

論文 / 著書情報  
Article / Book Information

論題(和文)	安定化ISPH法による拡張ダルシー則とナビエ・ストークス方程式の統一解法
Title(English)	UNIFIED NUMERICAL ANALYSIS BETWEEN THE EXTENDED DARCY'S LAW AND NAVIER-STOKES EQUATION BY USING STABILIZED ISPH METHOD
著者(和文)	森本 敏弘, 浅井 光輝, 笠間 清伸, 藤澤 和謙, 井元 佑介
Authors(English)	Toshihiro Morimoto, Mitsuteru Asai, Kiyonobu Kasama, Kazunori Fujisawa, Yusuke Imoto
出典(和文)	土木学会論文集A2 (応用力学), Vol. 70, No. 2, pp. I_213-I_221
Citation(English)	Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser. A2 (Applied Mechanics (AM)), Vol. 70, No. 2, pp. I_213-I_221
発行日 / Pub. date	2015, 2
権利情報 / Copyright	本著作物の著作権は土木学会に帰属します。 Copyright (c) 2015 Japan Society of Civil Engineers.

# 安定化ISPH法による拡張ダルシー則とナビエ・ストークス方程式の統一解法

森本 敏弘<sup>1</sup>・浅井 光輝<sup>2</sup>・笠間 清伸<sup>2</sup>・藤澤 和謙<sup>3</sup>・井元 佑介<sup>4</sup>

<sup>1</sup>学生会員 九州大学大学院 工学府建設システム工学専攻 (〒819-0395 福岡市西区元岡744)  
E-mail: morimoto@doc.kyushu-u.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 九州大学大学院准教授 工学研究院社会基盤部門 (〒819-0395 福岡市西区元岡744)  
E-mail: asai@doc.kyushu-u.ac.jp, kasama@civil.kyushu-u.ac.jp

<sup>3</sup>正会員 京都大学大学院講師 農学研究科 (〒606-8502 京都市左京区北白川追分町)  
E-mail: fujik@kais.kyoto-u.ac.jp

<sup>4</sup>非会員 九州大学大学院 数理学府数理学専攻 (〒819-0395 福岡市西区元岡744)  
E-mail: y-imoto@math.kyushu-u.ac.jp

2011年東北地方太平洋沖地震では、津波により防波堤や防潮堤などの港湾施設が甚大な被害を受けた。防波堤や防潮堤の被災メカニズムに関するこれまでの研究・調査により、I. 防波堤前面と背面の水位差に起因して作用する水平力、II. 防波堤の越流水ならびに目地で発生する流水による捨石マウンドの洗掘、III. 浸透流による捨石マウンドの支持力低下に伴うパイピング破壊などが被災の主因として考えられている。本研究では、この中でもIII. の浸透流による防波堤の崩壊現象の解明に焦点をあて、まず基礎段階として、粒子法による地表流（津波）と浸透流の統一解析法を構築した。支配方程式には既往の研究よりナビエ・ストークス方程式と拡張されたダルシーの法則を統一的に記述したものを採用し、粒子法の一つである安定化ISPH法概念に基づいて定式化している。最後に、簡単な例題を用いて本解析手法の検証を行った。

**Key Words :** ISPH method, seepage flow, porous flow, extended Darcy's law

## 1. 緒言

2011年東北地方太平洋沖地震では、津波により防波堤や防潮堤などの港湾施設が甚大な被害を受けた。防波堤や防潮堤の被災メカニズムに関するこれまでの研究・調査により、I. 防波堤前面と背面の水位差に起因して作用する水平力、II. 防波堤の越流水ならびに目地で発生する流水による捨石マウンドの洗掘、III. 浸透流による捨石マウンドの支持力低下に伴うパイピング破壊などが被災の主因として考えられている<sup>1)</sup>。上記の問題はその個別の要因に対しても、I. 複雑な自由表面を有する流れ問題における高精度な流体力評価、II. 固体の大変形解析と流体の連成、III. 地表流と浸透流の統一的な取扱いといった難しい課題となっている。そこで、シミュレーションを防災・減災計画へと活用するためには、上記のような複合問題を同時に解析できるマルチフィジックスシミュレータの開発が求められる。

ここで、SPH法やMPS法に代表される粒子法<sup>2)</sup>は、連続体を有限個の粒子の集合としてとらえ、連続体の変形

を粒子の移動によって表現する方法である。粒子法の利点としては差分法や有限要素法のように格子や要素を用いないために、流体解析においては自由表面を有する流れや混相流、構造解析では大変形や破壊といった現象に適していると考えられている。実際に、I. やII. のような問題に対して適用された例もいくらか存在する。例えば、田邊ら<sup>3)</sup>はSPH法において境界処理を改善することにより、剛体壁に作用する流体力を精度よく計算する手法を提案し、五十里ら<sup>4)</sup>、野々山ら<sup>5)</sup>は粒子法に弾性体または弾塑性体の構成則を適用して地盤の大変形問題を解析した例を報告し、桐山<sup>6)</sup>は粒子法と格子法のハイブリッドな解法であるGIMPM法を用い、三軸圧縮試験による地盤の破壊シミュレーションを行っている。このように、I. やII. の問題に対しては、粒子法概念に基づいた解析手法が提案され、実問題に対しても適用され始めている。III. の浸透流の問題に関しても、Maedaら<sup>7,8)</sup>やSakaiら<sup>9)</sup>により、地盤相と流体相をBiotの混合体理論に基づき、各相をSPH法にて解析した事例があるが、この時点では2次元問題に特化し、また地盤内浸透流のモデル化も層流

に限定しダルシー則を採用していた。今後、防波堤の崩壊を正しく解くためには、上記に挙げた流体力評価手法や地盤の大変形解析に加え、地盤内部の浸透流が地盤の変形特性に及ぼす影響までもを考慮した手法の開発が必要といえる。このような状況を鑑み本研究では、将来的に地盤の変形や流れ問題との連成を見据え、3次元粒子法にて地盤内の浸透流と地表流を同時に解析することを試みる。本論文ではまず、既往の研究より提案されたナビエ・ストークス方程式とダルシーの法則あるいは拡張ダルシー則との統合式を紹介する。その後、統合式に対して著者らが開発した安定化ISPH法を用い、最適な定式化・及び解析条件について提案する。最後に、基本的な例題を用いて本手法の検証を行う。

## 2. 地表流と浸透流の支配方程式

本章では地表流と浸透流の支配方程式について説明する。一般に地盤の外を流れる地表流はニュートン流体でモデル化され、運動方程式と連続の式によって記述されるナビエ・ストークス方程式を用いる。

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho^w} (-\nabla P + \rho^w \mathbf{g}) + (\nu_w + \nu_T) \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1)$$

$$\frac{D\rho^w}{Dt} + \rho^w \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{v}$ ,  $P$ ,  $\mathbf{g}$ はそれぞれ水の流速、圧力、重力加速度であり、 $\nu_w$ は水の動粘性係数、 $\rho^w$ は水の固有密度である。また、 $\nu_T$ は渦動粘性係数を表し、本研究では以下に示すようなLES乱流モデルの一種であるSmagorinsky渦粘性モデル<sup>10)</sup>のものを採用する。

$$\nu_T = (C_S \Delta)^2 S \quad (3)$$

$C_S$ はSmagorinsky定数であり、本解析では $C_S = 0.2$ と設定した。また、 $\Delta$ はフィルター幅、 $S$ はひずみ速度テンソルから評価されるひずみ率である。

他方、地盤内部の浸透流の支配方程式については最も基本的なものとして、以下に示すダルシーの法則<sup>11)</sup>が挙げられる。

$$\frac{\mu}{K} \mathbf{v} = -\nabla P + \rho^w \mathbf{g} \quad (4)$$

上式で、 $K$ は地盤内の固有透水係数、 $\mu$ は粘性係数を表す。水文学の分野において、ダルシーの法則は運動方程式として広く用いられてきた。しかし一方で、ダルシーの法則そのものの妥当性に関する実験や理論的検討が行われ、砂や礫中の高動水勾配下での水分移動では、比較的高いレイノルズ数場となり標準的なダルシーの法則は成立しないことが報告され<sup>12)</sup>、地盤内の非ダルシー流れに関する研究が行われてきた<sup>13)</sup>。拡張されたダルシー

の法則ともいべき運動方程式のうち、筆者が知る限りで最も古いものは1901年にForchheimerによって提案された以下の修正ダルシーの法則<sup>11)</sup>である。

$$\frac{\mu}{K} \mathbf{v} + \frac{\rho^w C}{\sqrt{K}} |\mathbf{v}| \mathbf{v} = -\nabla P + \rho^w \mathbf{g} \quad (5)$$

ここで左辺第二項は慣性効果を表す項であり、 $C$ はForchheimer係数と称する。この後も非ダルシー流れに関する研究は活発に行われており、多くの研究者によって運動方程式が報告されている。中でも近年の地盤内流れの研究の基となっているものがSolliとCrossによって提案された以下の式<sup>14)</sup>である。

$$C_r \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla (P + \rho^w \mathbf{g}) - \frac{\nu_w}{K} \varepsilon \mathbf{v} - \frac{C_f}{\sqrt{K}} \varepsilon^2 |\mathbf{v}| \mathbf{v} \quad (6)$$

上式で $C_r$ は慣性係数、 $C_f$ は非線形の抵抗係数、 $\varepsilon$ は地盤内の間隙率を表す。また最近の研究では式(6)を改良した式(7)がAkbariらの報告<sup>15,16)</sup>等で紹介されている。

$$C_r \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla P + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{g} + (\nu_w + \nu_T) \nabla^2 \mathbf{v} - a \varepsilon \mathbf{v} - b \varepsilon^2 |\mathbf{v}| \mathbf{v} \quad (7)$$

上式において $a$ ,  $b$ はそれぞれ経験的な線形（ダルシー項）、非線形（Forchheimer項）に対する係数である。ここで、 $\bar{\rho}$ は地盤粒子などの固体部を除いた間隙水のみ質量により定義する密度であり、飽和土であれば間隙率を用いて $\bar{\rho} = \varepsilon \rho^w$ といった関係が成立する。式(7)ではこの関係を使い右辺第2項を書き換えている。このように、土中の浸透流の流れはダルシーの法則または拡張ダルシー則に従うとされている。ここで、将来的な解析対象として想定する防波堤の崩壊現象ではマウンド内の浸透流の流れは乱流状態となり、通常のダルシーの法則では記述できなくなるものと予想し、浸透流は非ダルシー流れまでもを記述できる拡張ダルシー則を、地表流は一般的に用いられているナビエ・ストークス方程式を支配方程式として用いることが望ましいと考えられる。

しかしながら、現実には地表流と浸透流の境界では、水は地盤を出入りする度に地表流から浸透流へ、浸透流から地表流へと絶えず変化している。Akbariらは、このような状況を想定し、地表流と浸透流を統一的に記述できる式を提案している<sup>15,16)</sup>。Akbariらの報告では式(7)において、 $\nu_D = \varepsilon \nu$ とおくことで導かれ、以下のように表される。

$$\frac{C_r(\varepsilon) D\mathbf{v}_D}{\varepsilon Dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla P + \frac{\mathbf{g}}{\varepsilon} + \nu_E(\varepsilon) \nabla^2 \mathbf{v}_D - a(\varepsilon) \nu_D - b(\varepsilon) \nu_D |\mathbf{v}_D| \quad (8)$$

$\nu_D$ はダルシー流速または平均流速を表している。Akbariらの論文では、式(7)および(8)の右辺1, 2項を $\bar{\rho}$ で除す

るのではなく、代わりに $\rho^w$ を用いていることに注意していただきたい。なお、各種係数は間隙率の関数となっており、その関係式は以下の通りである。

$$C_r(\varepsilon) = 1 + 0.34 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \quad \text{： 慣性係数} \quad (9a)$$

$$\nu_E(\varepsilon) = \frac{\nu_w + \nu_T}{\varepsilon} \quad \text{： 有効動粘性係数} \quad (9b)$$

$$a(\varepsilon) = \alpha_c \frac{\nu_w(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3 D_{50}^2} \quad \text{： 線形係数} \quad (9c)$$

$$b(\varepsilon) = \beta_c \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3 D_{50}} \quad \text{： 非線形係数} \quad (9d)$$

$D_{50}$ は地盤材料の平均粒径を示す。ここで、後述する検証例題における $D_{50}$ の値は文献<sup>15)</sup>に示されていないため、本報告では $D_{50}=1\text{cm}$ と設定した。 $a(\varepsilon)$ 、 $b(\varepsilon)$ の関数形は上記に記した以外にも提案されているが、本報告では式(9c)、(9d)を参照する。また、式(9c)、(9d)中の $\alpha_c$ 、 $\beta_c$ の値は、文献<sup>15, 16)</sup>で示されている値を参照し、 $\alpha_c=1000$ 、 $\beta_c=1.1$ と設定した。本研究では式(8)を地表流と浸透流の統一的な支配方程式として採用する。

ここで今瀬<sup>17)</sup>、地表流（ナビエ・ストークス方程式）と浸透流（拡張ダルシー則）の連成問題をBiotの混合体理論に基づき定式化し、圧縮性流体用に開発されたSPH法に準拠した解析を行っているが、本研究では、上記のようにAkbariらの統一化方程式を非圧縮性流体用SPH法（ISPH法）にて解くことにした。

### 3. 安定化ISPH法による定式化

前章では本報告で用いる支配方程式について説明した。本章では、前章で採用した支配方程式を用い、粒子法概念に基づいて離散近似を行う。なお、本研究では粒子法の中でも浅井ら<sup>18)</sup>によって開発された安定化ISPH法を用いた定式化を示す。

#### (1) SPH法の基礎式

本解析で用いる安定化ISPH法では空間の離散化に、SPH法の空間離散近似を採用している。SPH法では任意の空間点 $\mathbf{x}$ と時刻 $t$ における関数 $\phi(\mathbf{x}, t)$ が、次式に示す積分形式に近似できることを基本概念としている。

$$\phi(\mathbf{x}, t) \approx \int_V W(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, h) \phi(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \quad (10)$$

ここで、 $W$ はカーネル関数と呼ばれる一種の重み関数であり、SPH法では一般的にはその近似として影響半径 $h$ 内でのみ非ゼロ正値となるコンパクトサポートな関数かつUnity条件を満足する関数を用いている。上式の積分を、空間上に分布する粒子 $\mathbf{x}_i$ を用いて離散化を行った次

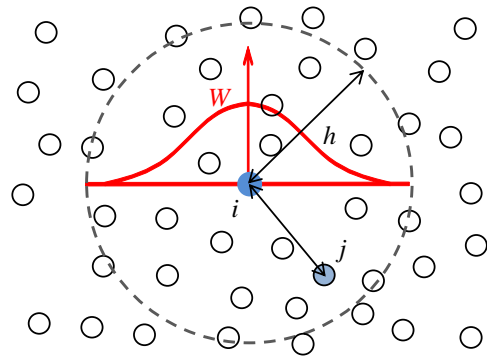


図-1 SPH法における粒子配置と影響半径

式をSPH法における補間の基礎式とする（図-1参照）。

$$\langle \phi_i \rangle (\approx \phi(\mathbf{x}_i, t)) := \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W(r_{ij}, h) \phi(\mathbf{x}_j, t) \quad (11)$$

ここに下付き添え字 $i$ 、 $j$ は粒子番号を示し、 $\rho_j$ 、 $m_j$ はそれぞれ粒子 $j$ が代表する近傍領域の密度と質量とする。また、 $r_{ij}$  ( $=|\mathbf{r}_{ij}|$ )、 $\mathbf{r}_{ij}$  ( $=\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ )はそれぞれ粒子間距離、相対位置ベクトルを示す。なお、本論文では $\langle \bullet \rangle$ はSPH法の基本概念に基づき、近傍粒子での値を参照して近似した値を示す。

関数の勾配はSPH法の近似式(11)を微分することで評価できるが、本解析では以下に示すような2種類の勾配に対する近似作用素を採用する。

$$\langle \nabla \phi_i \rangle = \frac{1}{\rho_i} \sum_j m_j (\phi_j - \phi_i) \nabla W(r_{ij}, h) \quad (12)$$

$$\langle \nabla \phi_i \rangle = \rho_i \sum_j m_j \left( \frac{\phi_j}{\rho_j} + \frac{\phi_i}{\rho_i} \right) \nabla W(r_{ij}, h) \quad (13)$$

また、関数のラプラシアンは以下のものを採用する<sup>19)</sup>。

$$\langle \nabla^2 \phi_i \rangle = \sum_j m_j \left( \frac{\rho_i + \rho_j}{\rho_i \rho_j} \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W(r_{ij}, h)}{r_{ij}^2 + \eta^2} \right) (\phi_i - \phi_j) \quad (14)$$

ここで、 $\eta$ はゼロ割りを避けるためのパラメータであり、本解析では影響半径を用いて $\eta^2=0.0001(h/2)^2$ と与えている。なお、本研究では重み関数に3次のスプライン関数を用い<sup>20)</sup>、影響半径 $h$ は初期粒子間隔の2.4倍としている。

#### (2) 支配方程式のISPH法による離散化

ISPH法は非圧縮性流体の支配方程式を予測子修正子法に基づく射影法と呼ばれる分離型解法によって時間離散化し、その分離された方程式をSPH法の基礎式に基づいて空間離散化を行う手法である。前章から、本解析に用いる支配方程式は以下の二つである。

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt} + \bar{\rho} \nabla \cdot \frac{\mathbf{v}_D}{\varepsilon} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{C_r(\varepsilon) D\mathbf{v}_D}{\varepsilon Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\mathbf{g}}{\varepsilon} + v_E(\varepsilon) \nabla^2 \mathbf{v}_D - a(\varepsilon) \mathbf{v}_D - b(\varepsilon) \mathbf{v}_D |\mathbf{v}_D| \quad (16)$$

ここで、非圧縮性の仮定より密度が一定とすれば、質量保存則(15)は以下のように書き換えられる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_D = 0 \quad (17)$$

これらの支配方程式に対し、本解析においても射影法の議論に従って以下の手順で時間離散化を行う。まず、射影法では、時間ステップ $n+1$ における速度 $\mathbf{v}_D$ を次のように分離する。

$$\mathbf{v}_D^{n+1} = \mathbf{v}_D^* + \Delta \mathbf{v}_D^* \quad (18)$$

ここに、 $\mathbf{v}_D^*$ は予測子とよばれ、時間ステップ $n$ の物理量のみ依存する仮の速度、 $\Delta \mathbf{v}_D^*$ は修正子と呼ばれ、時間ステップ $n+1$ の物理量によって $\mathbf{v}_D^*$ を修正する速度である。ナビエ・ストークス方程式に対する射影法の予測子と修正子は、修正子が運動方程式の圧力勾配項に対応し、予測子はそれ以外の項に対応している。同様に、式(16)の場合は以下のように予測子と修正子を定める。

$$\mathbf{v}_D^* = \mathbf{v}_D^n +$$

$$\frac{\varepsilon \Delta t}{C_r(\varepsilon)} \left( \frac{\mathbf{g}}{\varepsilon} + v_E(\varepsilon) \nabla^2 \mathbf{v}_D^n - a(\varepsilon) \mathbf{v}_D^n - b(\varepsilon) \mathbf{v}_D^n |\mathbf{v}_D^n| \right) \quad (19)$$

$$\Delta \mathbf{v}_D^* = \frac{\varepsilon \Delta t}{C_r(\varepsilon)} \left( -\frac{1}{\rho} \langle \nabla P^{n+1} \rangle \right) \quad (20)$$

これらの式と式(18)を合わせると式(16)の半陰解法になっていることがわかる。ここで、 $\bar{\rho}$ は非圧縮性流体時において現在の位置を参照し、本来与えるべき物性値であり、水領域内であれば $\rho^w$ 、飽和土中では $\varepsilon \rho^w$ を参照するものとする。(定式化によってはSPHの近似に従い、現在の粒子配置から数値的に評価した密度をそのまま代入する場合もあり得ることに注意していただきたい。) また、式(20)に用いる圧力 $P^{n+1}$ は式(20)の両辺に発散を作用させたものと(17)および(18)との連立によって得られる次の圧力ポアソン方程式によって求める。

$$\nabla^2 P^{n+1} = \frac{C_r(\varepsilon) \bar{\rho}}{\varepsilon \Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}_D^* \quad (21)$$

この時間離散化に対して、前節のSPH法における近似作用素を用いて空間離散化を行う。予測子(19)における粘性項は動粘性係数が一定でないことから、式(14)に基づく次の近似作用素<sup>9)</sup>を採用する。

$$\langle v_E(\varepsilon_i) \nabla^2 \mathbf{v}_{Di} \rangle = \sum_j m_j \left( \frac{\bar{\rho}_i v_{Ei} + \bar{\rho}_j v_{Ej}}{\bar{\rho}_i \bar{\rho}_j} \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W(\mathbf{r}_{ij}, h)}{r_{ij}^2 + \eta^2} \right) \mathbf{v}_{ij} \quad (22)$$

また、予測子の発散は式(12)を参照して次のように与える。

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{v}_{Di} \rangle = \frac{1}{\bar{\rho}_i} \sum_j m_j (\mathbf{v}_{Dj} - \mathbf{v}_{Di}) \cdot \nabla W(\mathbf{r}_{ij}, h) \quad (23)$$

式(21)における左辺項は、式(14)を参照して次のように与える。

$$\langle \nabla^2 P_i \rangle = \sum_j m_j \left( \frac{\bar{\rho}_i + \bar{\rho}_j}{\bar{\rho}_i \bar{\rho}_j} \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W(\mathbf{r}_{ij}, h)}{r_{ij}^2 + \eta^2} \right) P_{ij} \quad (24)$$

また、圧力ポアソン方程式(21)は次のように離散方程式を定める。

$$\langle \nabla^2 P_i^{n+1} \rangle = \frac{C_r(\varepsilon_i) \bar{\rho}_i}{\varepsilon_i \Delta t} \langle \nabla \cdot \mathbf{v}_{Di}^* \rangle \quad (25)$$

### (3) 安定化ISPH法

安定化ISPH法は、ISPH法の離散化された圧力ポアソン方程式に粒子分布の平滑化に作用する項を付加することによって、粒子分布の不均一性に起因する空間近似作用素の精度低下を防ぐ手法である。なお、粒子配置を一樣にするために、最近では粒子を再配置(シフティング)する方法が複数提案されている<sup>21, 22)</sup>が、本手法では付加的な計算がなくても同様な効果が期待できる。既往の報告<sup>18)</sup>ではナビエ・ストークス方程式に対して安定化ISPH法にて定式化を行い、圧力ポアソン方程式を導出している。本節ではAkbariらによる統合式に対し、安定化ISPH法の概念に基づいて定式化し、改良型の圧力ポアソン方程式を導出する。

まず数値解析中にある程度の密度変化が生じることを念頭に置き、圧縮性流体にも適用可能である一般的な質量保存則(15)からスタートする。密度導関数を前進差分近似し、その後、各物理量に対して以下のようにSPH近似する。

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{v}_{Di}^{n+1} \rangle = -\frac{\varepsilon_i}{\bar{\rho}_i} \frac{\langle \bar{\rho}_i^{n+1} \rangle - \langle \bar{\rho}_i^n \rangle}{\Delta t} \quad (26)$$

ここで $\langle \bar{\rho}_i^n \rangle$ は粒子 $i$ の時間ステップ $n$ での数値密度であり、次式により与えられる。

$$\langle \bar{\rho}_i^n \rangle = \sum_j \bar{\rho}_j \frac{m_j}{\bar{\rho}_j} W(\mathbf{r}_{ij}, h) = \sum_j m_j W(\mathbf{r}_{ij}, h) \quad (27)$$

式(18)を参照して $\Delta \mathbf{v}_{Di}^* = \mathbf{v}_{Di}^{n+1} - \mathbf{v}_{Di}^*$ であることを考慮し、さらに式(26)の関係式を用いて式(25)の右辺項を書き換えれば、

$$\langle \nabla^2 P_i^{n+1} \rangle = \frac{C_r(\varepsilon_i)}{\varepsilon_i} \left( \frac{\bar{\rho}_i}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \mathbf{v}_{Di}^* \rangle + \varepsilon_i \frac{\langle \bar{\rho}_i^{n+1} \rangle - \langle \bar{\rho}_i^n \rangle}{\Delta t^2} \right) \quad (28)$$

となる．ここで，次の時間ステップでの密度が現在の位置において満足すべき密度  $\bar{\rho}$ （水領域であれば  $\rho^w$ ，飽和土中では  $\varepsilon\rho^w$ ）と一致するものと希望的な要件をあたえれば，密度増分  $\langle\Delta\bar{\rho}_i^n\rangle$  は次式により与えられるはずである．

$$\begin{aligned} \langle\bar{\rho}_i^{n+1}\rangle &= \langle\bar{\rho}_i^n\rangle + \langle\Delta\bar{\rho}_i^n\rangle \approx \bar{\rho}_i \\ \rightarrow \langle\Delta\bar{\rho}_i^n\rangle &= \bar{\rho}_i - \langle\bar{\rho}_i^n\rangle \end{aligned} \quad (29)$$

次に，瞬間的には密度一定条件を満足させなくてもよいものとし（わずかな圧縮性を許容し），密度増分を本来より小さな値を与えることにする．

$$\langle\Delta\bar{\rho}_i^n\rangle \approx \alpha(\bar{\rho}_i - \langle\bar{\rho}_i^n\rangle) \quad (30)$$

なお， $\alpha$ は0-1までの値をとる安定化パラメータであり，通常は1%程度以下の小さな値を設定する．本解析では  $\alpha=0.01$  とした．

ここまでの仮定を用いれば，結局，式(28)で与えられた圧力ポアソン方程式は以下のように修正される．

$$\langle\nabla^2 P_i^{n+1}\rangle \approx \frac{C_r(\varepsilon_i)}{\varepsilon_i} \left( \frac{\bar{\rho}_i}{\Delta t} \langle\nabla \cdot \mathbf{v}_{Di}^*\rangle + \alpha\varepsilon_i \frac{\bar{\rho}_i - \langle\bar{\rho}_i^n\rangle}{\Delta t^2} \right) \quad (31)$$

この改良型の圧力ポアソン方程式は，安定化パラメータをゼロとすれば速度発散ゼロ条件による定式化と完全に一致する．また，瞬間的に初期の密度と一致した場合（あるいは無視できるほど小さい場合）にもポアソン方程式のソース項の第2項目は無視できるため，両者は同一視できることになる．この定式化によれば，主には各瞬間の速度分布を参照することで滑らかな圧力分布が得られ，解析中に生じる密度に関する累積誤差に対しては密度差の項で徐々に解消され，長期間の計算においても密度がほぼ一定に保たれることで体積保存性の良いスキームとなる．また， $\varepsilon_i=1$ ， $C_r(\varepsilon_i)=1$  とすれば，通常のナビエ・ストークス方程式を支配方程式として用いた場合の圧力ポアソン方程式となることも確認できる．

#### (4) 仮想マーカーによる境界処理法

粒子法では，固体壁に壁粒子を配置することで流体粒子が壁に貫通しないようにしている．しかし，これは固体壁面で満足すべき圧力ノイマン条件および速度のすべり・非すべり条件を厳密に満足させるものではない．そこで，仮想マーカー境界処理法を用いれば，上記の境界条件を近似的に満足させることができる．第二著者らは，階段状となり，実際のなめらかな境界とは一致しない非適合境界のときにも処理可能な方法として一般化した．詳細は文献<sup>23)</sup>を参照いただきたい．

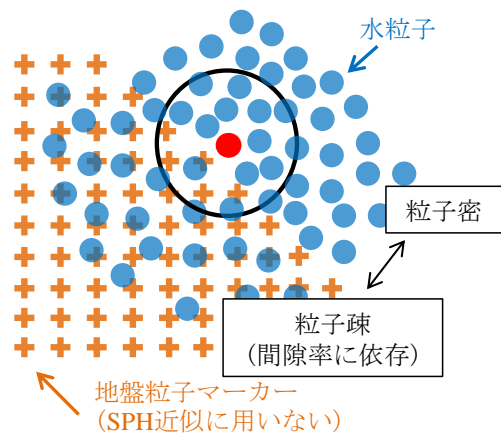
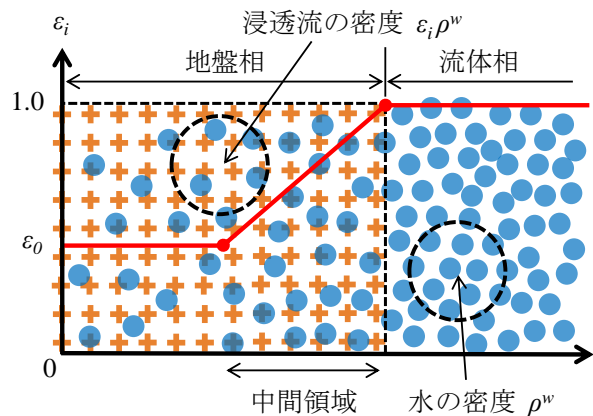


図-2 間隙率算出の概念



(実際の中間領域は曲線的に変化している)

図-3 間隙率変化のイメージ図

## 4. 間隙率の計算

前章までにおいて地表流と浸透流を統一した支配方程式と安定化ISPH法によるその定式化について説明した． $\bar{\rho}$ の値を決定する際には間隙率 $\varepsilon$ を参照することからもわかる通り，前述の安定化ISPH法による定式化において，最も重要となるパラメータは間隙率 $\varepsilon$ である．本章ではこの間隙率 $\varepsilon$ の算出方法について説明する．

### (1) 間隙率の算出方法

本研究では，地盤が存在する領域にあらかじめ地盤マーカーを配置し，水粒子がそのマーカーの位置を参照しながら重み付き平均をとることで間隙率を計算することとした．本手法の概念および間隙率 $\varepsilon$ の算出式を図-2，式(32)に示す．

$$\varepsilon_i = \max \left\{ \min \left( 1, 2 - 2 \sum_{j \in \text{soil}} W_{ij} \frac{m_j^{\text{soil}}}{\rho_j^{\text{soil}}} \right), \varepsilon_0 \right\} \quad (32)$$

ここに， $\varepsilon_0$ は地盤本来の間隙率である．上式では，水粒子が地表流の領域に存在するときには  $\varepsilon_i=1$ ，十分地盤

内に侵入したときには  $\varepsilon_i = \varepsilon_0$ ，その中間領域では滑らかに推移するような関数を用いている(図-3参照)．つまり，地表流では完全にナビエ・ストークス方程式に従い，拡張ダルシー則に推移する中間領域は地盤の領域側にのみ存在する．これは，ナビエ・ストークス方程式が局所的な流れから導出されるのに対し，(拡張)ダルシー則は場の平均流から導出されるので，その中間領域は地盤側に存在すると考えることができ，自然な境界処理であると考えられる．なお，本研究において地盤マーカーはSPHによる離散化には用いられない単なる参照点である．地盤マーカーにより間隙率を参照する場合，他の手法により地盤マーカーの位置が更新された場合においても，更新された地盤の形状に関して浸透流を解くことができ，拡張性のある算出方法であるといえる．本報告では初期段階として，地盤マーカーの位置は固定とした．

### (2) 間隙率の変化による各物質量の更新

式(32)によって間隙率が変化することは，図-2のような地盤内において水粒子の配置が初期よりも疎になることを意味する．このような領域において安定化ISPH法により方程式を解く場合，本来あるべき密度と粒子の固有密度に矛盾が生じる．これを防ぐため本研究では算出された間隙率を用いて固有密度を以下のように更新する(図-3参照)．

$$\bar{\rho}_i = \varepsilon_i \times \rho^w \quad (33)$$

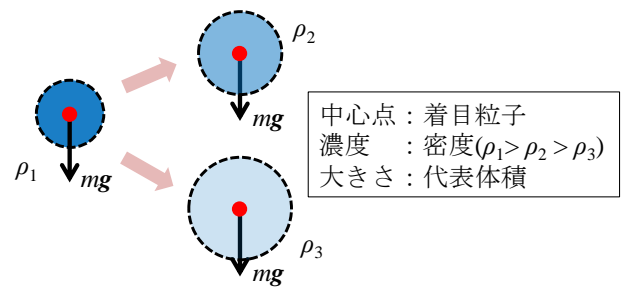
上式において  $\rho^w$  は地盤領域の外での水の固有密度であり，本研究では  $\rho^w = 1\text{g/cm}^3$  と設定している．また，密度を変更しても，粒子一つが代表する質量は保存される必要があるため，計算過程において質量は更新しない．これは，密度の変化に応じて粒子が代表する体積を更新していることに相当する(図-4参照)．そのため，地盤相の質量を無視し，水が占める質量により定義する密度  $\bar{\rho}_i$  を使った定式化を行っており，式(8)，(16)が示す通り，地盤領域内部では重力項は間隙率で除した値  $g/\varepsilon$  を使うことに再度注意していただきたい．

### (3) 自由表面判定

本研究では，自由表面の判定を影響半径内に存在する粒子の個数を用いて判定している．地盤内においては影響半径内の粒子の個数は減少するため，自由表面判定式は間隙率を用いて以下のように表すことにした．

$$N_{neighbor} < \varepsilon_i \times N_{surf} \quad (34)$$

なお， $N_{neighbor}$ ， $N_{surf}$  はそれぞれ，影響半径内の粒子数，地盤外における自由表面判定値である．本論文では  $N_{surf}$  は48個として設定した．



※一つの粒子がもつ物体力(重力)は不変．

図-4 粒子の物理量の変化

## 5. 自由落下問題による検証

前章までで説明した手法を用い，簡単な自由落下問題にて検証を行う．検証にはi. 地盤相において粒子間距離が増大し疎領域となること，ii. 間隙率の値の変化により落下するスピード及び，地盤相を占める粒子と流体相を占める粒子の割合が変化するこの2点を容易に確認できる問題として文献<sup>15)</sup>でも用いられている例題を3次元に拡張したものを用いる．モデル概要を図-5に示す．地盤相の固有間隙率  $\varepsilon_0$  の異なる3ケースの解析を行い，本手法の定式化の検証を行う．なお，解析条件については，粒子数は60798個，参照する地盤マーカーの数は9261個，初期粒子間隔1cm，時間増分0.001秒とし，境界条件は非すべり条件を設定した．また，本解析では式(3)で用いるフィルター幅  $\Delta$  はSPH法における影響半径  $h$  とした．

まず，(a)  $\varepsilon_0 = 0.3$  のケースにおいて安定化ISPH法で定式化を行った場合と，著者らのモデルにおいて圧力ポアソン方程式のソース項を従来のISPH法と同様にしたもの(安定化パラメータ  $\alpha = 0$  とした場合)とで定式化を行った場合の比較結果を図-6に示す．解析結果は図-5に示した断面における結果を表示しており，コンターはSPH近似によって得られた数値密度を示している．図より， $t = 2.50\text{s}$  において安定化パラメータ  $\alpha = 0$  としたモデルでは体積が保存されていないが，安定化ISPH法では体積が保存されている．また，上図  $t = 0.42\text{s}$  と下図  $t = 0.50\text{s}$  をみても，本来ならば  $\varepsilon_0 = 0.3$  の時，3割の水で地盤相が満たされ，残り7割の水が流体相に留まる必要があるが，下図では明らかに半分以下の水しか留まっていない．これは安定化パラメータ  $\alpha = 0$  としたモデルにおいて体積が保存されていないためであり，近藤ら<sup>24)</sup>や田中ら<sup>25)</sup>の文献においても同様の報告がなされている．また，ISPH法と同様に圧力を陰的に解くMPS法では体積を保つための処理がいくつか提案されており<sup>2, 26)</sup>，ISPH法においてもシフティング<sup>21, 22)</sup>などの改良が必要と考えられる．安定化ISPH法では，上記のような処理をせずとも安定化パラメータを用いた項を加えるのみで体積保存性が得られ，本定式化は有用であるといえる．

また， $\varepsilon_0$  の違う3ケースの解析結果を次ページの図-7

に示す。コンターは圧力分布を示している。間隙率が大きい、つまり水の通り道が大きいケースほど、水塊が落下するスピードが速いことがみてとれ、物理の基本的な法則に従った結果が得られた。また、それぞれのケースにおいて水塊が地盤相下部に到達した時 (a)  $\varepsilon_0=0.3$  の  $t=0.42\text{s}$ , (b)  $\varepsilon_0=0.5$  の  $t=0.34\text{s}$ , (c)  $\varepsilon_0=0.8$  の  $t=0.26\text{s}$  の体積を比較すると、およそ  $\varepsilon_0$  の割合の水塊で地盤相を満たし、およそ  $1-\varepsilon_0$  の割合の水塊が上の流体相に留まっていることが確認でき、間隙率の効果とその違いが表現できている。また、変形が収束した時点での圧力分布は概ね静水圧分布と一致していることを確認した。なお、ケース(a)の  $t=0.34$  および  $0.42\text{s}$  において圧力が不均一な分布となっている。これは地盤相内部では粒子間距離が増大し、影響半径内に存在する粒子数が減少するためであり、間隙率が最小であるケース(a)において顕著に確認できる。

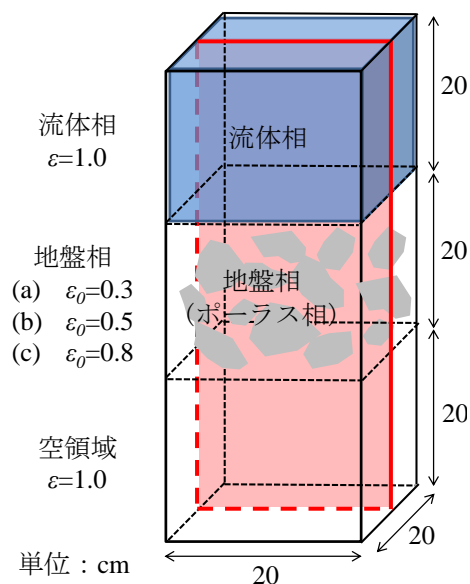


図-5 解析モデル

## 6. まとめと今後の課題

本論文では、地表流と浸透流をそれぞれナビエ・ストークス方程式、拡張ダルシー則で記述することにし、両問題を統一的に記述した支配方程式を用い、これを安定化ISPH法で定式化した。安定化ISPH法で定式化することで、間隙率に応じた体積保存性の精度よい再現だけでなく、圧力についてもある程度平滑な分布が得られた。このことから、本手法は地盤内部での動水勾配の評価が重要となる浸透崩壊解析への活用が期待できる。またその定式化の妥当性を確認するために、地盤相と空領域を落下する単純な問題を解析し、以下のような結果が得られた。

- 1) 地盤相の間隙率を変化させることで、流下するスピード、および各相での水の体積の変化が物理的な考察と合致し、妥当な解析結果を得ることができた。
- 2) 安定化パラメータ  $\alpha=0$  としたモデルでは、各相ごとに満足すべき平均的な密度を制御することができない。

地表流と浸透流の同時解析を目的とし、拡張ダルシー則とナビエ・ストークス方程式の安定化ISPH法による統一解析手法を構築することができ、上記に示したようにその有用性を確認できた。今後は水理模型実験等と比較し、本手法の妥当性を確認する必要がある。

**謝辞:** この研究はJSPS科研費26282106の助成を受けたものです。ここに記して感謝いたします。

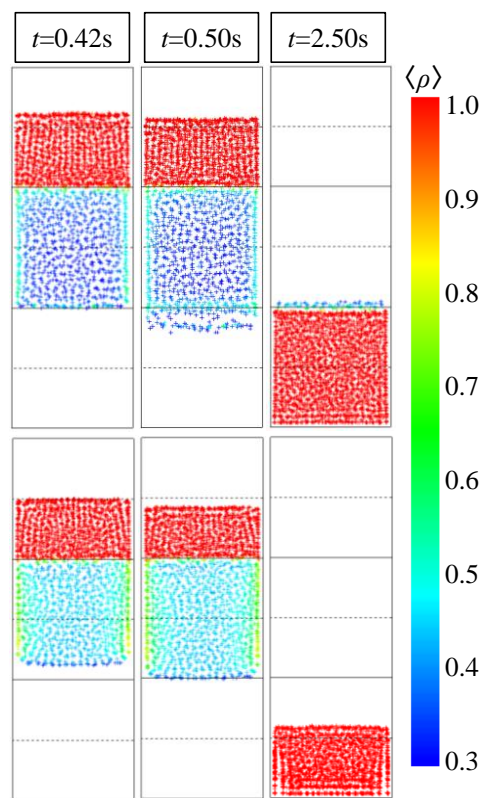


図-6 解析結果(a)  $\varepsilon_0=0.3$

(上)安定化ISPH法, (下)安定化パラメータ  $\alpha=0$  としたモデル

## 参考文献

- 1) 笠間清伸, 善功企, 春日井康夫: 浸透流に着目したケーソン式混成防波堤の安定性に関する水理模型実験, 土木学会論文集 B2(海岸工学), Vol.69, No.2, pp.1966-1970, 2013.
- 2) 越塚誠一: 粒子法, 丸善, 2005.
- 3) 田邊将一, 浅井光輝, 中尾尚史, 伊津野和行: 3次元粒子法による橋桁に作用する津波外力評価とその精度検証, 構造工学論文集, 60A, pp.293-302, 2014.

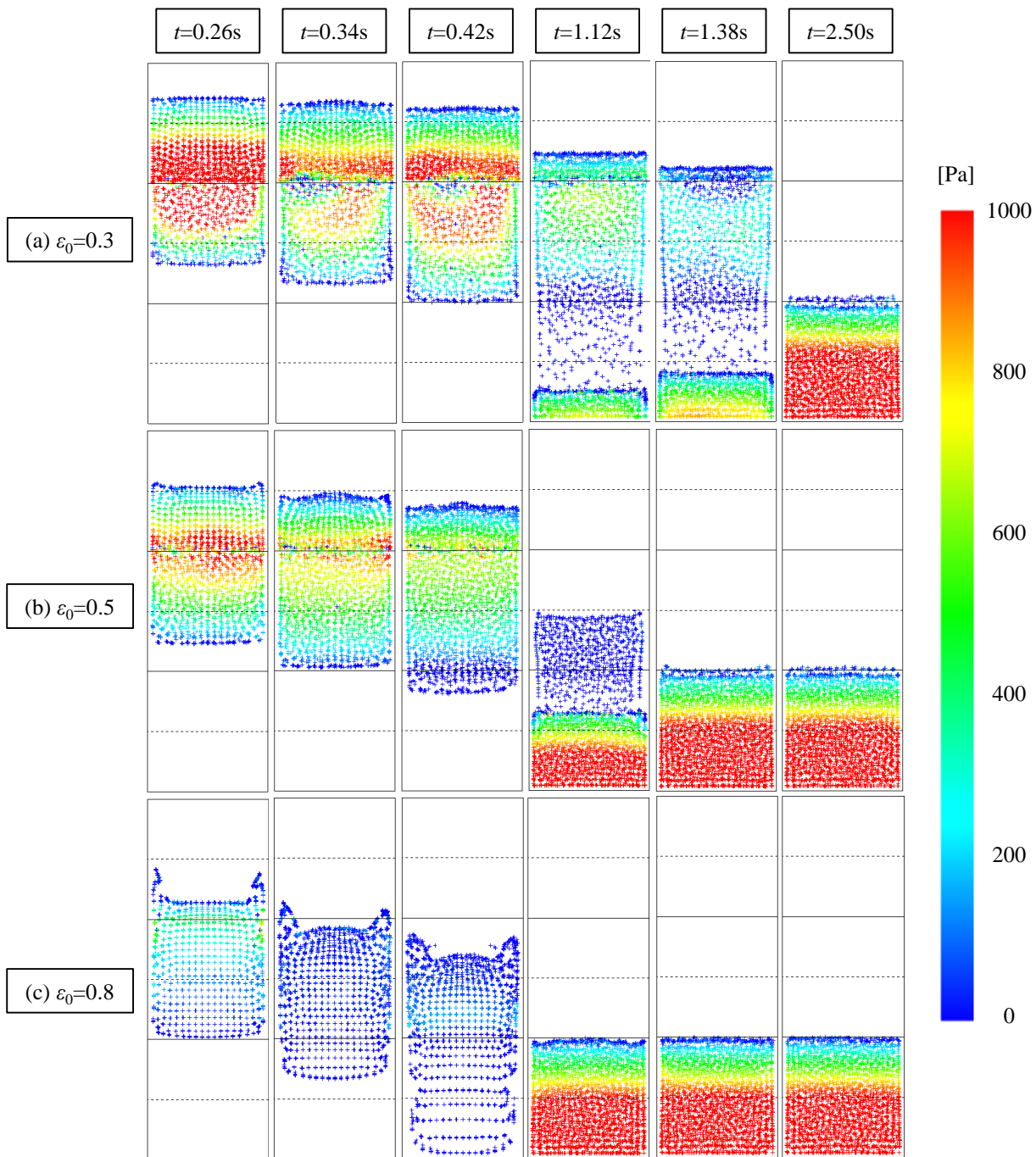


図-7 解析結果(コンターは圧力)

- 4) 五十里洋行, 後藤仁志, 新井智之: 海岸崖の侵食過程の計算力学のための流体・弾塑性体ハイブリッドモデルの構築, 土木学会論文集 B2(海岸工学), Vol.66, No.1, pp.916-920, 2010.
- 5) 野々山栄人, 中野正樹, 野田利弘: SPH 法による地盤の掘削解析, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.69, No.2(応用力学論文集 Vol.16), pp.I\_341-L\_350, 2013.
- 6) 桐山貴俊: GIMPM 法を用いた三軸圧縮試験の破壊シミュレーション, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.69, No.2(応用力学論文集 Vol.16), pp.I\_321-L\_332, 2013.
- 7) Maeda, K., Sakai, H. and Sakai, M.: Development of seepage failure analysis method of ground with Smoothed Particle Hydrodynamics, *Journal of Structural and earthquake engineering*, JSCE, Div.A, Vol.23, No.2, pp.307-319, 2006.
- 8) Maeda, K. and Sakai, H. : Seepage failure and erosion of ground with air bubble dynamics, ASCE, *Geoenvironmental Engineering and Geotechnics* (GSP 204), pp.261-266, 2010.
- 9) Sakai, H. and Maeda, K. : Seepage and erosion mechanisms of of sandy ground due to air bubbles, *Proc. of Fourth International Conference on Scour and Erosion*, pp.468-473, 2008.
- 10) 浅井光輝, 別府万寿博, 石川信隆, 眞鍋慶生, 斉藤展, 丹羽一邦: 数値流体シミュレーションによる流体衝撃力評価に関する基礎的研究, 構造工学論文集, 58A, pp.1021-1028, 2012.
- 11) 桑原不二朗: 多孔質体内熱流動の微視的数値シミュ

- レーションに関する研究, 博士論文, 静岡大学, 1997.
- 12) 安原正也, 開発一郎: 多孔質媒体中の非ダルシー流動に関する研究の流れ, 日本地下水学会会誌, 第 23 卷, 第 2 号, 1981.
  - 13) Huang, C.J., Chang, H.H. and Hwung, H.H. : Structural permeability effects on the interaction of a solitary wave and a submerged breakwater., *Coast. Eng.*, Vol.49, pp.1-24, 2003.
  - 14) Sollit, C.K. and Cross, R.H. : Wave transmission through permeable breakwaters., *Proc. 13th Coastal Eng. Conf.*, ACSE, pp. 1864-1872, 1972.
  - 15) Akbari, H. : Modified moving particle method for modeling wave interaction with multi layered porous structures. *Coast. Eng.*, Vol.89, pp.1-19, 2014.
  - 16) Akbari, H. and Namin, M.M. : Moving particle method for modeling wave interaction with porous structures, *Coast. Eng.*, Vol.74, 59-73, 2013.
  - 17) Matsuda(Imase), T. : A Study on the Tsunami Disaster Mechanism on Coastal Structures due to Instability of Rubble Mound and Seabed Ground and Its Countermeasure, 博士論文, 名古屋工業大学, 2014.
  - 18) Asai, M., Aly, AM., Sonoda, Y. and Sakai, Y. : A stabilized incompressible SPH method by relaxing the density invariance condition, *Int.l J. for Applied Mathematics*, Vol. 2012, Article ID 139583, 2012.
  - 19) Abdelraheem Mahmoud Aly Abd Allah : An Improved Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics to Simulate Fluid-Soil-Structure Interactions, 博士論文, 九州大学, 2012.
  - 20) Violeau, D. : Fluid Mechanics and the SPH method: Theory and Applications, Oxford, 2012.
  - 21) Leroy, A., Violeau, D., Ferrand, M. and Kassiotis, C. : Unified semi-analytical wall boundary conditions applied to 2-D incompressible SPH, *J. Compt. Phys.*, Vol.261, pp.106-129, 2014.
  - 22) Lind, S.J., Xu, R., Stansby, P.K. and Rogers, B.D. : Incompressible smoothed particle hydrodynamics for free-surface flows: A generalized diffusion-based algorithm for stability and validations for impulsive flows and propagating waves, *J. Compt. Phys.*, Vol.231, pp.1499-1523, 2012.
  - 23) 浅井光輝, 藤本啓介, 田邊将一, 別府万寿博: 階段状の非適合境界を有する粒子法解析における仮想マーカーを用いたすべり・非すべり境界処理法, 日本計算工学会論文集, No.20130011, 2013.
  - 24) 近藤雅裕, 越塚誠一: MPS 法における不自然な数値振動の抑制, 日本計算工学会論文集, No.20080015, 2008.
  - 25) 田中正幸, 益永孝幸: 擬似圧縮性効果による MPS 法の安定化と圧力の平滑化, 日本計算工学会論文集, No.20080025, 2008.
  - 26) 越塚誠一, 柴田和也, 室谷浩平: 粒子法入門, 丸善, 2014.

(2014. 6. 20 受付)

## UNIFIED NUMERICAL ANALYSIS BETWEEN THE EXTENDED DARCY'S LAW AND NAVIER-STOKES EQUATION BY USING STABILIZED ISPH METHOD

Toshihiro MORIMOTO, Mitsuteru ASAI, Kiyonobu KASAMA,  
Kazunori FUJISAWA and Yusuke IMOTO

In 2011, Tohoku-Kanto earthquake tsunami caused serious damage on the port structures such as breakwater and seawall. Damage mechanisms of these structures have been studied in the past, and there are mainly three causes; I. horizontal force due to the water level difference between the front and rear breakwater, II. soil scour and erosion behind the seawall during overflow and III. piping destruction associated with the decline of the bearing capacity by seepage flow. Fluid-Structure-Soil coupling simulation is desired for a systematic comprehension of seawall collapse mechanism, and it may help to develop next disaster prevention method. In this study, a particle simulation tool based on the SPH has been developed to solve seepage failure problem. This simulation should treat the surface flow and seepage flow interactions, and the particle simulation tool has been modified and improved to solve this interaction problem. In this study, as a first step, surface flow and seepage flow are described by the same government equation, and a SPH formulation has been developed. After that, efficiency and adequacy of the proposed simulation technique has been validated through an application to one test. This numerical result shows a reasonable surface flow and seepage flow behavior. In the future works, quantitative comparison with experimental results is required, and this tool may be developed to a Fluid-Structure-Soil coupling simulator.