論文 / 著書情報
Article / Book Information

論題(和文)	1質点系モデルを対象としたアクティブ制御の等価モデルの構築 （その1：LQR重み関数の構造特性・振動特性への影響）
Title(English)	
著者(和文)	陳引力, 佐藤大樹, 宮本皓, 余錦華
Authors(English)	Yinli Chen, Daiki Sato, Kou Miyamoto, Jinhua SHE
出典 / Citation	日本建築学会関東支部研究報告集, Ｉ, , pp. 381-384
Citation(English)	, Ｉ, , pp. 381-384
発行日 / Pub. date	2018, 3

2017年度日本建築学会
関東支部研究報告集 I
2018年3月

1 質点系モデルを対象としたアクティブ制御の等価モデルの構築

（その 1：LQR 重み関数の構造特性・振動特性への影響）

構造ー振動　　正会員　○陳引力 *1　　正会員　佐藤大樹 *2
〃　　宮本晧 *3　　〃　　余錦華 *4

アクティブ制御　LQR　リカッチ方程式
1 質点系　等価モデル

1. はじめに

近年では，建築物へのアクティブ制御を応用するケースが増えている [1)~3)]。アクティブ制御の応用により，地震と風の，異なる種類の外乱に対して従来のパッシブ制御より更なる制御性能を得る研究も報告されている [4)~5)]。

免震構造とアクティブ制御を併用する研究について，宮本らはアクティブ制御の設計に Linear Quadratic Regulator（以下，LQR）[例えば 6)]を用いた際の，コントローラ設計の重み関数設定方法の検討を行い，建築物の振動制御に重要な絶対加速度と層間変位を抑えるための重み関数の選択方法についての考察を行った [7)~8)]。さらに，筆者らにより，アクティブ制御と免震構造を併用した際の免震構造の設計方法に関する考察が行われ，免震周期ごとの必要最大制御入力・エネルギーについての分析が行われた [9)]。これにより，免震周期を短くすることにより，アクティブ制御に用いる最大制御入力を減らすことが可能になる一方で，制御入力のエネルギーに関しては，免震周期を長くすることで，使用するエネルギーを減少させることが可能であると示された。しかし，これらの研究は LQR の重み関数による構造特性の影響を理論的には解明しておらず，重み関数の設定方法が不明瞭である。一方で，建築物の耐震または耐風性能を評価する場合，一般的には等価剛性や等価減衰係数が用いられることが多い [例えば 10)]。パッシブタイプに比べて，アクティブ制御が建築物に適用されにくい原因の 1 つとして，コントローラの設計が系の剛性や減衰係数に及ぼす影響が陽な形で表現されないためであると著者らは考えている。藤谷らは 1 質点系のセミアクティブ制御を対象として，コントローラ設計の際に選択する LQR の重み関数が制御後の動特性に与える影響を理論的に解明した [11)]。しかし，藤谷らが用いたモデルは減衰を考慮していないことから，適用範囲が非常に限定されている。

従って，本報では減衰を考慮した 1 質点系モデルを対象にし，LQR の重み関数がモデルの構造特性に与える影響についての考察を行い，アクティブ制御の応用による，系の等価剛性や等価減衰係数を明らかにする（Fig. 1 参照）。

本報その 1 では，アクティブ制御を有するモデル（以下，アクティブモデル）の等価モデルの構造要素を計算する。

2. 制御対象モデルの概要

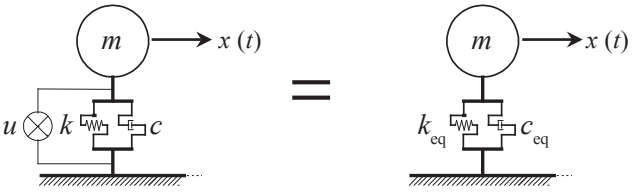
本報では 1 質点系モデルを構築し，制御系の性能評価を行う。本報で 1 質点系を用いる理由は多質点系アクティブモデルの後述のリカッチ代数方程式の理論解を求めることが難しいためである [6)]。アクティブモデルの概要を Fig. 1 に示す。質量 m は式(1)によって与えられ，剛性要素 k と減衰係数 c は線形のバネとダッシュポットによってモデル化され，それぞれ式(2)と式(3)によって与えられる。上述の 1 質点系モデルにアクティブ装置を設置する。

$$m = \rho \cdot B \cdot D \cdot H \tag{1}$$

$$k = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T^2} \tag{2}$$

$$c = 2\zeta\sqrt{m \cdot k} \tag{3}$$

ここに，ρ：密度，T：固有周期，ζ：減衰率，H：モデルの高さ，B：モデルの幅，D：モデルの奥行きである。



(a)　Active model　　(b)　Equivalent model

Fig. 1　SDOF model with active control

3. 制御系の構築

アクティブモデルの運動方程式を式(4)に示す。

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = d(t) + u(t) \tag{4}$$

ここに，$x(t)$：モデルの応答変位，$d(t)$：外乱入力，$u(t)$：制御入力である。

アクティブ制御システムの設計は，フィードバック制御に基づく制御系を構築するために，アクティブモデルの運動方程式を以下の状態方程式にする。

$$\dot{z}(t) = Az(t) + B_u u(t) + B_d d(t) \tag{5}$$

ここに，$Z(t)$：状態ベクトル，A：システムマトリックス，B_u：制御入力ゲイン，B_d：外乱入力ゲイン。z，A，B_u，B_d は式(6)による。

$$z(t)=\begin{bmatrix}x(t) & \dot{x}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\quad A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m}\end{bmatrix} \tag{6a, b}$$

$$B_u=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{m}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\quad B_d=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{m}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{6c, d}$$

コントローラの設計は以下の LQR 評価関数 J を用いる。

$$J=\int_0^{\infty}\left\{z(t)^{\mathrm{T}}Qz(t)+u(t)^{\mathrm{T}}Ru(t)\right\}dt \tag{7}$$

ここで，$R:u$ に対する重み関数で，正のスカラーである。$Q:Z$ に対する重み関数で，半正定マトリックスであり，式(8)による。

$$Q=\begin{bmatrix}q_1 & 0\\ 0 & q_2\end{bmatrix} \tag{8}$$

評価関数 J によって，設計されたコントローラは以下の状態フィードバック制御則を持つ (Fig.2)。

$$u(t)=K_P\,Z(t) \tag{9}$$

ここに，K_P はコントローラゲインであり，式(10)による。

$$K_P=-R^{-1}B_u^{\mathrm{T}}P \tag{10}$$

ここで，P は式(11)のリカッチ代数方程式の解であり，半正定対称マトリックスである [12)]。

$$A^{\mathrm{T}}P+PA+Q-PB_uR^{-1}B_u^{\mathrm{T}}P=0_{2\times 2} \tag{11}$$

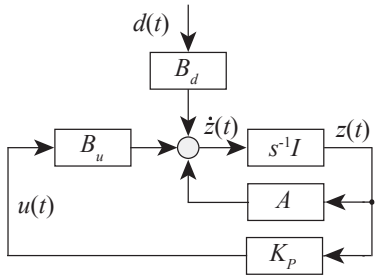


Fig. 2　Block diagram of control system

4.　リカッチ方程式の解とコントローラゲイン

4.1　リカッチ方程式の解

リカッチ代数方程式の解 P は対称マトリックスであるため，式(12)のように仮定する。

$$P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix} \tag{12}$$

式(6)，式(8)，式(12)を式(11)に代入すると，式(13)になる。

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{k}{m}\\ 1 & -\dfrac{c}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}q_1 & 0\\ 0 & q_2\end{bmatrix}\\ &-\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{1}{m}\end{bmatrix}\frac{1}{R}\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{13}$$

式(13)を整理すると，式(14)が得られ

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}-2\dfrac{k}{m}p_{12}+q_1-\dfrac{p_{12}^2}{Rm^2} & p_{11}-\dfrac{c}{m}p_{12}+\dfrac{k}{m}p_{22}-\dfrac{p_{12}p_{22}}{Rm^2}\\ p_{11}-\dfrac{c}{m}p_{12}+\dfrac{k}{m}p_{22}-\dfrac{p_{12}p_{22}}{Rm^2} & 2p_{12}-2\dfrac{c}{m}+q2-\dfrac{p_{22}^2}{Rm^2}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{14}$$

さらに，式(14)を展開すると，式(15)となる。

$$-2\frac{k}{m}p_{12}+q_1-\frac{p_{12}^2}{Rm^2}=0 \tag{15a}$$

$$2p_{12}-2\frac{c}{m}+q2-\frac{p_{22}^2}{Rm^2}=0 \tag{15b}$$

$$p_{11}-\frac{c}{m}p_{12}+\frac{k}{m}p_{22}-\frac{p_{12}p_{22}}{Rm^2}=0 \tag{15c}$$

式(15a)を p_{12} について解くと，式(16)になる。

$$p_{12}=-mkR\pm\sqrt{m^2k^2R^2+m^2Rq_1} \tag{16}$$

式(15b)を p_{22} について解くと，式(17)となる。

$$p_{22}=-mcR\pm\sqrt{m^2c^2R^2+2m^2Rp_{12}+m^2Rq_2} \tag{17}$$

式(15c)を p_{11} について解くと，式(18)が得られる。

$$p_{11}=\frac{c}{m}p_{12}+\frac{k}{m}p_{22}+\frac{p_{12}p_{22}}{m^2R} \tag{18}$$

なお，P は半正定マトリックスであるため，式(19)の条件を満たす。

$$p_{11}>0,\quad p_{22}>0,\quad p_{11}\cdot p_{22}>p_{12}^2 \tag{19}$$

$p_{22}>0$ を満たすために，式(17)のルートの前の符号は+しか取れない。さらに，ルート内が $q_2=0$ の時においても mcR より大きい必要がある。そのためには，p_{12} は必ず正でなければならない。同様に，$p_{12}>0$ を満たすために，式(16)のルートの前の符号は+しか取れない。そのため，式(16)と式(17)が式(20a)と式(20b)になる。以上の条件から p_{12} と p_{22} は以下のようになる。

$$p_{12}=-mkR+\sqrt{m^2k^2R^2+m^2Rq_1} \tag{20a}$$

$$p_{22}=-mcR+\sqrt{m^2c^2R^2+2m^2Rp_{12}+m^2Rq_2} \tag{20b}$$

4.2　コントローラゲインの導出

式(6c)と式(12)を式(10)に代入すると，式(21)になる。

$$\begin{aligned}K_P&=-R^{-1}B_u^{\mathrm{T}}P\\ &=-\frac{1}{R}\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\\ &=-\frac{1}{R}\begin{bmatrix}\dfrac{p_{12}}{m} & \dfrac{p_{22}}{m}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-\dfrac{p_{12}}{mR} & -\dfrac{p_{22}}{mR}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}k-\sqrt{k^2+q_1\dfrac{1}{R}} & c-\sqrt{c^2+2p_{12}\dfrac{1}{R}+q_2\dfrac{1}{R}}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}K_{P,1} & K_{P,2}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{21}$$

ここに，$K_{P,1}$ と $K_{P,2}$ は式(22)による。

$$K_{P,1}=k-\sqrt{k^2+q_1\frac{1}{R}} \tag{22a}$$

$$\begin{aligned}K_{P,2}&=c-\sqrt{c^2+2p_{12}\frac{1}{R}+q_2\frac{1}{R}}\\ &=c-\sqrt{c^2+2\left(-mkR+\sqrt{m^2k^2R^2+m^2Rq_1}\right)\frac{1}{R}+q_2\frac{1}{R}}\\ &=c-\sqrt{c^2-2mk+2\sqrt{m^2k^2+m^2q_1\frac{1}{R}}+q_2\frac{1}{R}}\end{aligned} \tag{22b}$$

式(22a)より，$K_{P,1}$ は剛性 k，重み q_1, R と関係があることがわかる。また，$q_1 = 0$ の時は，$K_{P,1} = 0$ となり，q_1 を大きくすると $K_{P,1}$ の絶対値が大きくなる。R を大きくすると $K_{P,1}$ の絶対値が小さくなる。

式(22b)より，$K_{P,2}$ は減衰係数 c，剛性 k，質量 m，重み q_1, q_2, R と関係があることがわかる。また，$q_1 = q_2 = 0$ の時は，$K_{P,2} = 0$ となる。q_1 もしくは q_2 を大きくすると $K_{P,2}$ の絶対値が大きくなる。ただし，q_1 は二重ルートの中にあるため，$K_{P,2}$ への影響は q_2 よりも小さい。なお，R を大きくすると $K_{P,2}$ の絶対値が小さくなる。

5. アクティブ制御の等価モデル

5.1 制御ありの運動方程式

式(21)を式(9)に代入すると，制御入力 $u(t)$は式(23)で表される。

$$u(t) = K_P z(t) = \begin{bmatrix} K_{P,1} & K_{P,2} \end{bmatrix} z(t) \tag{23}$$

式(23)を式(5)に代入すると，式(24)になる。

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + B_u \begin{bmatrix} K_{P,1} & K_{P,2} \end{bmatrix} z(t) + B_d d(t) \\ &= \left(A + B_u \begin{bmatrix} K_{P,1} & K_{P,2} \end{bmatrix}\right) z(t) + B_d d(t) \end{aligned} \tag{24}$$

式(6)を式(24)に代入すると，式(25)が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{P,1} & K_{P,2} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} d(t) \tag{25}$$

式(25)を整理すると，式(26)になる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{K_{P,1} - k}{m} & \dfrac{K_{P,2} - c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} d(t) \end{bmatrix} \tag{26}$$

さらに，式(26)を展開すると，式(27)となる。

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t) \tag{27a}$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{K_{P,1} - k}{m} x(t) + \frac{K_{P,2} - c}{m} \dot{x}(t) + \frac{1}{m} d(t) \tag{27b}$$

なお，式(27b)は制御ありの運動方程式（式(4)）と同じである。

5.2 等価モデルの構造特性

自由振動を考える時 $d(t) = 0$ となり，式(27b)は式(28)になる。

$$m\ddot{x}(t) + \left(c - K_{P,2}\right)\dot{x}(t) + \left(k - K_{P,1}\right)x(t) = 0 \tag{28a}$$

$$m\ddot{x}(t) + c_{\mathrm{eq}}\,\dot{x}(t) + k_{\mathrm{eq}}\,x(t) = 0 \tag{28b}$$

ここに，c_{eq} と k_{eq} は等価減衰係数と等価剛性係数であり，以下の式(29)で定義される。

$$k_{\mathrm{eq}} = k - K_{P,1}, \quad c_{\mathrm{eq}} = c - K_{P,2} \tag{29a,b}$$

式(22)を式(29)に代入し，式(30)を得る。

$$k_{\mathrm{eq}} = \sqrt{k^2 + q_1 \frac{1}{R}} \tag{30a}$$

$$c_{\mathrm{eq}} = \sqrt{c^2 - 2mk + 2\sqrt{m^2k^2 + m^2 q_1 \frac{1}{R}} + q_2 \frac{1}{R}} \tag{30b}$$

式(30a)より，k_{eq} は剛性 k，重み q_1，R と関係があることがわかる。$q_1 = 0$ の時は，$k_{\mathrm{eq}} = k$ となり，等価モデルの剛性係数 k_{eq} は制御無しモデルの剛性係数 k と一致する。q_1 を大きくすると k_{eq} の値が大きくなる。R を大きくすると k_{eq} は k の値に近づく。

式(30b)より，c_{eq} は減衰係数 c，剛性 k，質量 m，重み q_1, q_2, R より構成されていることがわかる。$q_1 = q_2 = 0$ の時は，$c_{\mathrm{eq}} = c$ となり，等価モデルの減衰係数 c_{eq} が制御無しモデルの減衰係数 c と一致する。q_1 もしくは q_2 を大きくすると c_{eq} の値が大きくなる。ただし，q_1 は二重ルートの中にあるため，c_{eq} への影響が q_2 より小さい。R を大きくすると $K_{P,2}$ の絶対値が小さくなる。

5.3 等価モデルの振動特性

式(28b)を m で除すと，式(31)になる。

$$\ddot{x}(t) + \frac{c_{\mathrm{eq}}}{m}\dot{x}(t) + \frac{k_{\mathrm{eq}}}{m}x(t) = 0 \tag{31}$$

式(31)下式のように表すことができる。

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta_{\mathrm{eq}}\,\omega_{\mathrm{eq}}\,\dot{x}(t) + \omega_{\mathrm{eq}}^2\,x(t) = 0 \tag{32}$$

ここに，ω_{eq} は等価固有角周波数であり，ζ_{eq} は等価減衰率である。ω_{eq}，ζ_{eq} は式(33)のように定義する。

$$\omega_{\mathrm{eq}} = \sqrt{\frac{k_{\mathrm{eq}}}{m}} \tag{33a}$$

$$\zeta_{\mathrm{eq}} = \frac{c_{\mathrm{eq}}}{2m\omega_{\mathrm{eq}}} \tag{33b}$$

6. 重み関数のコントローラゲイン・構造特性・振動特性への影響

6.1 制御対象のモデル

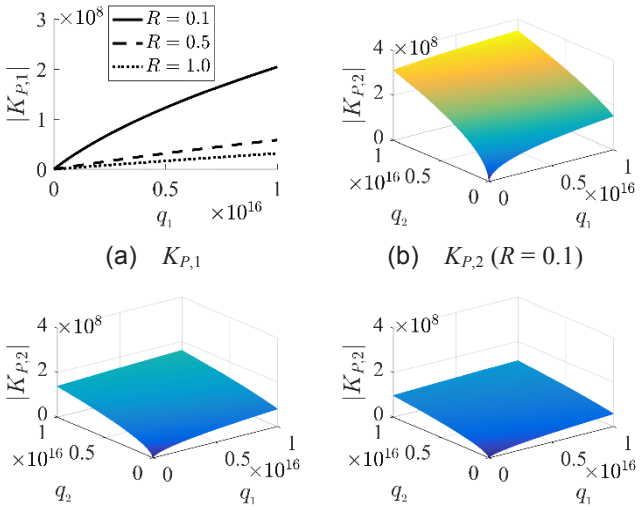
本報その 1 ではモデルの密度をρ = 180 kg/m^3，幅を B = 40 m，奥行を D = 40 m，高さを H = 200 m，固有周期を T = 2 s とし，減衰率をζ = 0.02 とする。Table 1 に式(1) ~ (3)により，計算された質量 m，剛性係数 k，減衰係数 c を示す。

Table 1 Parameters of model

Parameter	Unit	Value
m	[kg]	5.76×10^7
k	[N/m]	1.42×10^8
c	[Ns/m]	3.62×10^6

6.2 重み関数のコントローラゲインへの影響

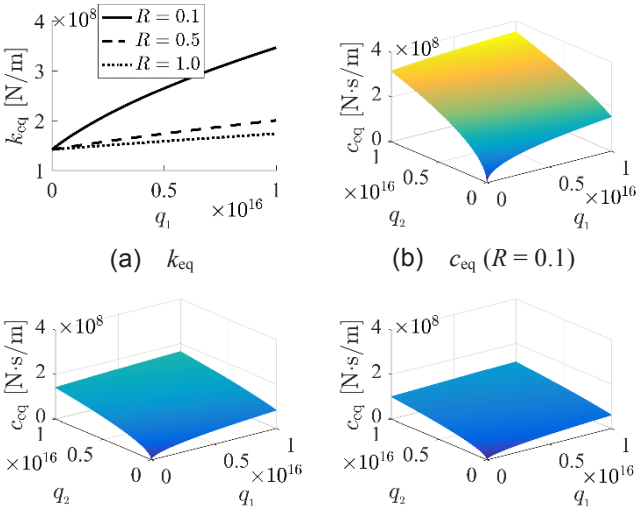
Fig. 3 にコントローラゲイン K_P と q_1, q_2, R の関係を示す。なお, 本報における制御入力 u に対する重み関数 R をそれぞれ 0.1, 1, 10 とし，状態 Z に対する重み関数 Q の対角線要素 q_1, q_2 を変数とする。Fig. 3(a)より，q_1 を大きくすると $K_{P,1}$ の絶対値が大きくなり，R を大きくすると $K_{P,1}$ の絶対値が小さくなることがわかる。Fig. 3(b)より，q_1 もしくは q_2 を大きくすると $K_{P,2}$ の絶対値が大きくなり，q_2 の $K_{P,2}$ への影響が q_1 より大きいことがわかる。Fig. 3(b) ~ Fig. 3(d) の比較より，R を大きくすると $K_{P,2}$ の絶対値が小さくなることがわかる。



(a) $K_{P,1}$ (b) $K_{P,2}$ $(R = 0.1)$

(c) $K_{P,2}$ $(R = 0.5)$ (d) $K_{P,2}$ $(R = 1.0)$

Fig. 3 Dependency of K_P to q_1 and q_2



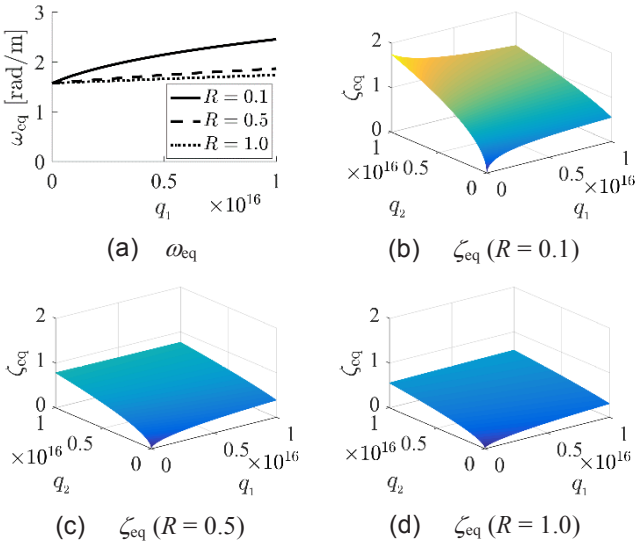
(a) k_{eq} (b) c_{eq} $(R = 0.1)$

(c) c_{eq} $(R = 0.5)$ (d) c_{eq} $(R = 1.0)$

Fig. 4 Dependency of k_{eq} and c_{eq} to q_1 and q_2

6.3 重み関数の構造特性・振動特性への影響

Fig. 4 に等価剛性 k_{eq} 等価減衰係数 c_{eq} と q_1, q_2, R の関係を示す。Fig. 5 に等価固有角周波数ω_{eq} 等価減衰ξ_{eq} と q_1, q_2 の関係を示す。Fig. 4(a)と Fig. 5(a)より，q_1 を大きくすると k_{eq}, · ω_{eq} の値が大きくなり，R を大きくすると k_{eq}, · ω_{eq} の値が小さくなることがわかる。Fig. 4(b)と Fig. 5(b)より，q_1 もしくは q_2 を大きくすると c_{eq}, ξ_{eq} の値が大きくなり，q_2 の c_{eq}, ξ_{eq} への影響が q_1 より大きいことがわかる。Fig. 4(b) ~ Fig. 4(d)の比較と Fig. 5(b) ~ Fig. 5(d)の比較より，R を大きくすると c_{eq}, ξ_{eq} の値が小さくなることがわかる。



(a) ω_{eq} (b) ζ_{eq} $(R = 0.1)$

(c) ζ_{eq} $(R = 0.5)$ (d) ζ_{eq} $(R = 1.0)$

Fig. 5 Dependency of ω_{eq} and ζ_{eq} to q_1 and q_2

7. まとめ

本報その 1 では，減衰を考慮した 1 質点系の制御系を構築し，リカッチ代数方程式の解 P を求め，コントローラゲイン K_P を算出した。また，算出されたコントローラゲインを用い，LQR 重み関数のコントローラゲイン・構造特性・振動特性への影響を評価した。以下に得られた知見を示す。

(1) 減衰を有する 1 質点系の制御系に対し，リカッチ方程式の解を求めることが可能である。さらに，その解により，アクティブモデルの等価モデルの等価剛性係数と等価減衰係数を計算することができ，数値解析せずにアクティブモデルの構造特性と振動特性を把握することができる。

(2) R を大きくすると，等価剛性係数 k_{eq}，等価固有角周波数ω_{eq}, 等価減衰係数 c_{eq} と等価減衰率ζ_{eq} の値は小さくなる。

(3) $K_{P,1}$, k_{eq}, ω_{eq} の値は q_1 を大きくすると大きくなるが，q_2 を変化させても変わらない。

(4) $K_{P,2}$, c_{eq}, ζ_{eq} の値は q_1 もしくは q_2 を大きくすると大きくなる。ただし，q_2 から $K_{P,2}$, c_{eq}, ζ_{eq} に与える影響は q_1 より大きい。

参考文献はその 2 に示す。

*1 東京工業大学 大学院生 修士課程
*2 東京工業大学 准教授・博士（工学）
*3 東京工業大学 大学院生 博士課程
*4 東京工科大学 教授・博士（工学）