

論文 / 著書情報  
Article / Book Information

題目(和文)	組合せ剛性理論に基づく3次元構造物生成手法の探究 - 建築デザインへの応用を目指して -
Title(English)	
著者(和文)	小林祐貴
Author(English)	Yuki Kobayashi
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:乙第4150号, 授与年月日:2018年1月31日, 学位の種別:論文博士, 審査員:藤井 晴行,大佛 俊泰,中井 検裕,竹内 徹,斎尾 直子,鍵 直樹
Citation(English)	Degree:Doctor (Engineering), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:乙第4150号, Conferred date:2018/1/31, Degree Type:Thesis doctor, Examiner:,,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

組合せ剛性理論に基づく

3次元構造物生成手法の探究

－ 建築デザインへの応用を目指して －

小林 祐貴



EXPLORATION OF METHODS OF FORM  
GENERATION BASED ON COMBINATORIAL  
RIGIDITY  
TOWARDS APPLICATIONS TO ARCHITECTURE  
DESIGN

組合せ剛性理論に基づく 3次元構造物生成手法の探究

– 建築デザインへの応用を目指して –

IN PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF  
DOCTOR OF ENGINEERING DEPARTMENT OF ARCHITECTURE AND  
BUILDING ENGINEERING

TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY

YUKI KOBAYASHI

小林 祐貴

DECEMBER, 2017



# 要旨

本論文は組合せ剛性理論に基づいた剛な構造物の生成手法を探求し、建築デザインに応用することを目的とする。建築の形態をデザインする際には、スケッチや模型の作成、CAD ソフトによるモデリングといった方法を用いて設計を行う。そのようなとき、設計者は実際に構造物を建築することを想定し、直感的に部材の接続関係などから「剛な構造物として実現可能である」、「実現するために柔らかそうな部分には部材を追加する」といった判断を行なっていると言える。実際に構造物を建築する段階では部材の正確な座標位置を決定し、数値解析によって構造物が剛であるかを判断するが、設計の初期段階から厳密な座標を決定することはデザインを限定することともなる。本論文で扱う「組合せ剛性理論」とは、構造物の接続関係をグラフとして扱うことで構造物が剛であるかを組合せ的に扱う理論である。その成果は、構造物の剛性について人が働かせる直感を、厳密に数理の問題として議論したものであると言える。これらのことから、組合せ剛性理論を建築デザインへと応用することにより、設計の初期段階より剛性の検討が可能となり、設計者が直感的に思い浮かべる形態を、より自然に建築物として実現できるようになると考える。しかしながら組合せ剛性理論による構造物が剛であるかの判定は、ある種の一般性の仮定のもとで行なわれ、このことに建築デザインに応用する難しさがある。

本論文では剛なパネルがヒンジによって繋がれた panel-hinge フレームワークと剛な棒材がピン接合によって繋がれた bar-joint フレームワークを扱う。はじめに極小剛な panel-hinge フレームワークに対応するグラフをもれなく全て

列挙する手法を示す。さらに冗長性を考慮した剛なグラフの組合せ的な特徴付けを示す。次に、グラフを列挙する操作に基づき、一般的ではない配置の剛な panel-hinge フレームワークを生成する操作を示す。操作に基づき形態生成や模型作成を行ない、建築デザインへの応用可能性を示す。bar-joint フレームワークについては、空間充填立体を極小剛にする手法を提案し、建築的な構造物を想定し筋交いを追加することにより極小剛な構造物を得る手法を示す。

### 【第 1 章 序論】

第 1 章では、研究の背景、既往研究、研究の目的及び概要について述べる。

### 【第 2 章 構造物の剛性行列と剛性の組合せ的特徴付け】

第 2 章では、本論文で扱う構造物である bar-joint フレームワークと panel-hinge フレームワークを定義し、剛性行列による剛性の判定方法を述べる。その後、それぞれの構造物について、剛性の組合せ的な特徴付けを述べる。

### 【第 3 章 極小剛な panel-hinge グラフの逐次生成手法】

第 3 章では、逐次的に panel-hinge グラフを生成する 5 つの操作を定義し、次のことを示している。(i) 極小剛な panel-hinge グラフに対して 5 つの操作を行ってできるいずれのグラフもまた、極小剛な panel-hinge グラフである。(ii) 5 つの操作の操作列を施すことにより、任意の極小剛な panel-hinge グラフを生成可能である。

### 【第 4 章 panel-hinge グラフの冗長剛性及び冗長大域剛性の特徴付け】

第 4 章では、2 次元において次の三条件が等価であることを示している。(i) panel-hinge グラフが  $(k, h)$ -剛である。(ii) panel-hinge グラフが  $(k, h + 1)$ -大域剛である。(iii) グラフが  $(k, h + 2)$ -連結である。さらに、3 次元以上においては次の三条件が等価であることを示している。(i') panel-hinge グラフが  $(k, h)$ -剛である。(ii') panel-hinge グラフが  $(k, h)$ -大域剛である。(iii') グラフが  $(k, h + 1)$ -連結である。

**【第 5 章 剛な panel-hinge フレームワークの生成手法】**

第 5 章では, 極小剛な panel-hinge グラフを逐次的に生成する操作に基づき, 非一般配置の剛な panel-hinge フレームワークを生成する手法を探究している. さらにフラクタル図形に基づき, 空間充填多面体を基本形とする非一般配置の剛な panel-hinge フレームワークを生成する手法を提案している. その後, 提案手法が建築デザインに応用可能であることを, 構造物の例や模型を作成することで示している.

**【第 6 章 極小剛な bar-joint フレームワークの生成手法】**

第 6 章では, 空間充填立体の bar-joint フレームワークに対して, 最小本数の筋交いを追加することで極小剛とする手法を示す. さらに開発した操作を拡張し, 内部空間や開口部を想定した極小剛な構造物の生成手法を提案している.

**【第 7 章 結論】**

第 7 章では, 本論文で得られた成果と今後の課題をまとめる.





# 目次

要旨	3
第 1 章 序論	11
1.1 組合せ剛性理論に関する理論的研究	15
1.1.1 既往研究	15
1.1.2 本論文の位置付け	16
1.2 建築デザインへの応用を目的とした研究	16
1.2.1 既往研究	16
1.2.2 本論文の位置付け	17
1.3 本論文の目的	18
1.4 本論文の成果	18
1.4.1 本論文の構成	19
1.4.2 発表文献	19
第 2 章 構造物の剛性行列と剛性の組合せ的特徴付け	21
2.1 剛性行列	21
2.1.1 Bar-joint フレームワークの剛性行列	21
2.1.2 Panel-hinge フレームワークの剛性行列	24
2.2 剛性の組合せ的特徴付け	26
2.2.1 剛な bar-joint フレームワークの組合せ的特徴付け	26

---

2.2.2	剛な panel-hinge フレームワークの組合せ的特徴付け . . .	27
2.3	結語 . . . . .	28
第 3 章	極小剛な panel-hinge グラフの逐次生成手法	29
3.1	序説 . . . . .	29
3.2	極小剛な panel-hinge グラフを逐次的に生成する 5 つの操作 . .	33
3.2.1	定理 3.1 の証明 . . . . .	34
3.3	定理 3.2 の証明 . . . . .	40
3.4	結語 . . . . .	50
第 4 章	Panel-hinge グラフの冗長剛性及び冗長大域剛性の特徴付け	53
4.1	序説 . . . . .	53
4.2	定理 4.1 の証明 . . . . .	55
4.3	結語 . . . . .	58
第 5 章	剛な panel-hinge フレームワークの生成手法	61
5.1	序説 . . . . .	61
5.2	直交パネルを用いた剛な panel-hinge フレームワークの生成手法	62
5.2.1	建築的な形態を想定した剛な panel-hinge フレームワー クの生成 . . . . .	67
5.3	空間充填多面体とフラクタル図形を用いた panel-hinge フレー ムワークの生成 . . . . .	69
5.4	模型作成 . . . . .	73
5.5	結語 . . . . .	75
第 6 章	極小剛な bar-joint フレームワークの生成手法	77
6.1	Bar-joint フレームワークの剛性と組合せ的な特徴付け . . . . .	79
6.2	空間充填立体を極小剛とする手法 . . . . .	82
6.2.1	立方体の空間充填立体を極小剛とする手法 . . . . .	82

目次	9
6.2.2 菱形十二面体の空間充填立体を極小剛とする手法 . . . . .	86
6.3 建築形態生成手法への拡張 . . . . .	92
6.3.1 内部空間をもつ極小剛な空間充填立体の生成手法 . . . . .	92
6.3.2 内部空間が外部につながった剛な空間充填立体の生成手法	94
6.4 結語 . . . . .	97
第7章 結論	99
参考文献	103
発表文献	109
謝辞	111



# 第1章

## 序論

建築の形態をデザインする際には、スケッチや模型の作成、CAD ソフトによるモデリングといった方法を用いて設計を行う。そのようなとき、設計者は実際に構造物を建築することを想定し、直感的に部材の接続関係などから「剛な構造物として実現可能である」、「実現するために柔らかそうな部分には部材を追加する」といった判断を行なっていると言える。実際に構造物を建築する段階では部材の正確な座標位置を決定し、数値解析によって構造物が剛であるかを判断するが、設計の初期段階から厳密な座標を決定することはデザインを限定することともなる。本論文で扱う組合せ剛性理論 (theory of combinatorial rigidity) とは、構造物の接続関係をグラフとして扱うことで構造物が剛であるかを組合せ的に扱う理論である。その成果は、構造物の剛性について人が働かせる直感を、厳密に数理の問題として議論したものであると言える。これらのことから、組合せ剛性理論を建築デザインへと応用することにより、設計の初期段階より剛性の検討が可能となり、設計者が直感的に思い浮かべる形態をより自然に建築物として実現できるようになると考える。しかしながら組合せ剛性理論による構造物が剛であるかの判定は、ある種の一般性の仮定のもとで行われ、このことに建築デザインに応用する難しさがある。

構造体の動きが元々の構造体の合同変換のみである場合、その構造体は剛

(rigid) であるとする. 剛な棒材 (bar) とピン接合 (joint) で構成される構造体を **bar-joint** フレームワークとよぶ. 剛な構造体からどの棒材を 1 つ取り除いた場合にも, 剛ではなくなる (柔軟となる) フレームワークのことを極小剛 (minimally rigid) とよぶ.

**panel-hinge** フレームワークとは, ヒンジ (hinge) によってつながれた 2 次元の剛なパネル (panel) の集合である (図 1.1(a)). パネルは  $\mathbb{R}^3$  において連続的に動くことが許されている. ここでのヒンジとは直線で, ヒンジによってつながれた 2 つのパネルの動きはヒンジ周りの回転である. panel-hinge フレームワークをグラフ  $G = (V, E)$  と  $e \in E$  の 1 次元アフィン部分空間  $\mathbf{p}(e)$  への写像  $\mathbf{p}$  の組  $(G, \mathbf{p})$  として考える.  $v \in V$  はパネルに対応し,  $uv \in E$  は 2 つのパネル  $u, v$  をつなぐヒンジ  $\mathbf{p}(uv)$  に対応する. このとき,  $\mathbb{R}^3$  上に  $G$  が実現されたといい, このグラフ  $G$  を **panel-hinge** グラフとよぶ (図 1.1(b)).

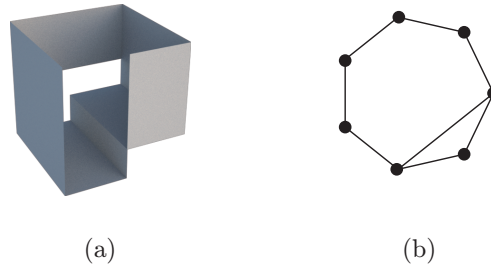


図 1.1 (a) panel-hinge フレームワーク (b) panel-hinge グラフ

組合せ剛性理論は構造物の接続関係をグラフとして扱うことで, その剛性についての特徴付けを組合せ的に行う理論であり, 様々な構造物の特徴付けが成されている [49]. さらに, 構造物の剛性に関する基礎的知見を与えることに留まらず, 機械設計やタンパク質の挙動シミュレーション・知的 CAD の開発・センサーネットワークのローカライゼーション等, 90 年代後半から様々な分野において応用されている [14]. 組合せ的な特徴付けに基づき, いわゆる一般的な (generic) 配置を前提としたフレームワークの剛性判定は, 構造力学分野において行われている剛性行列のランクを計算する剛性判定と比較して, 少ない計算時間で実行可

能である。このことは、構造物を構成する部材が増えるに従って有用である。例えば、デザインの変更に伴って、部材数が数千～数万程度の構造物の剛性判定を、繰り返し行う場合などを想定した時に、組合せ剛性論の成果を効果的に活用できると考える。また、一般的な配置の詳細な定義については、2章に記載する。アルゴリズムック・デザインと呼ばれる設計手法 [56] により生成される形態には、大量の部材によって構成されるものが多く、組合せ剛性理論の応用が期待される。組合せ剛性理論では、様々な構造物の剛性について組合せ的な特徴付けが為されている。本研究では建築への応用を考慮した場合に有用な bar-joint フレームワーク、panel-hinge フレームワークに着目する。

建築デザインの分野では、評価基準が必ずしもはっきりせず、最適化問題が明確に定義できない場合が多い。このような場合、大域最適解 (数理計画問題における目的関数を最適化する解。単に最適解ということが多いが、局所最適解との区別を強調するとき、大域最適解と呼ぶ。) を求めることはできないので、制約条件を満たす解をすべて列挙しておけば、その中から、設計者が解を1つに絞り込むことができる [57]。そのため、本研究では列挙問題を扱う。

panel-hinge グラフから3次元的なフレームワークを想像することは困難である。さらに剛なフレームワークを得るためには具体的なヒンジ配置を考慮する必要がある。そこで、本研究ではヒンジ配置を考慮した上で剛なフレームワークを生成し、建築デザインへの応用が可能であることを示す。

panel-hinge フレームワークが剛であるかどうかの判定は剛性行列のランク計算によって確認することができる。フレームワークを構成する部材数が多くなるにつれて、剛性行列のランク計算において数値誤差が生じる。一方で、組合せ的な特徴づけによる構造物の剛性判定では、そのような数値誤差は生じない。しかし、組合せ剛性理論による構造物の剛性判定はいわゆる一般的な配置の構造物にのみ適応することができる (図 1.2)。従って、組合せ剛性理論に基づいた建築デザインの手法を開発するためには、一般的な配置を考慮する必要がある。建築デザインへの応用を考える際には、一般的な配置ではない場合を扱うことが多いた



め、理論を拡張する必要がある (デザインにはパターンを繰り返し用いたり, 平行や対称な配置が扱われる [3]).

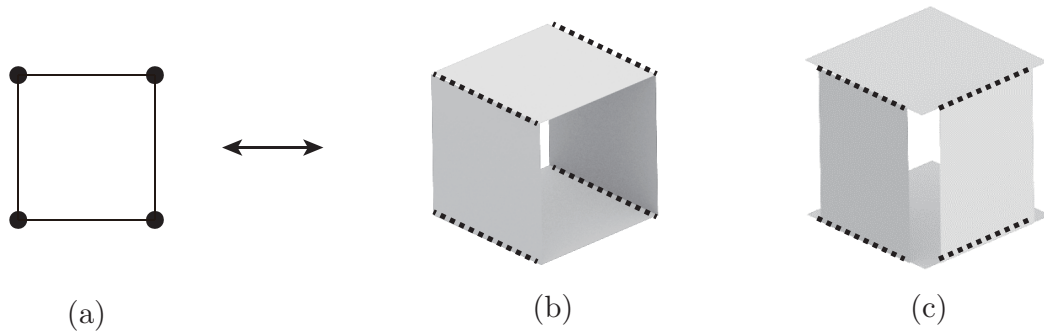


図 1.2 (a) panel-hinge グラフ (b) (a) に対応する柔軟な panel-hinge フレームワーク (c) (a) に対応する剛な panel-hinge フレームワーク

本研究で扱う panel-hinge フレームワークは, 折紙を拡張した枠組みとみなすことができ, 折紙は建築デザインに応用され始めている [39]. 折紙を panel-hinge フレームワークとみなし, 枠組みを拡張することにより, より建築デザインに適した形態を生成可能にすると考えられる. 例えば, いくつかのヒンジを追加することで, 小さな panel-hinge フレームワークを大きな panel-hinge フレームワークとすることができる. あるいはヒンジを除くことで, 大きな panel-hinge フレームワークを小さな panel-hinge フレームワークとすることができる. さらに, 冗長な panel-hinge フレームワークを考えることで, 剛性を失うことなくヒンジやパネルを修理することができる. あるいは自由度を持つフレームワークを考えることで, 変形可能な形態を生成することができる.

また, 本論文における組合せ剛性理論に関する用語は, 日本において組合せ剛性理論の第一人者である Katoh [53], Tanigawa [54] が用いる言葉に従う.

## 1.1 組合せ剛性理論に関する理論的研究

### 1.1.1 既往研究

2次元の bar-joint フレームワークが極小剛であるための必要十分条件は Laman によって示されており [19], 特に極小で剛なグラフを **Laman** グラフと呼ぶ. この Laman グラフを演繹的に生成する手法については, **Henneberg** 構築という方法が知られており, これによりすべての Laman グラフを生成できることが知られている [48]. しかしながら基本的な問題である, 3次元の bar-joint フレームワークに対する剛性の組合せ的特徴付けの導出は未解決な状態である [48].

Tay, Whiteley らにより, body-bar, body-hinge フレームワーク (図 1.3(a) および (b)) とした構造物の特徴付けが為されている [48]. **Body-bar** フレームワークとは, 剛な棒材 (bar) によってピン接合でつながれた剛体 (body) の集合であり, Body-bar グラフは剛体をグラフの頂点に, 棒材をグラフの辺に対応させたグラフである. Body-hinge フレームワークとは, ヒンジ (hinge) でつながれた剛体 (body) の集合である. 一般的なジョイント配置の body-bar フレームワークに関して, 極小剛な body-bar フレームワークに対応する極小剛な body-bar グラフは, 6つの辺素な全域木によって, 剛性を特徴づけることができることを Tay は示した [42]. また, 極小剛な body-bar グラフは, [46] のアルゴリズムを用いることですべて高速に列挙可能である.

Katoh らは panel-hinge フレームワーク (図 1.3(c)) に関して, パネルを剛体として扱うことで body-hinge フレームワーク (図 1.3(b)) と同様の議論が可能であることを示している [14]. panel-hinge グラフに関しては第 2 章 2.2.2 項で述べるグラフの特性上, body-bar グラフと同様なアルゴリズムで列挙することはできず, 多項式時間で列挙するアルゴリズムはこれまで知られていなかった.

また, グラフの冗長剛性については 2次元の bar-joint フレームワークにつ

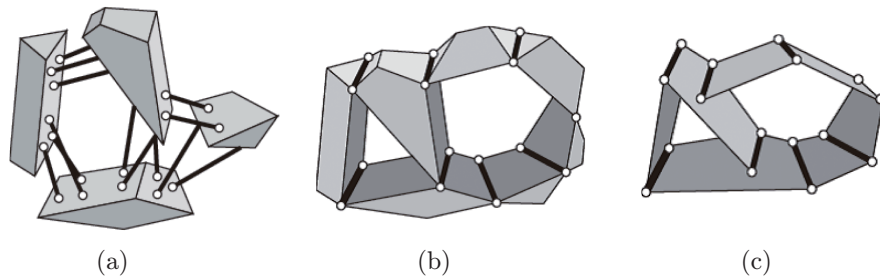


図 1.3 (a) body-bar フレームワーク (b) body-hinge フレームワーク (c) panel-hinge フレームワーク

いては，剛性とグラフの連結性に関する既往研究がある [11, 23, 37].

### 1.1.2 本論文の位置付け

本論文ではこれまで知られていなかった，逐次的に極小剛な panel-hinge グラフを生成する手法を開発し，もれなく効率よく列挙する手法を明らかにする．

さらに冗長剛な panel-hinge グラフについては，グラフ理論において広く研究がなされている，グラフの連結性との関係を明らかにする．

2次元の bar-joint フレームワークの場合，任意のグラフから冗長剛な bar-joint グラフを求める問題は多項式時間で解くことはできないが [7]，本論文の成果により，任意の panel-hinge グラフを任意の次元において最小本数の辺を追加することにより，冗長剛とすることができる．

## 1.2 建築デザインへの応用を目的とした研究

### 1.2.1 既往研究

組合せ剛性理論の成果は分子生物学や機械工学等，様々な分野において応用されている [49, 53]. 分子生物学分野においては，分子を構成する原子を剛体とみなし，原子間の結合や原子間に働く力を棒材によって表現した分子フレームワークとしてモデル化し，組合せ剛性理論を用いた剛性判定が行われている [53].

建築学分野への応用に関する研究は、大崎, 第二著者ら [32] による, 部材同士が交差しないことを制約として極小剛な 2 次元 bar-joint フレームワークを生成する手法の研究, 岡野, 第二著者ら [33] による, グラフの同型性判定を行いながら極小剛な 2 次元 bar-joint フレームワークを列挙する手法の開発と, 極小剛な 3 次元構造物の模型作成, 古田, 第二著者ら [17] の研究といった構造分野における研究がある.

折紙は本研究で扱う panel-hinge フレームワークの特殊な場合として捉えることができる. 折紙に関しては形態生成について多くの研究がなされており, Lang による意図した構造を持った形を折り出すための理論 [20] や, それを実現するためのソフトウェア TreeMaker [21] などが考案されている.

### 1.2.2 本論文の位置付け

本論文では, 組合せ剛性理論に基づいて一般のヒンジ配置ではない剛な panel-hinge フレームワークを逐次的に生成する手法を探求する. 例えば分子生物学分野では, 一般の配置を前提として, 厳密な剛性判定ではなく, 高速で精度の良いシミュレーション方法が求められていることから, 組合せ剛性理論による剛性判定が利用されている. 本論文では, 数値解析による剛性判定と比較してより直感的な剛性の組合せ的特徴付けを, 建築デザインへと応用することを目指し, 非一般のヒンジ配置の剛な panel-hinge フレームワークの生成手法を提案し, 建築デザインへの応用手法を提案する.

さらに組合せ的な特徴付けが長年未解決である 3 次元 bar-joint フレームワークについては, 空間充填多面体を用いた 3 次元の極小剛な bar-joint フレームワークの生成手法, 剛な panel-hinge フレームワーク生成手法を探求し, 建築デザインへの応用手法を提案する.

### 1.3 本論文の目的

本論文は組合せ剛性理論に基づいた剛な構造物の生成手法を探求し、建築デザインに応用することを目的とする。構造物の剛性を考えることなく建築形態を実現することはできない。組合せ剛性理論を建築デザインに応用することにより、構造物の接続関係から剛性を判定する特性を生かし、設計の初期段階より構造物の剛性を検討することができる。このことは、通常、建築分野において独立したプロセスである意匠設計と構造設計を、横断的に行うことを可能とし、より魅力的な建築構造物の実現につながると考える。

### 1.4 本論文の成果

**第 2 章：構造物の剛性行列と剛性の組合せ的特徴付け。**

本論文で扱う構造物である bar-joint フレームワークと panel-hinge フレームワークを定義し、剛性行列による剛性の判定方法を述べる。その後、それぞれの構造物について、剛性の組合せ的な特徴付けを述べる。

**第 3 章：極小剛な panel-hinge グラフの逐次的生成手法。**

極小剛な panel-hinge グラフの列挙問題を扱う。極小剛な panel-hinge グラフを逐次的に導出する操作を開発し、これによりすべての panel-hinge グラフを漏れなく、効率よく出力 1 つあたり多項式時間で生成可能であることを示した。

**第 4 章：Panel-hinge グラフの冗長剛性及び冗長大域剛性の特徴付け。**

冗長剛な panel-hinge グラフの組合せ的な特徴づけを行う。冗長剛な panel-hinge グラフとグラフ理論分野で広く知られている、グラフの連結性との関係を明らかにした。

**第 5 章：剛な panel-hinge フレームワークの生成手法。**

剛な panel-hinge フレームワークを実現する問題を扱う。2 枚、3 枚の直交パネルを追加して剛な panel-hinge フレームワークを生成する方法を開発し、建築デ

ザインへの応用に取り組んだ。

## 第 6 章: 極小剛な bar-joint フレームワークの生成手法.

極小剛な空間充填立体 bar-joint フレームワークを生成する問題を扱う. 空間充填立体 bar-joint フレームワークに対して, ブレースを追加することで極小剛にする手法を示し, 提案手法を用いた剛な bar-joint フレームワークの形態生成を行った.

### 1.4.1 本論文の構成

本論文では組合せ剛性理論分野における問題を第 3 章および第 4 章で扱い, 構造物の生成における問題を第 5 章, 第 6 章で扱う (図 1.4). 第 5 章で提案する剛なフレームワークを生成する操作は, 第 3 章のグラフを逐次的に生成する操作に基づく.

### 1.4.2 発表文献

第 3 章は発表文献 [B] に基づき, 第 4 章は [D] に基づいている. [A] は [B] の準備段階の論文である. 第 5 章は [E] に基づき, 第 6 章は [F] に基づいている. [C] は [E] の準備段階の論文である.

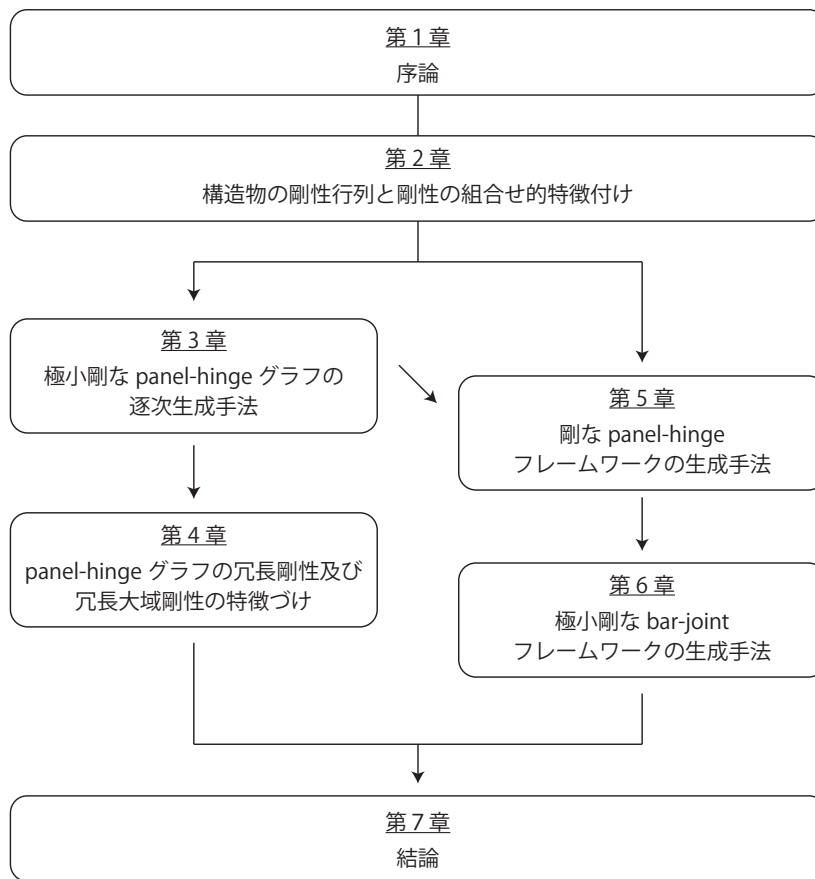


図 1.4 本論文の構成

## 第 2 章

# 構造物の剛性行列と剛性の組合 せ的特徴付け

### 2.1 剛性行列

#### 2.1.1 Bar-joint フレームワークの剛性行列

ここでは, bar-joint フレームワークの剛性に関するいくつかの定義と事実を記す. 組合せ剛性理論において, 3 次元 bar-joint フレームワーク は グラフ  $G = (V, E)$  と写像  $\mathbf{p} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  の組  $(G, \mathbf{p})$  で表される. ここで  $G$  の各頂点はジョイントを, 各辺は棒材に対応しており,  $\mathbf{p}$  は各ジョイントの配置である. このようなグラフ  $G$  のことを **bar-joint** グラフと呼び, 極小剛な bar-joint フレームワークとして実現可能な bar-joint グラフのことを, 極小剛な **bar-joint** グラフと呼ぶ.

辺  $e = (u, v) \in E$  に対応するフレームワークの棒材の長さは  $\|\mathbf{p}(u) - \mathbf{p}(v)\|$  により与えられる. 棒材は剛であるとし,  $\|\mathbf{p}(u) - \mathbf{p}(v)\|$  はいかなるフレームワークの変形のもとでも一定である. フレームワークの連続変形を考えた場合,  $\mathbf{p}(u)$  を変数  $t$  の連続関数, すなわち  $\mathbf{p}_t(u)$  として表すことができる. ここで, すべての  $v \in V$  に対して,  $\mathbf{p}_0(v) = \mathbf{p}(v)$  が成立すると仮定する. フレームワーク



が変形した場合にも、棒材の長さは変わらないことより、以下の式を得る。

$$(\mathbf{p}_t(u) - \mathbf{p}_t(v)) \cdot (\dot{\mathbf{p}}_t(u) - \dot{\mathbf{p}}_t(v)) = 0, \forall (u, v) \in E \quad (2.1)$$

$\dot{\mathbf{p}}_0(v)$  は  $t = 0$  におけるジョイント  $v$  の速度ベクトルとみなすことができ、単純に、 $\dot{\mathbf{p}}(v) = (\dot{x}(v), \dot{y}(v), \dot{z}(v))$  とする。  $\mathbf{u}(v) = \dot{\mathbf{p}}_0(v)$  とし、  $t = 0$  について式 (2.1) は以下のように変換できる。

$$(\mathbf{p}(u) - \mathbf{p}(v)) \cdot (\mathbf{u}(u) - \mathbf{u}(v)) = 0, \forall (u, v) \in E \quad (2.2)$$

式 (2.2) の線形方程式は、以下の行列として表すことができ、

$$R(G, \mathbf{p})\mathbf{u}^\top = \begin{bmatrix} \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) & \dots & (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \mathbf{u}^\top = \mathbf{0}^\top$$

行列  $R(G, \mathbf{p})$  は剛性行列 (rigidity matrix) と呼ばれている。

例えば以下の図 2.1 のような 2 次元フレームワークの剛性行列  $R_G(\mathbf{p})$  は以下のようなになる。

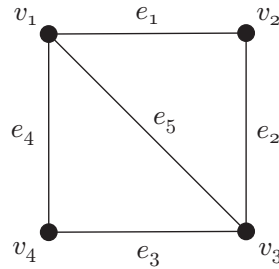


図 2.1 2 次元 bar-joint フレームワーク

$$e_1 \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ p_{x,1} - p_{x,2} & p_{x,2} - p_{x,1} & 0 & 0 & p_{y,1} - p_{y,2} & p_{y,2} - p_{y,1} & 0 & 0 \\ 0 & p_{x,2} - p_{x,3} & p_{x,3} - p_{x,2} & 0 & 0 & p_{y,2} - p_{y,3} & p_{y,3} - p_{y,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{x,3} - p_{x,4} & p_{x,4} - p_{x,3} & 0 & 0 & p_{y,3} - p_{y,4} & p_{y,4} - p_{y,3} \\ p_{x,1} - p_{x,4} & 0 & 0 & p_{x,4} - p_{x,1} & p_{y,1} - p_{y,4} & 0 & 0 & p_{y,4} - p_{y,1} \\ p_{x,1} - p_{x,3} & 0 & p_{x,3} - p_{x,1} & 0 & p_{y,1} - p_{y,3} & 0 & p_{y,3} - p_{y,1} & 0 \end{pmatrix}$$

また, この  $R(G, \mathbf{p})$  に対して, 3 つの独立なベクトル  $\mathbf{u}_x = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{u}_y = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{u}_r = (-p_{y,1}, -p_{y,1}, -p_{y,1}, -p_{y,1}, p_{x,1}, p_{x,2}, p_{x,3}, p_{x,4})$  はそれぞれ先の等式を満たすことが確認される. この  $\mathbf{u}_x$  は  $x$  軸方向の平行移動,  $\mathbf{u}_y$  は  $y$  軸方向の平行移動, また  $\mathbf{u}_r$  は反時計まわりの回転に相当する. つまり, これらの線形結合で得られるベクトルも同様に先の等式を満たし, そのような無限小動き  $\mathbf{u}$  を自明な無限小動き (trivial infinitesimal motion) と呼ぶ. 可能な無限小動きが全て自明なフレームワークを, 無限小剛 (infinitesimally rigid) という. またそれ以外するとき, フレームワークは無限小柔軟 (infinitesimally flexible) という.

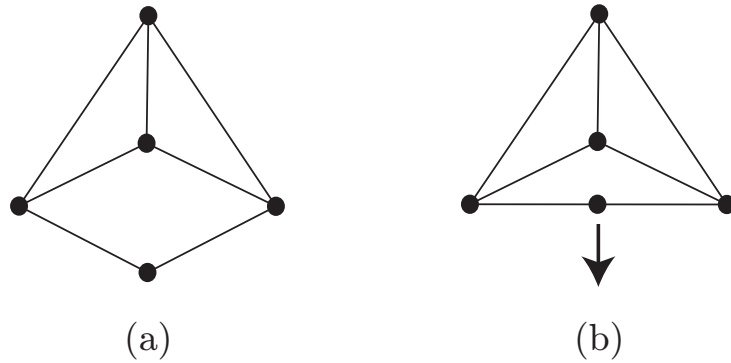


図 2.2 2次元上で (a) 無限小剛なフレームワークと (b) 無限小柔軟なフレームワーク (矢印が非自明な無限小動きを表す)

どのようなフレームワークに関しても自明な無限小動きの集合の次元は  $\binom{d+1}{2}$  であり,  $R(G, \mathbf{p})$  が無限小剛であるためには,

$$\text{rank } R(G, \mathbf{p}) = d|V| - \binom{d+1}{2} \quad (2.3)$$

が必要十分条件となる.

### 2.1.2 Panel-hinge フレームワークの剛性行列

パネルの合同変換は同次座標系を用いることで、平行移動と回転を共に含んだ  $4 \times 4$  の行列  $M$  で表すことができる。ここで、2つのパネル  $B, B'$  がヒンジ  $H$  によって接続されているとし、 $H$  の両端点の同次座標を  $\mathbf{p}_1 = (p_{1,x}, p_{1,y}, p_{1,z}, 1)$ ,  $\mathbf{p}_2 = (p_{2,x}, p_{2,y}, p_{2,z}, 1)$  とする (図 2.3)。そして、パネルの動きを表す行列  $M, M'$  がそれぞれ  $B, B'$  に与えられているとする。このとき、ヒンジによる制約は  $M\mathbf{p}_1 = M'\mathbf{p}_1, M\mathbf{p}_2 = M'\mathbf{p}_2$  と表すことができる。この等式を微分して、以下の式が得られる。

$$M\mathbf{p}_i = M'\mathbf{p}_i \quad \text{for } i = 1, 2 \quad (2.4)$$

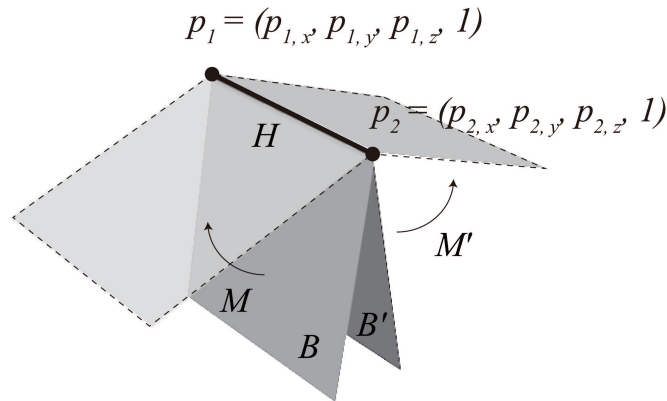


図 2.3 2枚のパネルがヒンジにより接続されている

$I$  および  $I'$  は  $B, B'$  に割り当てられた無限小動きとみなすことができる。  $I = \begin{pmatrix} R & v^\top \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  とあらわすことができると知られている。ここで  $R$

は  $R = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$ ,  $v = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$  である. 同様に  $I'$  も  $\begin{pmatrix} R' & v'^\top \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  と表わすことができる. (2.4) に代入して整理すると以下の式が得られる.

$$\left( \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} \omega_y - \omega'_y & \omega_z - \omega'_z \\ p_{1,y} & p_{1,z} \end{array} \right| + v_x - v'_x, \left| \begin{array}{cc} \omega_z - \omega'_z & \omega_x - \omega'_x \\ p_{1,z} & p_{1,x} \end{array} \right| + v_y - v'_y, \\ \left| \begin{array}{cc} \omega_x - \omega'_x & \omega_y - \omega'_y \\ p_{1,x} & p_{1,y} \end{array} \right| + v_z - v'_z, \left| \begin{array}{cc} \omega_y - \omega'_y & \omega_z - \omega'_z \\ p_{1,y} - p_{2,y} & p_{1,z} - p_{2,z} \end{array} \right|, \\ \left| \begin{array}{cc} \omega_z - \omega'_z & \omega_x - \omega'_x \\ p_{1,z} - p_{2,z} & p_{1,x} - p_{2,x} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \omega_x - \omega'_x & \omega_y - \omega'_y \\ p_{1,x} - p_{2,x} & p_{1,y} - p_{2,y} \end{array} \right| \end{array} \right) = 0$$

となり, 次の等式をみたす  $t$  が存在する.

$$(\omega - \omega', v - v') = t \left( \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} p_{1,x} & 1 \\ p_{2,x} & 1 \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} p_{1,y} & 1 \\ p_{2,y} & 1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} p_{1,z} & 1 \\ p_{2,z} & 1 \end{array} \right|, \\ \left| \begin{array}{cc} p_{1,y} & p_{1,z} \\ p_{2,y} & p_{2,z} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} p_{1,z} & p_{1,x} \\ p_{2,z} & p_{2,x} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} p_{1,x} & p_{1,y} \\ p_{2,x} & p_{2,y} \end{array} \right| \end{array} \right) \quad (2.5)$$

式 (2.5) の左辺はヒンジでつながれた両側の剛体の無限小動きを表わしており, 右辺の 6 次元ベクトルはヒンジによる制約を表している.

無限小動きの定義より, すべての  $e = uv \in E$  について, 以下の等式を満たす無限小動きに直交するベクトル  $r_i(\mathbf{p}(e)) (1 \leq i \leq 5)$  をとることができ, このとき  $S$  を  $(G, \mathbf{p})$  の無限小動きとよぶ.

$$(S(u) - S(v)) \cdot r_i(\mathbf{p}(e)) = 0$$

すなわち, 式 (2.4) の無限小動きは  $5|E|$  個の等式で記述され,  $5|E| \times 6|V|$  の行列  $R(G, \mathbf{p})$  を

$$R(G, \mathbf{p}) = \begin{matrix} & \cdots & u & \cdots & v & \cdots \\ e=uv & \left( \begin{array}{cccccc} \vdots & & & & & \\ \cdots 0 \cdots & r(\mathbf{p}(e)) & \cdots 0 \cdots & -r(\mathbf{p}(e)) & \cdots 0 \cdots & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \end{array} \right) \end{matrix}$$

とする. ここで,  $r(\mathbf{p}(e))$  は  $5 \times 6$  の行列であり,  $r(\mathbf{p}(e)) = \begin{pmatrix} r_1(\mathbf{p}(e)) \\ \vdots \\ r_{D-1}(\mathbf{p}(e)) \end{pmatrix}$  である. この  $R(G, \mathbf{p})$  が panel-hinge フレームワークの剛性行列であり,  $R(G, \mathbf{p})$  のランクが  $6(|V| - 1)$  と等しい場合, そのフレームワークは剛であることが知られている [14].  $R(G, \mathbf{p})$  が, すべての部分グラフにおいて最大のランクをもつとき, そのフレームワークは一般的であるという [12].

## 2.2 剛性の組合せ的特徴付け

### 2.2.1 剛な bar-joint フレームワークの組合せ的特徴付け

以下の定理は Maxwell の条件として知られている [25].

**定理 2.1** (Maxwell [25]). 伸び縮みのない  $|E|$  本の棒材と  $|V|$  個のジョイントで構成された 3 次元 bar-joint フレームワークが剛であるためには  $|E| \geq 3|V| - 6$  が必要条件である.

さらに Alexandrov [1] は以下の定理を示している.

**定理 2.2** (Alexandrov [1]). 任意の凸多面体の各面を三角形分割した bar-joint フレームワークは剛である.

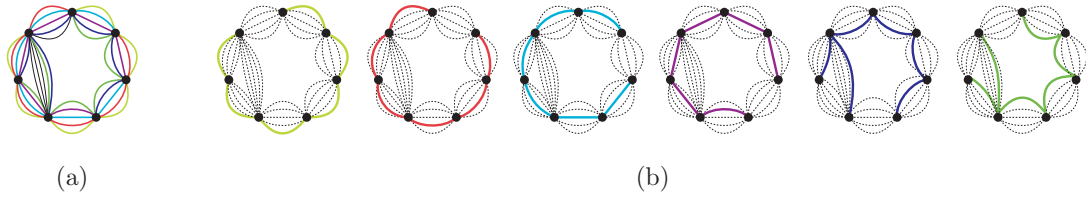


図 2.4 (a)  $D = 6$  のとき, 図 1.3(c) のフレームワークに対応するグラフの各辺を  $D - 1 (= 5)$  本の辺で置き換えてできたグラフ  $\tilde{G}$ . (b)  $\tilde{G}$  における 6 個の辺素な全域木

## 2.2.2 剛な panel-hinge フレームワークの組合せ的特徴付け

2.1.2 節では, すべてのヒンジ配置について剛性判定が可能な手法について述べてきた. 一方で, 剛性行列のランク計算はその複雑さから, 構造物の部材数が多くなるにつれて困難となり, 数値誤差も生じやすくなる. そのため, 一般的なヒンジ配置を前提とした組合せ的な特徴付けが有用となる.

body-hinge フレームワークの各剛体を剛なパネルで置き換えたフレームワークが panel-hinge フレームワークである (図 1.3(c)). Katoh と Tanigawa [14] は以下の命題を示した.

**命題 2.1** (Katoh et al. [14]).  $G = (V, E)$  をグラフとする.  $G$  が  $\mathbb{R}^d$  において無限小剛な *body-hinge* フレームワークとして実現可能であるための必要十分条件は  $G$  は  $\mathbb{R}^d$  において無限小剛な *panel-hinge* フレームワークとして実現可能であることである.

このことから, 一般的なヒンジ配置の剛な panel-hinge フレームワークの組合せ的な特徴付けは以下である.

**命題 2.2** (Katoh et al. [14]). グラフ  $G$  の各辺を 5 本の多重辺で置き換えたグラフを  $\tilde{G}$  とする.  $\tilde{G}$  が 6 個の辺素な全域木をもつことは,  $G$  が  $\mathbb{R}^3$  において一般的なヒンジ配置をとる剛な panel-hinge フレームワークとして実現可能であ

ることの必要十分条件である.

図 2.4(a) は図 1.3(c) の panel-hinge フレームワークに対応するグラフである.  $G$  を 5 重化したグラフ  $\tilde{G}$  には図 2.4(b) のように 6 つの辺素な全域木を詰込むことが可能であり, 命題 2.2 は 3 次元上に一般的なヒンジ配置をとる剛な panel-hinge フレームワークを実現可能であることを示している.

ここで, 無限小剛な panel-hinge フレームワークに対応するグラフのことを剛な panel-hinge グラフと呼ぶ. さらに, 極小で無限小剛な panel-hinge フレームワークに対応するグラフのことを極小剛な panel-hinge グラフと呼ぶ.

多重辺を含むが自己ループを持たない多重グラフを  $G = (V, E)$  とする.  $X \subseteq V$  について,  $G[X]$  を  $X$  により誘導されるグラフとし,  $\delta_G(X) = \{uv \in E \mid u \in X, v \notin X\}$  とする. 任意の正の整数を  $m$  とし,  $1 \leq i, j \leq m, i \neq j$  とし,  $\cup_{i=1}^m V_i = V$  としたとき, 頂点の部分集合の集合  $\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$  を  $V$  の分割  $\mathcal{P}$  とする.  $\delta_G(\mathcal{P})$  を,  $\mathcal{P}$  において別の頂点集合間をつなぐ  $G$  の辺集合とする.  $\tilde{E}$  を  $\tilde{G}$  の辺集合とする. 以下の Tutte-Nash-Williams の辺素な木に関する定理が知られている [31, 45].

**命題 2.3** (Tutte, Nash-Williams [31, 45]). 多重グラフ  $G = (V, E)$  に  $k$  個の辺素な全域木を詰め込み可能であることは,  $V$  のすべての分割  $\mathcal{P}$  について  $|\delta_G(\mathcal{P})| \geq k(|\mathcal{P}| - 1)$  が成り立つことが必要十分条件である.

## 2.3 結語

本章では, bar-joint フレームワーク, panel-hinge フレームワークの剛性行列を定義した. さらに組合せ剛性理論において, これまでに明らかとなっている, bar-joint フレームワーク, panel-hinge フレームワークについての組合せ的な特徴付けを述べた.

## 第 3 章

# 極小剛な panel-hinge グラフの逐次生成手法

### 3.1 序説

一般の 2 次元の bar-joint フレームワークが無小剛であるための必要十分条件は Laman [19] により示されている。Laman グラフは Henneberg 構築によって生成可能であることが知られており、すべての Laman グラフが Henneberg 構築によって生成可能であることも示されている [9, 49]。さらに、マトロイドの性質を用いることによって、[46] のアルゴリズムにより、効率よくすべての Laman グラフを列挙することが可能である。一方で、一般の 3 次元の bar-joint フレームワークの組合せ的な特徴づけについては未解決である [49]。

3 次元 bar-joint フレームワークの特殊な場合である body-bar フレームワーク、panel-hinge フレームワークについては組合せ的な特徴づけは Tay と Whiteley [43, 48] によりなされている。body-bar フレームワーク (図 1.3(a)) は剛な棒材でつながれた剛体の集合であり、剛体は頂点、棒材は辺に対応させた body-bar グラフとして表現される。 $d$  次元において、一般的配置の極小剛な body-bar フレームワークに対応する極小剛な body-bar グラフが、 $D$  個の辺素



な全域木によって特徴づけられることが知られている [42].  $D$  個の辺素な全域木は  $D$  個のグラフィックマトロイドの和集合とみなすことができ, [46] のアルゴリズムを用いることにより, すべての極小剛な body-bar グラフを列挙する多項式時間アルゴリズムを容易に開発することができる. さらに,  $d$  次元の極小剛な body-bar グラフを逐次的に生成する方法も知られている [5].

一方で, 極小剛な panel-hinge グラフについては, これまで逐次的な生成手法は知られていなかった. Katoh と Tanigawa は極小剛な panel-hinge グラフが与えられた時, より小さなサイズの極小剛な panel-hinge グラフを生成する 2 つの操作 (極小剛な真部分グラフを縮約する操作と次数 2 の頂点を 1 つ除いて辺を追加する操作 *splitting off*) については示している [14].

本章では  $d \geq 3$  とした時,  $d$  次元において単純グラフである極小剛な panel-hinge グラフを逐次的に生成する 5 つの操作を開発した (詳細は 3.2 節を参照). より正確には, 以下の定理を示した.

**定理 3.1.** 任意の極小剛な *panel-hinge* グラフ  $G$  が与えられたとき, 5 つの操作のうち少なくともひとつを適用することができ, 頂点数が 1 または 2,  $G$  よりも大きい単純グラフである極小剛な *panel-hinge* グラフを得ることができる. さらに, 各操作は多項式時間で実行可能である.

**定理 3.2.** 三角形グラフから開始し, 5 つの操作の操作列を施すことによって, 任意の単純グラフである極小剛な *panel-hinge* グラフを得ることができる.

多重グラフである panel-hinge グラフは工学的な観点からは重要ではないので, 本研究では, 単純グラフである panel-hinge グラフに着目する.

多重辺を含むが自己ループを持たない多重グラフを  $G = (V, E)$  とする.  $X \subseteq V$  について,  $G[X]$  を  $X$  により誘導されるグラフとし,  $\delta_G(X) = \{uv \in E \mid u \in X, v \notin X\}$  とする.  $X = \{v\}$  について, 単体のみによる集合を記述する際に, 集合を表す括弧を例えば  $\delta_G(\{v\})$  は  $\delta_G(v)$  とするよう省略する. 本章において, 任意の正の整数を  $m$  とし,  $1 \leq i, j \leq m, i \neq j$  とし,  $\cup_{i=1}^m V_i = V$

としたとき, 頂点の部分集合の集合  $\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$  を  $V$  の分割  $\mathcal{P}$  とする.  $\delta_G(\mathcal{P})$  を,  $\mathcal{P}$  において別の頂点集合間をつなぐ  $G$  の辺集合とする.  $\tilde{E}$  を  $\tilde{G}$  の辺集合とする. さらに  $\tilde{e}$  を  $\tilde{E}$  の辺  $e$  を  $D-1$  個の平行な辺に置き換えた辺の集合とする.  $1 \leq i \leq D-1$  とし,  $\tilde{e}$  の辺を  $e_i$  とインデックスをつけ,  $\tilde{e}$  の  $i$  番目の辺と表すこととする.

Katoh と Tanigawa [14] は極小剛な panel-hinge グラフ  $G = (V, E)$  から, より小さな極小剛な panel-hinge グラフを生成する 2 つの操作を示した.

一つ目の操作は剛な真部分グラフを縮約する操作である. ここで,  $1 < |V'| < |V|$  を満たす  $G$  の部分グラフ  $G' = (V', E')$  が剛であるとき,  $G'$  を剛な真部分グラフと呼ぶ (図 3.1(a)).

二つ目の操作は, *splitting off* と呼ばれる操作である (図 3.1(b)).  $G$  の頂点  $v$  について,  $G$  において  $v$  が隣接する頂点の集合を  $N_G(v)$  とする. 次数 2 の頂点についてのみ *splitting off* の操作を行うことができる. ここで  $N_G(v) = \{a, b\}$  とする.  $G_v^{ab}$  を,  $G$  から  $v$  と  $v$  に接続する辺を除き, 新たな辺  $ab$  を追加してできるグラフとする. したがって,  $G_v^{ab}$  は  $va$  または  $vb$  を縮約してできるグラフと同型である.

剛な真部分グラフには様々な頂点数のグラフを考えることができ, 縮約の逆操作によって, より大きな極小剛なグラフを生成すると頂点数が突然大きいグラフができることとなり, 列挙することができない.

したがって, これら 2 つの逆操作のみによって, 直接的にすべての極小剛な panel-hinge グラフを多項式時間で列挙するアルゴリズムは構築できないことに注意する.

さらに, 以下の 6 つの補題が知られている [14].

**補題 3.1.** [14] 剛な *panel-hinge* グラフを  $G$  とする. このとき  $G$  は 2 辺連結グラフである.

以下の補題は, 極小剛な panel-hinge グラフの剛な部分グラフを縮約してでき

Proper rigid subgraph

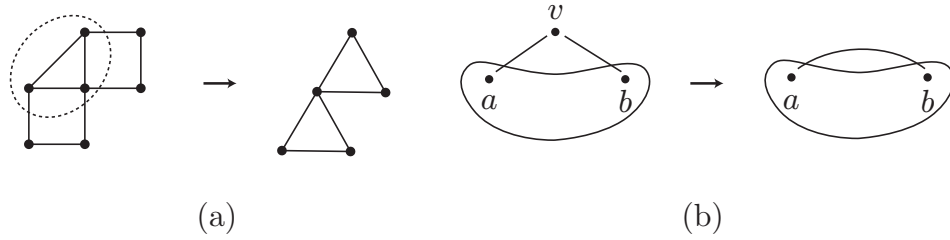


図 3.1 (a) 真に剛な部分グラフを縮約する操作 (b) 次数 2 の頂点に対して splitting off の操作を行う。

るグラフが、より小さなサイズの極小剛な panel-hinge グラフであることを示している。

**補題 3.2.** [14] 多重グラフである極小剛な *panel-hinge* グラフを  $G = (V, E)$  とし、 $G$  の剛な部分グラフを  $G' = (V', E')$  とする。このとき  $G$  に対して  $E'$  を縮約してできるグラフは多重グラフである極小剛な *panel-hinge* グラフである。

剛な真部分グラフを持たない極小剛な *panel-hinge* グラフに着目したとき、頂点の個数により、辺の本数の上限が以下の補題によって与えられる。

**補題 3.3.** [14] 剛な真部分グラフを持たない、多重グラフである極小剛な *panel-hinge* グラフを  $G = (V, E)$  とする。このとき、以下が成り立つ。

$$(D - 1)|E| < D(|V| - 1) + D - 1 \quad (3.1)$$

以下の補題は次数が低い頂点が存在していることを示している。

**補題 3.4.** [14] 剛な真部分グラフを持たない、多重グラフである極小剛な *panel-hinge* グラフを  $G = (V, E)$  とする。このとき、 $G$  はサイクルグラフであるか、 $0 \leq i \leq d - 1$  において  $v_i v_{i+1} \in E$  のような長さ  $d$  の鎖  $v_0, v_1, \dots, v_d$  を含み、 $1 \leq i \leq d - 1$  において  $|\delta_G(v_i)| = 2$  が成り立つ。

以下の補題は極小剛な *panel-hinge* グラフ  $G$  において  $G_v^{ab}$  は常に剛であるこ

とを示している.

**補題 3.5.** [14] 剛な *panel-hinge* グラフを  $G = (V, E)$  とする. このとき,  $N_G(v) = \{a, b\}$  とする次数 2 の任意の頂点  $v$  について,  $G_v^{ab}$  は剛な *panel-hinge* グラフである.

splitting off は一般に極小性は保証していない. しかし剛な真部分グラフを持たない極小剛な *panel-hinge* グラフについては splitting off を行ってできるグラフは極小剛となる.

**補題 3.6.** [14] 剛な真部分グラフを持たない, 極小剛な *panel-hinge* グラフを  $G = (V, E)$  とする. このとき,  $N_G(v) = \{a, b\}$  とする次数 2 の任意の頂点  $v$  について,  $G_v^{ab}$  は極小剛な *panel-hinge* グラフである.

本章の構成は以下の通りである. 3.2 節では 5 つの操作を導入し, 定理 3.1 を証明する. 3.3 節では定理 3.2 を証明する. 3.4 節では本章の結語を述べる.

## 3.2 極小剛な panel-hinge グラフを逐次的に生成する 5 つの操作

頂点数を  $n$  とし  $n \geq 3$  とする. 単純グラフである極小剛な *panel-hinge* グラフ  $G = (V, E)$  について考える.  $n = 3$  のとき,  $G$  は三角形グラフである.  $G$  よりも頂点数が 1 または 2 大きい単純グラフである極小剛な *panel-hinge* グラフ  $G' = (V', E')$  を生成する以下の 5 つの操作を定義する.

**操作 1 (edge-split):** ある辺  $ab$  を選び,  $ab$  に対して新たに頂点  $v$  を追加してできるグラフが剛であるとき, 頂点を追加する (図 3.2(1)).

**操作 2 (edge-split plus 1-addition):** 以下を満たす  $V$  の頂点分割  $\mathcal{P}$  が存在する

場合を考える.

$$(D-1)|\delta_G(\mathcal{P})| = D(|\mathcal{P}| - 1) \quad (3.2)$$

$\mathcal{P} = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}$  とする. ある辺  $ab \in \delta_G(\mathcal{P})$  に対して,  $ab$  に対して新たに頂点  $v$  を追加する.  $1 \leq i, j \leq m, i \neq j$  としたとき,  $x \in V_i, y \in V_j$  となり, 辺  $ab$  を  $E \cup \{va, vb\} \setminus \{ab\}$  に追加することによって  $G$  よりできるグラフ  $H$  が極小剛となる頂点  $x, y \in V$  を見つける. このとき辺  $xy$  を追加する (図 3.2(2)). 次節では常にこのような辺  $xy$  が存在することを示す.

**操作 3** (vertex 2-addition): 新たに頂点  $v$  を追加し, 頂点  $a, b$  を選び, 辺  $va, vb$  を追加してできるグラフが極小剛であるとき, この操作を行う (図 3.2(3)).

**操作 4** (triangle-addition): 任意の頂点  $a$  を選び, 新たに頂点  $v_1$  と  $v_2$ , 辺  $v_1a, v_1v_2, v_2a$  を追加する (図 3.2(4)).

**操作 5** (triangle-expansion): 任意の頂点  $a$  を選択する.  $a$  の次数を  $d$  とする. 頂点  $b$  と  $c$  が少なくともひとつ,  $a$  の隣接頂点につながった三角形グラフ  $v, b, c$  で  $a$  を置き換えることで  $G$  からできるグラフを  $H$  とする. この操作は操作後のグラフが極小剛である場合にのみ行う (図 3.2(5)). より正確には,  $N_G(a) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  とし,  $p'$  を  $2 \leq p' \leq p$  を満たす正の整数とする.  $V' = V \cup \{b, c\} \setminus \{a\}$ ,  $E' = E \cup \{v_i b : 1 \leq i \leq p' - 1\} \cup \{v_i c : p' \leq i \leq p\} \setminus \{v_i a : 1 \leq i \leq p\}$  とする  $H = (V', E')$  とする.

### 3.2.1 定理 3.1 の証明

5つの操作のうちの1つを施してできるグラフを  $H = (V', E')$  とする.

(1) edge-split (図 3.2(1)).

$H$  が極小であることを示す. 背理法を用いるために  $H$  が極小ではない, すなわち冗長な辺  $f$  が  $H$  に存在すると仮定する. 従って  $f$  を取り除いても  $H$  は剛で



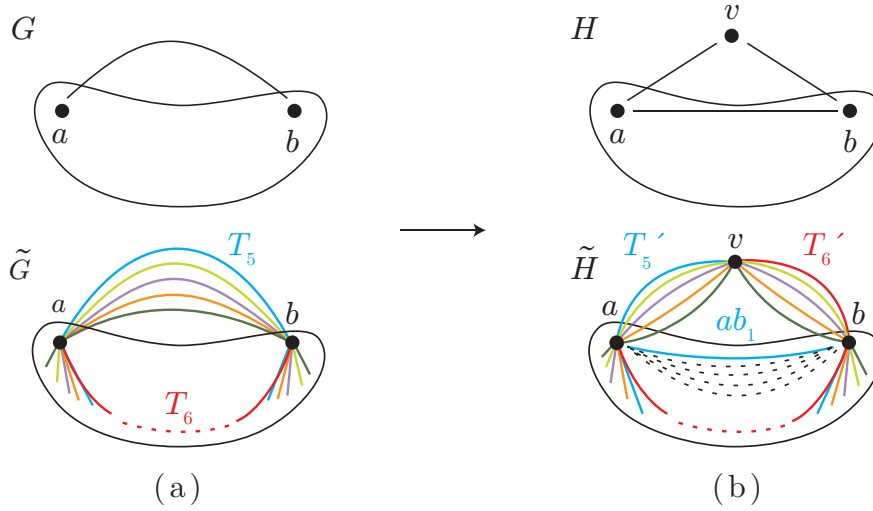


図 3.4  $D = 6$  の時の操作 2 に関する図. (a) 極小剛な panel-hinge グラフ  $G$  と  $G$  に対応する  $\tilde{G}$ . (b) 操作 2 を  $G$  に対して行っているグラフ  $H$  と  $H$  に対応する  $\tilde{H}$ .

$(V_1, V_2, \dots, V_m, V_{m+1} (= \{v\}))$  は命題 2.3 の条件を満たしていないので  $ab$  を edge-split してできたグラフは剛ではない. そこで,  $1 \leq i, j \leq m, i \neq j$  としたとき,  $x \in V_i, y \in V_j$  とし,  $E \cup \{va, vb\} \setminus ab$  に辺  $xy$  を追加することで  $G$  よりできるグラフ  $H$  を剛とするような辺  $xy$  が常に存在することを示す. そのような辺  $xy$  が存在することを適確と呼ぶこととする. このことを示すために,  $ab$  が適確であることを示す. 辺  $ab_j$  を使用する全域木を  $T_j$  ( $1 \leq j \leq D-1$ ) とし,  $\tilde{ab}$  を使用しない全域木を  $T_D$  とするような  $\tilde{G}$  における  $D$  個の辺素な全域木を  $T_j$  ( $1 \leq j \leq D$ ) とする (図 3.4(a)).  $T_1, \dots, T_D$  において  $j = 1, 2, \dots, D-2$  とし,  $T'_j = T_j \cup \{va_j, vb_j\} \setminus \{ab_j\}$ ,  $T'_{D-1} = T_{D-1} \cup \{va_{D-1}, ab_1\}$ ,  $T'_D = T_D \cup \{vb_{D-1}\}$  とする (図 3.4(b)). このとき  $T'_1, \dots, T'_D$  は明らかに  $\tilde{H}$  において辺素な全域木である. よって  $H$  は剛である. しかし, 極小剛ではない場合がある.

操作を行ってできるグラフが極小剛であるときのみ, この操作は行うこととし, グラフが極小剛であるかの判定は例えばペブルゲームアルゴリズムを用いることで調べることができる [22].

(3) vertex 2-addition (図 3.2(3)).

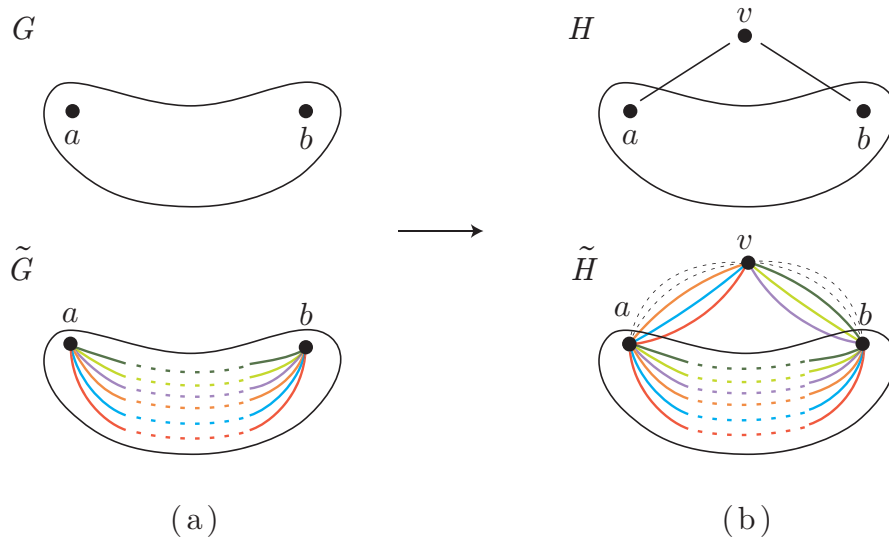


図 3.5  $D = 6$  の時の操作 3 に関する図. (a) 極小剛な panel-hinge グラフ  $G$  と  $G$  に対応する  $\tilde{G}$ . (b) 操作 3 を  $G$  に対して行っていくことができるグラフ  $H$  と  $H$  に対応する  $\tilde{H}$ .

$H$  が剛であることを示す.  $va_j$  または  $vb_{j'}$  を追加することにより,  $\tilde{G}$  の  $D$  個の辺素な全域木  $T_j$  ( $1 \leq j \leq D$ ) から  $D$  個の辺素な全域木  $T'_j$  ( $1 \leq j \leq D$ ) を  $\tilde{H}$  についてとることができることを示す (図 3.5(b)).  $\tilde{v}a \cup \tilde{v}b$  の辺数は  $2(D - 1)$  であることから, 常に可能である. 従って, vertex 2-addition によって得られるグラフ  $H$  もまた剛である. 一方で常に極小であるとは限らないので, この操作もまた, 操作後のグラフが極小剛であるときにのみ行う.

(4) triangle-addition (図 3.2(4)).

$H$  が極小剛な panel-hinge グラフであることを示す. グラフ  $G$  は極小剛な panel-hinge グラフであるので,  $\tilde{G}$  には  $D$  個の辺素な全域木が存在する.  $F$  を三角形グラフとし, ここで  $F$  は極小剛な panel-hinge グラフである. このとき,  $\tilde{F}$  には  $D$  個の辺素な全域木が存在する (図 3.6(a)).  $G$  と  $F$  は単一の頂点  $a$  を共有するので,  $\tilde{G}$  と  $\tilde{F}$  の全域木の和集合は明らかに  $\tilde{H}$  の全域木となる (図 3.6(b)).  $G$  と  $F$  ののが極小剛であることから  $H$  も明らかに極小である. 従って  $H$  は極小剛な panel-hinge グラフである.



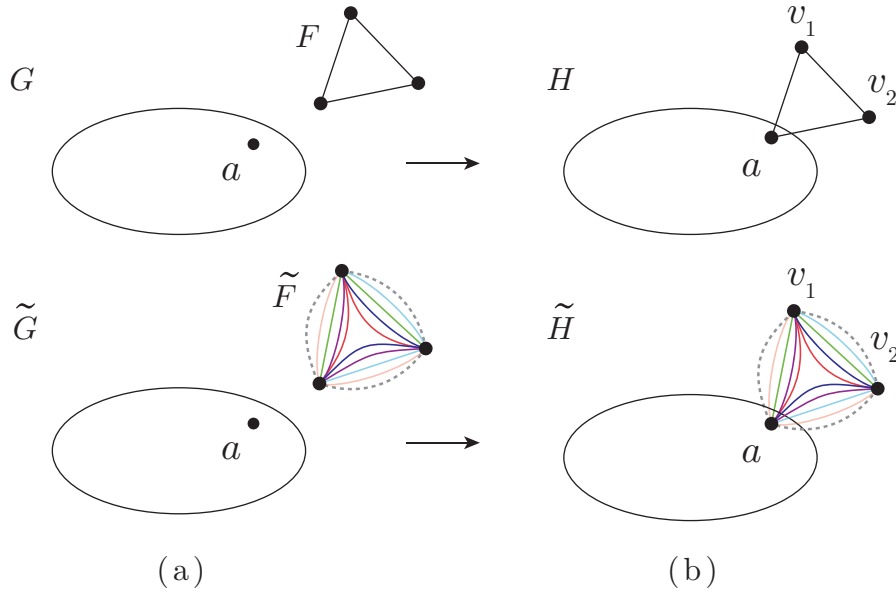


図 3.6  $D = 6$  の時の操作 4 に関する図. (a) 極小剛な panel-hinge グラフ  $G$  と  $G$  に対応する  $\tilde{G}$ . (b) 操作 4 を  $G$  に対して行っているグラフ  $H$  と  $H$  に対応する  $\tilde{H}$ .

(5) triangle-expansion (図 3.2(5)).

$H$  が剛であることを示す.  $F = vbc$  を三角形グラフとする. このとき  $F$  は極小剛な panel-hinge グラフである. 従って  $\tilde{F}$  には  $D$  個の辺素な全域木が存在する (図 3.7(a)).  $G'$  を  $H$  から  $v$  及び接続する辺  $vb$  と  $vc$  を除き  $bc$  としたグラフとする.

$G$  の全域木を  $T$  としたとき, 1 辺が  $a$  に接続するとき (その辺を  $v_i a$  と呼ぶ),  $1 \leq i \leq p' - 1$  として  $G'$  の部分グラフ  $S_T$  の  $v_i b$  に対応させ, それ以外を  $v_i c$  とするような  $S_T$  を自然に定義することができる.

より丁寧に言えば,  $S_T$  の辺集合は以下によって定義される.

$$\begin{aligned} & \{e \in T \mid e \text{ is not incident to } a\} \cup \{v_i b \mid v_i a \in T, 1 \leq i \leq p' - 1\} \\ & \cup \{v_i c \mid v_i a \in T, p' \leq i \leq p\} \end{aligned}$$

このとき,  $F$  の全域木と  $S_T$  の和集合が  $H$  の全域木であることは容易に確認

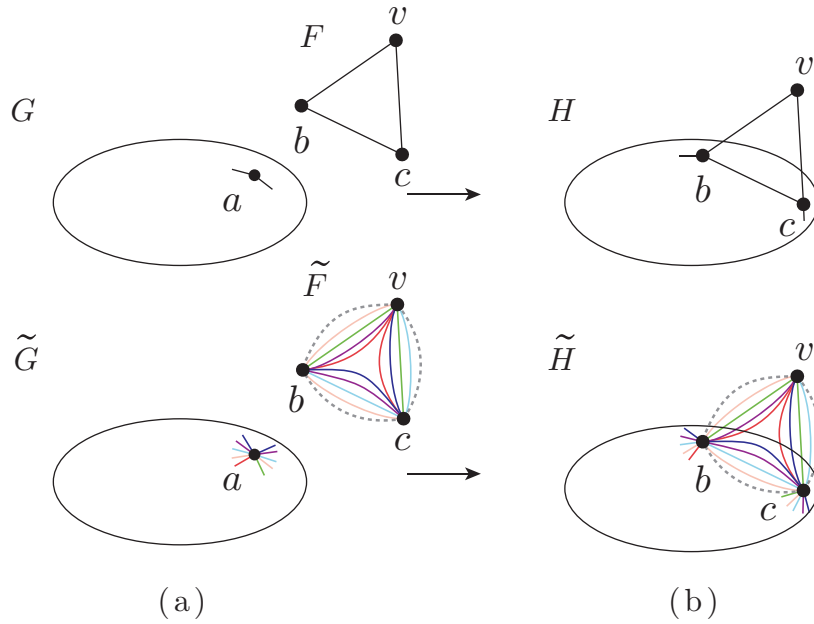


図 3.7  $D = 6$  の時の操作 5 に関する図. (a) 極小剛な panel-hinge グラフ  $G$  と  $G$  に対応する  $\tilde{G}$ . (b) 操作 5 を  $G$  に対して行っているグラフ  $H$  と  $H$  に対応する  $\tilde{H}$ .

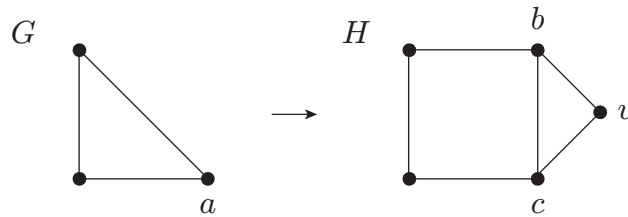


図 3.8  $D = 6$  の時の操作 5 に関する図. 操作 5 を行なって極小剛ではない panel-hinge グラフができる例.

できる. すなわち triangle-expansion によってできるグラフ  $H$  は剛である.

しかし, 操作 5 によってできるグラフは常に極小剛であるとは限らない. 図 3.8 に示す極小剛な panel-hinge グラフ  $G$  について, 三角形  $v, b, c$  によって頂点  $a$  を置き換えてできるグラフ  $H$  を考える.  $H$  から辺  $bc$  を除いてできるグラフが剛であることから  $H$  は冗長なグラフである.

最後に 5 つの操作が多項式時間で実行可能であることを示す. (3.2) を満たす

$\mathcal{P}$  を多項式時間で見つけることができる (より正確には, 最大流  $O(n)$  で計算することを応用することで可能である [35]). 操作 2 を行う際に辺  $xy$  を追加することによってできるグラフが剛であるかの確認はペブルゲームアルゴリズム [22] を用いることによって  $O(n^2)$  で可能である. その他の 4 つの操作も多項式時間で実行可能である.  $\square$

### 3.3 定理 3.2 の証明

本節では定理 3.2 の証明を行う. はじめに以下の 3 つの補題を示す.

**補題 3.7.**  $G' = (V', E')$  を  $|V'| \geq 3$  とし, 剛な真部分グラフを含まない, 単純グラフである極小剛な *panel-hinge* グラフとする. このとき, 次数 2 の頂点数は  $(D-3)|V'|/(D-1) + 2/(D-1)$  以上である.

**証明** 補題 3.3 より, 以下が成り立つ.

$$(D-1)|E'| < D(|V'| - 1) + (D-1) \quad (3.3)$$

次数 2 の頂点数を  $k$  とする. このとき  $|V'| - k$  個の次数 2 よりも大きい頂点が存在することとなる. これより以下が成り立つ.

$$2k + 3(|V'| - k) \leq 2|E'| \quad (3.4)$$

式 (3.3) と 式 (3.4) より

$$2(D-1)k + 3(D-1)(|V'| - k) \leq 2(D-1)|E'| \leq 2D(|V'| - 1) + 2(D-1)$$

その結果, 以下が得られる.

$$k \geq (D-3)|V'|/(D-1) + 2/(D-1) \quad \square$$

**補題 3.8.** 多重グラフである極小剛な *panel-hinge* グラフを  $G = (V, E)$  とする.

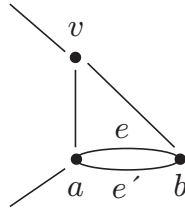


図 3.9 頂点  $a, b$  間の 2 重辺を縮約した後に 2 重辺ができる場合.

このとき, (a)  $G$  は 2 つより多い多重辺を持たない. (b) 二重辺を 1 つの頂点に縮約して新たに多重辺ができることはない.

**証明** (a)  $G$  が頂点  $a$  と  $b$  の間に三重辺を持つと仮定する.  $\tilde{G}$  と  $\tilde{G}$  の  $D$  個の辺素な全域木について考える. このとき  $\tilde{G}$  は高々  $D$  が  $D$  個の辺素な全域木に用いられる辺  $3(D-1)$   $D \geq 6$  及び  $2(D-1) \geq D$  より  $a$  と  $b$  の三重辺の少なくとも 1 辺は冗長である.

(b) 二重辺を縮約した後のグラフも, 補題 3.3 より極小剛である. 二重辺を縮約することによってできるグラフに新しい二重辺ができると仮定する. これは二重辺  $e$  と  $e'$  が頂点  $a, b \in V$  の間に存在することであり, さらに頂点  $a$  と  $b$  は共通の隣接頂点  $v$  を持つ (図 3.9).  $e$  または  $e'$  が冗長であり,  $G$  の極小性に反する. 従って二重辺を縮約することによって新たに二重辺はできない. □

以下の補題は定理 3.2 の証明において重要な役割を担う.

**補題 3.9.**  $|V| \geq 3$  とし, 単純グラフである極小剛な *panel-hinge* グラフ  $G = (V, E)$  には少なくとも 1 つ次数 2 の頂点が存在する.

**証明** 背理法を用いるために, すべての頂点の次数が 3 以上である単純グラフである極小剛な *panel-hinge* グラフ  $G$  が存在すると仮定する. 以下の 2 つの場合を考える.

**場合 1.**  $G$  が剛な真部分グラフを持たない場合.

各頂点の次数が 3 以上であるので, 以下が成り立つ.

$$3|V| \leq 2|E| \quad (3.5)$$

補題 3.3 及び式 (3.5) より

$$3(D-1)|V| \leq 2(D-1)|E| \leq 2D(|V|-1) + 2(D-1) \quad (3.6)$$

その結果  $(D-3)|V| \leq -2$  となり,  $|V| \geq 3$  に反する.

**場合 2.**  $G$  が剛な真部分グラフを持つ場合.

各頂点の次数が 3 以上であるすべての極小剛な panel-hinge グラフ  $G$  の中から最小の頂点数のグラフを選ぶ.  $G' = (V', E')$  を  $G$  の最小の頂点数の真部分グラフとする. 仮定より  $G$  は次数 2 の頂点を持たず, 補題 3.7 より  $|\delta_G(V')| \geq 3$  となる.  $G'$  を頂点  $s$  に縮約してできるグラフを  $G''$  とし, 以下の 2 つの場合について考える. 補題 3.2 より,  $G''$  は極小剛な panel-hinge グラフである.

**場合 2A.**  $G''$  が二重辺を持たない場合.

このとき,  $G''$  は単純グラフである極小剛な panel-hinge グラフである. さらに  $|\delta_G(V')| \geq 3$  より  $s$  の次数は 3 以上であり,  $G$  についての仮定より, 他の頂点の次数についても 3 以上である. これは  $G$  の頂点数が最小であることに反する.

**場合 2B.**  $G''$  が二重辺を持つ場合.

このとき,  $G'$  と  $G \setminus G'$  をつなぐ辺は  $G \setminus G'$  の頂点を共有する (図 3.11).  $G'$  を単一の頂点に縮約した後, いくつかの二重辺の集合が存在する. すべての二重辺を単一の頂点に縮約した後, 補題 3.8 より縮約した後のグラフは二重辺を持たない.

**主張 3.1.**  $G''$  について  $s$  に隣接する頂点数が 3 以上のとき,  $s$  に接続するすべての多重辺を縮約してできるグラフに次数 2 の頂点は存在しない.

**証明**  $v_1, \dots, v_l$  を  $s$  に隣接する頂点とする. 多重辺が存在する場合を考える.  $s$

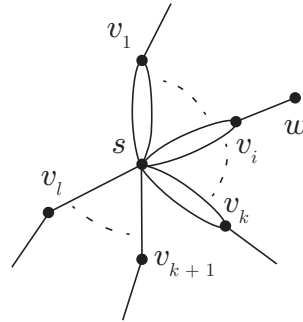


図 3.10  $s'$  に隣接する頂点

と  $v_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) の間に多重辺が存在し,  $s$  と  $v_j$  ( $k+1 \leq j \leq l$ ) の間に単一の辺が存在すると仮定した場合にも一般性は失われない (図 3.10).  $v_1, \dots, v_k$  の次数は 3 以上なので,  $v_1, \dots, v_k$  の各頂点は  $s$  以外の頂点に少なくとも 1 つ隣接する.  $v_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) について  $w$  を  $v_i$  の  $s$  以外の隣接する頂点とする.  $w \neq v_1, \dots, v_k$  であることを背理法によって示す. 三角形グラフは極小剛な panel-hinge グラフであるので,  $v_i, w, s$  の誘導部分グラフは冗長である.  $G''$  は冗長となり,  $G''$  が極小剛であることに反する. したがって,  $1 \leq j \leq k$  の時, 任意の  $j$  について  $w \neq v_j$  が成立する.

$s'$  を  $s$  と  $v_l$  の間のすべての多重辺を縮約してできる頂点とし,  $G'''$  をすべての多重辺を縮約してできるグラフとする. このとき  $|\delta_{G'''}(s')| \geq l$  となる.  $l \geq 3$  より,  $s$  に接続するすべての多重辺を縮約して次数 2 の頂点ができることはない. □

補題 3.4 より,  $G'$  は  $(D+1)$  以上の頂点数のグラフ, または頂点数  $D$  以下のサイクルグラフであるので, それぞれの場合について考える.

**場合 2B-a.**  $G'$  の頂点数が  $D+1$  以上の場合.  $G'$  の頂点数が最小であるので,  $G'$  は剛な真部分グラフを持たない. 従って補題 3.7 より,  $G'$  は  $D-1$  以上の次数 2 の頂点を持つ.  $G'$  と  $G \setminus G'$  の間に  $D-1$  本以上の辺が存在することとなる.

補題 3.7 より  $|\delta_{G''}(s)| = |\delta_G(V')| \geq D-1$  が成り立つ. 補題 3.2 より  $G''$  は極小剛であり,  $G''$  は補題 3.8 より 2 より多い多重辺は持たない. 従って,  $G''$  に

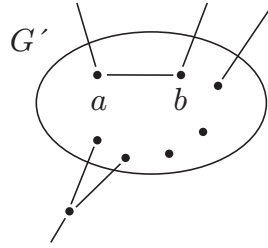


図 3.11  $G'$  の頂点数は高々  $D + 1$  (図は  $D = 6$  の場合)

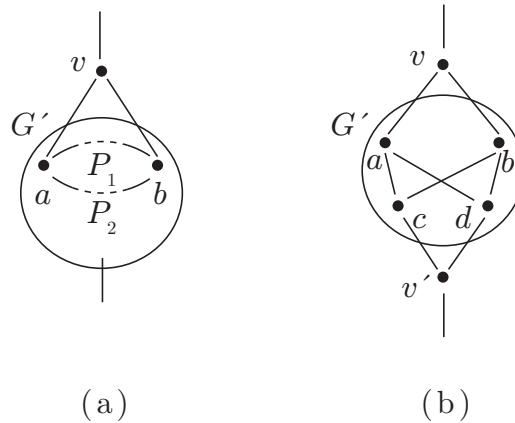


図 3.12 (a)  $G'$  はサイクルグラフ (b)  $G''$  について,  $G'$  を縮約してできる頂点  $s$  は 2 つの隣接頂点を持つ.

において  $s$  に隣接する頂点数は  $\lceil (D - 1)/2 \rceil$  以上であり,  $D \geq 6$  より 3 以上である. このことから, この場合は主張 3.1 が適応できる. したがって, 縮約によって次数 2 の頂点ができることはない. 従って, 縮約によって各頂点が次数 3 以上の単純グラフである極小剛な panel-hinge グラフができるが, このことは  $G$  の頂点数の最小性に矛盾する.

場合 2B-b.  $G'$  が頂点数  $D$  以上のサイクルグラフの場合.

$G'$  と  $G \setminus G'$  の間の 3 辺が  $G \setminus G'$  の頂点を共有しているとき, そのうちの 1 辺は冗長であり,  $G$  が極小剛であることに矛盾する.

従って,  $G'$  と  $G \setminus G'$  の間の 2 辺が  $G \setminus G'$  の頂点を共有している場合を考える.

$va, vb$  がそのような辺であるとする. このとき補題 3.1 より, 剛な panel-hinge グラフは 2-辺連結であるので,  $G'$  の頂点  $a$  と  $b$  の間には辺素な経路  $P_1, P_2$  が存在する (図 3.12(a)).  $G'$  は  $G$  の最小の剛な真部分グラフであるので, 以下が成り立つ.

$$|P_1| + |P_2| \leq |P_1| + 2, |P_1| + |P_2| \leq |P_2| + 2 \quad (3.7)$$

成立しないとした時, サイクルグラフ  $P_1 \cup \{va, vb\}$  または  $P_2 \cup \{va, vb\}$  の頂点数が  $G'$  よりも小さいこととなり,  $G$  のすべての剛な真部分グラフの中で最小の頂点数であるように  $G'$  を選んだことに反する.  $|P_1| \leq 2$  かつ  $|P_2| \leq 2$  であるので以下の場合を考える.

**場合 2B-b-i.**  $|P_1| = 1$  and  $|P_2| = 1$ .

このとき, 多重グラフとなり,  $G$  が単純グラフであることに反する.

**場合 2B-b-ii.**  $|P_1| = 2$  and  $|P_2| = 1$ .

$G'$  が頂点数 3 以上のサイクルグラフであるとき,  $V' \cup v$  の誘導部分グラフは明らかに冗長であり,  $G$  の極小性に反する.

**場合 2B-b-iii.**  $|P_1| = 2$  and  $|P_2| = 2$ .

$c$  と  $d$  がそれぞれ  $P_1, P_2$  に含まれる頂点であるとする.  $E_x$  を  $x \in V'$  と  $G \setminus G'$  をつなぐ辺の集合であるとする.  $adbc$  を  $G'$  の閉路とする.  $G'$  はサイクルグラフであるので,  $adbc$  は  $G'$  と一致する.  $G$  の各頂点は次数 3 以上であり,  $\delta_G(V') = 4$  となる.  $G \setminus G'$  における  $\delta_G(V')$  の端点の集合を  $W$  とする.  $|W| \geq 3$  のとき,  $G'$  を頂点  $s$  に縮約した後, 補題 3.1 が適応できる. さらに  $G''$  の多重辺を縮約することで, 各頂点の次数が 3 以上の単純グラフである極小剛な panel-hinge グラフができる. これは, 次数が 3 以上のすべての単純グラフである極小剛な panel-hinge グラフにおいて,  $G$  が頂点数最小であることに反する. 従って,  $|W| = 2$  と仮定する.  $W = \{v, v'\}$  とする. この場合, 図 3.12(b) のような状況である. このとき, 頂点  $v, a, c, v', d, b$  で構成される 6-閉路が存在し, 6-閉



路は極小剛な panel-hinge グラフであるので辺  $ad, bc$  は冗長であるので,  $G$  の極小性に反する. 従って,  $G'$  は  $D$  以上のサイクルグラフではない.

場合 1 及び 2 より, 単純グラフである極小剛な panel-hinge グラフにおいて次数 2 の頂点は 1 つ以上存在する.  $\square$

単純グラフである極小剛な panel-hinge グラフにおける頂点数の帰納法によって証明する. 基本的な場合として, 三角形グラフは明らかに単純グラフである極小剛な panel-hinge グラフであり, 定理を満たす.

$n \geq 4$  として, 頂点数が  $n-1$  以下の任意の極小剛な panel-hinge グラフを, 三角形グラフから始める 5 つの操作の操作列によって生成可能であると仮定する. 頂点数  $n$  の極小剛な panel-hinge グラフ  $G = (V, E)$  が存在すると仮定する.  $G$  に対して, 5 つの操作のうちいずれかの操作の逆操作を施すことにより, 頂点数が  $n-1$  または  $n-2$  の極小剛な panel-hinge グラフを生成可能であることを証明する. 空ではない  $E$  の分割を  $E_1, E_2$  とする.  $E_1, E_2$  の辺集合により誘導される部分グラフをそれぞれ  $G[E_1], G[E_2]$  とする.

$G[E_1]$  及び  $G[E_2]$  は単一の頂点  $v$  を共有しており, すなわち  $v$  は切断点であり,  $G[E_2]$  が三角形グラフであると仮定する. このとき,  $G$  は  $G[E_1]$  に対して操作 4 を施してできたグラフである. 従って,  $G$  が  $G[E_2]$  が三角形グラフであるような  $E_1$  及び  $E_2$  の分割を持たない場合を考える. さらに,  $G$  が三角形グラフを剛な真部分グラフとして持ち, 三角形グラフの頂点のうち一つが次数 2 のとき, 操作 5 の逆操作を行う. この場合, 補題 3.2 より, 操作後のグラフは極小剛なグラフである. 従って, 以下では  $G$  は三角形グラフを部分グラフとして持たない場合を考える.

操作 1, 2, 3 のいずれかの操作のうち一つの逆操作を施すことができることを示す. はじめに操作 1 の逆操作を行うことを考える. 補題 3.9 より, 次数 2 の頂点は少なくとも一つ存在する. ここで, 操作 1 の逆操作とは, すなわち splitting off のことである. 従って,  $v$  に隣接する頂点を  $a, b$  とし, 操作後のグラフを  $G_v^{ab}$  とする.  $G$  にはその部分グラフとして三角形グラフが存在しないと仮

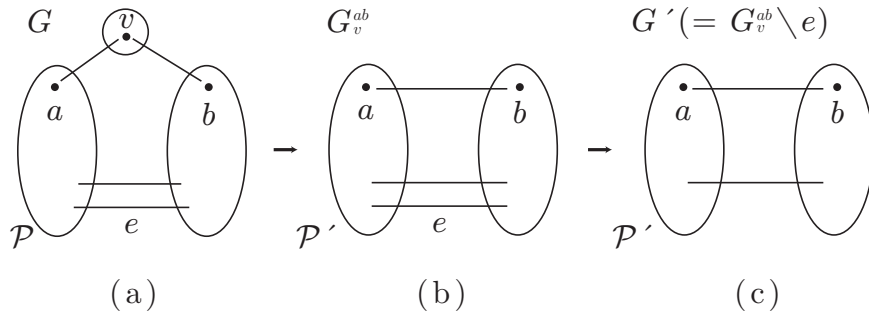


図 3.13 操作 2 の逆操作

定しているの、辺  $ab$  は存在しない。よって、 $G_v^{ab}$  は単純グラフである。

ここで、 $G$  が剛な真部分グラフを持つ場合と持たない場合で場合分けをして証明する。

**場合 1.**  $G$  が剛な真部分グラフを持たない場合。

この場合、補題 3.6 より、操作 1 の逆操作 (すなわち splitting off) により、頂点数が  $n - 1$  の極小剛な panel-hinge グラフを生成することができる。

**場合 2.**  $G$  が剛な真部分グラフを持つ場合。

この場合、補題 3.5 より操作後のグラフは剛である。しかし、極小性は保証されていない。操作後のグラフが極小剛である場合、頂点数が  $n - 1$  の極小剛な panel-hinge グラフを得ることができる。そこで、それ以外の場合について考える。辺  $ab$  が冗長であるとき、 $G_v^{ab}$  より  $ab$  を除いたグラフは剛である。このグラフは操作 3(vertex 2-addition) の逆操作を行ってできるグラフと同じである。このとき  $G$  は極小剛であるので、操作 3 の逆操作を行ってできるグラフは常に極小剛である。従って、次数 2 の頂点  $v$  が存在し、 $G_v^{ab}$  において辺  $ab$  が冗長であるとき、 $G$  について操作 3 の逆操作を施して頂点数  $n - 1$  の極小剛な panel-hinge グラフができる。

従って、 $G_v^{ab}$  について  $ab$  が冗長ではなく冗長な辺  $e \in E \setminus \{av, bv\}$  が存在する場合を考える (図 3.13)。  $G' = G_v^{ab} \setminus \{e\}$  とする。  $G$  は極小剛であり、命題 2.3 より、任意の頂点分割  $\mathcal{P}$  に対して以下が成り立つ。

$$(D-1)|\delta_G(\mathcal{P})| \geq D(|\mathcal{P}| - 1) \quad (3.8)$$

$G$  が極小剛であるので,  $e$  を除いたとき,  $G \setminus \{e\}$  は剛ではない. 従って, 命題 2.3 より, 以下の式を満たす  $e \in \delta_G(\mathcal{P})$  となる頂点分割  $\mathcal{P}$  が存在する.

$$(D-1)|\delta_{G \setminus \{e\}}(\mathcal{P})| < D(|\mathcal{P}| - 1) \quad (3.9)$$

これより以下を得る.

$$(D-1)|\delta_G(\mathcal{P})| < D|\mathcal{P}| - 1 \quad (3.10)$$

$\mathcal{P} = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}$  とし,  $v \in V_1$  とする.

$|V_1| \geq 2$  または  $|V_1| = 1$  の場合について考える.

**場合 2A.**  $|V_1| \geq 2$

$\mathcal{P}'$  を  $\mathcal{P}$  において  $V_1$  より  $v$  を除いてできる頂点分割とする.

このとき, 以下の式が成り立つ.

$$|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|, |\delta_{G'}(\mathcal{P}')| \leq |\delta_G(\mathcal{P})| - 1 \quad (3.11)$$

式 (3.11) より, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} (D-1)|\delta_{G'}(\mathcal{P}')| - D(|\mathcal{P}'| - 1) &\leq (D-1)(|\delta_G(\mathcal{P})| - 1) - D(|\mathcal{P}| - 1) \\ &= (D-1)|\delta_G(\mathcal{P})| - D|\mathcal{P}| + 1 < 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

これは  $G'$  が剛であることに矛盾するので, このような頂点分割  $\mathcal{P}$  は存在しない.

場合 **2B**.  $|V_1| = 1$ .

$\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{\{v\}\}$  とする.

場合 **2B-a**. ある  $i \neq 1$  とする  $V_i$  に  $a$  と  $b$  が含まれる場合.

このとき以下が成り立つ.

$$|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}| - 1, |\delta_{G'}(\mathcal{P}')| = |\delta_G(\mathcal{P})| - 3 \quad (3.13)$$

これより以下を得る.

$$\begin{aligned} & (D-1)|\delta_{G'}(\mathcal{P}')| - D(|\mathcal{P}'| - 1) \\ &= (D-1)(|\delta_G(\mathcal{P})| - 3) - D(|\mathcal{P}| - 2) \\ &= (D-1)|\delta_G(\mathcal{P})| - D|\mathcal{P}| + 1 - D + 2 < 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

$G'$  の剛性に矛盾するので, このような  $\mathcal{P}$  は存在しない.

場合 **2B-b**.  $i > 1, j > 1$  とし  $i \neq j$  とする  $V_i$  と  $V_j$  に  $a$  と  $b$  が含まれる場合.

$\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus V_1$  とする. このとき以下が成り立つ.

$$|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}| - 1, |\delta_{G'}(\mathcal{P}')| = |\delta_G(\mathcal{P})| - 2 \quad (3.15)$$

$G_v^{ab}$  は剛であり, 辺  $e$  は冗長であるので,  $G'$  もまた剛な panel-hinge グラフである. このとき命題 2.3 より, 以下が成り立つ.

$$(D-1)|\delta_{G'}(\mathcal{P}')| \geq D(|\mathcal{P}'| - 1) \quad (3.16)$$

式 (3.15)(3.16) より,

$$(D - 1)|\delta_G(\mathcal{P})| \geq D|\mathcal{P}| - 2 \quad (3.17)$$

式 (3.10)(3.17) より,

$$(D - 1)|\delta_G(\mathcal{P})| = D|\mathcal{P}| - 2 \quad (3.18)$$

式 (3.15)(3.18) より,

$$\begin{aligned} (D - 1)(|\delta_{G'}(\mathcal{P}')| + 2) &= D(|\mathcal{P}'| + 1) - 2 \\ (D - 1)|\delta_{G'}(\mathcal{P}')| &= D(|\mathcal{P}'| - 1) \end{aligned} \quad (3.19)$$

式 (3.19) より,  $G'$  は極小剛である. さらに, 式 (3.19) は操作 2 の条件に等しい. よって, 極小剛な panel-hinge グラフ  $G$  に対して操作 2 の逆操作を行うことで頂点数が  $n - 1$  の極小剛な panel-hinge グラフを作ることができる.

従って, 任意の与えられた頂点数  $n$  の単純グラフである極小剛な panel-hinge グラフに対して, 5 つの操作の逆操作のうちの一つを施すことにより, 頂点数が  $n - 1$  または  $n - 2$  の極小剛な panel-hinge グラフを生成することができる.

### 3.4 結語

第 3 章では,  $d \geq 3$  とする  $d$  次元の単純グラフである極小剛な panel-hinge グラフを逐次的に生成する操作を定義し, 以下のことを証明した. (i) 極小剛な panel-hinge グラフに対して 5 つの操作を行ってできるいずれのグラフもまた, 極小剛な panel-hinge グラフである. (ii) 5 つの操作の操作列を施すことにより, 任意の極小剛な panel-hinge グラフを生成可能である.

多項式時間で全ての単純グラフである極小剛な panel-hinge グラフを生成する

---

手法の開発は今後の課題である. 操作 5 を行う場合, 頂点  $a$  の  $d$  個の隣接頂点を 2 つの部分集合に分ける際,  $O(2^d)$  の選択肢が存在するため, 多項式時間アルゴリズムを開発することの問題点となっている.



## 第 4 章

# Panel-hinge グラフの冗長剛性及び冗長大域剛性の特徴付け

### 4.1 序説

本研究の目的はグラフの連結性の観点から  $\mathbb{R}^d$  の panel-hinge グラフの冗長な剛性及び冗長大域的剛性の特徴づけを行うことである。グラフの連結性はこれまでに広く研究が行われてきており [6, 30], 2次元の bar-joint フレームワークについては, 剛性とグラフの連結性に関する既往研究がある [11, 23, 37].

ここで, 混合連結度 (mixed-connectivity) の定義を行う。

**定義 4.1.** 混合連結度 (mixed-connectivity)  $k$  と  $h$  をそれぞれ  $k \geq 1, h \geq 1$  とする整数とする。グラフ  $G$  から任意の  $(k-1)$  個の頂点を取り除いてできるグラフが,  $h$ -辺連結グラフであるとき, グラフ  $G$  を  $(k, h)$ -連結と呼ぶ。

以下では, 任意の  $(h-1)$  本の辺をグラフ  $G$  より除いてできるグラフが  $\mathbb{R}^d$  において剛であるとき,  $\mathbb{R}^d$  において  $G$  は  $h$ -辺剛であると呼ぶ。我々の定義と成果は任意の次元  $d$  ( $d \geq 2$ ) において成立し, それぞれの例においては, 特定の次元についてのものとする。



ここで、グラフについての冗長剛性の定義を行う。

**定義 4.2.** 冗長剛性 (redundant rigidity)  $k$  と  $h$  をそれぞれ  $k \geq 1, h \geq 1$  とする整数とする。グラフ  $G$  から任意の  $(k-1)$  個の頂点を取り除いてできるグラフが、 $\mathbb{R}^d$  において  $h$ -辺剛グラフであるとき、グラフ  $G$  を  $\mathbb{R}^d$  において  $(k, h)$ -剛であるという。

さらに、本研究は大域剛性に応用することができる。 $(G, \mathbf{p})$  と表現できる全ての  $d$  次元フレームワークが、唯一の実現のみであるとき、 $\mathbb{R}^d$  において  $(G, \mathbf{p})$  を大域剛であるという (より詳細な定義は [13] を参照)。 $\mathbb{R}^d$  においてグラフ  $G$  の一般配置における全ての実現が大域剛であるとき、 $\mathbb{R}^d$  において、グラフ  $G$  は大域剛である。 $G$  より  $(h-1)$  本の辺を除いてできるグラフが  $\mathbb{R}^d$  において大域剛であるとき、 $G$  は  $\mathbb{R}^d$  において  $h$ -辺大域剛であるという。

ここで、グラフについての冗長な大域剛性についての定義を行う。

**定義 4.3.** 冗長大域剛性 (redundant global rigidity)  $k$  と  $h$  をそれぞれ  $k \geq 1, h \geq 1$  とする整数とする。グラフ  $G$  から任意の  $(k-1)$  個の頂点を取り除いてできるグラフが、 $\mathbb{R}^d$  において  $h$ -辺大域剛グラフであるとき、グラフ  $G$  を  $\mathbb{R}^d$  において  $(k, h)$ -大域剛であるという。

本章の主な成果は以下の定理を示したことである。

**定理 4.1.**  $k$  と  $h$  をそれぞれ  $k \geq 1, h \geq 1$  とする整数とする。(1) グラフ  $G$  が  $(k, h+1)$ -連結であることは  $\mathbb{R}^2$  において  $G$  が  $(k, h)$ -剛であることの必要十分条件である。さらに  $G$  が  $(k, h)$ -連結であることは  $\mathbb{R}^2$  において  $G$  が  $(k, h)$ -大域剛であることの必要十分条件である。

(2)  $d \geq 3$  について、任意のグラフ  $G$  について以下の 3 つの条件は等価である.:  
 (i)  $\mathbb{R}^d$  において  $G$  は  $(k, h)$ -剛である。(ii)  $\mathbb{R}^d$  において  $G$  は  $(k, h)$ -大域剛である。(iii)  $G$  は  $(k, h+1)$ -連結である。

Katoh らは以下の命題を示した [14].

**命題 4.1** (Katoh et al.).  $G$  をグラフとする. このとき,  $d \geq 2$  とし,  $G$  が  $\mathbb{R}^d$  において剛であるとき,  $G$  は 2-辺連結である.

Jordán らは panel-hinge フレームワークの大域剛性の特徴づけを行った [13].

**命題 4.2** (Jordán et al.).  $G$  をグラフとしたとき,  $G$  が 3-辺連結であることは  $\mathbb{R}^2$  において  $G$  が大域剛であることの必要十分条件である.

**命題 4.3** (Jordán et al.).  $G$  をグラフとし,  $d \geq 3$  とする.  $D = \binom{d+1}{2}$  とし,  $(D-1)G$  の任意の辺  $f$  について  $(D-1)G - f$  が  $D$  個の辺素な全域木を持つことは  $\mathbb{R}^d$  において  $G$  が大域剛であることの必要十分条件である.

## 4.2 定理 4.1 の証明

本節では定理 4.1 の証明を行う. そのために次の 3 つについて証明を行う. (a)  $G$  が  $(k, h+1)$ -連結であることは,  $G$  が  $d \geq 2$  としたとき  $\mathbb{R}^d$  において  $(k, h)$ -剛であることの必要十分条件である. (b)  $G$  が  $(k, h+2)$ -連結であることは,  $\mathbb{R}^2$  において  $G$  が  $(k, h)$ -大域剛であることの必要十分条件である. (c)  $G$  が  $(k, h)$ -大域剛であることは,  $d \geq 3$  について  $\mathbb{R}^d$  において  $G$  が  $(k, h)$ -剛であることの必要十分条件である.

これら 3 つをまとめたとき, 定理 4.1 の証明を完了することとなる.

### (a) の十分条件についての証明

対偶をとり, (a) が十分条件であることを示す. 従って, “ $G$  が  $(k, h+1)$ -連結ではないとき,  $\mathbb{R}^d$  において  $G$  は  $(k, h)$ -剛ではない” ということを示す.

$|V'| \leq k-1$  とし  $G$  から頂点集合  $V' \subset V$  を除いてできるグラフ  $G'$  が,  $(1, h+1)$ -連結ではないような  $|V'|$  が存在する. このとき, 命題 2.3 より,  $|\mathcal{P}| = 2$  であり,  $|\delta_{G'}(\mathcal{P})| \leq h$  となるような頂点分割  $\mathcal{P}$  が存在する. ここで,

$|\delta_{G''}(\mathcal{P})| \leq 1$  となるような  $\delta_{G'}(\mathcal{P})$  より  $(h-1)$  本の辺を除いてできるグラフ  $G''$  が存在し, 命題 2.1, 2.3 より  $G''$  は剛ではない. 従って, 元のグラフ  $G$  は  $(k, h)$ -剛ではない.  $\square$

(a) の必要条件についての証明

背理法により証明する. :  $G$  は  $(k, h+1)$ -連結であり,  $\mathbb{R}^d$  において  $(k, h)$ -剛ではないと仮定する.  $(k-1)$  個の頂点の集合を  $G$  より除いてできるグラフ  $G'$  が  $h$ -辺剛ではないような頂点集合が存在する.  $(h-1)$  本の辺を  $G'$  より除いてできるグラフ  $G''$  が剛ではないような辺集合  $F$  が存在する. 命題 2.1 より,  $G''$  の各辺を  $(D-1)$  本の多重辺で置き換えてできるグラフに  $D$  個の辺素な全域木を詰め込むことはできない. 命題 2.3 より,  $|\mathcal{P}| \geq 2$  及び  $(D-1)|\delta_{G''}(\mathcal{P})| < D(|\mathcal{P}|-1)$  となるような,  $G'$  の頂点分割  $\mathcal{P}$  が存在する. また,  $|\delta_{G'}(\mathcal{P})| \leq |\delta_{G''}(\mathcal{P})| + h - 1$  が成り立ち, 以下の式を得る.

$$|\delta_{G'}(\mathcal{P})| < \frac{D}{D-1}(|\mathcal{P}|-1) + h - 1 \quad (4.1)$$

一方,  $G'$  は  $(1, h+1)$ -連結であるので, 以下が成り立つ.

$$|\delta_{G'}(\mathcal{P})| \geq \frac{h+1}{2}|\mathcal{P}| \quad (4.2)$$

$value(D, h, |\mathcal{P}|)$  を以下のように定義する.

$$value(D, h, |\mathcal{P}|) = \frac{D}{D-1}(|\mathcal{P}|-1) + h - 1 - \frac{h+1}{2}|\mathcal{P}|$$

$d \geq 2$  より  $D \geq 3$  であるので,  $D/(D-1) \leq 3/2$  となる. 従って, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} value(D, h, |\mathcal{P}|) &\leq \frac{3}{2}(|\mathcal{P}|-1) + h - 1 - \frac{h+1}{2}|\mathcal{P}| \\ &= -\frac{1}{2}(h-2)(|\mathcal{P}|-2) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

このとき、条件より  $h \geq 2$  と  $|\mathcal{P}| \geq 2$ ,  $value(D, h, |\mathcal{P}|) < 0$  は常に成り立ち、これらより

$$\frac{D}{D-1}(|\mathcal{P}| - 1) + h - 1 < \frac{h+1}{2}|\mathcal{P}| \quad (4.3)$$

となり、(4.1) と (4.2) に矛盾する。  $\square$

#### (b) の証明

定義 4.1, 4.3 と命題 4.2 より、証明は直ちに導かれる。

#### (c) の十分条件についての証明

大域剛の定義より、このことは明らかである。  $\square$

#### (c) の必要条件についての証明

はじめに、以下の補題を示す。

**補題 4.1.**  $d \geq 3$  とし、 $D = \binom{d+1}{2}$  としたとき、 $G = (V, E)$  を  $|V| \geq 6$  かつ  $(D-1)|E| = D(|V|-1)$  を満たすグラフとする。このとき  $G$  には次数 2 の頂点が少なくとも 6 個以上存在する。

#### 補題 4.1 の証明

$G$  の次数 2 の頂点の数を  $s$  とする。このとき、以下の式を得る。

$$2|E| \geq 2s + 3(|V| - s) \quad (4.4)$$

式 4.4 と  $(D-1)|E| = D(|V|-1)$  より、以下の式を得る。

$$2D(|V|-1) \geq 2(D-1)s + 3(D-1)(|V|-s) \quad (4.5)$$

$$s \geq \frac{D-3}{D-1}|V| + \frac{2D}{D-1} \quad (4.6)$$

$|V| \geq 6$  及び  $D \geq 6$  より、 $(D-3)|V|/(D-1) = (1-2/(D-1))|V| \geq 18/5$  と  $2D/(D-1) = 2+2/(D-1) > 2$  を得る。これより  $s \geq 6$  となる。  $\square$

ここで背理法により証明する： $G$  が  $\mathbb{R}^d$  において  $(k, h)$ -剛であり、 $\mathbb{R}^d$  におい

て  $(k, h)$ -大域剛ではないと仮定する.  $G'$  を  $G$  から  $(k-1)$  個の頂点と  $(h-1)$  本の辺を除くことによりできるグラフとし,  $G'$  を大域剛とする. 命題 4.3 より,  $(D-1)G' - f$  が  $D$  個の辺素な全域木を持たないような  $(D-1)G'$  の辺  $f$  が存在する. このとき, 命題 2.3 より,  $|\delta_{(D-1)G'-f}(\mathcal{P})| < D(|\mathcal{P}|-1)$  となるような,  $G'$  の頂点分割  $\mathcal{P}$  が存在する.  $G'$  は剛であるので,  $(D-1)|\delta_{G'}(\mathcal{P})| \geq D(|\mathcal{P}|-1)$  となる.  $|\delta_{(D-1)G'-f}(\mathcal{P})| = (D-1)|\delta_{G'}(\mathcal{P})| - 1$  より,  $(D-1)|\delta_{G'}(\mathcal{P})| = D(|\mathcal{P}|-1)$  を得る.

補題 4.1 より,  $\mathcal{P}$  の 6 つ以上の頂点集合が存在し,  $i = 1, \dots, p$  について  $|\delta_{G'}(V_i)| = 2$  となるような  $V_1, \dots, V_p$  with  $p \geq 6$  とする.  $G \setminus G'$  の任意の辺  $e$  について,  $G' + e$  を考える.  $\mathcal{P}$  と同じ頂点分割について,  $e$  が  $V_i$  と  $V_k$  をつなぐ場合においても,  $|\delta_{G'+e}(V_i)| = 2$  となるような少なくとも 4 頂点以上の頂点集合  $V_i$  が存在する.

$G' + e$  より  $V_i$  に接続する  $e'$  を除いたとき, 命題 3 より  $G' + e - e'$  は柔軟となる. 一方,  $G$  は  $(k, h)$ -剛であることから  $G' + e$  は 2-辺剛であるはずなので, 矛盾. □

### 4.3 結語

本章では,  $\mathbb{R}^d$  においてグラフの冗長な剛性と冗長な大域剛性をグラフの連結性によって特徴づけた.

最小本数の辺の追加で Laman グラフ (2 次元の一般の極小剛な bar-joint フレームワーク [19]) から 2-辺剛な bar-joint グラフを求める問題は NP 困難 [7] であることと, 本研究の成果は大きく異なる.

定理 4.1 より, 任意のグラフ  $G$  を任意の次元において最小本数の辺を追加することにより,  $h$ -辺剛とするために,  $G$  を  $(h+1)$ -辺連結とする多項式時間アルゴリズム [29] を用いることができる.

さらに, 定理 4.1 より, 与えられたグラフが  $h$ -辺剛であるかの確認は, グラ

フが  $(h + 1)$ -辺連結であるかを  $O(|E| + \min\{h|V|^2, |E||V| + |V|^2 \log |V|\})$  で確認することで, 可能である [27]. 特に  $h = 2$  の場合, 線形時間で可能である [26, 28, 41]. 同様に,  $h$ -辺大域剛も確認することができる.



## 第 5 章

# 剛な panel-hinge フレームワーク の生成手法

### 5.1 序説

本章では, 組合せ剛性理論を建築形態デザインへと応用することを目的とし, 2つの新たなアプローチを開発した. 一つは一般的な配置ではない, 直交パネルで構成された剛な panel-hinge フレームワークを演繹的に生成する手法である. もう一つは, 空間充填多面体を基本形としてフラクタル図形に基づき, 一般的な配置ではない, 剛な panel-hinge フレームワークの生成手法である. 形態デザインへの応用可能性を示すために, 2つの提案手法により生成される, それぞれ異なる形態の例を示す. さらに, 適切なヒンジを除くことで展開可能な剛な panel-hinge フレームワークの模型を示す. このように折紙のような展開可能な構造物の工業分野への高い応用可能性は, これまでに示されている [38].

本章の構成は以下の通りである. 5.2 節では, 一般的ではない配置の剛な panel-hinge フレームワークを逐次的に生成する手法を提案する. 5.3 節は空間充填多面体を用いて, 剛な panel-hinge フレームワークを生成する手法を提案する.



## 5.2 直交パネルを用いた剛な panel-hinge フレームワークの生成手法

本節では，3章で開発した操作に基づき，非一般のヒンジ配置で構成される剛な panel-hinge フレームワークを逐次的に生成する手法を探求した。

すべてのパネルが矩形で， $x-y$ ,  $y-z$ ,  $z-x$  平面のうち一つに平行であり，ヒンジはパネルの端にあるような panel-hinge フレームワークを，逐次的に生成する手法をはじめに提案する．より大きなサイズの剛な panel-hinge フレームワークを生成する2つの逐次的操作を定義する．このうち，1つの操作は第3章で示した panel-hinge グラフを逐次的に生成する操作に対応する．さらに，提案する操作によって生成される形態の例を示す．これらの構造物の例では，部材自体の荷重等は考慮していないことに注意する．前述の通り，提案手法のヒンジ配置は一般的ではない．従って，提案手法を行なった後のフレームワークが剛であることを示す必要がある．

操作1 (Add 2-panel): 新たなパネルを追加可能な辺があるパネル  $P_1$  を選ぶ．2枚の新たなパネル  $P_2$  と  $P_3$  を， $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  がそれぞれ直行し， $P_2$  と  $P_3$  が  $P_1$  と， $P_2$  と  $P_3$  がヒンジによって繋がっており，3つのヒンジは頂点  $v$  において交わるように追加する．

操作2 (Add 3-panel): 新たなパネルを追加可能な辺があるパネル  $P_1$  を選ぶ．3枚の新たなパネル  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  を， $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_4$  が互いに直行し， $P_3$  は  $P_1$  と平行し， $P_2$  と  $P_4$  は  $P_1$  とヒンジによって繋がり， $P_2$  は  $P_3$  と， $P_3$  は  $P_4$  とヒンジによって繋がっているように追加する．

ここで，操作 Add 2-panel は第3章で提案したグラフについての操作 triangle-addition に対応している．図 5.1 に操作 Add 2-panel によって生成された形態を示す．図 5.2 に操作 Add 2-panel を繰り返すことによって生成された形態を示す．

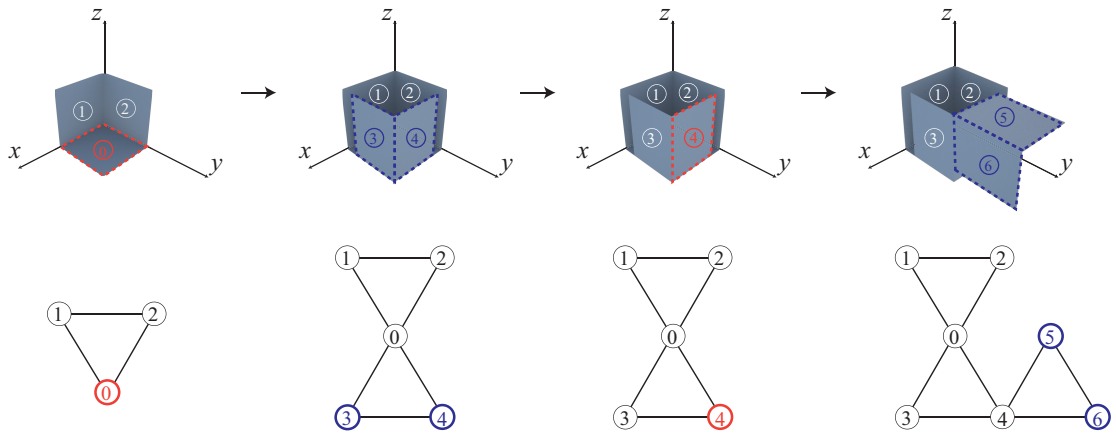


図 5.1 操作 Add 2-panel (上部, 下部の図はそれぞれ, panel-hinge フレームワーク, panel-hinge グラフ). 赤色破線で囲うパネルは  $P_1$ , 青色破線で囲うパネルは新たに追加するパネル  $P_2, P_3$  である.

ここで, 以下の定理を示す.

**定理 5.1.** フレームワークが剛であるとき, 操作 1 を施してできるフレームワークもまた剛である.

**証明**  $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq 0$  とし,  $P_1 = (x_1, y_1, 0), P_2 = (x_1, y_2, 0), P_3 = (x_1, y_2, z_1), P_4 = (x_2, y_2, 0)$  とする. ヒンジ  $P_1P_2, P_2P_3, P_2P_4$  の 2-extensor をそれぞれ,  $C(p(1)), C(p(2)), C(p(3))$  とする. 式 (2.5) より, 以下の等式が成り立つ.

$$C(p(1)) = (0, -(y_1 - y_2), 0, 0, 0, x_1y_2 - x_1y_1) \tag{5.1}$$

$$C(p(2)) = (0, 0, -z_1, y_2z_1, -x_1z_1, 0) \tag{5.2}$$

$$C(p(3)) = (x_1 - x_2, 0, 0, 0, 0, x_1y_2 - x_2y_2) \tag{5.3}$$

ヒンジ  $P_1P_2, P_2P_3, P_2P_4$  によって繋がれたパネルの無限小動きをそれぞれ,  $S_1$  と  $S_2, S_2$  と  $S_3, S_3$  と  $S_1$  とする. 式 (2.5) より, 以下の等式が成り立つ.

$$S_2 - S_1 = t_1 C(p(1)) \quad (5.4)$$

$$S_3 - S_2 = t_2 C(p(2)) \quad (5.5)$$

$$S_1 - S_3 = t_3 C(p(3)) \quad (5.6)$$

これらより，以下が成り立つ．

$$0 = t_1 C(p(1)) + t_2 C(p(2)) + t_3 C(p(3)) \quad (5.7)$$

式 (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) より,  $0 = t_3(x_1 - x_2)$ ,  $0 = t_1(y_1 - y_2)$ ,  $0 = -t_2 z_1$ ,  $0 = -t_2 x_1 z_1$ ,  $0 = (t_1 - t_3)(x_1 y_2 - x_2 y_2)$  となる.  $x_1 \neq x_2$ ,  $y_1 \neq y_2$ ,  $z_1 \neq 0$  より,  $t_1 = t_2 = t_3 = 0$  が成り立つ. 式 (5.4), (5.5), (5.6) より,  $S_1 = S_2 = S_3$  が成り立つ. 従って, この操作によりできるフレームワークもまた剛である.  $\square$

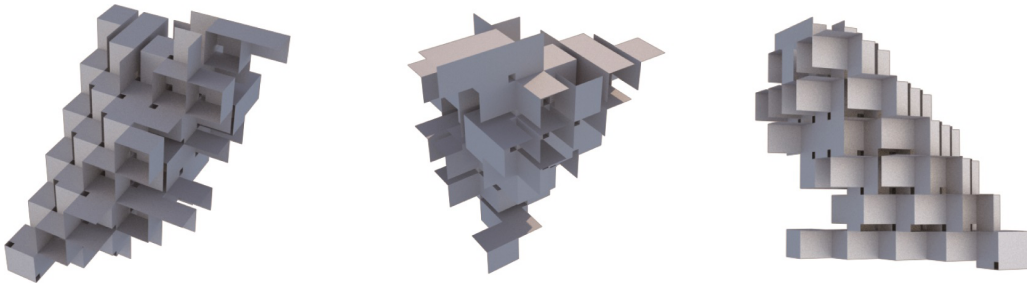


図 5.2 操作 Add 2-panel を繰り返し行なってできる構造物の例

操作 Add 2-panel を繰り返し行なって生成した構造物のイメージを図 5.3 に示す.

図 5.4 に Add 3-panel によって生成した panel-hinge フレームワークを示す. 図 5.5 に繰り返しこの操作を行なって生成した例を示す. ここで以下の定理を証明する.

**定理 5.2.** フレームワークが剛であるとき, 操作  $\mathcal{P}$  を施してできるフレームワークもまた剛である.



図 5.3 操作 Add 2-panel を繰り返して生成した構造物のイメージ

証明  $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq 0$  とし,  $P_1 = (x_1, 0, 0), P_2 = (x_2, 0, 0), P_3 = (x_1, 0, z_1), P_4 = (x_2, 0, z_1), P_5 = (0, y_1, z_1), P_6 = (0, y_2, z_1), P_7 = (0, y_1, 0), P_8 = (0, y_2, 0)$  とする (図 5.6). ヒンジ  $P_1P_2, P_3P_4, P_5P_6, P_7P_8$  の 2-extensor をそれぞれ,  $C(p(1)), C(p(2)), C(p(3)), C(p(4))$  とする. 式 (2.5) より以下が成り立つ.

$$C(p(1)) = (x_1 - x_2, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (5.8)$$

$$C(p(2)) = (x_1 - x_2, 0, 0, 0, z_1(x_2 - x_1), 0) \quad (5.9)$$

$$C(p(3)) = (0, -(y_1 - y_2), 0, z_1(y_1 - y_2), 0, 0) \quad (5.10)$$

$$C(p(4)) = (0, -(y_1 - y_2), 0, 0, 0, 0) \quad (5.11)$$

ヒンジ  $P_1P_2, P_2P_3, P_2P_4$  によって繋がれたパネルの無限小動きをそれぞれ,  $S_1$  と  $S_2, S_2$  と  $S_3, S_3$  と  $S_4, S_4$  と  $S_1$  とする. 式 (2.5) より, 以下の式を得る.

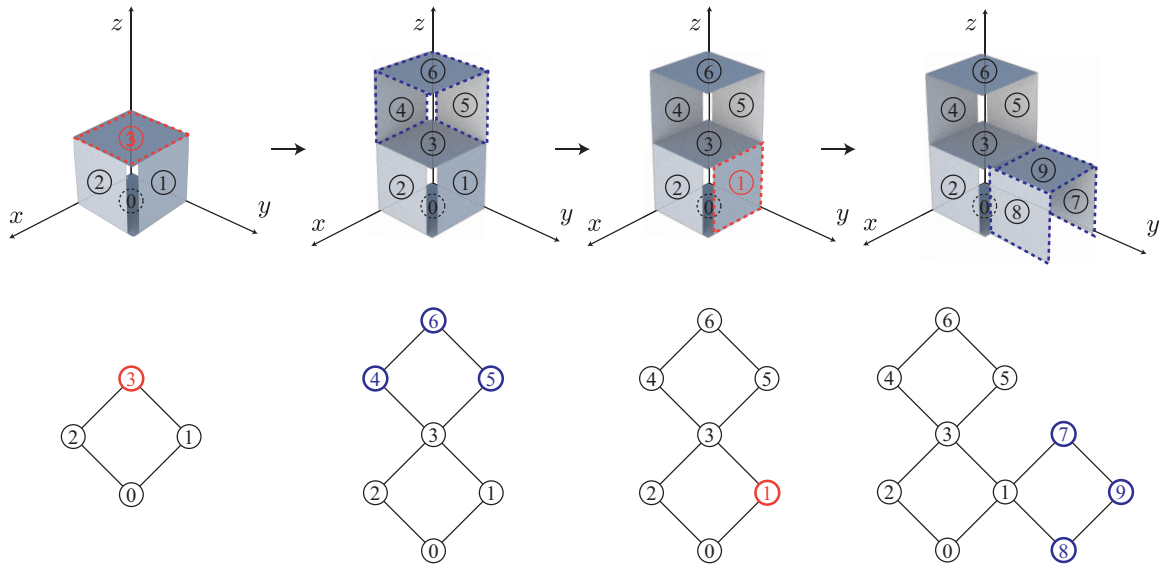


図 5.4 操作 Add 3-panel (上部, 下部の図はそれぞれ, panel-hinge フレームワーク, panel-hinge グラフ). 赤色破線で囲うパネルは  $P_1$ , 青色破線で囲うパネルは新たに追加するパネル  $P_2, P_3, P_4$  である.

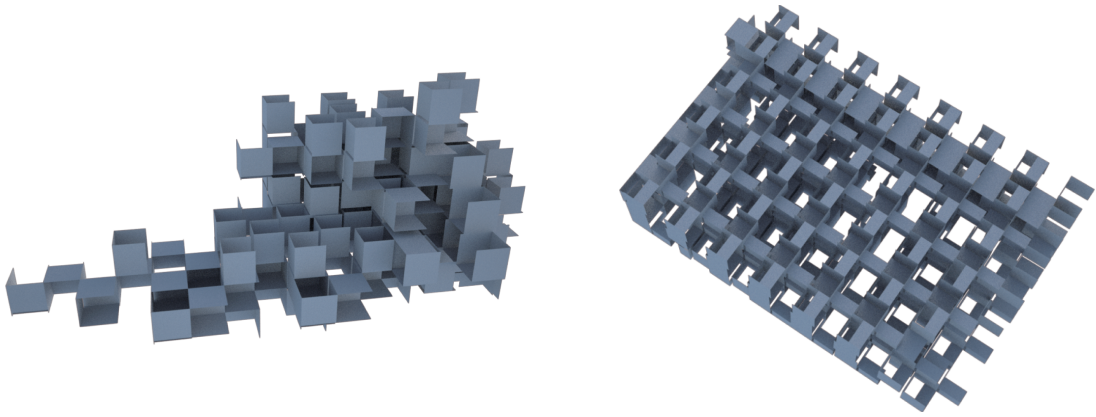


図 5.5 操作 Add 3-panel を繰り返し行なってできる構造物の例

$$S_2 - S_1 = t_1 C(p(1)) \quad (5.12)$$

$$S_3 - S_2 = t_2 C(p(2)) \quad (5.13)$$

$$S_4 - S_3 = t_3 C(p(3)) \quad (5.14)$$

$$S_1 - S_4 = t_4 C(p(4)) \quad (5.15)$$

操作 Add 2-panel と同様に,  $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$  を示すことができる. 従って, この操作によってできるフレームワークもまた剛である.  $\square$

### 5.2.1 建築的な形態を想定した剛な panel-hinge フレームワークの生成

前節で提案した手法を建築デザインに応用可能であることを示すために, 剛な panel-hinge フレームワークを生成する.

はじめに, 一つの頂点が原点と一致するような panel-hinge フレームワークである単位立方体を考える (図 5.6). 後述する 3つのパネルで構成されるコンポーネントを, 剛であることが保証された操作 Add 3-panel によって追加する. この操作を繰り返し行うことで, 剛な矩形の面を得ることができる (図 5.7).

3つのパネルで構成される panel-hinge フレームワーク  $F$  を以下のように定義する.  $F$  の 3つのパネルは互いに直行しているとする.  $F$  の凸法は単位立方体に一致し,  $F$  の 2つのパネル  $P_1, P_2$  は正方形であり,  $P_3$  は  $P_1$  または  $P_2$  に繋がっているパネルとする. さらに  $P_3$  の幅は  $[0.1, 1]$  の間の大きさとする (図 5.7).  $F$  の追加は  $y$ -軸または  $z$ -軸方向に行うこととし, パネル  $P_3$  は常に  $yz$  平面に平行となる. この 3つのパネルで構成される単位立方体を剛な panel-hinge フレームワークに対して追加することは, 5.2 節で示した, 操作 Add 3-panel を行うことと同じである.

図 5.8 に, この制約のもとで Add 3-panel によって生成した panel-hinge フレームワークを示す. 図 5.8(b) のフレームワークのスリットの幅は乱数により決定し, 値の大きさを  $z$ -座標の値が大きくなるにつれて増加することとした. このように, 3-panel コンポーネントによって構成される, 剛で不均一な面を生成することができる. このフレームワークを建築の壁や屋根, ファサードなどに利用可能であると考え. 本手法により剛な面を生成し, 光や風の透過をスリットの幅を変えることにより, 制御できると考える. 図 5.9 に提案手法により生成し

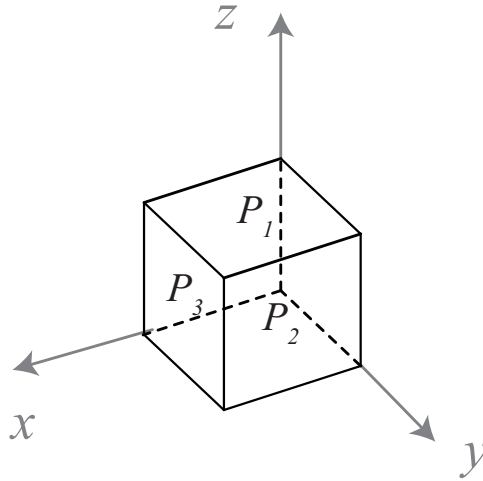


図 5.6 立方体の面のラベル付け

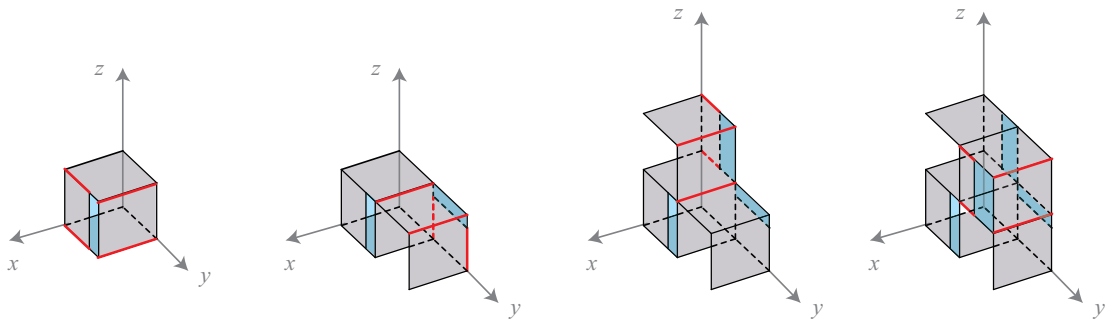


図 5.7 立方体を基本形とし，操作 Add 3-panel によって剛な面を生成した例．赤線は追加したヒンジである．青色箇所はパネルの隙間部分である．

た面によって構成した空間の例を示す．この時，生成した面同士は剛な接合を用いていることに注意する．

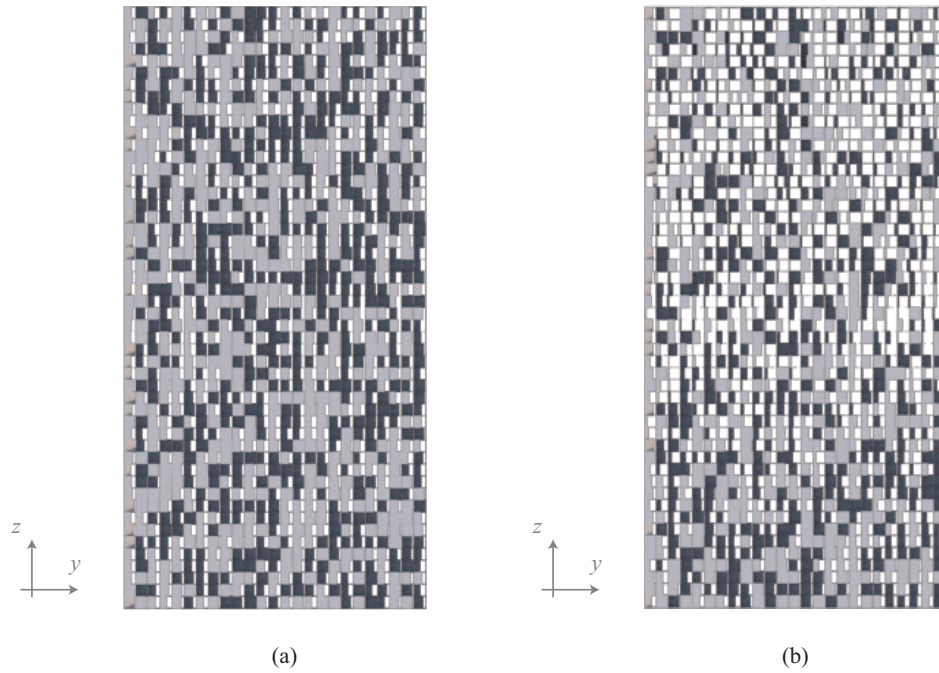


図 5.8 (a) 0 から 0.5 の間で隙間の幅をランダムに決定するように生成した構造物の例. (b)  $z$  軸座標の値が増加するに従って, 隙間の幅を大きくするように構造物を生成した例.

### 5.3 空間充填多面体とフラクタル図形を用いた panel-hinge フレームワークの生成

平行移動のみを許した時, 空間充填可能な多面体は立方体, 六角柱, 菱形十二面体, 長菱形十二面体, 切頂八面体の 5 種類であることが知られている [1, 4].

本節では, フラクタル図形に基づいて非一般配置の剛な panel-hinge フレームワークを逐次的に生成する手法を提案する. フラクタル図形は再帰構造を持つ図形である [24]. 立方体と切頂八面体を基本単位として, フラクタル図形である剛な panel-hinge フレームワークを生成する手法を提案する. 空間充填多面体を用いることにより, 面が交差することなく panel-hinge フレームワークを生成することができる.



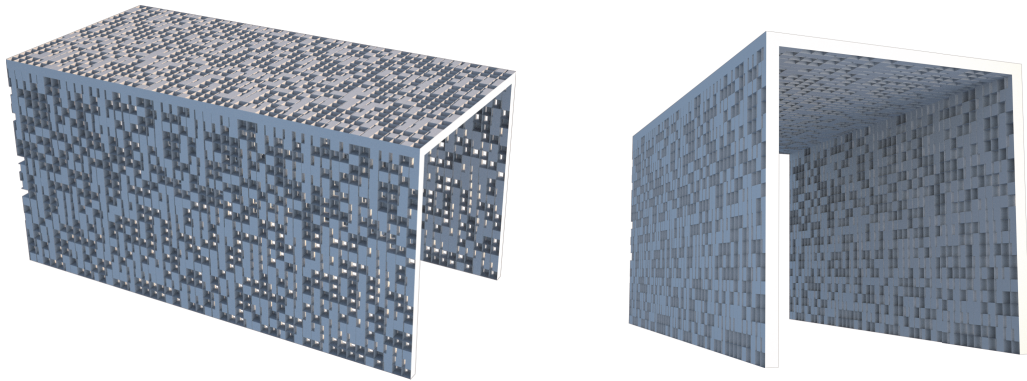


図 5.9 3つの剛な面を用いて空間を作ることを想定した例.

はじめに，立方体，切頂八面体を panel-hinge フレームワークとしてみなす．立方体，切頂八面体に基づく基本単位を考えるため，冗長なヒンジとパネルを削除する．立方体と切頂八面体には極小剛性の観点からすると，冗長なヒンジとパネルがある．基本単位を以下のように定義する．立方体の基本単位  $F_0$  は2枚のパネルとパネルにつながったヒンジを取り除き，さらにもう一つのヒンジを取り除いてできる4つのパネルで構成されるフレームワークである．したがって，フレームワークに対応する panel-hinge グラフは4閉路グラフとなる (図 5.10)．切頂八面体の基本単位  $F_0$  は6つの四角形パネルと2つの六角形パネルを除いたフレームワークである．したがってフレームワークに対応する panel-hinge グラフは6閉路グラフとなる (図 5.10)．

前節と同様の方法で，図 5.11(a), 5.11(a) の基本単位  $F_0$  の剛性を確かめることができる．

立方体の基本単位が剛であることは，操作 Add 3-panel と同様に説明することができる．したがって，切頂八面体の場合に関して以下の定理を示す．

**定理 5.3.** 6枚の四角形パネルと2枚の六角形パネルを切頂八面体から取り除いたフレームワークを基本単位  $F_0$  とする．このとき， $F_0$  は剛である．

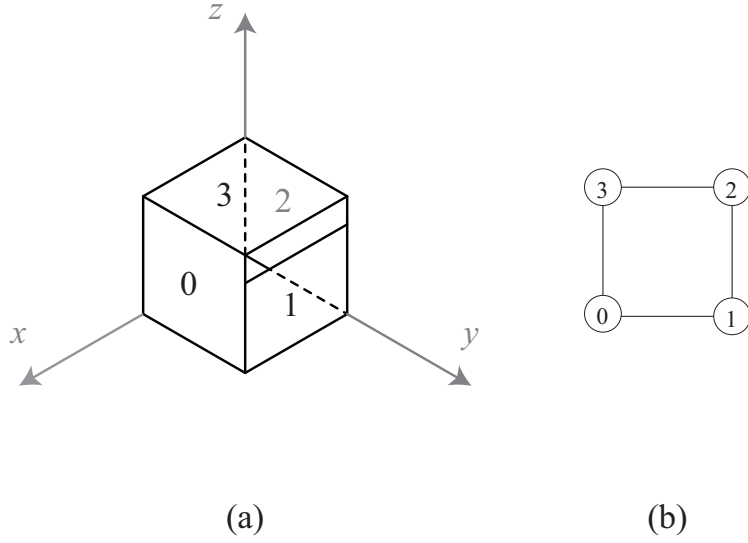


図 5.10 (a) 立方体による基本単位 (b) (a) に対応する panel-hinge グラフ

証明  $p_0 = (0, 1, -2)$ ,  $p_1 = (0, 2, -1)$ ,  $p_2 = (-1, 0, -2)$ ,  $p_3 = (-2, 0, -1)$ ,  
 $p_4 = (-1, -2, 0)$ ,  $p_5 = (-2, -1, 0)$ ,  $p_6 = (0, -2, 1)$ ,  $p_7 = (0, -1, 2)$ ,  $p_8 =$   
 $(2, 0, 1)$ ,  $p_9 = (1, 0, 2)$ ,  $p_{10} = (2, 1, 0)$ ,  $p_{11} = (1, 2, 0)$  とする. ヒンジ  $p_0p_1$ ,  
 $p_2p_3$ ,  $p_4p_5$ ,  $p_6p_7$ ,  $p_8p_9$ ,  $p_{10}p_{11}$  の 2-extensor をそれぞれ  $C(p(i)) (0 \leq i \leq 5)$  と  
 する (図 5.11(a)).  $p_0p_1$ ,  $p_2p_3$ ,  $p_4p_5$ ,  $p_6p_7$ ,  $p_8p_9$ ,  $p_{10}p_{11}$  によって繋がれるパネ  
 ルの無限小動きをそれぞれ  $S_0$  と  $S_1$ ,  $S_2$  と  $S_3$ ,  $S_3$  と  $S_4$ ,  $S_4$  と  $S_1$  とする. 式  
 (2.5) より, 以下の式を得る.

$$S_0 - S_1 = t_0 C(p(0)) = t_0(0, 1, -1, 3, 0, 0) \quad (5.16)$$

$$S_1 - S_2 = t_1 C(p(1)) = t_1(1, 0, -1, 0, 3, 0) \quad (5.17)$$

$$S_2 - S_3 = t_2 C(p(2)) = t_2(1, 1, 0, 0, 0, -3) \quad (5.18)$$

$$S_3 - S_4 = t_3 C(p(3)) = t_3(0, 1, -1, -3, 0, 0) \quad (5.19)$$

$$S_4 - S_5 = t_4 C(p(4)) = t_4(1, 0, -1, 0, -3, 0) \quad (5.20)$$

$$S_5 - S_0 = t_5 C(p(5)) = t_5(1, 1, 0, 0, 0, 3) \quad (5.21)$$

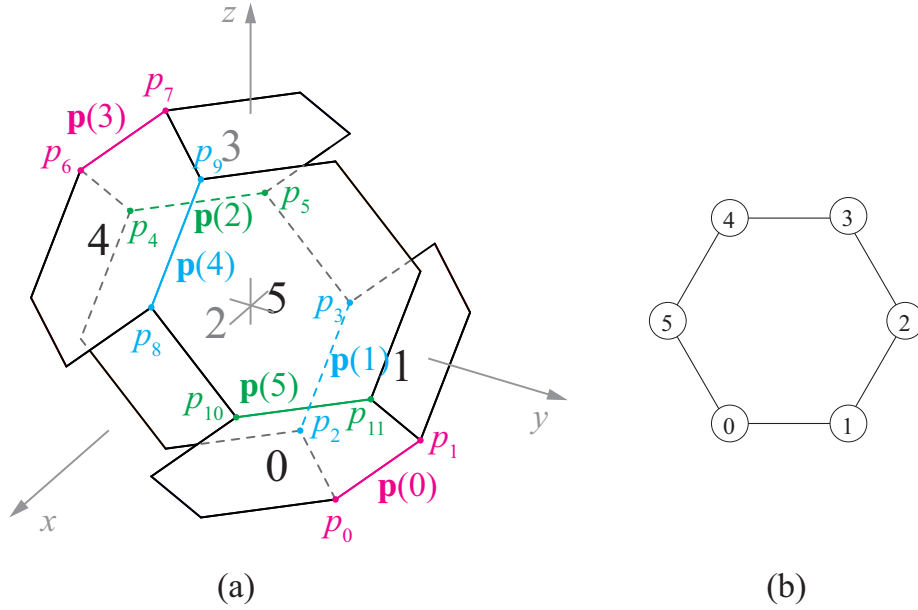


図 5.11 (a) 切頂八面体による基本単位 (b) (a) に対応する panel-hinge グラフ

式 (5.16), (5.17), ..., (5.21) より, 以下の式を得る.

$$t_1 + t_2 + t_4 + t_5 = 0 \quad (5.22)$$

$$t_0 + t_2 + t_3 + t_5 = 0 \quad (5.23)$$

$$-t_0 - t_1 - t_3 - t_4 = 0 \quad (5.24)$$

$$3t_0 - 3t_3 = 0 \quad (5.25)$$

$$-3t_1 - 3t_4 = 0 \quad (5.26)$$

$$-3t_2 + 3t_5 = 0 \quad (5.27)$$

式 (5.25), (5.26), (5.27) より,  $t_3 = t_0$ ,  $t_4 = t_1$ ,  $t_5 = t_2$  を得る. さらに式 (5.22) より,  $t_4 = t_1$ ,  $t_5 = t_2$  となり,  $t_2 = -t_1$  を得る. 式 (5.23) より,  $t_2 = -t_1$ ,  $t_3 = t_0$ ,  $t_5 = -t_1$  となり,  $t_1 = t_0$  を得る. 式 (5.24) より,  $t_0 = 0$  となることから,  $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = 0$  を得る. したがって,  $S_0 = S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5$  となり,  $F_0$  は剛である.  $\square$

panel-hinge フレームワーク  $F_0$  の各パネルを  $F_0$  自体によって置き換えることで新たな panel-hinge フレームワーク  $F_1$  を作ることができる。同様に,  $F_1$  から  $F_2$  を作ることができる (図 5.12(a) 及び図 5.13(a)). panel-hinge フレームワーク  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) したがって, それぞれ新たにできた panel-hinge フレームワーク  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は, ひとつ前のフレームワーク  $F_{i-1}$  を各頂点としてみなすことで, 同じ panel-hinge グラフによって表現できることとなる。

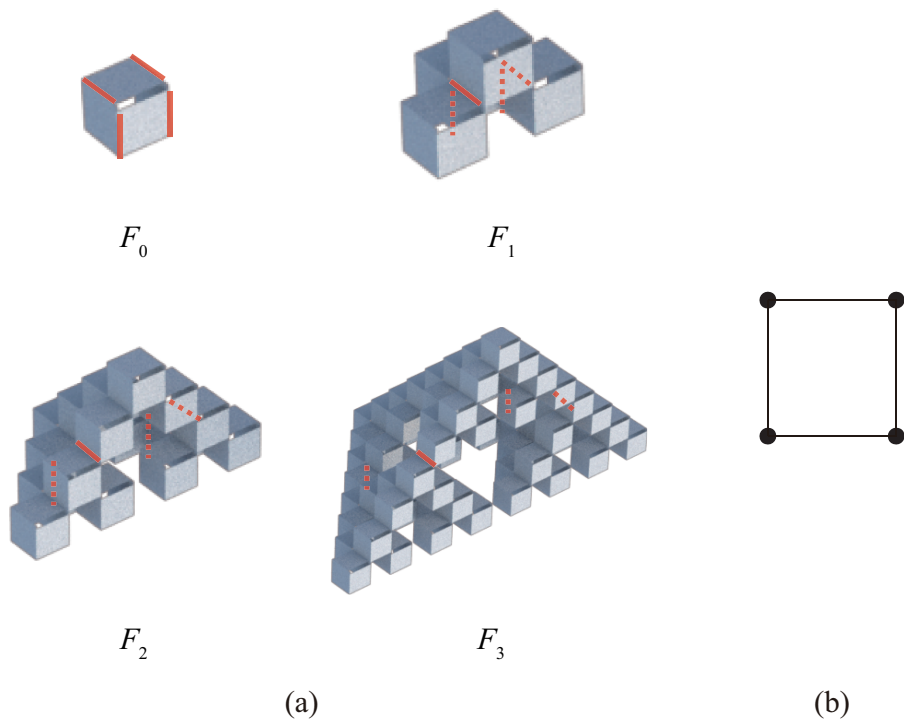


図 5.12 (a) 基本形  $F_0$  を用いて再帰的に生成した例 (赤色破線は基本形同士を接続するヒンジ) (b) (a) の各フレームワークに対応する panel-hinge グラフ

### 5.4 模型作成

レーザーカッターを用いて, panel-hinge フレームワークの木の模型を作成した (図 5.14). パネルはヒンジによって繋がれているので, 簡単に組み立てるこ



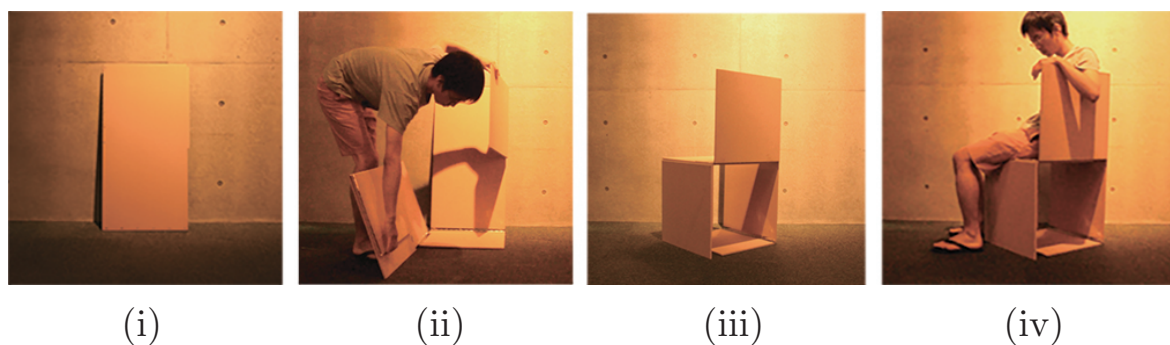


図 5.15 剛な panel-hinge フレームワークの椅子

## 5.5 結語

逐次的に panel-hinge グラフを生成する手法 [15] に基づいて、2つの操作を開発した。はじめに、直行パネルによって構成される非一般配置の剛な panel-hinge フレームワークを逐次的に生成する手法を開発し、空間充填多面体を基本単位として、剛な panel-hinge フレームワークを生成する手法を開発した。提案手法により形態生成を行い、模型作成や椅子を作成することによって、提案手法を建築デザインへと応用可能であることを示した。



## 第 6 章

# 極小剛な bar-joint フレームワークの生成手法

空間内を隙間なく埋め尽くすことができる多面体のことを空間充填多面体と言ひ、空間充填多面体を隙間なく並べてできる立体のことを空間充填立体と言ひ。また、回転は行わず平行移動のみを許した場合に、一種類の多面体で空間充填可能なものは立方体、六角柱、菱形十二面体、切頂八面体、長菱形十二面体の 5 種類 (図 6.1) であることが知られている [1, 4].

本章で空間充填多面体を用いるのは、棒材が交差することなく形態生成を行うことができるためである。回転を許した場合や複数の種類の多面体を使った場合、より多くの空間充填可能な多面体が知られているが、研究の始まりとして、まずは回転を許容しない空間充填立体について限定し、極小剛な構造物を生成可能であるかの確認を行った。

組合せ剛性理論の成果は分子生物学や機械工学等、様々な分野において応用されている [49, 53]. 建築学分野への応用に関する研究は、大崎, 第二著者ら [32] による、部材同士が交差しないことを制約として極小剛な 2 次元 bar-joint フレームワークを生成する手法の研究、岡野, 第二著者ら [33] による、グラフの同型性判定を行いながら極小剛な 2 次元 bar-joint フレームワークを列挙する手法の開



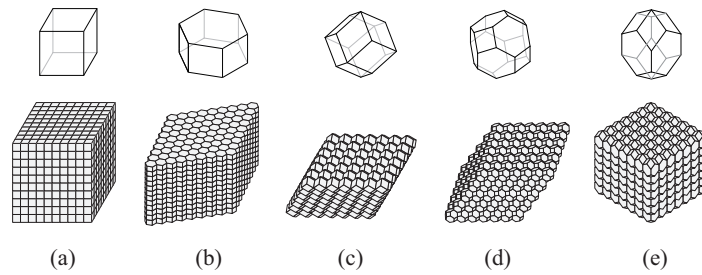


図 6.1 (a) 立方体 (b) 六角柱 (c) 菱形十二面体 (d) 切頂八面体 (e) 長菱形十二面体

発と、極小剛な 3 次元構造物の模型作成、古田、第二著者ら [17] の研究といった構造分野における研究がある。

本章では新たに、空間充填多面体を用いた 3 次元の極小剛な bar-joint フレームワークの生成手法を開発し、建築デザインへの応用手法を提案する。

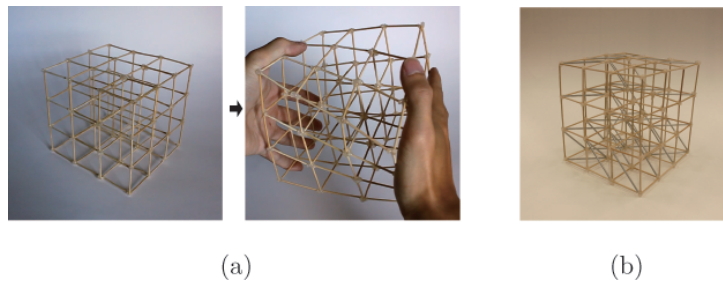


図 6.2 (a) 3 次元の柔軟な bar-joint フレームワーク (b) (a) に筋交いを追加したことにより、剛となったフレームワーク

空間充填立体の辺を棒材 (bar) に、頂点をピン接合 (joint) に置き換えた bar-joint フレームワークは剛ではない。そのため、空間充填立体 bar-joint フレームワーク (図 6.2(a)) に対して、筋交いを追加することで極小剛にする手法を示す (図 6.2(b))。さらに提案手法を拡張し、建築デザインへの応用を目指した極小剛な bar-joint フレームワークの形態生成を行う。

極小剛なフレームワークを採用することにより、最小本数の部材により剛なフレームワークを得ることができる。本論文では扱わないが、極小剛なフレームワークがわかることによって、極小剛なフレームワークに対してブレースを追加することにより、冗長性を指定した構造物を作ることができる。

ここで、以下より組合せ剛性理論の既往研究について述べる。組合せ剛性理論において、3次元 bar-joint フレームワークはグラフ  $G = (V, E)$  と写像  $\mathbf{p} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  の組  $(G, \mathbf{p})$  で表される。ここで  $G$  の各頂点はピン接合、各辺は棒材に対応しており、 $\mathbf{p}$  は各ピン接合の配置である。このとき、グラフ  $G$  のことを **bar-joint** グラフと呼び、極小剛な bar-joint フレームワークとして実現可能な bar-joint グラフのことを、**極小剛な bar-joint** グラフと呼ぶ。

2次元の bar-joint フレームワークが極小剛であるための必要十分条件を Laman [19] は示しており、極小剛なグラフを **Laman** グラフと呼ぶ。この Laman グラフを演繹的に生成する手法については、**Henneberg** 構築という方法が知られており、これによりすべての Laman グラフを生成できる [9]。また、Bolker ら [2] は、正方形で構成されたグリッドフレームワークに対して、筋交いを追加したフレームワークが剛であるかを組合せ的に判定するアルゴリズムを提案し、最近、著者らは穴をもつグリッドフレームワークを極小剛とするブレース追加手法を明らかにした [10]。

一般の 3次元 bar-joint フレームワークに対する剛性の組合せ的特徴付けは長年の未解決問題である [8]。Recski [34] は、立方体で構成された 3次元 bar-joint フレームワークに対して、筋交いを追加することで剛であるときの必要条件を示した。Whiteley [49] は、剛な 3次元 bar-joint フレームワークを生成するいくつかの操作を示しており、本章では後述するそのうちの一つの操作を用いて、極小剛な空間充填立体の生成手法を提案する。

## 6.1 Bar-joint フレームワークの剛性と組合せ的な特徴付け

bar-joint グラフ  $G = (V, E)$  の辺  $e = (u, v) \in E$  に対応するフレームワーク  $(G, \mathbf{p})$  の棒材の長さは  $\|\mathbf{p}(u) - \mathbf{p}(v)\|$  により与えられる。棒材は剛であるとし、 $\|\mathbf{p}(u) - \mathbf{p}(v)\|$  はいかなるフレームワークの変形のもとでも一定である。フレー

ムワークの連続変形を考えた場合,  $\mathbf{p}(u)$  を変数  $t$  の連続関数, すなわち  $\mathbf{p}_t(u)$  として表すことができる. ここで, すべての  $v \in V$  に対して,  $\mathbf{p}_0(v) = \mathbf{p}(v)$  が成立すると仮定する. フレームワークが変形した場合にも, 棒材の長さは変わらないことより, 以下の式を得る.

$$(\mathbf{p}_t(u) - \mathbf{p}_t(v)) \cdot (\dot{\mathbf{p}}_t(u) - \dot{\mathbf{p}}_t(v)) = 0, \quad \forall (u, v) \in E. \quad (6.1)$$

Whiteley により, 以下の操作が定義されている [49].

**操作 1 (Vertex 3-addition).** グラフ  $G = (V, E)$  が与えられているとし,  $v_1, v_2, v_3 \in V$  とする. 新たに頂点  $v_0$  及び辺  $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3)$  を追加する操作を操作 1 (Vertex 3-addition) とする (図 6.3).

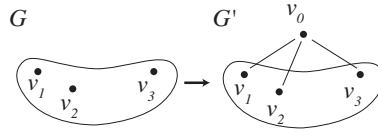


図 6.3 Vertex 3-addition

さらに Whiteley は操作 1 について, 以下の補題を示している [49]. ここで頂点  $v_i$  のジョイント配置を  $\mathbf{p}_i$  とする.

**補題 6.1** (Whiteley [49]). グラフ  $G = (V, E)$  が与えられているとし,  $v_1, v_2, v_3 \in V$  とする. 剛なフレームワーク  $(G, \mathbf{p})$  に新たな頂点  $v_0$  と, 新たな辺  $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3)$  を追加したフレームワークを  $(G', \mathbf{p}')$  とする. このとき  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  が同一平面上にないならば,  $(G', \mathbf{p}')$  もまた剛である.

さらに補題 6.1 の条件を満たす操作を極小剛なフレームワークに施すことで, 新たに頂点数が一つ大きい, 極小剛なフレームワークを得ることができるため, 以下の補題が成り立つ.

**補題 6.2** (Whiteley [49]). グラフ  $G = (V, E)$  が与えられているとし,  $v_1, v_2, v_3 \in V$  とする. 極小剛なフレームワーク  $(G, \mathbf{p})$  に新たな頂点  $v_0$  と, 新

たな辺  $(v_0, v_1)$ ,  $(v_0, v_2)$ ,  $(v_0, v_3)$  を追加したフレームワークを  $(G', \mathbf{p}')$  とする. このとき  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  が同一平面上にないならば,  $(G', \mathbf{p}')$  もまた極小剛である.

また, 本章では筋交いは空間充填多面体の面内にのみ追加することとする (図 6.4(b)). これは, 筋交いを多面体の内部に追加した場合, 多面体内を人が利用する空間として捉えると, 空間内を分断することとなるためである (図 6.4(a)). 従って応用上の観点より, 筋交いは面内にのみ追加することに限定する.

本章では一つの多面体によって空間充填可能な多面体を単位として, 各操作を定義し, 形態生成を行なっているが, 補題 6.2 の条件を満たして vertex 3-addition を行う場合においては, 操作後のフレームワークもまた, 極小剛であり, 提案する各操作の基本単位は, 本章で採用した座標位置の多面体に限定されることはない.

さらに, 棒材同士が交差することなく, 補題 6.2 の条件を満たして vertex 3-addition を行うことができる形状については, 極小剛性を保って形態生成可能であり, その一般化について本稿では扱わないが, 発展の可能性はある. 本稿では, 基礎理論の構築を目指し, 基本的な空間充填立体を扱う.

ピン自体が大きさを持つ場合を本手法で考える時には, ピンを剛体として扱ってモデル化することとなり, body-bar フレームワークとして扱うこととなる. body-bar フレームワークについても組合せ的な特徴付けは知られているが, 本稿では, 基礎的な問題として bar-joint フレームワークの空間充填立体の形態生成について扱う. さらに, 実際の建築空間の構造体として考えた場合には, 棒材の太さ, それに伴う荷重について考慮する必要がある.

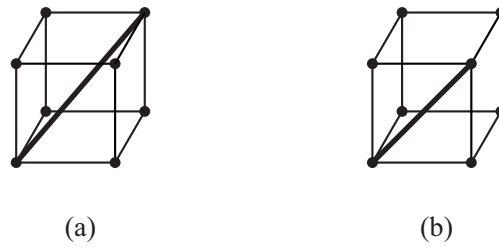


図 6.4 (a) 筋交いを空間充填多面体の内部に追加した例 (b) 面に追加した例

## 6.2 空間充填立体を極小剛とする手法

### 6.2.1 立方体の空間充填立体を極小剛とする手法

ここでは、立方体により構成される空間充填立体に、筋交いを追加することで剛にする手法を示す。

辺の長さ 1 の  $l \times m \times n$  個の立方体で構成する空間充填立体の bar-joint フレームワーク  $X$  について考える (図 6.2(a)). 立方体の各面は  $xy$ ,  $zx$ ,  $yz$  平面のうち、いずれかの平面について平行であるとする.  $X$  のうちの一つの立方体  $C$  について、 $C$  の頂点のなかで  $x$  座標,  $y$  座標,  $z$  座標の各々が最小の頂点が存在する. その頂点を  $v_C$  とする.  $v_C = (s, t, u)$  のとき,  $C$  を  $(s, t, u)$ -立方体と呼ぶ.

さらに、 $(s, t, u)$ -立方体の頂点をそれぞれ,  $v_1 = (s + 1, t, u)$ ,  $v_2 = (s + 1, t + 1, u)$ ,  $v_3 = (s, t + 1, u)$ ,  $v_4 = (s, t, u)$ ,  $v_5 = (s + 1, t, u + 1)$ ,  $v_6 = (s + 1, t + 1, u + 1)$ ,  $v_7 = (s, t + 1, u + 1)$ ,  $v_8 = (s, t, u + 1)$  とし, 複数の立方体の頂点を定義する必要がある場合には, それぞれ  $v_{1(s,t,u)}$ ,  $v_{2(s,t,u)}$ ,  $v_{3(s,t,u)}$ ,  $v_{4(s,t,u)}$ ,  $v_{5(s,t,u)}$ ,  $v_{6(s,t,u)}$ ,  $v_{7(s,t,u)}$ ,  $v_{8(s,t,u)}$  とする (図 6.5).

以下では、筋交いを適宜追加しながら立方体を逐次的に追加していき、極小剛な空間充填立体を生成することを考える. このとき新たな立方体を追加する際には、すでに存在する剛な複数の立方体と面を共有することとする. 一つの面, 二

つの面, 三つの面を共有する場合について以下の 3 つの操作を定義する.

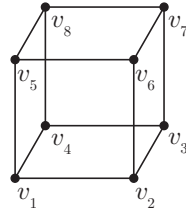


図 6.5 立方体の頂点のラベル

操作 **C1** 剛な一つの面  $v_1v_4v_8v_5$  が与えられているとし, 操作 1 (vertex 3-addition) を以下の順序で実行し, 新たな立方体を得る (図 6.6).

- (i) 頂点  $v_6$  と辺  $(v_1, v_6), (v_5, v_6), (v_8, v_6)$  を追加する.
- (ii) 頂点  $v_2$  と辺  $(v_1, v_2), (v_4, v_2), (v_6, v_2)$  を追加する.
- (iii) 頂点  $v_7$  と辺  $(v_4, v_7), (v_6, v_7), (v_8, v_7)$  を追加する.
- (iv) 頂点  $v_3$  と辺  $(v_2, v_3), (v_4, v_3), (v_7, v_3)$  を追加する.

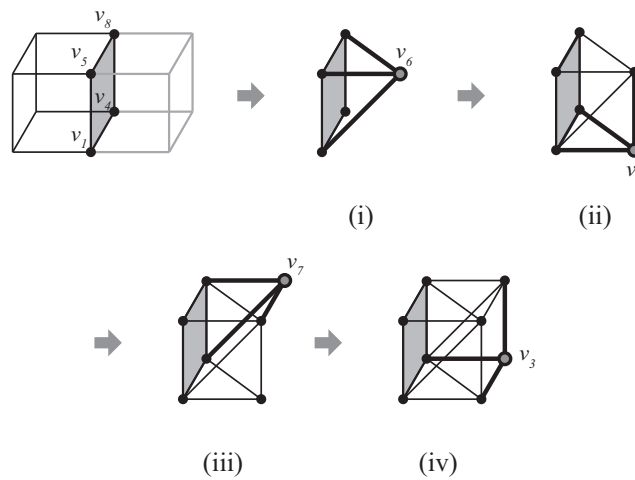


図 6.6 操作 C1

操作 **C2** 剛な二つの面  $v_1v_4v_8v_5, v_1v_2v_3v_4$  が与えられているとし, 操作 1 を以下の順序で実行し, 新たな立方体を得る (図 6.7).

- (i) 頂点  $v_6$  と辺  $(v_1, v_6)$ ,  $(v_5, v_6)$ ,  $(v_8, v_6)$  を追加する.  
(ii) 頂点  $v_2$  と辺  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_4, v_2)$ ,  $(v_6, v_2)$  を追加する.

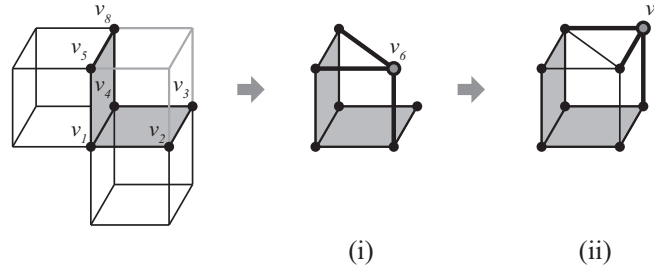


図 6.7 操作 C2

**操作 C3** 剛な三つの面  $v_1v_4v_8v_5$ ,  $v_1v_2v_3v_4$ ,  $v_3v_4v_8v_7$  が与えられているとし、操作 1 により、頂点  $v_6$  と辺  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_4, v_2)$ ,  $(v_6, v_2)$  を追加し、新たな立方体を得る (図 6.8).

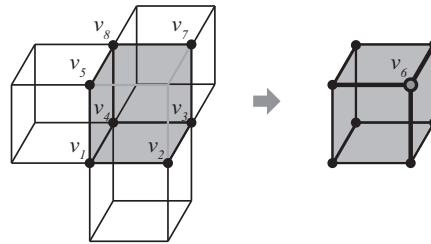


図 6.8 操作 C3

**補題 6.3.** 3つの操作によって得られる新たな立方体は、極小剛である.

**証明** 補題 6.2 の条件を満たす操作 1 によって得られており、操作を施すことによって得られる立方体は極小剛である。□

立方体の空間充填立体フレームワークに対して、筋交いを追加することによって極小剛なフレームワークを生成するアルゴリズムは、3つの操作を用いた、4つのステップで構成される以下のアルゴリズム 1 として記述される。このとき、

$1 \leq s \leq l-1, 1 \leq t \leq m-1, 1 \leq u \leq n-1$  とする.

アルゴリズム 1.

入力:  $(0,0,0)$ -立方体.

ステップ 1:  $(0,0,0)$ -立方体の各面にブレースを追加する (図 6.9(a)).

ステップ 2:  $(1,0,0), (2,0,0), \dots, (l-1,0,0)$ -立方体を操作 C1 により,  $(1,0,0)$ -立方体から順に追加する. 同様に, 操作 C1 により  $(0,t,0), (0,0,u)$ -立方体をそれぞれ,  $(0,1,0)$ -立方体,  $(0,0,1)$ -立方体から順に追加する (図 6.9(b)).

ステップ 3:  $(s,t,0), (0,t,u), (s,0,u)$ -立方体を操作 C2 により, 順に追加する (図 6.9(c)).

ステップ 4:  $(s,t,u)$ -立方体を操作 C3 により追加する (図 6.9(d)).

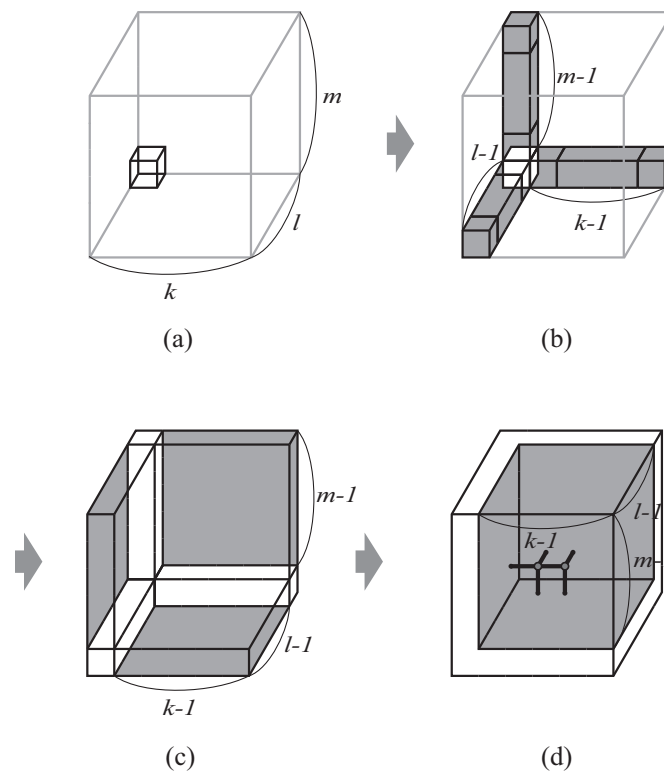


図 6.9 アルゴリズム 1 (a) ステップ 1 (b) ステップ 2 (c) ステップ 3 (d) ステップ 4



ここで, 以下の定理を示す.

**定理 6.1.** アルゴリズム 1 によって得られるフレームワークは, 極小剛なフレームワークである.

**証明** ステップ 1 で得られる立方体は定理 2.2 より剛である. さらに定理 2.1 の等式を満たすことから極小剛である. また, ステップ 2 から 4 によって得られる立方体は 3 つの操作によって得られており, 補題 6.3 より剛である. さらに, 3 つの操作は操作 1 のみを用いているので極小性も保たれている. したがって, アルゴリズム 1 によって得られるフレームワークは極小剛なフレームワークである.  $\square$

## 6.2.2 菱形十二面体の空間充填立体を極小剛とする手法

以下では菱形十二面体で構成される剛な空間充填立体の生成手法を示す. 他の空間充填多面体についても, 立方体, 菱形十二面体と同様な手法により, 極小剛な空間充填立体を得ることができることはこれまでに確認しており [52], 本稿では紙面の都合上, 菱形十二面体についての詳細についてのみ以下で述べる.

ここでは, 菱形十二面体により構成される空間充填立体に, ブレースを追加することで剛にする手法を示す. 頂点をそれぞれ  $v_1 = (0, 0, -2)$ ,  $v_2 = (1, -1, -1)$ ,  $v_3 = (1, 1, -1)$ ,  $v_4 = (-1, 1, -1)$ ,  $v_5 = (-1, -1, -1)$ ,  $v_6 = (2, 0, 0)$ ,  $v_7 = (0, 2, 0)$ ,  $v_8 = (-2, 0, 0)$ ,  $v_9 = (0, -2, 0)$ ,  $v_{10} = (1, -1, 1)$ ,  $v_{11} = (1, 1, 1)$ ,  $v_{12} = (-1, 1, 1)$ ,  $v_{13} = (-1, -1, 1)$ ,  $v_{14} = (0, 0, 2)$  とする [55].

これらの頂点で構成される菱形十二面体を  $(0, 0, 0)$ -菱形十二面体  $R$  とし,  $R$  の面  $v_3v_7v_{11}v_6$ ,  $v_2v_6v_{10}v_9$ ,  $v_6v_{11}v_{14}v_{10}$  に隣接する菱形十二面体をそれぞれ  $(1, 0, 0)$ -菱形十二面体,  $(0, 1, 0)$ -菱形十二面体,  $(0, 0, 1)$ -菱形十二面体とする. 同様に  $(s, t, u)$ -菱形十二面体を,  $R$  から順に  $s, t, u$  個の菱形十二面体を配置した場所に位置する菱形十二面体とする. このようにして配置された  $l \times m \times n$  個の菱形十二面体で構成される空間充填立体の bar-joint フレームワークについて考

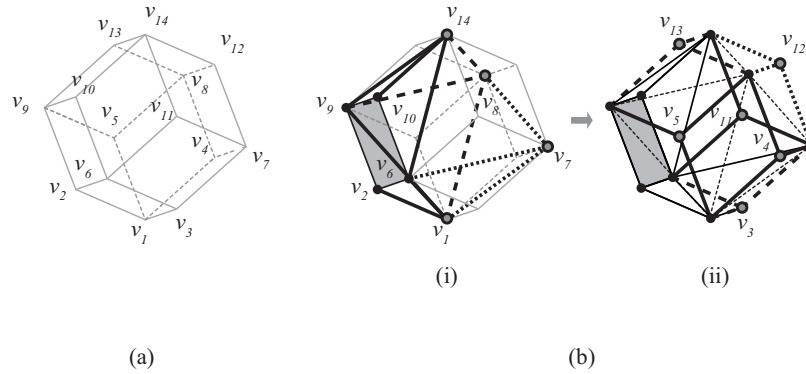


図 6.10 (a) 菱形十二面体の頂点のラベル (b) 操作 R1

える。

菱形十二面体について立方体と同様に 8 つの操作を定義する。

**操作 R1** 剛な面  $v_2v_6v_{10}v_9$  が与えられているとし、操作 1 を以下の順序で実行し、新たな菱形十二面体を得る (図 6.10)。

(i) 頂点  $v_{14}$  と辺  $(v_6, v_{14}), (v_{10}, v_{14}), (v_9, v_{14})$ , 頂点  $v_1$  と辺  $(v_9, v_1), (v_6, v_1), (v_2, v_1)$ , 頂点  $v_8$  と辺  $(v_9, v_8), (v_{14}, v_8), (v_1, v_8)$ , 頂点  $v_7$  と辺  $(v_6, v_7), (v_8, v_7), (v_1, v_7)$  をそれぞれ操作 1 により追加する。

(ii) 頂点  $v_3$  と辺  $(v_1, v_3), (v_6, v_3), (v_7, v_3)$ , 頂点  $v_4$  と辺  $(v_1, v_4), (v_7, v_4), (v_8, v_4)$ , 頂点  $v_5$  と辺  $(v_1, v_5), (v_8, v_5), (v_9, v_5)$ , 頂点  $v_{11}$  と辺  $(v_6, v_{11}), (v_7, v_{11}), (v_{14}, v_{11})$ , 頂点  $v_{13}$  と辺  $(v_8, v_{13}), (v_9, v_{13}), (v_{14}, v_{13})$  をそれぞれ操作 1 により追加する。

**操作 R2** 剛な面  $v_2v_6v_{10}v_9, v_3v_7v_{11}v_6$  が与えられているとし、操作 1 を以下の順序で実行し、新たな菱形十二面体を得る (図 6.11)。

(i) 頂点  $v_1$  と辺  $(v_2, v_1), (v_3, v_1), (v_9, v_1)$ , 頂点  $v_{14}$  と辺  $(v_7, v_{14}), (v_{10}, v_{14}), (v_{11}, v_{14})$  をそれぞれ操作 1 により追加する。

(ii) 頂点  $v_8$  と辺  $(v_{14}, v_8), (v_7, v_8), (v_9, v_8)$ , 頂点  $v_4$  と辺  $(v_1, v_4), (v_7, v_4), (v_8, v_4)$ , 頂点  $v_5$  と辺  $(v_1, v_5), (v_8, v_5), (v_9, v_5)$  をそれぞれ操作 1 により追加す

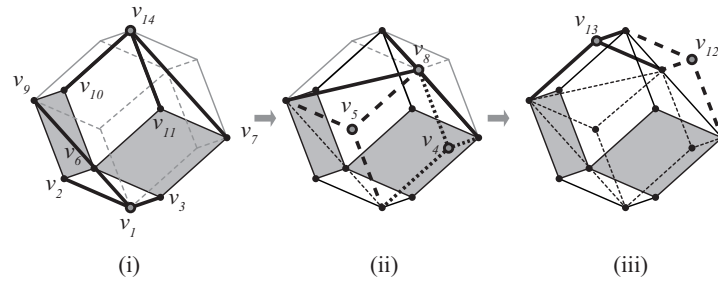


図 6.11 操作 R2.

る.

(iii) 頂点  $v_{12}$  と辺  $(v_7, v_{12})$ ,  $(v_8, v_{12})$ ,  $(v_{14}, v_{12})$ , 頂点  $v_{13}$  と辺  $(v_8, v_{13})$ ,  $(v_9, v_{13})$ ,  $(v_{14}, v_{13})$  をそれぞれ操作 1 により追加する.

**操作 R3** 剛な面  $v_1v_5v_9v_2$ ,  $v_1v_3v_6v_2$ ,  $v_1v_4v_7v_3$ ,  $v_1v_4v_8v_5$  が与えられているとし, 操作 1 を以下の順序で実行し, 新たな菱形十二面体を得る (図 6.12(a)).

(i) 頂点  $v_{14}$  と辺  $(v_6, v_{14})$ ,  $(v_7, v_{14})$ ,  $(v_9, v_{14})$ , 頂点  $v_{10}$  と辺  $(v_6, v_{10})$ ,  $(v_9, v_{10})$ ,  $(v_{14}, v_{10})$ , 頂点  $v_{11}$  と辺  $(v_6, v_{11})$ ,  $(v_7, v_{11})$ ,  $(v_{14}, v_{11})$  をそれぞれ操作 1 により追加する.

(ii) 頂点  $v_{12}$  と辺  $(v_7, v_{12})$ ,  $(v_8, v_{12})$ ,  $(v_{14}, v_{12})$ , 頂点  $v_{13}$  と辺  $(v_8, v_{13})$ ,  $(v_9, v_{13})$ ,  $(v_{14}, v_{13})$  をそれぞれ操作 1 により追加する.

**操作 R4** 剛な面  $v_1v_5v_9v_2$ ,  $v_1v_3v_6v_2$ ,  $v_1v_4v_7v_3$ ,  $v_1v_4v_8v_5$ ,  $v_2v_4v_8v_5$  が与えられているとし, 頂点  $v_{11}$  と辺  $(v_6, v_{11})$ ,  $(v_7, v_{11})$ ,  $(v_{10}, v_{11})$ , 頂点  $v_{14}$  と辺  $(v_9, v_{14})$ ,  $(v_{10}, v_{14})$ ,  $(v_{11}, v_{14})$ , 頂点  $v_{12}$  と辺  $(v_7, v_{12})$ ,  $(v_8, v_{12})$ ,  $(v_{14}, v_{12})$ , 頂点  $v_{13}$  と辺  $(v_8, v_{13})$ ,  $(v_9, v_{13})$ ,  $(v_{14}, v_{13})$  をそれぞれ操作 1 により追加する (図 6.12(b)).

**操作 R5** 剛な面  $v_1v_3v_6v_2$ ,  $v_1v_5v_9v_2$ ,  $v_2v_6v_{10}v_9$  が与えられているとし, 操作 1 を以下の順序で実行し, 新たな菱形十二面体を得る (図 6.13(a)).

(i) 頂点  $v_7$  と辺  $(v_1, v_7)$ ,  $(v_3, v_7)$ ,  $(v_6, v_7)$ , 頂点  $v_8$  と辺  $(v_1, v_8)$ ,  $(v_5, v_8)$ ,  $(v_9, v_8)$ , 頂点  $v_{14}$  と辺  $(v_6, v_{14})$ ,  $(v_9, v_{14})$ ,  $(v_{10}, v_{14})$  をそれぞれ操作 1 により

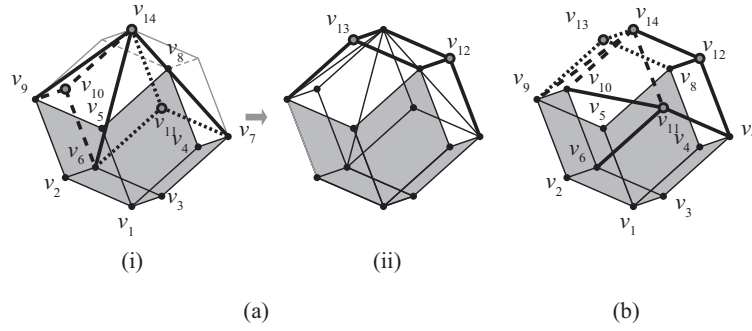


図 6.12 (a) 操作 R3, (b) 操作 R4.

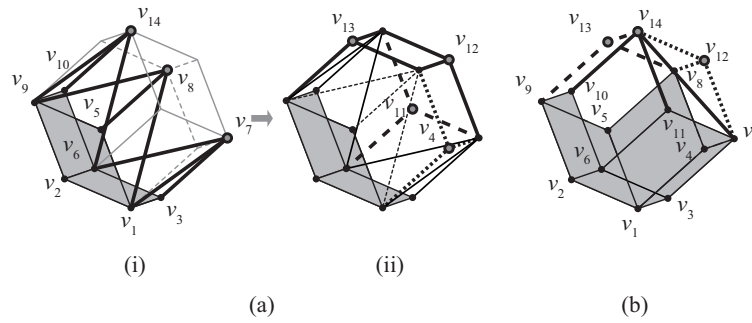


図 6.13 (a) 操作 R5, (b) 操作 R6.

追加する.

(ii) 頂点  $v_4$  と辺  $(v_1, v_4), (v_7, v_4), (v_8, v_4)$ , 頂点  $v_{11}$  と辺  $(v_6, v_{11}), (v_7, v_{11}), (v_{14}, v_{11})$ , 頂点  $v_{13}$  と辺  $(v_8, v_{13}), (v_9, v_{13}), (v_{14}, v_{13})$ , 頂点  $v_{12}$  と辺  $(v_7, v_{12}), (v_8, v_{12}), (v_{14}, v_{12})$  をそれぞれ操作 1 により追加する.

**操作 R6** 剛な面  $v_1v_5v_9v_2, v_1v_3v_6v_2, v_1v_4v_7v_3, v_1v_4v_8v_5, v_2v_4v_8v_5, v_3v_7v_{11}v_6$  が与えられているとし, 頂点  $v_{14}$  と辺  $(v_7, v_{14}), (v_{10}, v_{14}), (v_{11}, v_{14})$ , 頂点  $v_{12}$  と辺  $(v_7, v_{12}), (v_8, v_{12}), (v_{14}, v_{12})$ , 頂点  $v_{13}$  と辺  $(v_8, v_{13}), (v_9, v_{13}), (v_{14}, v_{13})$  をそれぞれ操作 1 により追加する (図 6.13(b)).

**操作 R7** 剛な面  $v_1v_5v_9v_2, v_1v_3v_6v_2, v_2v_6v_{10}v_9, v_3v_7v_{11}v_6$  が与えられているとし,

(i) 頂点  $v_4$  と辺  $(v_1, v_4), (v_5, v_4), (v_7, v_4)$ , 頂点  $v_{14}$  と辺  $(v_7, v_{14}), (v_{10}, v_{14})$ ,

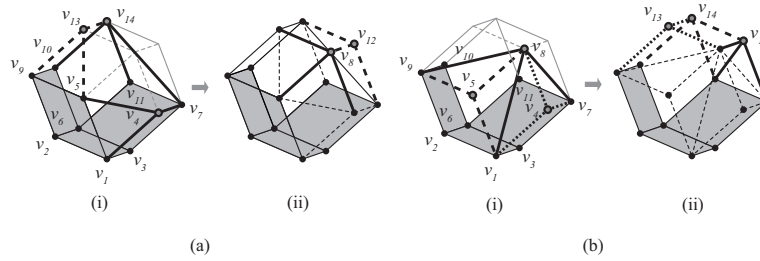


図 6.14 (a) 操作 R7, (b) 操作 R8.

$(v_{11}, v_{14})$ , 頂点  $v_{13}$  と辺  $(v_5, v_{13}), (v_9, v_{13}), (v_{14}, v_{13})$  をそれぞれ操作 1 により追加する.

(ii) 頂点  $v_8$  と辺  $(v_4, v_8), (v_5, v_8), (v_{13}, v_8)$ , 頂点  $v_{12}$  と辺  $(v_7, v_{12}), (v_8, v_{12}), (v_{14}, v_{12})$  をそれぞれ操作 1 により追加する (図 6.14(a)).

**操作 R8** 剛な面  $v_1v_3v_6v_2, v_2v_6v_{10}v_9, v_3v_7v_{11}v_6$  が与えられているとし,

(i) 頂点  $v_8$  と辺  $(v_1, v_8), (v_7, v_8), (v_9, v_8)$ , 頂点  $v_4$  と辺  $(v_1, v_4), (v_7, v_4), (v_8, v_4)$ , 頂点  $v_5$  と辺  $(v_1, v_5), (v_8, v_5), (v_9, v_5)$  をそれぞれ操作 1 により追加する.

(ii) 頂点  $v_{12}$  と辺  $(v_7, v_{12}), (v_8, v_{12}), (v_{11}, v_{12})$ , 頂点  $v_{14}$  と辺  $(v_{10}, v_{14}), (v_{11}, v_{14}), (v_{12}, v_{14})$ , 頂点  $v_{13}$  と辺  $(v_8, v_{13}), (v_9, v_{13}), (v_{14}, v_{13})$  をそれぞれ操作 1 により追加する (図 6.14(b)).

**補題 6.4.** 8 つの操作によって得られる新たな菱形十二面体は全て, 極小剛である.

**証明** 8 つの操作は全て, 補題 6.1 の条件を満たす操作 1 によって得られているので, 操作によって得られる菱形十二面体は極小剛である.  $\square$

菱形十二面体に関する 8 つの操作を用いて, 7 つのステップから成るアルゴリズムを以下に示す.

**アルゴリズム 2.**

入力:  $(0, 0, 0)$ -菱形十二面体.

ステップ 1:  $(0, 0, 0)$ -菱形十二面体の各面に筋交いを追加する (図 6.15(a)).

ステップ 2:  $(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (l-1, 0, 0)$ -菱形十二面体を操作 R1 により,  $(1, 0, 0)$ -菱形十二面体から順に追加する. 同様に,  $1 \leq t \leq m-1$  とし,  $(0, t, 0)$ -菱形十二面体を追加する (図 6.15(b)).

ステップ 3:  $1 \leq s \leq l-1, 1 \leq t \leq m-1$  とし,  $(s, t, 0)$ -菱形十二面体を操作 R2 により追加する (図 6.15(c)).

ステップ 4:  $(0, 0, 1)$ -菱形十二面体を操作 R3 により追加する (図 6.15(d)).

ステップ 5:  $(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (l-2, 0, 1)$ -菱形十二面体を操作 R4 により, 順に追加する. 同様に,  $1 \leq t \leq m-2$  について  $(0, t, 1)$ -菱形十二面体を追加する. さらに,  $(l-1, 0, 1), (0, m-1, 1)$ -菱形十二面体を操作 R5 により追加する (図 6.15(e)).

ステップ 6:  $1 \leq s \leq l-2, 1 \leq t \leq m-2$  について  $(s, t, 1)$ -菱形十二面体を操作 R6 により追加する. さらに,  $(l-1, t, 1), (s, m-1, 1)$ -菱形十二面体を操作 R7 により追加する. 最後に,  $(l-1, m-1, 1)$ -菱形十二面体を操作 R8 により追加する (図 6.15(f)).

ステップ 7: ステップ 4~6 を繰り返す (図 6.15(g)).

ここで, 以下の定理を示す.

**定理 6.2.** アルゴリズム 2 によって得られる bar-joint フレームワークは, 極小剛な bar-joint フレームワークである.

**証明** ステップ 1 で得られる菱形十二面体は定理 2.2 より剛である. さらに定理 2.1 の等式を満たすことから極小剛である. また, ステップ 2 から 7 によって得られる菱形十二面体は 8 つの操作によって得られており, 補題 6.4 より剛である. さらに, 8 つの操作列は操作 1 のみを用いているので極小性も保たれている. したがってアルゴリズム 2 によって得られるフレームワークは, 極小剛なフレームワークである. □

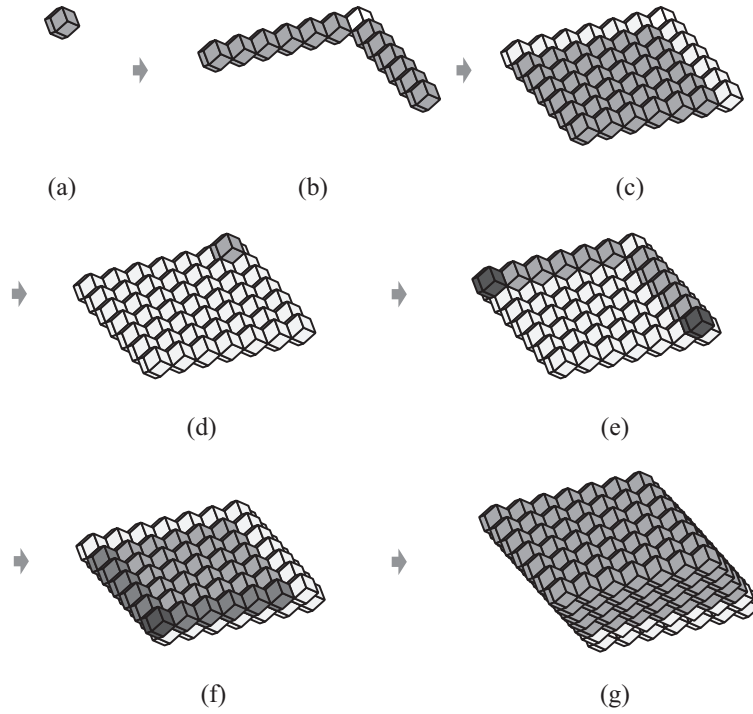


図 6.15 アルゴリズム 2 (a) ステップ 1 (b) ステップ 2 (c) ステップ 3 (d) ステップ 4 (e) ステップ 5 (f) ステップ 6 (g) ステップ 7

## 6.3 建築形態生成手法への拡張

### 6.3.1 内部空間をもつ極小剛な空間充填立体の生成手法

ここでは、提案手法を建築の形態生成に用いることを想定し、はじめに、大きさ  $(k-2) \times (l-2) \times (m-2)$  の立方体の穴を内側にもつ大きさ  $k \times l \times m$  の剛な立体の作り方を示す。

このとき、新たな操作 C4 を定義する。

**操作 C4** 剛な二つの面  $v_{1(s,t,u)}v_{4(s,t,u)}v_{8(s,t,u)}v_{5(s,t,u)}$ ,  $v_{4(s+1,t-1,u)}v_{3(s+1,t-1,u)}$ ,  $v_{7(s+1,t-1,u)}v_{8(s+1,t-1,u)}$  と剛な一つの頂点  $v_{3(s,t,u)}$  が与えられているとし、操作 1 により、頂点  $v_{7(s,t,u)}$  と辺  $(v_{7(s,t,u)}, v_{8(s,t,u)})$ ,  $(v_{7(s,t,u)}, v_{3(s,t,u)})$ ,  $(v_{7(s,t,u)}, v_{8(s+1,t-1,u)})$  を追加する (図 6.16)。

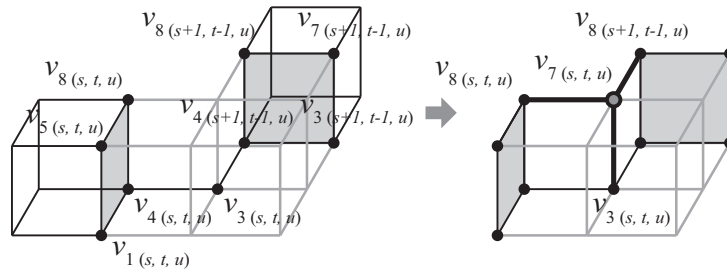


図 6.16 操作 C4

このとき、操作 C4 も補題 6.2 の条件を満たした、操作 1 のみを用いていることから、極小剛性を保つ操作である。

4 つの操作を用いた、4 つのステップで構成されるアルゴリズムを以下に示す。

**アルゴリズム 3.**

**ステップ 1:** アルゴリズム 1 のステップ 1 ~ 3 を行う (図 6.17(a)).

**ステップ 2:** 操作 C2 により、 $(k-1, t, u)$ ,  $(s, l-1, u)$ ,  $(s, t, m-1)$ -立方体を追加する (図 6.17(b)). ここで、 $1 \leq s \leq l-3$ ,  $1 \leq t \leq m-3$ ,  $1 \leq u \leq n-3$  とする。

**ステップ 3:** 操作 C4 により、頂点  $(k-2, l-2, u)$ ,  $(s, l-2, m-2)$ ,  $(k-2, t, m-2)$  を追加する (図 6.17(c)). ここで、 $2 \leq s \leq l-2$ ,  $2 \leq t \leq m-2$ ,  $2 \leq u \leq n-2$  とする。

**ステップ 4:** 操作 C3 により、残りの立方体を追加する (図 6.17(d)).

図 6.17 において、全ての棒材、頂点を表現すると図が煩雑になるため、図 6.17 (a), (b), (d) は追加する立方体を黒色で表現している。

ここで、以下の定理を示す。

**定理 6.3.** アルゴリズム 3 によって得られる bar-joint フレームワークは、極小剛な bar-joint フレームワークである。

**証明** 極小性が保証された操作 C1~C4 によりフレームワークは得られており、ア



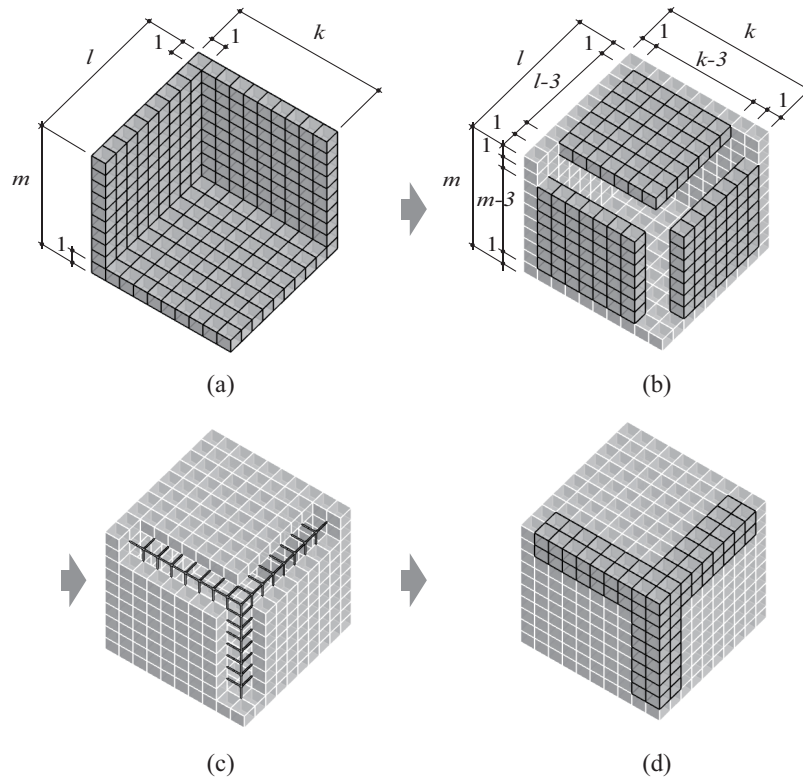


図 6.17 アルゴリズム 3 (a) ステップ 1 (b) ステップ 2, (c) ステップ 3 (d) ステップ 4

アルゴリズム 3 によって得られるフレームワークは極小剛である。 □

### 6.3.2 内部空間が外部につながった剛な空間充填立体の生成手法

さらに、建築的な構造物の形態生成を行うため、開口部となるような穴が空間充填立体の外側にもある立体 (図 6.18) を想定し、極小剛とする手法の検討を行った。この場合にも新たに 1 つの操作を定義し、その操作を用いることで極小剛な立体を得ることができる。

**操作 C5** 剛な二つの面  $v_1(s, t, u)v_4(s, t, u)v_8(s, t, u)v_5(s, t, u)$ ,  $v_4(s+1, t-1, u)v_3(s+1, t-1, u)v_7(s+1, t-1, u)v_8(s+1, t-1, u)$  が与えられているとし、操作 1 により、頂点  $v_8$  と辺  $(v_4, v_8)$ ,  $(v_7, v_8)$ ,  $(v_5, v_8)$  を追加する (図 6.19)。

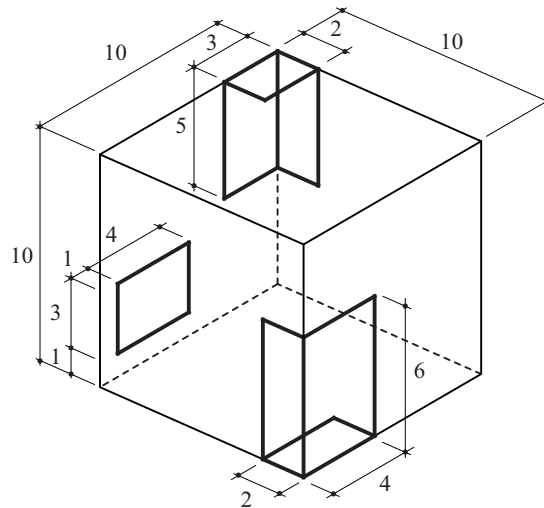


図 6.18 外部の穴の場所

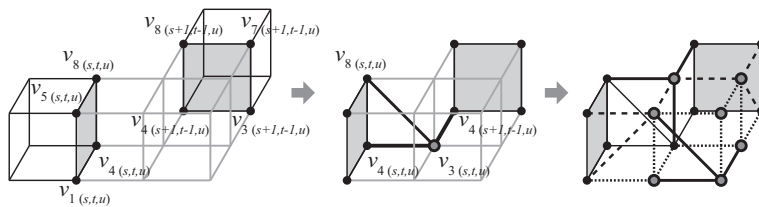


図 6.19 操作 C5

このとき、操作 C5 も補題 6.2 の条件を満たした、操作 1 のみを用いていることから、極小剛性を保つ操作である。

これまでと同様に、5 つの操作を用いた 5 つのステップで構成されるアルゴリズムを以下に示す。

**アルゴリズム 4.**

**ステップ 1:** アルゴリズム 3 のステップ 1 ~ 2 と同様に、 $(8,0,4)$ ,  $(9,0,3)$ ,  $(9,0,4)$ ,  $(9,1,3)$ ,  $(9,1,4)$ -立方体を除いた高さ 5 までの剛な立方体を追加する (図 6.20(a)).

**ステップ 2:**  $(8,0,4)$ ,  $(9,0,3)$ ,  $(9,0,4)$ ,  $(9,1,3)$ ,  $(9,1,4)$ -立方体を、アルゴリズム 3 のステップ 3 ~ 4 と同様に追加する (図 6.20(b)).

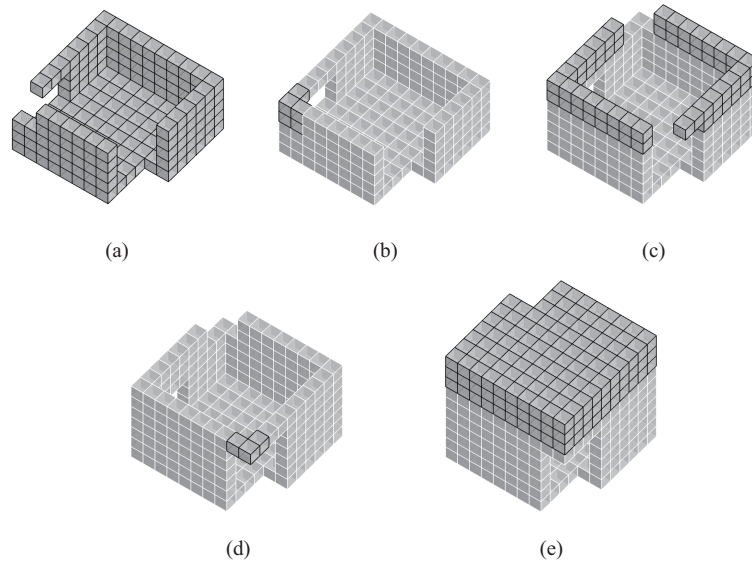


図 6.20 アルゴリズム 4 (a) ステップ 1 (b) ステップ 2 (c) ステップ 3 (d) ステップ 4 (e) ステップ 5

**ステップ 3:** アルゴリズム 3 のステップ 1 ~ 2 と同様に,  $(8,9,6)$ ,  $(9,8,6)$ ,  $(9,9,6)$ -立方体を除いた高さ 7 までの剛な立方体を追加する (図 6.20(c)).

**ステップ 4:** 操作 C5 により,  $(8,9,6)$ ,  $(9,8,6)$ ,  $(9,9,6)$ -立方体を追加する (図 6.20(d)).

**ステップ 5:** アルゴリズム 3 のステップ 1 ~ 4 と同様に剛な立方体を追加する (図 6.20(e)).

**定理 6.4.** アルゴリズム 4 によって得られる bar-joint フレームワークは, 極小剛な bar-joint フレームワークである.

**証明** 極小性が保証された操作 C1~C5 によりフレームワークは得られており, アルゴリズム 4 によって得られるフレームワークは極小剛である.  $\square$

図 6.21, 6.22 にアルゴリズム 4 によって得られた極小剛な構造物を示す.

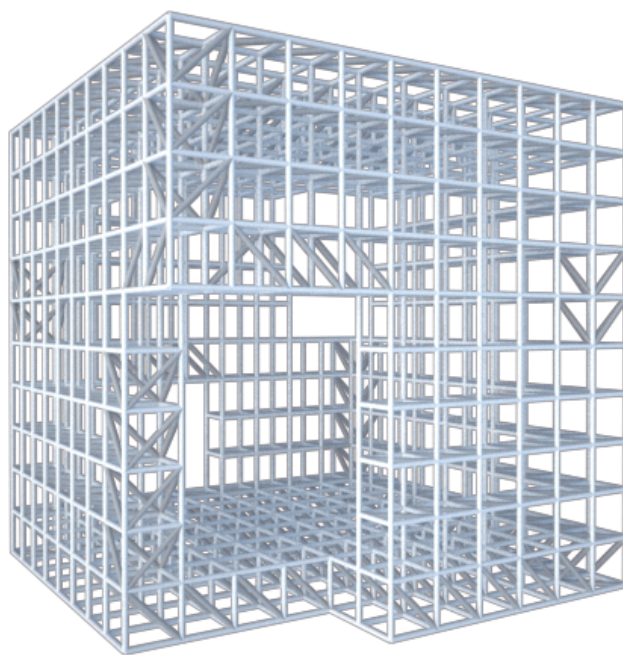


図 6.21 アルゴリズム 4 による極小剛なフレームワークの例

## 6.4 結語

組合せ剛性理論を用いて、空間充填立体を極小剛とするブレースの追加手法を開発した。さらに、建築構造物への応用を想定した剛な形態生成を可能とする操作の開発と形態生成を行い、建築デザインへの応用の可能性を示した。

建築構造物への応用を想定した形態生成手法を、開口部や内部空間の数や形状などを、条件として与えることのできる手法として確立することは、今後の課題である。

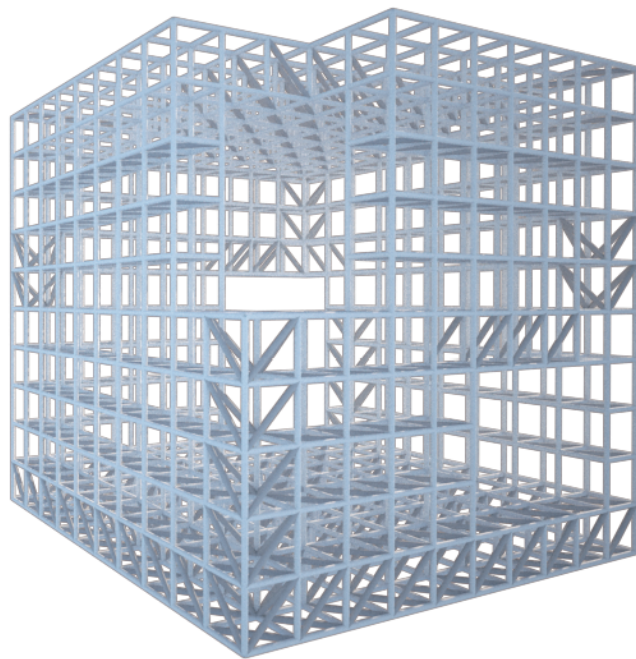


図 6.22 別の角度から見た例

## 第7章

# 結論

本論文では組合せ剛性理論の建築デザインへの応用を目指し, panel-hinge フレームワーク及び, bar-joint フレームワークに着目し, 各章において以下のことを明らかにした.

第3章「極小剛な panel-hinge グラフの逐次生成手法」では, 逐次的に panel-hinge グラフを生成する5つの操作を定義し, 次のことを示した. (i) 極小剛な panel-hinge グラフに対して5つの操作を行ってできるいずれのグラフもまた, 極小剛な panel-hinge グラフである. (ii) 5つの操作の操作列を施すことにより, 任意の極小剛な panel-hinge グラフを生成可能である.

第4章「Panel-hinge グラフの冗長剛性及び冗長大域剛性の特徴付け」では, 2次元において次の三条件が等価であることを示している. (i) panel-hinge グラフ  $G$  が  $(k, h)$ -剛である. (ii) panel-hinge グラフ  $G$  が  $(k, h + 1)$ -大域剛である. (iii) グラフ  $G$  が  $(k, h + 2)$ -連結である. さらに, 3次元以上においては次の三条件が等価であることを示している. (i') panel-hinge グラフ  $G$  が  $(k, h)$ -剛である. (ii') panel-hinge グラフ  $G$  が  $(k, h)$ -大域剛である. (iii') グラフ  $G$  が  $(k, h + 1)$ -連結である.

第5章「剛な panel-hinge フレームワークの生成手法」では, 極小剛な panel-hinge グラフを逐次的に生成する操作に基づき, 非一般配置の剛な panel-hinge

フレームワークを生成する手法を探究した。さらにフラクタル図形に基づき、空間充填多面体を基本形とする非一般配置の剛な panel-hinge フレームワークを生成する手法を提案した。その後、提案手法が形態デザインに応用可能であることを、構造物の例や模型を作成することで示した。

第 6 章「極小剛な bar-joint フレームワークの生成手法」では、空間充填立体の bar-joint フレームワークに対して、最小本数の筋交いを追加することで極小剛とする手法を示した。さらに開発した操作を拡張し、内部空間や開口部を想定した極小剛な構造物の生成手法を提案した。

最後に、本研究の今後の課題について述べる。極小剛な panel-hinge グラフの逐次生成手法については、逐次的に極小剛な panel-hinge グラフを生成する操作によってはペブルゲームアルゴリズムによって、操作後のグラフの極小剛性を確認する必要がある。ペブルゲームアルゴリズムを用いることなく、逐次的にグラフを生成する操作は明らかとなっていない。さらに、多項式時間で全ての単純グラフである極小剛な panel-hinge グラフを生成する手法の開発も今後の課題である。この時、操作 5 を行う場合、頂点  $a$  の  $d$  個の隣接頂点を 2 つの部分集合に分ける必要があり、 $O(2^d)$  の選択肢が存在するため、多項式時間アルゴリズムを開発することの問題点となっている。

第 5 章、第 6 章で提案している剛な構造物を生成する手法では、パネルや棒材自体の荷重を考慮しておらず、実際に建築の構造体として実現することを考える場合には、数値解析が必要となる。

さらに第 5 章で提案するグラフに対する操作に基づく形態生成手法は、一つの提案例であり、提案手法以外にも異なる生成手法を考えることができることに注意する。そして、第 5 章では第 3 章で開発した操作の一部に対応する形態生成手法を提案しているため、他のグラフを生成する操作に対応する形態生成手法を検討することも考えられる。また、本研究での提案手法は逐次的に剛なフレームワークを生成する手法であるが、panel-hinge グラフに対応する一般的な配置を考慮したフレームワークを生成することが可能となれば、形態デザインにとっ

て、より有用となる。さらに、提案手法によって剛な形態を生成する場合において、光環境や温熱環境といったシミュレーションと関連付けて、形態の最適化を行うことも今後の課題である。

第 6 章の極小剛な bar-joint フレームワークの生成手法については、柔軟なフレームワークに対して、筋交いを追加することにより極小剛なフレームワークを得る手法を提案しているが、筋交いを全て追加した状態から考えて、柔軟とならないように筋交いを抜いていく、といった問題を考えることもできる。また、複数の多面体からなる空間充填立体についても同様に、極小剛とする筋交いの追加方法が存在するかといったことについても、本研究では確認をしていない。建築構造物への応用を想定した形態生成手法を、開口部や内部空間の数や形状などを、条件として与えることのできる手法として確立することは、今後の課題である。

室配置の接続関係をグラフとして扱い、分析するといったように、建築計画分野においてもグラフ理論は応用がこれまでになされている。組合せ剛性理論における知見を建築計画分野において活用することも今後の課題である。





## 参考文献

- [1] A. D. Alexandrov, “Convex Polyhedra”, *Gostekhizdat*, Moscow-Leningrad, 1950 (in Russian), English translation: Springer, Berlin, 2005.
- [2] E. D. Bolker and H. Crapo, “Bracing rectangular frameworks. I”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 36(3):473–490, 1979.
- [3] J. Farre, A. John, J. Sidman, and L. Theran, “Special positions of body-and-cad Frameworks”, arXiv preprint arXiv:1306.1572, 2013.
- [4] E. S. Fedorov, “An introduction to the theory of figures (in Russian)”, *Notices of the Imperial Mineralogical Society*, 2(21):1–279, 1885.
- [5] A. Frank and L. Szegö, “Constructive characterizations for packing and covering with trees”, *Discrete Applied Mathematics*, 131(2):347–371, 2003.
- [6] A. Frank, “Connections in Combinatorial Optimization”, *Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications*, 38, Oxford University Press, 2011.
- [7] A. Garcia and J. Tejel, “Augmenting the rigidity of a graph in  $R^2$ ”, *Algorithmica*, 59:145–168, 2011.
- [8] J. E. Graver, B. Servatius, and H. Servatius, “Combinatorial Rigidity”, *volume 2 of Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, 1993.

- [9] L. E. L. Henneberg, “Die graphische Statik der starren Systeme”, *B.G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, B. G. Teubner, 1911.
- [10] Y. Ito, Y. Kobayashi, Y. Higashikawa, N. Katoh, S. Poon, and M. Saumell, “Optimally Bracing Grid Frameworks with Holes”, *Theoretical Computer Science*, DOI:10.1016/j.tcs.2015.07.062, 2015.
- [11] B. Jackson and T. Jordán, “A sufficient connectivity condition for generic rigidity in the plane”, *Discrete Applied Mathematics*, 157(8):1965–1968, 2009.
- [12] B. Jackson and T. Jordán, “The generic rank of body-bar-and-hinge frameworks”, *European Journal of Combinatorics*, 31(2):574–588, 2009.
- [13] T. Jordán, C. Király, and S. Tanigawa, “Generic global rigidity of body-hinge frameworks”, *EGRES Technical Reports*, TR-2014-06, 2014.
- [14] N. Katoh and S. Tanigawa, “A proof of the molecular conjecture”, *Discrete & Computational Geometry*, 45:647–700, 2011.
- [15] Y. Kobayashi, Y. Higashikawa, N. Katoh, and N. Kamiyama, “An Inductive Construction of Minimally Rigid Body-Hinge Simple Graphs”, *Theoretical Computer Science*, 556, 2–12, 2014.
- [16] Y. Kobayashi, N. Katoh, T. Okano, and A. Takizawa, “An Inductive Construction of Rigid Panel-Hinge Graphs and Their Applications to Form Design”, *The International Journal of Architectural Computing*, 13(1):45–63, 2015.
- [17] R. Kohta, M. Yamakawa, N. Katoh, Y. Araki, and M. Ohsaki, “A Design Method for Optimal Truss Structures with Certain Redundancy Based on Combinatorial Rigidity Theory”, *Journal of Structural and Construction Engineering*, 79(699):583–592, 2014.

- 
- [18] L. A. Kuhn, D. J. Rader, and M. F. Thorpe, “Protein flexibility predictions using graph theory”, *Proteins*, 44:150–65, 2001.
- [19] G. Laman, “On graphs and rigidity of plane skeltal structures”, *Journal of Engineering mathematics*, 4(4):331–340, 1970.
- [20] R. J. Lang, “Origami Design Secrets”, *Mathematical Methods for an Ancient Art*, AK Peters, 2003.
- [21] R. J. Lang, “TreeMaker”, <http://www.langorigami.com/science/treemaker/treemaker5.php>, 2006.
- [22] A. Lee and I. Streinu, “Pebble game algorithms and sparse graphs”, *Discrete Mathematics*, 308(8), 1425–1437, 2008.
- [23] L. Lovász and Y. Yemini, “On Generic Rigidity in the Plane”, *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 3(1):91–98, 1982.
- [24] B. B. Mandelbrot, “The fractal geometry of nature/Revised and enlarged edition”, WH Freeman and Co., New York, 1983.
- [25] J. C. Maxwell, “On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames”, *Philosophical Magazine*, 27:294–299, 1864.
- [26] K. Mehlhorn, A. Neumann, and J. Schmidt, “Certifying 3-edge-connectivity”, *arXiv:1211.6553v1*, 2013.
- [27] H. Nagamochi and T. Ibaraki, “Computing edge connectivity in multigraphs and capacitated graphs”, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5:54–66, 1992.
- [28] H. Nagamochi and T. Ibaraki, “A linear time algorithm for computing 3-edge-connected components in a multigraph”, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 9:163–180, 1992.
- [29] H. Nagamochi and T. Ibaraki, “Augmenting edge-connectivity over the entire range in  $\tilde{O}(nm)$  time”, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 30:253–301, 1999.

- [30] H. Nagamochi and T. Ibaraki, “Algorithmic aspects of graph connectivity”, Lemma 4.8, Cambridge University Press New York, 2008.
- [31] C. Nash-Williams, “Edge-disjoint spanning trees of finite graphs”, *Journal of the London Mathematical Society*, s1(1):445–450, 1961.
- [32] M. Ohsaki, N. Katoh, T. Kinoshita, S. Tanigawa, D. Avis, and I. Streinu, “Enumeration of optimal pin-jointed bistable compliant mechanism”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 37(6):645-651, 2009.
- [33] T. Okano, N. Katoh, A. Takizawa, and Y. Yoshinaka, “An Enumeration Algorithm of Minimally Rigid Graph Structure”, *Algode 2011*, Tokyo, Mar. 14-15, 2011.
- [34] A. Recski, “Bracing cubic grids—a necessary condition”, *Discrete Mathematics*, 73:199–206, 1989.
- [35] A. Schrijver, “Combinatorial Optimization”, vol. B, p. 881, Corollary 51.3b, Springer, 2003.
- [36] G. Selig, “Geometric Fundamentals of Robotics”, 2nd edn. Springer, 2004.
- [37] B. Servatius and H. Servatius, “Rigidity, global rigidity, and graph decomposition”, *European Journal of Combinatorics*, 31:1121–1135, 2009.
- [38] T. Tachi, “Freeform Variations of Origami”, *Journal for Geometry and Graphics*, 14(2):203-215, 2010.
- [39] T. Takenaka and A. Okabe, “A Computational Method for Integrating Parametric Origami Design and Acoustic Engineering”, *Proceedings of the 31st eCAADe Conference*, 2, 289–295, 2013.
- [40] S. Tanigawa, “Sufficient conditions for globally rigidity of graphs”, arXiv:1403.3742, 2014.
- [41] S. Taoka, T. Watanabe, and K. Onaga, “A linear-time algorithm for computing all 3-edge-connected components of a multigraph”, *IEICE*

- TRANSACTIONS on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 75(3):410–424, 1992.
- [42] T. Tay, “Rigidity of multi-graphs. I. Linking rigid bodies in  $n$ -space”, *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, 36(1): 95–112, 1984.
- [43] T. Tay, “Linking  $(n - 2)$ -dimensional panels in  $n$ -space ii:  $(n - 2, 2)$ -frameworks and body and hinge structures”, *Graphs and Combinatorics*, 5(1):245–273, 1989.
- [44] K. Terzidis, “Algorithmic Architecture”, Taylor & Francis, 2006.
- [45] W. T. Tutte, “On the problem of decomposing a graph into  $n$  connected factors”, *Journal of the London Mathematical Society*, s36:221–230, 1961.
- [46] T. Uno, “A new approach for speeding up enumeration algorithms and its application for matroid bases”, *COCOON 1999*, pp. 349–359, 1999.
- [47] N. White and W. Whiteley, “The algebraic geometry of motions of bar-and-body frameworks”, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 8(1):1–32, 1987.
- [48] W. Whiteley, “The union of matroids and the rigidity of frameworks”, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 1(2):237–255, 1988.
- [49] W. Whiteley, “Some matroids from discrete applied geometry”, *Contemporary Mathematics*, 197:171–311, 1996.
- [50] W. Whiteley, “Rigidity and scene analysis”, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, In J. Goodman and J. O’ Rourke, Chapman Hall/CRC Press, Boca Raton, FL, 2nd edition, chapter 60, 1327–1354, 2004.
- [51] W. Whiteley, “Counting out to the flexibility of molecules”, *Physical Biology*, 2:1–11. 2005.
- [52] 伊藤慈彦, 小林祐貴, 東川雄哉, 加藤直樹, 堀山貴史, 伊藤仁一, 奈良知恵, “

- グリッドフレームワークを剛にする最適なブレース追加問題”, ERATO 湊  
離散構造処理系プロジェクト 秋のワークショップ, 北海道, 2014.
- [53] 加藤直樹, “組合せ剛性理論の最近の進展と応用”, 電子情報通信学会論文  
誌, J99-D(10):1055–1068, 2016.
- [54] 谷川眞一, “構造物の組合せ剛性: 計数条件とグラフ分割”, 第 22 回 RAMP  
シンポジウム, 名古屋, 2010.
- [55] 一松信, “正多面体を解く”, 東海大学出版部, 2002.
- [56] 日本建築学会編, “アルゴリズムック・デザイン 建築・都市の新しい設計手  
法”, 鹿島出版会, 2009.
- [57] 日本建築学会編, “建築のデザイン科学”, 京都大学学術出版会, 2012.

## 発表文献

- [A] Y. Higashikawa, N. Kamiyama, N. Katoh, and Y. Kobayashi, “An Inductive Construction of Minimally Rigid Body-Hinge Simple Graphs”, *Proceedings of the 7th Annual International Conference on Combinatorial Optimization and Applications (COCOA 2013)*, Lecture Notes in Computer Science 8287, pp. 165–177, Chengdu, China, December 2013.
- [B] Y. Kobayashi, Y. Higashikawa, N. Katoh, and N. Kamiyama, “An Inductive Construction of Minimally Rigid Body-Hinge Simple Graphs”, *Theoretical Computer Science*, 556:2–12, 2014.
- [C] Y. Kobayashi, N. Katoh, T. Okano, and A. Takizawa, “An Inductive Construction of Minimally Rigid Panel-Hinge Graphs and Application to Design Form”, *Proceedings of the 19th International Conference of the Association of Computer-Aided Architectural Design Research in Asia (CAADRIA 2014)*, pp. 493–502, Kyoto, Japan, May 2014.
- [D] Y. Kobayashi, Y. Higashikawa, N. Katoh, and A. Sljoka, “Characterizing Redundant Rigidity and Redundant Global Rigidity of Body-Hinge Graphs”, *Information Processing Letters*, 116(2):175–178, DOI:10.1016/j.ipl.2015.08.011, 2016.
- [E] Y. Kobayashi, N. Katoh, T. Okano, and A. Takizawa, “An Inductive Construction of Rigid Panel-Hinge Graphs and Their Applications to Form Design”, *The International Journal of Architectural Computing*,



13(1):45–63, 2015.

- [F] 小林祐貴, 加藤直樹, “極小剛な空間充填立体 bar-joint フレームワークの生成手法及び建築形態デザインへの応用”, 日本建築学会環境系論文集, Vol. 83, No. 745, 2018.

## 謝辞

東京工業大学に来ることなくしては、本論文を書き上げることはできませんでした。藤井晴行教授をはじめ、多くの先生方の支え、ご理解により本論文をまとめることができました。

本論文の研究成果の多くは、京都大学時代に加藤直樹教授が、ともに議論して下さった内容であり、多くのご指導いただきましたことを感謝いたします。京都大学時代の先輩であった東川雄哉助教には、学生の時より多くの時間をともにし、議論していただいたことに感謝いたします。伊藤仁一教授、奈良知恵客員教授、堀山貴史准教授には、幾何学、計算幾何学の観点から、本研究についてご助言、議論いただきましたことに感謝いたします。また、本研究は JST, CREST JPMJCR1402, JSPS 科研費 JP25240004, JP17K12868 の助成を受けたものです。

最後に、いつも支えてくれた家族、友人に感謝いたします。