論文 / 著書情報
Article / Book Information

論題(和文)	主系と副系から成る建物を対象とした動的縮約モデルによる層間変位分布の復元
Title(English)	Methodology for Recovery of Inter-Story Drift From Modal Response of 2-Dof Model in Primary-Secondary System
著者(和文)	金子健作
Authors(English)	Kensaku Kaneko
出典(和文)	日本建築学会構造系論文集, Vol. 82, No. 742, p. 1865-1872
Citation(English)	Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 82, No. 742, p. 1865-1872
発行日 / Pub. date	2017, 12
Rights	日本建築学会
Relation	is version of: https://www.jstage.jst.go.jp/article/aijs/82/742/82_1865/_article/-char/ja
Note	本文データは学協会の許諾に基づきJ-STAGEから複製したものである

【カテゴリーⅡ】

日本建築学会構造系論文集 第82巻 第742号, 1865-1872, 2017年12月
J. Struct. Constr. Eng., AIJ, Vol. 82 No. 742, 1865-1872, Dec., 2017
DOI http://doi.org/10.3130/aijs.82.1865

主系と副系から成る建物を対象とした動的縮約モデルによる層間変位分布の復元

METHODOLOGY FOR RECOVERY OF INTER-STORY DRIFT FROM MODAL RESPONSE OF 2-DOF MODEL IN PRIMARY-SECONDARY SYSTEM

金 子 健 作*
Kensaku KANEKO

A two degree-of-freedom (2-DOF) model is employed for mid-story isolation buildings or buildings with a tuned mass damper in practical design. These systems are classified into a primary-secondary system. The objective of this study is to assess the accuracy of inter-story drifts computed by the 2-DOF model through a stochastic vibration analysis. The analysis reveals that this model evaluates accurate floor displacements. However, the model underestimates inter-story drifts in the upper stories of the primary system. A convenient modal superposition method is proposed to improve the accuracy of the inter-story drifts.

Keywords : *2-DOF system, Tuned mass damper, Mid-story isolation system, Response spectrum method, Mode superposition, Super high-rise building*
2 質点系, TMD, 中間階免震, 応答スペクトル法, モード重ね合わせ, 超高層建物

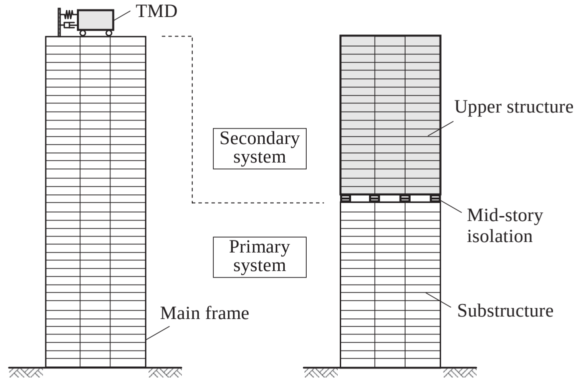
1. はじめに

超高層建物における耐震設計の黎明期では, 計算資源の制約から, 数層分の変位自由度を一つに縮約した質点系の振動解析モデルが用いられてきた。計算機の演算性能が十分に発達した現在でも，自由度縮約の技術は，関心ある系の振動現象の本質を抽出し，合理的な耐震設計への視座を与える点で有効である。

自由度縮約の発展例として，TMD 付き建物に対する 2 自由度系，中間階の免震層を含む上部構造と下部構造に分けた 2 自由度系[例えば 1), 2)]などがある（Fig. 1）。どちらも，直列接合された副系と主系の動的相互作用問題を取り扱う点が共通している。全体系が高々2 自由度の数であれば，応答を簡易に評価するための閉形式解を誘導しやすく，3 自由度以上になれば数値解に頼らざるを得なくなる。その意味において，特に，2 自由度系は工学的に重要である。従来，1 自由度系に縮約した主系の質点に 1 自由度系の副系を接続するという経験的なモデルが用いられ，耐震設計に役立てられている。しかしながら，応答の誤差は必ずしも小さくない。このような問題点を踏まえ，著者は動的縮約法により，数学的に適切な 2 自由度系への縮約法を示した [3)]。この方法は，副系の接続による主系の振動モードの変化は無視できるという前提に基づいているものの，主系に対して副系の質量が相当に大きい場合でも, 主系や副系の代表変位は, 縮約前の多自由度系と良く一致することが確認されている。

しかしながら, 最終的に関心のある主系の層間変位分布について, 提案した 2 自由度系（以降，縮約モデル）による評価値が元の多自由度系とどの程度対応するかは議論の余地がある。副系の質量付加が主系の振動モード変化に及ぼす影響は小さいと考えられるものの，層間変位に対応する振動モード形状の勾配については，改めて議論される必要があろう。もし，縮約モデルの代表変位から元の層間変位を精度良く復元できれば，中間階免震建物や TMD を屋上に有する建物を対象として著者が提案した，縮約モデルに基づく応答指定型設計 [3), 4)]がより有効に活用されることが期待される。

本研究では，主系と副系から構成される建物を想定し，その縮約モデルから主系の地震時の層間変位を復元した際の精度を調査する。想定する建物は, 1 次モードを制振する目的で TMD が屋上に設置される高層建物や, 高層階に免震層を有する建物である。この違いは, 主系に対する副系の質量の比として考慮される。不規則振動解析により，縮約モデルによる応答の精度を統計的に整理したうえで，層間変位の復元精度を改善する方法を提案する。



(a) TMD mounted on main frame (b) Mid-story isolation system
Fig. 1 Primary-secondary system

* 東京工業大学環境・社会理工学院建築学系 助教・博士（工学）
Assist. Prof., School of Environment and Society, Dept. of Architecture and Building Engineering, Tokyo Institute of Technology, Dr.Eng.

２．主系と副系から成る連成系の応答解析法の概要

2.1　動的縮約法による 2 自由度系の振動方程式

質点数 n の基礎固定のせん断型質点系モデルを主系とする。この頂部に接続する副系は，質量 m_s，減衰係数 c_s および剛性 k_s の 1 質点系とする。この副系は，TMD や中間階免震建物における上部構造と免震層を 1 自由度に縮約した系を想定する。主系と副系は弾性であるとし，ホワイトノイズを基礎に受ける主系－副系（以下，連成系）を考える（Fig.2(a)）。本論文では，導入する符号の下添え字 p,s により，それぞれ主系（primary）と副系（secondary）を区別する。

副系の質点位置での地盤面からの相対変位を u_s，主系の相対変位を $\mathbf{u}_p$ とする（Fig. 2(a)）。これら 2 種類の成分を含む連成系の変位ベクトル $\mathbf{U}^T=(u_s,\mathbf{u}_p)^T$ を導入し，振動方程式を次のように表す。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}+\mathbf{K}\mathbf{U}=-\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g \tag{1}$$

ここに，$\mathbf{M},\mathbf{C},\mathbf{K}$ はそれぞれ連成系の質量，減衰および剛性マトリクス，$\mathbf{r}$ は地震影響ベクトル，$\ddot{u}_g$ は地動加速度である。

ここで，連成系での主系部分の刺激関数と主系単独の刺激関数が近似的に相似形をなすと仮定し，$n+1$ の数の自由度を有する式(1)を動的縮約する。これにより，$\mathbf{U}$ の j 次モード応答成分は，以下の 2 自由度系の振動方程式から近似的に求められる [3)]。

$$\hat{\mathbf{M}}_j\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_j+\hat{\mathbf{C}}_j\dot{\boldsymbol{\alpha}}_j+\hat{\mathbf{K}}_j\boldsymbol{\alpha}_j=-\hat{\mathbf{M}}_j\hat{\mathbf{r}}_j\ddot{u}_g \quad \text{for} \quad j=1,2,\ldots,n \tag{2}$$

ここに，

$$\hat{\mathbf{M}}_j=\begin{bmatrix}\psi^2 m_s & 0\\ 0 & M_p^{eff}\end{bmatrix},\quad \hat{\mathbf{C}}_j=\begin{bmatrix}\psi^2 c_s & -\psi^2 c_s\\ -\psi^2 c_s & \psi^2 c_s + C_p\end{bmatrix} \tag{3a, b}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_j=\begin{bmatrix}\psi^2 k_s & -\psi^2 k_s\\ -\psi^2 k_s & \psi^2 k_s + M_p^{eff}\omega_p^2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_j=\begin{Bmatrix}u_s\\ \bar{u}_p\end{Bmatrix},\quad \hat{\mathbf{r}}_j=\begin{Bmatrix}1\\ \psi\end{Bmatrix} \tag{3c-e}$$

である。また，$\omega_p,M_p^{eff},C_p,\psi$ はそれぞれ主系単独の j 次モードの固有円振動数，有効質量，減衰係数および副系が接続する位置（主系頂部）での刺激関数である。$\bar{u}_p$ は主系頂部での変位の j 次のモード成分である。この $\bar{u}_p$ は，j 次モードの一般化変位 q を用いて，

$$\bar{u}_p=\psi q \tag{4}$$

として表される。表記の簡潔のため，式(3)のマトリクス等の成分にも記入すべき，モードの次数を表す下添え字の記号は省略した。物理座標系において，式(3)を正確に表すことは難しいが，理解しやすいように，縮約モデルの模式図を Fig. 2(b)に示す。

もとの多自由度系において，副系が存在しない場合の主系のモードのうち，制振対象の次数を λ とする。このモードを制振モード，

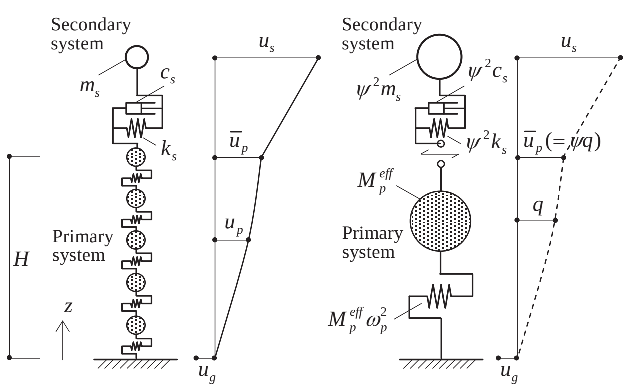


Fig. 2 Schematic illustration of 2-DOF model for fundamental mode

それ以外を非制振モードとよぶ。非制振モードの集合を Ω で表す。主系と副系の相互作用の小さい $j\in\Omega$ では，次の表現が可能である。

$$\hat{\mathbf{M}}_\lambda\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_\lambda+\hat{\mathbf{C}}_\lambda\dot{\boldsymbol{\alpha}}_\lambda+\hat{\mathbf{K}}_\lambda\boldsymbol{\alpha}_\lambda=-\hat{\mathbf{M}}_\lambda\hat{\mathbf{r}}_\lambda\ddot{u}_g \tag{5a}$$

$$\ddot{q}_j+2h_{p,j}\omega_{p,j}\dot{q}_j+\omega_{p,j}^2 q_j=-\ddot{u}_g \quad \text{for} \quad j\in\Omega \text{ (decoupled modes)} \tag{5b}$$

ここに，$h_{p,j},\omega_{p,j}$ は主系単独の j 次の減衰定数および固有円振動数である。

本研究では，式(5)の振動方程式を用い，$\lambda=1$ に限定する。この式から得る q_j と，主系単独の固有値解析による j 次モードの刺激関数 β_j および固有ベクトルを $\boldsymbol{\phi}_j$ を用いて，$\mathbf{u}_p$ は次のように表される。

$$\mathbf{u}_p=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\boldsymbol{\phi}_j q_j\ ,\quad \mathbf{u}_{p,\lambda}=\beta_\lambda\boldsymbol{\phi}_\lambda q_\lambda \tag{6a, b}$$

また，主系の層間変位を順に並べたベクトル $\mathbf{d}_p$ を導入する。差分作用素の役割を果たす $\mathbf{D}$ を用いると，$\mathbf{d}_p$ は以下となる。

$$\mathbf{d}_p=\mathbf{D}^T\mathbf{u}_p \tag{7}$$

2.2　不規則振動解析による 2 乗平均応答の評価方法

式(1)や式(5)の振動方程式をもとにし，不規則振動解析による主系および副系の 2 乗平均応答を評価する。これにより，地震動の特性による影響を排除して，縮約モデルによる応答の精度を総合的に議論できる。ここでは，2 乗平均応答の一般的な評価方法について述べる。

まず，連成系を状態空間内で表し，状態ベクトル $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{Y}^T=\begin{cases}(u_s,\mathbf{u}_p,\dot{u}_s,\dot{\mathbf{u}}_p)^T & \text{for original system (MDOF)}\\ (u_s,\bar{u}_p,\dot{u}_s,\dot{\bar{u}}_p)^T & \text{for condensed system (2DOF)}\end{cases} \tag{8}$$

から，その分散共分散マトリクス $\mathbf{V}$ を定義する。

$$\mathbf{V}=\left\langle \mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\right\rangle \tag{9}$$

ここに，$\langle\cdot\rangle$ は標本平均を示す。パワースペクトル密度 S_0 の地動入力に対する応答 $\mathbf{V}$ は，以下の Lyapunov 方程式から求まる [5)]。

$$\mathbf{A}\mathbf{V}+\mathbf{V}\mathbf{A}^T+2\pi S_0\mathbf{b}\mathbf{b}^T=\mathbf{O} \tag{10}$$

係数 $\mathbf{A},\mathbf{b}$ は，多自由度系の場合，以下のように表される。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{r}\end{Bmatrix} \tag{11a, b}$$

ここに，$\mathbf{I}$ は単位マトリクスである。また，

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix}\langle u_s^2\rangle & \langle u_s\mathbf{u}_p^T\rangle & \langle u_s\dot{u}_s\rangle & \langle u_s\dot{\mathbf{u}}_p^T\rangle\\ \langle \mathbf{u}_p u_s\rangle & \langle \mathbf{u}_p\mathbf{u}_p^T\rangle & \langle \mathbf{u}_p\dot{u}_s\rangle & \langle \mathbf{u}_p\dot{\mathbf{u}}_p^T\rangle\\ \langle \dot{u}_s u_s\rangle & \langle \dot{u}_s\mathbf{u}_p^T\rangle & \langle \dot{u}_s^2\rangle & \langle \dot{u}_s\dot{\mathbf{u}}_p^T\rangle\\ \langle \dot{\mathbf{u}}_p u_s\rangle & \langle \dot{\mathbf{u}}_p\mathbf{u}_p^T\rangle & \langle \dot{\mathbf{u}}_p\dot{u}_s\rangle & \langle \dot{\mathbf{u}}_p\dot{\mathbf{u}}_p^T\rangle\end{bmatrix},\quad \mathbf{V}_p=\left\langle \mathbf{u}_p\mathbf{u}_p^T\right\rangle \tag{12a, b}$$

である。縮約モデルでは，$\mathbf{A},\mathbf{b}$ 内の $\mathbf{M},\mathbf{C},\mathbf{K},\mathbf{r}$ を対応する $\hat{\mathbf{M}},\hat{\mathbf{C}},\hat{\mathbf{K}},\hat{\mathbf{r}}$ に，式(12)に含まれる $\mathbf{u}_p$ を $\bar{u}_p$ に置き換える。

層間変位については，式(10)から求めた $\mathbf{V}$ に含まれる $\mathbf{V}_p$ を用いて，

$$\left\langle \mathbf{d}_p\mathbf{d}_p^T\right\rangle=\mathbf{D}^T\mathbf{V}_p\mathbf{D} \tag{13}$$

と表現すると，この対角成分が層間変位の 2 乗平均に対応する。

３．主系の刺激関数の変化を考慮したモード応答成分の抽出方法

3.1　制振モード応答の定義

縮約モデルによる応答の精度を分析するには，動的相互作用の小さい非制振モードの応答成分（式(5b)に相当）を除去した形で，多自由度系の応答と縮約モデルによる応答を比較することが望ましい。

変位は，非制振モード応答とその残差 $\delta\mathbf{u}_p$ に分離できるとする。

$$\mathbf{u}_p = \underbrace{\delta\mathbf{u}_p}_{\substack{\text{Response}\\ \text{of interest}}} + \sum_{j\in\Omega}\beta_j\boldsymbol{\phi}_j q_j \tag{14}$$

ここに， $\boldsymbol{\phi}$ は副系を除いた主系単独の実固有モードであり，式(14)の第 2 項の一般化変位 q_j は主系単独の応答で近似できるとする。この表現のもと，第 1 項の分散共分散応答である，

$$\delta\mathbf{V}_p = \left\langle \delta\mathbf{u}_p\delta\mathbf{u}_p^T \right\rangle \tag{15}$$

が関心のある応答である。

3.2 制振モード応答の抽出方法

未知数の $\delta\mathbf{u}_p$ と $\delta\mathbf{V}_p$ を求める手順を示す。そのために，基底ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ と成分 Q を導入して， $\delta\mathbf{u}_p = Q\boldsymbol{\varphi}$ と表す。この式と式(14)を式(12b)に代入する。これを元の $\mathbf{V}_p$ と区別するために， $\mathbf{V}'_p$ と表す。

$$\begin{aligned}\mathbf{V}'_p = \delta\mathbf{V}_p &+ \sum_{j\in\Omega}\rho_{\lambda j}\beta_j\sqrt{\left\langle Q^2\right\rangle\left\langle q_j^2\right\rangle}\left(\boldsymbol{\varphi}\otimes\boldsymbol{\phi}_j + \boldsymbol{\phi}_j\otimes\boldsymbol{\varphi}\right)\\ &+ \sum_{i\in\Omega}\sum_{j\in\Omega}\beta_i\beta_j\sqrt{\left\langle q_i^2\right\rangle\left\langle q_j^2\right\rangle}\,\boldsymbol{\phi}_i\otimes\boldsymbol{\phi}_j\end{aligned} \tag{16}$$

ここで，2 項演算子 $\otimes$ はテンソル積， ρ_{ij} は i 次と j 次のモード応答の相関係数である。制振モードとの非連成を仮定すると，式(16)の第 3 項の非制振モードの応答 $\left\langle q_j^2\right\rangle$ は，次式から評価可能である [5]。

$$\left\langle q_j^2\right\rangle = \frac{\pi S_0}{2h_{p,j}\omega_{p,j}^3} \quad \text{for } j\in\Omega \tag{17}$$

また，式(16)に含まれる相関係数 ρ_{ij} には，CQC 法 [6]の値を用いる。

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{h_{p,i}h_{p,j}}\left(h_{p,i}+rh_{p,j}\right)r^{3/2}}{\left(1-r^2\right)^2+4h_{p,i}h_{p,j}r\left(1+r^2\right)+4\left(h_{p,i}{}^2+h_{p,j}{}^2\right)r^2}, \quad r=\omega_{p,j}/\omega_{p,i} \tag{18a, b}$$

この相関係数は，パワースペクトル密度一定の入力に対する厳正解であり，主系単独では， $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\phi}_\lambda$ のもと $\mathbf{V}_p = \mathbf{V}'_p$ が厳密に成立する。

これに対し，副系がある場合， $\boldsymbol{\phi}_\lambda$ の独立な $n-1$ 個の成分と $\left\langle Q^2\right\rangle$ の未知数では， $\mathbf{V}'_p$ が $\mathbf{V}_p$ に一致し得ない。そのため，$\mathbf{D}$ を重み係数として，$\mathbf{D}^T(\mathbf{V}_p-\mathbf{V}'_p)\mathbf{D}$ の対角成分から成る残差ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$ を導入する。この $\boldsymbol{\varepsilon}$ の L2 ノルムの 2 乗を用いて，次の最小値問題を考え，

$$\text{Minimize} \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \tag{19}$$

を解き， $\boldsymbol{\varphi}, \left\langle Q^2\right\rangle$ を求めれば，最終的に次式を得る。

$$\delta\mathbf{V}_p = \left\langle Q^2\right\rangle\boldsymbol{\varphi}\otimes\boldsymbol{\varphi} \tag{20a}$$

$$\left\langle \mathbf{d}_{p,\lambda}\mathbf{d}_{p,\lambda}^T\right\rangle = \left\langle Q^2\right\rangle\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}\right)\otimes\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}\right) \tag{20b}$$

式(19)の具体的な解法と解の検証を付録 1 と付録 2 に示してある。

3.3 縮約モデルによる変位を用いた主系の 2 乗平均応答

縮約モデルでも，式(20a)および式(20b)と同等の表現が可能であり，それぞれ対応する式は，以下のようになる。

$$\left\langle \mathbf{u}_{p,\lambda}\mathbf{u}_{p,\lambda}^T\right\rangle = \beta_\lambda^2\left\langle q_\lambda^2\right\rangle\boldsymbol{\phi}_\lambda\otimes\boldsymbol{\phi}_\lambda \tag{21a}$$

$$\left\langle \mathbf{d}_{p,\lambda}\mathbf{d}_{p,\lambda}^T\right\rangle = \beta_\lambda^2\left\langle q_\lambda^2\right\rangle\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_\lambda\right)\otimes\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_\lambda\right) \tag{21b}$$

4．副系により分岐した主系の刺激関数の性質

縮約モデルの精度を分析するための基本情報として，連成系の振動モードの性質を述べる。

4.1 主系および副系の条件

はじめに，主系の設定について説明する。主系の各階の質量および階高は，それぞれ一定とする。主系の層剛性は，理想化した台形分布とし，最下層に対して最上層の層剛性の比を $\tau\,(<1)$ とする。本研究に関しては，層剛性の絶対値は大きな意味を持たないため，固有値解析による主系単独の 1 次固有円振動数 ω_p が 1 となるように層剛性を定める。内部粘性減衰は，主系単独の 1 次モードに対して，主系のみに剛性比例型減衰で与える。

つぎに，副系の設定について述べる。主系の有効質量 M_p^{eff} に対する副系の質量 m_s の比 μ （以下，質量比）を次式で導入する。

$$\mu = m_s/M_p^{eff}, \quad \bar{\mu} = \psi^2\mu \tag{22a, b}$$

また，同調比 γ と副系の減衰定数 h_s を以下のように導入する。

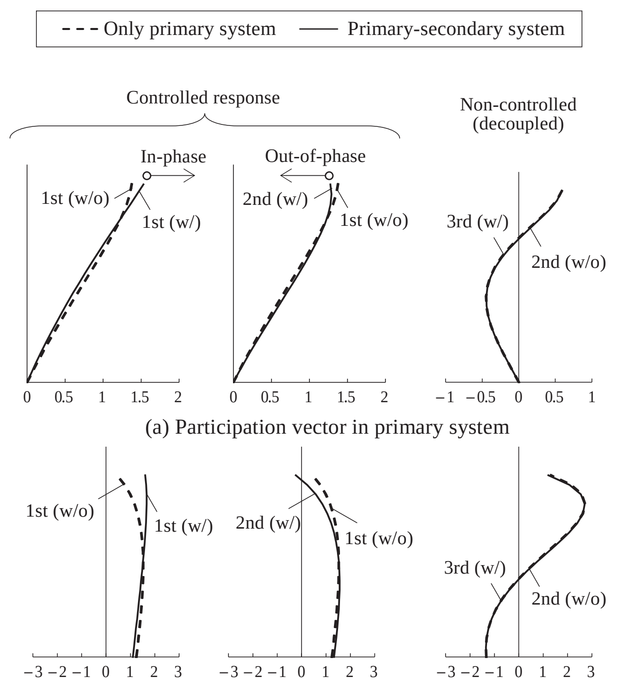
$$\gamma = \frac{\omega_s}{\omega_p}, \quad h_s = \frac{c_s}{2m_s\omega_s} \tag{23a, b}$$

ここに， ω_s は副系の固有円振動数である。これらの値に関連して，ホワイトノイズを地動入力する場合の主系の 2 乗平均変位を最小化する最適同調比 γ^* と最適減衰定数 h_s^* は，それぞれ以下となる [3]。

$$\gamma^* = \frac{\sqrt{1-\bar{\mu}/2}}{1+\bar{\mu}}, \quad h_s^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{\mu}\left(1-\bar{\mu}/4\right)}{\left(1+\bar{\mu}\right)\left(1-\bar{\mu}/2\right)}} \tag{24a, b}$$

4.2 主系単独の系と連成系の刺激関数の比較

一例として，主系の層数 $n=20$, $\tau=0.25$, $\mu=0.05$, $\gamma=\gamma^*$ の条件を用いて，減衰項を無視した実固有値解析により得られた連成系の刺激関数を Fig. 3 に示す。主系単独の刺激関数の形状と比較しやすいよう，副系を無視して仮想の刺激関数を算定した。副系の存在により分岐した 2 つの刺激関数（Fig. 3(a)の 1st(/w)と 2nd(/w)）と主系単独の刺激関数の形状は，概ね相似である。しかし，Fig. 3(b) に示すように，層間変位に対応する刺激関数の勾配は大きく異なる。軒高の半分の高さを基準にして，その上下で刺激関数の変化の正負が逆転する。 特に，上層階での刺激関数の変化は大きい。主系と副系が同



(a) Participation vector in primary system

(b) Slope of participation vector in primary system

(Notes) w/o: Only primary system,　w/: Primary-secondary system

Fig. 3 Typical vibration modes in optimal tuning condition

位相となる連成系の 1 次では， 主系の上部で層間変位が大きく，逆位相となる連成系 2 次では，主系の上部で層間変位が小さい。連成系 3 次モードでは，主系と副系の相互作用は小さく，刺激関数およびその勾配の変化は，主系単独と連成系の結果はほぼ一致している。

５．縮約モデルから復元した最大応答分布の精度

5.1　検討条件

これまでの準備を経て，本論文の主題である縮約モデルによる応答精度を評価する。

副系については，同調比 γ を指定して，$k_s = m_s(\gamma\omega_p)^2$ で算定する。γ は 0 から $2\gamma^*$ の範囲とする。範囲を広くした理由は，主系の弾性固有周期に同調する副系では，主系の降伏後に同調比 γ が大きくなることや，中間階免震建物のように必ずしも最適同調比とならない場合を想定したからである。副系の減衰係数 c_s は，減衰定数を h_s を用い，対象とする構造物に応じて下記のように設定する。

$$c_s = 2m_s h_s^*(\gamma^*\omega_p) \quad \text{for tuned mass damper} \quad (\mu \le 0.1) \qquad (25a)$$

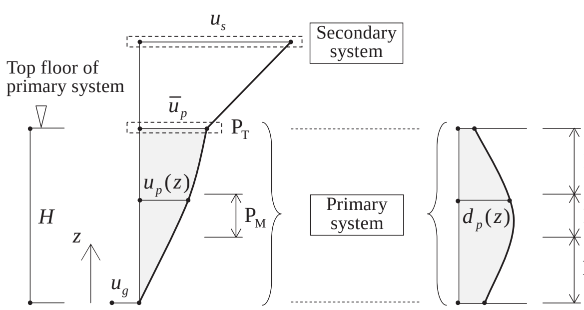
$$c_s = 2m_s h_s^*\omega_s \quad \text{for mid-story isolation building} \qquad (25b)$$

式(25a)と式(25b)の設定条件で大きく異なる点は，同調比 γ を変動させた場合に，副系の減衰係数 c_s を共に変動させるか否かである。

入力は，パワースペクトル密度が一定の地動であり，2.2 節で述べた方法により応答を算出する。評価項目は，副系の水平変位 u_s，非制振モードの応答成分を除去した主系の水平変位 u_p および主系の層間変位 d_p である。これらの 2 乗平均平方根を評価し，次式で定義される比率を算定する。

$$(\text{比率}) = \frac{\text{縮約モデルの応答 (2DOF)}}{\text{元の多質点系モデルの応答 (MDOF)}} \qquad (26)$$

主系の応答については，Fig. 4 および Table 1 に示すように，高さ方向に分割したそれぞれで，式(26)の比率の最大値と最小値をその区間の誤差の代表値として示す。



(a) Floor displacement　　(b) Inter-story drift

Fig. 4 Responses of interest in terms of accuracy

Table 1 Items of evaluation

Case	Items of evaluation	Description (range)	Notation
S	Displacement of secondary system	-	$\sqrt{\langle u_s^2 \rangle}$
P_T	Floor displacement of primary system	Top floors	$\sqrt{\langle u_p^2 \rangle}$
P_M		$z/H \in (3/8, 5/8]$ (middle)	
D_U	Inter-story drift of primary system	$z/H \in (5/8, 1)$ (upper)	$\sqrt{\langle d_p^2 \rangle}$
D_M		$z/H \in (3/8, 5/8]$ (middle)	
D_L		$z/H \in (0, 3/8]$ (lower)	

5.2　同調質量ダンパーを有する建物

屋上に TMD を有する超高層鋼構造建物を想定し，$n = 20$ および $h_p = 0.02$ とする。この条件の結果を Fig. 5 に示す。各図の応答種別を表す記号（S, P_T, P_M, D_U, D_M, D_L）は，Table 1 の符号と対応する。上層階の層間変位（符号 D_U）を除いて，縮約モデルによる応答の相対誤差は概ね 10%以内である。特に，$\gamma \le \gamma^*$ では誤差は極めて小さい。$\gamma > \gamma^*$ では，主系と副系ともに，質量比が大きなほど誤差が大

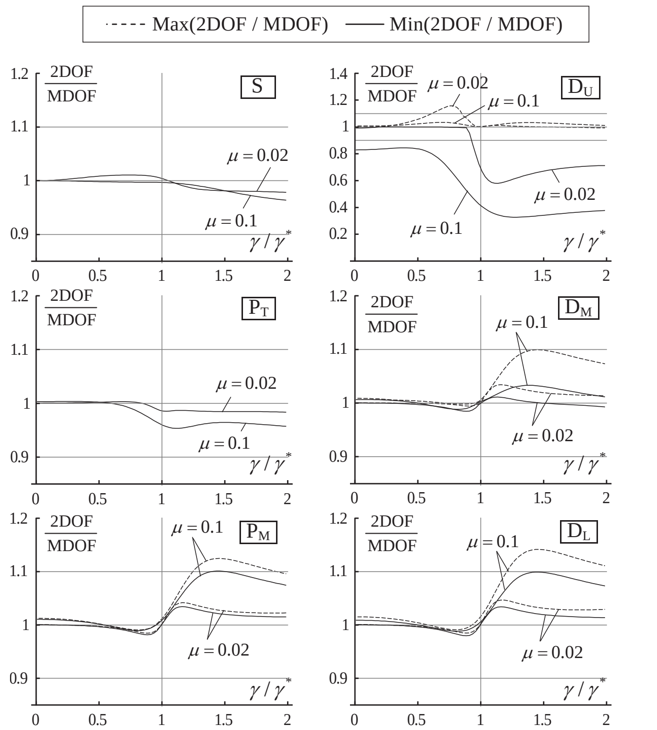


Fig. 5 Errors in responses computed by 2-DOF model with optimal TMD parameters

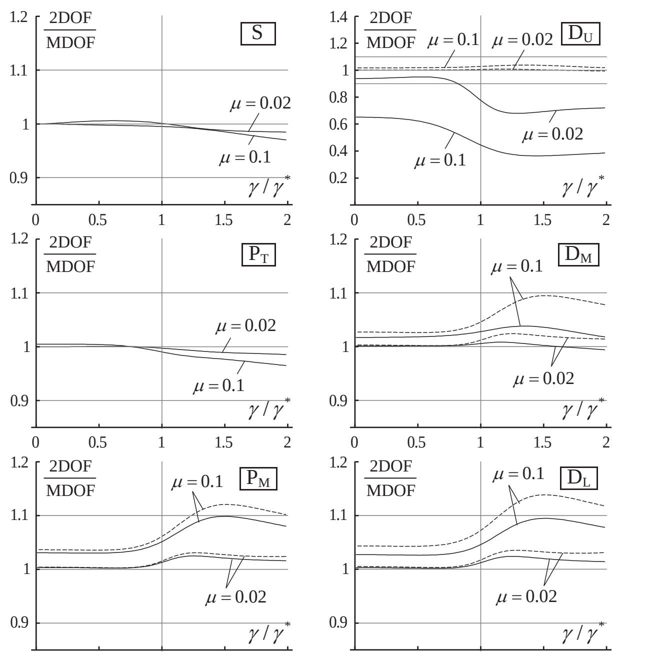
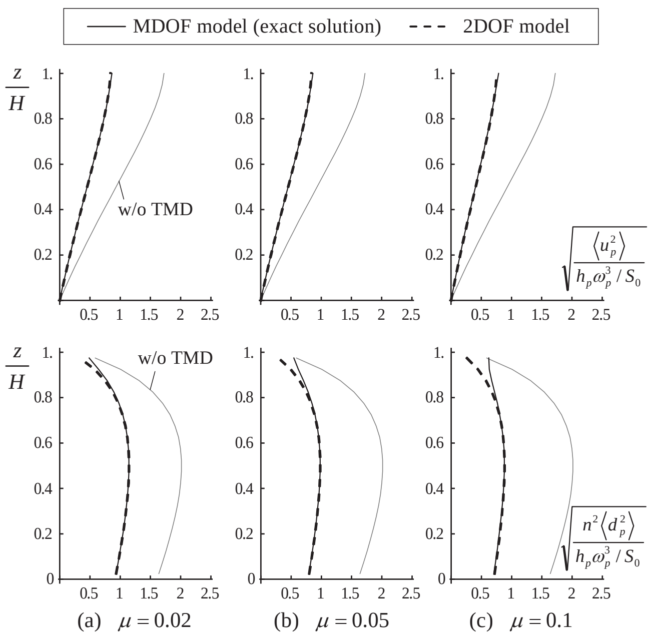


Fig. 6 Errors in responses computed by 2-DOF model with highly damped TMD

きい。応答の種類の中では，主系頂部の水平変位（符号 P_T）や副系の水平変位（符号 S）の誤差が最も小さい。これは，式(2)で多自由度系を動的縮約する際に導入した仮定が妥当なことを示している。このことから，縮約モデルにより得られる代表変位（符号 S, P_T）から層間変位を復元する段階で何かしらの工夫をすれば，精度の悪い上層部での主系の層間変位について，精度を改善できる可能性がある。これについては，第 6 章で触れる。

また，Fig. 6 は，$\mu = 0.02$ に対して $h_s = 3h_s^*$（約 0.3），$\mu = 0.1$ に対して $h_s = 2h_s^*$（約 0.4）を設定し，副系の減衰係数を高めた場合である。$\gamma > \gamma^*$ の範囲では，Fig. 5 と傾向は良く類似している。

応答分布の理解を深めるために，最適同調条件（$\gamma = \gamma^*, h_s = h_s^*$）での縮約モデルと多自由度系モデルの応答分布を Fig. 7 に示す。主系の変位については，両モデルで良く一致している。層間変位については，主系の軒高で基準化した高さでいえば，0.7 程度の高さを境にして，2 つのモデルの結果が剥離していく様子がわかる。



(Above: floor displacement, Below: inter-story drift)

Fig. 7 Recovery of peak responses in optimal tuning condition

5.3 同調質量ダンパーを有する高減衰系の建物

つぎに，主系の減衰定数が高い場合の縮約モデルの応答精度を分析する。これは，主系に層間ダンパーがある場合や，主系の応答が弾性限を超えて履歴減衰が生じる場合を想定したものである。これらを統合して，主系の（等価）減衰定数 h_p を 0.2 とする。

前節と同種の結果を Fig. 8 に示す。この場合も，副系の水平変位（符号 S）や主系頂部の変位（符号 P_T）の精度は高い。その他の応答では，Fig. 5 の傾向と若干異なるものの，$\gamma > \gamma^*$ の範囲においては，誤差は概ね 10%以内である。主系の上層階の層間変位の精度が良くない理由は，前節で述べた内容と同じである。

5.2 節と本節の内容を総論すれば，主系に対する副系の質量比 μ が 0.1 以下であれば，上層階の層間変位を除いて，相対誤差は高々5～10%以下である。工学的判断に立脚すれば，縮約モデルによる応答推定は十分な精度を有しているといえる。

5.4 中間階免震建物

最後に，高層階に免震層を有する超高層鋼構造建物を対象とし，$n = 20$，$h_p = 0.02$ する。また，質量比 μ を 0.5，最下層に対する最上層の剛性比 τ を 0.6 とする。

質量比 μ が 0.1 以下の場合に比べて，全般的に誤差は大きい。ただし，中間階免震においては，下部構造単独の固有周期が極端に長

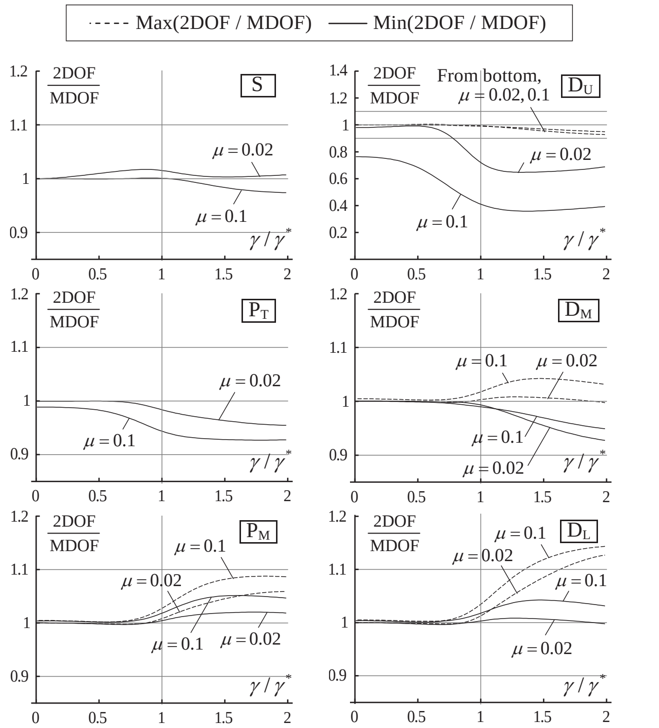


Fig. 8 Errors in responses computed by 2-DOF model for damped buildings with TMD (h_0=0.2, h_s=h^*_s)

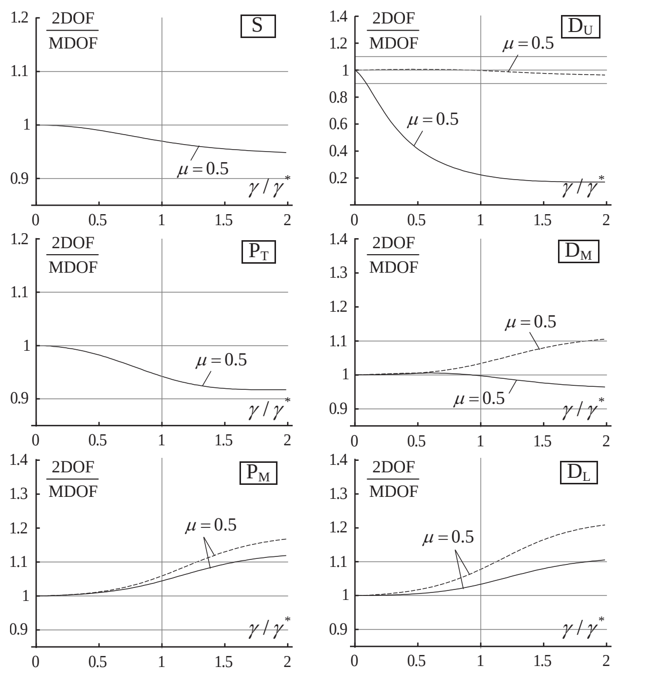


Fig. 9 Errors in computing responses for mid-story isolation buildings (h_0=0.02, h_s=h^*_s)

くない限り，γ/γ^* が 2 に近くなることはない。この点から，縮約モデルの応答（符号 S, $\mathrm{P_T}$）の誤差は，上層階の層間変位を除いて，概ね 10%以内といえる。

6．副系による主系の局部変形を考慮した層間変位分布の復元

6.1 実固有モードを用いた CQC 法による層間変位の精度

同調比がその最適値よりも大きい場合を対象として，層間変位分布の復元方法の改善を考える。

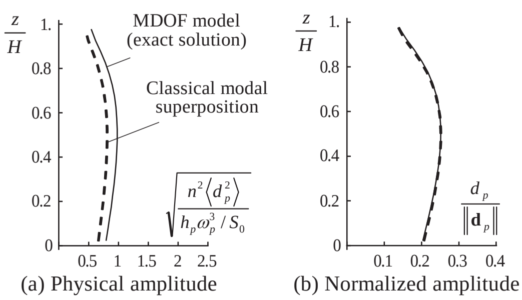
最も直接的な戦略は，縮約モデルの利用を TMD や免震層の剛性等の決定に限定することである。その後で層間変位を照査する際には，改めて多自由度系モデルで振動解析すればよい。これとは別に，著者による応答指定型設計法 [3), 4)]では，応答スペクトル法の利用を基本としており，多自由度系についても一貫して応答スペクトル法を適用する場合，複雑な方法になる。それは，局所減衰および近接固有値の特徴を有する系では，複素固有値と複素固有ベクトルを用いた CQC 法 [7)]によるモード重合が必要なためである。

もう一つの戦略が，縮約モデルの代表応答を利用しつつ，層間変位の復元段階で工夫をして精度を高めるものである。その方法を示す前に，古典的なモード重合で生じる課題を整理しておく。

まず，制振モードを含む j 次モードの減衰定数 h_j は，以下のように，対角要素による略算法 [8)]で十分な精度の値が推定できる。

$$h_j \approx \frac{\boldsymbol{\phi}'^T_{ps,j}\mathbf{C}\boldsymbol{\phi}'_{ps,j}}{2\omega_j\boldsymbol{\phi}'^T_{ps,j}\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}'_{ps,j}} \quad \text{for} \quad j=1,2,\ldots,n+1 \tag{27}$$

ここに，$\boldsymbol{\phi}'_{ps}$ は式(1)の連成系の固有値問題における実固有ベクトルである。式(27)の評価値は，第 5 章の計算条件で，複素固有値解析によるモード減衰定数との相対誤差が概ね 10%以内であることを確認している。式(27)の減衰定数と連成系の実固有モードの 2 つを用いて，5.1 節の条件で $\mu = 0.05$ のとき，CQC 法によりモード重合した例が Fig. 10(a)である。層間変位分布の形状は概ね対応しているが，絶対値の精度が全層に渡り悪い。振幅の L2 ノルムを正規化した Fig. 10 (b)をみると，2 つの結果は良く対応している。そこで，CQC 法による層間変位の振幅を一律に係数倍すれば良いことがわかる。



(a) Physical amplitude (b) Normalized amplitude

Fig. 10 Inter-story drift based on classical modal superposition

6.2 層間変位分布の補正方法の提案

6.1 節の議論を踏まえ，具体的な層間変位の評価法を示す。ここで述べる方法は，恣意的ではあるものの，実務での利用を考えて簡便な方法を目指したものである。

まず，主系の変位振幅の調整係数 c を導入し，連成系の 2 つの基本モード（λ 次と $\lambda+1$ 次）を用いて，変位が次式で表せるとする。

$$\delta\mathbf{u}_p = c\sum_{j=\lambda}^{\lambda+1}\beta'_j\,\boldsymbol{\phi}'_j q'_j \tag{28}$$

ここに，$\boldsymbol{\phi}'$ は連成系の実固有ベクトル $\boldsymbol{\phi}'_{ps}$ の主系部を抜き出した値であり，β' は対応する刺激関数である。6.1 節で示した例は，$c=1$ とした場合の結果に相当する。式(28)の分散共分散応答を求めると，

$$\left\langle \delta\mathbf{u}_p\delta\mathbf{u}_p^T\right\rangle = c^2\sum_{i=\lambda}^{\lambda+1}\sum_{j=\lambda}^{\lambda+1}\beta'_i\beta'_j\left\langle q'_i q'_j\right\rangle\boldsymbol{\phi}'_i\otimes\boldsymbol{\phi}'_j \tag{29}$$

となる。ここで，第 5 章の知見を踏まえると，縮約モデルの水平変位は，近似的に次式で推定できる。

$$\left\langle \delta\mathbf{u}_p\delta\mathbf{u}_p^T\right\rangle \approx \beta_\lambda^2\left\langle q_\lambda^2\right\rangle\boldsymbol{\phi}_\lambda\otimes\boldsymbol{\phi}_\lambda \tag{30}$$

式(29)の右辺と式(30)の右辺を等置する。この式に $(\mathbf{M}_p\boldsymbol{\phi}_\lambda)^T$ を左乗し，さらに $\mathbf{M}_p\boldsymbol{\phi}_\lambda$ を右乗すると，未知数 c は，次式から求められる。

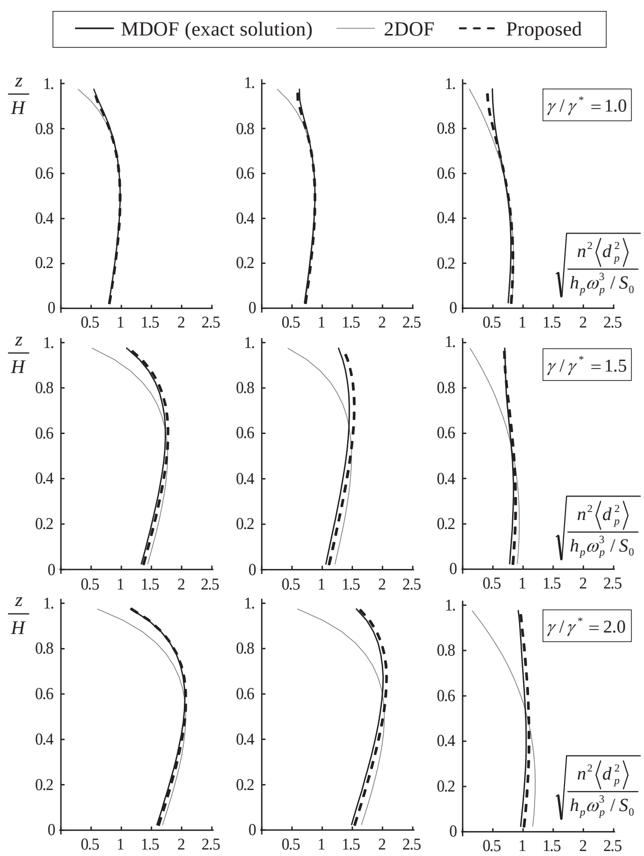
$$c = \frac{\beta_\lambda\sqrt{\left\langle q_\lambda^2\right\rangle}}{R} \tag{31a}$$

$$R^2 = \sum_{i=\lambda}^{\lambda+1}\sum_{j=\lambda}^{\lambda+1}\rho_{ij}\hat{\beta}_i\hat{\beta}_j\sqrt{\left\langle q_i'^2\right\rangle}\sqrt{\left\langle q_j'^2\right\rangle}\,, \quad \hat{\beta}_i = \beta'_i\boldsymbol{\phi}_\lambda^T\mathbf{M}_p\boldsymbol{\phi}'_i \tag{31b, c}$$

式(31b)に含まれる相関係数 ρ_{ij} は，式(27)のモード減衰定数と実固有値解析による固有振動数から算定する。こうして，精度を向上した層間変位分布を得ることができる。

6.3 妥当性の検証

提案した方法の妥当性を検証する。5.1 節と同じ条件の主系・副系で，式(29)と式(31)により層間変位を算定した結果を Fig. 11 に示す。主系頂部の精度が問題であった点が，改善されていることがわ



(a) $\mu=0.05$ (b) $\mu=0.1$ (c) $\mu=0.5$

Fig. 11 Accuracy of peak inter-story drifts by proposed method

かる。それだけでなく，主系下半分における層間変位の精度も改善されている。なお，γ/γ^* が 1 より小さく連成系効果が小さい場合，精度があまり改善されないことも認められた。しかしながら，この場合には,誤差が生じる主系の上層階での層間変位が極端に小さい。そのため，実際には，この点は問題にならないであろう。

７．まとめ

本論文では，同調質量ダンパー（TMD）を屋上に有する建物や中間階免震建物を対象として，これらを主系と副系から成る連成系に一般化し，不規則振動解析により，この自由度を縮約した地震応答解析モデル（縮約モデル）による応答の統計的な誤差を分析した。

得られた結論を以下に要約する。

1) 連成系における主系の 2 つの基本振動モードは，いずれも主系単独の振動モードの形状に近い。しかしながら，層間変位を評価する際に用いる振動モードの勾配は，副系の接続により大きく変化する。この変化は，下層から中層にかけては小さく，上層で大きい。最も変化が大きいのは，最上層である。
2) 不規則振動過程を支配する Lyapunov 方程式から求まる主系の 2 乗平均応答を用いて，制振モードの成分を抽出する方法を示した。この方法により制振モードの応答を分析した結果，副系との相互作用力により，主系頂部の層間変位が局所的に増大する現象が認められた。
3) 縮約モデルにより評価された副系の水平変位や主系頂部の水平変位は，もとの多自由度系の値と良く一致する。主系に対する副系の質量の比が大きいほど，誤差は大きくなる。TMD を想定した質量比での誤差は 5%以内，中間階免震を想定した質量比での誤差は 10%以内である。層間変位については，上層階の一部を除いて，誤差は概ね 10%以内である。
4) モード減衰定数と連成系の実固有ベクトルを用いた CQC 法によるモード重ね合わせ法では，上記の 2)項で述べた，上層階で局部的に変形を伴う層間変位分布を適切に捉えられるものの，層間変位が全体的に過小評価となる。
5) 4)の問題点を解決するために,実固有ベクトルを用いた CQC 法に 2 自由度系の水平変位分布の結果を組み合わせた方法を提案し，主系の上層階の応答精度が改善されることを確認した。

本報では，趣旨を明確にするため 2 自由度系に限定し，副系は 1 自由度系で表されるとした。超高層建物の中間階免震において，副系の振動モードが主系の応答に及ぼす影響は大きくないと考えられるものの，その程度を明らかにすることは今後の課題とする。

謝辞

本研究は，JSPS 科研費 JP17K14756（研究代表者：金子健作）の助成を受けたものです。

参考文献

1) K. Murakami, H. Kitamura, and Y. Matsushima: The prediction for seismic response of the two-mass model with the mid-story isolation system, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), No. 549, pp. 51-58, 2001.11
村上勝英，北村春幸，松島豊: 2 質点系中間免震構造モデルの地震応答予測，日本建築学会構造系論文集, No. 549, pp. 51-58, 2001.11
2) D. Nakamizo, T. Asakawa, and Y. Koitabashi: Consideration and design example of the reduction effect of acceleration response by the TMD effect of the intermediate-isolated skyscraper Part1: Formulation and verification 2 point-masses system with using hysteresis damper and viscous damper, Summaries of Technical Papers of Annual Meeting, Architectural Institute of Japan, B-2, pp. 697-698, 2016.8
中溝大機，朝川 剛，小板橋裕一: 超高層中間層免震構造物の TMD 効果による加速度応答低減効果の考察と設計事例 その 1 履歴系・粘性系ダンパーを併用する 2 質点系中間層免震構造物の定式化と検証，日本建築学会大会学術講演梗概集, B-2, pp. 697-698, 2016.8
3) K. Kaneko: Multipurpose passive control of mid-story isolation buildings designed to mitigate seismic response in substructure, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), No. 718, pp. 1869-1879, 2015. 12
金子健作: 下部構造の変位低減に着目した中間層免震構造の多目的地震応答制御，日本建築学会構造系論文集, No. 718, pp. 1869-1879, 2015. 12
4) K. Kaneko: Performance-based design of tuned mass damper mounted on rooftop of buildings considering type of seismic ground motions, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), No. 730, pp. 2057-2067, 2016. 12
金子健作: 地震動の経時特性および周期特性を考慮した同調質量ダンパーの応答指定型設計法, 日本建築学会構造系論文集, No. 730, pp. 2057-2067, 2016. 12
5) Y. K. Lin: Probabilistic Theory of Structural Dynamics, Krieger, 1967
6) A. Der Kiureghian: Structural response to stationary excitation, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol.106, pp.1195-1213, 1980.11
7) R. Shinha and T. Igusa: CQC and SRSS methods for non-classically damped structures, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 24, pp. 615-619, 1995
8) A. Shibata: Saishin taishin kozo kaiseki, Morikita Publishing, 2014
柴田明徳: 最新耐震構造解析 第 3 版，森北出版, 2014

付録１　制振モード抽出における最小値問題の解法

式(19)の最小値問題を解く方法の一例を示す。

はじめに，主系と副系の相互作用が無視できる $\gamma \approx 0$ の条件から計算を始める。初期値を次のように定め，

$$\boldsymbol{\varphi} \leftarrow \boldsymbol{\phi}_\lambda \tag{A-1a}$$

$$\left\langle Q^2 \right\rangle \leftarrow \left(\mathbf{M}_p \boldsymbol{\phi}_\lambda\right)^T \mathbf{V}_p \left(\mathbf{M}_p \boldsymbol{\phi}_\lambda\right) \tag{A-1b}$$

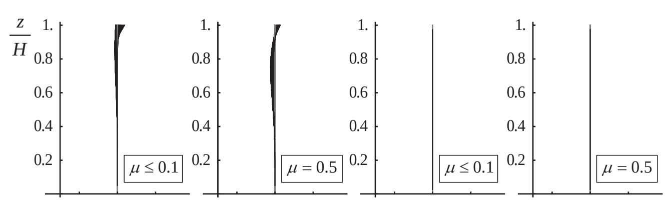
逐次二次計画法により，$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2$ の最小値を得る未知数 $\left\langle Q^2 \right\rangle, \boldsymbol{\varphi}$ を求める。つぎに，γ をわずかに増分させ計算する。このときには，直前の計算で得られた $\left\langle Q^2 \right\rangle, \boldsymbol{\varphi}$ を新しい γ の計算での初期値に用いる。この手順を繰り返せばよい。

付録２　抽出した制振モードの妥当性の検証

3.2 節で説明した制振モードの抽出方法の妥当性を検証する。その目的のために，抽出した制振モードの応答と非制振モードの応答を加算した結果が，元の応答と一致（$\mathbf{V}'_p$ と $\mathbf{V}_p$ が一致）しているかを判断する。ここでは，そのすべての成分に着目はせず，水平変位の 2 乗平均（$\mathbf{V}'_p$ の対角成分の平方根）と層間変位の 2 乗平均（$\mathbf{D}^T\mathbf{V}'_p\mathbf{D}$ の対角成分の平方根）に関心を向ける。

Fig. A-1 に結果を示す。主系の基準化高さを縦軸にとり，横軸は前述した 2 乗平均応答の比である。分子は $\mathbf{V}_p$ から算出した値，分母は $\mathbf{V}'_p$ から算出した値である。一つの図には，$h_p = 0.02$，$\gamma/\gamma^* \in (0, 2]$，$h_s/h_s^* \in \{1, 2\}$ の多数の結果を重ね書きしている。式(19)は，層間変位の誤差を最小化する条件であるにも拘らず，水平変位の誤差も小さい。誤差が若干生じる原因としては，非制振モードでは完全な非連成仮定としていること，相関係数を与える際に制振モードのモード減衰定数を副系なしの値としていることなどが考えられる。

以上から，制振モードの応答成分の抽出手順は妥当であるといえる。なお，$\mathbf{V}_p$ をスペクトル分解して第一固有値と固有ベクトルを制振モードと見做す場合，これに非連成モードを加算しても，もとの結果とは一致しない。



(a) Floor displacement　(b) Inter-story drift
Fig. A-1 Accuracy of responses through modal decomposition

METHODOLOGY FOR RECOVERY OF INTER-STORY DRIFT FROM MODAL RESPONSE OF 2-DOF MODEL IN PRIMARY-SECONDARY SYSTEM

Kensaku KANEKO *

* Assist. Prof., School of Environment and Society, Dept. of Architecture and Building Engineering, Tokyo Institute of Technology, Dr.Eng.

A two degree-of-freedom (2-DOF) model is employed for mid-story isolation buildings or a tuned mass damper mounted on buildings in practical design. These systems are classified into a primary-secondary structural system. A seismic response analysis using this model is an empirical evaluation method in design practice. However, the accuracy of the peak response distribution computed by the 2-DOF model has not been clarified.

The objective of this study is to investigate the error in the inter-story drift calculated by the 2-DOF model. The employed 2-DOF model is derived from its original multi-degree of freedom system (MDOF) based on dynamic reduction technique. Parameters of interest are a tuning ratio and mass ratio. The tuning ratio is a frequency ratio to secondary to the primary system. The mass ratio is a ratio of the secondary mass to the effective mass of the primary system. The mass ratio is set within the parameter of 0.02 to 0.5. The inter-story drifts in primary system are recovered from generalized displacements (modal displacements) of the 2-DOF model and classical modal vectors with respect to the primary system.

A stochastic vibration analysis is conducted in both original MDOF model and corresponding the 2-DOF model. RMS responses are obtained by solving a Lyapunov equation governing the stochastic process. The displacement responses of the MDOF model are decomposed into coupled and decoupled components. The decoupled components are the higher modal responses. The coupled component is the remaining response and corresponds to a controlled response. The controlled mode is limited to the fundamental mode in this study. The response of the controlled mode is compared to the one from the 2-DOF model. The analysis reveals that the 2-DOF model estimates accurate floor displacements. The relative errors are ten percent at most. However, the 2-DOF model underestimates inter-story drifts in the upper story of the primary system. As the mass ratio becomes larger, the error becomes large.

A convenient modal superposition technique is proposed to improve the accuracy of inter-story drift obtained by the 2-DOF model. The method is as follows. The CQC modal combination is applied with modal damping factors evaluated by classical modal vectors. Then, amplitude of the response is slightly corrected to be consistent with the one obtained from the MDOF model. It is confirmed that reasonable accuracy is obtained by the proposed method.

（2017年6月9日原稿受理，2017年8月28日採用決定）