考慮する必要があるため、トラス梁要素の巨視的な構面外回転のみならず、弦材の局所回転に対しても精確に適合する手法にまで拡張しなくてはならない。トラス梁の弦材各々に生じる構面外回転は、節点における構面外回転および振り率を適合させることで表現可能とした例がある^{73),74)}。本章ではこの考え方にに基づき、振り率を考慮した梁理論⁷⁵⁾に基づくトラス梁要素と弦材の手法を関連付けるための変換則を示す。
2. 次に、熱力学の第2法則に基づき、自由度を拡張したトラス梁要素に関する基本式を導出する。ここで、トラス梁の塑性化と座屈による変位成分は、弦材のそれらと関連付けられると仮定する。また、弦材の断面が塑性化することによって座屈が進展する場合を考慮するために、トラス梁要素の巨視的な塑性流れ則を導出する。

以上の妥当性を、複数の解析例を通して離散化手法と比較することにより分析する。

4.2 弦材とトラス梁要素の関係則

まず、構面外座屈を考慮する弦材に関する基本式を示した第2章、第3章の定式化を一部修正し (Appendix 5 を参照)、トラス梁要素に適用可能な形式とする。ただし、以降の定式化における変数表記において、右下添字 ζ は弦材の上下の区別 ($\zeta \in +, -$) を示す。本研究ではワーレン型トラス梁に適用することを試みるが、のちに示す方針により、軽微な変更で他のトラス梁形式に対しても適用可能である。トラス梁の各弦材における中間軸方向力 $\bar{N}_\zeta$ の数 n_ζ は、Fig.4-1(b) に示すように弦材の上下によって以下のように異なる。

$$n_+ = S - 1 (\text{上弦材}), \quad n_- = S (\text{下弦材}) \quad (4.1a,b)$$

弦材に対する材端力 $\mathbf{f}_\zeta$ および材端変位 $\mathbf{u}_\zeta$ の成分を以下に示す。

$$\mathbf{f}_\zeta = \{N_\zeta \quad \bar{N}_\zeta \quad M_{i_\zeta} \quad M_{j_\zeta}\}^T, \mathbf{u}_\zeta = \{u_\zeta \quad \bar{u}_\zeta \quad \theta_{i_\zeta} \quad \theta_{j_\zeta}\}^T \quad (4.2a,b)$$

また、内部のモーメントを表す M_{k_ζ} を定義する。次に、材端変位 $\mathbf{u}_\zeta$ とその変化率 $\dot{\mathbf{u}}_\zeta$ は、次式のように弾性成分 $\mathbf{u}_\zeta^e, \dot{\mathbf{u}}_\zeta^e$ 、塑性成分 $\mathbf{u}_\zeta^p, \dot{\mathbf{u}}_\zeta^p$ および座屈成分 $\mathbf{u}_\zeta^b, \dot{\mathbf{u}}_\zeta^b$ によって加法的に示すことが出来るものとする。

$$\mathbf{u}_\zeta = \mathbf{u}_\zeta^e + \mathbf{u}_\zeta^p + \mathbf{u}_\zeta^b, \quad \dot{\mathbf{u}}_\zeta = \dot{\mathbf{u}}_\zeta^e + \dot{\mathbf{u}}_\zeta^p + \dot{\mathbf{u}}_\zeta^b \quad (4.3a,b)$$

ここに、右上添字 e, p および b は各変位の弾性成分、塑性成分および座屈成分であることを示す。また、以降も各変数の変化率として $(\dot{*})$ を用いる。以上の弦材の材端力および材端変位に対する基本式を以下に示す。

$$\mathbf{f}_\zeta = \mathbf{k}_\zeta^e (\mathbf{u}_\zeta - \mathbf{u}_\zeta^p - \mathbf{u}_\zeta^b) \quad (4.4a)$$

$$\hat{M}_{k_\zeta} = \hat{k}_{M_\zeta} (-\theta_{k_\zeta}^p - \theta_{k_\zeta}^b) \quad (4.4b)$$

$$\Xi_\zeta = \mathbf{f}_\zeta^T \mathbf{C}_\zeta + k_{M_\zeta} (-R_\zeta - \theta_{k_\zeta}^p) = 0 \quad (4.4c)$$

$$\Gamma_\zeta = \mathbf{f}_\zeta^T \dot{\mathbf{u}}_\zeta^p + \hat{M}_{k_\zeta} \dot{\theta}_{k_\zeta}^p \geq 0 \quad (4.4d)$$

ここに、

$$\mathbf{C}_\zeta = \begin{Bmatrix} -2C_\zeta R_\zeta & -D_\zeta C_\zeta R_\zeta & \hat{C}_{i_\zeta} & \hat{C}_{j_\zeta} \end{Bmatrix}^T, \hat{C}_{i_\zeta} = \alpha_\zeta + \kappa_{i_\zeta}, \hat{C}_{j_\zeta} = -(1 - \alpha_\zeta) + \kappa_{j_\zeta},$$

$$C_\zeta = \frac{\alpha_\zeta (1 - \alpha_\zeta) L}{2}, D_\zeta = 2 \left(m_\zeta - 1 - \frac{n_\zeta}{2} \right) - \frac{(1 - \alpha_\zeta) (m_\zeta - 1) (S - n_\zeta + m_\zeta - 1)}{S \alpha_\zeta} + \frac{\alpha_\zeta (n_\zeta - m_\zeta + 1) (S - m_\zeta + 1)}{S (1 - \alpha_\zeta)},$$

$$\mathbf{k}_\zeta^e = \begin{bmatrix} k_{N\zeta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{\bar{N}\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{ii\zeta} & k_{ij\zeta} \\ 0 & 0 & k_{ji\zeta} & k_{jj\zeta} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_\zeta^p = \begin{Bmatrix} u_{L\zeta}^p + u_{R\zeta}^p \\ u_{L\zeta}^p - u_{R\zeta}^p \\ \theta_{i\zeta}^p + \kappa_{ik\zeta} \theta_{k\zeta}^p \\ \theta_{j\zeta}^p + \kappa_{jk\zeta} \theta_{k\zeta}^p \end{Bmatrix} \quad (4.5a-f)$$

であり、 $\hat{k}_{M\eta}$, $\hat{C}_{i\zeta}$ および $\hat{C}_{j\zeta}$ は Appendix 5 に示す剛性マトリクスと係数である。そのほかの変数は第3章の変数の文字に弦材の上下を表す添字を付与したものである。式(4.4a)は要素の軸力、中間軸方向力および曲げに関する弾性構成則を、式(4.4b)は点 K_ζ におけるモーメントの釣り合い関係を、式(4.4c)は塑性散逸項を、それぞれ示す。

次に、弦材の基本式をトラス梁要素に適用するための関係則を示す。Fig.4-1(a)に対象とするトラス梁、Fig.4-1(b)にトラス梁を構成する上下弦材に対する、要素座標系と相互の関係を示す。トラス梁要素の剛体の移動を除いた要素座標系において、材軸方向 r およびトラス梁構面に直交する方向(構面外方向) s からなる平面と、第2章および第3章で定義された弦材の座標系 r 、 s が一致すると仮定する。

ここで、トラス梁から成る空間構造をトラス梁要素で線材置換する場合に、上下弦材の構面外変位が要素間において連続となる基本的な定式化を、Bernoulli の梁理論との差異を含めて提示する。Fig.4-2 に示すトラス梁中央軸上の点 (r) における位置ベクトル ${}^t\mathbf{x}_0$ およびトラス梁断面方向を示す正規直交基底 ${}^t\mathbf{Q}(r) = [{}^t\mathbf{l} \quad {}^t\mathbf{m} \quad {}^t\mathbf{n}]$ が既知であるものとする、この点に対応する上下弦材の中央軸上の点の位置ベクトル ${}^t\mathbf{x}_{0\pm}$ は以下のように示される。

$${}^t\mathbf{x}_{0\pm}(r) = {}^t\mathbf{x}_0(r) \pm \frac{H}{2} {}^t\mathbf{n}(r) \quad (4.6)$$

ここに、 H はトラス梁のせいを示す。また、上下弦材の任意点の位置ベクトルは上下弦材断面方向を示す直交基底 ${}^t\mathbf{Q}_\pm(r) = [{}^t\mathbf{l}_\pm \quad {}^t\mathbf{m}_\pm \quad {}^t\mathbf{n}_\pm]$ を用いて次のように表される。

$${}^t\mathbf{x}_\pm(r) = \left\{ {}^t\mathbf{x}_0(r) \pm \frac{H}{2} {}^t\mathbf{n}(r) \right\} \pm \frac{b}{2} s {}^t\mathbf{m}_\pm(r) \pm \frac{d}{2} t {}^t\mathbf{n}_\pm(r) \quad (4.7)$$

ここに、 b, d は弦材断面寸法である。ここで、上下弦材をつなぐ連続的な仮想の束材を考え、これが構面内曲げ剛性のみは零である剛体とすると、 ${}^t\mathbf{Q}_\pm(r) = {}^t\mathbf{Q}(r)$ となる。これは、トラス梁としての捩り変形を受けたときに弦材の断面がトラス梁要素の断面方向と等しいことを表し、トラス梁要素が平面および法線保持の仮定に基づく Bernoulli の梁理論と等しいことを示す。しかしながら、トラス梁の弦材は本来このような状態ではなく、上下の断面は各々で回転する(Fig.4-3)。この状態を考慮すると、正規直交基底のうち ${}^t\mathbf{n}$ と ${}^t\mathbf{n}_\pm$ が一致し、その他の2つの弦材の正規直交基底がトラス梁のそれらとは異なる

る方向を示す。すなわち、 ${}^t\mathbf{n}$ を回転軸とする相対回転 $\phi_{\pm}$ が上下弦材において発生する。このとき、 ${}^t\mathbf{Q}_{\pm}$ は次のように表される。

$${}^t\mathbf{Q}_{\pm}(r) = {}^t\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{R}}_{\pm}({}^t\phi_{\pm}) \quad (4.8)$$

ここに、 $\tilde{\mathbf{R}}_{\pm}$ は局所座標系成分から成る相対回転軸ベクトルに対する回転マトリクスである。各々の弦材はそれら自体が Bernoulli の梁理論に従うものとすれば、相対回転 $\phi_{\pm}$ は次式に示すように、弦材中央軸の ${}^0\mathbf{m}$ 方向変位 $v_{0\pm}$ の勾配と等しくなる。

$${}^t\phi_{\pm} = \frac{d{}^tv_{0\pm}}{dr} \quad (4.9)$$

弦材断面中央軸の変位が式(4.6)より、

$${}^t\mathbf{u}_{0\pm} = {}^t\mathbf{u}_0 \pm \frac{H}{2} \Delta \mathbf{n}; \quad {}^t\mathbf{u}_0 = {}^t\mathbf{x}_0 - {}^0\mathbf{x}_0, \quad \Delta \mathbf{n} = {}^t\mathbf{n} - {}^0\mathbf{n} \quad (4.10)$$

として表されることから、 $v_{0\pm}$ は次式となる。

$${}^tv_{0\pm} = {}^0\mathbf{m} \cdot {}^t\mathbf{u}_{0\pm} = {}^0\mathbf{m} \cdot {}^t\mathbf{u}_0 \pm \frac{H}{2} {}^0\mathbf{m} \cdot \Delta \mathbf{n} \quad (4.11)$$

ここで、変位は微小であると仮定すると、 $\Delta \mathbf{n} \equiv ({}^t\alpha {}^0\mathbf{l} + {}^t\beta {}^0\mathbf{m} + {}^t\gamma {}^0\mathbf{n}) \times {}^0\mathbf{n} = -{}^t\alpha {}^0\mathbf{m} + {}^t\beta {}^0\mathbf{l}$ が成り立つことから、式(4.11)は式(4.12)のようになり、これを式(4.9)に代入することで式(4.13)が得られる。

$${}^tv_{0\pm} = {}^tv_0 \mp \frac{H}{2} {}^t\alpha \quad (4.12)$$

$${}^t\phi_{\pm} = \frac{d}{dr} \left({}^tv_0 \mp \frac{H}{2} {}^t\alpha \right) = \frac{d{}^tv_0}{dr} \mp \frac{H}{2} \frac{d{}^t\alpha}{dr} = \gamma \mp \frac{H}{2} \frac{d\alpha}{dr} \quad (4.13)$$

ここに、式(4.13)最右辺第1項の γ はトラス梁としての t 軸まわり(構面外)回転を、第2項はトラス梁の反りに相当する自由度を表し、このうち $H/2$ は反り関数を、 $(d\alpha/dr)$ は Bernoulli の梁理論から追加された振り率を示す。ここまでの展開から、共回転梁要素におけるトラス梁要素の両節点において γ および $(d\alpha/dr)$ を適合させることにより、弦材の回転も適合される。

以上を踏まえ、Fig.4-4 に示すトラス梁要素における材端力ベクトル $\tilde{\mathbf{f}}$ および材端変位ベクトル $\tilde{\mathbf{u}}$ は、要素内座標系において以下のように定義される。

$$\tilde{\mathbf{f}} = \left\{ \tilde{N} \quad \tilde{M}_{ri} \quad \tilde{M}_{si} \quad \tilde{M}_{ti} \quad \tilde{B}_i \quad \tilde{M}_{rj} \quad \tilde{M}_{sj} \quad \tilde{M}_{tj} \quad \tilde{B}_j \right\}^T, \quad (4.14a)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \{\tilde{\delta} \quad \tilde{\theta}_{ri} \quad \tilde{\theta}_{si} \quad \tilde{\theta}_{ti} \quad \tilde{\theta}'_{ri} \quad \tilde{\theta}_{rj} \quad \tilde{\theta}_{sj} \quad \tilde{\theta}_{tj} \quad \tilde{\theta}'_{rj}\}^T \quad (4.14b)$$

ここに、 $(\tilde{*})$ はトラス梁要素の変数であることを示す。また、 $\tilde{N}, \tilde{\delta}$ は軸力および軸方向変位を、 $\tilde{M}_{ri}, \tilde{M}_{rj}$ および $\tilde{\theta}_{ri}, \tilde{\theta}_{rj}$ はねじりモーメントおよびねじり回転変位を、 $\tilde{M}_{si}, \tilde{M}_{sj}$ および $\tilde{\theta}_{si}, \tilde{\theta}_{sj}$ は構面内曲げモーメントおよび構面内回転変位を、 $\tilde{M}_{ti}, \tilde{M}_{tj}$ および $\tilde{\theta}_{ti}, \tilde{\theta}_{tj}$ は構面外曲げモーメントおよび構面外回転変位を、 $\tilde{B}_i, \tilde{B}_j$ および $\tilde{\theta}'_{ri}, \tilde{\theta}'_{rj}$ は曲げ振りモーメントおよび振り率を、それぞれ示す。なお、式(4.13)における γ および $(d\alpha/dr)$ は、トラス梁要素の節点 I, J における $\tilde{\theta}_{ti}, \tilde{\theta}_{tj}$ および $\tilde{\theta}'_{ri}, \tilde{\theta}'_{rj}$ に対応する。ただし本章においては、トラス梁の振れは生じないものとする。

トラス梁要素と弦材の材端力関係を以下のように示す。まず、弦材に生じる軸力の平均値 N_ζ は、文献 55 における各弦材の $\xi=1/2$ の位置に対する軸力と同値であり、以下のように示すことが出来る。

$$\dot{N}_\zeta = \frac{1}{2}\dot{\tilde{N}} \mp \frac{1}{2H}\dot{\tilde{M}}_{si} \pm \frac{1}{2H}\dot{\tilde{M}}_{sj} \quad (4.15)$$

中間軸方向力 $\bar{N}_\zeta$ は、トラス梁要素の構面内曲げモーメント $\tilde{M}_{si}$ および $\tilde{M}_{sj}$ によって次式のように示すことが出来る。これは、部材のせん断力 $\tilde{Q} = (\tilde{M}_{si} + \tilde{M}_{sj})/L$ に相当する。

$$\dot{\bar{N}}_\zeta = \mp \frac{1}{SH}(\dot{\tilde{M}}_{si} + \dot{\tilde{M}}_{sj}) = \mp \frac{L}{SH}\dot{\tilde{Q}} \quad (4.16)$$

弦材の材端曲げモーメント $M_{i\zeta}, M_{j\zeta}$ は、トラス梁の構面外曲げモーメントおよび曲げねじりモーメントによって示される。

$$\dot{M}_{i\eta} = \frac{1}{2}\dot{\tilde{M}}_{ti} \pm \frac{1}{H}\dot{\tilde{B}}_i, \quad \dot{M}_{j\eta} = \frac{1}{2}\dot{\tilde{M}}_{tj} \pm \frac{1}{H}\dot{\tilde{B}}_j \quad (4.17)$$

なお、式(4.15)~(4.17)の複号は $(\zeta = +, -)$ の順である。以上より、トラス梁要素と弦材の材端力関係は以下のとおりである。

$$\dot{\mathbf{f}}_\zeta^T = \tilde{\mathbf{f}}^T \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \quad (4.18)$$

ここに、 $\tilde{\mathbf{h}}_\zeta$ は各弦材に対して (9×4) の係数マトリクスである。これにより、弦材の材端力は $\tilde{\mathbf{h}}_\zeta$ によって梁要素の材端力と直接関連付けることができる。 $\tilde{\mathbf{h}}_\zeta$ の具体的な成分をまとめると次式のようなになる。

$$\tilde{\mathbf{h}}_{\zeta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \mp \frac{1}{2H} & 0 & 0 & 0 & \pm \frac{1}{2H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp \frac{1}{SH} & 0 & 0 & 0 & \mp \frac{1}{SH} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \pm \frac{1}{H} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \pm \frac{1}{H} \end{bmatrix}^T \quad (4.19)$$

以上によりトラス梁要素と弦材の関係則が得られたので、次節においてトラス梁要素の基本式を示す。その準備として、以下に示すようにトラス梁要素の変位を定義する。

$\tilde{\mathbf{u}}$ およびその変化率 $\dot{\tilde{\mathbf{u}}}$ は、弦材のときと同様に弾性成分、塑性成分と座屈成分によって次式のように表されると仮定する。

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^e + \tilde{\mathbf{u}}^p + \tilde{\mathbf{u}}^b, \quad \dot{\tilde{\mathbf{u}}} = \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^e + \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^p + \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^b \quad (4.20a,b)$$

また、トラス梁要素の材端変位の塑性成分 $\tilde{\mathbf{u}}^p$ を上・下弦材の塑性変位成分 $\mathbf{u}_{\zeta}^b$ の変数であるとして、また座屈成分 $\tilde{\mathbf{u}}^b$ を上・下弦材の座屈変位 R_{ζ} の変数であるとして、それぞれ次式のように定義する。

$$\tilde{\mathbf{u}}^p \equiv \tilde{\mathbf{u}}^p(\mathbf{u}_{\zeta}^p), \tilde{\mathbf{u}}^b \equiv \sum_{\zeta=+,-} \mathbf{u}_{\zeta}^b(R_{\zeta}) \quad (4.21a,b)$$

さらに、式(4.21a,b)の変化率を、次式のように置く。

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^p = \sum_{\zeta=+,-} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^p}{\partial \mathbf{u}_{\zeta}^p} \dot{\mathbf{u}}_{\zeta}^p \equiv \sum_{\zeta=+,-} \mathbf{h}_{\zeta}^p \dot{\mathbf{u}}_{\zeta}^p, \quad \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^b(R_{\zeta}) = \sum_{\zeta=+,-} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^b}{\partial R_{\zeta}} \dot{R}_{\zeta} \equiv \sum_{\zeta=+,-} \mathbf{h}_{\zeta}^b \dot{R}_{\zeta} \quad (4.22a,b)$$

4. 3 トラス梁要素に関する数値解析法

4. 3. 1 トラス梁要素の基本式

次に、文献 57 のトラス梁における評価手法と同様に、熱力学に基づく定式化よりトラス梁要素の基本式を示す。はじめに、トラス梁に対する Helmholtz 自由エネルギーは、次式のように上・下弦材に対するものの総和であると考えることができる。

$$\tilde{\Psi} = \sum_{\zeta=+,-} \Psi_{\zeta}(\mathbf{u}_{\zeta}, \mathbf{u}_{\zeta}^p, R_{\zeta}, \theta_{k_{\zeta}}^p) \quad (4.23)$$

式(4.23)を、トラス梁要素の材端変位および各弦材の座屈による変形に関する弾性ひずみエネルギーの和によるものと見做すと、次式となる。

$$\tilde{\Psi} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}^e T \tilde{\mathbf{k}}^e \tilde{\mathbf{u}}^e + \sum_{\zeta=+,-} \frac{1}{2} \hat{k}_{M_{\zeta}} (-R_{\zeta} - \theta_{k_{\zeta}}^p)^2 \quad (4.24)$$

ここに、 $\tilde{\mathbf{k}}^e$ は構面内回転に対してはトラス梁の構面内せん断変形を考慮し、構面外回転および振り率に関しては弦材の回転のみを考慮した梁理論により導出される、トラス梁要素の弾性剛性マトリクス (Appendix 6 を参照) であり、 $\hat{k}_{M_{\zeta}}$ は相対部材角 R_{ζ} に対する剛性である。次に、トラス梁要素に対する Clausius-Duhem 不等式は、トラス梁中間に外力が存在しないとすると次式に示すとおりとなる。

$$-\dot{\tilde{\Psi}} + \tilde{\mathbf{f}}^T \dot{\tilde{\mathbf{u}}} \geq 0 \quad (4.25)$$

式(4.24)の変化率を式(4.25)に代入すると、以下ようになる。

$$\left[\tilde{\mathbf{f}}^T - (\tilde{\mathbf{k}}^e \tilde{\mathbf{u}}^e)^T \right] \dot{\tilde{\mathbf{u}}} + (\tilde{\mathbf{k}}^e \tilde{\mathbf{u}}^e)^T \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^p + (\tilde{\mathbf{k}}^e \tilde{\mathbf{u}}^e)^T \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^b - \sum_{\zeta=+,-} \hat{k}_{M_{\zeta}} (-R_{\zeta} - \theta_{k_{\zeta}}^p) (-\dot{R}_{\zeta} - \dot{\theta}_{k_{\zeta}}^p) \quad (4.26a)$$

$$= \left[\tilde{\mathbf{f}}^T - (\tilde{\mathbf{k}}^e \tilde{\mathbf{u}}^e)^T \right] \dot{\tilde{\mathbf{u}}} + \sum_{\zeta=+,-} \left[\tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{h}_{\zeta}^b + k_{M_{\zeta}} (-R_{\zeta} - \theta_{k_{\zeta}}^p) \right] \dot{R}_{\zeta} + \sum_{\zeta=+,-} \left[\tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{h}_{\zeta}^p \dot{\mathbf{u}}_{\zeta}^p + \hat{k}_{M_{\zeta}} (-R_{\zeta} - \theta_{k_{\zeta}}^p) \dot{\theta}_{k_{\zeta}}^p \right] \geq 0 \quad (4.26b)$$

エネルギーの散逸は塑性変形のみが生じるとすると、任意の変位 $\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_{\zeta}^p, \theta_{k_{\zeta}}^p$ および R_{ζ} に対して成立する条件から次式が得られる。

$$\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{k}}^e \tilde{\mathbf{u}}^e = \tilde{\mathbf{k}}^e (\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}^p - \tilde{\mathbf{u}}^b) \quad (4.27a)$$

$$\sum_{\zeta=+,-} \tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{h}_{\zeta}^b \dot{R}_{\zeta} + \sum_{\zeta=+,-} \hat{k}_{M_{\zeta}} (-R_{\zeta} - \theta_{k_{\zeta}}^p) \dot{R}_{\zeta} = 0 \quad (\eta = +, -) \quad (4.27b)$$

$$\tilde{I} = \tilde{\mathbf{f}}^T \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^p + \sum_{\zeta=+,-} \hat{k}_{M\zeta} (-R_\zeta - \theta_{k\zeta}^p) \dot{\theta}_{k\zeta}^p \geq 0 \quad (4.27c)$$

ここに、式(4.27a)はトラス梁要素の巨視的な弾性構成則、式(4.27b)は座屈による変形後の弦材の釣り合い関係、式(4.27c)はトラス梁要素の塑性散逸項を示す。式(4.4c)と式(4.27b)、式(4.4d)と式(4.27c)を比較することにより式(4.28a,b)が得られ、 $\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^p, \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^b$ の成分が式(4.29a,b)のように得られる。

$$\mathbf{h}_\zeta^b = \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta, \quad \mathbf{h}_\zeta^p = \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \quad (4.28a,b)$$

$$\therefore \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^b = \sum_{\zeta=+,-} \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta \dot{R}_\zeta, \quad \therefore \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^p = \sum_{\zeta=+,-} \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \dot{\theta}_{k\zeta}^p \quad (\zeta=+,-) \quad (4.29a,b)$$

さらに、式(4.29a,b)を式(4.27b,c)に代入すると、座屈後の釣り合い関係が材端力と R_ζ によって次式のように示すことが出来る。

$$\tilde{\Xi}_\zeta = \tilde{\mathbf{f}}^T \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta + \hat{M}_{k\zeta} = 0 \quad (4.30a)$$

$$\tilde{I} = \sum_{\zeta=+,-} \Gamma_\zeta = \sum_{\zeta=+,-} [\tilde{\mathbf{f}}^T \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^p + \hat{M}_{k\zeta} \dot{\theta}_{k\zeta}^p] \geq 0 \quad (4.30b)$$

ここに、

$$\hat{M}_{k\zeta} = \hat{k}_{M\zeta} (-R_\zeta - \theta_{k\zeta}^p) \quad (4.30c)$$

である。

4. 3. 2 塑性流れ則

本項では、弦材の塑性変形をトラス梁要素における逐次計算で評価していくための巨視的な塑性流れ則を導出する。

弦材の塑性流れ則は以下の様に導出される。断面の仮定は第3章と同様である。M-N 相関図における各断面の降伏関数は、その断面の軸力、中間軸方向力、各点の曲げモーメントの関数として次式のように表される。

$$\Phi_{\eta\zeta}^{\pm} = \Phi_{\eta\zeta}^{\pm}(N_{\zeta}, \bar{N}_{\zeta}, M_{\eta\zeta}), \quad (\eta = i, j, k, \zeta = upper, lower) \quad (4.31)$$

弦材の任意の点において式(4.31)に示す降伏関数が $\Phi_{\eta\zeta}^{\pm} = 0$ に到達した時、その降伏関数が **active** となる。最大塑性散逸の原理により塑性流れ則を求めるために、塑性散逸項を示す式(4.30b)が、**active** 状態と判断された断面の降伏関数 $\Phi_{\eta\zeta}^{\pm} = 0$ を用いて次式の Lagrange 関数を設定する。

$$L(\tilde{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{M}}_{k\zeta}) = -\tilde{F} + \sum_{\zeta=+,-} \dot{\lambda}_{\zeta}^p \Phi_{\zeta} = -\left(\tilde{\mathbf{f}}^T \tilde{\mathbf{u}}^p + \sum_{\zeta=+,-} M_{k\zeta} \dot{\theta}_{k\zeta}^p \right) + \sum_{\zeta=+,-} \dot{\lambda}_{\zeta}^{pT} \Phi_{\zeta} \quad (4.32)$$

ここに、

$$\Phi_{\zeta} = \{\Phi_{i\zeta}^+, \Phi_{i\zeta}^-, \Phi_{k\zeta}^+, \Phi_{k\zeta}^-, \Phi_{j\zeta}^+, \Phi_{j\zeta}^-\}^T, \quad \dot{\lambda}_{\zeta}^p = \{\dot{\lambda}_{i\zeta}^{p+}, \dot{\lambda}_{i\zeta}^{p-}, \dot{\lambda}_{k\zeta}^{p+}, \dot{\lambda}_{k\zeta}^{p-}, \dot{\lambda}_{j\zeta}^{p+}, \dot{\lambda}_{j\zeta}^{p-}\}^T \quad (4.33a,b)$$

である。塑性散逸項が最大となる条件は、式(4.32)を独立な材端力成分である $\tilde{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{M}}_{k\zeta}$ 偏微分したものが零であることから、次式が得られる。

$$\frac{\partial L(\tilde{\mathbf{f}}, M_{k\zeta})}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} = -\tilde{\mathbf{u}}^p + \sum_{\zeta=+,-} \dot{\lambda}_{\zeta}^p \frac{\partial \Phi_{\zeta}}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial L(\tilde{\mathbf{f}}, M_{k\zeta})}{\partial \hat{\mathbf{M}}_{k\zeta}} = -\sum_{\zeta=+,-} \dot{\theta}_{k\zeta}^p + \sum_{\zeta=+,-} \dot{\lambda}_{\zeta}^p \frac{\partial \Phi_{\zeta}}{\partial \hat{\mathbf{M}}_{k\zeta}} = 0 \quad (4.34a,b)$$

$$\therefore \tilde{\mathbf{u}}^p = \sum_{\zeta=+,-} \left(\dot{\lambda}_{\zeta}^{pT} \frac{\partial \Phi_{\zeta}}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} \right)^T, \quad \dot{\theta}_{k\zeta}^p = \dot{\lambda}_{\zeta}^{pT} \frac{\partial \Phi_{\zeta}}{\partial \hat{\mathbf{M}}_{k\zeta}} \quad (\zeta = upper, lower) \quad (4.34c,d)$$

ここで、式(4.34c)の微係数に関して連鎖公式を適用すると、以下のように表現することができる。

$$\frac{\partial \Phi_{\zeta}}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} = \frac{\partial \Phi_{\zeta}}{\partial \mathbf{f}_{\zeta}} \frac{\partial \mathbf{f}_{\zeta}}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} \equiv \mathbf{G}_{\zeta}^T \tilde{\mathbf{h}}_{\zeta}^T; \quad \mathbf{G}_{\zeta}^T \equiv \frac{\partial \Phi_{\zeta}}{\partial \mathbf{f}_{\zeta}}, \quad \tilde{\mathbf{h}}_{\zeta}^T \equiv \frac{\partial \mathbf{f}_{\zeta}}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} \quad (4.35a-c)$$

塑性変位速度の表現については、直角変位図等の運動学的考察によって理解することができる。例えば、弦材の軸方向変位とトラス梁構面内の変位に対する塑性変位成分は Fig.4-5 の様に表される、また、弦材の回転に関する塑性変位とトラス梁構面外変位、振り率に対応する塑性変位成分は Fig.4-6 の様に表される。以上のような考察をまとめると、式(4.29b)と同様の関係が導出される。

ここに、式(4.35b)の $\mathbf{G}_\zeta$ は弦材の降伏関数に対する弦材の材端力成分による全微分から得られる微係数であり、式(4.35c)は式(4.18)から得られる関係である。この表現を用いると、式(4.34c)は次式のように表現できる。

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^p = \sum_{\zeta=+,-} \left(\dot{\lambda}_\zeta^{pT} \mathbf{G}_\zeta^T \tilde{\mathbf{h}}_\zeta^T \right)^T = \sum_{\zeta=+,-} \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{G}_\zeta \dot{\lambda}_\zeta^p \quad (4.36)$$

これを塑性散逸項に代入すると、以下のような関係が得られる。

$$\tilde{I} = \tilde{\mathbf{f}}^T \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^p + \sum_{\zeta=+,-} M_{k\zeta} \dot{\theta}_{k\zeta}^p = \sum_{\zeta=+,-} \left[\tilde{\mathbf{f}}^T \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{G}_\zeta + M_{k\zeta} \left(\frac{\partial \Phi_\zeta}{\partial M_{k\zeta}} \right)^T \right] \dot{\lambda}_\zeta^p \quad (4.37)$$

4. 3. 3 弾塑性接線剛性

トラス梁要素の荷重変位関係は、逐次計算における塑性化および座屈の進展を考慮することにより非線形となる。そこで本節では、トラス梁要素の弾性および弾塑性座屈後挙動を考慮した接線剛性を示す。まず、弾性座屈のみが生じる場合について考察する。座屈の進展が生じた(active となった)弦材 ζ に対して $\ddot{\Xi}_\zeta = 0$ が成り立つことから、

$$\begin{aligned}\ddot{\Xi}_\zeta &= \left[\left(\frac{\partial \ddot{\Xi}_\zeta}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} \right)^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right]^T \tilde{\mathbf{u}} + \left[\left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{R}_\zeta} \right)^T \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta + \tilde{\mathbf{f}}^T \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \frac{\partial \mathbf{C}_\zeta}{\partial \mathbf{R}_\zeta} - k_{M_\zeta} \right] \dot{\mathbf{R}}_\zeta \\ &= \tilde{\mathbf{k}}^e (\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta) \tilde{\mathbf{u}} - \sum_{\psi=+,-} \left[(\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta)^T \tilde{\mathbf{k}}^e (\tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{C}_\psi) + \left(k_{M_\zeta} - \tilde{\mathbf{f}}^T \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \frac{\partial \mathbf{C}_\zeta}{\partial \mathbf{R}_\zeta} \right) \delta_{\zeta\psi} \right] \dot{\mathbf{R}}_\psi \\ &= \tilde{\mathbf{k}}^e (\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta) \tilde{\mathbf{u}} - \sum_{\psi=+,-} G_{\zeta\psi}^{bb} \dot{\mathbf{R}}_\psi = 0\end{aligned}\tag{4.38}$$

ここに、

$$G_{\zeta\psi}^{bb} = (\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta)^T \tilde{\mathbf{k}}^e (\tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{C}_\psi) + \left(k_{M_\zeta} - \tilde{\mathbf{f}}^T \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \frac{\partial \mathbf{C}_\zeta}{\partial \mathbf{R}_\zeta} \right) \delta_{\zeta\psi}\tag{4.39}$$

である。式中の $\mathbf{C}_\zeta$ は式(4.5a)で示されているように、 $\mathbf{R}_\zeta$ の関数である。 $\delta_{\zeta\psi}$ はクロネッカーのデルタ記号である。以上より、 $\dot{\mathbf{R}}_\psi$ に対する連立方程式が次式のように得られる。

$$\sum_{\psi=+,-} G_{\zeta\psi}^{bb} \dot{\mathbf{R}}_\psi = \tilde{\mathbf{k}}^e (\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta) \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{for } \zeta \in \text{active}\tag{4.40}$$

ここで、 $G_{\zeta\psi}^{bb}$ の逆マトリクス $(G_{\zeta\psi}^{bb})^{-1}$ を用いて、 $\dot{\mathbf{R}}_\psi$ は次式となる。

$$\dot{\mathbf{R}}_\psi = \sum_{\zeta=+,-} (G_{\zeta\psi}^{bb})^{-1} \tilde{\mathbf{k}}^e (\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta) \tilde{\mathbf{u}}\tag{4.41}$$

以上を用いて、トラス梁要素の弾性接線剛性マトリクス $\tilde{\mathbf{K}}^{eb}$ は次式のように示される。

$$\tilde{\mathbf{f}} \equiv \tilde{\mathbf{k}}^e \tilde{\mathbf{u}} - \sum_{\zeta=+,-} \left\{ \tilde{\mathbf{k}}^e (\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta) \right\} \dot{\mathbf{R}}_\zeta = \left[\tilde{\mathbf{k}}^e - \sum_{\zeta=+,-} \sum_{\psi=+,-} (G_{\zeta\psi}^{bb})^{-1} \left\{ \tilde{\mathbf{k}}^e (\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta) \right\} \otimes \left\{ \tilde{\mathbf{k}}^e (\tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{C}_\psi) \right\} \right] \tilde{\mathbf{u}}\tag{4.42a}$$

$$\equiv \tilde{\mathbf{K}}^{eb} \tilde{\mathbf{u}}\tag{4.42b}$$

次に、弾塑性接線剛性について考察する。弾塑性接線剛性は、座屈変位の進展に加えて塑性変位成分の進展を考慮する必要がある。まず、弦材 ζ の降伏判定の際に active と判断された降伏条件の集合 $\dot{\Phi}_\zeta$

は Kuhn-Tucker 条件より $\dot{\Phi}_\zeta = \mathbf{0}$ を常にみたすことから、変位増分に関して次の関係が得られる。

$$\dot{\Phi}_\zeta = \left(\frac{\partial \Phi_\zeta}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right)^T \dot{\tilde{\mathbf{u}}} + \left(\frac{\partial \Phi_\zeta}{\partial \lambda_\zeta^p} \right)^T \dot{\lambda}_\zeta^p + \left(\frac{\partial \Phi_\zeta}{\partial R_\zeta} \right)^T \dot{R}_\zeta \quad (4.43a)$$

$$\begin{aligned} &= \left[\left(\frac{\partial \Phi_\zeta}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} \right)^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right]^T \dot{\tilde{\mathbf{u}}} + \left[\left(\frac{\partial \Phi_\zeta}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} \right)^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \lambda_\zeta^p} + \left(\frac{\partial \Phi_\zeta}{\partial M_{k\zeta}} \right)^T \frac{\partial M_{k\zeta}}{\partial \lambda_\zeta^p} \right]^T \dot{\lambda}_\zeta^p \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial \Phi_\zeta}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} \right)^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial R_\zeta} + \left(\frac{\partial \Phi_\zeta}{\partial M_{k\zeta}} \right)^T \frac{\partial M_{k\zeta}}{\partial R_\zeta} \right]^T \dot{R}_\zeta \end{aligned} \quad (4.43b)$$

$$\begin{aligned} &= \left[\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{G}_\zeta \right]^T \tilde{\mathbf{k}}^e \dot{\tilde{\mathbf{u}}} - \sum_{\psi=+,-} \left[\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{G}_\zeta \right]^T \tilde{\mathbf{k}}^e \left(\tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{G}_\psi \right) + \left(\frac{\partial \theta_{k\zeta}^p}{\partial \lambda_\zeta^p} \right)^T \hat{k}_{M\zeta} \left(\frac{\partial \theta_{k\zeta}^p}{\partial \lambda_\zeta^p} \right) \delta_{\zeta\psi} \right]^T \dot{\lambda}_\psi^p \\ &\quad - \sum_{\psi=+,-} \left[\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{G}_\zeta \right]^T \tilde{\mathbf{k}}^e \left(\tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{C}_\psi \right) + \left(\frac{\partial \theta_{k\zeta}^p}{\partial \lambda_\zeta^p} \right)^T \hat{k}_{M\zeta} \delta_{\zeta\psi} \right]^T \dot{R}_\psi = 0 \end{aligned} \quad (4.43c)$$

$$\begin{aligned} \therefore \tilde{\mathbf{k}}^e \left(\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{G}_\zeta \right)^T \dot{\tilde{\mathbf{u}}} &= \sum_{\psi=+,-} \left[\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{G}_\zeta \right]^T \tilde{\mathbf{k}}^e \left(\tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{G}_\psi \right) + \left(\frac{\partial \theta_{k\zeta}^p}{\partial \lambda_\zeta^p} \right)^T \hat{k}_{M\zeta} \left(\frac{\partial \theta_{k\zeta}^p}{\partial \lambda_\zeta^p} \right) \delta_{\zeta\psi} \right]^T \dot{\lambda}_\psi^p \\ &\quad + \left[\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{G}_\zeta \right]^T \tilde{\mathbf{k}}^e \sum_{\psi=+,-} \tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{C}_\psi + \left(\frac{\partial \theta_{k\zeta}^p}{\partial \lambda_\zeta^p} \right)^T \hat{k}_{M\zeta} \right]^T \dot{R}_\zeta \end{aligned} \quad (4.44)$$

ここに、式中の $(\partial \theta_{k\zeta}^p / \partial \lambda_\zeta^p)$ は、式(4.34d)の関係から $(\partial \Phi_\zeta / \partial \hat{M}_{k\zeta})$ と同値とみなすことができる。次に、塑性化の進展と同時に座屈の進展が生じた(active となった)弦材 ζ に対して、式(4.38)と同様に $\dot{\tilde{\Xi}}_\zeta = 0$ が成り立つことから、変位増分に関して以下の関係が得られる。

$$\dot{\tilde{\Xi}}_\zeta = \left(\frac{\partial \tilde{\Xi}_\zeta}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right)^T \dot{\tilde{\mathbf{u}}} + \left(\frac{\partial \tilde{\Xi}_\zeta}{\partial \lambda_\zeta^p} \right)^T \dot{\lambda}_\zeta^p + \left(\frac{\partial \tilde{\Xi}_\zeta}{\partial R_\zeta} \right)^T \dot{R}_\zeta \quad (4.45a)$$

$$\begin{aligned} &= \left[\left(\frac{\partial \tilde{\Xi}_\zeta}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} \right)^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right]^T \dot{\tilde{\mathbf{u}}} + \left[\left(\frac{\partial \tilde{\Xi}_\zeta}{\partial \tilde{\mathbf{f}}} \right)^T \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta - \hat{k}_{M\zeta} \frac{\partial \theta_{k\zeta}^p}{\partial \lambda_\zeta^p} \right]^T \dot{\lambda}_\zeta^p + \left[\left(\frac{\partial \tilde{\Xi}_\zeta}{\partial R_\zeta} \right)^T \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta + \tilde{\mathbf{f}}^T \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \frac{\partial \mathbf{C}_\zeta}{\partial R_\zeta} - \hat{k}_{M\zeta} \right]^T \dot{R}_\zeta \\ &\quad (4.45b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \tilde{\mathbf{k}}^e \left(\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta \right)^T \dot{\tilde{\mathbf{u}}} - \sum_{\psi=+,-} \left[\left(\tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{G}_\psi \right)^T \tilde{\mathbf{k}}^e \left(\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta \right) + \hat{k}_{M\zeta} \frac{\partial \theta_{k\zeta}^p}{\partial \lambda_\zeta^p} \delta_{\zeta\psi} \right]^T \dot{\lambda}_\psi^p \\ &\quad - \sum_{\psi=+,-} \left[\left(\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta \right)^T \tilde{\mathbf{k}}^e \left(\tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{C}_\psi \right) + \left(\hat{k}_{M\zeta} - \mathbf{f}^T \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \frac{\partial \mathbf{C}_\zeta}{\partial R_\zeta} \right) \delta_{\zeta\psi} \right]^T \dot{R}_\psi = 0 \end{aligned} \quad (4.45c)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \tilde{\mathbf{k}}^e(\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta) \dot{\tilde{\mathbf{u}}} &= \sum_{\psi=+,-} \left(\left(\tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{G}_\psi \right)^T \tilde{\mathbf{k}}^e(\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta) + \hat{k}_{M\zeta} \frac{\partial \theta_{k\zeta}^p}{\partial \lambda_\zeta^p} \delta_{\zeta\psi} \right)^T \dot{\lambda}_\psi^p \\
 &+ \sum_{\psi=+,-} \left[\left(\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta \right)^T \tilde{\mathbf{k}}^e(\tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{C}_\psi) + \left(\hat{k}_{M\zeta} - \mathbf{f}^T \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \frac{\partial \mathbf{C}_\zeta}{\partial \mathbf{R}_\zeta} \right) \delta_{\zeta\psi} \right] \dot{\mathbf{R}}_\psi
 \end{aligned} \quad (4.46)$$

式(4.44)および式(4.46)をまとめると、次式が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{G}_\zeta \right)^T \tilde{\mathbf{k}}^e \\ \left(\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta \right)^T \tilde{\mathbf{k}}^e \end{array} \right\} \dot{\tilde{\mathbf{u}}} = \sum_{\psi=+,-} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pp} & \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pb} \\ \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bp} & \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bb} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\lambda}_\psi^p \\ \dot{\mathbf{R}}_\psi \end{array} \right\} \quad (4.47)$$

ここに、

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pp} & \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pb} \\ \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bp} & \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bb} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \sum_{\psi=+,-} \left[\left(\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{G}_\zeta \right)^T \tilde{\mathbf{k}}^e(\tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{G}_\psi) + \left(\frac{\partial \theta_{k\zeta}^p}{\partial \lambda_\zeta^p} \right)^T \hat{k}_{M\zeta} \left(\frac{\partial \theta_{k\zeta}^p}{\partial \lambda_\zeta^p} \right) \delta_{\zeta\psi} \right]^T & \sum_{\psi=+,-} \left[\left(\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{G}_\zeta \right)^T \tilde{\mathbf{k}}^e(\tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{C}_\psi) + \left(\frac{\partial \theta_{k\zeta}^p}{\partial \lambda_\zeta^p} \right)^T \hat{k}_{M\zeta} \delta_{\zeta\psi} \right]^T \\ \sum_{\psi=+,-} \left[\left(\tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{G}_\psi \right)^T \tilde{\mathbf{k}}^e(\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta) + \hat{k}_{M\zeta} \frac{\partial \theta_{k\zeta}^p}{\partial \lambda_\zeta^p} \delta_{\zeta\psi} \right]^T & \sum_{\psi=+,-} \left[\left(\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta \right)^T \tilde{\mathbf{k}}^e(\tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{C}_\psi) + \left(\hat{k}_{M\zeta} - \mathbf{f}^T \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \frac{\partial \mathbf{C}_\zeta}{\partial \mathbf{R}_\zeta} \right) \delta_{\zeta\psi} \right]^T \end{array} \right] \quad (4.48)$$

である。式(4.47)より、座屈および塑性変位の進展を表す変数は以下のように示される。

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\lambda}_\psi^p \\ \dot{\mathbf{R}}_\psi \end{array} \right\} = \sum_{\psi=+,-} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pp} & \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pb} \\ \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bp} & \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bb} \end{array} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \left(\tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{G}_\psi \right)^T \tilde{\mathbf{k}}^e \\ \left(\tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{C}_\psi \right)^T \tilde{\mathbf{k}}^e \end{array} \right\} \dot{\tilde{\mathbf{u}}} \quad (4.49)$$

以上を用いて、トラス梁要素の弾塑性接線剛性マトリクス $\tilde{\mathbf{K}}^{epb}$ は次式となる。

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{\mathbf{f}}} &= \tilde{\mathbf{k}}^e(\dot{\tilde{\mathbf{u}}} - \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^p - \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^b) = \tilde{\mathbf{k}}^e \left(\dot{\tilde{\mathbf{u}}} - \sum_{\zeta=+,-} \left\{ \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{G}_\zeta \quad \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta \right\} \left\{ \begin{array}{c} \dot{\lambda}_\zeta^p \\ \dot{\mathbf{R}}_\zeta \end{array} \right\} \right) \\
 &= \left(\tilde{\mathbf{k}}^e - \sum_{\zeta=+,-} \sum_{\psi=+,-} \left\{ \tilde{\mathbf{k}}^e(\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{G}_\zeta) \quad \tilde{\mathbf{k}}^e(\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta) \right\} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pp} & \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pb} \\ \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bp} & \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bb} \end{array} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \left(\tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{G}_\psi \right)^T \tilde{\mathbf{k}}^e \\ \left(\tilde{\mathbf{h}}_\psi \mathbf{C}_\psi \right)^T \tilde{\mathbf{k}}^e \end{array} \right\} \right) \dot{\tilde{\mathbf{u}}} \\
 &\equiv \tilde{\mathbf{K}}^{epb} \dot{\tilde{\mathbf{u}}}
 \end{aligned} \quad (4.50)$$

4. 3. 4 数値計算手順

本節では、前節で導出した定式化による数値解析法(提案手法)を用いて、材端変位から材端力を算出する手順を示す。

[弾性試行段階]

時刻 $t = t$ における材端変位とその座屈成分、塑性成分、時刻 $t = t + \Delta t$ における材端変位が既知であるとする。

$${}^{trial}\tilde{\mathbf{u}} = {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}, \quad {}^{trial}\tilde{\mathbf{u}}^p = {}^t\tilde{\mathbf{u}}^p, \quad {}^{trial}\tilde{\mathbf{u}}^b = {}^t\tilde{\mathbf{u}}^b, \quad {}^{trial}R_\zeta = {}^tR_\zeta, \quad {}^{trial}\theta_{k\zeta}^p = {}^t\theta_{k\zeta}^p \quad (4.51a-e)$$

また、増分計算に関する係数ベクトル ${}^{trial}\mathbf{C}_\zeta$ に関して、以下のように計算される。

$${}^{trial}\mathbf{C}_\zeta = \mathbf{C}_\zeta \left({}^{trial}R_\zeta \right) \quad (4.52)$$

現ステップの座屈変位増分が零であるとして、 $t = t + \Delta t$ における次の試行材端力を式(4.27a)により計算する。また、降伏条件を算出するための内部モーメント $\hat{M}_{k\zeta}$ を式(4.30c)より算出する。

$${}^{trial}\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{k}}^e \left({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}} - {}^{trial}\tilde{\mathbf{u}}^p - {}^{trial}\tilde{\mathbf{u}}^b \right) \quad (4.53a)$$

$${}^{trial}\hat{M}_{k\zeta} = \hat{k}_{M\zeta} \left(-{}^{trial}R_\zeta - {}^{trial}\theta_{k\zeta}^p \right) \quad (4.53b)$$

材端力を用いて上・下弦材の塑性ヒンジ位置における降伏条件式(4.31)およびモーメント釣り合い条件式(4.30a)を計算する。

$${}^{trial}\Phi_{\eta\zeta}^\pm = {}^{trial}\Phi_{\eta\zeta}^\pm \left({}^{trial}\tilde{\mathbf{f}}, {}^{trial}\hat{M}_{k\zeta} \right) \quad (\eta = i, k, j) \quad (4.54a)$$

$${}^{trial}\tilde{\Xi}_\zeta = {}^{trial}\tilde{\mathbf{f}}^T \tilde{\mathbf{h}}_\zeta {}^{trial}\mathbf{C}_\zeta + {}^{trial}\hat{M}_{k\zeta} = 0 \quad (4.54b)$$

[座屈判定]

式(4.54a,b)にて計算された全ての ${}^{trial}\Phi_{\eta\zeta}^\pm$, ${}^{trial}\tilde{\Xi}_\zeta$ の絶対値が許容値の範囲内 (${}^{trial}\Phi_{\eta\zeta}^\pm \leq 0$, $|{}^{trial}\tilde{\Xi}_\zeta| \leq Tolerance$) であれば、線形状態を保持していると判断する。一方、許容値を超えていた場合、弦材 ζ は座屈進展状態である(active な状態である)と判断され、以下の手順による塑性および座屈変位の修正をおこなう。

[座屈変位修正段階]

p 回目の収斂計算において、弦材 ζ が active な状態にある (${}^{trial}\Phi_{\eta\zeta}^\pm > 0$, $|{}^{t+\Delta t}_{(p)}\tilde{\Xi}_\zeta| > Tolerance$) と判断されたので、ここまでの座屈条件式等を用いて、 $p+1$ 回目の収斂計算における座屈変位および材端力ベクトルの修正を Newton 法によりおこなう。

$$\begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}_{(p+1)}\delta\Delta\Phi_\zeta \\ {}^{t+\Delta t}_{(p+1)}\delta\Delta\tilde{\Xi}_\zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}_{(p)}\delta\Delta\Phi_\zeta \\ {}^{t+\Delta t}_{(p)}\delta\Delta\tilde{\Xi}_\zeta \end{Bmatrix} - \sum_{\psi=+,-} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pp} & \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pb} \\ \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bp} & \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\Delta\boldsymbol{\lambda}_\psi^p \\ \delta\Delta\mathbf{R}_\psi \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.55)$$

$$\begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}_{(p)}\delta\Delta\Phi_\zeta \\ {}^{t+\Delta t}_{(p)}\delta\Delta\tilde{\Xi}_\zeta \end{Bmatrix} = \sum_{\psi=+,-} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pp} & \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pb} \\ \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bp} & \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\Delta\boldsymbol{\lambda}_\psi^p \\ \delta\Delta\mathbf{R}_\psi \end{Bmatrix} \quad \text{for } \zeta \in \text{active} \quad (4.56)$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} \delta\Delta\boldsymbol{\lambda}_\psi^p \\ \delta\Delta\mathbf{R}_\psi \end{Bmatrix} = \sum_{\psi=+,-} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pp} & \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pb} \\ \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bp} & \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bb} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}_{(p)}\delta\Delta\Phi_\zeta \\ {}^{t+\Delta t}_{(p)}\delta\Delta\tilde{\Xi}_\zeta \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

式(4.57)で得られた $\delta\Delta\boldsymbol{\lambda}_\psi$, $\delta\Delta\mathbf{R}_\psi$ を用いて座屈変位増分を更新する。具体的には以下の計算をおこなう。

$$\begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}_{(p+1)}\boldsymbol{\lambda}_\psi^p \\ {}^{t+\Delta t}_{(p+1)}\mathbf{R}_\psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}_{(p)}\boldsymbol{\lambda}_\psi^p \\ {}^{t+\Delta t}_{(p)}\mathbf{R}_\psi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta\Delta\boldsymbol{\lambda}_\psi^p \\ \delta\Delta\mathbf{R}_\psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}_{(p)}\boldsymbol{\lambda}_\psi^p \\ {}^{t+\Delta t}_{(p)}\mathbf{R}_\psi \end{Bmatrix} + \sum_{\psi=+,-} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pp} & \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pb} \\ \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bp} & \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bb} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}_{(p)}\delta\Delta\Phi_\zeta \\ {}^{t+\Delta t}_{(p)}\delta\Delta\tilde{\Xi}_\zeta \end{Bmatrix} \quad (4.58a)$$

$$\begin{aligned} & {}^{t+\Delta t}_{(p+1)}\tilde{\mathbf{u}}^{pb} \\ &= {}^{t+\Delta t}_{(p+1)}\tilde{\mathbf{u}}^p + {}^{t+\Delta t}_{(p+1)}\tilde{\mathbf{u}}^b \\ &= \left({}^{t+\Delta t}_{(p)}\tilde{\mathbf{u}}^p + {}^{t+\Delta t}_{(p)}\tilde{\mathbf{u}}^b \right) + \left(\delta\Delta\tilde{\mathbf{u}}^p + \delta\Delta\tilde{\mathbf{u}}^b \right) \\ &= {}^{t+\Delta t}_{(p)}\tilde{\mathbf{u}}^{pb} + \sum_{\zeta=+,-} \sum_{\psi=+,-} \left(\tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{G}_\zeta \quad \tilde{\mathbf{h}}_\zeta \mathbf{C}_\zeta \right) \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pp} & \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pb} \\ \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bp} & \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bb} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}_{(p)}\delta\Delta\Phi_\zeta \\ {}^{t+\Delta t}_{(p)}\delta\Delta\tilde{\Xi}_\zeta \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.58b)$$

$$\begin{aligned} & {}^{t+\Delta t}_{(p+1)}\theta_{k\zeta}^p = {}^{t+\Delta t}_{(p)}\theta_{k\zeta}^p + \delta\Delta\theta_{k\zeta}^p = {}^{t+\Delta t}_{(p)}\theta_{k\zeta}^p + \left(\frac{\partial {}^{t+\Delta t}_{(p)}\delta\Delta\Phi_\zeta}{\partial \mathbf{M}_{k\zeta}} \right)^T \delta\Delta\boldsymbol{\lambda}_\psi^p \\ & {}^{t+\Delta t}_{(p+1)}\mathbf{C}_\zeta = \mathbf{C}_\zeta \left({}^{t+\Delta t}_{(p+1)}\mathbf{R}_\zeta \right) \end{aligned} \quad (4.58c)$$

さらに、材端力およびモーメント釣り合い関係の更新をおこない、全ての弦材に対して ${}^{trial}\Phi_{\eta\zeta}^\pm \leq \text{tolerance}$ または $\delta\Delta\lambda_{\eta\zeta}^{p+} \leq \text{Tolerance}$ 、もしくは $\left| {}^{t+\Delta t}_{(p+1)}\tilde{\Xi}_\eta \right| \leq \text{Tolerance}$ または $\left| \delta\Delta\mathbf{R}_\zeta \right| \leq \text{Tolerance}$ となるまで[座屈変位修正段階]の計算を繰り返す。

$${}^{t+\Delta t}_{(p+1)}\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{k}}^e \left({}^{t+\Delta t}_{(p+1)}\tilde{\mathbf{u}} - {}^{t+\Delta t}_{(p+1)}\tilde{\mathbf{u}}^{pb} \right) \quad (4.59a)$$

$${}^{t+\Delta t}_{(p+1)}\hat{\mathbf{M}}_{k\zeta} = \hat{\mathbf{k}}_{M\zeta} \left(-{}^{t+\Delta t}_{(p+1)}\mathbf{R}_\zeta - {}^{t+\Delta t}_{(p+1)}\theta_{k\zeta}^p \right) \quad (4.59b)$$

4. 4 数値解析例による妥当性検証

4. 4. 1 解析対象及び解析モデル

単一のトラス梁部材に対して離散化手法による数値解と比較することにより、前節までで提案したトラス梁要素(提案手法)の妥当性を検証する。

解析対象は Fig.4-7(a,b)に示すワーレン型トラス梁である。既往のトラス梁要素⁶⁰⁾と異なり、弦材の端部における構面外回転とねじり回転を拘束し、弦材同士の接合を想定したものとする。解析対象は、材長 $L=3000\text{mm}$ 、梁せい $H=1300\text{mm}$ 、斜材の組数 $S=2$ または 4 とし、弦材と斜材のなす角度 $\theta_d \doteq 60^\circ$ とする。弦材の断面は中空円断面を仮定し、斜材は弦材と同等の断面積を有する断面とする。ヤング係数はいずれの構成部材も 205000N/mm^2 とし、弦材の弾塑性解析における降伏応力度は 235N/mm^2 とする。外力は、上弦材に構面外座屈が生じるようにトラス梁材端の点 J に軸方向および構面内回転方向の強制変位を比例的に加える。強制変位は以下の 2 パターンとする。

载荷パターン 1: 最終的に上・下弦材両方が座屈する場合($\tilde{\delta} = 1.98H\tilde{\theta}_{sj}$)

载荷パターン 2: 上弦材のみが座屈する場合($\tilde{\delta} = 0.095H\tilde{\theta}_{sj}$ もしくは $\tilde{\delta} = 0.5H\tilde{\theta}_{sj}$)

この解析対象を、提案手法においては Fig.4-7(c)に示す単一要素として解析をおこなう。材端の境界条件は、点 I、点 J の構面内回転と点 J の軸方向変位のみを解放し、その他の変位および回転を拘束した部材を考える。離散化手法は各弦材を $(50 \times S)$ 等分した梁要素と、斜材 1 本に対してトラス要素 1 要素により構成される解析モデルを用いる。弦材端部の境界条件は Fig.4-7(a,b)に示すとおりである。弦材の両端がピンであることを想定した Case (ix),(x)の境界条件は図中の丸括弧()で、両端の回転拘束を想定した Case(i)~(viii)は図中の角括弧[]で、それぞれ示している。

離散化手法に与える初期不整は、各载荷パターンに対して固有値解析をおこなった時、得られたトラス梁の 1 次固有モードに対して最大振幅が $L/20000$ となるように与える。また、提案手法に対しては、第 2 章および第 3 章の方法に準じている。

解析パラメータは Table4-1 に示すように、弾性座屈、弾塑性座屈それぞれを想定した断面、斜材の組数 S 、2 種類の载荷パターンである。また、 $S=2$ の弾塑性座屈を想定した例題に対しては、既往のトラス梁要素と同様に材端の接合条件をピンとした例をおこなう。すなわち、計 10 個の例に対して検証をおこなう。なお、弾塑性座屈に関する解析例は、Fig.4-8 に示す繰り返し载荷とする。

4. 4. 2 解析結果及び考察

Fig.4-9~4-74 に解析結果を示す。いずれの図においても、シンボルが提案手法、線が離散化手法による結果である。符号は軸方向変位に対しては圧縮を正とし、その他の材端力および変位は Fig.4-2 に示した座標系の方向を正とする。

離散化手法における材端力は、弦材を要素分割した時の、各点 I, J, J, J に最も近い梁要素の材端力から算出する。以下に、点 J の材端力を算出する場合の算出式を示す。

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= \frac{N_{j+} + N_{j-}}{2}, \tilde{M}_{sj} = (N_{j+} - N_{j-}) \frac{H}{2}, \tilde{M}_{ti} = M_{i+} + M_{i-}, \tilde{B}_i = (M_{i+} - M_{i-}) \frac{H}{2}, \\ \tilde{M}_{tj} &= M_{j+} + M_{j-}, \tilde{B}_j = (M_{j+} - M_{j-}) \frac{H}{2} \end{aligned} \quad (4.60a-f)$$

ここに、離散化手法における $N_{j+}, N_{j-}, M_{j+}, M_{j-}$ はそれぞれ、上弦材の軸力、下弦材の軸力、上弦材の曲げモーメント、下弦材の曲げモーメントに関する、点 J, J に接合される梁要素の値である。

各材端力は断面の全塑性状態における以下の耐力で、軸方向変位は降伏軸力時の変位 $\tilde{\delta}_y$ で、それぞれ無次元化している。

$$\tilde{N}_y = 2N_{y\zeta} = 2\sigma_y a_{c\zeta}, \tilde{M}_{sp} = \sigma_y a_{c\zeta} H, \tilde{M}_{tp} = 2M_{p\zeta} = 2\sigma_y Z_{p\zeta}, \tilde{B}_p = \sigma_y Z_{p\zeta} H \quad (4.61a-d)$$

ここに、 $\tilde{N}_y, \tilde{M}_{sp}, \tilde{M}_{tp}, \tilde{B}_p$ はそれぞれ軸力、構面内曲げモーメント、構面外曲げモーメント、曲げ振りモーメントに対する全塑性耐力、 $N_{y\zeta}, M_{p\zeta}$ はそれぞれ弦材の軸力、曲げモーメントに対する全塑性耐力、 σ_y は材料の降伏応力度、 $a_{c\zeta}, Z_{p\zeta}$ は弦材の断面積および全塑性断面係数を示す。以下に、幾つかの解析例毎に結果の考察をおこなう。

< $\lambda=150$, 载荷パターン 1 (Case (i), Case (v))>

Case (i)における数値例の結果を Fig.4-9~4-14 に、Case (v)における数値例の結果を Fig.4-37~4-42 に、それぞれ示す。Fig.4-9,37 が軸力($\tilde{N}$)-軸方向変位($\tilde{\delta}$)関係、Fig.4-10,38 が J 端の構面内曲げモーメント($\tilde{M}_{sj}$)- $\tilde{\delta}$ 関係、Fig.4-11,39 が上下弦材両端部の軸方向力($N_{\eta\zeta}; \eta = i, j, \zeta = +, -$)の変遷、Fig.4-12,40 が上下弦材の点 K_ζ における横変位($v_\zeta = \alpha_\zeta(1 - \alpha_\zeta)LR_\zeta$)- $\tilde{\delta}$ 関係、Fig.4-13,41 が構面外曲げモーメント($\tilde{M}_{ti}, \tilde{M}_{tj}$)- $\tilde{\delta}$ 関係、Fig.4-14,42 が曲げねじりモーメント($\tilde{B}_i, \tilde{B}_j$)- $\tilde{\delta}$ 関係である。

はじめに Case (i)について、材端力の変遷を重点的に述べる。上弦材の弾性座屈により、▼において $\tilde{N}$ の剛性が低下するが、その後も耐力が上昇を続ける一方、 $\tilde{M}_{sj}$ 、ひいては構面内のせん断力 $\tilde{Q}$ は小

さくなる。このとき、各弦材の軸力に換算した Fig.4-11 を見ると、上弦材が座屈の判定となったのち、上下弦材の軸力分布が変化することに伴い上下弦材の各端部の軸方向力が同じ軸方向力の値に指向しているように見て取れる。これはすなわち、上下弦材の変形モードが近づき、中間軸方向力が減少していることを意味する。その後、 $\tilde{N}$ が最大荷重となり、 $\tilde{M}_{sj}$ 、 $\tilde{Q}$ がゼロとなったところで一定の値で推移している。上下弦材でみると、中間軸方向力がゼロになり、 ∇ において全ての弦材の軸力が、両端を固定されたときのオイラー座屈荷重となっていることがわかる。巨視的な材端力として、トラス梁要素の $\tilde{N}$ および $\tilde{M}_{sj}$ の推移の様子がよく一致しており、 $\tilde{Q}$ も追跡できていると言える。また、Fig.4-13,14 に示した材端力 $\tilde{M}_i, \tilde{M}_j$ 、 $\tilde{B}_i, \tilde{B}_j$ に関しても、座屈後の傾向を捉えている。

同様の傾向が、斜材の組数 $S=4$ とした Case (v)でも確認できる。すなわち、上弦材の座屈時の材端力(▼)および下弦材の座屈時の材端力(▽)が概ね対応し、各弦材の軸力がオイラー座屈荷重に指向し、 ∇ において上下弦材のすべての位置でオイラー座屈荷重を示すことが分かる。また、Fig.4-40 に示すように、中間位置における各弦材の座屈変形量も良い対応を示している。

$\lambda=150$, 载荷パターン 2 (Case (ii), Case (vi))>

Case (ii)における数値例の結果を Fig.4-15~4-20 に、Case (vi)における数値例の結果を Fig.4-43~4-48 に、それぞれ示す。Fig.4-15,43 が $\tilde{N}-\tilde{\delta}$ 関係、Fig. 4-16,44 が J 端の $\tilde{M}_{sj}-\tilde{\delta}$ 関係、Fig.4-17,45 が各弦材の軸力 $N_{\eta\zeta}$ の変遷、Fig.4-18,46 が上下弦材の点 K における横変位 $v_{\zeta}-\tilde{\delta}$ 関係、Fig.4-19,47 が $\tilde{M}_i, \tilde{M}_j-\tilde{\delta}$ 関係、Fig.4-20,48 が $\tilde{B}_i, \tilde{B}_j-\tilde{\delta}$ 関係である。

はじめに、Case (ii)について考察する。上弦材が座屈するまでは線形を保持し、▼において上弦材が座屈したところがトラス梁の巨視的(圧縮側)軸方向力の最大値となる。その後 $\tilde{N}$ は急激に低下し、全体に引張力となる一方、 $\tilde{M}_{sj}$ が上昇する結果となっている。このとき、Fig.4-19,20 において提案手法における $\tilde{M}_i$ 、 $\tilde{B}_j$ はそれぞれ誤差を有する結果となっている。これは Fig.4-17 より、弦材の軸力分布を見ると、一部が引張となっていることから、弦材の曲げ剛性が引張時に誤差を有する方法となっていると考えられる。したがって、引張が生じる時の弦材の曲げ剛性をより適切に評価する必要がある。また、微小変位の仮定を基に弦材と梁要素の変位を関連付けているため、座屈後の大変形領域においては改善の余地があるものの、 $\tilde{N}$ および $\tilde{M}_{sj}$ の弾性座屈耐力及びその後の劣化挙動をよく捉えているため、一定の座屈後挙動の評価が可能な手法である。

上記の考察は、斜材の組数 S を 4 とした Case (vi)に関しても、Case (ii)と同様の傾向が確認できる。

< $\lambda=40$, 载荷パターン 1 (Case (iii), Case (vii), Case (ix))>

本例は弾塑性座屈を考慮した例である。繰返し载荷における履歴の順序は各図の①~④である。Case (iii)における数値例の結果を Fig.4-21~4-28 に、Case (vii)における数値例の結果を Fig.4-49~4-56 に、Case (ix)における数値例の結果を Fig.4-65~4-69 に、それぞれ示す。Fig.4-21,49,65 が $\tilde{N}$ - $\tilde{\delta}$ 関係、Fig.4-22,50,66 が J 端の $\tilde{M}_{sj}$ - $\tilde{\delta}$ 関係、Fig.4-23,51,67 が $\tilde{M}_{sj}$ - $\tilde{N}$ 相関関係、Fig.4-24,52,68 および Fig.4-25,53,69 が各弦材の軸力 $N_{\eta\zeta}$ の変遷、Fig.4-26,54 が $\tilde{M}_{ii}, \tilde{M}_{ij}$ - $\tilde{\delta}$ 関係、Fig.4-27,55 が $\tilde{B}_i, \tilde{B}_j$ - $\tilde{\delta}$ 関係、Fig.4-28,56 が上下弦材両端部のモーメント ($M_{\eta\zeta}$) - $N_{\eta\zeta}$ 相関関係である。

はじめに、Case(iii)について考察する。まず、上弦材点 J_+ において塑性化が生じ(▼a.)、続く▼b.において上弦材の点 I_+ にモーメントが加わるにより、全塑性状態となる。このとき、 $\tilde{N}$ は剛性が低下するものの耐力上昇は継続し、 $\tilde{M}_{sj}$ は耐力が下降する。その後さらに負荷を続けると、▼c.において下弦材の点 J が全塑性状態となる。このとき、Fig.4-21 に示す $\tilde{N}$ が低下となると同時に、Fig.4-22 に示す $\tilde{M}_{sj}$ に関しては耐力の変化が鈍感となる。その後、 $\tilde{\delta} = 2\tilde{\delta}_y$ において除荷状態となった時、2つの▽において上弦材の点 J_+ 、点 I_+ の順に塑性化が生じる。矢印③において再度負荷状態とし、 $\tilde{\delta} = 2\tilde{\delta}_y$ 以降も負荷状態を継続させると、提案手法における $\tilde{M}_{sj}$ は耐力一定となっている一方、離散化手法は上昇を続けている。これは、塑性ヒンジ法に基づく提案手法では仮定した位置での全塑性状態後は耐力の上昇がないが、離散化手法においては再負荷時に塑性化領域が変化することが考えられるため、耐力の上昇が生じているものと考えられる。この差異の検討は塑性ヒンジ位置の評価を除荷、負荷の切り替えの際などにおこなうことによって可能となると考えられるが、一定の塑性ヒンジ位置とした提案手法においても概ね評価が可能な手法となっている。

Fig.4-26,27 に示す $\tilde{M}_{ii}, \tilde{M}_{ij}, \tilde{B}_i, \tilde{B}_j$ については、座屈がどの弦材にも生じていない初期段階においては 0 であるが、▼a.において上弦材の構面外座屈が発生した時に全てが変化する。これらの材端力の精度は $\tilde{N}$ の精度ほどではないものの、追跡可能であることが示される。

斜材の組数 $S=4$ とした解析対象に同様の载荷パターンをおこなった Case (vi)に関しては、上弦材の座屈後の弦材の軸力配分が異なるが、座屈後の挙動は同様である。トラス梁に構面内曲げモーメントより軸力が多く導入される場合は、 S の数に関わらず材端力を再現することが可能である。

$S=2$ に対して、上下弦材の両端の構面外回転をピンとした場合についておこなった例を、Case (ix)として示す。ピン接合の場合は、点 I_c, J_c の断面の塑性化が生じないため、 $\tilde{M}_{ii}, \tilde{M}_{ij}, \tilde{B}_i, \tilde{B}_j$ は常にゼロとなる。この点についても、軸力が多く導入される場合は材端力を非常に精度良く再現可能である。

< $\lambda=40$, 载荷パターン 2 (Case (iv), Case (viii), Case (x))>

本例も弾塑性座屈を考慮した例である。Case (iv)における数値例の結果を Fig.4-29~4-36 に、Case (viii)における数値例の結果を Fig.4-57~4-64 に、Case (x)における数値例の結果を Fig.4-70~4-74 に、それぞれ示す。Fig.4-29,57,70 が $\tilde{N} - \delta$ 関係、Fig.4-30,58,71 が J 端の $\tilde{M}_{sj} - \delta$ 関係、Fig.4-31,59,72 が $\tilde{M}_{sj} - \tilde{N}$ 相関関係、Fig.4-32,60,73 および Fig.4-33,61,74 が各弦材の軸力 $N_{\eta\zeta}$ の変遷、Fig.4-34,62 が $\tilde{M}_{ti}, \tilde{M}_{tj} - \delta$ 関係、Fig.4-35,63 が $\tilde{B}_i, \tilde{B}_j - \delta$ 関係、Fig.4-36,64 が上下弦材両端部の $M_{\eta\zeta} - N_{\eta\zeta}$ 相関関係である。

はじめに、Case (iv)における数値例の結果より座屈後挙動の進展の考察をおこなう。まず、▼において上弦材の点 J が塑性化し、座屈が進行する。その後の $\tilde{N}$ の低下、 $\tilde{M}_{sj}$ の上昇は弾性座屈の場合を再現した先述の Case(ii)と同様の傾向である。軸力が下降する途中で除荷し、その後再度負荷状態とした時、下弦材の点 J において引張降伏が生じ、提案手法において耐力が一定となる。一方、離散化手法における下弦材の点 J は引張力が緩やかに上昇し、提案手法において塑性化が生じた位置では軸降伏が見られなかった。これは、離散化手法の解析解において上弦材の座屈後、横変位が生じていることにより、斜材を介して下弦材に横方向の力が加わり、強制外力として下弦材の材端にモーメントが加わるため、引張力のみでの塑性化ではない応力状態となっていることが原因であると考えられる。この傾向は Fig.4-36(c),(d)の丸で囲われた位置において、離散化手法において $M_{\eta\zeta}$ に零ではない値が生じている事から推測される。提案手法では斜材から伝わる弦材の横方向への力の伝達が微小であることを仮定しているため、この影響は発現していない。また、除荷後に見られる差異は、第3章の数値解析例において指摘した断面の部分的降伏区間における応力状態の差異である。これらの差異の改善は今後の課題とする。一方、 $\tilde{M}_{ti}, \tilde{M}_{tj}, \tilde{B}_i, \tilde{B}_j$ の推移についてはよく追跡できていることが確認されるため、座屈後の材端力は追跡可能であると考えられる。

斜材の組数 $S=4$ とした解析対象に同様の载荷パターンをおこなった Case (viii)に関する結果を考察する。この結果は他の $S=4$ の結果(Case (v), (vi), (vii))とは異なり、上弦材の座屈の発生以降の提案手法と離散化手法の数値解において $\tilde{N}, \tilde{M}_{sj}$ には差異が生じている。これは、Fig.4-59 に示す離散化手法の最終変形図から、弦材の構面内方向に変位が生じていることが原因である。本論文の提案手法は弦材の構面内方向の並進変位による塑性化を考慮していないが、トラス梁の条件によっては構面内方向の変形も生じうる。Case (viii)のように、トラス梁せいに対して全長が大きく、構面内曲げが大きくトラス梁に加わるような条件においてトラス梁要素の精度が低下しているが、提案手法が早期に引張降伏の判断を採るため、安全側の結果が得られているといえる。また、Fig.4-62,63 の $\tilde{M}_{ti}, \tilde{M}_{tj}, \tilde{B}_i, \tilde{B}_j$ に関して

は高い精度で離散化手法の解を再現しているため、十分妥当な解であるといえる。

S=2 に対して、上下弦材の両端の構面外回転をピンとした場合についておこなった Case (x) に関しては、解の安定性を保持するために離散化手法において硬化則を導入している影響があるものの、元結・緒方の手法を包括する解を得られているといえる。

4. 5 まとめ

本章では、弦材が周辺の部材と剛に接合される平行弦トラス梁部材の構面外座屈現象を単一要素として解析可能とするためのトラス梁要素を提案した。以下に、本章で得られた知見を示す。

1. トラス梁要素に拡張するにあたり、第2章、第3章で提示した弦材に関する手法を一部修正し、弦材とトラス梁要素の関係則を示した。弦材の軸方向変位はトラス梁要素の軸方向変位および構面内回転に、弦材の材端回転はトラス梁要素の構面外回転および捩り率に、それぞれ関連付けられる。したがって、トラス梁要素の自由度としては、断面の反りを考慮した梁理論と同様の自由度が必要になる。
2. 単一要素として解析可能とするためのトラス梁要素の定式化を熱力学に基づいて導出し、基本式、弾性接線剛性および数値計算手順を示した。定式化の際には Helmholtz 自由エネルギーおよび熱力学の第2法則を示す Clausius-Duhem 不等式を使用し、弦材の塑性化を考慮するための降伏関数に対しては最大塑性散逸の原理のみを用いている。
3. 以上の数値解析法の妥当性を検証するために、中空円断面の弦材によって構成されるトラス梁を対象に、提案手法と離散化手法の数値解析結果を比較した。以下に、妥当性を検証する中で得られた提案手法の適用範囲を要約する。

- ・提案手法は、斜材の組数を示す $S=2\sim 4$ 程度の1スパン分を1要素とする手法として十分な精度を持つ。
- ・斜材が弾性かつ座屈しない条件の下での手法である。
- ・提案手法は、上下弦材の弾性座屈荷重および弾塑性座屈の発生と、それに伴うトラス梁としての材端力の推移を再現可能であるほか、各弦材の中間に位置する塑性ヒンジ点の横変位の増加の様子を追跡可能である。
- ・弦材端部の構面外回転が拘束されている場合、ピン接合である場合のいずれに対しても評価可能である。このことは、本論文における提案手法が、接合条件がピンの場合のみを想定した既往の研究を包括するものであることを示す。
- ・トラス梁に対して軸力が主に作用する場合(载荷パターン1)、構面内の曲げが主に作用する場合(载荷パターン2)のいずれの外力条件に対しても適用可能である。中でも、载荷パターン1のように軸力が支配的な応力状態において高い精度で材端力を得られる手法である。ただし、斜材

の組数(S)が4、载荷パターン2の場合については、弦材の構面内(t 方向)変形が大きくなるため、軸力および構面内曲げモーメントに誤差が生じる結果が見られた。

- ・本論文では弦材とトラス梁要素の変換則において、微小変位の仮定を導入している。しかし、弦材が座屈し、トラス梁内部の変形が大きくなる場合など、大変形に対応する手法とはなっていない。この点の改善は今後の課題とする。
 - ・本論文ではワーレン型トラス梁に対する定式化を示したが、一部の微細な変更により、その他の平行弦トラス梁の手法に拡張することが可能である。
4. 本章においては、単一のトラス梁部材に対してあらゆるパラメータを想定して妥当性を検証したが、周辺の弦材と接合され、構面外回転の影響を受ける場合などに関しては検証をおこなっていない。そこで、次章の空間構造への適用例によって、構面外の回転に対する妥当性を考察する。

Chapter 4

Tables and Figures

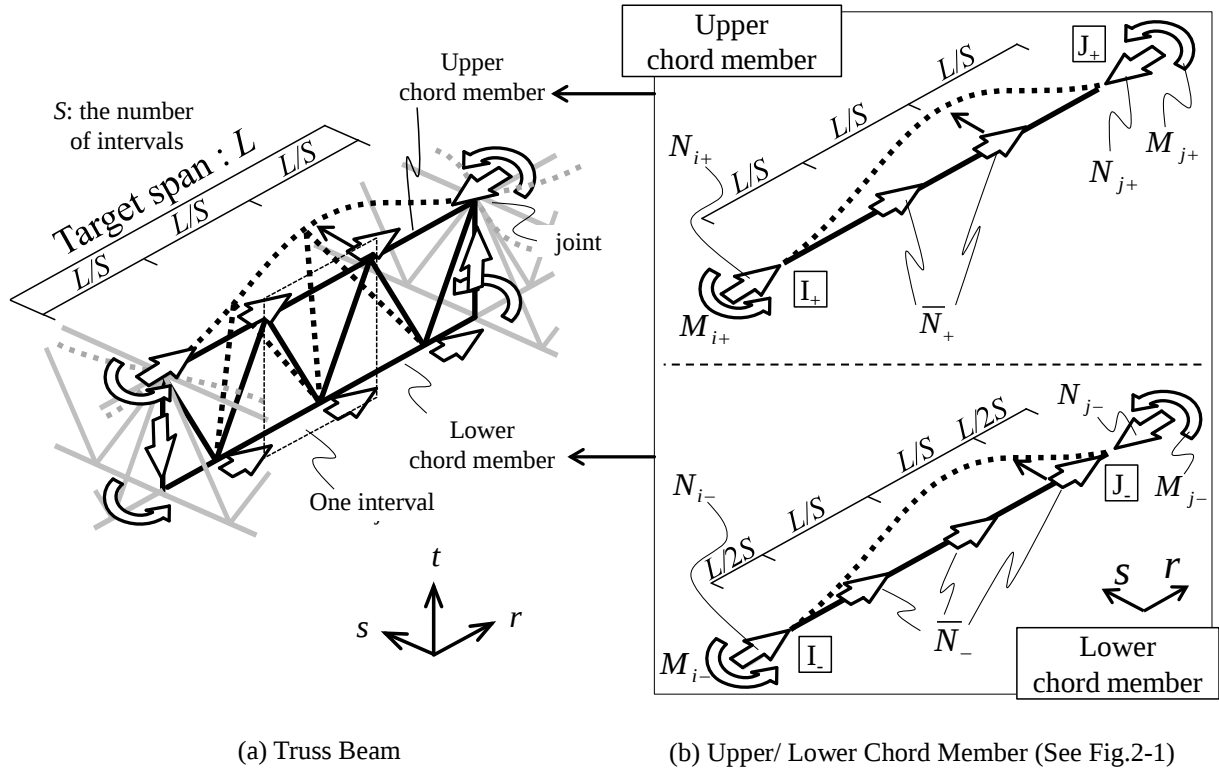


Fig.4-1 Target truss beam member

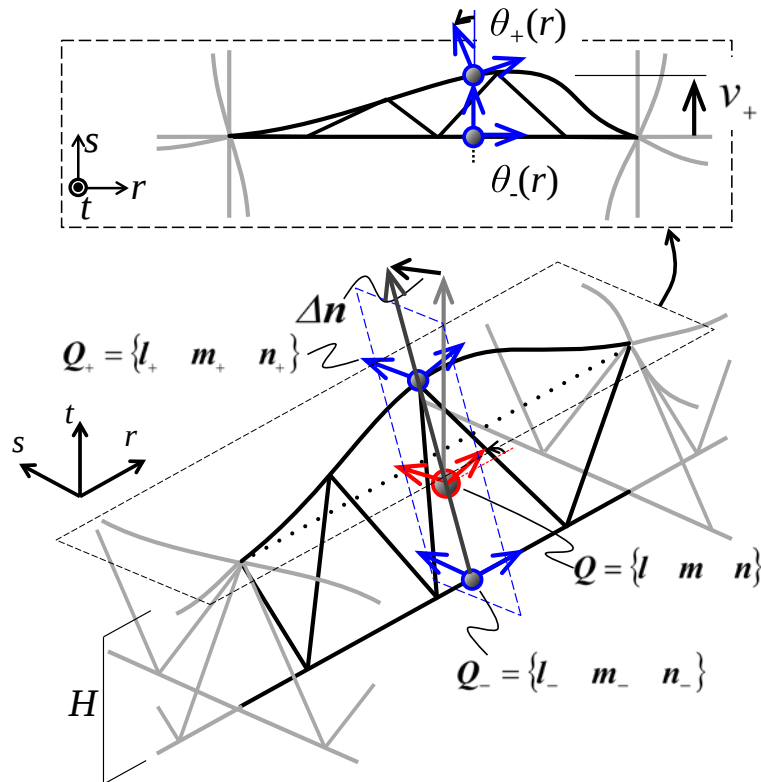


Fig.4-2 Rotations and orthonormal bases of a truss beam and chord members

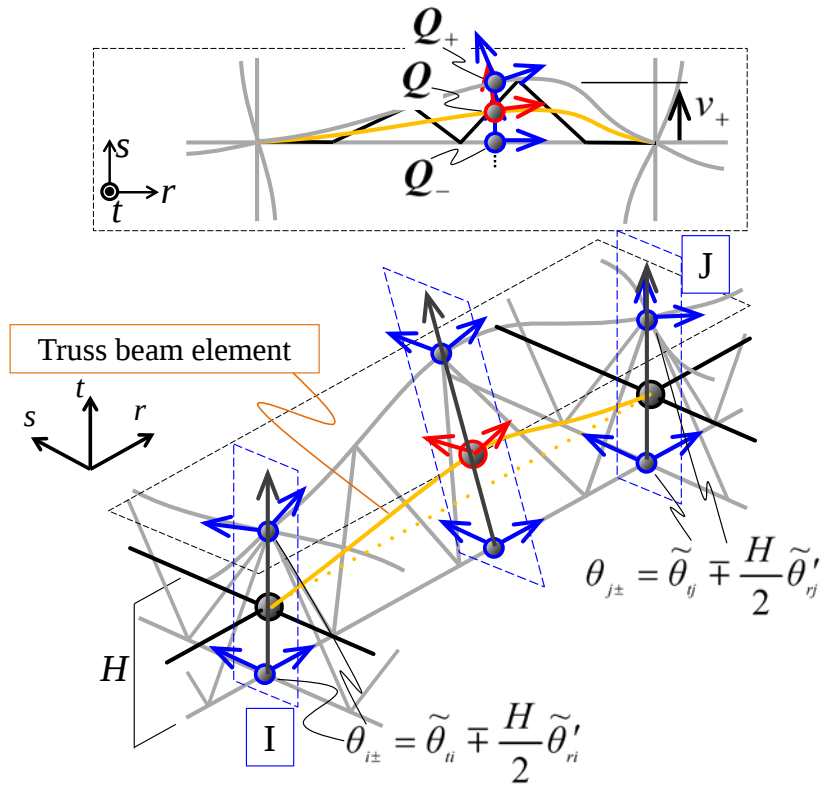


Fig.4-3 Out-of-plane rotation of the truss beam and warping deformations of each node

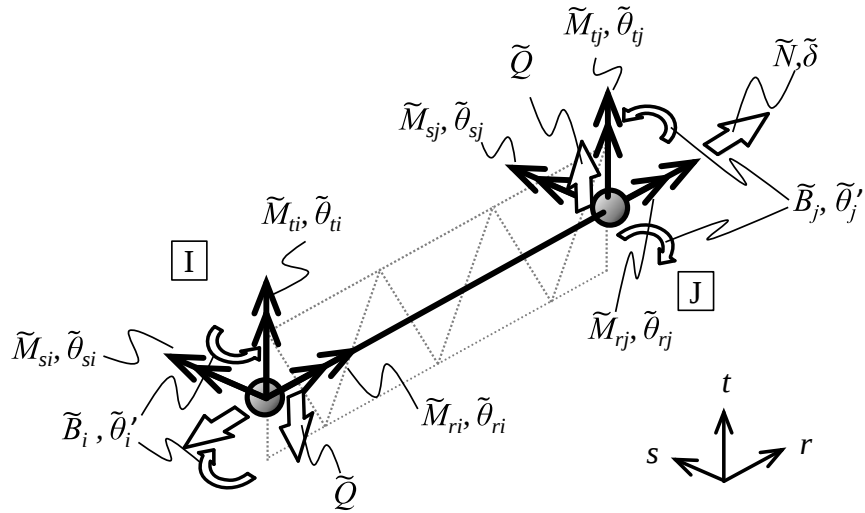


Fig.4-4 Definition of the nine degrees of freedom in a truss beam element

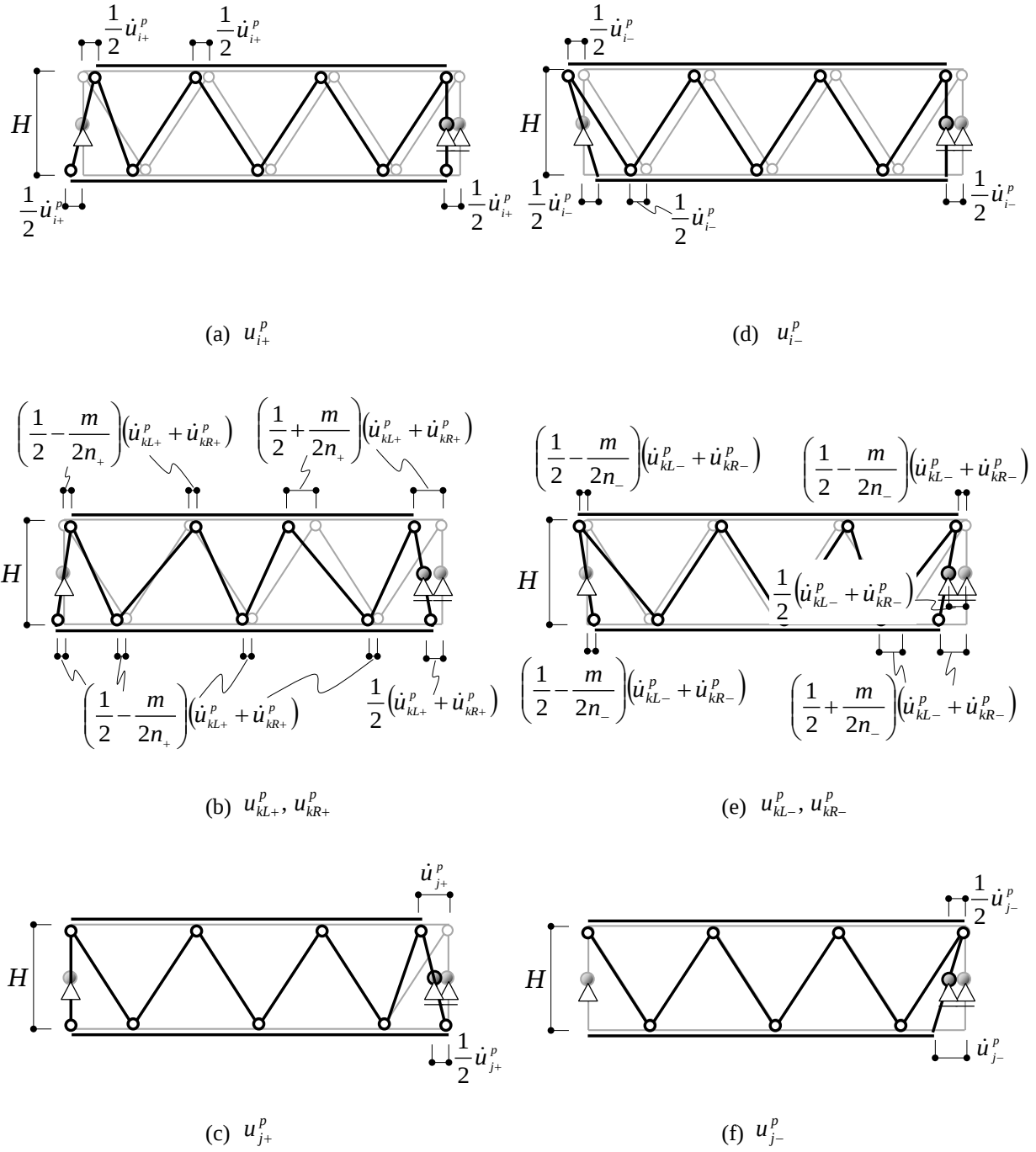


Fig.4-5 Geometrical Configuration for in-plane plastic deformations

Note: — : Initial state, — : deformed state

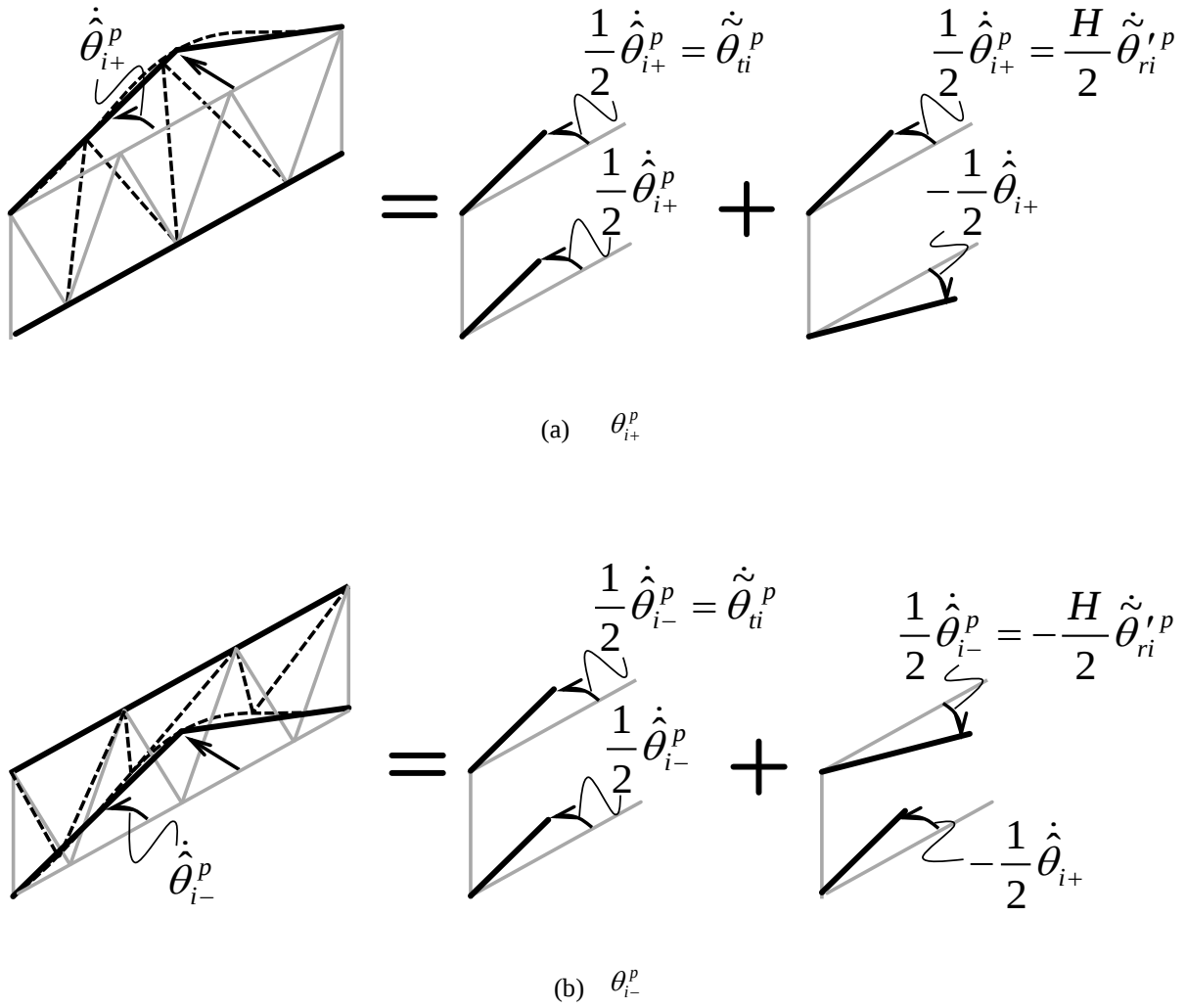
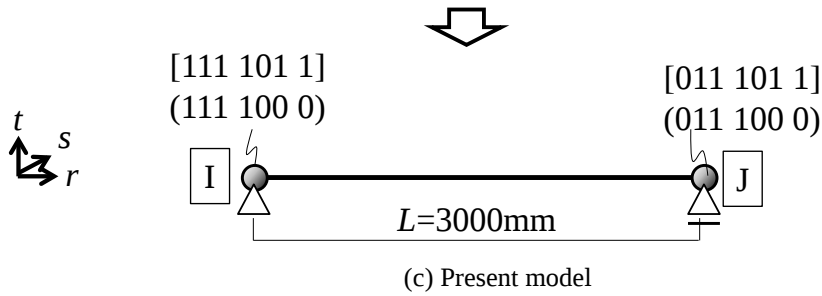
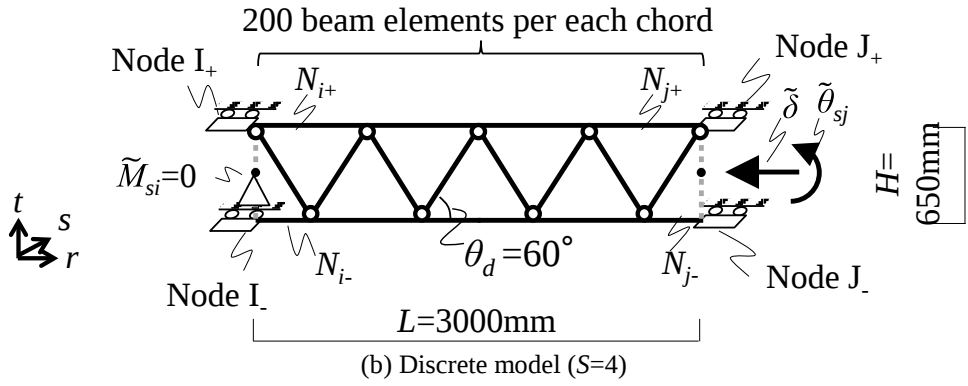
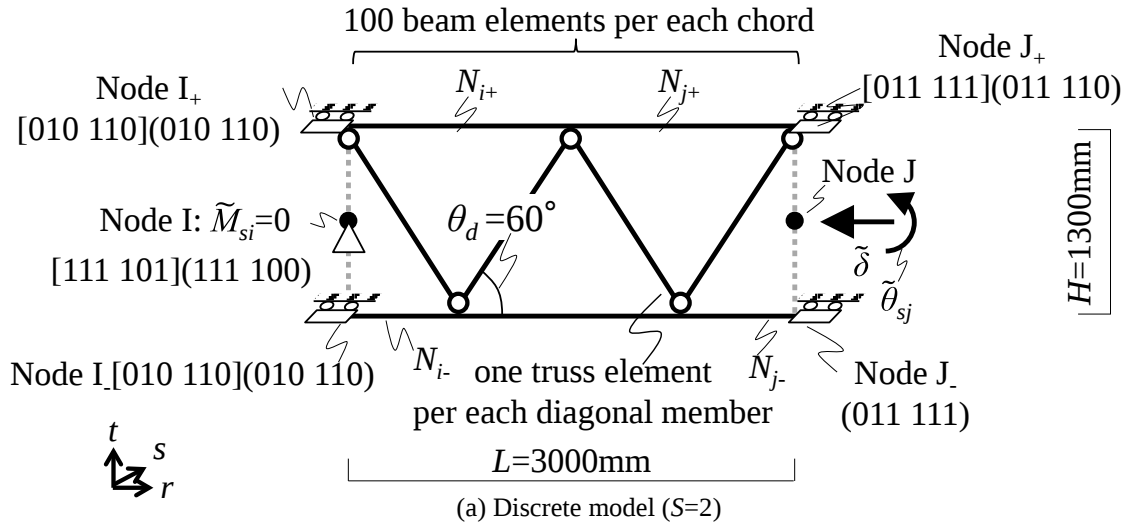


Fig.4-6 Geometrical configuration for out-of-plane plastic deformations (node I)



Boundary condition:	Discrete model $[u_r \ u_s \ u_t \ \theta_r \ \theta_s \ \theta_t]$
(1: Fixed, 0: Released)	Present model $[u_r \ u_s \ u_t \ \theta_r \ \theta_s \ \theta_t \ \theta_r']$
brackets $\cdots$ $[\]$: Cases (i)~(viii), $(\)$: Cases (ix), (x)	

Fig.4-7 Analysis model

Table 4-1 Analysis cases

Cases	Number of intervals of diagonal members (S)	slenderness ratio of chord members (size)	Loading Condition	α_{ζ}
(i)	2	150 (D=32mm,d=24mm)	$\tilde{\delta} = 1.98H\tilde{\theta}_{sj}$ (Monotonic)	$\alpha_+ = 0.49$ $\alpha_- = 0.49$
(ii)	2	150 (D=32mm,d=24mm)	$\tilde{\delta} = 0.095H\tilde{\theta}_{sj}$ (Monotonic)	$\alpha_+ = 0.49$ $\alpha_- = 0.25$
(iii)	2	40 (D=108.7mm,d=103.4mm)	$\tilde{\delta} = 1.98H\tilde{\theta}_{sj}$ (Cyclic)	$\alpha_+ = 0.45$ $\alpha_- = 0.25$
(iv)	2	40 (D=108.7mm,d=103.4mm)	$\tilde{\delta} = 0.5H\tilde{\theta}_{sj}$ (Cyclic)	$\alpha_+ = 0.38$ $\alpha_- = 0.25$
(v)	4	150 (D=32mm,d=24mm)	$\tilde{\delta} = 1.98H\tilde{\theta}_{sj}$ (Monotonic)	$\alpha_+ = 0.49$ $\alpha_- = 0.49$
(vi)	4	150 (D=32mm,d=24mm)	$\tilde{\delta} = 0.095H\tilde{\theta}_{sj}$ (Monotonic)	$\alpha_+ = 0.46$ $\alpha_- = 0.12$
(vii)	4	40 (D=108.7mm,d=103.4mm)	$\tilde{\delta} = 1.98H\tilde{\theta}_{sj}$ (Cyclic)	$\alpha_+ = 0.25$ $\alpha_- = 0.12$
(viii)	4	40 (D=108.7mm,d=103.4mm)	$\tilde{\delta} = 0.5H\tilde{\theta}_{sj}$ (Cyclic)	$\alpha_+ = 0.25$ $\alpha_- = 0.12$
(ix)	2	40 (D=108.7mm,d=103.4mm)	$\tilde{\delta} = 1.98H\tilde{\theta}_{sj}$ (Cyclic)	$\alpha_+ = 0.45$ $\alpha_- = 0.25$
(x)	2	40 (D=108.7mm,d=103.4mm)	$\tilde{\delta} = 0.5H\tilde{\theta}_{sj}$ (Cyclic)	$\alpha_+ = 0.38$ $\alpha_- = 0.25$

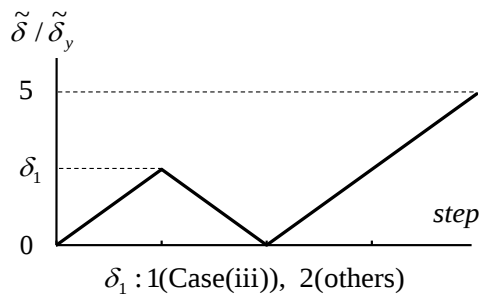
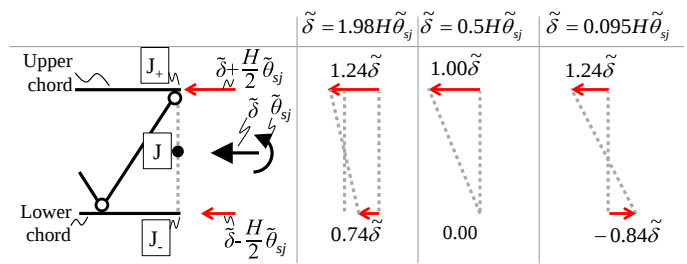

 Fig.4-8(a) Loading displacement
(Case(iii),(iv),(vii),(viii),(ix) and (x))


Fig.4-8(b) Loading condition

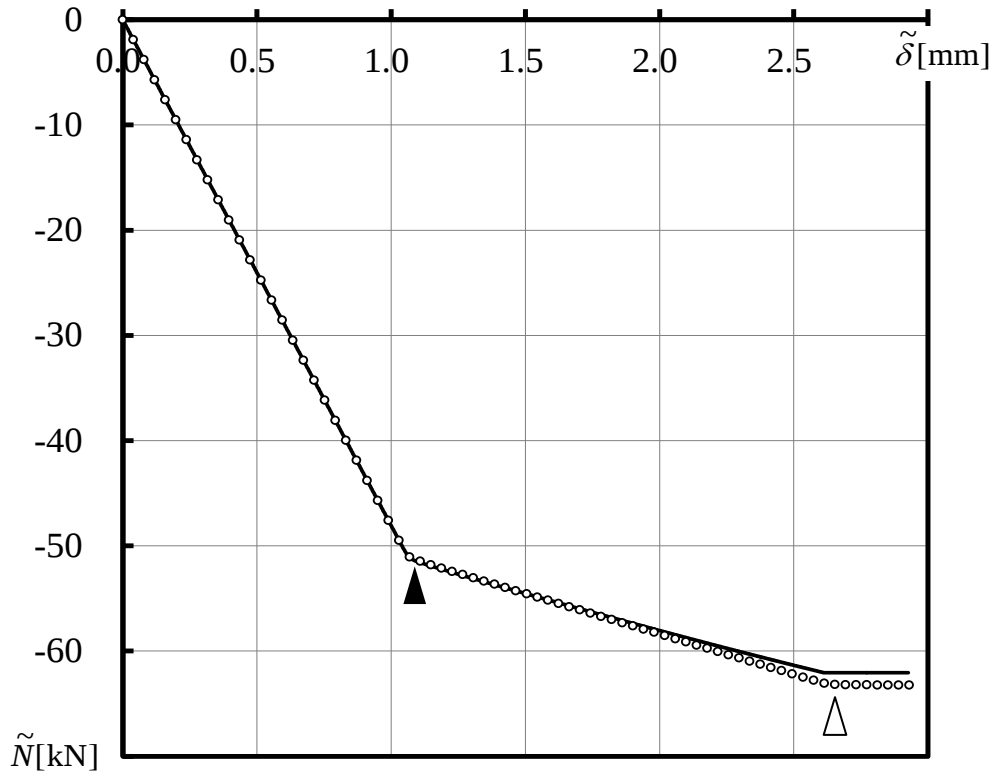


Fig.4-9 Axial force-stretch ($\tilde{N}$ - $\tilde{\delta}$) relation (Case (i))

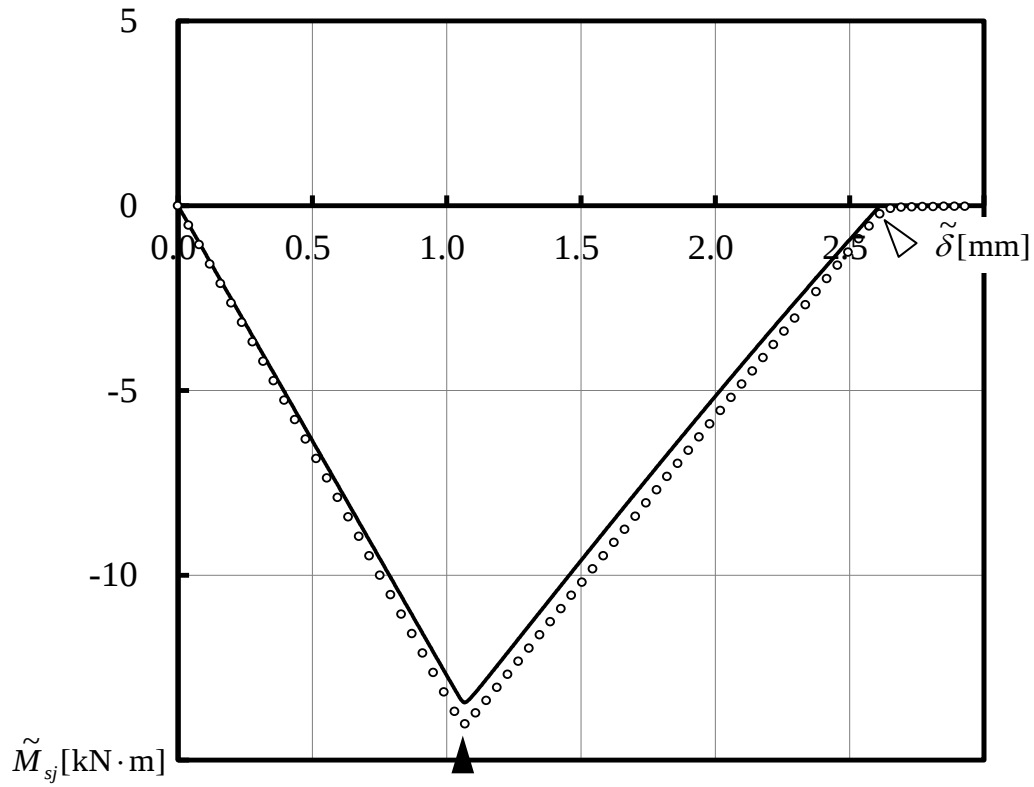


Fig.4-10 In-plane bending moment- stretch ($\tilde{M}_{sj}$ - $\tilde{\delta}$) relation (Case (i))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

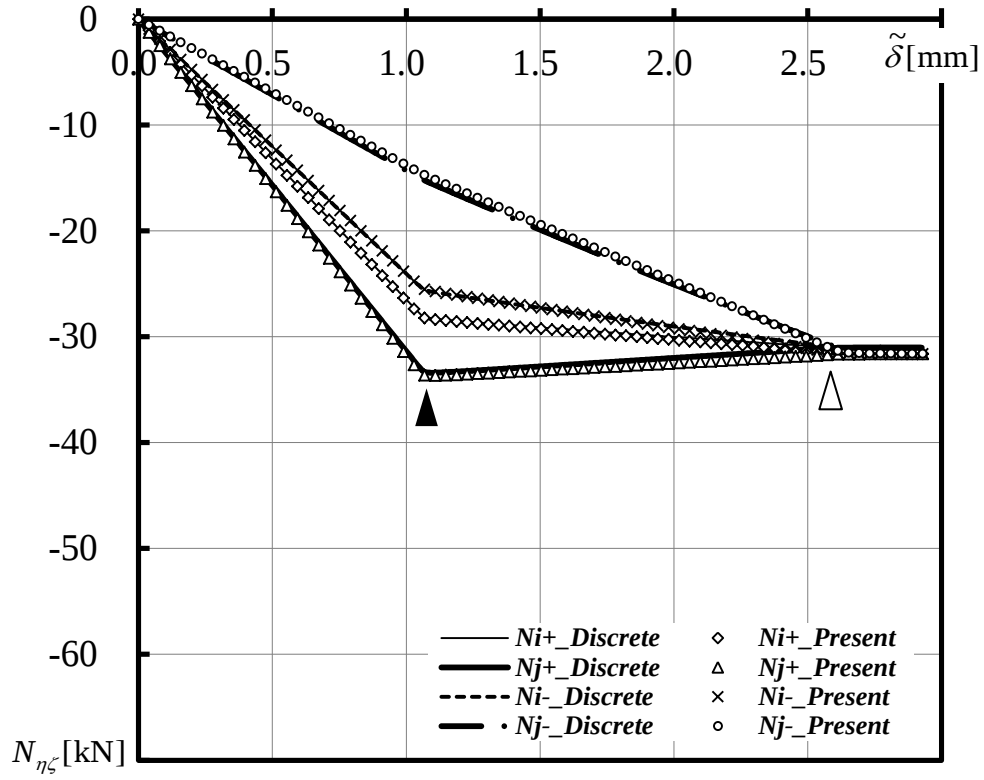


Fig.4-11 Axial force-stretch relation (chord members) (Case (i))

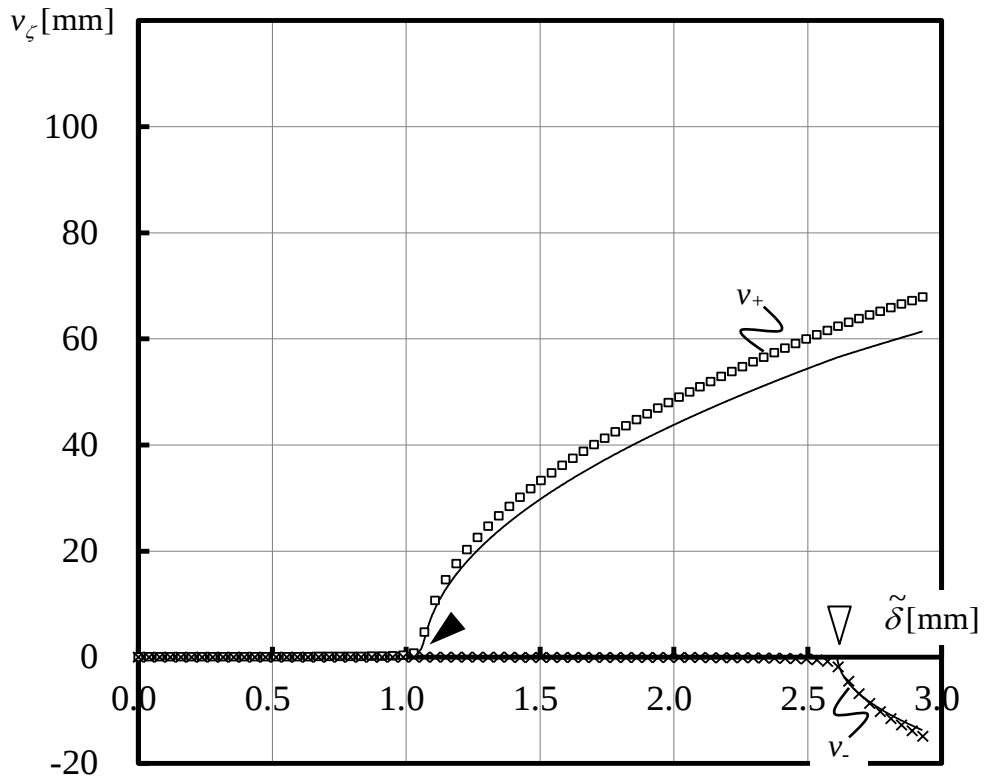


Fig.4-12 Lateral deformation of chord member- stretch relation (Case (i))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

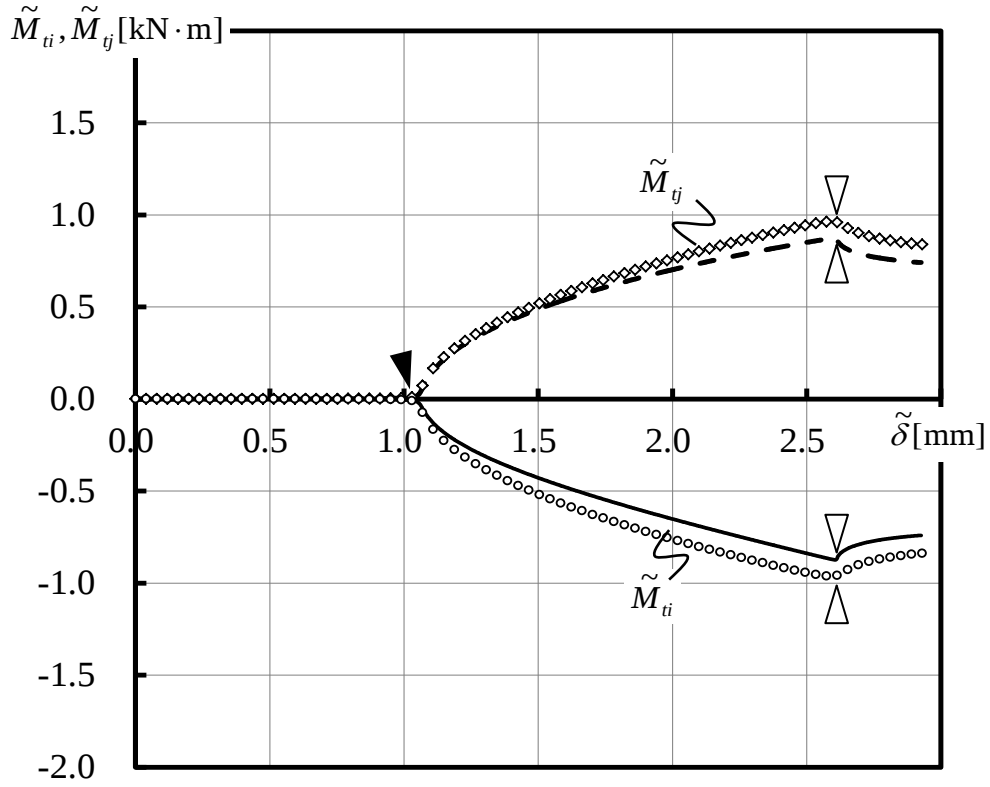


Fig.4-13 Out-of-plane bending moment- stretch relation (Case (i))

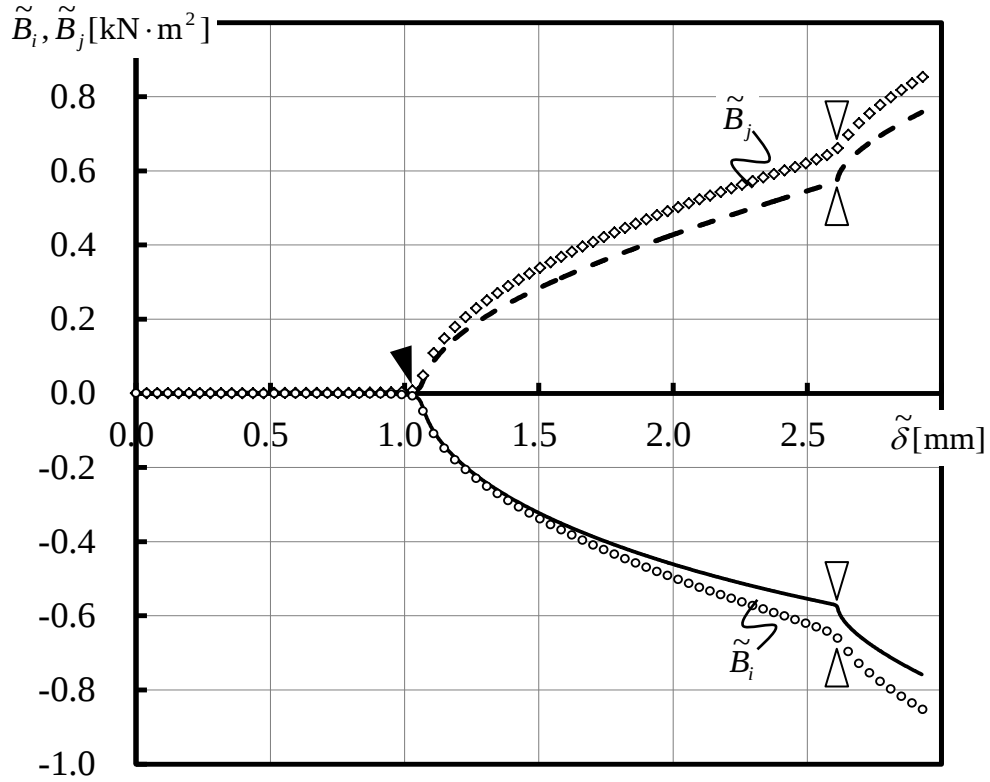


Fig.4-14 Bimoment-stretch relation (Case (i))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

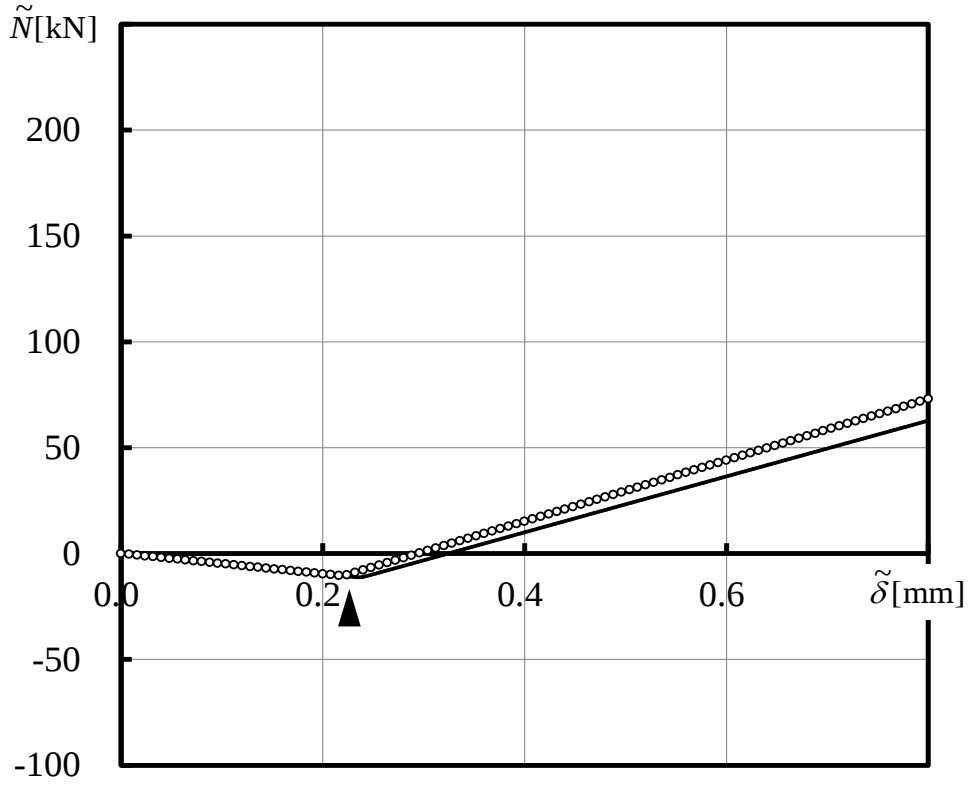


Fig.4-15 Axial force-stretch ($\tilde{N}$ - $\tilde{\delta}$) relation (Case (ii))

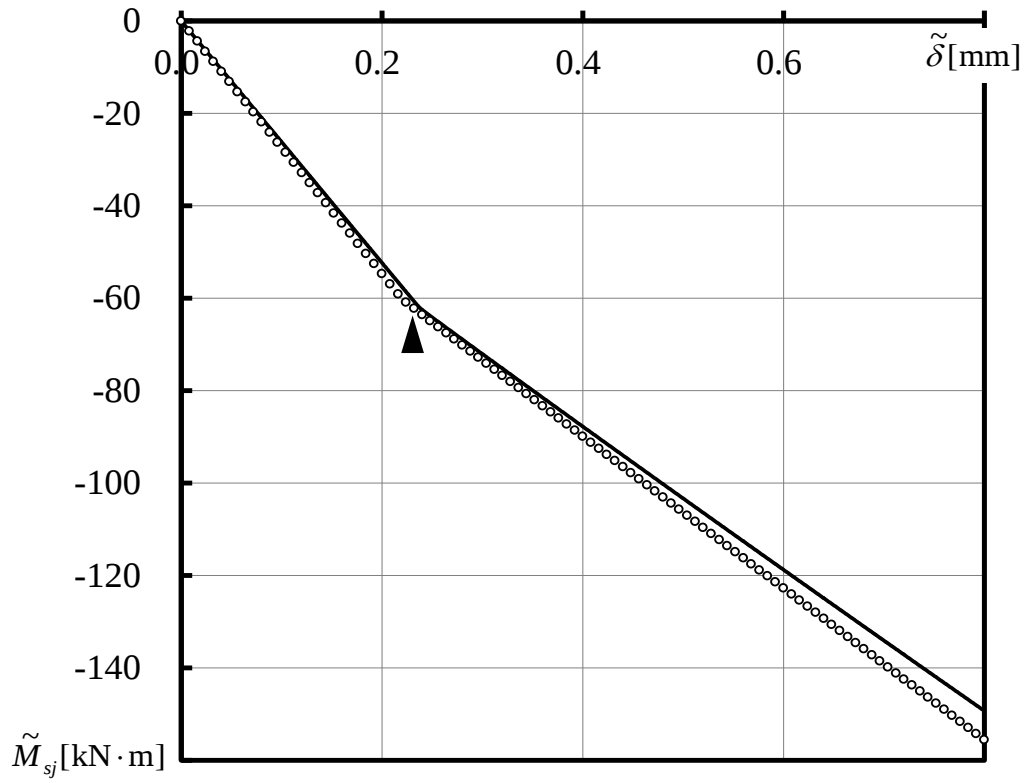


Fig.4-16 In-plane bending moment- stretch ($\tilde{M}_{sj}$ - $\tilde{\delta}$) relation (Case (ii))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

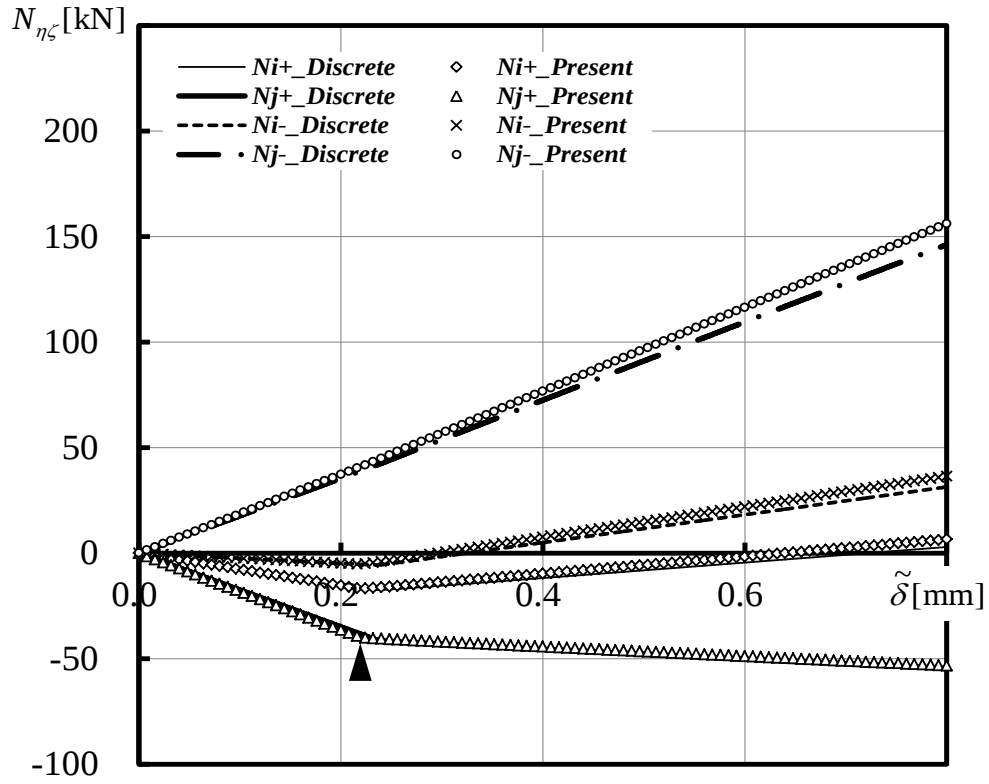


Fig.4-17 Axial force-stretch relation (chord members) (Case (ii))

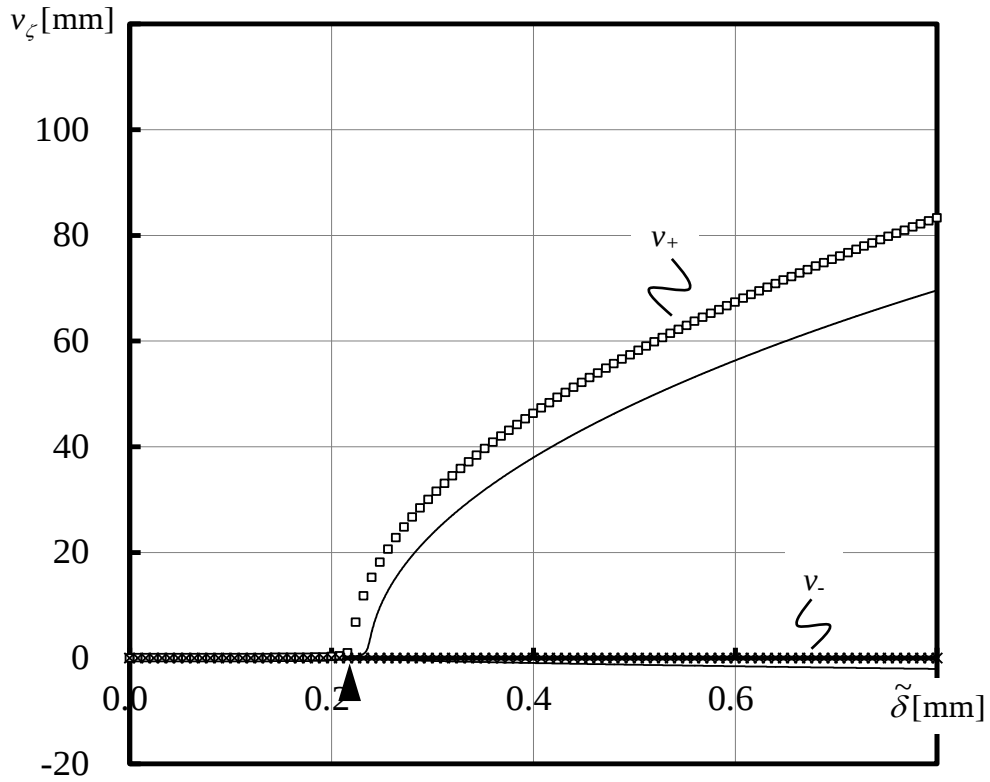


Fig.4-18 Lateral deformation of chord member- stretch relation (Case (ii))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

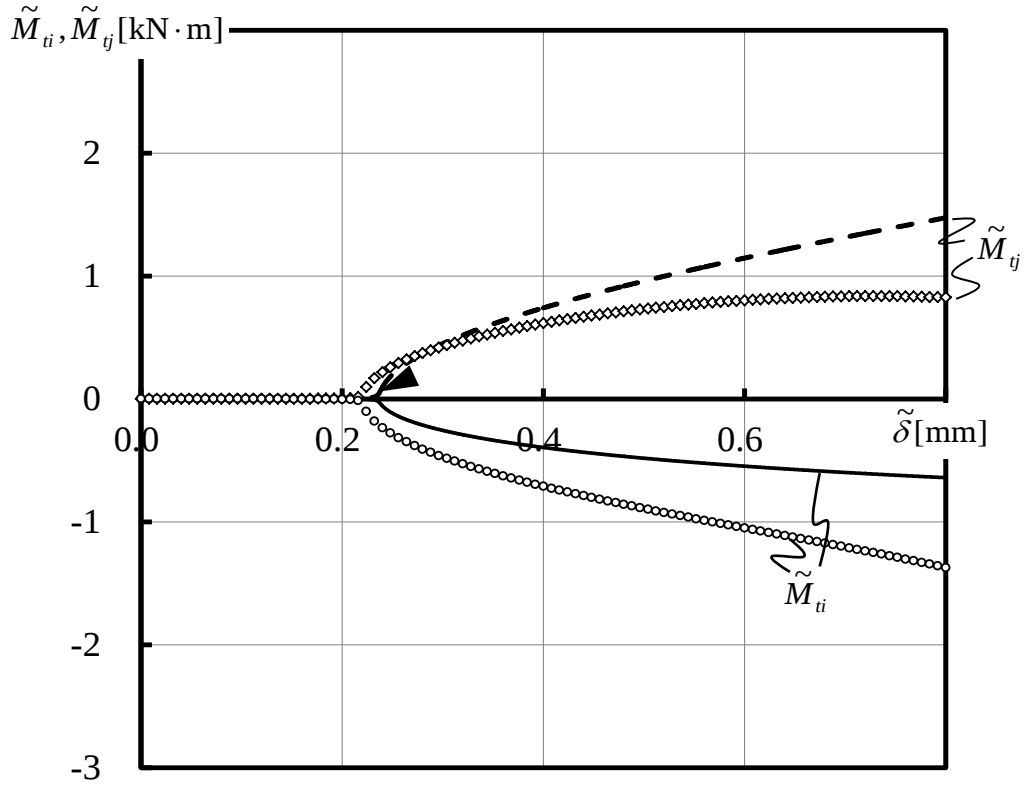


Fig.4-19 Out-of-plane bending moment- stretch relation (Case (ii))

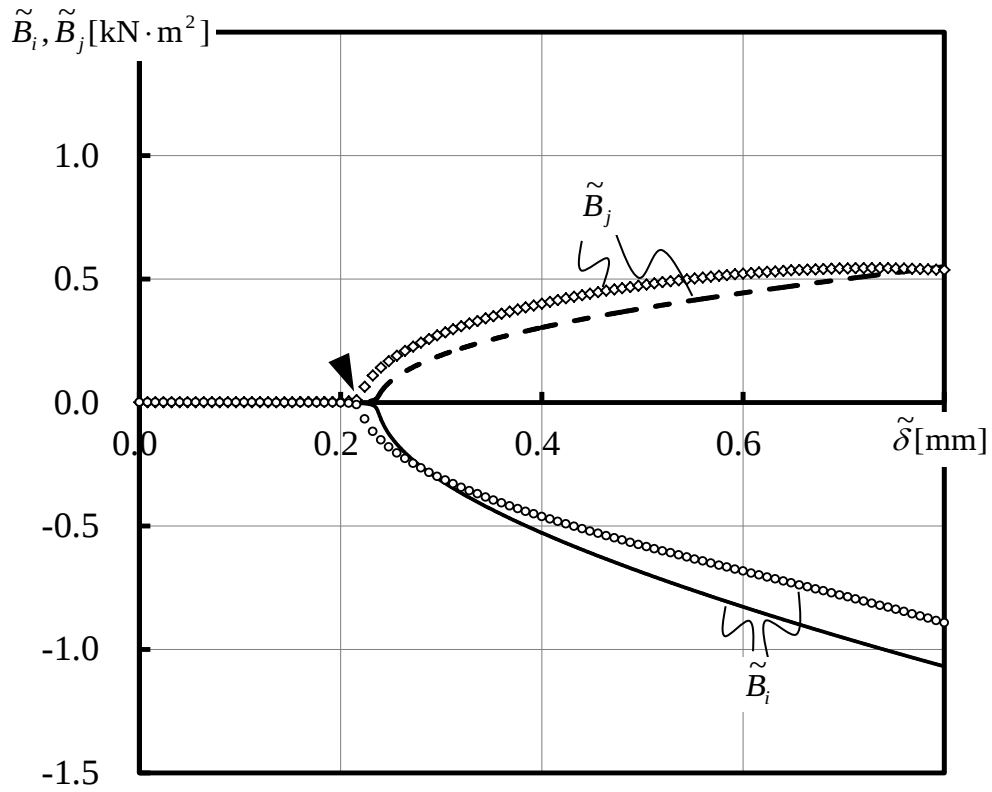


Fig.4-20 Bimoment-stretch relation (Case (ii))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

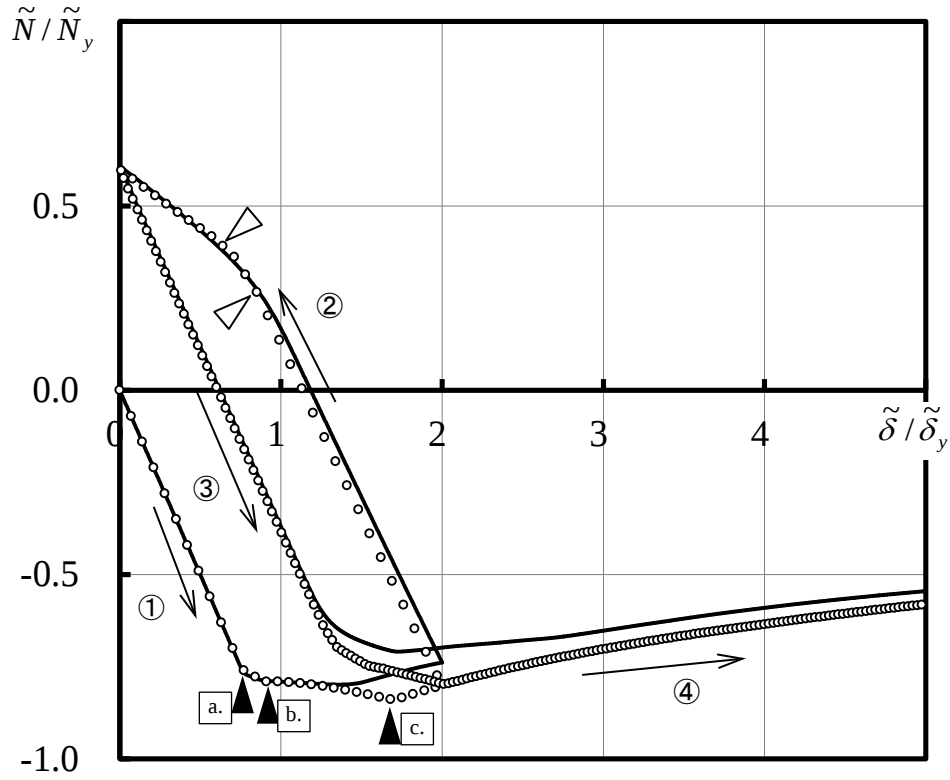


Fig.4-21 Axial force-stretch ($\tilde{N}/\tilde{N}_y - \tilde{\delta}/\tilde{\delta}_y$) relation (Case (iii))

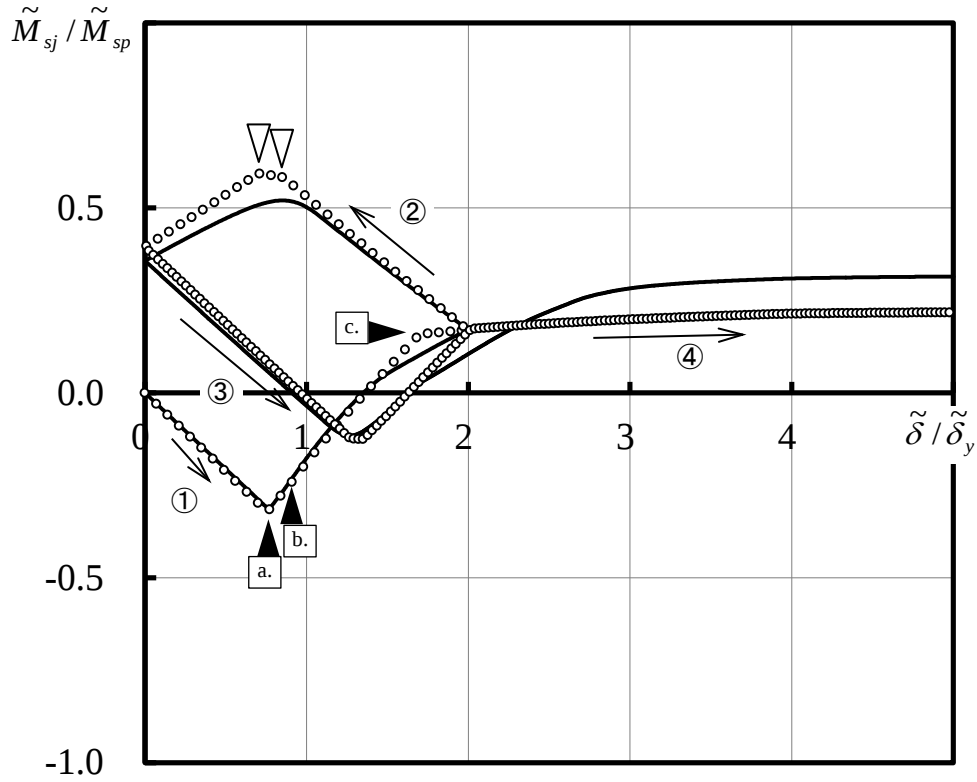


Fig.4-22 In-plane bending moment- stretch ($\tilde{M}_{sj}/\tilde{M}_{sp} - \tilde{\delta}/\tilde{\delta}_y$) relation (Case (iii))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

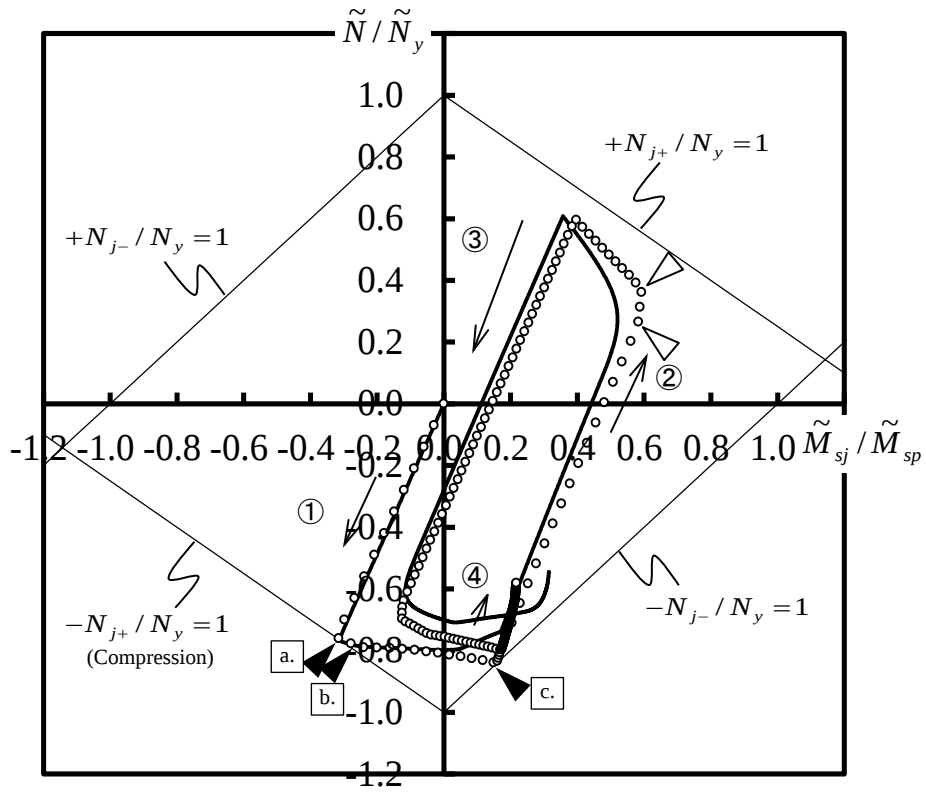


Fig.4-23 Axial force - in-plane bending moment ($\tilde{N} / \tilde{N}_y$ - $\tilde{M}_{sj} / \tilde{M}_{sp}$) relation (Case (iii))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

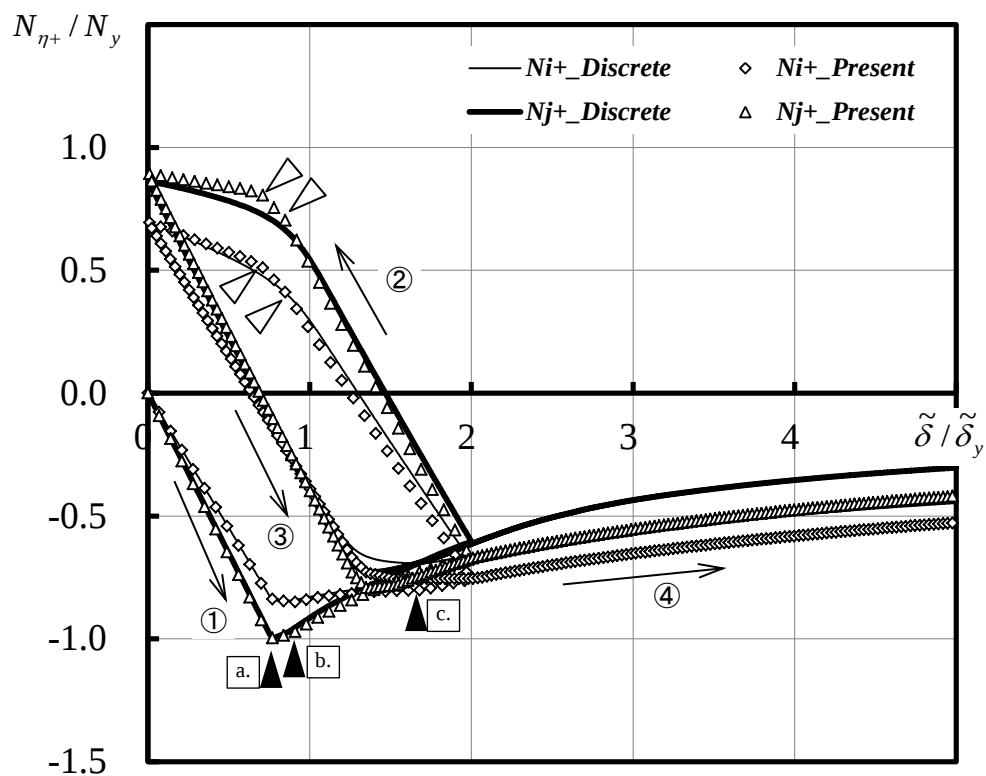


Fig.4-24 Axial force-stretch relation (upper chord members) (Case (iii))

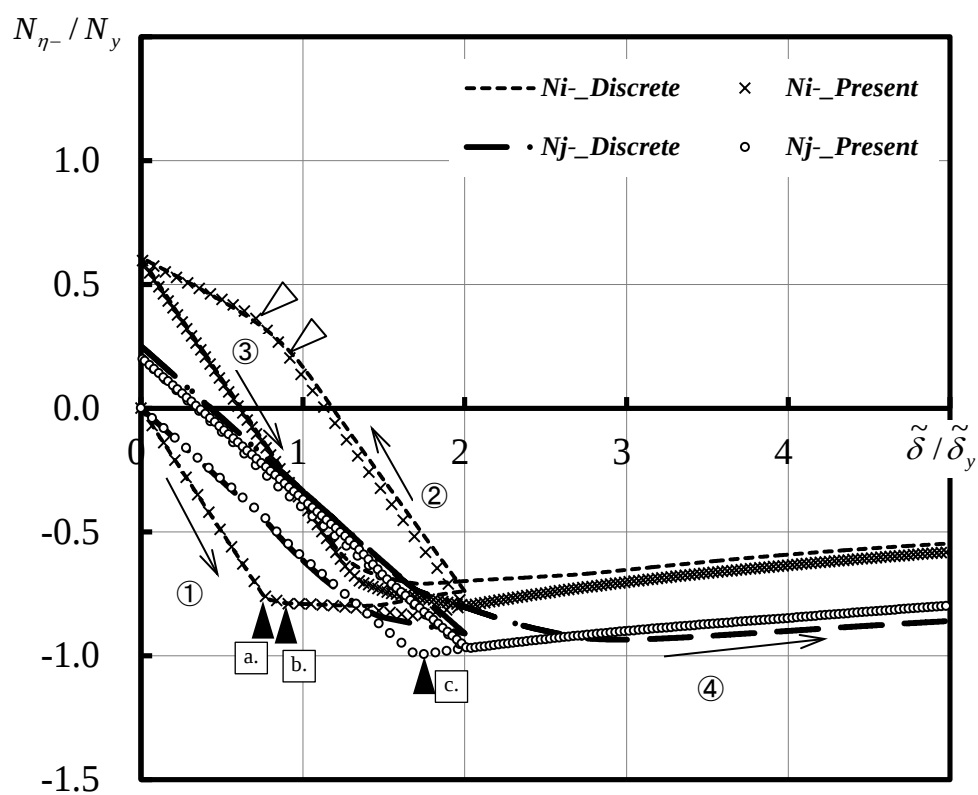


Fig.4-25 Axial force-stretch relation (lower chord members) (Case (iii))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

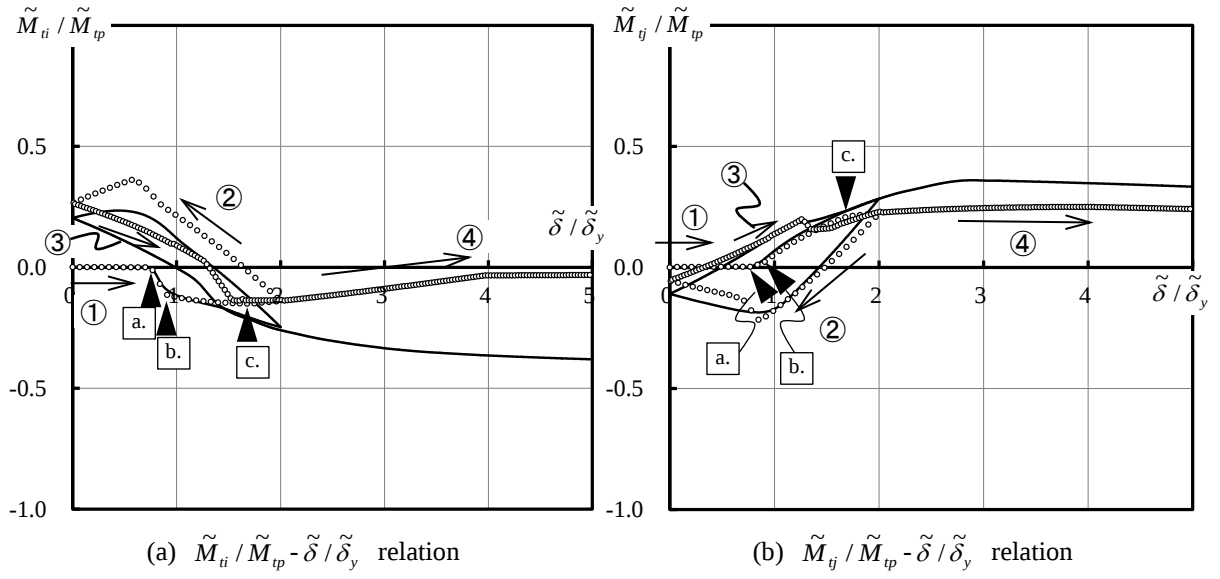


Fig.4-26 Out-of-plane bending moment- stretch relation (Case (iii))

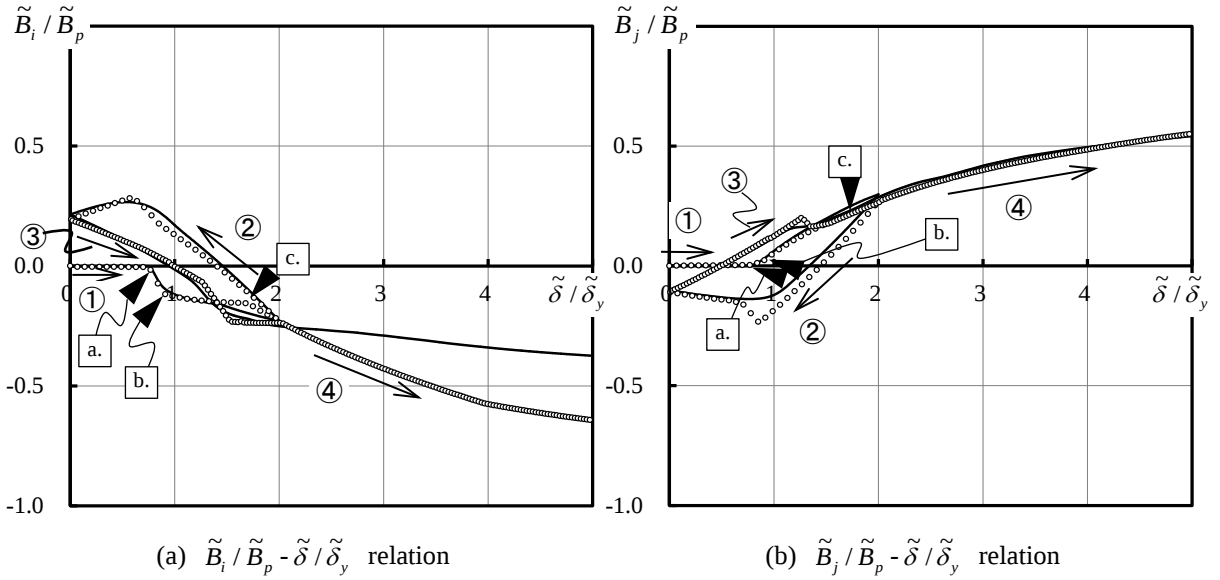


Fig.4-27 Bimoment-stretch relation (Case (iii))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

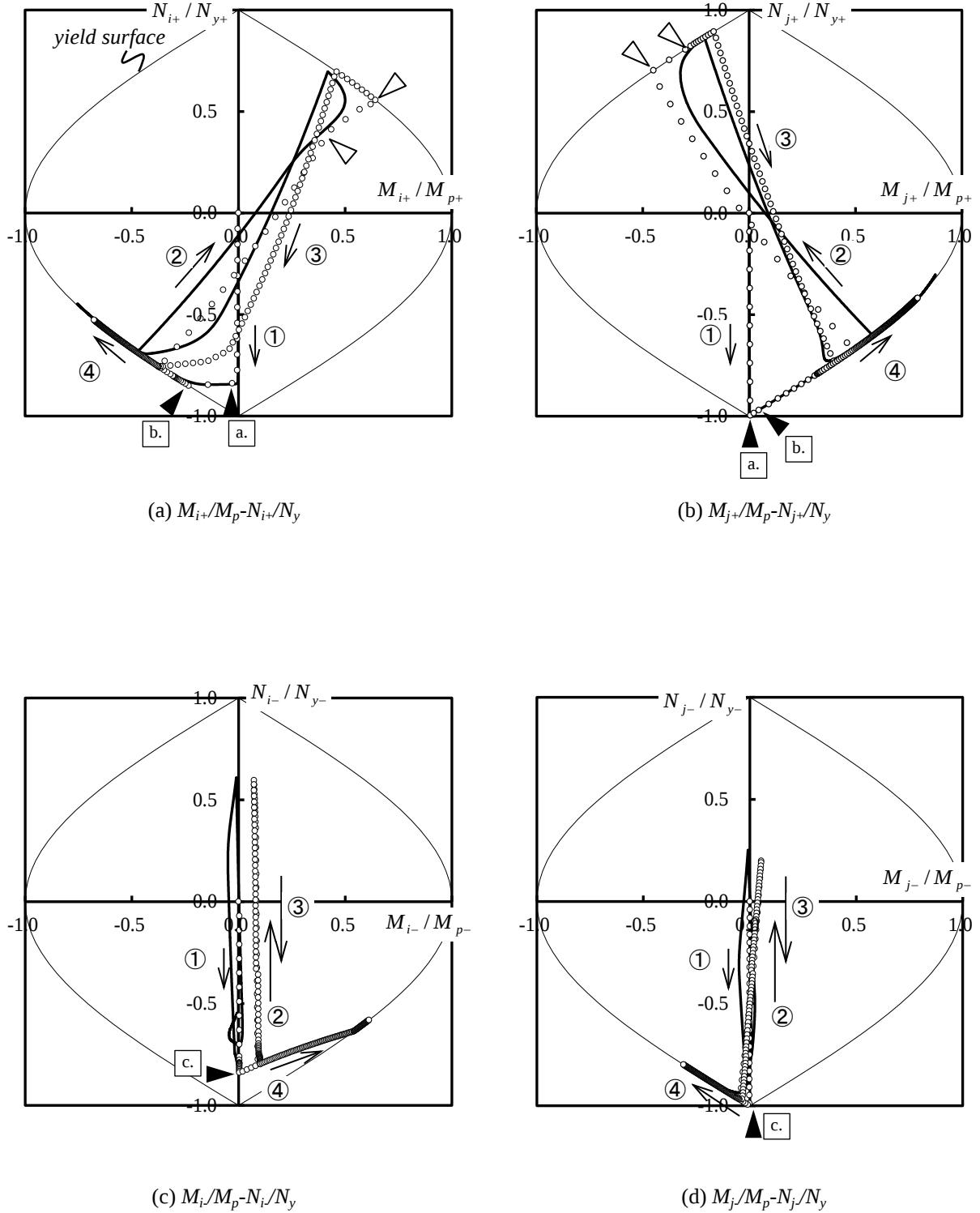


Fig.4-28 Bending moment- axial force relation (end of each chord member) (Case (iii))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

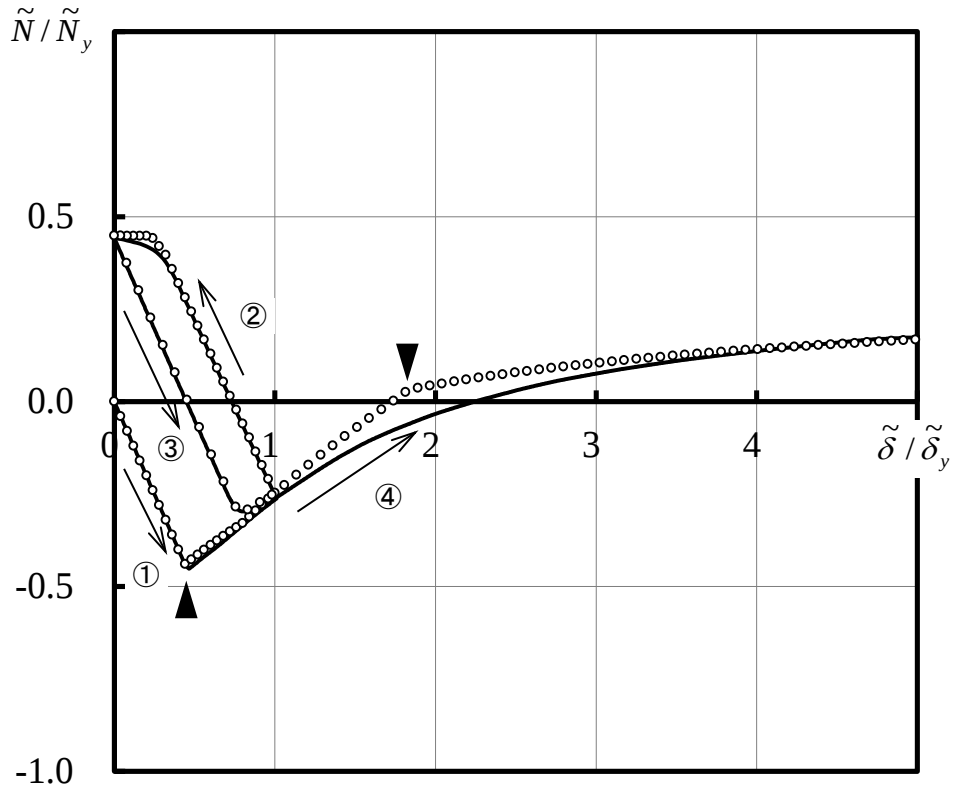


Fig.4-29 Axial force-stretch ($\tilde{N}/\tilde{N}_y - \tilde{\delta}/\tilde{\delta}_y$) relation (Case (iv))

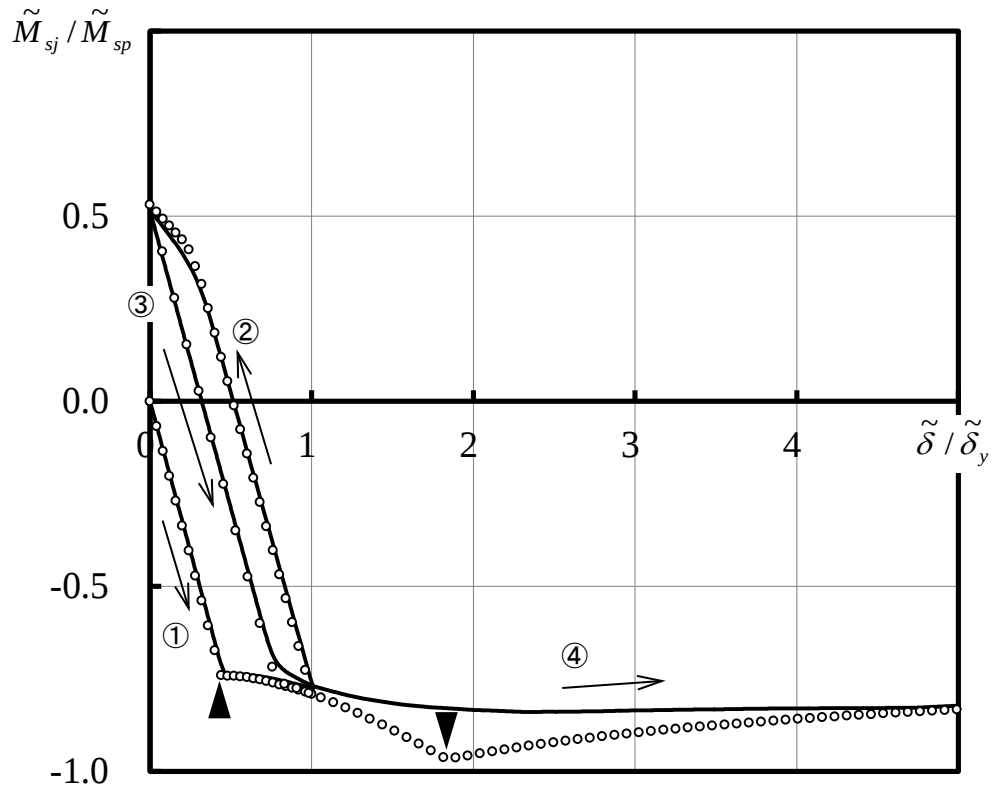


Fig.4-30 In-plane bending moment- stretch ($\tilde{M}_{sj}/\tilde{M}_{sp} - \tilde{\delta}/\tilde{\delta}_y$) relation (Case (iv))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

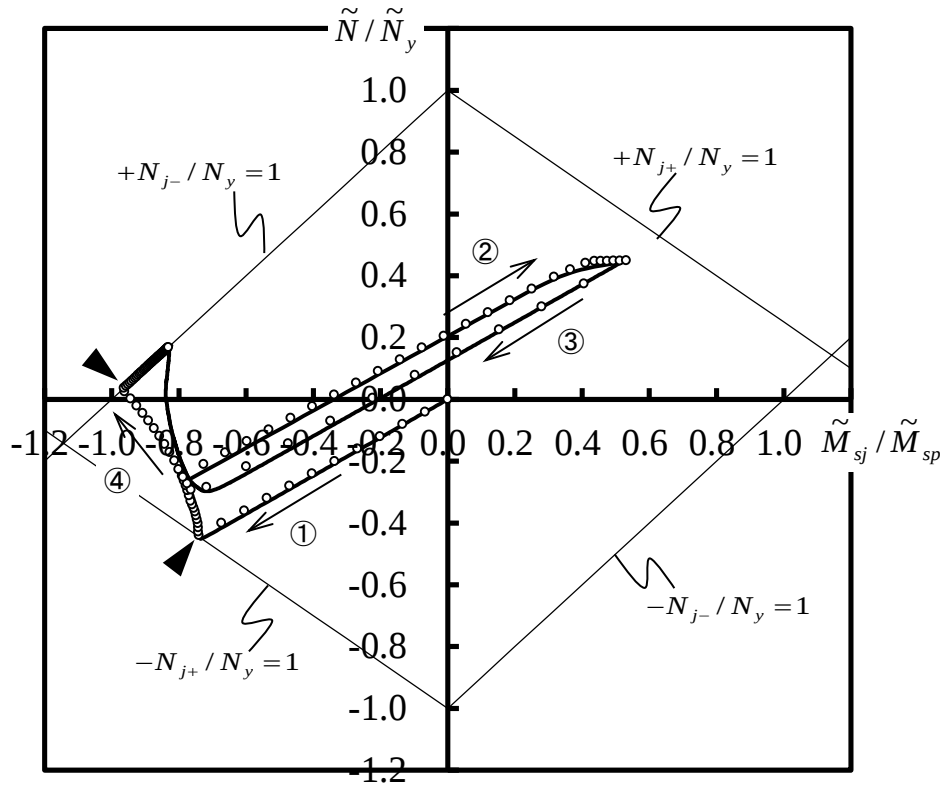


Fig.4-31 Axial force - in-plane bending moment ($\tilde{N} / \tilde{N}_y - \tilde{M}_{sj} / \tilde{M}_{sp}$) relation (Case (iv))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

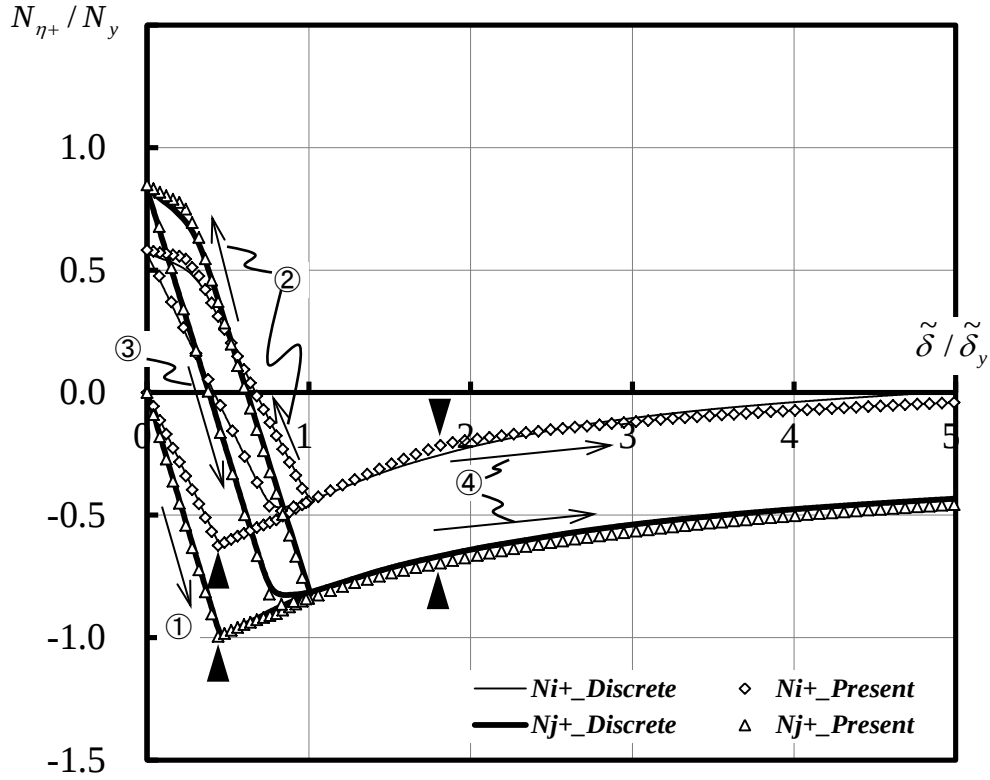


Fig.4-32 Axial force (chord members)-stretch relation (Case (iv))

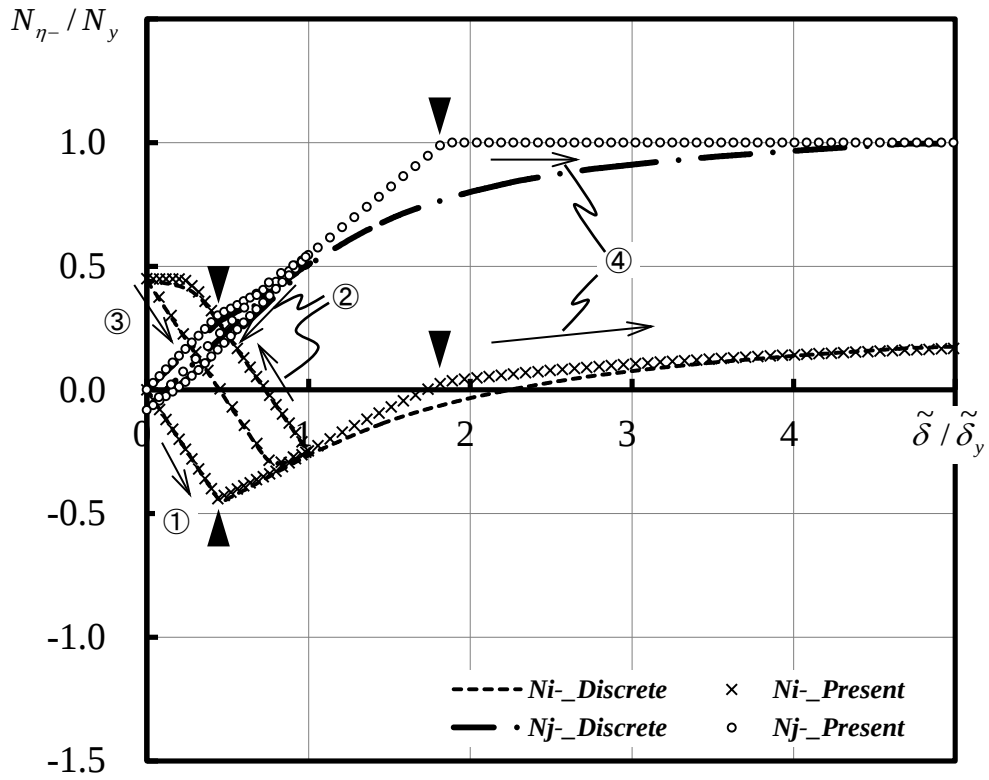


Fig.4-33 Axial force (chord members)-stretch relation (Case (iv))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

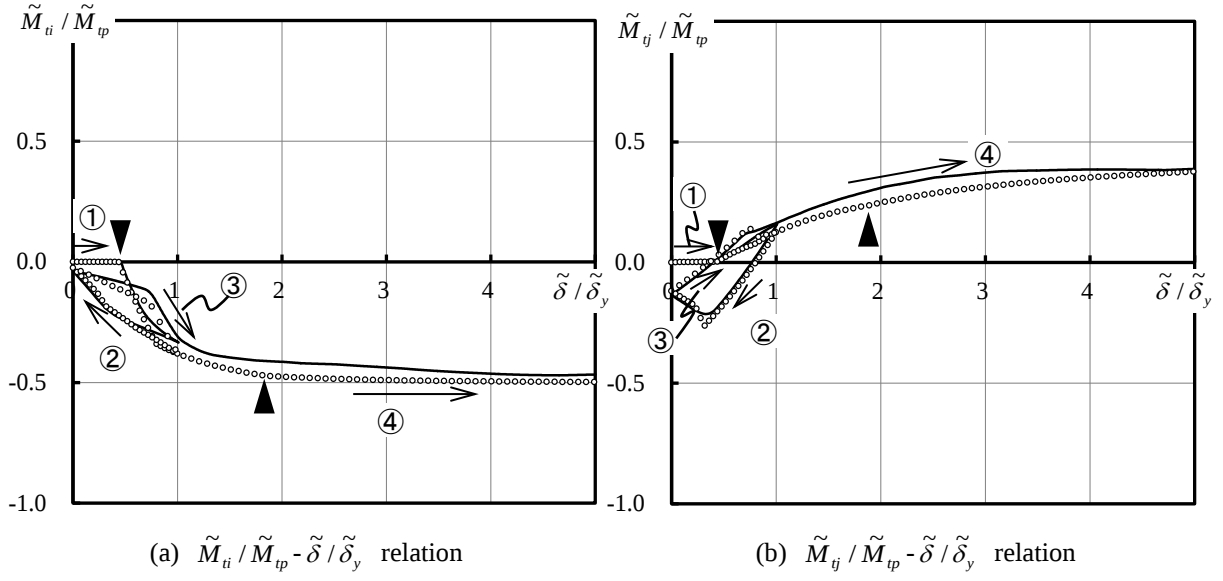


Fig.4-34 Out-of-plane bending moment- stretch relation (Case (iv))

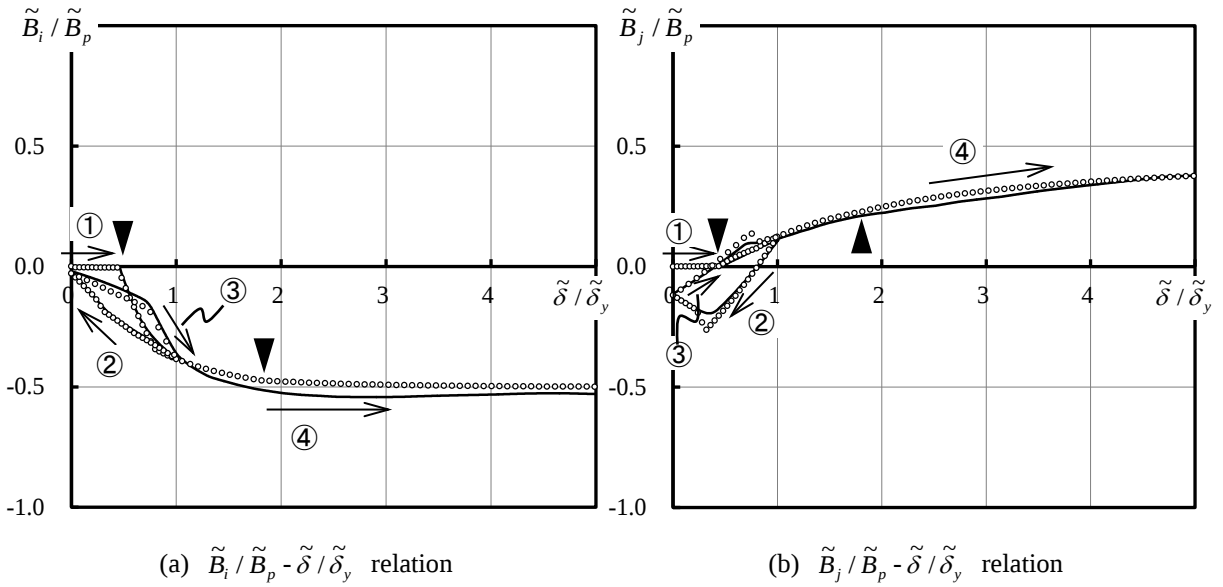
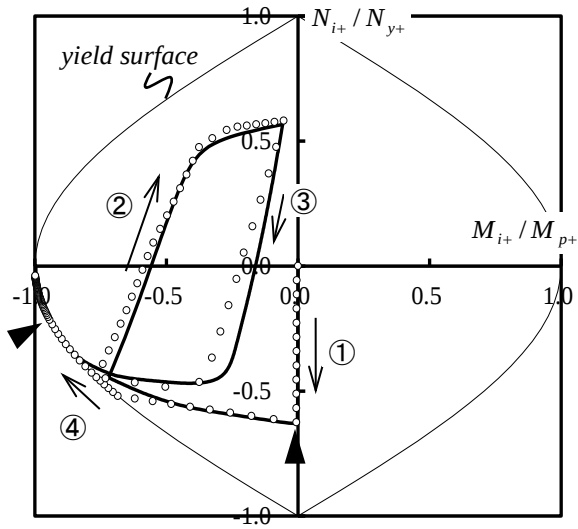
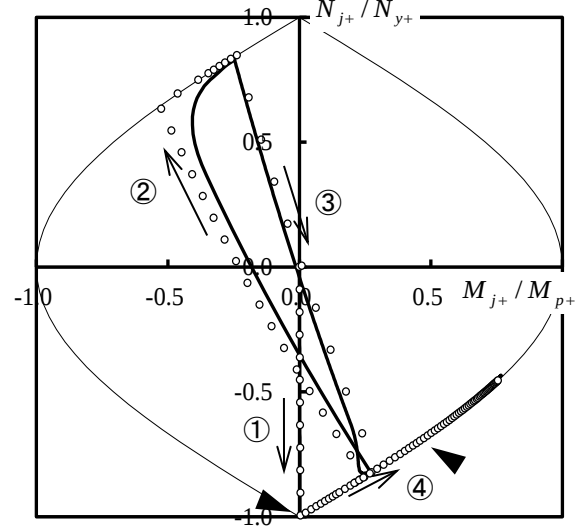


Fig.4-35 Bimoment-stretch relation (Case (iv))

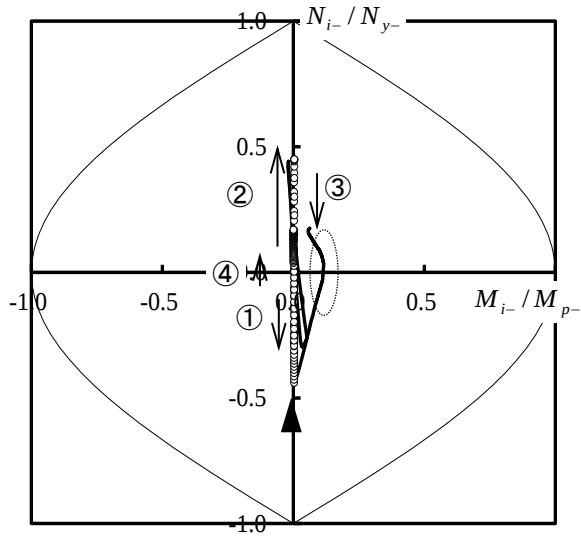
(Symbol: Present model, Line: Discrete model)



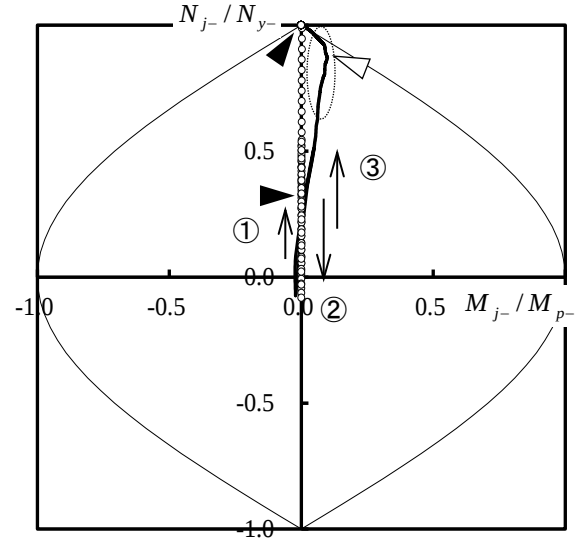
(a) $M_{i+}/M_p - N_{i+}/N_y$



(b) $M_{j+}/M_p - N_{j+}/N_y$



(c) $M_{i-}/M_p - N_{i-}/N_y$



(d) $M_{j-}/M_p - N_{j-}/N_y$

Fig.4-36 Bending moment- axial force relation (end of each chord member) (Case (iv))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

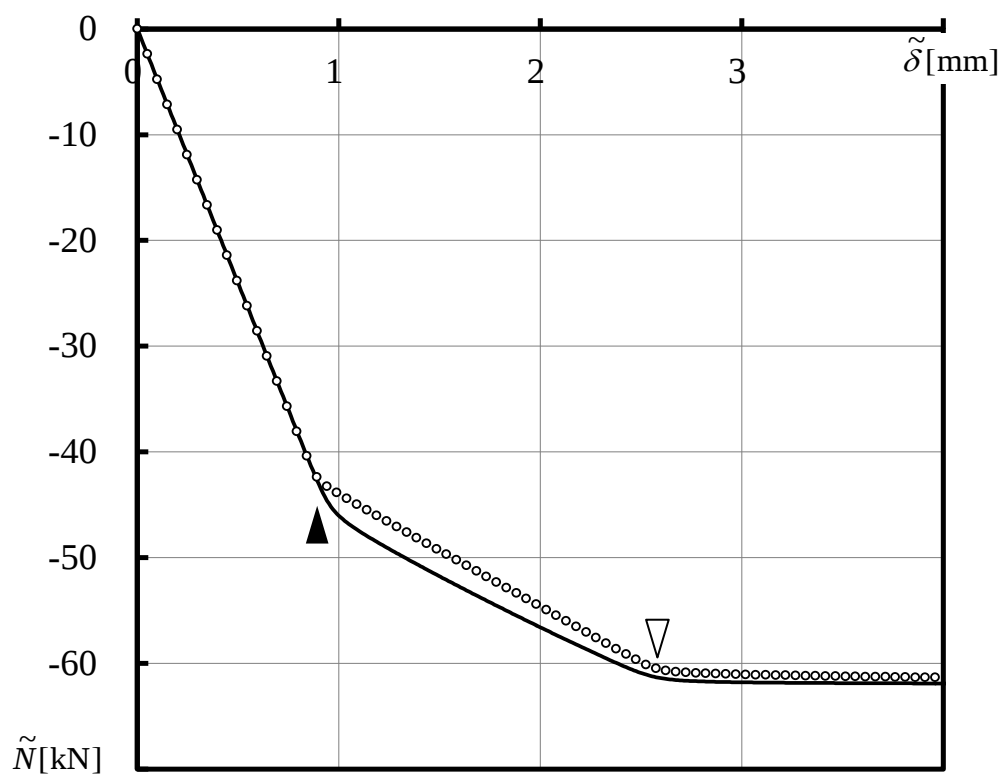


Fig.4-37 Axial force-stretch ($\tilde{N}$ - $\tilde{\delta}$) relation (Case (v))

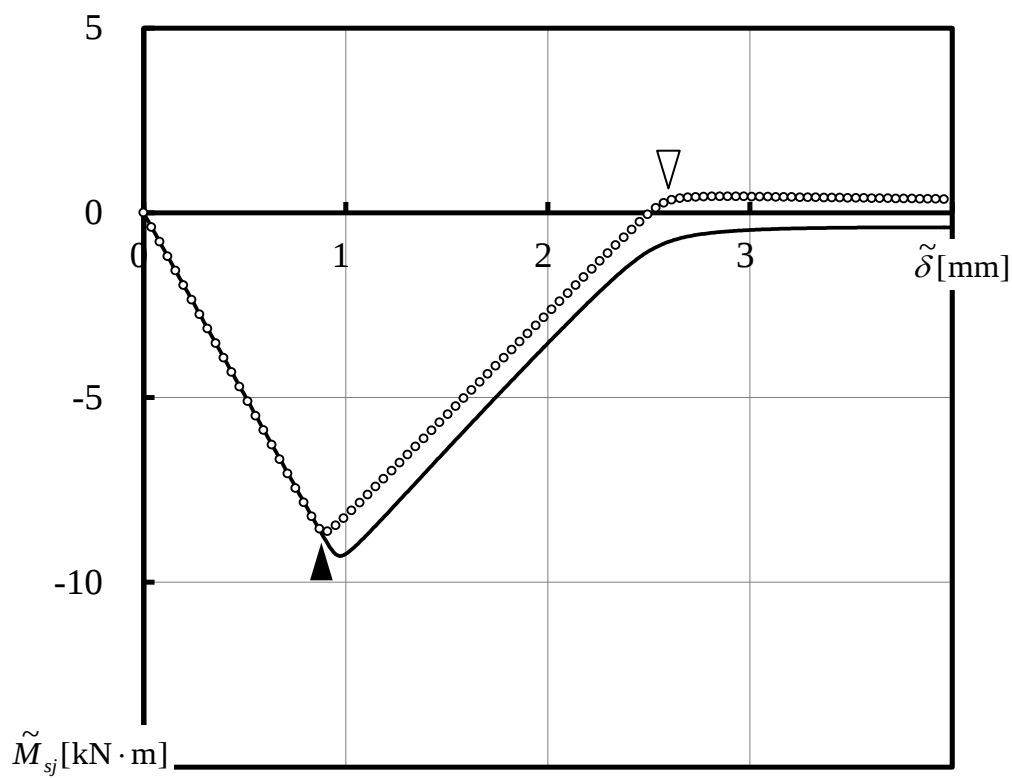


Fig.4-38 In-plane bending moment- stretch ($\tilde{M}_{sj}$ - $\tilde{\delta}$) relation (Case (v))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

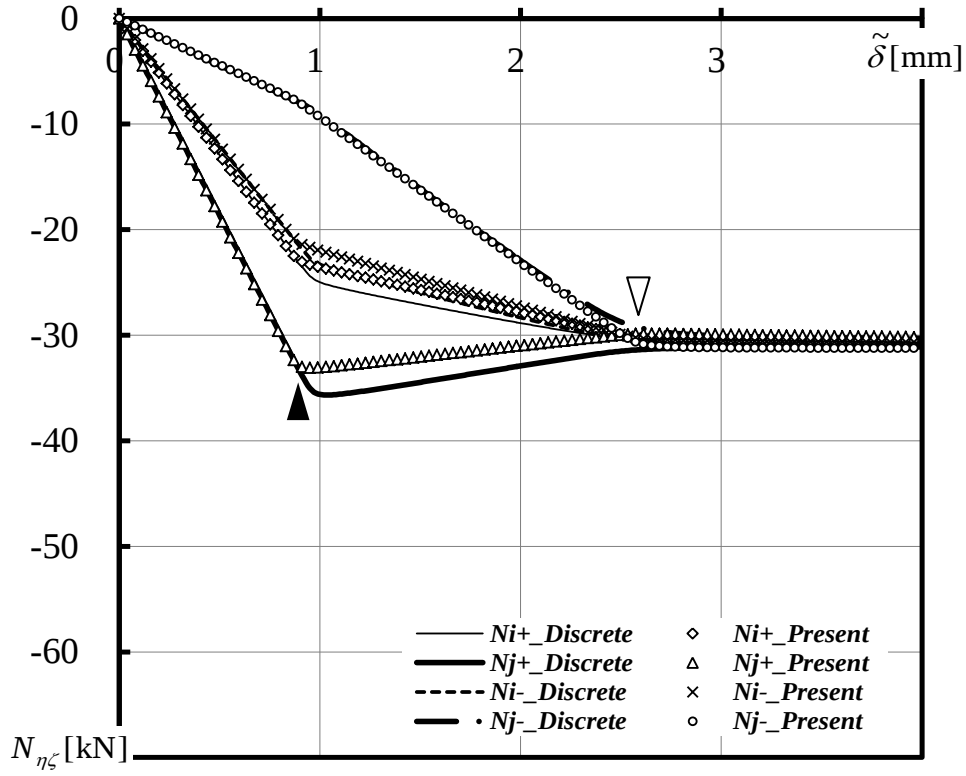


Fig.4-39 Axial force (chord members)-stretch relation (Case (v))

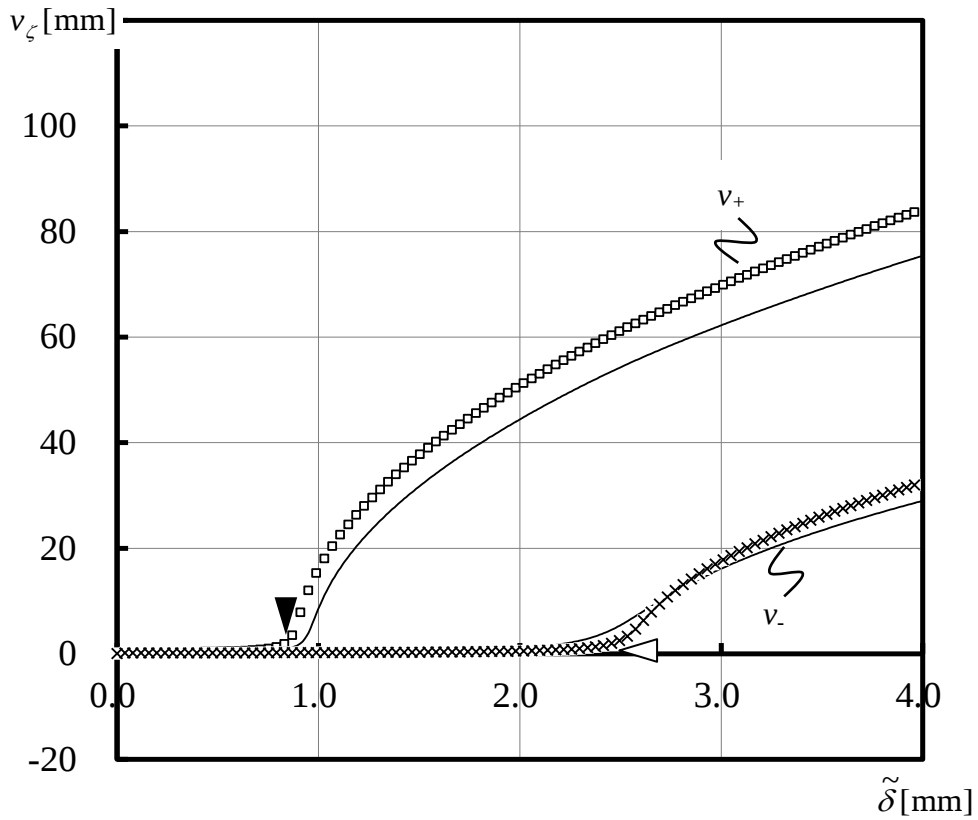


Fig.4-40 Lateral deformation of chord member- stretch relation (Case (v))
(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

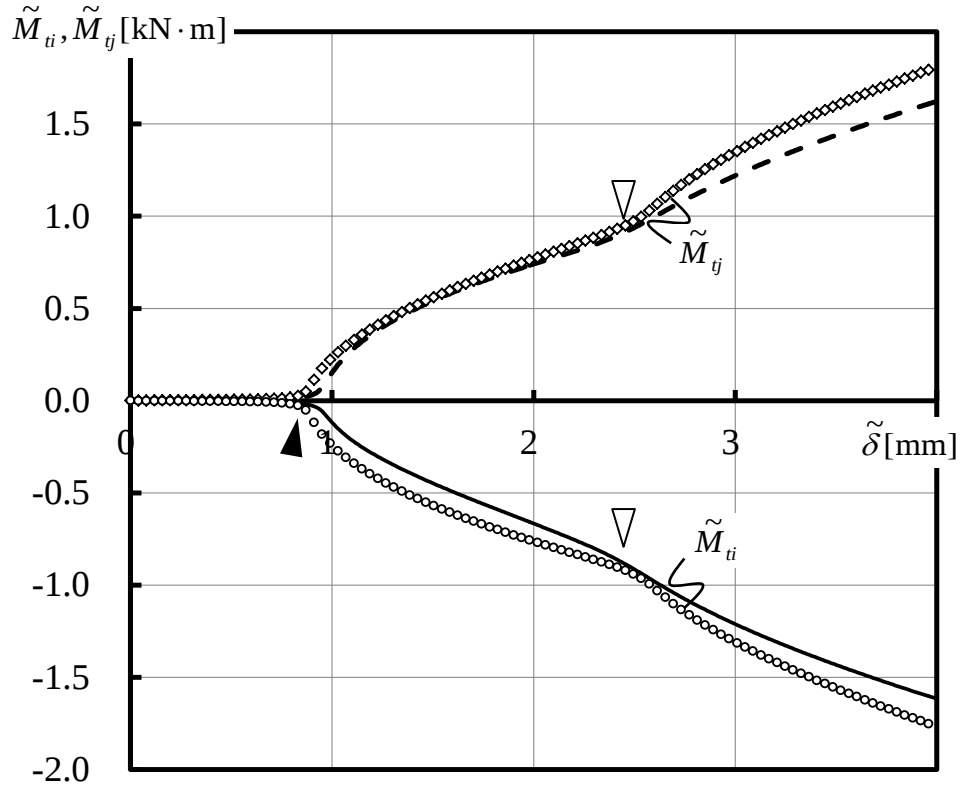


Fig.4-41 Out-of-plane bending moment- stretch relation (Case (v))

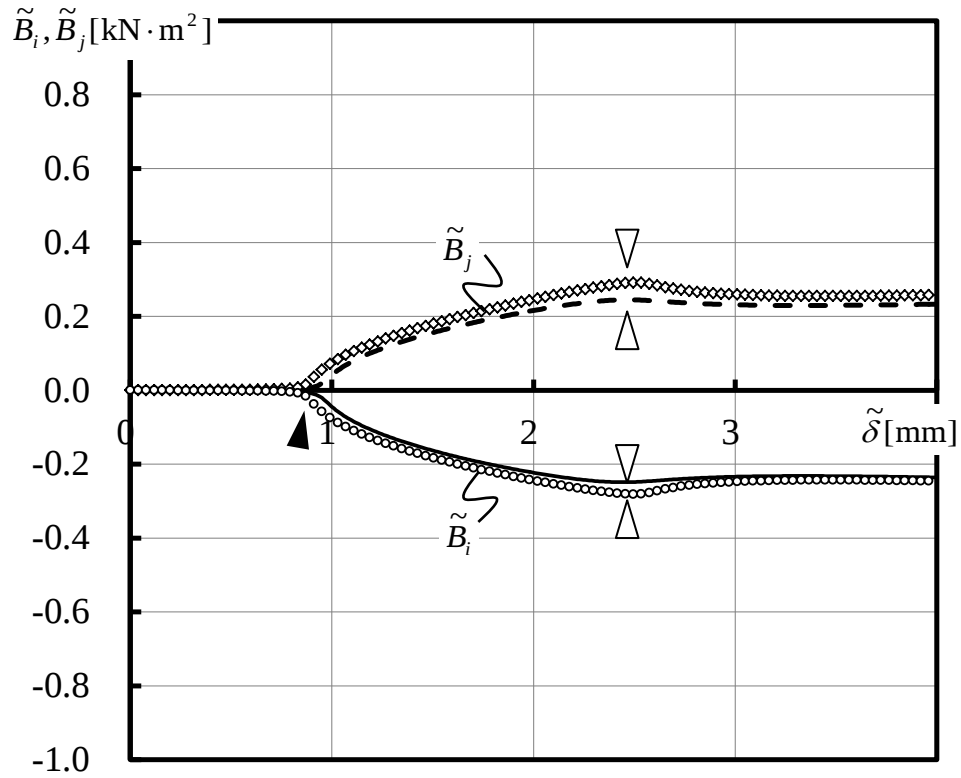


Fig.4-42 Bimoment-stretch relation (Case (v))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

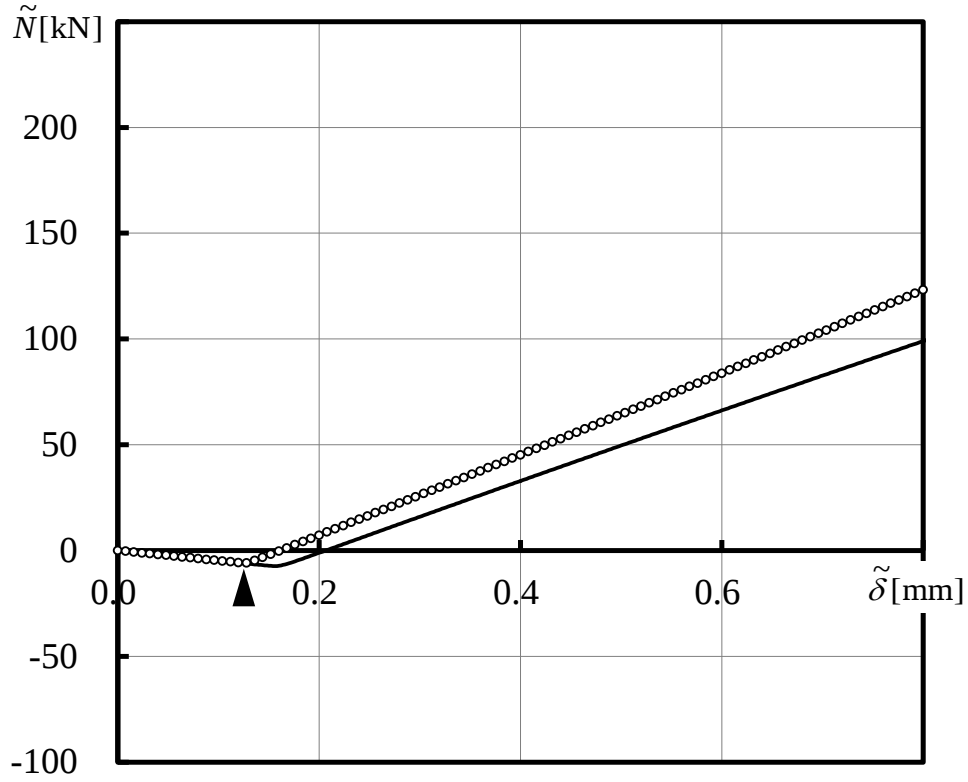


Fig.4-43 Axial force-stretch ($\tilde{N}$ - $\tilde{\delta}$) relation (Case (vi))

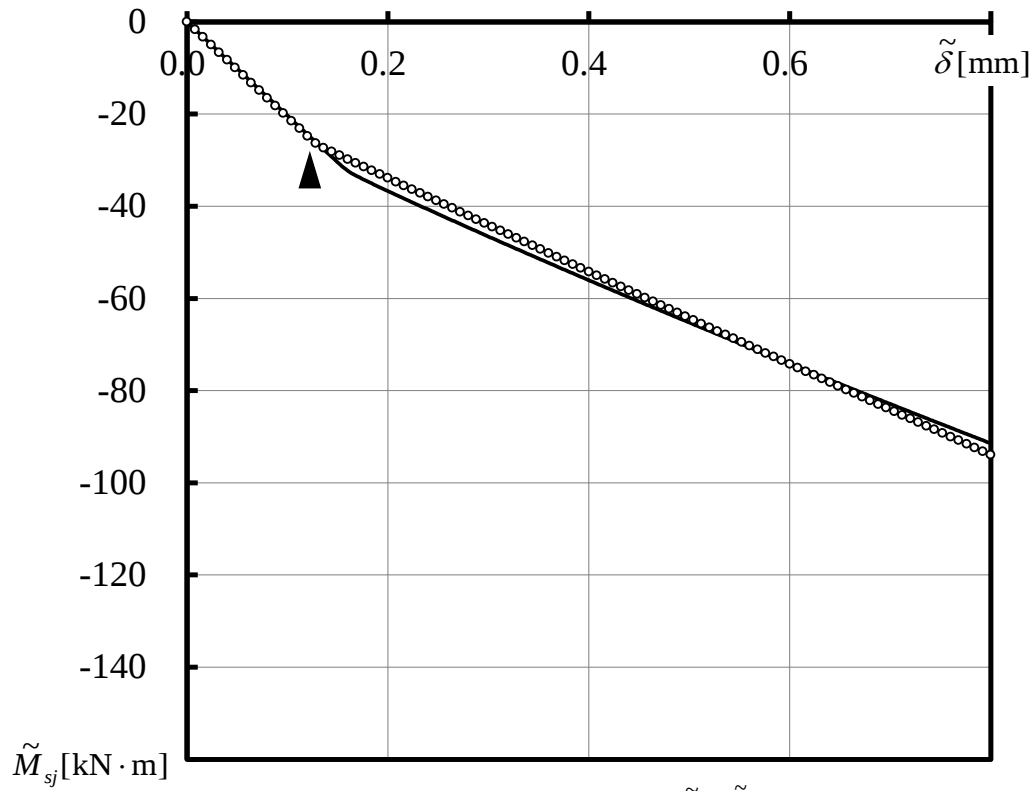


Fig.4-44 In-plane bending moment- stretch ($\tilde{M}_{sj}$ - $\tilde{\delta}$) relation (Case (vi))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

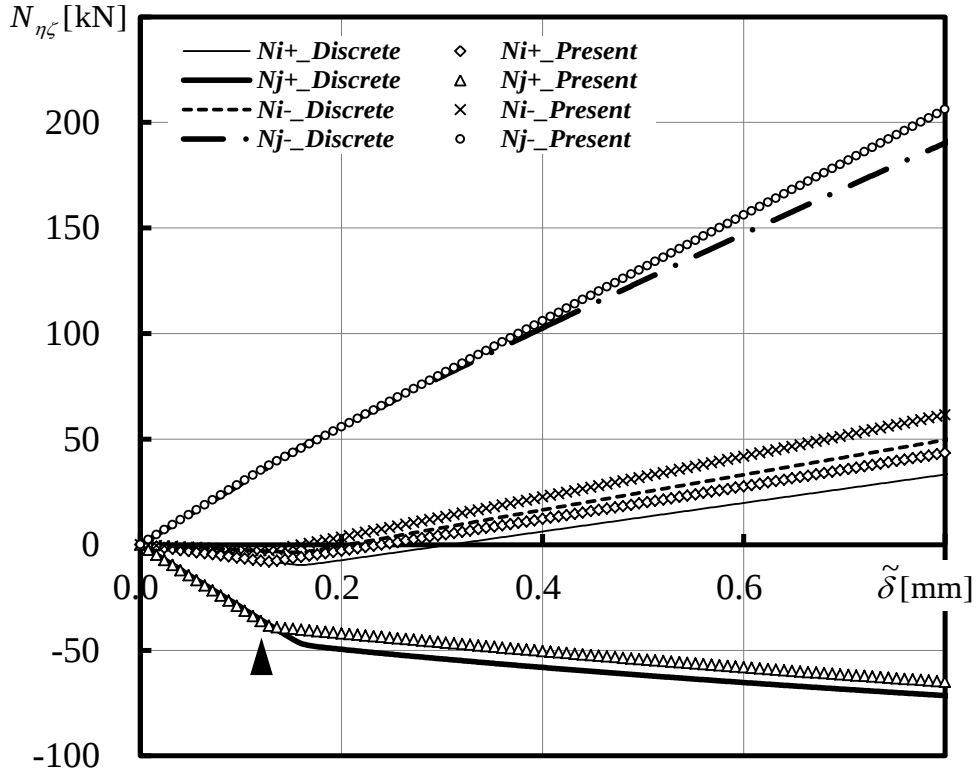


Fig.4-45 Axial force (chord members)-stretch relation (Case (vi))

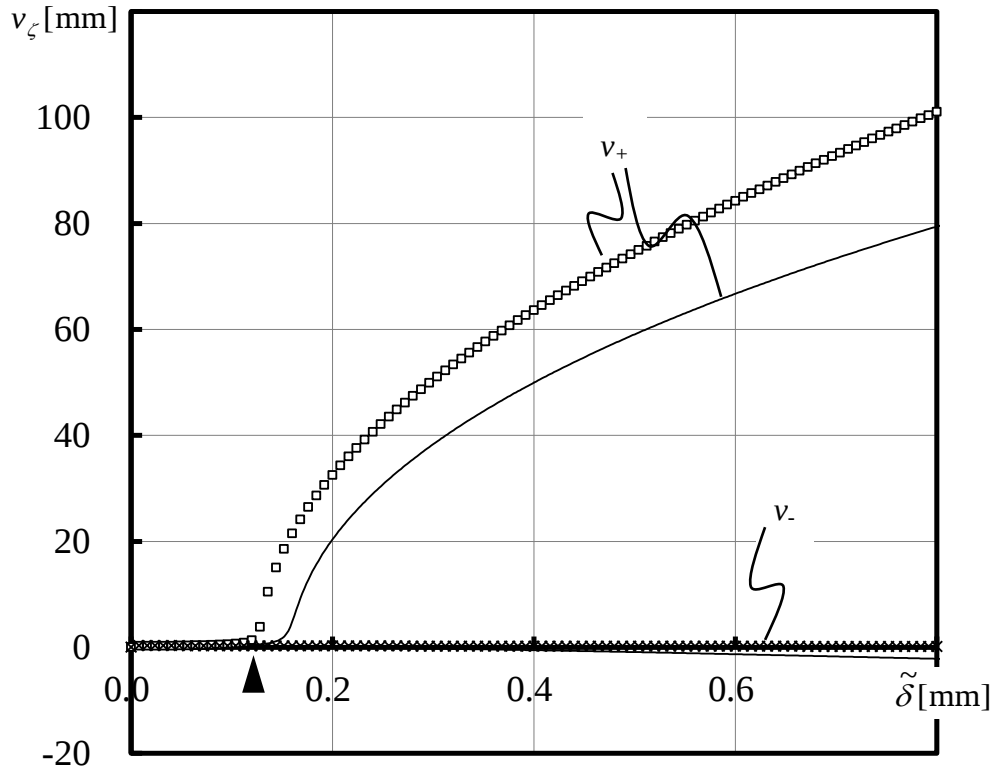


Fig.4-46 Lateral deformation of chord member- stretch relation (Case (vi))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

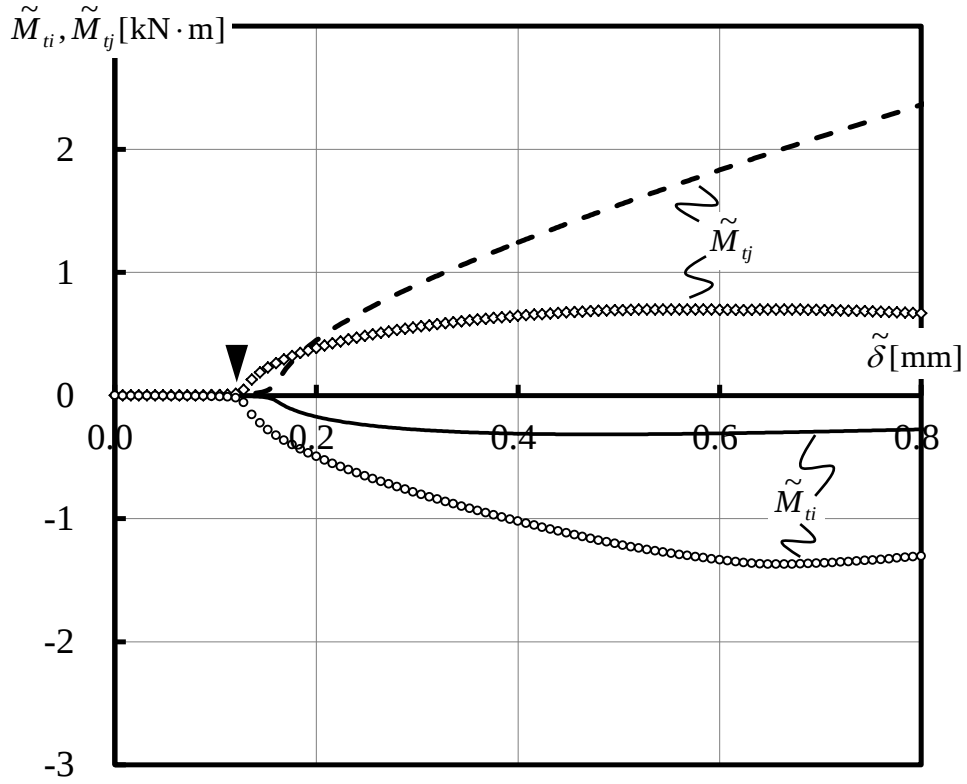


Fig.4-47 Out-of-plane bending moment- stretch relation (Case (vi))

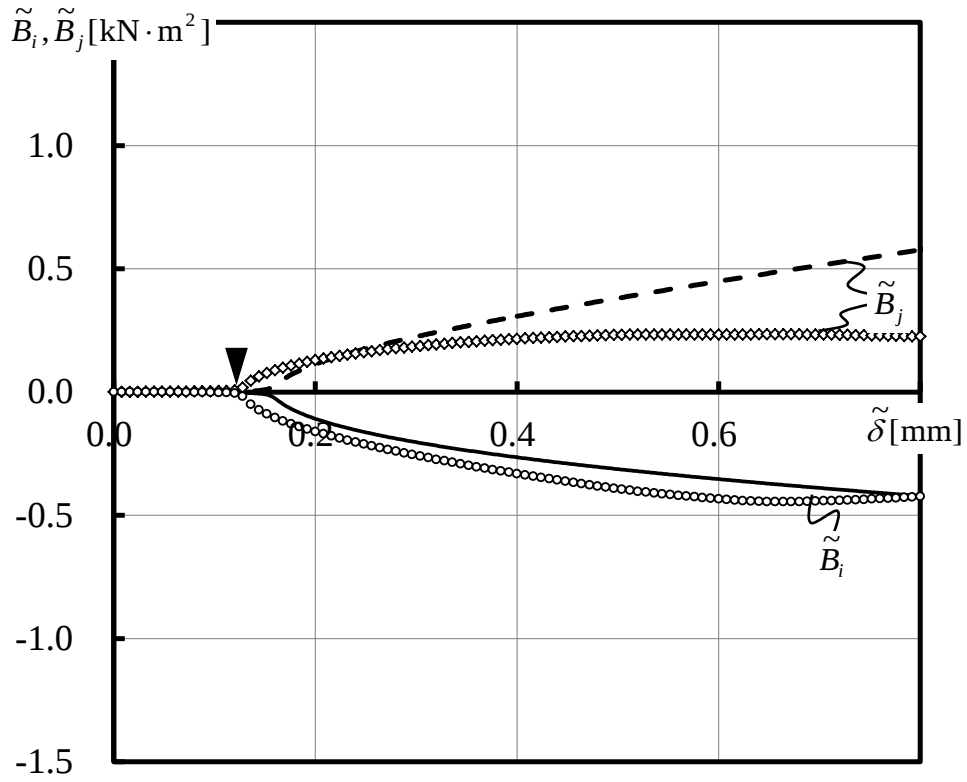


Fig.4-48 Bimoment-stretch relation (Case (vi))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

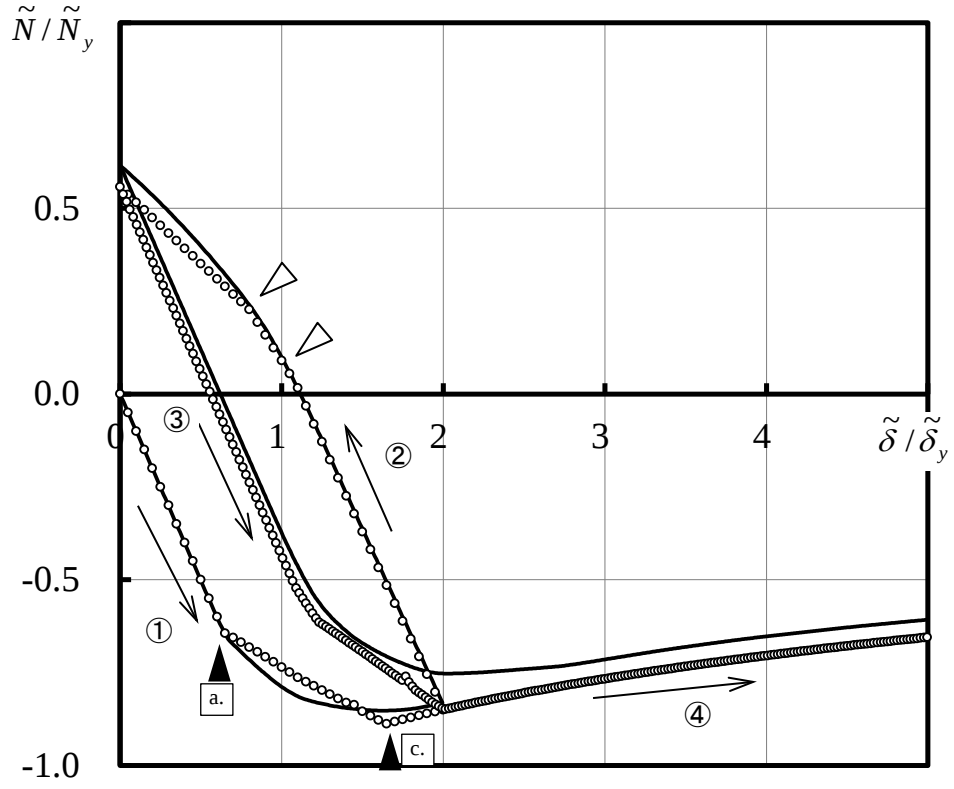


Fig.4-49 Axial force-stretch ($\tilde{N}/\tilde{N}_y - \tilde{\delta}/\tilde{\delta}_y$) relation (Case (vii))

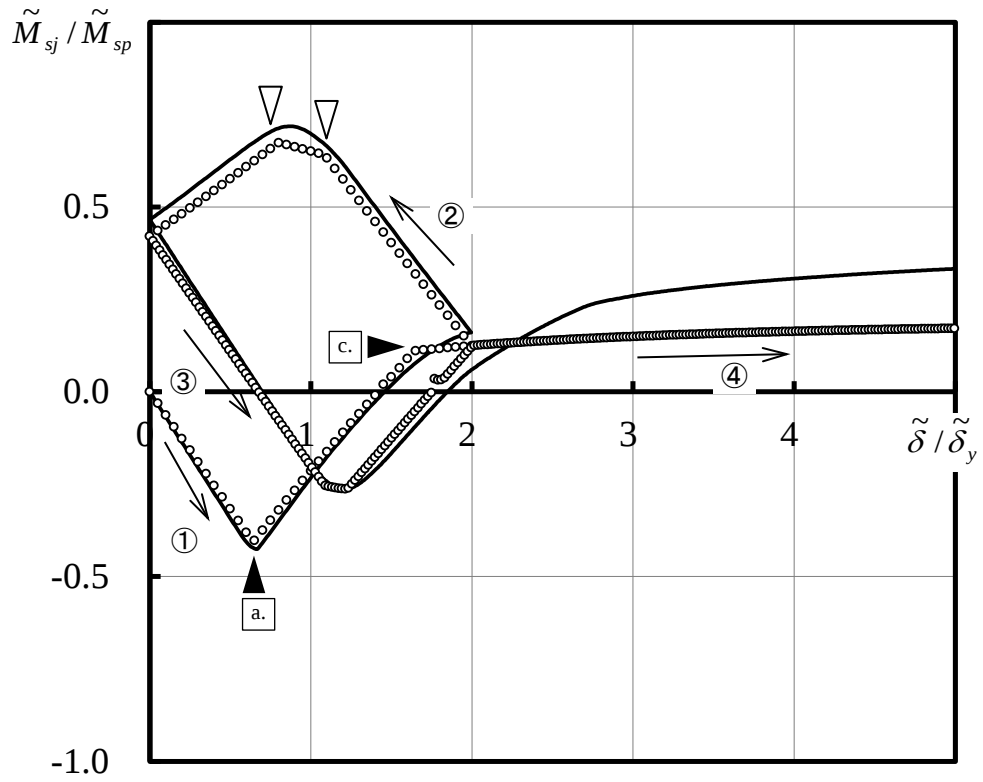


Fig.4-50 In-plane bending moment- stretch ($\tilde{M}_{sj}/\tilde{M}_{sp} - \tilde{\delta}/\tilde{\delta}_y$) relation (Case (vii))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

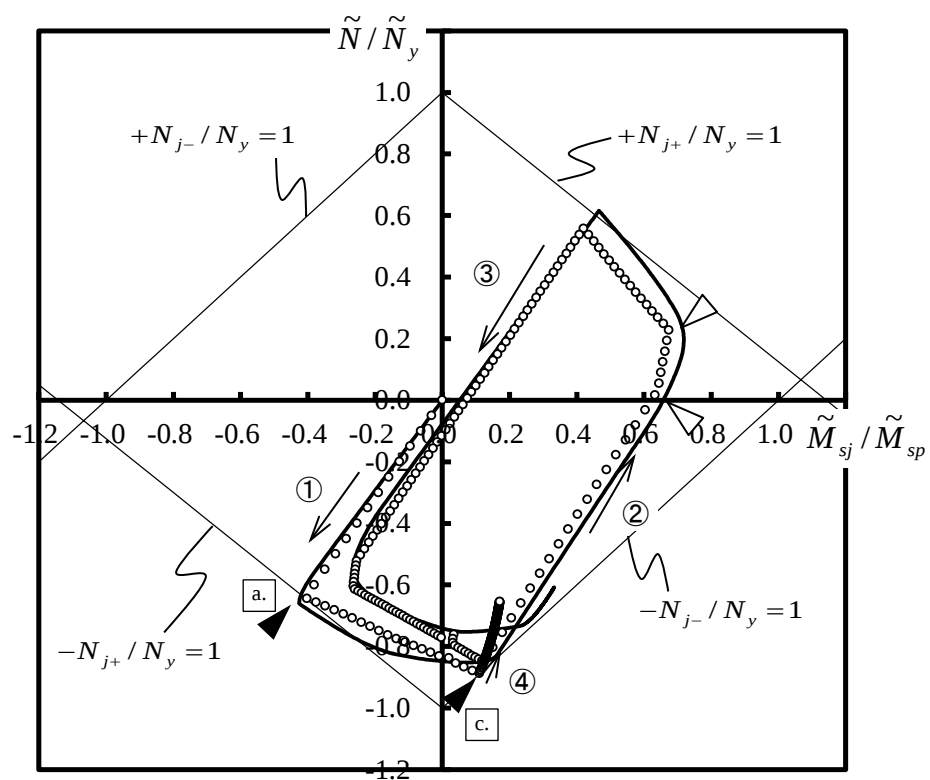


Fig.4-51 Axial force - in-plane bending moment ($\tilde{N} / \tilde{N}_y - \tilde{M}_{sj} / \tilde{M}_{sp}$) relation (Case (vii))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

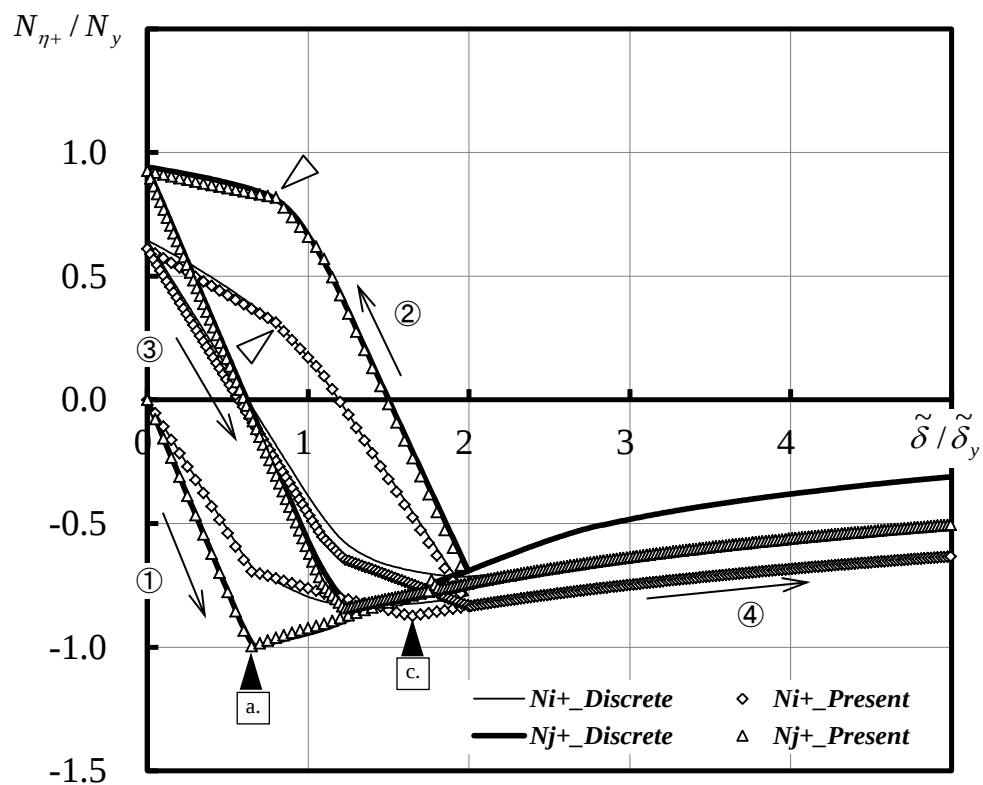


Fig.4-52 Axial force (chord members)-stretch relation (Case (vii))

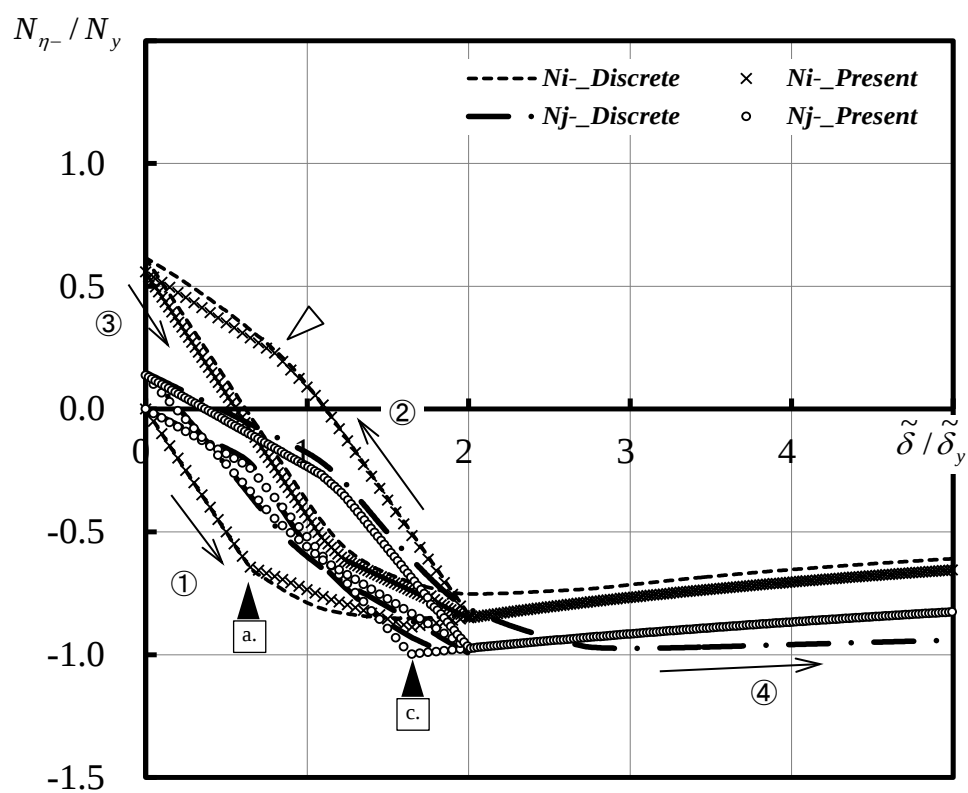


Fig.4-53 Lateral deformation of chord member- stretch relation (Case (vii))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

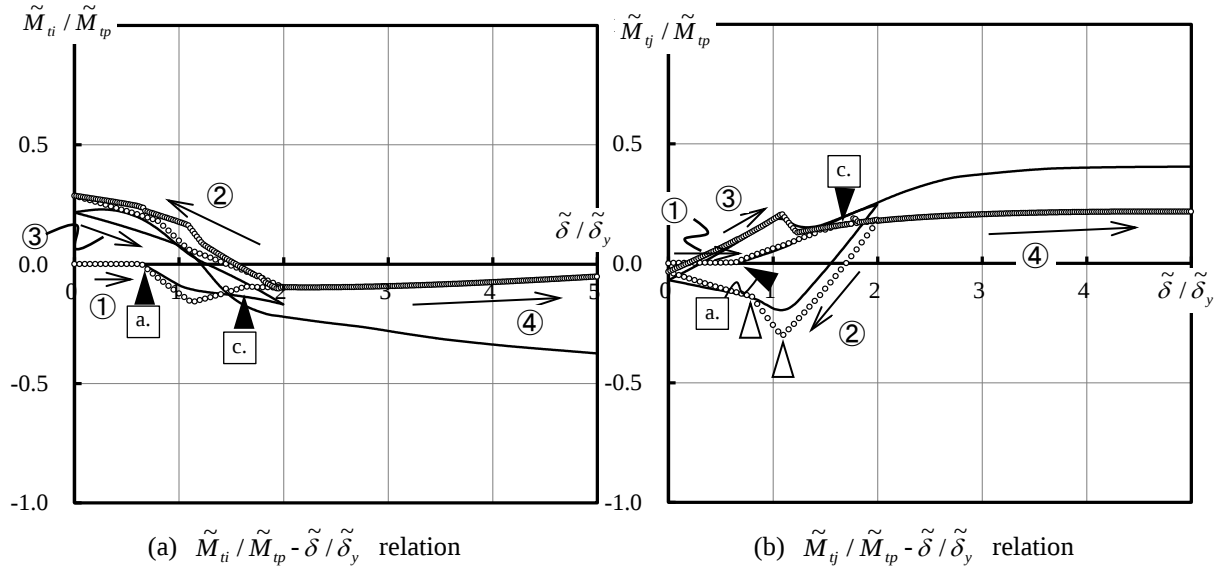


Fig.4-54 Out-of-plane bending moment- stretch relation (Case (vii))

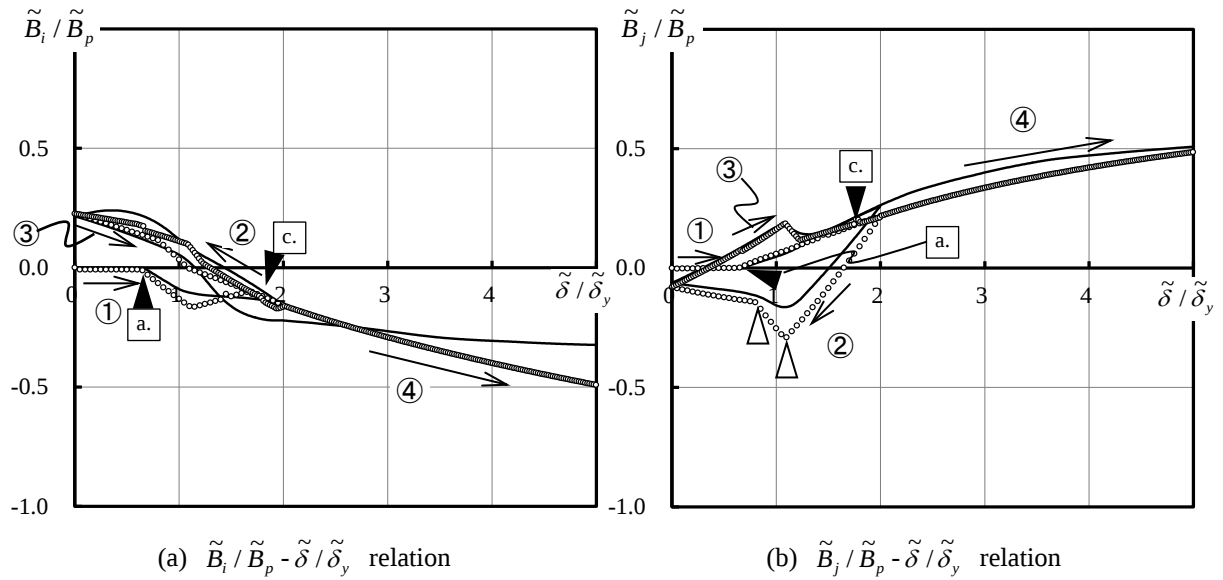


Fig.4-55 Bimoment- stretch relation (Case (vii))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

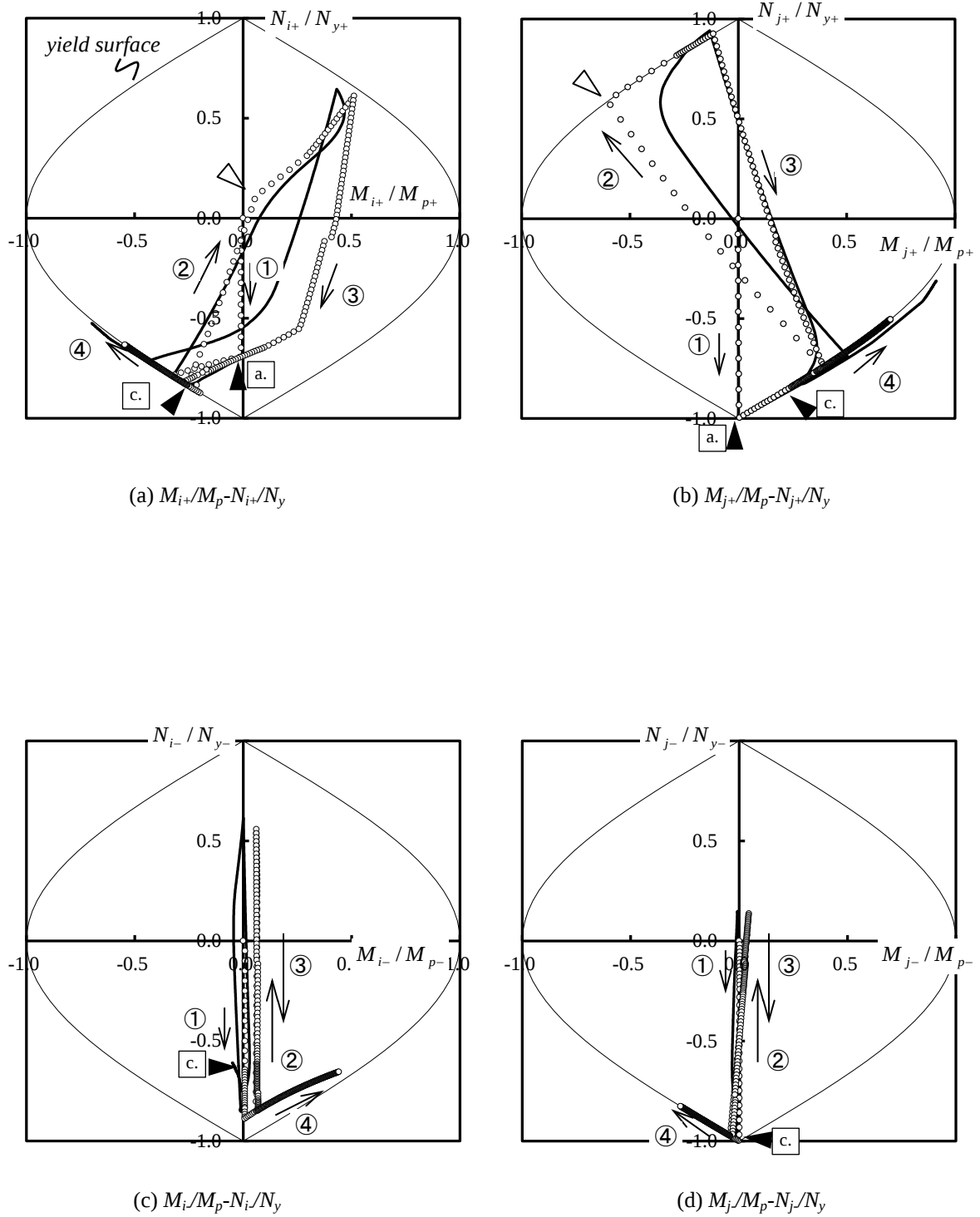


Fig.4-56 Bending moment- axial force relation (end of each chord member) (Case (vii))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

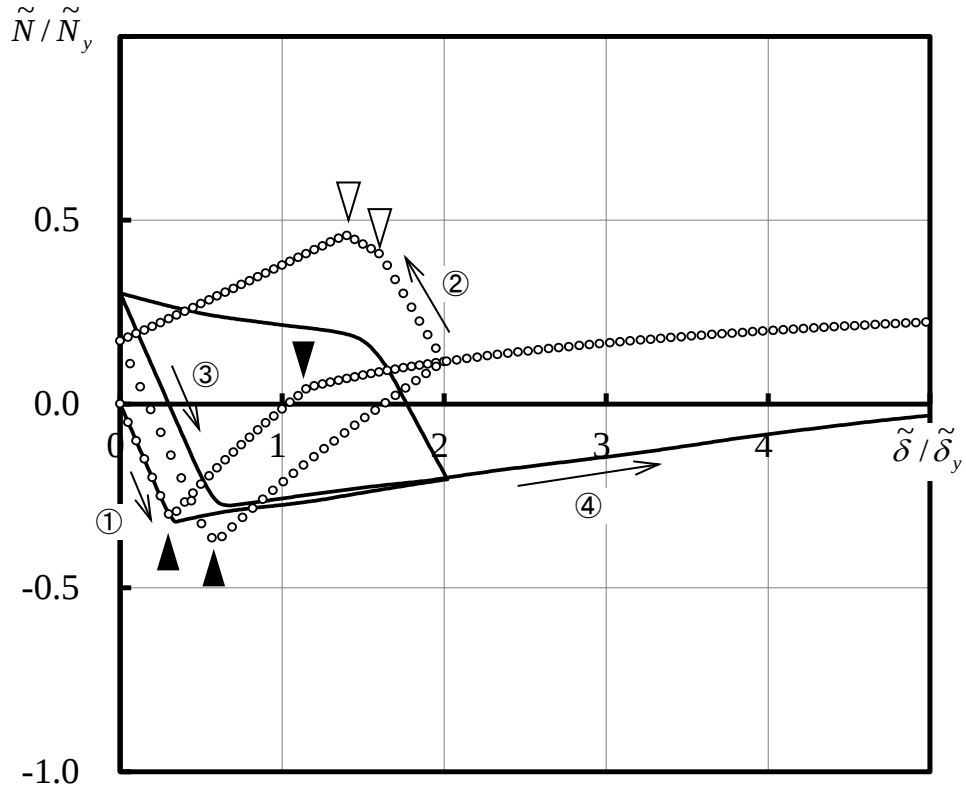


Fig.4-57 Axial force-stretch ($\tilde{N}/\tilde{N}_y - \tilde{\delta}/\tilde{\delta}_y$) relation (Case (viii))

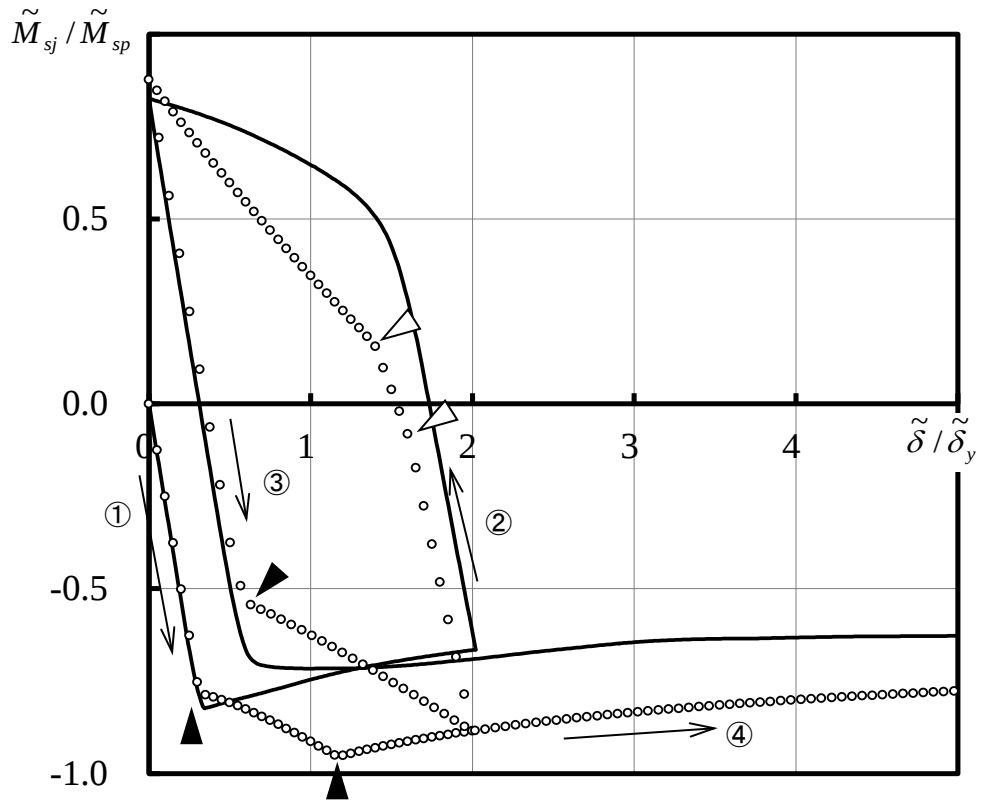


Fig.4-58 In-plane bending moment- stretch ($\tilde{M}_{sj}/\tilde{M}_{sp} - \tilde{\delta}/\tilde{\delta}_y$) relation (Case (viii))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

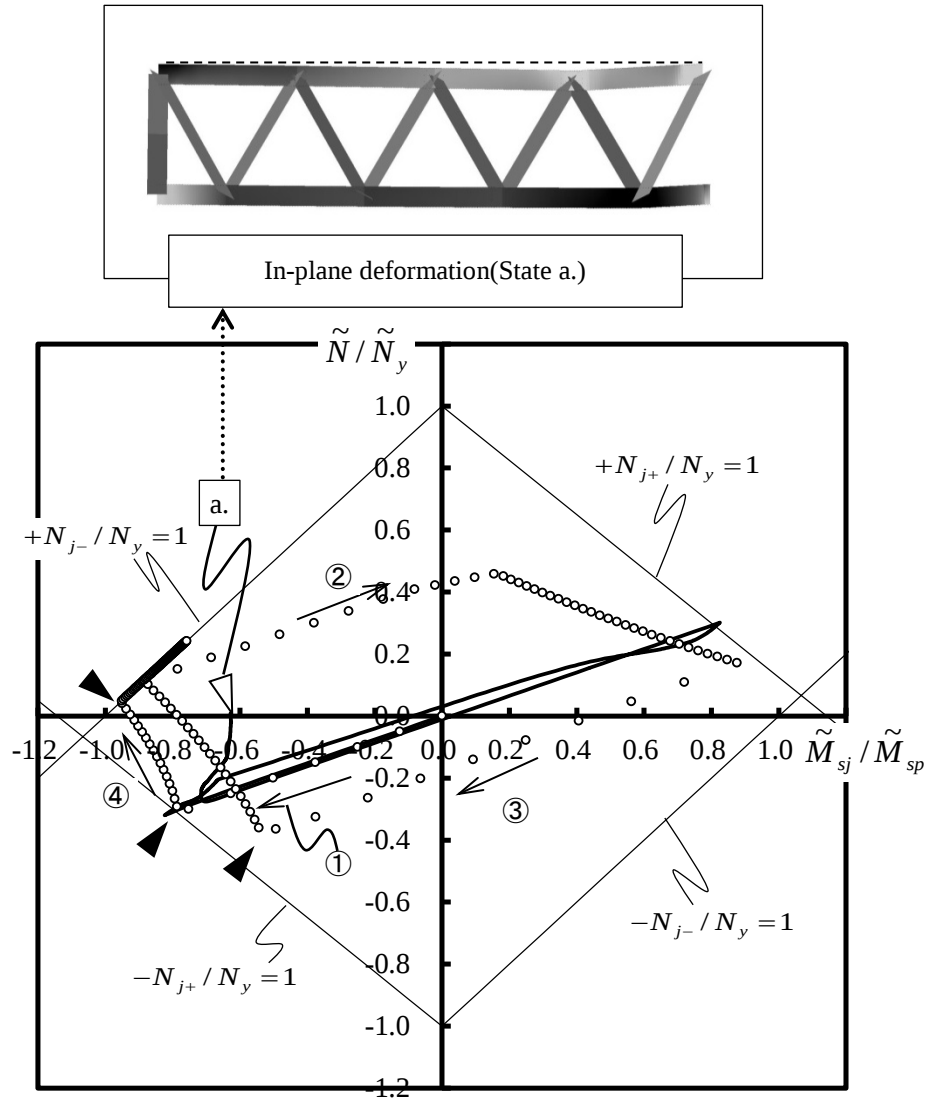


Fig.4-59 Axial force - in-plane bending moment ($\tilde{N} / \tilde{N}_y - \tilde{M}_{sj} / \tilde{M}_{sp}$) relation (Case (viii))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

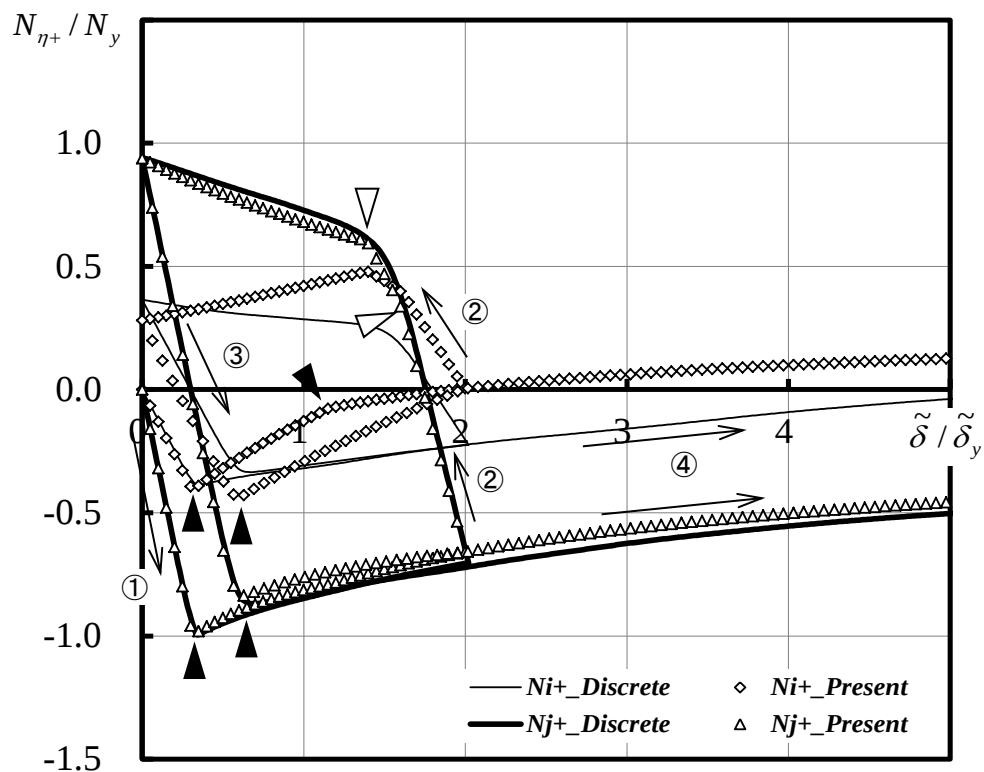


Fig.4-60 Axial force (chord members)-stretch relation (Case (viii))

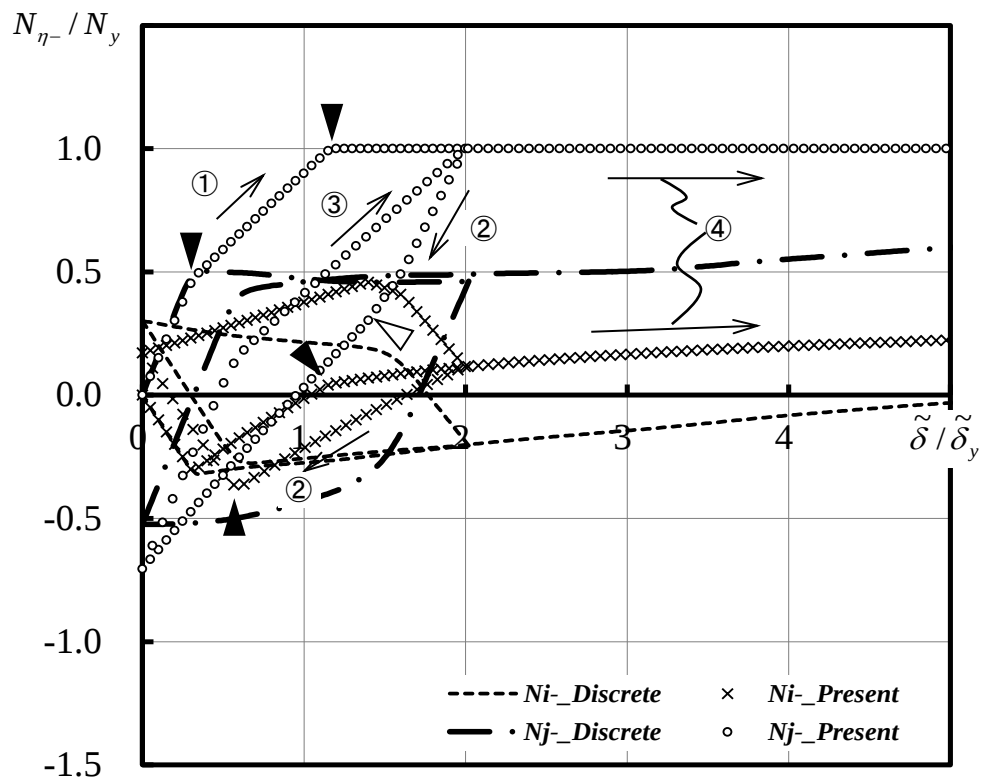


Fig.4-61 Lateral deformation of chord member- stretch relation (Case (viii))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

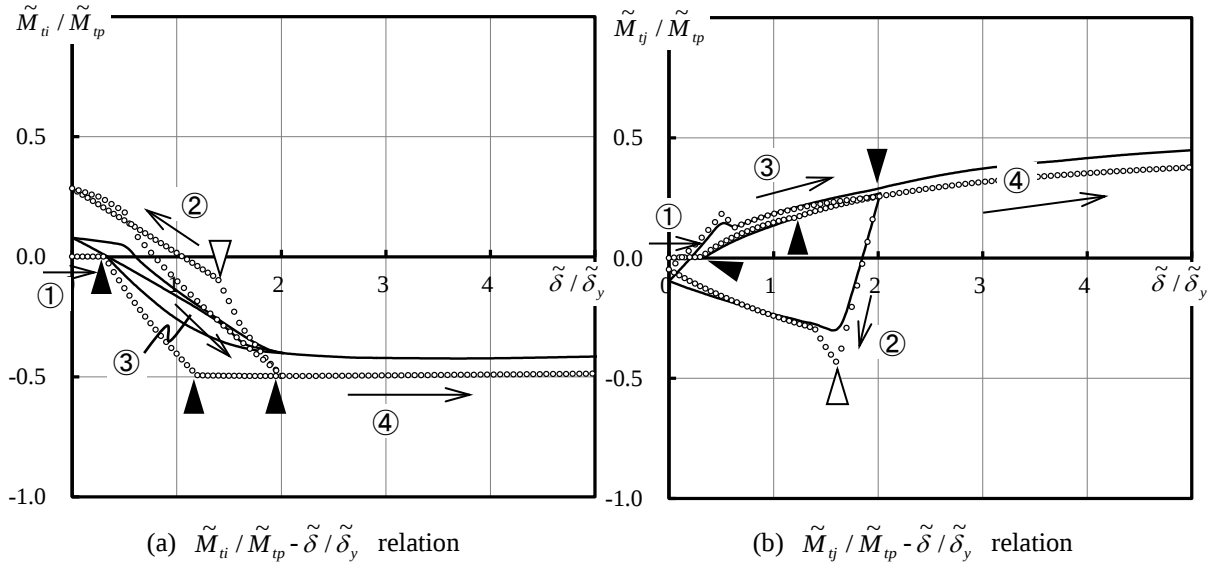


Fig.4-62 Out-of-plane bending moment- stretch relation (Case (viii))

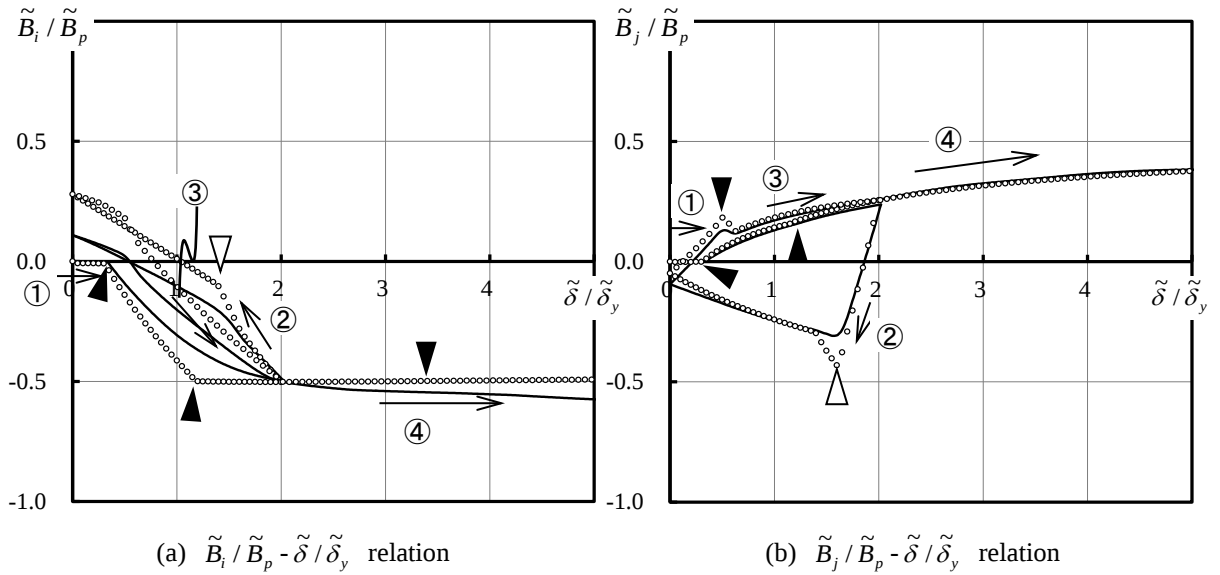


Fig.4-63 Bimoment-stretch relation (Case (viii))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

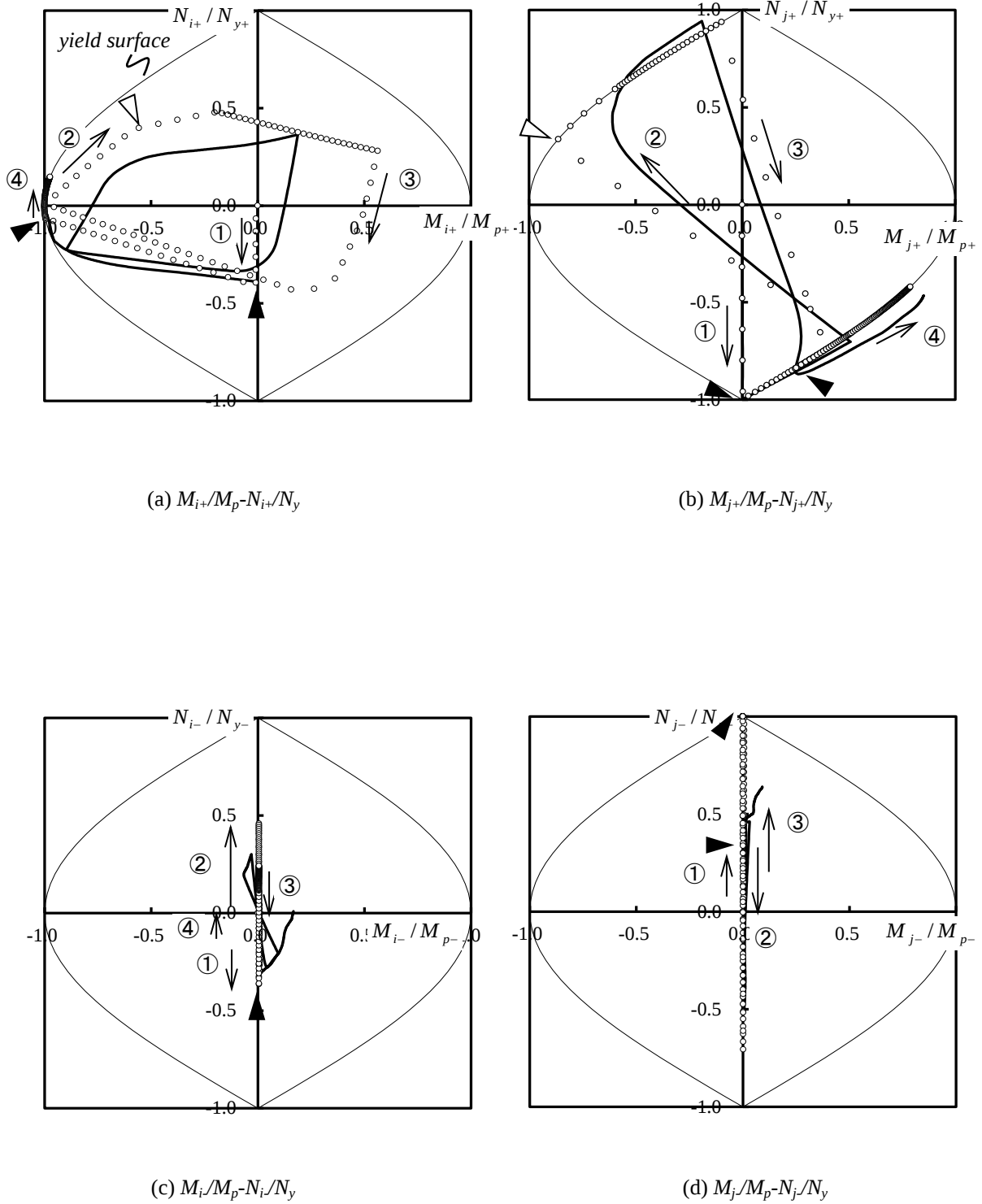


Fig.4-64 Bending moment- axial force relation (end of each chord member) (Case (viii))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

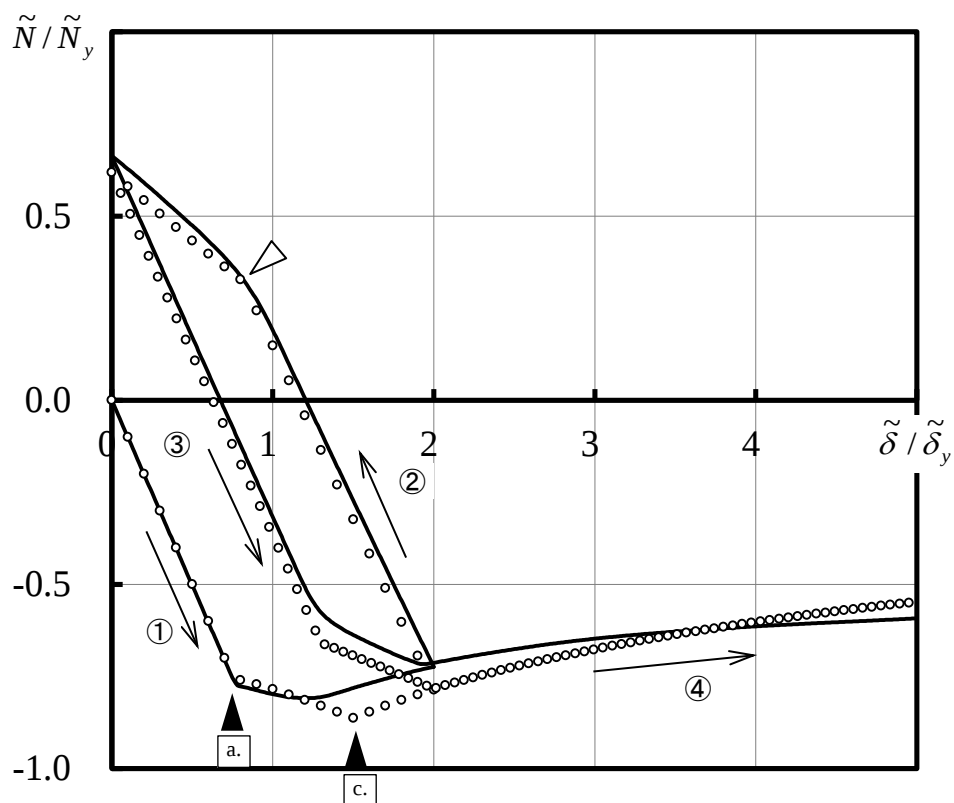


Fig.4-65 Axial force-stretch($\tilde{N} / \tilde{N}_y - \tilde{\delta} / \tilde{\delta}_y$) relation (Case (ix))

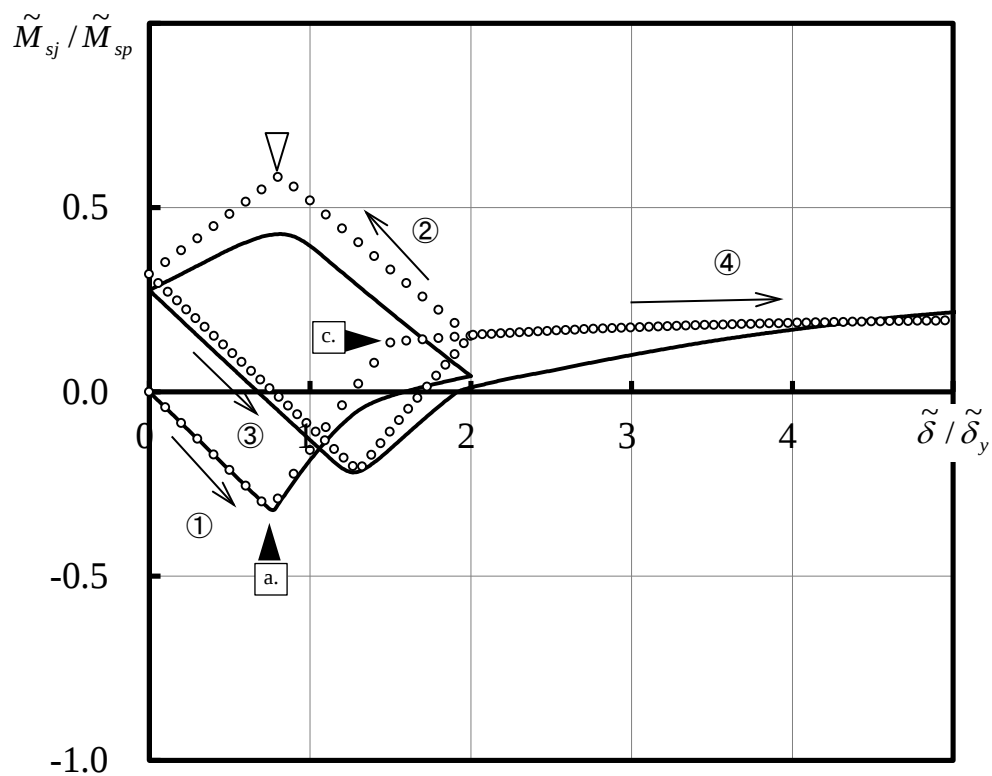


Fig.4-66 In-plane bending moment- stretch ($\tilde{M}_{sj} / \tilde{M}_{sp} - \tilde{\delta} / \tilde{\delta}_y$) relation (Case (ix))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

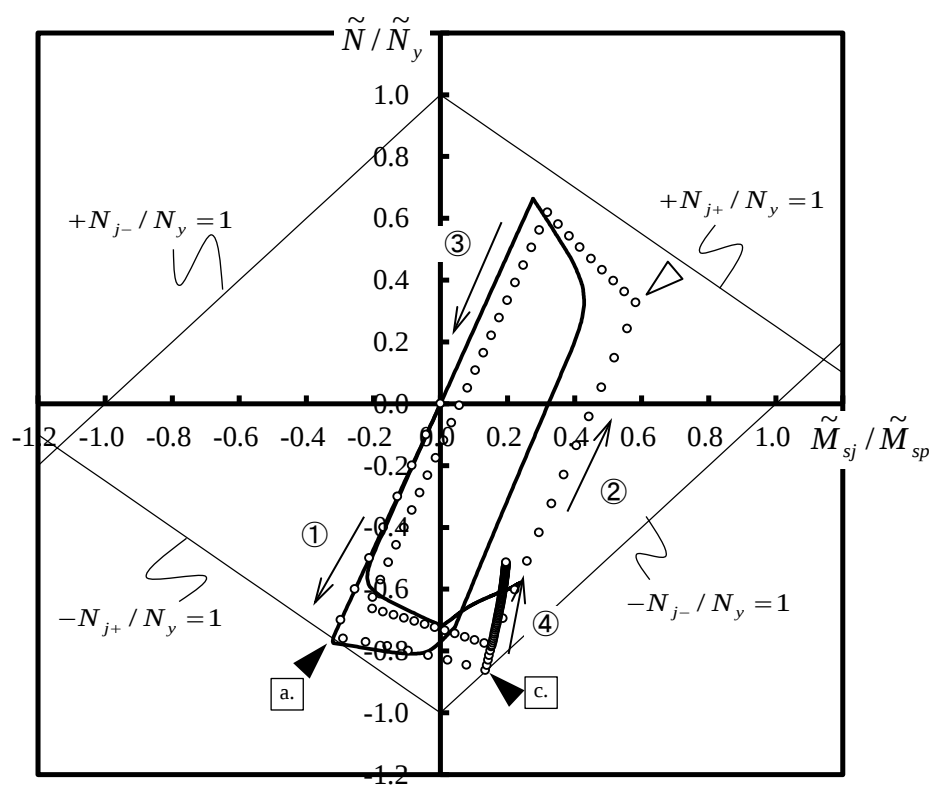


Fig.4-67 Axial force - In-plane bending moment ($\tilde{N} / \tilde{N}_y - \tilde{M}_{sj} / \tilde{M}_{sp}$) relation (Case (ix))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

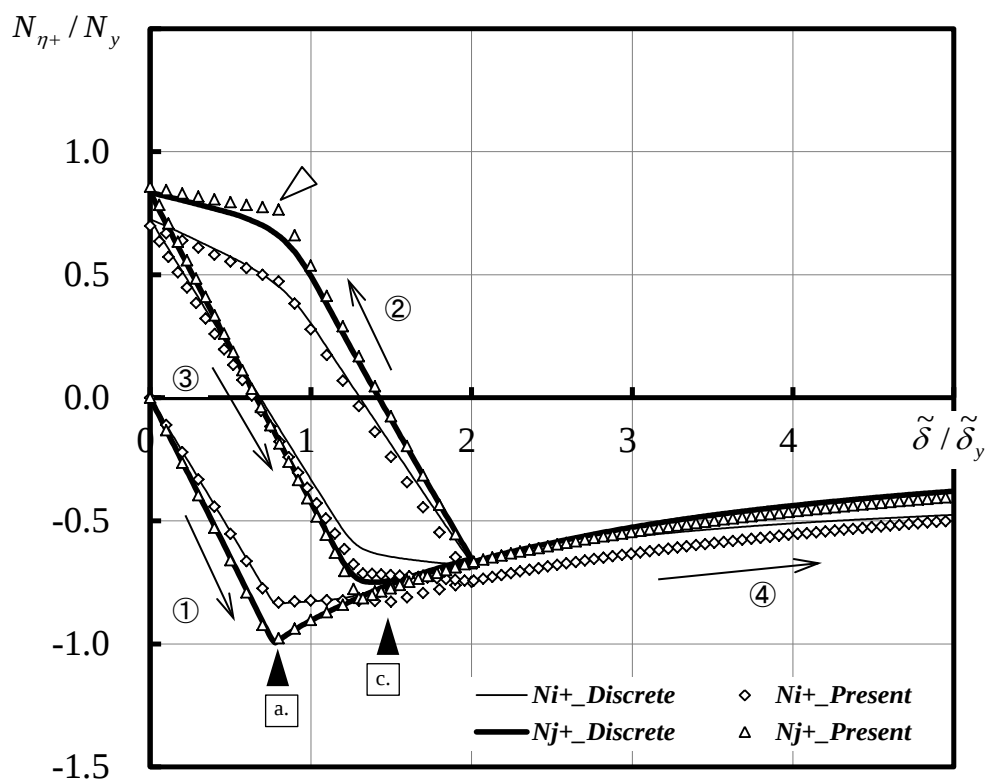


Fig.4-68 Axial force (chord members)-stretch relation (Case (ix))

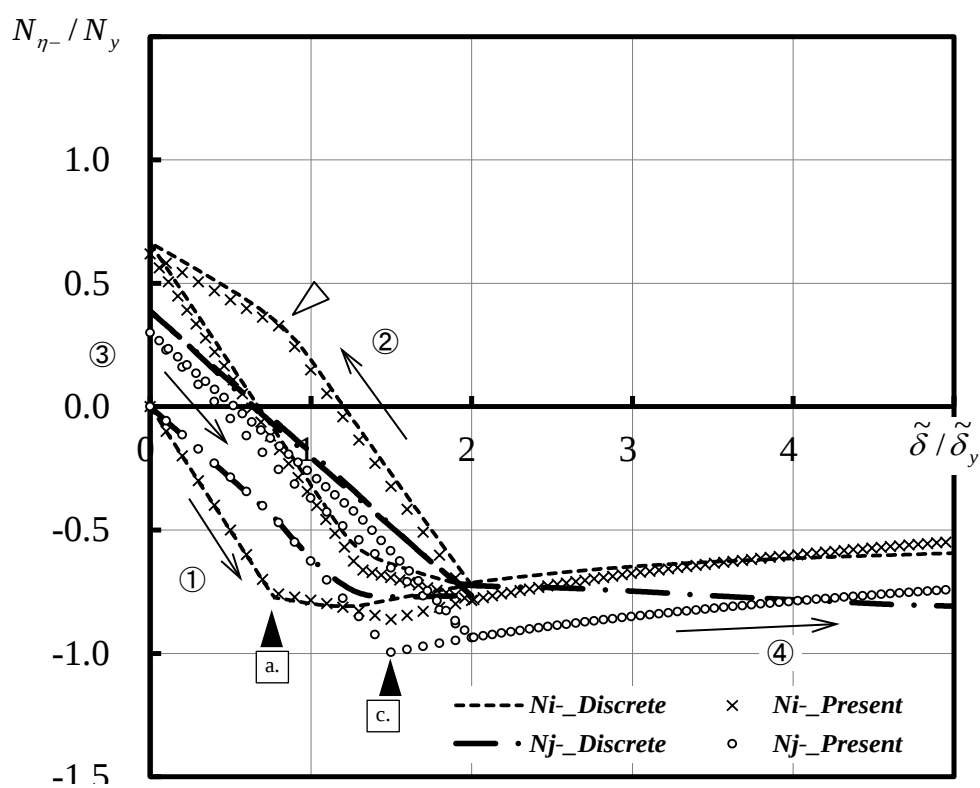


Fig.4-69 Lateral deformation of chord member- stretch relation (Case (ix))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

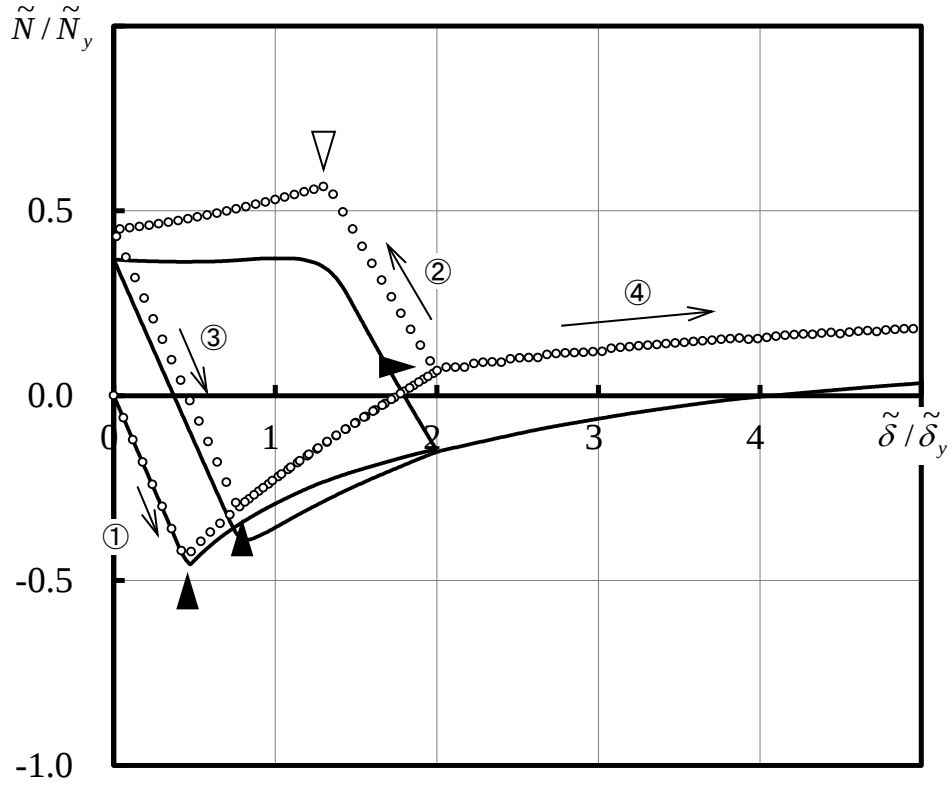


Fig.4-70 Axial force-stretch ($\tilde{N} / \tilde{N}_y - \tilde{\delta} / \tilde{\delta}_y$) relation (Case (x))

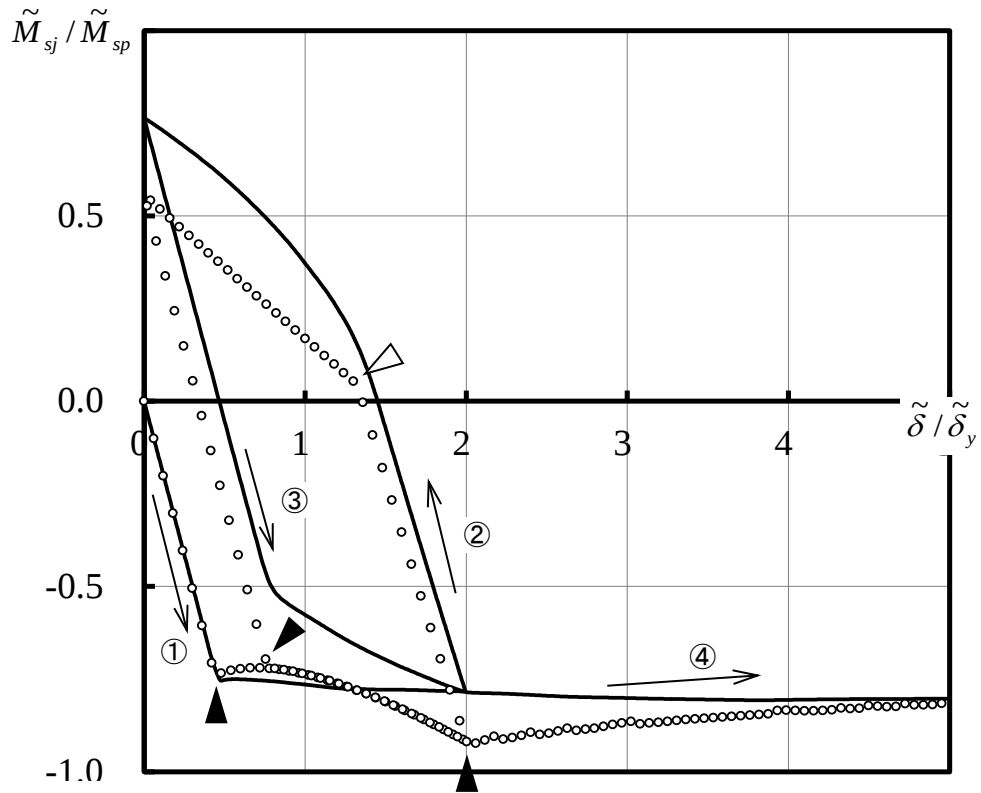


Fig.4-71 In-plane bending moment- stretch ($\tilde{M}_{sj} / \tilde{M}_{sp} - \tilde{\delta} / \tilde{\delta}_y$) relation (Case (x))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

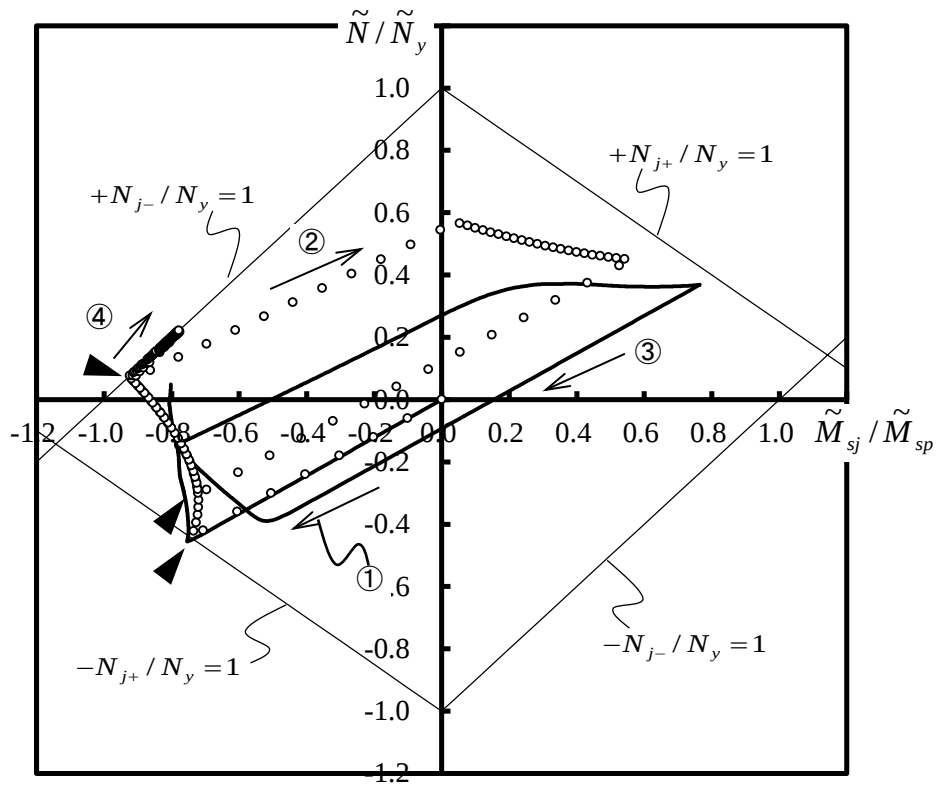


Fig.4-72 Axial force - in-plane bending moment ($\tilde{N} / \tilde{N}_y - \tilde{M}_{sj} / \tilde{M}_{sp}$) relation (Case (x))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

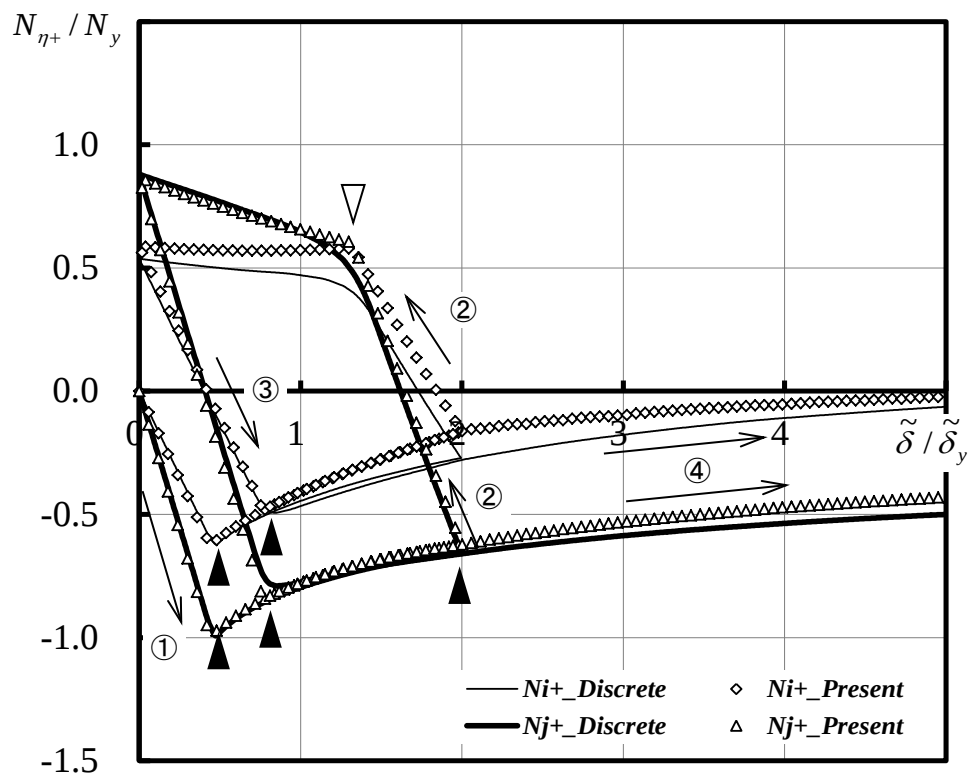


Fig.4-73 Axial force (chord members)-stretch relation (Case (x))

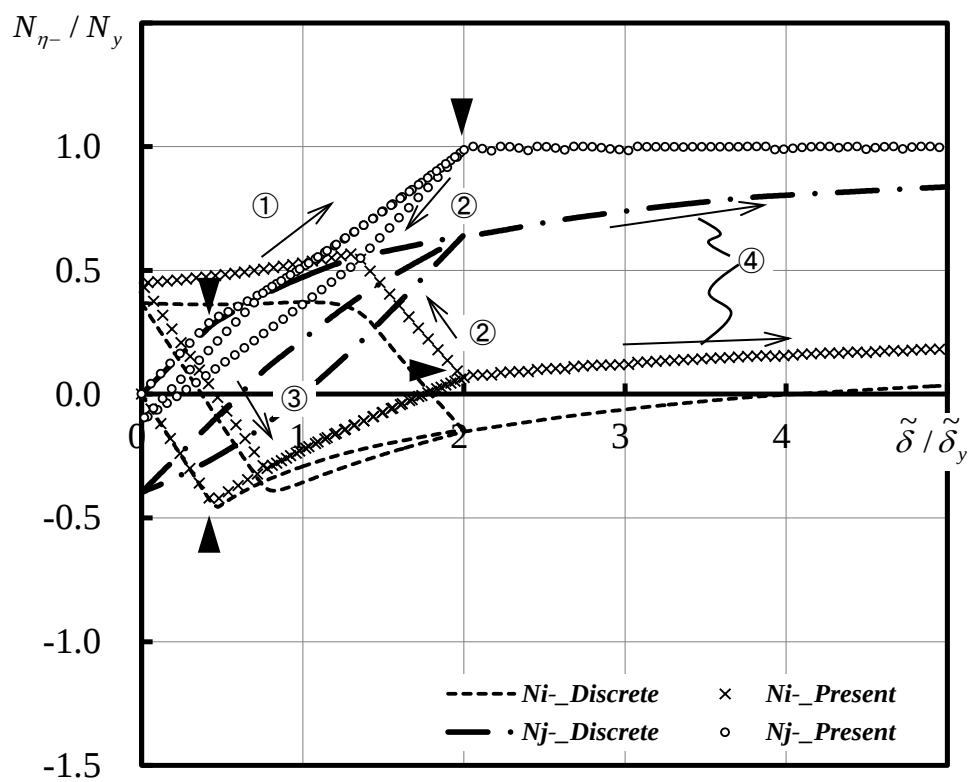


Fig.4-74 Lateral deformation of chord member- stretch relation (Case (x))

(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

第5章 トラス梁要素の空間構造への適用例

5.1 はじめに

5.2 解析仮定

5.2.1 解析対象

5.2.2 細分化モデルのモデル化過程と座屈固有値解析

5.2.3 提案手法による解析モデル

5.3 数値解析結果および考察

5.4 トラス梁要素の空間構造への適用に関する留意点

5.5 まとめ

5. 1 はじめに

本論文の第4章で、トラス梁部材における弦材の構面外座屈後挙動を追跡可能な「トラス梁要素」を提案し、材端が剛に拘束された場合の妥当性を検証した。得られたトラス梁要素により、既往の研究と比較して実際の接合条件に近い条件において解析可能な手法に拡張されたといえる。しかしながら、提案手法が実際の空間構造の解析にも使用可能であるかは検証されていない。特に、第4章における妥当性の検討においては弦材端部の回転を拘束していたため、隣り合う他のトラス梁との接合による相互作用を考慮した挙動についてはさらに確認を要する。

そこで本章では、Fig.5-1 に示すトラス梁から成る空間構造を解析対象に、第4章の手法に基づくトラス梁要素を用いた数値解析モデル(提案モデル)による崩壊挙動の再現への適用例を示す。また、離散化手法による細分化モデルの解析結果と比較することにより、第4章の手法の適用範囲を考察する。

平行弦トラス梁から成る空間構造の座屈耐力に関する研究は、日置ら⁷⁶⁾の研究のように、トラス梁から成るアーチ形の架構を一体的に捉えたものがある。しかしながら、この知見は線形弾性状態から空間構造の全体座屈に至るまでの挙動のみに主眼が置かれており、本研究で主題とする座屈後の崩壊挙動までは言及できない。一方、特定の構成部材のまとまりを単一要素にモデル化するという方針で示した元結・大塚⁵⁷⁾および元結・緒方⁶⁰⁾の手法は、空間構造への適用範囲に言及されていないという欠点を有する。そのため、実在する空間構造により近い接合状態に対する手法であることの検証と共に、最初の部材が構面外座屈した際の応力再配分が再現可能かについても検証する。

5. 2 解析仮定

5. 2. 1 解析対象

Fig.5-1 に解析対象を示す。解析対象は紙面奥行方向に繰り返される空間構造の構面の 1 スパン分を取り出したものを想定する。柱(Column 1~4)および梁(Beam 1~6)は平行弦トラス梁から成り、両端の柱脚はナيفエッジによってピン支持されている。したがって、この解析対象が線材から成る架構と捉えれば、1 次の不静定構造であることが理解できる。パネル数 S が 2~3 毎の Fig.5-1 で示す赤丸の位置においてトラス梁の座屈補剛部材があることを想定するために、弦材同士は y 方向に補剛され、構面外回転等は連続的に振る舞うような境界条件とする。Fig.5-2 の四角に示した柱梁接合部、棟およびナيفエッジの位置は剛な梁要素を使用し、この部分の部材の塑性化は考慮しない。トラス梁を構成する弦材および斜材の諸元は Table 5-1 に示すとおりである。弦材は材料の塑性化を考慮した鋼管断面とし、斜材は弾性状態を保持し座屈しないものとする。

外力条件を Table 5-2 に示す。Case (i)は鉛直荷重 F_z を Fig.5-1 の黒丸で示す節点に単調増加させた例、Case (ii),(iii),(iv)は一定の鉛直荷重 F_z を Case (i)と同じ点に入力した上で、節点 B,D に水平力 F_x を、2 点と同じ値となるように単調増加させた例である。この解析対象を、細分化モデルにおいては Fig.5-2、提案モデルにおいては Fig.5-3 に示すモデル化とし、それぞれに対して数値解析をおこなう。それらのモデル化過程と、崩壊挙動の再現に至る過程を、次項以降に示す。

5. 2. 2 細分化モデルのモデル化過程と座屈固有値解析

解析対象に対して細分化モデルによる上記の条件を模擬した各節点の境界条件を Fig.5-2 に示す。また、Fig.5-2 の節点に示す赤丸の位置において上・下弦材の横変位を拘束している。弦材は 1 パネル数に対して 50 分割した Bernoulli の梁理論に基づく梁要素を、斜材は 1 部材につき単一のトラス要素としている。弦材の断面の積分点は Fig.3-7 に示した位置と同様であり、材料特性も第 3 章と同様である。総節点数は 2627、総要素数は 2696 である。

細分化モデルに対して、まずは初期不整を与えない完全系において所定の鉛直および水平外力を加え、座屈固有値解析をおこなう。Case (i), (ii), (iii)に対する線形固有値解析の座屈モードを Fig.5-4, Fig.5-5, Fig.5-6 にそれぞれ示す。Case (i)は 1 次モードと 2 次モードが重解となるため、Fig.5-4(a)に 1 次モード、Fig.5-4(b)に 3 次モードを示す。Case (ii)および Case (iii)については 1 次モードおよび 2 次モードを示す。各図の丸で囲った位置において、トラス梁の弦材が構面外座屈する座屈モードが見られた。空間構造においては、外力を加えたときの応力および変形状態が座屈モードに影響を与える可能性があるため、確認のため、Case (i)の鉛直荷重と Case(ii),(iii)の水平荷重の増分値が異なる状態においても線形固有値解析をおこなった。結果として、どの Case も弾性時の 1 次モードが同じであることを確認している。以上までの考察から、最初に 1 次モードの座屈挙動が発現することは容易に予測される。一方、その後は応力再配分により弾性固有値解析時とは異なる応力状態となることが考えられ、次に発現する不安定挙動を座屈固有値解析結果から予測することはできない。また、想定される外力は鉛直外力、水平外力が複合的に変化するため、座屈モードも若干変化する。すべての座屈モードを考慮すると、入力データが膨大となるほか、どの座屈モードが重要かを確認することができず、設計時に考慮すべき崩壊挙動の追跡が本当の意味でなされたとは言い難い。さらに、断面の塑性化により最初の座屈が進行する場合は、最初の耐力そのものが異なるため、線形座屈固有値解析のみでの予測はより困難となる。

そこで、Case (ii)および Case (iii)の数値計算の際には、以下の方法で順次荷重経路を探索する。まず、弦材の塑性化を考慮した細分化モデルにおいて、1 次モードの初期不整のみを微小に入力した系で数値計算をおこなう。最初の座屈が生じる位置から再度固有値解析を実行し、次に起こりうる座屈モードを予測する。以上より、得られた結果は Fig.5-5(b)および Fig.5-6(b)における座屈モードと同等であることが得られたので、これらの 2 つの座屈モードを、それぞれのモードの最大振幅が 3 mmとなるように初期不整を入力し、細分化モデルの増分解析を実行する。

以上が、空間構造の中でも単純な形状である山形ラーメン架構の座屈後挙動を再現するための前段の考察である。より複雑かつ不静定時数の大きな架構の場合は、最終崩壊状態までの経路が多数想定されるため、一つの部材が損傷し応力状態の変更が予期される度に固有値解析を実行しなおし、解析に反映させていく、という過程が必要となる。したがって、本論文第1章でも述べた通り、細分化モデルであっても、空間構造の設計に資するような、構造物全体の崩壊挙動に至るまでの情報を得るためには多くの考察過程を必要とする。そのため、今日の崩壊挙動を考慮した設計の困難さを解消しているとは言い難い。

5. 2. 3 提案手法による解析モデル

次に、Fig.5-3 に示す提案モデルの構築方法について述べる。解析対象を模擬するために、座屈補剛部材を想定した位置までの区間を単一のトラス梁要素で置換する。すなわち、Fig.5-1 において命名した Column-1~4、Beam-1~6 が各々単一の梁要素ということになる。境界条件は Fig.5-3 に示す通り、トラス梁の接合部においては弦材各々の回転を許容する一方、横変位は拘束する。詳細モデルと同様に、柱梁接合部、棟および柱脚は剛な梁要素としている。節点数は 19、総要素数は 18 となり、細分化モデルと比較して、およそ 150 分の 1 の要素数となっている。

提案モデルにおいて増分外力による解析をおこなうにあたり、塑性ヒンジ位置を予測するための予備解析をおこなう。鉛直外力および微小な水平外力を加えた時の各トラス梁要素の材端力から、Appendix 3 に示す方法によって塑性ヒンジ位置 α_{ζ} を推定する。増分外力の解析においては上記によって算出された α_{ζ} を各トラス梁要素に入力する。

5.3 数値解析結果および考察

Fig.5-7 に、Case (i)における荷重-変位関係を示す。縦軸は各節点の鉛直外力の合計値(ΣF_z)であり、横軸は架構の位置 C の鉛直変位 u_z である。▼①における荷重値を最大として、その後は u_z が進行する一方、耐力が低下している。▼①および▼②における構面内のモーメント図の進展の様子を Fig.5-8(a,b) に示す。最大耐力時のモーメント分布である Fig.5-8(a)において、柱-梁接合部の位置 B、D においてモーメントが最大となっており、近傍の Beam-1 もしくは Beam-6 の塑性化によって耐力が決定していることが分かる。数値計算においては、いずれか片方の塑性化により弦材の構面外座屈が進行する結果が得られた。その後、▼②におけるモーメント分布は Fig.5-8(b)に示すように、先程最大値となっていた位置 B、D のモーメントが低下する一方、位置 C のモーメントが上昇する傾向を示している。この分布への変化は、Beam-1~6 のみで構成される単純梁に分布荷重が加えられた時の応力状態に指向していることを意味する。

この時の、Beam-5 および Beam-6 の構面外モーメントを Fig.5-9 に、両者の弦材の Fig.5-9 内の図に示す点における横変位の推移を Fig.5-10 に、それぞれ示す。架構を形成する梁の弦材同士が号に接合されていることにより、Beam-6 の弦材が座屈することによる構面外モーメントおよび弦材の横変位の増加に加え、隣接する Beam-5 にも伝達する様子が再現されている。

次に、一定の鉛直荷重を与えた上で水平荷重を増加させた数値解析例の結果を示す。Fig.5-11 に荷重-変位関係を示す。縦軸は水平外力の合計値(ΣF_x)を、節点 C の水平変位 u_x を横軸にとったものである。Fig.5-12(a)~(e)は、Fig.5-11 に示す▼①~⑤の時の架構のモーメント分布の推移を、それぞれ示す。また、Beam-5 および Beam-6 の構面外モーメントを Fig.5-13,14 に、Beam-2, Beam-5 および Beam-6 の弦材における N-M 相関図を Fig.5-15 に、横変位-変位関係を Fig.5-16 に、細分化モデルにおける損傷状態の変形図を Fig.5-17 に、それぞれ示す。Fig.5-11 の▼は、①鉛直外力入力直後、②梁 No.6 の弦材の断面が最初に弾塑性状態となった時、③Beam-6 の弦材の他端が弾塑性状態となった時、④水平荷重が再上昇し、Beam-2 の弦材が弾塑性状態となった時、⑤その後の挙動を、それぞれ示す。全部材が弾性を保持している状態から、②の時に Beam-6 の弦材において最初の座屈が発生すると共に水平耐力が低下する。このときのモーメントの推移が Fig.5-12(b)および Fig.5-12(c)であるが、Beam-6 が構面外座屈することによって架構全体の水平耐力が大きく低下している。この時、Beam-6 の弦材に対する N-M 図である

Fig.5-15(f)から、Beam-6 に構面外座屈が生じることによって、架構の最大耐力を決定づけていることが分かる。その後、線形弾性状態で推測される応力分布とは異なる状態(Fig.5-12(d))へと移行する中で、③において Beam-6 の塑性化が生じていなかった端部の塑性化が生じる。このことは、Fig.5-13 において Beam-6 の M_{ti} の耐力が一定となったこと、Fig.5-14(e)において弦材の材端力軌道が降伏関数に達したことから確認できる。この時の荷重変位関係において提案モデルと細分化モデルに差異が生じているが、この部分は第3章における弦材の手法、第4章におけるトラス梁1部材に関する検討でも示したとおり、塑性化に伴う断面の部分的降伏区間の応力状態の差異によるものである。さらにその後は全体の水平耐力が上昇し、④に達する。このとき、ここまでの構面外座屈によって材端力を保持できなくなった Beam-6 の近傍の応力は低下していく一方、変形の進行に伴い Beam-2 近傍のモーメントが上昇しており、座屈後に応力が再配分されている傾向が見られる。Beam-2 の弦材の N-M 図において弦材の評価を試みると、いずれの解析モデルにおいても弦材が塑性化していることが確認される。また、損傷後の座屈挙動についても、Fig.5-16 に示すように塑性化した Beam-6 で座屈変形が増加し、隣接する Beam-5 についても変形が生じる様子が確認できる。

④以降さらに数値計算を試みると、⑤において提案モデルの解と細分化モデルの解に差異が生じる。細分化モデルの解を見ると、④以降は架構全体の耐力を保持できなくなっていることから、架構自体が不安定となっていることが分かる。ここで、Fig.5-17(b)に示す離散化モデルによる最終変形図を見ると、応力再配分によって初期に塑性化した位置とは異なる部分にも損傷が集中している様子が見られ、その位置も概ね提案モデルによる塑性化の位置と対応している。以上の解析結果に対して、提案手法による数値解と詳細モデルによる数値解の結果が対応していることから、提案モデルによって架構の耐力が一時的に低下する状況を再現可能であることが示された。

上記の適用例に加え、適用に関する補足として Case (iii)を示す。トラス梁から成る空間構造は通常、架構の上面に屋根を設置するための母屋などが配され、実際には構面外座屈が拘束されていることが考えられる。このような条件に対して、細分化モデルを構築する際、構面外変位の拘束を境界条件として再設定する必要があり、節点数が多いほどこの設定は煩雑となる。一方、提案モデルは、母屋の設置位置に相当する弦材の座屈が生じる条件(式(4.46b))の判定を解除する設定をするのみで計算が可能である。この条件に対する数値解析における荷重-変位関係の結果を、Fig.5-18 に示す。母屋が配置されることが想定される Beam-2 の上弦材において、座屈が生じず、塑性化によってのみ劣化が生じる

様子を、提案モデルによって簡便に考察する事が可能である。

Fig.5.19～5.23 に、一定の鉛直荷重を Case (ii)の半分とした例である Case (iv)の数値解析結果を示す。荷重分布が異なることにより、解析対象の水平荷重に対する最大耐力値、その後の劣化の度合いおよび最終的な崩壊機構を形成した時の変位が変化している。一方で、本例においては塑性化後の挙動の傾向に差異は見られなかった。このように、応力分布が異なる例においても、提案モデルは崩壊挙動を再現可能である。

5. 4 トラス梁要素の空間構造への適用に関する留意点

本節では、第4章によるトラス梁要素に関する考察、本章のような空間構造への適用例から得られた知見に加え、空間構造に対するトラス梁要素によるモデル化の留意点および適用範囲をまとめ、以下に示す。

- ・空間構造においては、接合部から接合部までの区間の斜材の組数 S が 2 から 4 の場合が一般的であり、トラス梁要素は、上記のようなトラス梁部材の接合部間を単一の要素とする梁要素である。
- ・提案したトラス梁要素は、トラス梁に生じる巨視的な振り回転が微小である仮定に基づいているため、トラス梁が大きな横倒れが生じる架構の問題には対応できない。しかしながら、トラス梁から成る空間構造は接合部における互いの補剛効果によって振りが拘束されている場合が多い。この考え方に従えば、本例のような平面的な架構のみならず、3次元的に接合されるドームのような架構にも適用可能であると考えられる。
- ・トラス梁から成る空間構造の境界条件は、軸方向変位および構面内の回転に加えて、材端の節点における構面外回転および振り率の自由度を考察することによって接合条件を表現する。例えば、本例に示すような上下弦材が剛接合される場合は本章の例と同様の条件とする他、トラス梁要素の上下弦材の構面外回転に対する接合条件を解放する場合は、材端の構面外回転および振り率の接合条件を解放とする。ただし、トラス梁の上下弦材のいずれか一方の回転を解放する場合には適用されない。

5. 5 まとめ

本章では、第4章までで提案してきたトラス梁要素を、トラス梁から成る空間構造の数値解析モデルに適用し、空間構造の崩壊挙動の再現を試みた。本章で得られた知見を以下に示す。

1. トラス梁から成る空間構造の崩壊挙動を目的とした数値解析の過程を、構成部材の離散化による細分化モデルとトラス梁要素による提案モデルの2種類に対して示した。考察過程より、細分化モデルはモデル化により自由度が膨大となるほか、荷重増分の解析に至るまでの座屈固有値計算など、煩雑な検討が必要であるため、設計業務においてこれらの考察過程を常におこなう事が困難であると考えられる。一方、想定される構面外座屈現象を単一の梁要素に内挿したトラス梁要素は、煩雑な考察を必要としない。
2. 複数の外力に対する数値計算によって、架構全体の耐力と変位の関係が得られ、提案モデルが細分化モデルと同等の結果を示すことが確認された。特に、架構全体の耐力を決定するトラス梁弦材の構面外座屈を評価することが可能である他、耐力後の劣化挙動までも追跡できている。また、モーメント図から、トラス梁が構面外座屈によって耐力低下したときの系全体の応力再配分の様子が再現されていることが確認される。
3. トラス梁を部材単位で見ても、トラス梁要素の材端力を細分化モデルと同様に得られている。このことは、第4章で示されていなかったトラス梁同士が連続するような条件でもトラス梁の材端力を評価可能な手法であることを意味する。
4. 対象とする架構は1スパンが約20mであるが、弦材の構面外座屈の発生を詳細モデルにおいて考慮する場合、構面外座屈の生じる座屈長さに対して構成要素の細分化を要する一方、提案手法によるモデルはトラス梁の構面外座屈長さに対して1要素で置換している。本例では、提案手法によるモデルに対して詳細モデルの要素数は約150倍の要素数であるにもかかわらず、同等に崩壊挙動を評価可能である。
5. 以上のトラス梁要素の空間構造への適用例を通して、トラス梁要素の適用範囲に対する留意点を示した。

Chapter 5

Tables and Figures

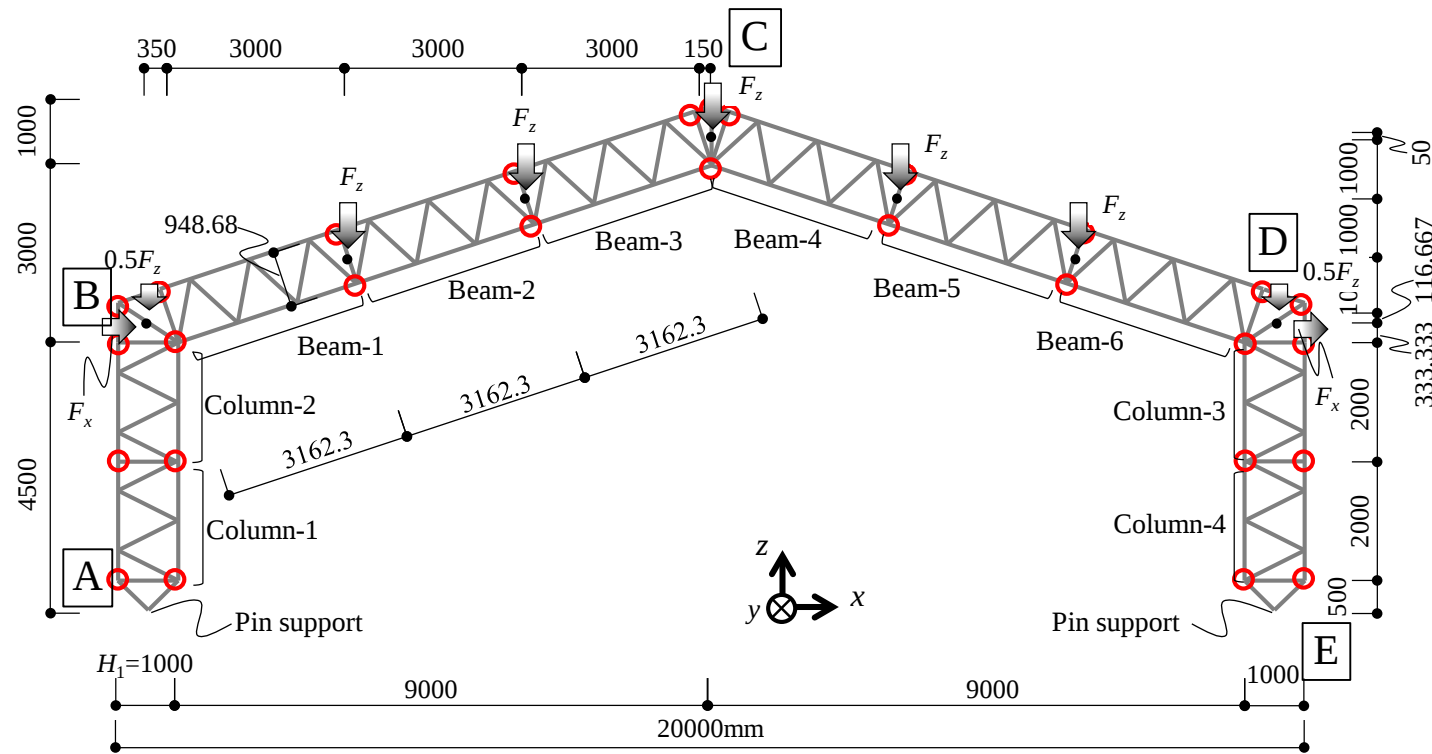


Fig.5-1 Target truss beam structure

Table 5-2 Loading conditions

	Vertical load	Horizontal load
Case (i)	Incremental loading	0kN
Case (ii) Case (iii)	$\Sigma F_z = 120\text{kN}$ ($F_z = 20\text{kN}$, Constant)	Incremental loading
Case (iv)	$\Sigma F_z = 60\text{kN}$ ($F_z = 10\text{kN}$, Constant)	Incremental loading

Table 5-1 Mechanical properties

	L [mm]	H [mm]	S	θ_d [°]	Chord member(Tube)								Diagonal member
					D [mm]	d [mm]	$a_{c\zeta}$ [mm ²]	$I_{c\zeta}$ [mm ⁴]	Slender-ness ratio	σ_y [N/mm ²]	N_y [kN]	M_p [kN · m]	a_d [mm ²]
Column-1~4	2000.0	1000.0	2	63.43	140.0	128.0	2.526×10^3	5.681×10^6	42.17	235.0	5.936×10^5	2.533×10^7	2.526×10^3
Beam-1~6	3162.3	948.68	3	60.95	108.7	103.4	8.829×10^2	1.242×10^6	84.31	235.0	2.075×10^5	7.005×10^6	8.829×10^2

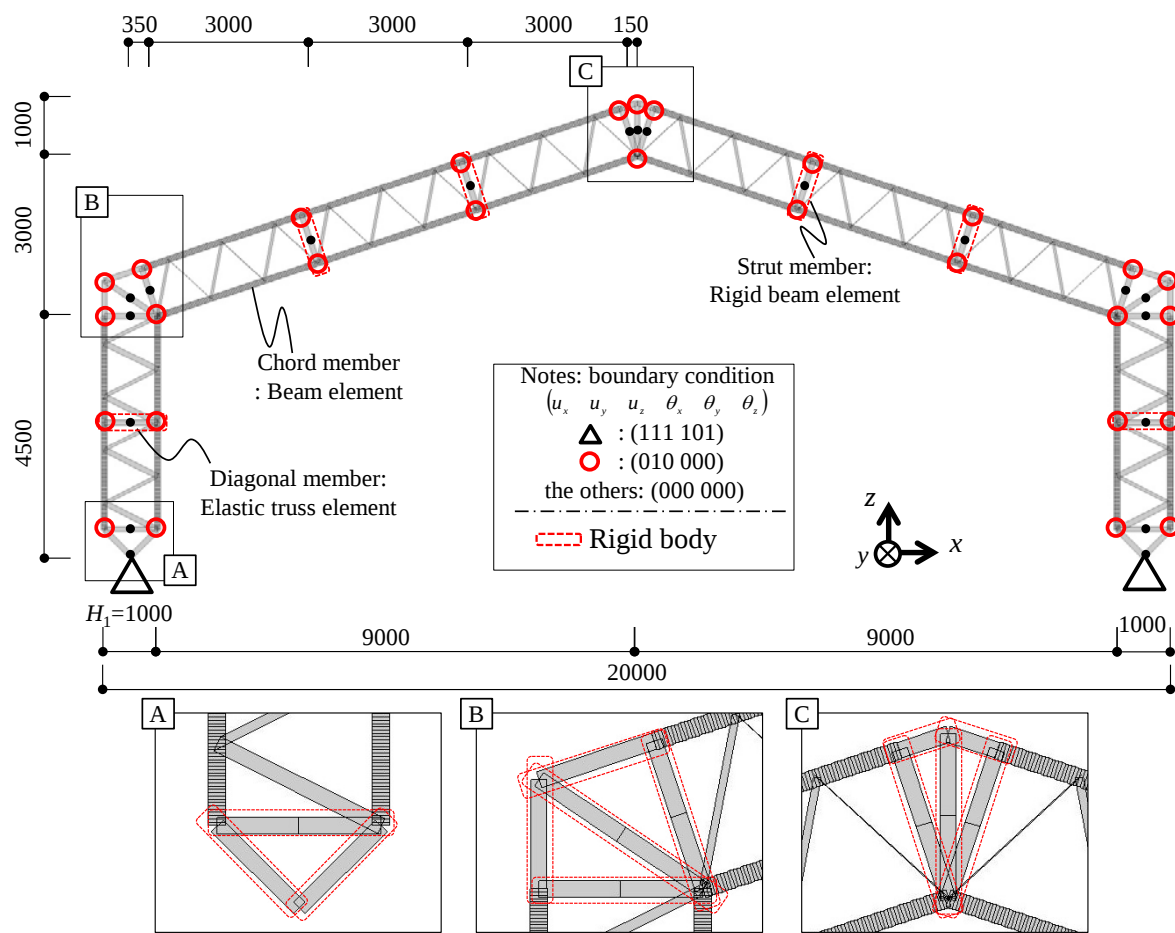


Fig.5-2 Discrete model of the target structure

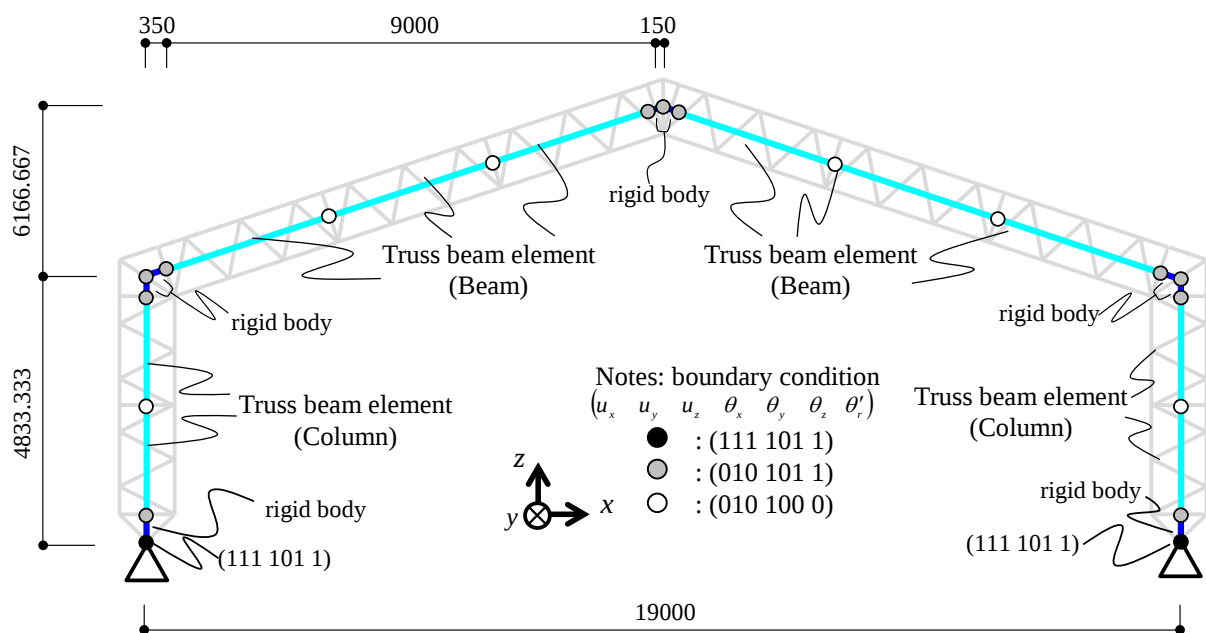
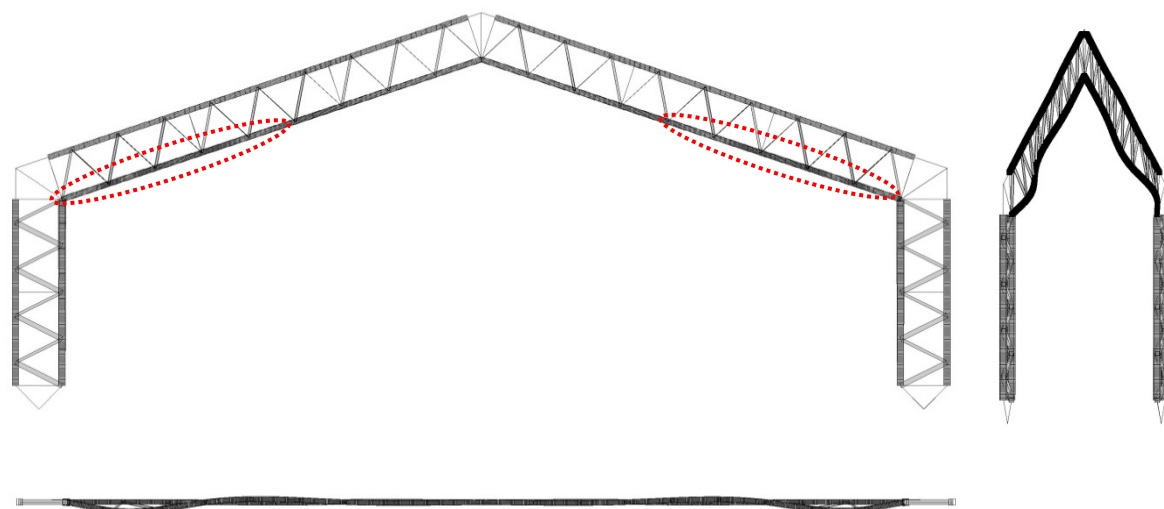
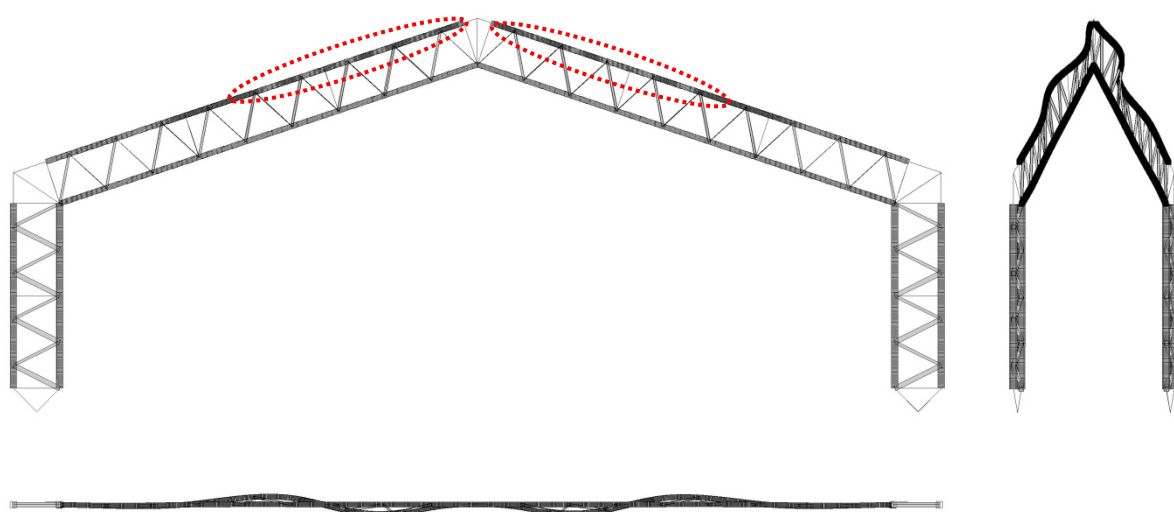


Fig.5-3 Present model of the target structure

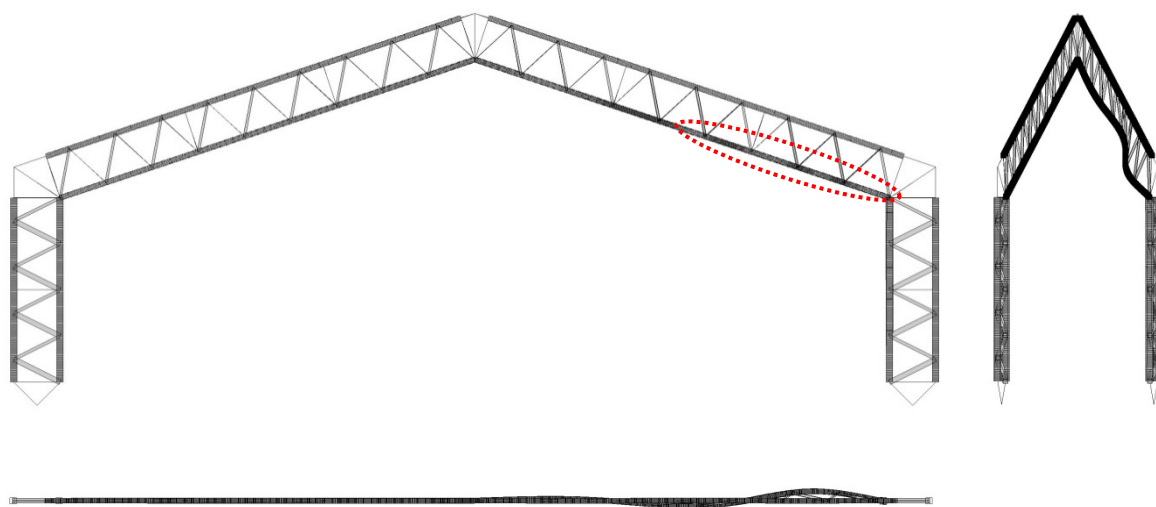


(a) 1st mode

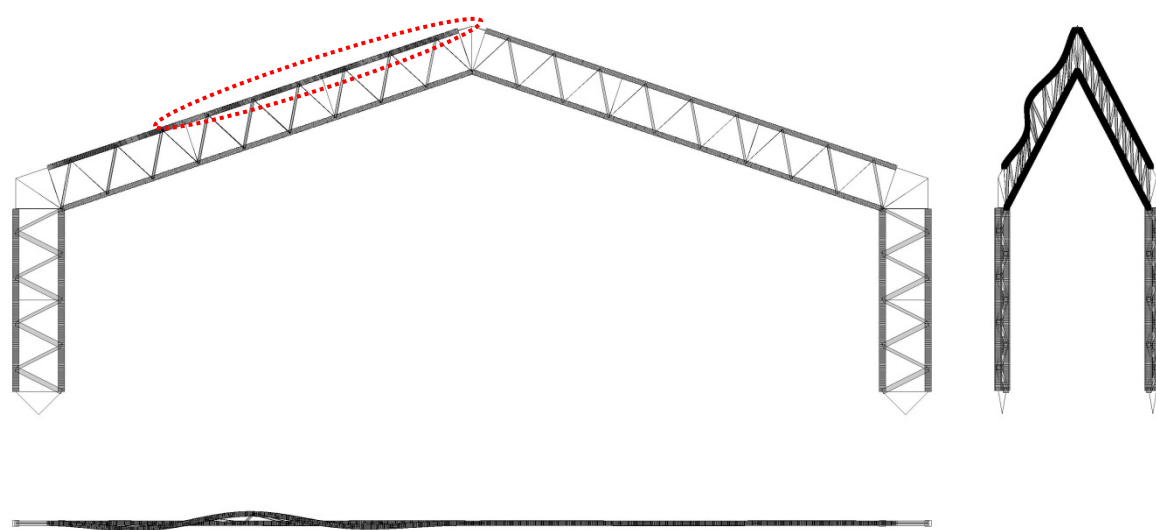


(b) 3rd mode

Fig.5-4 Buckling modes (Case (i))

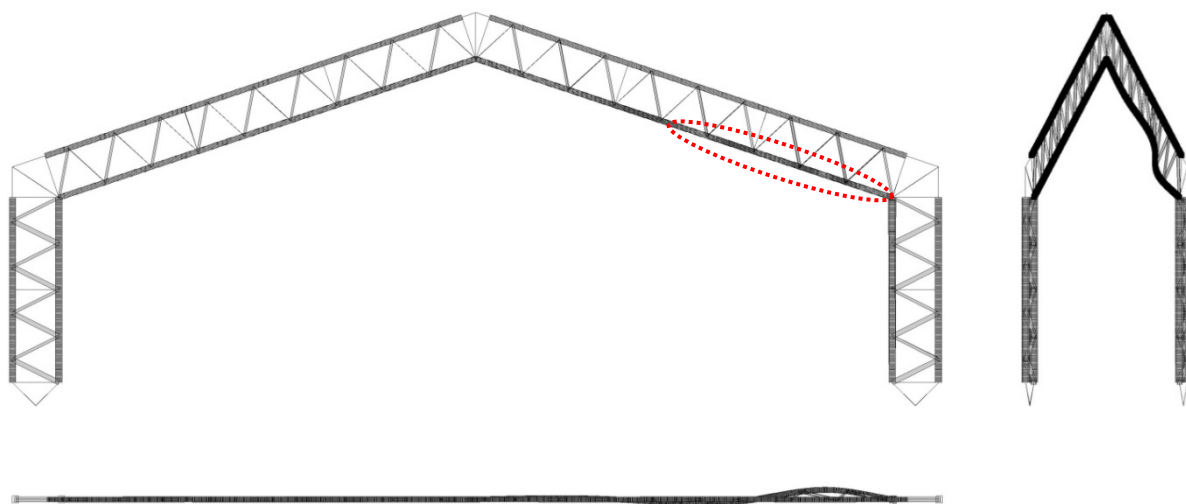


(a) 1st mode

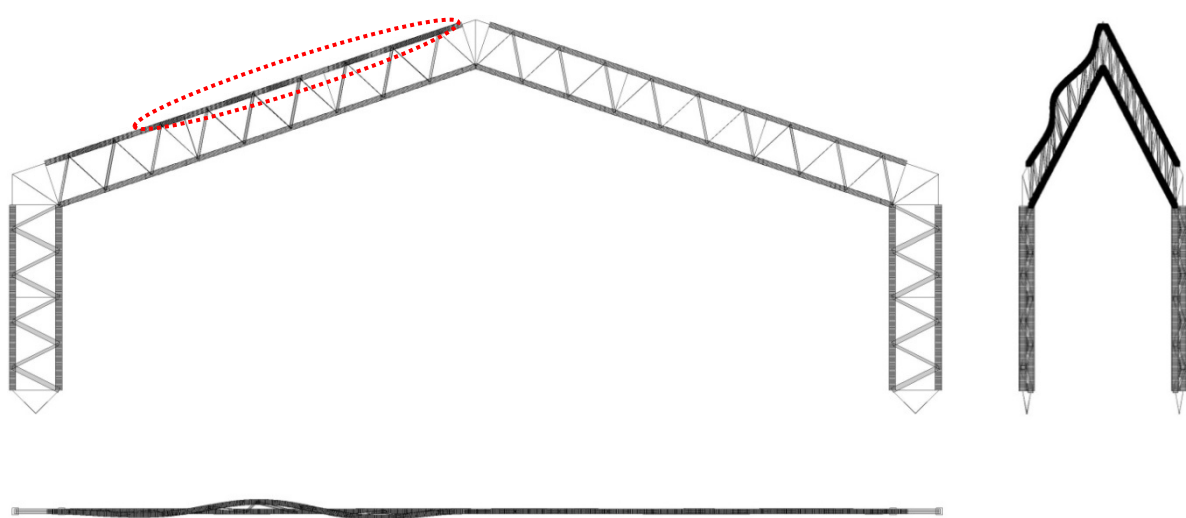


(b) 2nd mode

Fig.5-5 Buckling modes (Case(ii))



(a) 1st mode



(b) 2nd mode

Fig.5-6 Buckling modes (Case(iii))

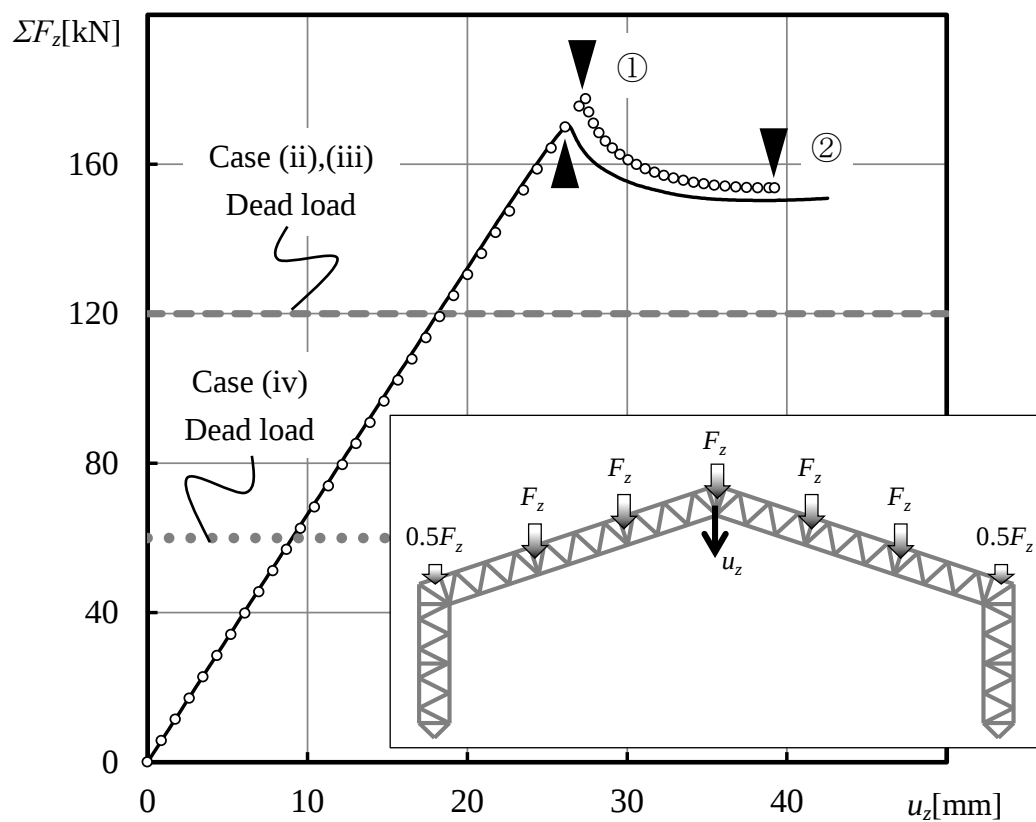


Fig.5-7 Case (i) load-displacement relation
(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

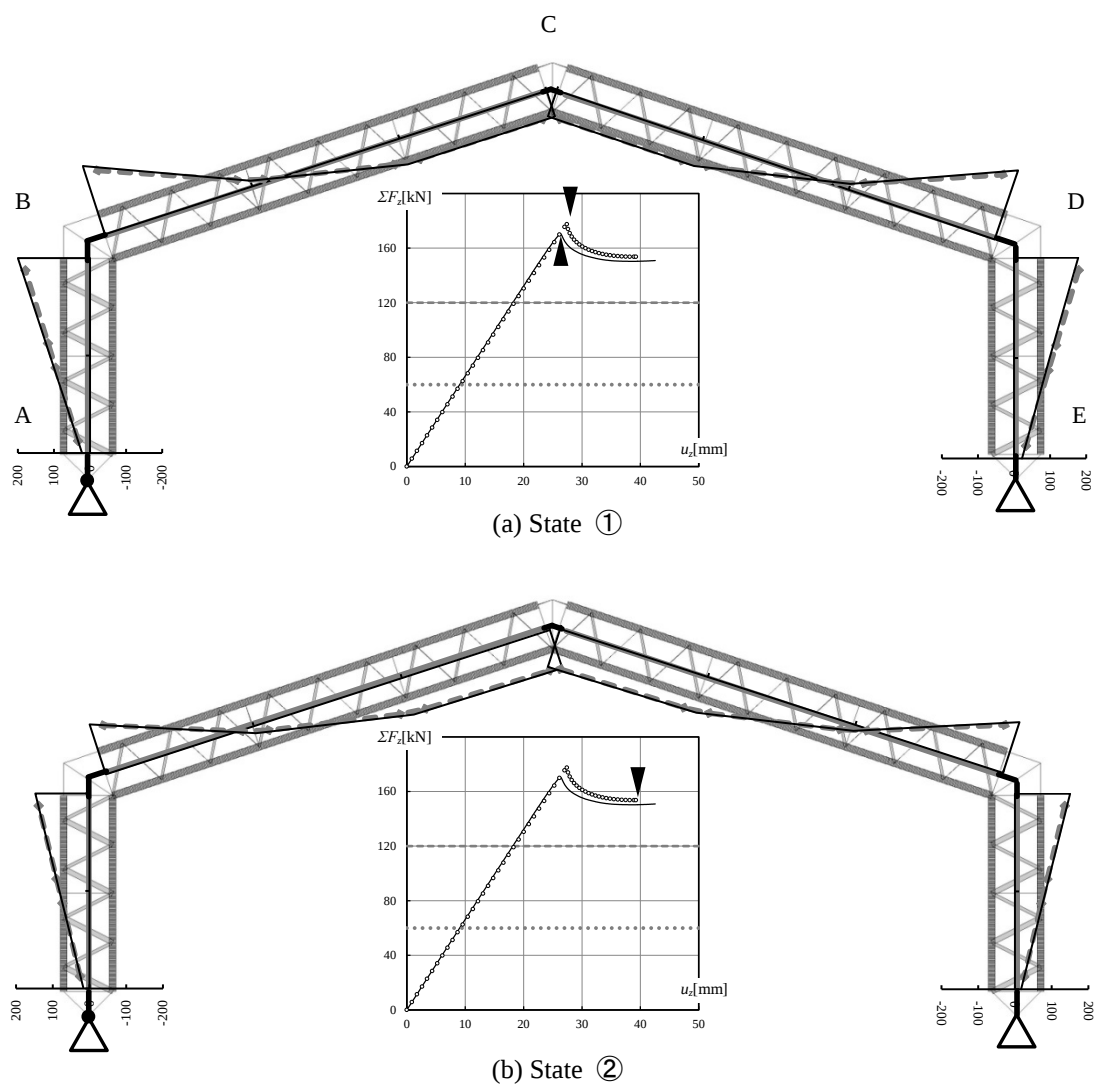


Fig.5-8 Case (i) Moment distribution (Black: Present model, Gray: Discrete model)

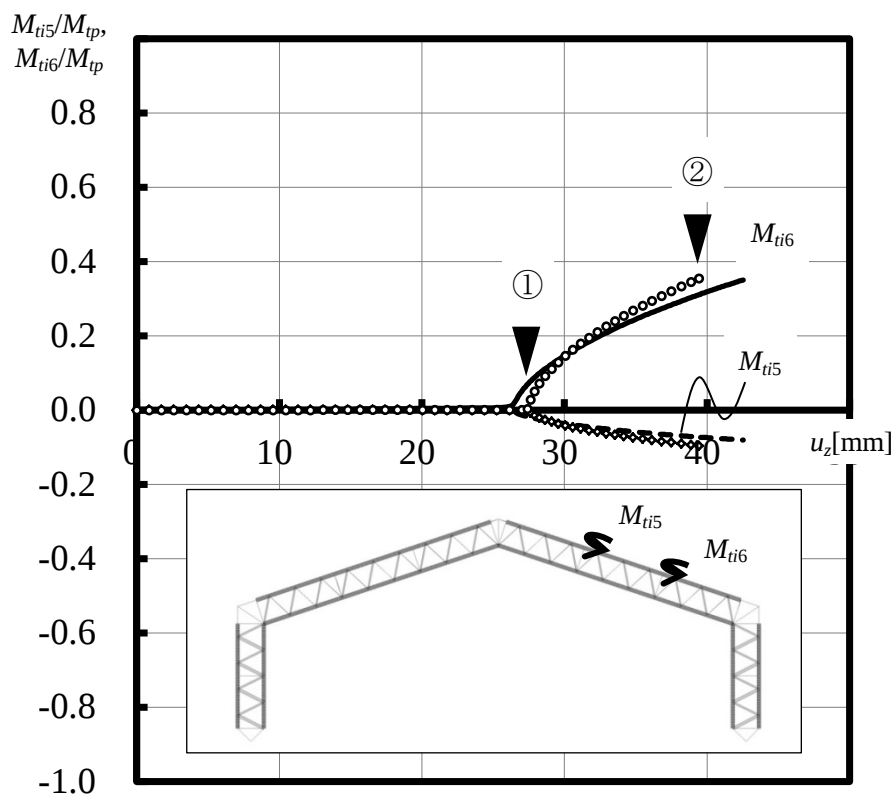


Fig.5-9 Case (i) Out-of-plane bending moment(M_{ti})- displacement relation
(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

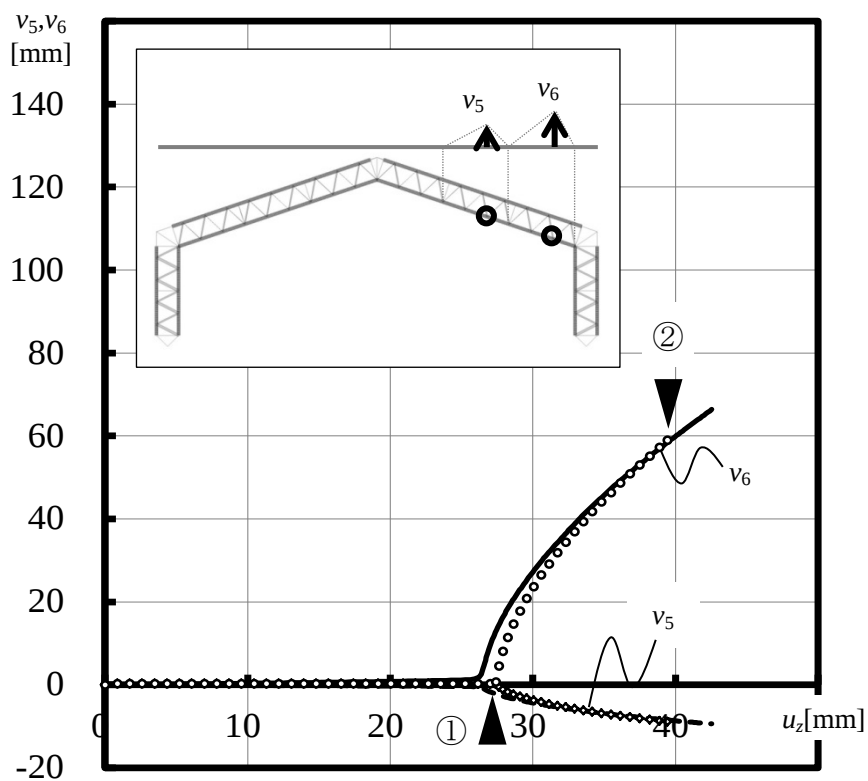


Fig.5-10 Case (i) Out-of-plane deformation (v_k)- displacement relation
(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

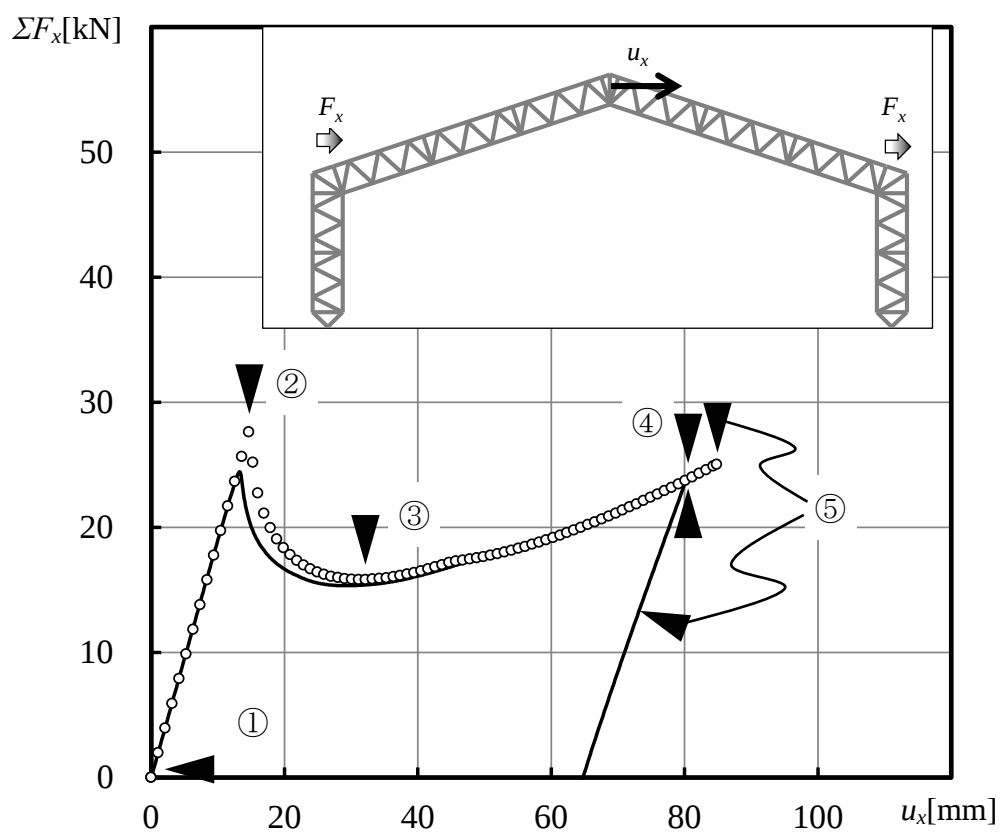


Fig.5-11 Case (ii) load-displacement relation
(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

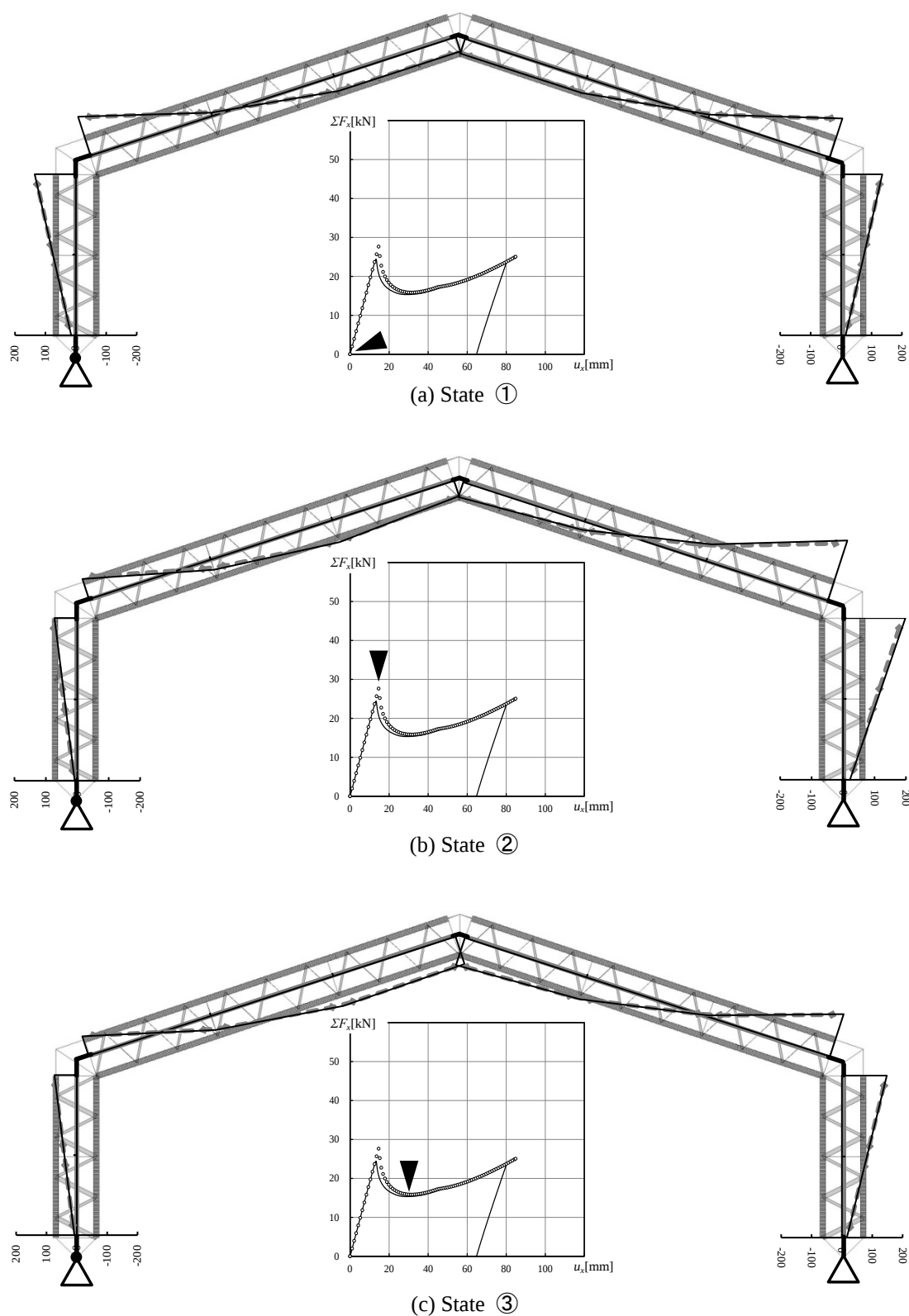
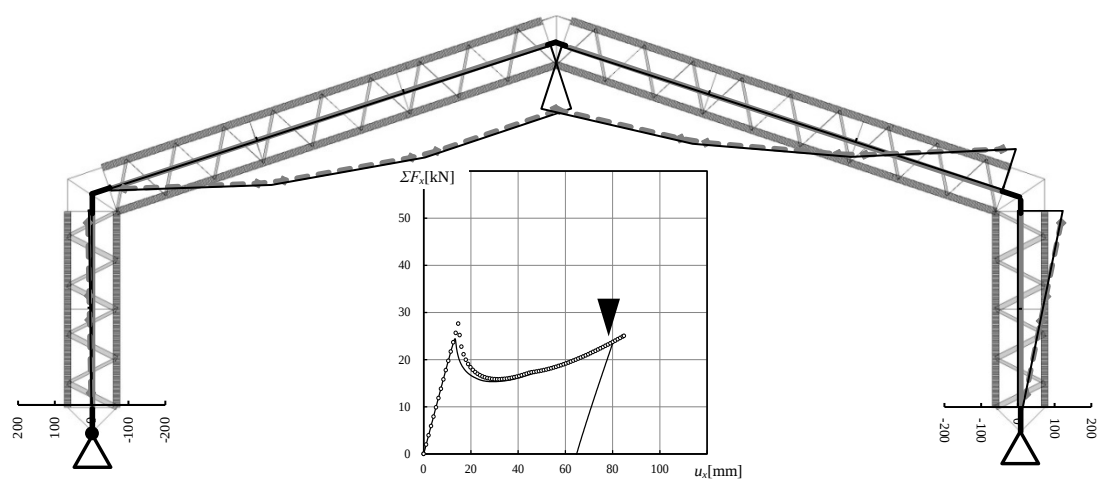
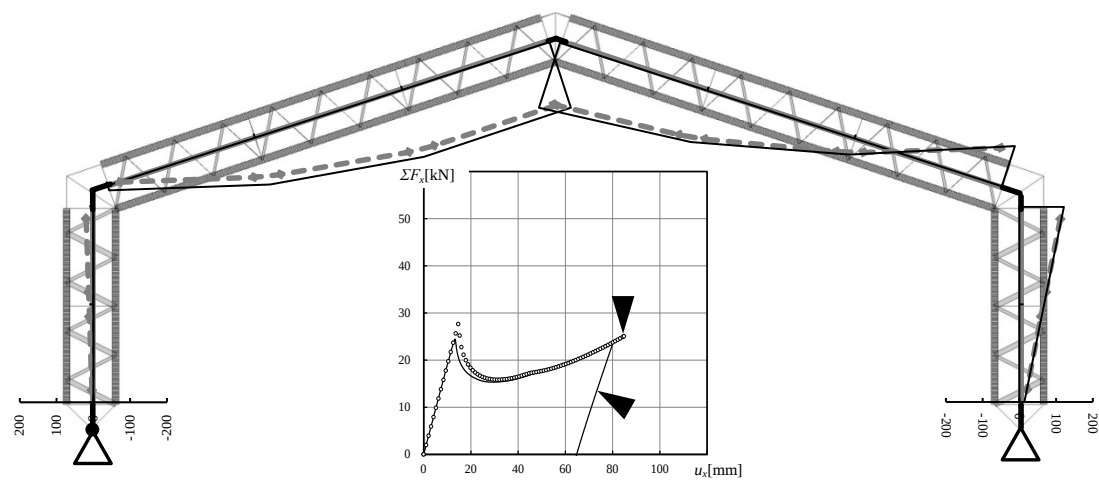


Fig.5-12 Case(ii) Moment distribution (Black: Present model, Gray: Discrete model)

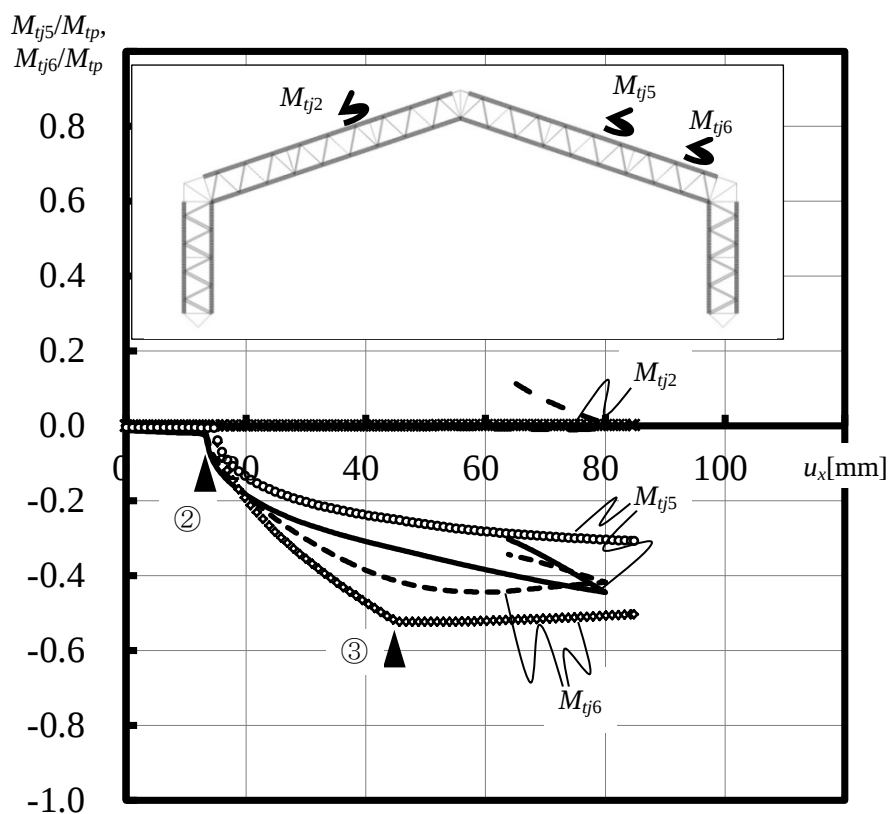
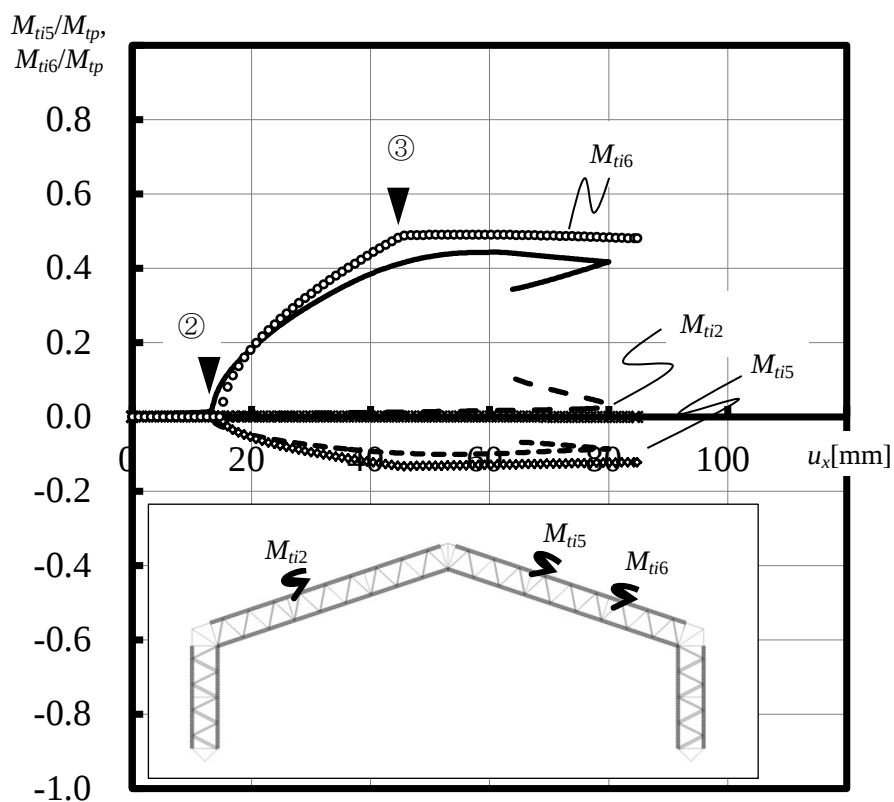


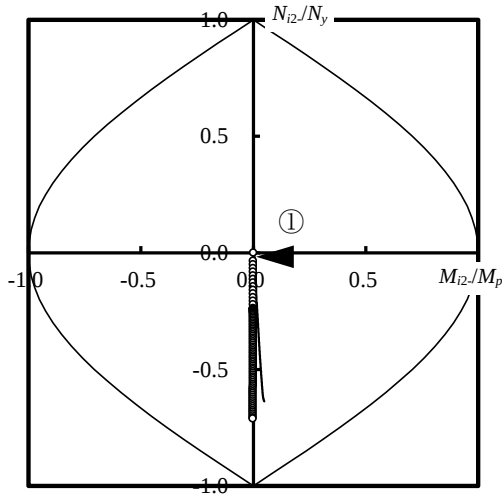
(d) State ④



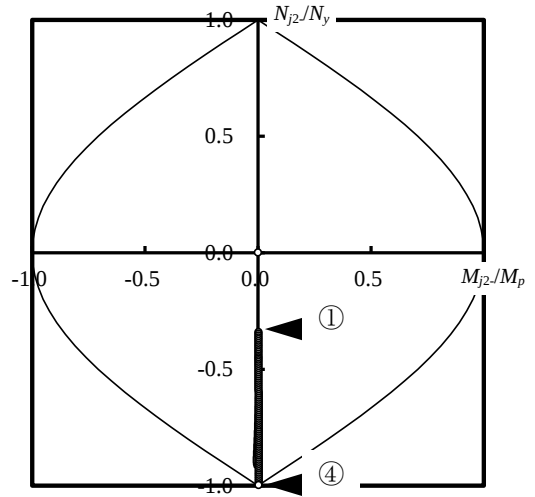
(e) State ⑤

Fig.5-12 Case(ii) Moment distribution (Black: Present model, Gray: Discrete model)

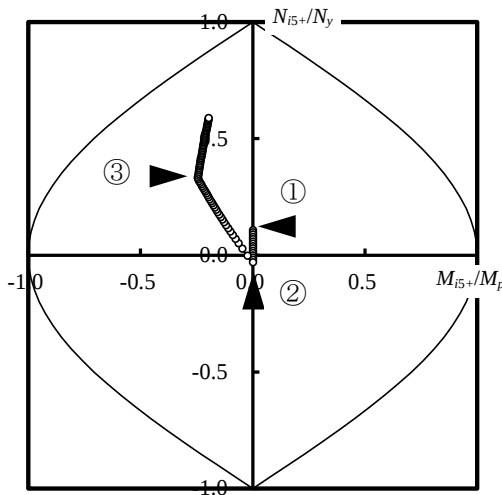




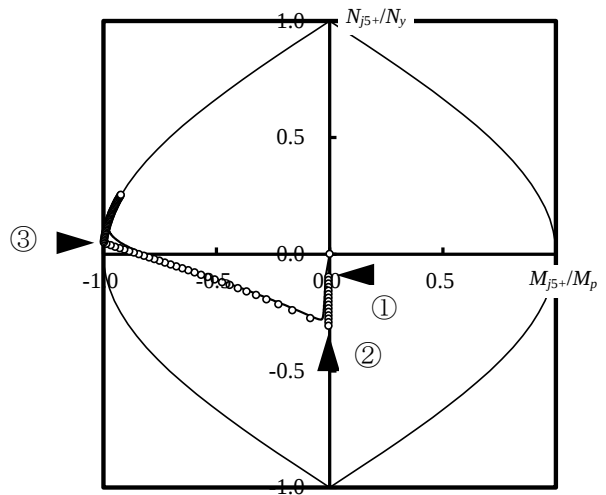
(a) Beam-2 $N_{i2}/N_y - M_{i2}/M_p$ relation



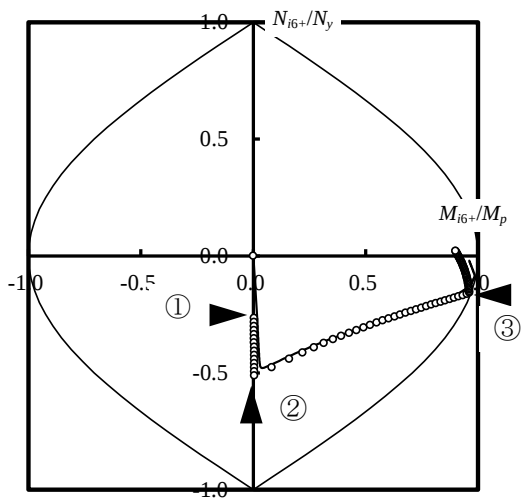
(b) Beam-2 $N_{j2}/N_y - M_{j2}/M_p$ relation



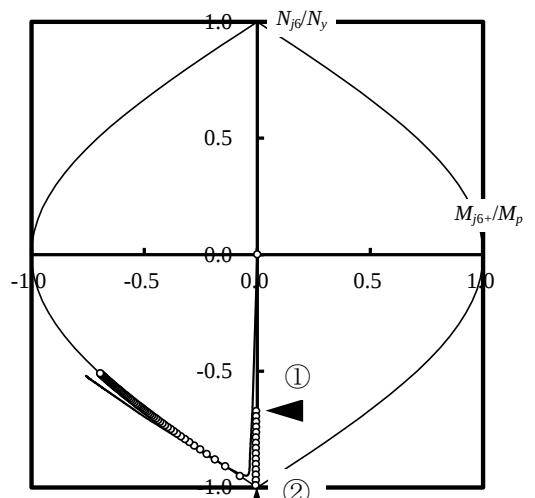
(c) Beam-5 $N_{i5+}/N_y - M_{i5+}/M_p$ relation



(d) Beam-5 $N_{j5+}/N_y - M_{j5+}/M_p$ relation



(e) Beam-6 $N_{i6+}/N_y - M_{i6+}/M_p$ relation



(f) Beam-6 $N_{j6+}/N_y - M_{j6+}/M_p$ relation

Fig.5-15 Case (ii) Bending moment- axial force relation
(Ends of the chord members in each truss beam, Symbol: Present model, Line: Discrete model)

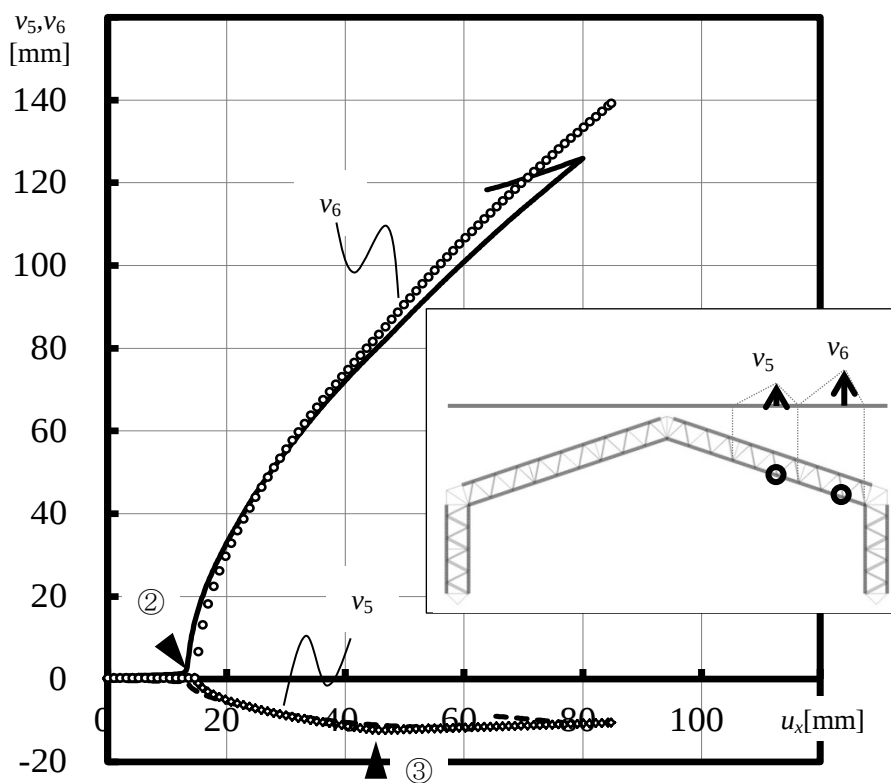
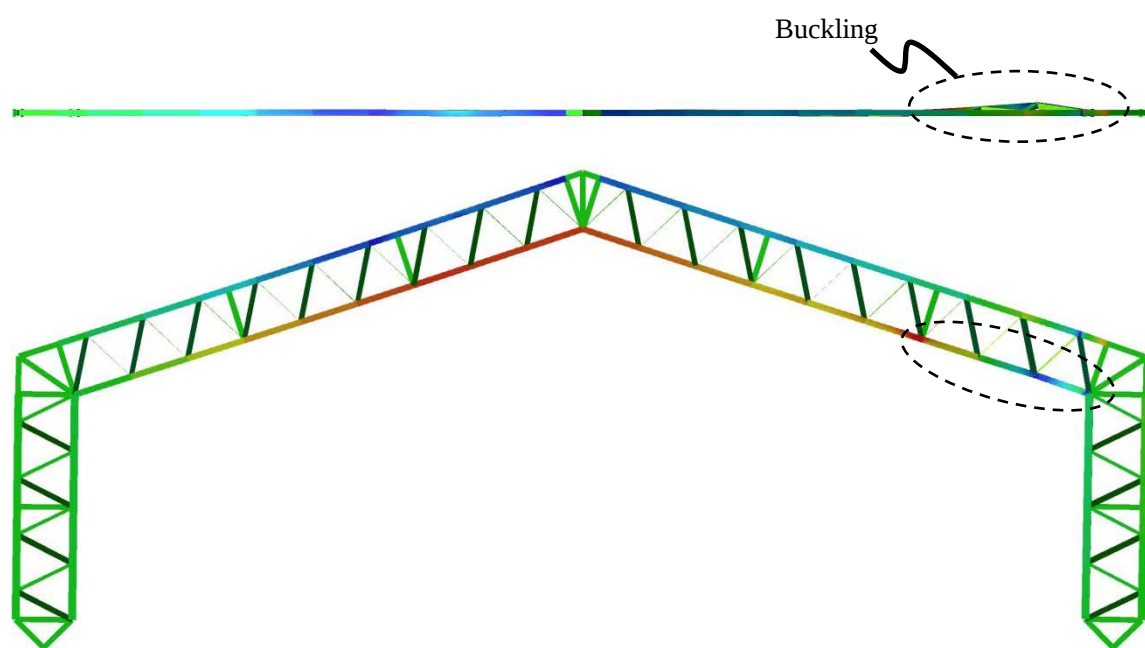
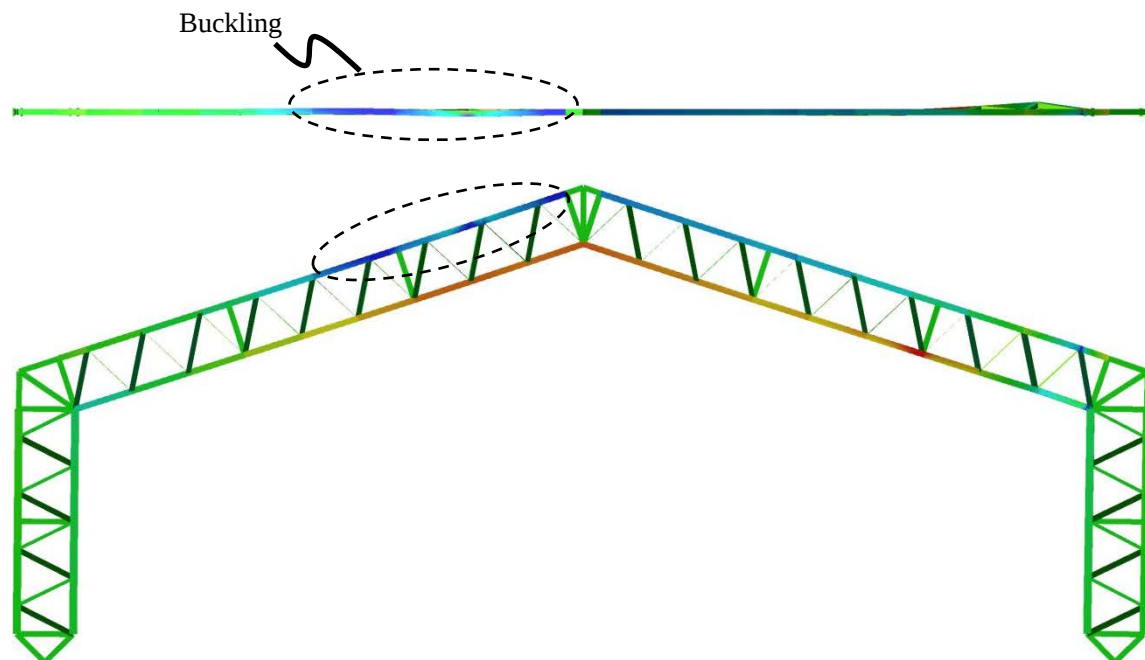


Fig.5-16 Case (ii) Out-of-plane deformation (v_k)- displacement relation
(Symbol: Present model, Line: Discrete model)



(a) After 1st buckling (state ④)



(b) After 2nd buckling (after state ⑤)

Fig.5-17 Case (ii) buckling deformation (Case(ii))

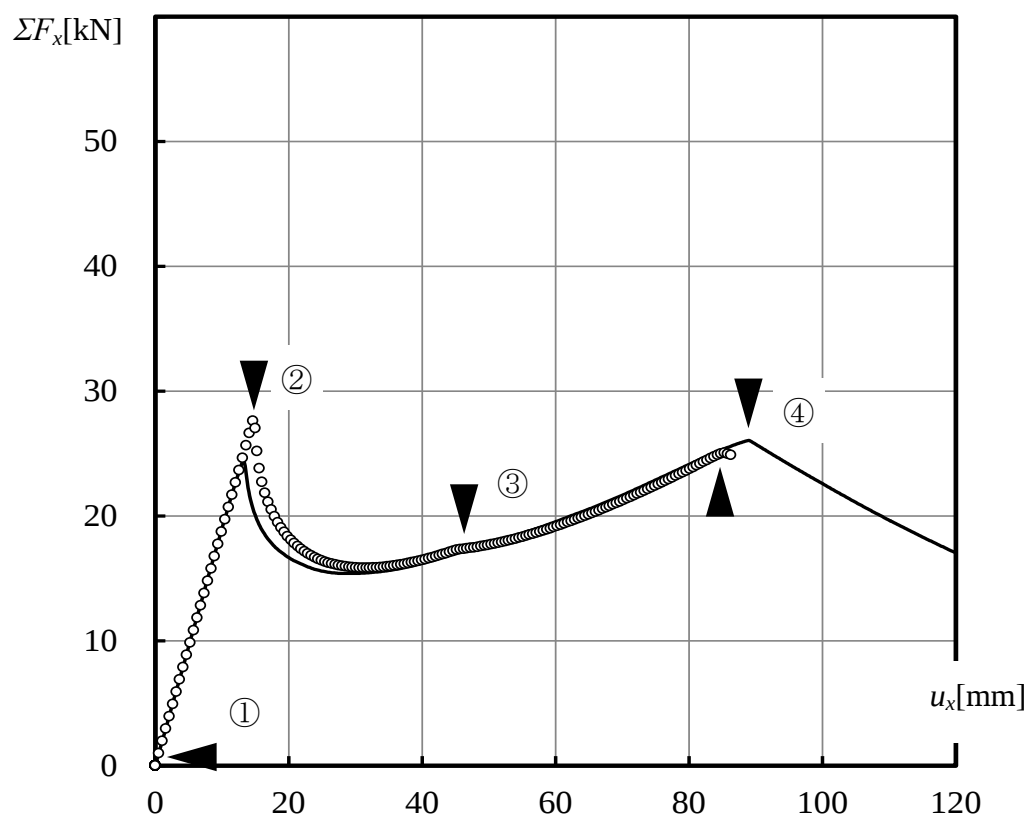


Fig.5-18 Case (iii) Load-displacement relation
(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

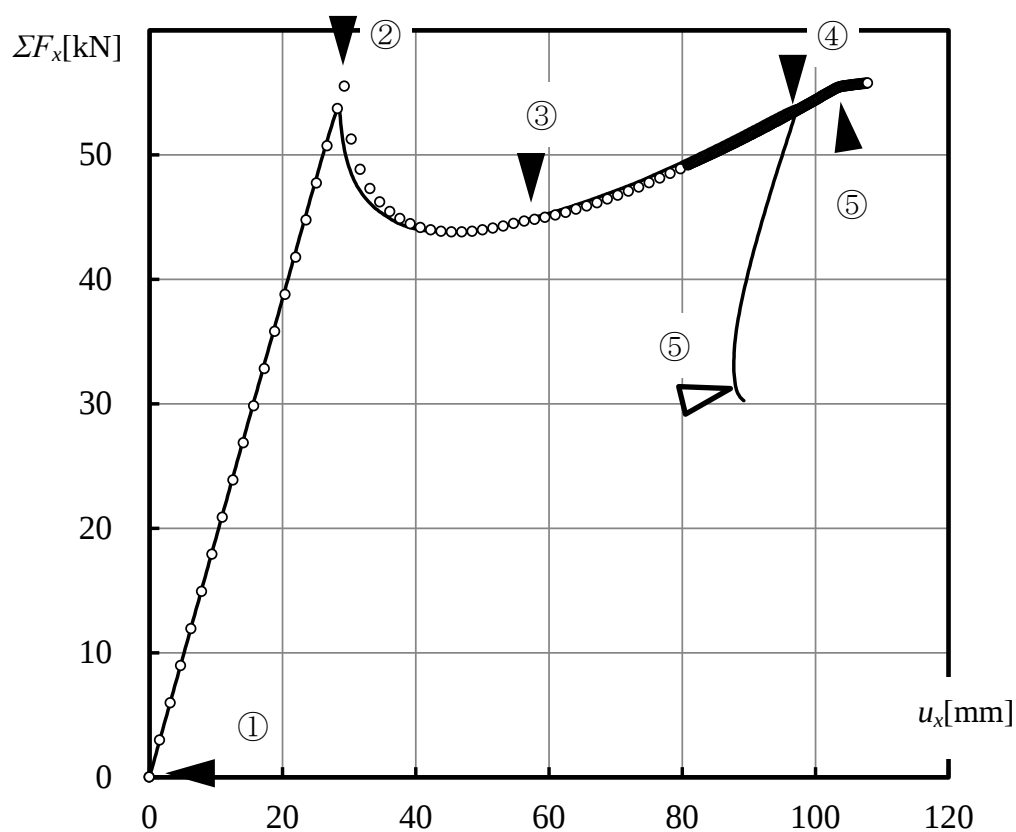


Fig.5-19 Case (iv) Load-displacement relation
(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

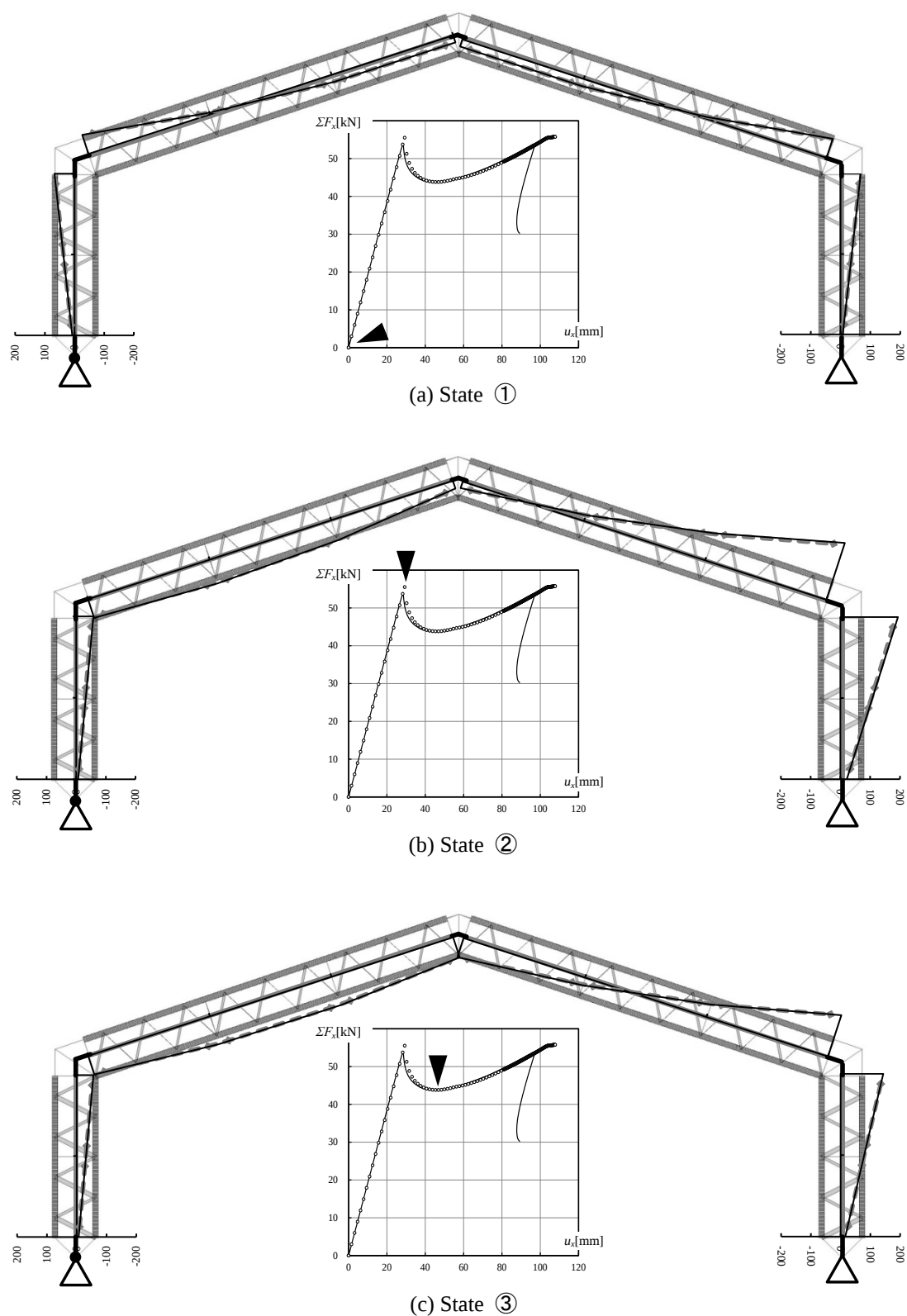
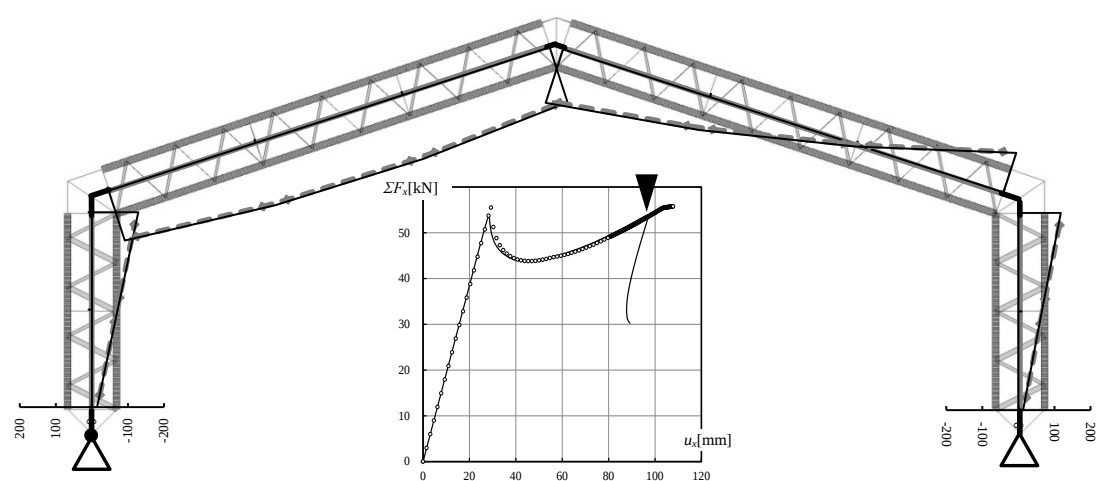
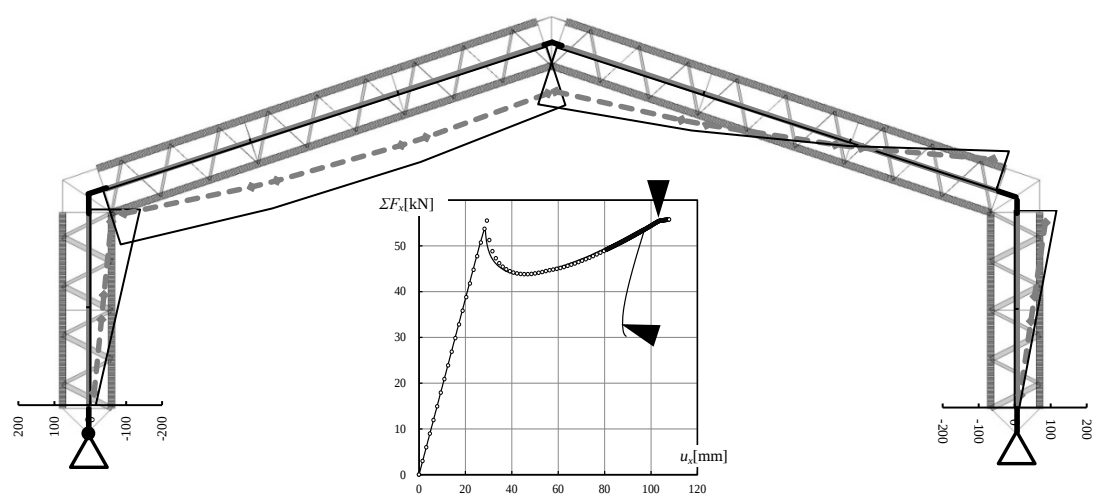


Fig.5-20 Case (iv) Moment distribution (Black: Present model, Gray: Discrete model)



(a) State ④



(b) State ⑤

Fig.5-20 Case (iv) Moment distribution (Black: Present model, Gray: Discrete model)

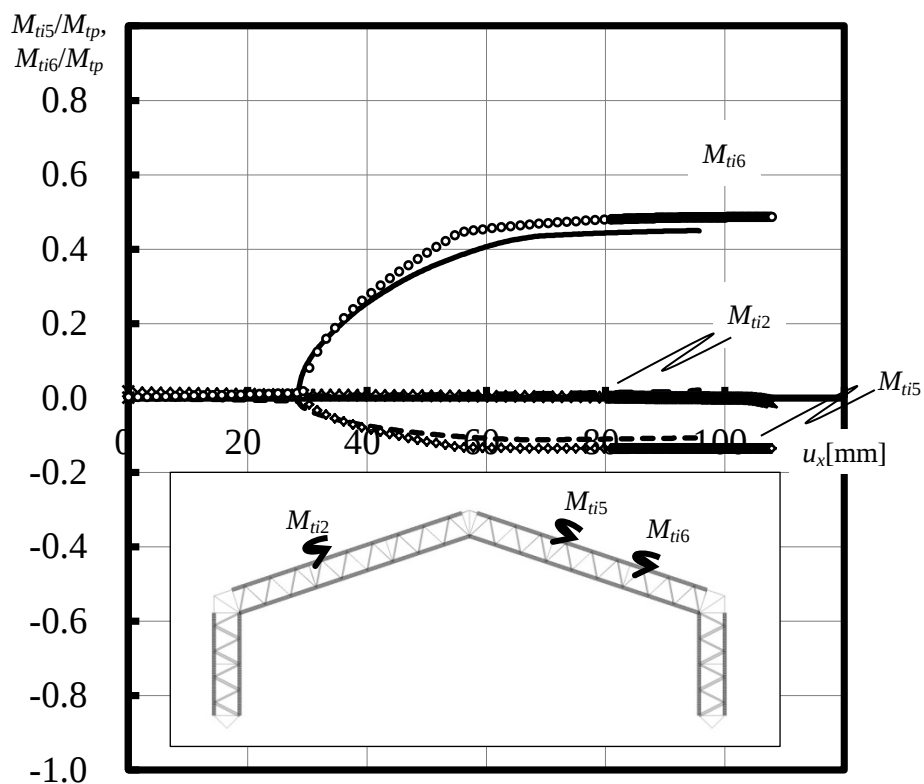


Fig.5-21 Case (iv) Out-of-plane bending moment(M_{ti})- displacement relation
(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

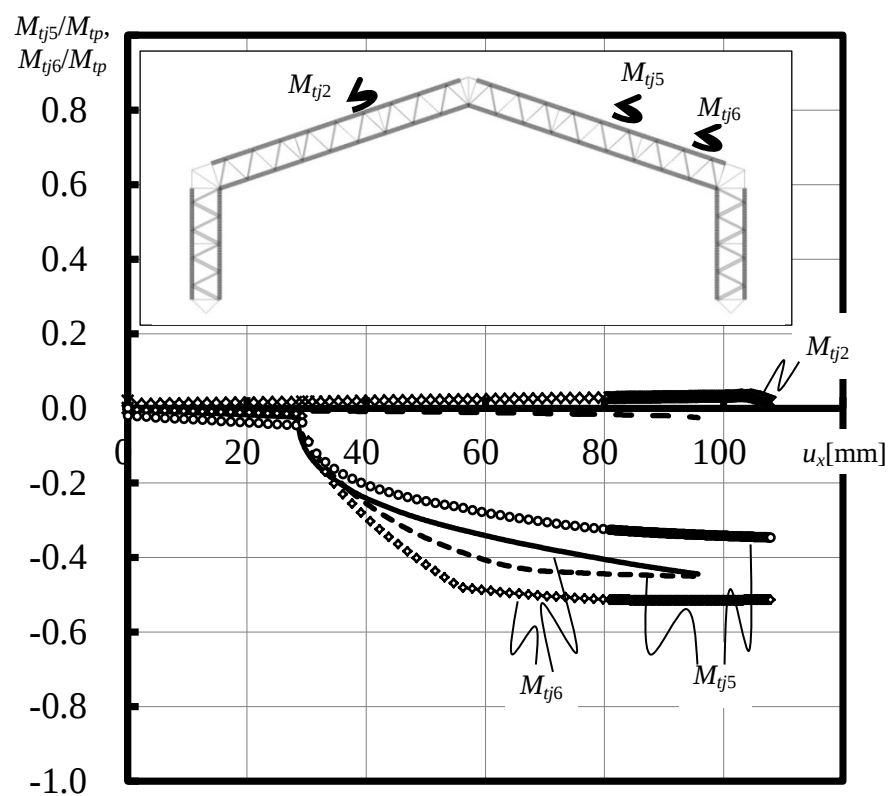


Fig.5-22 Case (iv) Out-of-plane bending moment(M_{tj})- displacement relation
(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

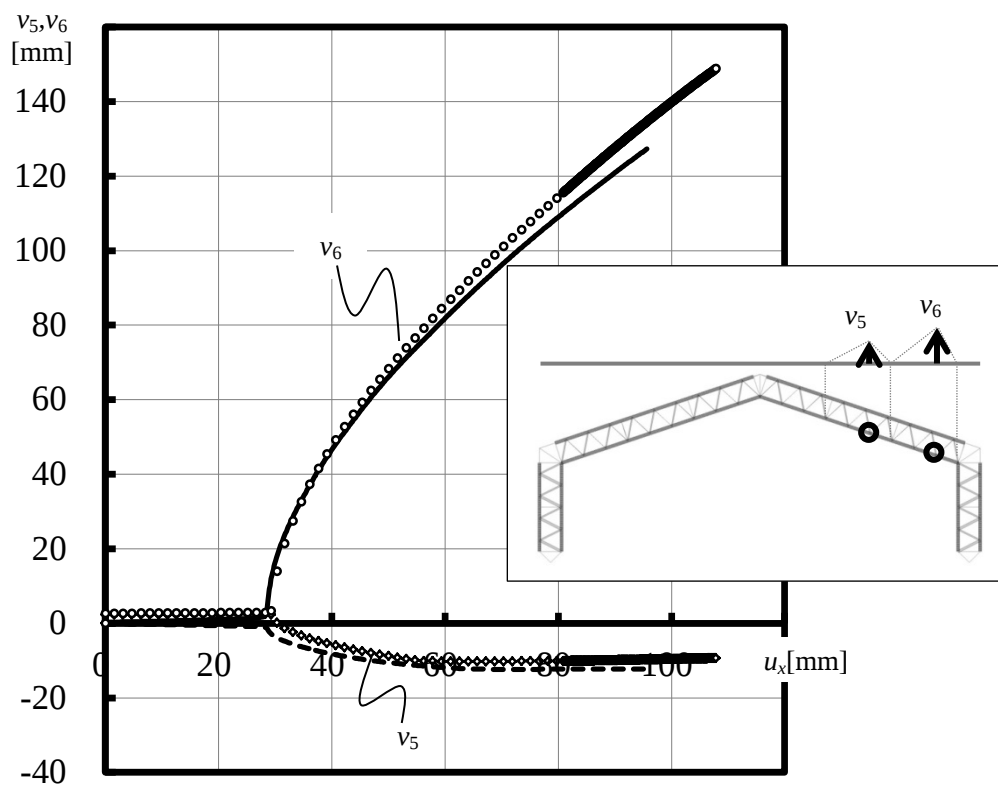


Fig.5-23 Case (iv) Out-of-plane deformation (v_k)- displacement relation
(Symbol: Present model, Line: Discrete model)

第 6 章 結論

本論文では、トラス梁から成る空間構造の構造設計に資する検討として崩壊挙動を数値解析的に追跡するにあたり、設計者の負担軽減のために簡便かつ精度よく追跡することを目的として、その崩壊挙動の起点となるトラス梁に生じる弦材の構面外座屈後挙動を単一の梁要素において再現可能な「トラス梁要素」の提案をおこなうとともに、離散化手法の詳細モデルによる数値解との比較によりトラス梁要素の妥当性を検証した。以下に、本研究で得られた結論を示す。

1. 実在の空間構造の接合条件として想定され得る、材端において構面外への回転が拘束された弦材に対する座屈後挙動を追跡するための解析法を提案した。この手法は剛に接合された状態でも座屈耐力および座屈後の横変位を追跡可能である。特に座屈耐力について、中間軸方向力の存在によって単純な Euler 座屈荷重では評価できない荷重値を数値計算の中で自動的に評価し、耐力後の停留状態を再現している。また、提案手法はピン接合とした場合でも適切に座屈荷重を再現できしており、既往の研究を包括する。
2. 剛に接合された弦材が断面の塑性化により座屈が進行する場合の数値解析法を、熱力学の第 2 法則を考えた上で任意の断面の降伏関数に対する最大塑性散逸の原理を導入することにより提案した。定式化の際には、弦材の中で塑性化の生じる位置を、材端および中間の 1 点の計 3 箇所でのみ発生すると仮定し、各断面に対する塑性化の有無を考慮した塑性流れ則を導出した。また、弦材に対する弾塑性状態および座屈後の劣化を考慮した接線剛性を定式化することで、複数の弦材から成る架構の数値計算を可能とした。以上の弦材に対する提案手法は、弦材の細長比、部材内の軸力分布、中間軸方向力数、あるいは材端の接合条件を変化させた場合においても離散化手法による座屈後挙動の数値解とよく対応しており、提案手法により単一要素で挙動を追跡できる手法であることを示した。特に、弦材の軸力のみならず、材端モーメントおよび材端回転をも適切に評価可能である。提案手法において考慮していない断面の部分的降伏状態の影響により、提案手法と詳細モデルによる解に差異が生じるが、想定した 3 箇所で塑性ヒンジが生じ、弦材として崩壊系を形成した後の挙動においては、提案手法は精度の良い手法となっている。
3. 剛に接合された弦材が構面外座屈する時のトラス梁の挙動を単一要素で再現可能な「トラス梁要素」に関する定式化をおこなった。定式化は、弦材に対する座屈後挙動解析法をトラス梁要素に

適用する形でおこなっている。また、トラス梁要素の自由度に関しては既往の3自由度に加えて、構面外回転および振り率を考慮した梁要素に拡張している。他のトラス梁との変位の適合が可能なトラス梁要素とするために、拡張した自由度数のトラス梁要素と弦材の材端力に関する関係則を導出した上で、トラス梁要素の基本式となる弾性構成則、弦材のモーメント釣合い関係および塑性散逸項を導出し、最大塑性散逸の原理による塑性流れ則を導出した。以上のトラス梁要素について、弦材の細長比を変化させた場合や外力条件を変化させた場合に対して、離散化手法による数値解と比較することにより適用範囲を確認した。

4. 以上のトラス梁要素が、本論文で目的とする空間構造の崩壊挙動の再現に適用可能かを確認するため、トラス梁から成る山形架構を対象として、トラス梁要素により構成される解析モデルと離散化手法による細分化モデルの数値解析による解を比較することによりおこなった。トラス梁要素はトラス梁部材に生じる構面外座屈により決定する架構全体の耐力と、その後の耐力低下時の応力状態を概ね評価可能である。

以上のトラス梁要素により、モデル化を簡便化し、細分化モデルと比較して考察をより簡便にするのみならず、トラス梁に生じる構面外座屈を起点とする空間構造の崩壊挙動を追跡するのに十分な精度を有することを確認した。この手法により、空間構造に対する崩壊挙動の数値解析的考察をより簡便にし、設計者による真の耐震安全性の保証に資することが期待される。

本論文における今後の課題を以下に示す。

1. 弦材に対する弾塑性座屈解析法を提案する中で、提案手法は断面の部分的降伏区間を考慮しておらず、離散化手法による数値解とは $M-N$ 相関曲線に差異が生じる。この差異は、特に断面の部分的降伏時に除荷、再負荷を繰返す載荷履歴において大きく生じる。提案手法は塑性ヒンジ法を根拠とする手法としては整合性が取れたものとなっているが、塑性変位の進展に対するこの点を改善することで、より実態に近い手法となると考えられる。
2. トラス梁要素の Helmholtz 自由エネルギーは上・下弦材に内在するエネルギーの総和としているが、このとき中間軸方向力以外の中間荷重は弦材に生じないと仮定している。したがって、例えばト

ラス梁要素において、上弦材に座屈が生じて、下弦材に生じる力は中間軸方向力のみである。

一方、実際のトラス梁は上弦材が座屈し、横変位が生じたときに、斜材を介して下弦材の横方向変位にも影響を与えていることが考えられるため、この際に関しても考察をおこなう必要がある。

3. 提案手法は座屈後の大変形時の振り回転を小さいと判断している。トラス梁の接合部区間までを単一の梁要素として置換すれば、トラス梁要素の振り回転は接合部の位置には生じないと考えることができる。しかしながら、トラス梁の中間は弦材が構面外座屈するため、巨視的な梁要素としてみると中間には振りが生じる。構面外座屈による横変位が大きくなると、振り回転による梁せいの低下が生じる可能性があるため、有限変形に対する振り回転の考慮を今後追加する必要がある。
4. 本論文で提案した手法は、トラス梁弦材の構面外座屈後挙動のみを抽出し、定式化をおこなったものである。これは、トラス梁弦材の座屈長さから、斜材との接合区間を座屈長さとする弦材の座屈よりも構面外座屈の発生の方がより現実的であるという考察に基づいており、本論文における離散化手法の数値解析例においても想定と同等の挙動が概ね得られている。しかしながら、境界条件によっては前者の座屈が表出する場合も考えられるため、より実用的なトラス梁要素するためには、本論文で対象とした構面外座屈と弦材と斜材の接合区間毎の座屈を自動的に判断することが求められる。

本研究に関連して著者が発表した論文

[]内は共著者名を表す。

学術雑誌(査読あり)

- (1) トラス梁の弦材における弾塑性座屈解析法
[元結正次郎]
日本建築学会構造系論文集, 第 81 巻, 第 729 号, pp.1843-1849, 2016 年 11 月
- (2) 剛に接合されたトラス梁弦材の弾塑性座屈解析法
[元結正次郎]
第 39 回情報・システム・利用・技術シンポジウム, 2016 年 12 月
- (3) 剛に接合される弦材の弾性構面外座屈を考慮したトラス梁要素の提案
[元結正次郎]
構造工学論文集 Vol.63B, 2017 年 3 月, 採用候補決定

国内学会・シンポジウム等における発表(査読なし)

- (4) トラス梁における弦材間の接合条件を考慮した構面外座屈後挙動の簡易解析手法 その 1 弦材間の変位の連続性を考慮した線材置換モデルの定式化
[元結正次郎]
日本建築学会大会学術講演梗概集、B-1 分冊, p.363-364、2014 年 9 月
- (5) トラス梁における弦材間の接合条件を考慮した構面外座屈後挙動の簡易解析手法 その 2 トラス梁線材置換モデルの妥当性検証および弦材の弾塑性座屈後挙動に関する数値解析手法
[元結正次郎、緒方誠二郎]
日本建築学会大会学術講演梗概集、B-1 分冊, p.365-366、2014 年 9 月
- (6) トラス梁における弦材間の接合条件を考慮した構面外座屈後挙動の簡易解析手法 その 3 任意形状断面の弦材に対する数値計算手法への拡張と妥当性検証
[元結正次郎]
日本建築学会大会学術講演梗概集、2016 年 8 月
- (7) Numerical Method for Out-of-Plane Buckling Behavior of Truss beam with Rigidly Connected Chord Members
[Shojiro Motoyui]
1st Joint Workshop on Building / Civil Engineering between Tongji & Tokyo Tech, 2014.8
- (8) Numerical Method for Chord Member of the Truss Beam Considering Out-of-plane Buckling with Rigid Connection
[Shojiro Motoyui]
2nd Joint Workshop on Building / Civil Engineering between Tongji & Tokyo Tech, 2015.6

参考文献

参考文献

- 1) 日本建築学会：空間構造の数値解析ガイドライン，2001
- 2) 日経 BP 社：日経アーキテクチュア編：東日本大震災の教訓 都市・建築編 覆る建築の常識，2011 年 6 月
- 3) 日経 BP 社：日経アーキテクチュア，No.1078，2016 年 8 月 25 日号
- 4) 日本建築学会：文教施設の耐震性能等に関する調査研究報告書，2012 年 3 月
- 5) 東日本大震災合同調査報告書編集委員会：東日本大震災合同調査報告 建築編 3 鉄骨造建築物／シェル・空間構造，2014 年 9 月
- 6) 堀昭夫・島崎和司・和田章：非対称鉛直力を受ける大スパン 2 層立体トラスの静的模型実験 合せ扇形平面でライズを有する大スパン立体トラスに関する研究(その 1)，日本建築学会構造系論文報告集 No.436，pp.105-113，1992 年 6 月
- 7) 和田章・向秀元：一方向大スパン複層円筒トラス構造物の地震応答解析，日本建築学会構造系論文報告集，No.413，pp.87-96，1990
- 8) 梶 隆・川井 喜大・中島肇：グリーンドーム前橋の大屋根構造の研究報告-4 長円形張弦梁構造の全体座屈解析，日本建築学会学術講演梗概集. B-1 分冊，pp.1155-1156，1990
- 9) 岡田敬一・塩谷清人・貞広修・西谷隆之・松井正宏：グリーンドーム前橋の大屋根構造の研究報告-5 長円形張弦梁構造の振動解析および振動実験，日本建築学会学術講演梗概集. B-1 分冊，pp.1157-1158，1990
- 10) Manolis Papadrakakis: Inelastic Post-buckling Analysis of Trusses, J. Struct. Eng, Vol.109, Issue 9(2129), pp.2129-2147, 1983
- 11) 奥出久人ほか：三方向メガトラスを用いた大空間免震屋根の構造設計 その 1～4，日本建築学会学術講演梗概集，B-1 分冊，pp.899-906，2014
- 12) 日本建築学会：ラチスシェル屋根構造設計指針，2016
- 13) Recommendations For Reinforced Concrete Shells and Folded Plates, 1979
- 14) 加藤史郎・金鍾敏・仁保裕：等分布鉛直荷重を受ける円筒ラチス屋根の部材断面算定法，日本建築学会構造系論文集，第 588 号，pp.119-126，2001 年 3 月
- 15) S. Kato, M. Fujimoto, T. Ogawa: Buckling Load of Steel Single-Layer Reticulated Domes of Circular Plan, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, Vol. 46, No. 1, pp.41-63, 2005.4
- 16) 加藤史郎・高島英幸：6 角形平面の剛接単層ラチスドームの弾塑性座屈解析—形状初期不整が存在しない完全形状ドームについて—，日本建築学会構造系論文報告集 No.408，pp.77-87，1990 年 2 月
- 17) 加藤史郎・仁保裕：単層円筒ラチスシェル屋根の部材断面算定と部材弾塑性座屈応力度に関する一考察，鋼構造論文集，Vol.15, No.57, pp.45-60，2008 年 3 月
- 18) 小河利行・加藤史郎・萩原真祐子・立石理恵：等分布荷重を受ける単層 HP ラチスシェルの座屈挙動と耐力評価，日本建築学会構造系論文集 No.553，pp.65-72，2002 年 3 月
- 19) 小河利行，山岡幸介，箕輪健一，竹内徹：静的地震荷重に対する単層ラチスドームの座屈耐力
- 20) 日本建築学会：鋼構造座屈設計指針 第 2 版，1996

- 21) D.B. McCallen, K.M. Romstad: A continuum model for the nonlinear analysis of beam-like lattice structures, Computers & Structures, Volume 29, Issue 2, pp.177-197, 1988
- 22) D.B. McCallen, K.M. Romstad: A continuum model for lattice structures with geometric and material nonlinearities, Computers & Structures, Volume 37, Issue 5, pp.795-822, 1990
- 23) Hill, C., Blandford, G., and Wang, S.: Post-Buckling Analysis of Steel Space Trusses, Journal of Structural Engineering, Volume 115, Issue 4, pp.900-919, 1989.4
- 24) E. Murtha-Smith: Alternate Path Analysis of Space Trusses for Progressive Collapse, Journal of Structural Engineering, Volume 114, Issue 9, pp.1978-1999, 1988.9
- 25) 鈴木敏郎・石原直：圧縮弦材を偏心接合した立体トラス平板の力学特性に関する研究，日本建築学会構造系論文集，No.534，pp.73-78，2000年8月
- 26) M. Tada, A. Suito: Static and dynamic post-buckling behavior of truss structures, Engineering Structures, Vol. 20, No.4-6, pp. 384-389, 1998
- 27) 西村 督・小田 憲史・森迫 清貴：有限要素法を用いたシステムトラスの座屈後挙動解析法，日本建築学会構造系論文集，No.584，pp.95-102，2004
- 28) 加藤史郎・石川浩一郎・横尾義貫：大スパントラス構造物の耐震性に関する研究 上下地震動を受ける平行弦トラスばりの耐震性について，日本建築学会構造系論文報告集，No.360，pp.64-74，1986年2月
- 29) 加藤史郎・石川浩一郎・横尾義貫：上下地震動を受けるトラス平板の耐震性について 直交交差型トラス平板についての検討，日本建築学会構造系論文報告集，No.370，pp.60-68，1986年12月
- 30) Hanaor, A.: Analysis of Double Layer Grids with Material Non-Linearities—A Practical Approach, Space Structures., Vol.1, No.1, pp.33-40, 1985
- 31) A. Hanaor, C. Marsh and G. A. R. Parke: Modification of Behavior of Double-Layer Grids: Overview, Journal of Structural Engineering, Vol.115, No.5, pp.1021-1037, 1989.5
- 32) 日本鋼構造協会：スペース・ストラクチャーの解析，鹿島研究所出版会，1971
- 33) 日本建築学会：空間構造の動的挙動と耐震設計，2006
- 34) 日本建築学会：鋼構造座屈設計指針 第3版，2009
- 35) 日本建築学会：ラチスシェルの座屈と耐力，2010
- 36) 日本建築学会 構造委員会 シェル・空間構造運営委員会：空間構造の設計・解析・施工の最近の発展，日本建築学会大会(関東) 構造部門 パネルディスカッション資料，2015年9月
- 37) 日本建築学会：鋼構造物の座屈に関する諸問題，2001
- 38) 日本建築学会：鋼構造物の座屈に関する諸問題，2013
- 39) 日置興一郎：個材の弾性座屈で定まる剛節ラチス構造の有効強度，日本建築学会論文報告集 No.325，pp.1-8，1983年3月
- 40) 齋藤公男：等価梁置換法によるスペースフレームの解析 その1 立体トラスユニットの有効剛性について，日本建築学会学術講演梗概集，構造系分冊，pp.1193-1194，1981年9月
- 41) 中島肇・齋藤公男・黒木二三夫・山下英雄：等価梁置換法によるスペースフレームの解析 その2 2方向立体トラス平面板および曲面板，日本建築学会学術講演梗概集，構造系分冊，pp.1195-1196，1981年9月

- 42) Heki K: On the Effective Rigidities of Lattice Plates, Recent Researches of Structural Mechanics, Prof. Tsuboi's Anniversary Volume, p.31, 1968.4
- 43) E. & F. Cosserat: Theorie des Corps Deformables (deformable bodies), SCIENTIFIC LIBRARY A. HERMANN AND SONS, 1909
- 44) 松岡理・横井友幸: 多重有向連続体理論序説: 一般化された連続体力学理論における director frame の多重化について, 日本建築学会論文報告集, No.226, pp.45-54, 1974 年 12 月
- 45) 松岡理・横井友幸: 一般多重有向連続体理論 基礎式と比較考察について, 日本建築学会論文報告集, No.227, pp.57-66, 1975 年 1 月
- 46) 松岡理・横井友幸: 一般格子状構造物の連続体理論 その 4 一般多重有向連続体とのアナロジーによる基礎理論について, 日本建築学会東海支部研究報告集, No.12, pp.41-44, 1974 年 2 月
- 47) 松岡理・横井友幸: 一般格子状構造物の連続体理論 その 5 境界条件の誘導および一次元モデル解析例について, 日本建築学会学術講演梗概集, 構造系分冊, pp.819-820, 1979 年 9 月
- 48) 松岡理・飯島俊比古: 局所変形を考慮した棒材の一般理論 (その 2), 日本建築学会論文報告集, No.237, pp.77-86, 1975 年 11 月
- 49) 小河利行・鈴木敏郎: Micropolar 連続体置換による複層立体トラス構造の解析, 日本建築学会学術講演梗概集, 構造系分冊, pp.1133-1134, 1983 年 9 月
- 50) 堀田久人・鈴木敏郎・小河利行: ミクロポーラ連続体と離散系の結合による複層立体トラスの座屈解析, 日本建築学会学術講演梗概集, 構造系分冊, pp.2587-2588, 1984 年 9 月
- 51) 上谷宏二・榊井健・新谷耕平: 連続体置換による弾性トラスの個材座屈後挙動解析法, 日本建築学会近畿支部研究報告集, No.35, pp.345-348, 1995 年 6 月
- 52) 新谷耕平・上谷宏二・榊井健: 擬似塑性側に基づく置換連続体を用いた弾性剛節トラスの座屈後挙動解析法, 日本建築学会学術講演梗概集 B-1 分冊, pp.1053-1054, 1996
- 53) 小川厚治・黒羽啓明・前田珠希: 円形鋼管圧縮柱の座屈後挙動に関する研究, 日本建築学会構造系論文集 No.475, pp.137-144, 1995 年 9 月
- 54) 前田珠希, 小川厚治, 黒羽啓明: 弦材が構面外座屈する鋼管トラス梁の変形能力に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, No.491, pp.121-127, 1997 年 1 月
- 55) 元結正次郎・大塚貴弘: 塑性論に基づくトラス梁の弾塑性問題に対する解析手法の提案, 日本建築学会構造系論文集, No.538, pp.109-114, 2000 年 12 年
- 56) 元結正次郎・大塚貴弘: トラス要素における弾塑性座屈挙動評価手法に関する研究, 構造工学論文集, Vol.47B, pp.603-610, 2001 年 3 月
- 57) 元結正次郎・大塚貴弘: 個材の弾塑性座屈挙動を考慮したトラス梁に対する解析手法の提案, 日本建築学会構造系論文集, No.549, pp.99-104, 2001 年 11 月
- 58) 元結正次郎, 緒方誠二郎: 軸力勾配を有する圧縮材の弾塑性座屈後挙動に関する数値解析手法, 日本建築学会構造系論文集, No.613, pp.59-65, 2007 年 3 月
- 59) 元結正次郎, 緒方誠二郎: 軸力勾配を有する圧縮材の弾性座屈後挙動に関する数値解析手法, 日本建築学会構造系論文集, No.618, pp.113-119, 2007 年 8 月
- 60) 元結正次郎, 緒方誠二郎: トラス梁弦材の構面外座屈後挙動を考慮した梁要素モデル, 日本建築学会構造系論文集, Vol.74, No.636, pp.283-288, 2009 年 2 月

- 61) 五十嵐定義・井上一朗・木林 長仁・浅野 美次：筋違付架構の復元力特性 その 1 交番繰返し軸力を受ける筋違材の挙動，日本建築学会論文報告集，No.196，pp.47-54，1972 年 6 月
- 62) 五十嵐定義・井上一朗・浅野美次・小川 厚治：筋違付架構の復元力特性 その 2 ダイアゴナルブレースの動的解析例，日本建築学会論文報告集 No.205，pp.37-42，1973 年 3 月
- 63) Taijiro Nonaka: AN ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF A BAR UNDER REPEATED AXIAL LOADING, International Journal of Solids and Structures, Vol.9, pp.569-580, 1973
- 64) Taijiro Nonaka: Approximation of yield condition for the hysteretic behavior of a bar under repeated axial loading, International Journal of Solids and Structures, Vol.13, No.7, pp.637-643, 1977
- 65) Taijiro Nonaka: An analysis for large deformation of an elastic-plastic bar under repeated axial loading—I: Derivation of basic equations, International Journal of Mechanical Sciences Vol.19, No.10, pp.619-627, 1977
- 66) Taijiro Nonaka: An analysis for large deformation of an elastic-plastic bar under repeated axial loading—II: Correlation with small deformation theory, International Journal of Mechanical Sciences, Vol.19, No.11, pp.631-638, 1977
- 67) 加藤 勉・秋山 宏：鋼構造筋違付骨組の復元力特性，日本建築学会論文報告集，No.260，pp.99-108，1977 年 10 月
- 68) 柴田道生，中村武，若林實：鉄骨筋違の履歴特性の定式化：その 1 定式化関数の誘導，日本建築学会論文報告集 No.316，pp.18-24，1982 年 6 月
- 69) 新訂 建築学大系 12 座屈論，彰国社，1976
- 70) 藤本盛久：鉄骨剛節骨組の弾性安定ならびに弾塑性安定について，東京工業大学学位論文，1959.1
- 71) W.T.Koiter: Stress-strain Relations, Uniqueness and Variational Theories for Elastic-plastic Materials with Singular Yield Surfaces, Quart. Appl. Math., Vol.11, No.3, pp.350-354, 1953
- 72) J.C.Simo, J.G.Kennedy and S.Govindjee: Non-Smooth Multisurface Plasticity and Viscoplasticity. Loading/Unloading Conditions and Numerical Algorithms, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.26, pp.2161-2185, 1988
- 73) 磯脇龍作・元結正次郎：そり変形の影響を考慮した梁要素による平行弦トラス梁から成るラチスシェルの数値解析に関する一考察 その 1 弾性座屈挙動への適用，日本建築学会学術講演梗概集，B-1 分冊，pp.803-804，2001 年 7 月
- 74) 白奇烈・磯脇龍作・元結正次郎：そり変形の影響を考慮した梁要素による平行弦トラス梁から成るラチスシェルの数値解析に関する一考察 その 2 弾塑性座屈挙動への適用，日本建築学会学術講演梗概集，B-1 分冊，pp.805-806，2001 年 7 月
- 75) 高岡宣善著：構造部材のねじり解析，共立出版株式会社，1974
- 76) 日置興一郎、村上益美、高田祐介：平行弦ラチス構造物の個材の曲げ座屈で定まる座屈荷重に及ぼす境界部材の効果について、日本建築学会構造系論文報告集、第 389 号、pp.21-31、1988.7

注 1 日本建築学会 構造委員会 シェル・空間構造運営委員会：シェル・空間構造 チュートリアルセミナー，2014 年 11 月～2016 年 5 月

Appendix

Appendix 1 記号表

Appendix 2 中空円断面の塑性流れ則および塑性進展の収斂計算

Appendix 3 塑性ヒンジ位置 α の決定方法

Appendix 4 数値計算の際の特異点に関する演算上の処理

Appendix 5 弦材の弾塑性解析法における基本式の修正

Appendix 6 トラス梁要素の弾性剛性マトリクス

Appendix 7 弦材の初期不整に対する感度に対する考察

Appendix 1 記号表

$a_{c\zeta}$	弦材 断面積
α_ζ	弦材 全長に対する点 J から点 K までの長さの比率
$\tilde{B}_i, \tilde{B}_j$	トラス梁要素 曲げ振りモーメント
$\tilde{B}_p$	トラス梁要素 曲げ振りモーメントに対する全塑性耐力
C_ζ	弦材 座屈変位の係数(本論式(2.17h))
$\mathbf{C}_\zeta$	弦材 座屈変位増分の係数ベクトル
$\hat{C}_{i\zeta}, \hat{C}_{j\zeta}$	弦材 座屈変位の係数(Appendix 式(A4.8f))
D_ζ	弦材 座屈変位の係数(本論式(2.17h))
$\tilde{\delta}$	トラス梁要素 軸方向変位
$\delta_{\zeta\psi}$	クロネッカーデルタ
E	ヤング係数
$\tilde{\mathbf{f}}$	トラス梁要素 材端変位ベクトル
$\mathbf{f}_\zeta$	弦材 材端変位ベクトル
$\Phi_{\eta\zeta}^\pm$	弦材 降伏関数($\eta=i, j, k$, 複号は断面に対する降伏関数の正負を表す)
Φ_ζ	弦材 降伏関数から成るベクトル
$\mathbf{G}_\zeta$	弦材 降伏関数の弦材材端力成分による微係数
$\mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pp}, \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{pb}, \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bp}, \mathbf{G}_{\zeta\psi}^{bb}$	トラス梁要素 塑性/座屈進展増分の係数マトリクス成分
$\tilde{F}$	トラス梁要素 塑性散逸項
Γ_ζ	弦材 塑性散逸項
H	トラス梁せい
$\tilde{\mathbf{h}}_\zeta$	トラス梁要素-弦材 変換マトリクス
I, J	トラス梁要素 材端の節点名
$I_\zeta, K_\zeta, J_\zeta$	弦材 塑性ヒンジ位置における節点名
$I_{c\zeta}$	弦材 断面 2 次モーメント
I_s, I_t	トラス梁要素 断面 2 次モーメント(構面内/構面外)
$\tilde{\mathbf{k}}^e$	トラス梁要素 弾性剛性マトリクス
$\tilde{\mathbf{K}}^{eb}, \tilde{\mathbf{K}}^{epb}$	トラス梁要素 弾性/弾塑性接線剛性マトリクス
$\mathbf{k}_\zeta^e$	弦材 弾性剛性マトリクス
$k_{N\zeta}$	弦材 軸剛性
$k_{\bar{N}\zeta}$	弦材 中間軸方向力に対する剛性
$k_{ii\zeta}, k_{ij\zeta}, k_{ji\zeta}, k_{jj\zeta}$	弦材 材端曲げモーメントに対する剛性
$\hat{k}_{M\zeta}$	トラス梁要素 中間塑性ヒンジ位置の回転剛性

- $\kappa_{i\zeta}, \kappa_{j\zeta}$: 弦材 弦材 座屈変位の係数(Appendix 式(A4.5a,b))
 Γ_{ζ} : 弦材 塑性散逸項
 $\mathbf{k}_{ML\zeta}, \mathbf{k}_{MR\zeta}, \mathbf{k}_{M\zeta}$: 弦材 左側、右側、対象モデルの回転剛性マトリクス
 L : トラス梁および弦材の全長
 $\dot{\lambda}_{\zeta}^p$: 弦材 ζ の塑性進展パラメータ増分から成るベクトル
 $\dot{\lambda}_{\eta\zeta}^{p\pm}$: 弦材 ζ の塑性進展パラメータ増分
 m_{ζ} : 弦材 点 K が生じた軸力区間の位置番号
 $\mathbf{M}_L, \mathbf{M}_R, \mathbf{M}$: 弦材 左側、右側、対象モデルの曲げモーメント
 $M_{i\zeta}, M_{j\zeta}$: 弦材 I、J 各点の曲げモーメント
 M_k, M_{kL}, M_{kR} : 弦材 点 K の曲げモーメント ($M_k = M_{kL} = -M_{kR}$)
 $M_{p\zeta}$: 弦材 材端曲げモーメントに対する全塑性耐力
 $\hat{M}_{k\zeta}$: トラス梁要素 各弦材の中間塑性ヒンジ位置のモーメント
 $\tilde{M}_{ri}, \tilde{M}_{rj}$: トラス梁要素 材端ねじりモーメント
 $\tilde{M}_{si}, \tilde{M}_{sj}$: トラス梁要素 材端構面内曲げモーメント
 $\tilde{M}_{ti}, \tilde{M}_{tj}$: トラス梁要素 材端構面外曲げモーメント
 $\tilde{M}_{sp}, \tilde{M}_{tp}$: トラス梁要素 構面内/構面外曲げモーメントに対する全塑性耐力
 $\tilde{N}$: トラス梁要素 軸力
 $\tilde{N}_y$: トラス梁要素 軸力に対する全塑性耐力
 $N_{i\zeta}, N_{j\zeta}, N_{k\zeta}$: 弦材 I、J、K 各点の軸方向力
 $N_{\zeta}, \bar{N}_{\zeta}$: 弦材 平均軸力、中間軸方向力
 $N_{y\zeta}$: 弦材 軸方向力 $N_{j\zeta}$ に対する全塑性耐力
 n_{ζ} : 上・下弦材の中間軸方向力数
 Q_{ζ} : 弦材 せん断力
 $\theta_{L\zeta}, \theta_{R\zeta}$: 弦材 右側、左側の回転変位ベクトル
 $\theta_{L\zeta}^e, \theta_{R\zeta}^e, \theta_{L\zeta}^p, \theta_{R\zeta}^p$: 弦材 右側・左側の弾性変形角ベクトル、右側・左側の塑性回転変形ベクトル
 $\theta_{i\zeta}, \theta_{k\zeta}, \theta_{j\zeta}$: 弦材 I、K、J 各点の回転変位
 $\theta_{i\zeta}^p, \theta_{kL\zeta}^p, \theta_{kR\zeta}^p, \theta_{j\zeta}^p$: 弦材 点 I、点 K 左側、点 K 右側、点 J の塑性回転変形
 $\tilde{\theta}_{ri}, \tilde{\theta}_{rj}$: トラス梁要素 振り回転
 $\tilde{\theta}_{si}, \tilde{\theta}_{sj}$: トラス梁要素 構面内回転
 $\tilde{\theta}_{ti}, \tilde{\theta}_{tj}$: トラス梁要素 構面外回転
 $\tilde{\theta}'_{ri}, \tilde{\theta}'_{rj}$: トラス梁要素 振り率
 $R_{ik\zeta}, R_{kj\zeta}$: 弦材 左側(部材 IK)、右側(部材 KJ)の各部材角
 R_{ζ} : 弦材 点 K における右側と左側の相対部材角
 S : 材端および中間軸方向力作用位置で区切られた弦材の区間の総数
 σ_y : 降伏応力度

- $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}^e, \tilde{\mathbf{u}}^p, \tilde{\mathbf{u}}^b$: トラス梁要素 変位ベクトルおよびその弾性成分、塑性成分、座屈成分
 $\mathbf{u}_\zeta, \mathbf{u}_\zeta^e, \mathbf{u}_\zeta^p, \mathbf{u}_\zeta^b$: 弦材 変位ベクトルおよびその弾性成分、塑性成分、座屈成分
 $u_{i\zeta}, u_{k\zeta}, u_{j\zeta}$: 弦材 I、K、J 各点の軸方向変位
 $u_{L(s)}, u_{R(t)}$: 弦材 中間軸方向力位置の軸方向変位 ($s: 1 \sim S-m, t: 1 \sim m-1$)
 $u_\zeta, \bar{u}_\zeta$: 弦材 軸方向変位
 $u_{i\zeta}^p, u_{kL\zeta}^p, u_{kR\zeta}^p, u_{j\zeta}^p$: 弦材 点 I、点 K 左側、点 K 右側、点 J の塑性変位
 $u_{L\zeta}^p, u_{R\zeta}^p$: 弦材 左側モデルおよび右側モデルの塑性変位
 $\tilde{\Psi}$: トラス梁要素 Helmholtz 自由エネルギー
 Ξ_ζ : 弦材 塑性ヒンジ位置におけるモーメントの釣合関係
 $Z_{p\zeta}$: 弦材 塑性断面係数
 ζ, ψ : 第 4 章における弦材の上下を表す記号

Appendix 2 中空円断面の塑性流れ則および塑性進展の収斂計算

中空円断面の降伏関数である式(3.31)を用いて、解析例に用いる塑性流れ則を導出する。式(3.17a-e)の一般式に、降伏関数に対する各変数で偏微分した式を代入すると、以下のように得られる。

$$\dot{u}_L^p = \frac{\pi}{2N_y} \sum_{i,k \in \text{active}} \left[\dot{\lambda}_i^p \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{N_i}{N_y}\right) + \dot{\lambda}_k^p \frac{m-1}{S-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{N_k}{N_y}\right) \right] \quad (\text{A2.1a})$$

$$\dot{u}_R^p = \frac{\pi}{2N_y} \sum_{k,j \in \text{active}} \left[\dot{\lambda}_k^p \left(1 - \frac{m-1}{S-1}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{N_k}{N_y}\right) + \dot{\lambda}_j^p \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{N_j}{N_y}\right) \right] \quad (\text{A2.1b})$$

$$\dot{\theta}_i^p = \dot{\lambda}_i^p \frac{\text{sgn}(M_i)}{M_p}, \dot{\theta}_{kL}^p - \dot{\theta}_{kR}^p = \dot{\lambda}_k^p \frac{\text{sgn}(M_k)}{M_p}, \dot{\theta}_j^p = \dot{\lambda}_j^p \frac{\text{sgn}(M_j)}{M_p} \quad (\text{A2.1c-e})$$

式(A2.1a,b)に関して、以下のように書き換える。

$$\dot{u}_L^p + \dot{u}_R^p = \frac{\pi}{2N_y} \sum_{i,j,k \in \text{active}} \left[\dot{\lambda}_i^p \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{N_i}{N_y}\right) + \dot{\lambda}_k^p \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{N_k}{N_y}\right) + \dot{\lambda}_j^p \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{N_j}{N_y}\right) \right] \quad (\text{A2.2a})$$

$$\dot{u}_L^p - \dot{u}_R^p = \frac{2}{S-1} \frac{\pi}{2N_y} \sum_{i,j,k \in \text{active}} \left[\dot{\lambda}_i^p \frac{S-1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{N_i}{N_y}\right) + \dot{\lambda}_k^p \left(m-1 - \frac{S-1}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{N_k}{N_y}\right) - \dot{\lambda}_j^p \frac{S-1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{N_j}{N_y}\right) \right] \quad (\text{A2.2b})$$

上の結果を塑性散逸項である式(3.12e)に代入する。

$$\Gamma = \sum_{\eta} \dot{\lambda}_{\eta}^p \left[\frac{\pi}{2N_y} N_{\eta} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{N_{\eta}}{N_y}\right) + \frac{|M_{\eta}|}{M_p} \right]; \quad (\text{A2.3})$$

これは、 $\dot{\lambda}_{\eta}^p \geq 0$ を満たす各点のいかなる (N_{η}, M_{η}) に対しても、

$$N_{\eta} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{N_{\eta}}{N_y}\right) \geq 0, \quad |M_{\eta}| \geq 0 \quad (\text{A2.4a,b})$$

であるから、塑性負荷状態に対しても $\Gamma \geq 0$ を満たす。また、等号成立は、 $\dot{\lambda}_i^p = \dot{\lambda}_k^p = \dot{\lambda}_j^p = 0$ のときのみである。このことから、塑性流れ則は熱力学の第二法則を満足することを示している。

Appendix 3 塑性ヒンジ位置 α の決定方法

塑性ヒンジ形成位置 α は文献 58 で述べられているように、弾塑性座屈が生じる際の塑性散逸量が最大となる位置を設定している。端部以外で軸力が最大となる位置($m=1$)で塑性ヒンジが生じることを考慮し、以下の式によって決定する。

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{S-1}{2} \frac{\bar{N}}{N}}{1 - (S-1) \frac{\bar{N}}{N}} \quad (\text{A3.1})$$

また、 $(-\infty \leq \bar{N}/N \leq +\infty)$ の範囲で $(1/4 \leq \alpha \leq 1/2)$ であることと本論文の次式とを合わせて考える。

$$\frac{m-1}{S} < \alpha < \frac{m}{S}, \quad m = 1, 2, \dots, S \quad (\text{A3.2})$$

Appendix 4 数値計算の際の特異点に関する演算上の処理

$m=1$ の位置に中間の塑性ヒンジが生じる時、K,J の両方が同じ軸力となるため、同時に降伏し、降伏条件の判定において一義的な解を持たなくなる場合がある。これは、2 点が降伏した際の降伏変位に関する塑性進展パラメータ増分が独立ではなくなるためである。そこで本論文においては、塑性進展パラメータ増分の関係を以下のように仮定し、変数を減じて計算する。

$$\text{K、J が同時に塑性化した場合: } \dot{\lambda}_k^{p+} + \dot{\lambda}_k^{p-} = \frac{1}{1-\alpha} (\dot{\lambda}_j^{p+} + \dot{\lambda}_j^{p-}) \quad (\text{A4.1a})$$

$$\text{I、K が同時に塑性化した場合: } \dot{\lambda}_k^{p+} + \dot{\lambda}_k^{p-} = \frac{1}{\alpha} (\dot{\lambda}_i^{p+} + \dot{\lambda}_i^{p-}) \quad (\text{A4.1b})$$

なお、本論文の第 3 章においては式(A-8a)の処理をおこなうことにより妥当な解が得られる事を確認している。

Appendix 5 弦材の弾塑性解析法における基本式の修正

ここでは、第2章、第3章で定式化した弦材に対する手法を第4章に適用するための、基本式の修正をおこなう。

第2章、第3章で弦材に対する独立な「材端力」として定義した変数は $N_\zeta, \bar{N}_\zeta, M_{i\zeta}, M_{k\zeta}, M_{j\zeta}$ の5変数であった。ここに、右下添字の ζ は弦材の変数であり、上下の区別は ($\zeta = +, -$) によって示す。このうち $M_{k\zeta}$ は実際には中間の点 K における内力をであるため、正確には材端力とは異なるものである。そこでまず、曲げに関する変数を $M_{i\zeta}, M_{j\zeta}$ と $M_{k\zeta}$ に分離する。第3章式(3.12c)を再掲する。

$$\mathbf{M} = \{M_i \quad M_k \quad M_j\}^T = \mathbf{k}_M \boldsymbol{\theta}^e \quad (\text{A5.1})$$

$$\text{ここに、} \boldsymbol{\theta}^e = \boldsymbol{\theta}_\zeta - \boldsymbol{\theta}_\zeta^p - \boldsymbol{\theta}_\zeta^b, \boldsymbol{\theta}_\zeta = \begin{Bmatrix} \theta_{i\zeta} \\ 0 \\ \theta_{j\zeta} \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\theta}_\zeta^p = \begin{Bmatrix} \theta_{i\zeta}^p \\ \theta_{k\zeta}^p \\ \theta_{j\zeta}^p \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\theta}_\zeta^b = \mathbf{a}_\zeta \mathbf{R}_\zeta = \begin{Bmatrix} \alpha_\zeta \\ 1 \\ -(1-\alpha_\zeta) \end{Bmatrix} \mathbf{R}_\zeta, \mathbf{k}_M = \begin{bmatrix} k_{ii\zeta} & k_{ik\zeta} & k_{ij\zeta} \\ & k_{kk\zeta} & k_{kj\zeta} \\ \text{sym.} & & k_{jj\zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{A5.2a-e})$$

である。ここでは3つの「独立な材端力」として定義した剛性マトリクスを一般化し、文字として展開する。まず、以下の材端力を変換する。

$$\begin{aligned} M_{i\zeta} &= k_{ii\zeta}(\theta_{i\zeta} - \theta_{i\zeta}^p - \alpha_\zeta \mathbf{R}_\zeta) + k_{ik\zeta}(-\theta_{k\zeta}^p - \mathbf{R}_\zeta) + k_{ij\zeta}\{\theta_{j\zeta} - \theta_{j\zeta}^p + (1-\alpha_\zeta)\mathbf{R}_\zeta\} \\ &= k_{ii\zeta}[\theta_{i\zeta} - (\theta_{i\zeta}^p + \kappa_{i\zeta} \theta_{k\zeta}^p) - (\alpha_\zeta + \kappa_{i\zeta})\mathbf{R}_\zeta] + k_{ij\zeta}[\theta_{j\zeta} - (\theta_{j\zeta}^p + \kappa_{j\zeta} \theta_{k\zeta}^p) - \{(1-\alpha_\zeta) + \kappa_{j\zeta}\}\mathbf{R}_\zeta] \end{aligned} \quad (\text{A5.3a})$$

$$\begin{aligned} M_{j\zeta} &= k_{ji\zeta}(\theta_{i\zeta} - \theta_{i\zeta}^p - \alpha_\zeta \mathbf{R}_\zeta) + k_{jk\zeta}(-\theta_{k\zeta}^p - \mathbf{R}_\zeta) + k_{jj\zeta}\{\theta_{j\zeta} - \theta_{j\zeta}^p + (1-\alpha_\zeta)\mathbf{R}_\zeta\} \\ &= k_{ji\zeta}[\theta_{i\zeta} - (\theta_{i\zeta}^p + \kappa_{i\zeta} \theta_{k\zeta}^p) - (\alpha_\zeta + \kappa_{i\zeta})\mathbf{R}_\zeta] + k_{jj\zeta}[\theta_{j\zeta} - (\theta_{j\zeta}^p + \kappa_{j\zeta} \theta_{k\zeta}^p) - \{(1-\alpha_\zeta) + \kappa_{j\zeta}\}\mathbf{R}_\zeta] \end{aligned} \quad (\text{A5.3b})$$

次に、内力を以下のように変換する。

$$\begin{aligned} M_{k\zeta} &= k_{ki\zeta}(\theta_{i\zeta} - \theta_{i\zeta}^p - \alpha_\zeta \mathbf{R}_\zeta) + k_{kk\zeta}(-\theta_{k\zeta}^p - \mathbf{R}_\zeta) + k_{kj\zeta}\{\theta_{j\zeta} - \theta_{j\zeta}^p + (1-\alpha_\zeta)\mathbf{R}_\zeta\} \\ &= k_{ji\zeta}[\theta_{i\zeta} - (\theta_{i\zeta}^p + \kappa_{ik\zeta} \theta_{k\zeta}^p) - (\alpha_\zeta + \kappa_{ik\zeta})\mathbf{R}_\zeta] \\ &\quad + k_{jj\zeta}[\theta_{j\zeta} - (\theta_{j\zeta}^p + \kappa_{jk\zeta} \theta_{k\zeta}^p) - \{(1-\alpha_\zeta) + \kappa_{jk\zeta}\}\mathbf{R}_\zeta] + \hat{k}_{M\zeta}(-\theta_{k\zeta}^p - \mathbf{R}_\zeta) \\ &= \kappa_{i\zeta} M_{i\zeta} + \kappa_{j\zeta} M_{j\zeta} + \hat{k}_{M\zeta}(-\theta_{k\zeta}^p - \mathbf{R}_\zeta) \end{aligned} \quad (\text{A5.4})$$

ここに、

$$\kappa_{i\zeta} = \frac{k_{ji\zeta} k_{ik\zeta} - k_{ij\zeta} k_{jk\zeta}}{k_{ii\zeta} k_{jj\zeta} - k_{ij\zeta} k_{ji\zeta}}, \quad \kappa_{j\zeta} = \frac{-k_{ji\zeta} k_{ik\zeta} + k_{ii\zeta} k_{jk\zeta}}{k_{ii\zeta} k_{jj\zeta} - k_{ij\zeta} k_{ji\zeta}}, \quad \hat{k}_{M\zeta} = k_{kk\zeta} - k_{ik\zeta} \kappa_{i\zeta} - k_{jk\zeta} \kappa_{j\zeta} \quad (\text{A5.5a-c})$$

である。ここで、新たに独立な内力の変数として $\hat{M}_{k\zeta}$ を定義する。

$$\hat{M}_{k\zeta} = \hat{k}_{M\zeta} (-\theta_{k\zeta}^p - R_\zeta) \quad (A5.6)$$

これらを用いて、弾性構成則式(3.12a-c)、塑性ヒンジ点 K におけるモーメントつり合い条件式(3.12d)および塑性散逸項式(3.12e)を修正する。

弾性構成則：

$$\mathbf{f}_\zeta = \mathbf{k}_\zeta^e \mathbf{u}_\zeta^e \quad (A5.7a)$$

塑性ヒンジ点 K におけるモーメントつり合い条件：

$$\begin{aligned} \Xi_\zeta &= -2N_\zeta C_\zeta R_\zeta - D_\zeta \bar{N}_\zeta C_\zeta R_\zeta + M_{i\zeta} \alpha_\zeta + M_{k\zeta} - M_{j\zeta} (1 - \alpha_\zeta) \\ &= -2N_\zeta C_\zeta R_\zeta - D_\zeta \bar{N}_\zeta C_\zeta R_\zeta + M_{i\zeta} (\alpha_\zeta + \kappa_{i\zeta}) + M_{j\zeta} \{-(1 - \alpha_\zeta) + \kappa_{j\zeta}\} + \hat{M}_{k\zeta} \\ &= \mathbf{f}_\zeta^T \mathbf{C}_\zeta + \hat{M}_{k\zeta} = 0 \end{aligned} \quad (A5.7b)$$

塑性散逸項：

$$\begin{aligned} \Gamma_\zeta &= N_\zeta (\dot{u}_{L\zeta}^p + \dot{u}_{R\zeta}^p) + \frac{S-1}{2} \bar{N}_\zeta (\dot{u}_{L\zeta}^p - \dot{u}_{R\zeta}^p) + M_{i\zeta} \dot{\theta}_{i\zeta}^p + M_{k\zeta} \dot{\theta}_{k\zeta}^p + M_{j\zeta} \dot{\theta}_{j\zeta}^p \\ &= N_\zeta (\dot{u}_{L\zeta}^p + \dot{u}_{R\zeta}^p) + \frac{S-1}{2} \bar{N}_\zeta (\dot{u}_{L\zeta}^p - \dot{u}_{R\zeta}^p) + M_{i\zeta} (\dot{\theta}_{i\zeta}^p + \kappa_{i\zeta} \dot{\theta}_{k\zeta}^p) + M_{j\zeta} (\dot{\theta}_{j\zeta}^p + \kappa_{j\zeta} \dot{\theta}_{k\zeta}^p) + \hat{M}_{k\zeta} \dot{\theta}_{k\zeta}^p \\ &= \mathbf{f}_\zeta^T \dot{\mathbf{u}}_\zeta^p + \hat{M}_{k\zeta} \dot{\theta}_{k\zeta}^p \geq 0 \end{aligned} \quad (A5.7c)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\zeta &= \{N_\zeta \quad \bar{N}_\zeta \quad M_{i\zeta} \quad M_{j\zeta}\}^T, \mathbf{u}_\zeta = \{u_\zeta \quad \bar{u}_\zeta \quad \theta_{i\zeta} \quad \theta_{j\zeta}\}^T, \mathbf{u}_\zeta = \mathbf{u}_\zeta^e + \mathbf{u}_\zeta^p + \mathbf{u}_\zeta^b, \dot{\mathbf{u}}_\zeta = \dot{\mathbf{u}}_\zeta^e + \dot{\mathbf{u}}_\zeta^p + \dot{\mathbf{u}}_\zeta^b, \\ \dot{\mathbf{u}}_\zeta^T &= \left\{ \dot{u}_{L\zeta}^p + \dot{u}_{R\zeta}^p \quad \frac{S-1}{2} (\dot{u}_{L\zeta}^p - \dot{u}_{R\zeta}^p) \quad (\dot{\theta}_{i\zeta}^p + \kappa_{i\zeta} \dot{\theta}_{k\zeta}^p) \quad (\dot{\theta}_{j\zeta}^p + \kappa_{j\zeta} \dot{\theta}_{k\zeta}^p) \right\} \\ \mathbf{C}_\zeta^T &= \left\{ -2C_\zeta R_\zeta \quad -D_\zeta C_\zeta R_\zeta \quad \alpha_\zeta + \kappa_{i\zeta} \quad -(1 - \alpha_\zeta) + \kappa_{j\zeta} \right\}, \\ C_\zeta &= \frac{\alpha_\zeta (1 - \alpha_\zeta) L}{2}, D_\zeta = 2 \left(m_\zeta - 1 - \frac{n_\zeta}{2} \right) - \frac{(1 - \alpha_\zeta) (m_\zeta - 1) (S - n_\zeta + m_\zeta - 1)}{S \alpha_\zeta} + \frac{\alpha_\zeta (n_\zeta - m_\zeta + 1) (S - m_\zeta + 1)}{S (1 - \alpha_\zeta)} \\ \mathbf{k}_\zeta^e &= \begin{bmatrix} k_{N\zeta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{\bar{N}\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{ii\zeta} & k_{ij\zeta} \\ 0 & 0 & k_{ji\zeta} & k_{jj\zeta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A5.8a-i)$$

である。材端変位 $\mathbf{u}_\zeta$ とその変化率 $\dot{\mathbf{u}}_\zeta$ は、弾性成分 $\mathbf{u}_\zeta^e$ 、塑性成分 $\mathbf{u}_\zeta^p$ および座屈成分 $\mathbf{u}_\zeta^b$ によって加法的に示すことが出来るものとし、この右上添字 e 、 p および b は各変位の弾性成分、塑性成分および座屈成分であることを示す。また、以降も各変数の変化率として $(\dot{*})$ を用いる。

次に、第三章において弦材の3箇所にて定義した降伏条件に対して、修正した定式化を考慮して塑性流れ則を新たに導出する。第3章における降伏条件を、新たに得られた上記の変数による関数として再定義すると、

$$\Phi_{i\zeta}^{\pm} \equiv \Phi_{i\zeta}^{\pm}(N_{\zeta}, \bar{N}_{\zeta}, M_{i\zeta}), \Phi_{k\zeta}^{\pm} \equiv \Phi_{k\zeta}^{\pm}(N_{\zeta}, \bar{N}_{\zeta}, M_{i\zeta}, M_{j\zeta}, \hat{M}_{k\zeta}), \Phi_{j\zeta}^{\pm} \equiv \Phi_{j\zeta}^{\pm}(N_{\zeta}, \bar{N}_{\zeta}, M_{j\zeta})$$

これと塑性散逸項から、active となった降伏条件に対して以下の Lagrange 関数を考える。

$$L_{\zeta} = -\Gamma_{\zeta} + \sum_{\eta} \dot{\lambda}_{\eta\zeta}^{p\pm} \Phi_{\eta\zeta}^{\pm}, \{ \eta = i, j, k | \eta \in \text{active} \}, (\zeta = +, -) \quad (\text{A5.9})$$

独立な力の成分である $N_{\zeta}, \bar{N}_{\zeta}, M_{i\zeta}, M_{j\zeta}, \hat{M}_{k\zeta}$ で偏微分して整理すると、以下の塑性流れ則を得る。特に回転の塑性変形成分に対して、以下に示す関係が得られる。

$$\dot{u}_{L\zeta}^p, \dot{u}_{R\zeta}^p = \frac{1}{2} \sum_{\eta} \left(\frac{\partial \Phi_{\eta\zeta}}{\partial N_{\zeta}} \pm \frac{2}{S-1} \frac{\partial \Phi_{\eta\zeta}}{\partial \bar{N}_{\zeta}} \right) \dot{\lambda}_{\eta\zeta}^p \quad (\text{複号は+が } \dot{u}_{L\zeta}^p, -が \dot{u}_{R\zeta}^p), \quad (\text{A5.10a,b})$$

$$\frac{\partial L_{\zeta}}{\partial M_{i\zeta}} = -\frac{\partial \Gamma_{\zeta}}{\partial M_{i\zeta}} + \sum_{\eta} \dot{\lambda}_{\eta\zeta}^{p\pm} \frac{\partial \Phi_{\eta\zeta}^{\pm}}{\partial M_{i\zeta}} = 0 \quad \rightarrow \dot{\theta}_{i\zeta}^p \equiv \dot{\theta}_{i\zeta}^p + \kappa_{i\zeta} \dot{\theta}_{k\zeta}^p = \sum_{\eta} \dot{\lambda}_{\eta\zeta}^{p\pm} \frac{\partial \Phi_{\eta\zeta}^{\pm}}{\partial M_{i\zeta}} \quad (\text{A5.10c,d})$$

$$\frac{\partial L_{\zeta}}{\partial M_{j\zeta}} = -\frac{\partial \Gamma_{\zeta}}{\partial M_{j\zeta}} + \sum_{\eta} \dot{\lambda}_{\eta\zeta}^{p\pm} \frac{\partial \Phi_{\eta\zeta}^{\pm}}{\partial M_{j\zeta}} = 0 \quad \rightarrow \dot{\theta}_{j\zeta}^p \equiv \dot{\theta}_{j\zeta}^p + \kappa_{j\zeta} \dot{\theta}_{k\zeta}^p = \sum_{\eta} \dot{\lambda}_{\eta\zeta}^{p\pm} \frac{\partial \Phi_{\eta\zeta}^{\pm}}{\partial M_{j\zeta}} \quad (\text{A5.10e,f})$$

$$\frac{\partial L_{\zeta}}{\partial \hat{M}_{k\zeta}} = -\frac{\partial \Gamma_{\zeta}}{\partial \hat{M}_{k\zeta}} + \sum_{\eta} \dot{\lambda}_{\eta\zeta}^{p\pm} \frac{\partial \Phi_{\eta\zeta}^{\pm}}{\partial \hat{M}_{k\zeta}} = 0 \quad \rightarrow \dot{\theta}_{k\zeta}^p = \sum_{\eta} \dot{\lambda}_{\eta\zeta}^{p\pm} \frac{\partial \Phi_{\eta\zeta}^{\pm}}{\partial \hat{M}_{k\zeta}} \quad (\text{A5.10g,h})$$

以上が塑性流れ則である。

Appendix 6 トラス梁要素の弾性剛性マトリクス

トラス梁要素の剛性マトリクスは次式となる。

$$\tilde{\mathbf{k}}^e = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_2 & 0 & 0 & k_3 & -k_2 & 0 & 0 & k_3 \\ & & k_4 & 0 & 0 & 0 & k_5 & 0 & 0 \\ & & & k_6 & 0 & 0 & 0 & k_7 & 0 \\ & & & & k_8 & -k_3 & 0 & 0 & k_9 \\ & & & & & k_2 & 0 & 0 & -k_3 \\ & Sym. & & & & & k_4 & 0 & 0 \\ & & & & & & & k_6 & 0 \\ & & & & & & & & k_8 \end{bmatrix} \quad (A6.1)$$

ここに、

$$k_1 = \frac{EA}{L}, k_2 = 2k_3 = \frac{12E\Gamma}{L^2}, k_4 = \frac{(3 + \phi_m + \phi_s)EI_s}{(\phi_m + \phi_s)L}, k_5 = \frac{(3 - \phi_m - \phi_s)EI_s}{(\phi_m + \phi_s)L},$$

$$k_6 = 2k_7 = \frac{4EI_t}{L}, k_8 = 2k_9 = \frac{4E\Gamma}{L}, A = 2a_c, I_s = \frac{a_c H^2}{2}, I_t = 2I_{c\zeta}, \Gamma = \frac{I_t H^2}{2} \quad (A6.2a-j)$$

である。ただし、 ϕ_m はトラス梁要素の構面Sによって変化する値であり、 ϕ_s は構面内せん断力を考慮したときの斜材に関する値である。それぞれ次式から得られる。

$$\phi_m = 1 + \frac{1}{2S^2}, \phi_s = \frac{6}{\cos^3 \theta_d} \frac{a_c}{a_d} \cdot \left(\frac{H}{L \tan \theta_d} \right)^2 \quad (A6.3a,b)$$

Appendix 7 弦材の初期不整に対する感度および初期不整の設定の際の留意点

第3章における弦材の弾塑性座屈に対する解析法の際には、3.3.3.1に示した方法を採用することによって、弦材の軸降伏が降伏曲面上の特異点であることにより生じる数値解析上の問題を解決している。しかしながら、第2章と同様に初期不整を導入する方法によっても、弾塑性座屈により生じる特異点の問題を回避することができる。この方法を導入すれば、一貫した設定によって弦材の弾性・弾塑性座屈問題を解くことが可能になると考えられる。しかしながら、この際の初期不整は、その絶対量が大きいほど安定的に数値解を得られる一方、座屈耐力に影響を与えると考えられ、初期不整の値の設定が適切かどうかは設計者の判断に委ねられることになる。そこで、本項においては提案手法を使用する際の参考のため、提案手法によって初期不整を導入した際の座屈耐力の低減の度合いを示す。

Fig.A1に、提案手法による $S=2$ 、 $N_i/N_j=0.8$ 、降伏応力度が 235N/mm^2 の弦材の座屈耐力を示す。図の縦軸は座屈耐力 N_{cr} を、断面の軸降伏耐力 N_y で除した値である。横軸は弦材の両端を固定した境界条件に対する細長比を示す。細長比が 40,60,80,100,120,150 の弦材に対して、式(2.26a-c)によって入力する初期不整を変化させることにより得られた結果を図のシンボルで示し、 $R_{mi}=1/00000$ の時を○で、 $R_{mi}=1/1000$ の時を△で、それぞれ示す。図中の実線は、離散化手法による座屈固有値解析による座屈耐力の結果と、断面の軸降伏耐力の最小値をとった曲線である。結果から、 $R_{mi}=1/00000$ における座屈耐力は初期不整の影響が非常に小さい結果であるといえるが、 $R_{mi}=1/1000$ の時の座屈耐力は、限界細長比付近の断面において大きく低減している。この結果は一例であるが、細長比や中間軸方向力の分布が変化した際にも、同様の傾向が考えられる。弦材の弾塑性座屈後挙動を再現する際に初期不整を考慮する場合は、数値解を取得する際の安定性と座屈耐力への影響を十分考慮した上で設定する必要がある。

Appendix

Figure

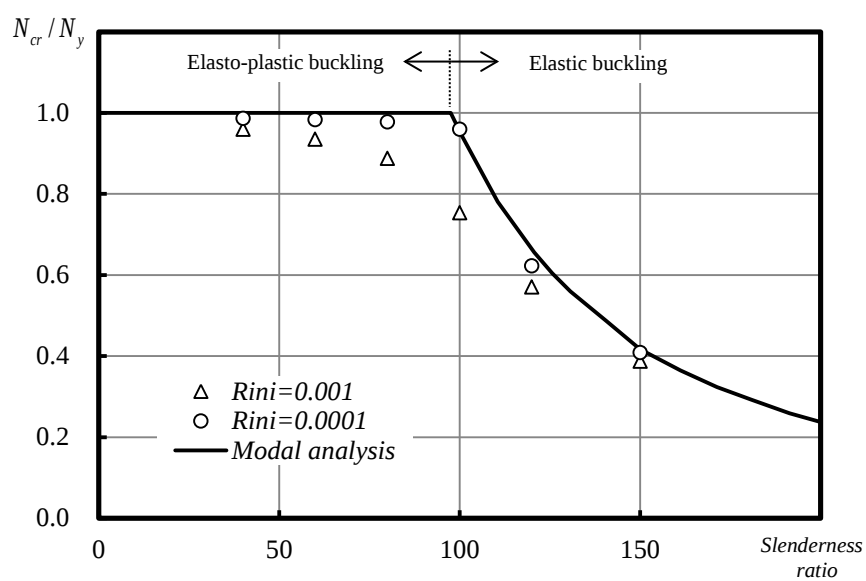


Fig.A1 Buckling strength of present model with initial imperfection