T2R2 東京科学大学 リサーチリポジトリ
Science Tokyo Research Repository

論文 / 著書情報
Article / Book Information

論題	フォノン伝導
Title	Phonon Conductions
著者	村上陽一
Authors	Yoichi Murakami
出典	伝熱, Vol. 50, No. 211, pp. 5-11
Citation	Journal of the Heat Transfer Society of Japan, Vol. 50, No. 211, pp. 5-11
発行日 / Pub. date	2011, 4

Powered by T2R2 (Science Tokyo Research Repository)

フォノン伝導
Phonon Conductions

村上　陽一（東京工業大学）
Yoichi MURAKAMI (Tokyo Institute of Technology)
e-mail: murakami.y.af@m.titech.ac.jp

記　号

T	:	温度	[K]
κ	:	熱伝導率	[W m^{-1} K^{-1}]
ρ	:	密度	[kg m^{-3}]
C	:	比熱	[J kg^{-1} K^{-1}]
$\mathbf{q}$	:	熱流束ベクトル	[W m^{-2}]
a	:	格子点間隔	[m]
m	:	振動子質量	[kg]
g	:	線形バネ定数	[N m^{-1}]
$\hbar$	:	換算プランク定数	[J s]
ω	:	角振動数	[rad s^{-1}]
k	:	波数	[m^{-1}]

1. はじめに

伝熱工学において頻用される式の一つに，自己発熱のない固体中の非定常な温度場の推移を表す

$$\frac{\partial T(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \frac{1}{\rho C_p}\nabla\cdot\left(\kappa\nabla T(\mathbf{r},t)\right) \tag{1}$$

があります．これは温度場（熱エネルギー）が固体中を拡散的に伝播する事を述べており，しばしば連続体極限における熱伝導に対応するものと理解されています．このことは，式(1)を導く際に用いられたフーリエの熱伝導則

$$\mathbf{q} = -\kappa\nabla T(\mathbf{r},t) \tag{2}$$

が連続体と見なせる極限において実験と一致する経験式として得られている事[1]に起因していると考えられます．

一方，固体中の温度場の伝播を微視的にイメージすることは簡単ではありません．固体における各原子はそれぞれの平衡位置を中心に熱振動しています．例えば，エネルギーが高く振動振幅の大きな原子が隣接する振動振幅のより小さな原子を押してエネルギーを伝播させる，といった描像は視覚的にイメージし易いのですが，このような描像にのみ基づいては，なぜある種の絶縁性結晶が金属を凌ぐ熱伝導率を有するのかなどの点に対し十分な理解を得ることは困難です．本稿では，（特に非金属の）固体における温度伝播の理解のために構成原子の量子化された集団振動の観点に立つことの有益さを述べてゆきます．

2. フォノンという考え方

黒体空洞内の輻射に関し，空洞のエネルギーを空洞内に存在する電磁波の各モードがもつエネルギーの総和によって考えるように，結晶性固体においては，結晶表面で囲まれた空洞が様々な振動モードを持つ定在波によって満たされていると考えることができます．このような結晶を満たす振動モードは，空洞を満たす電磁波のモードであるフォトン(photon)になぞらえフォノン(phonon)と呼ばれます．

このような視点に立てば黒体空洞を満たす波動がフォトンという粒子として捉えられるのと同様，固体結晶を満たすフォノンについても（容器に閉じ込められた気体分子のような）粒子として捉えることができます．後述のように，実際の温度場の伝播を考える上ではフォノン同士の相互作用が重要となりますが，このような描像に立てば，フォノン間の相互作用も容器内の粒子同士の衝突と見なすことができ，視覚的なイメージが容易となります．すなわち，気体分子運動論における概念がフォノンという考え方を用いることにより固体熱伝導を考える際にも援用可能となります．

3. 調和振動モデル

3.1 変位演算子のモード座標表記

固体の結晶格子として格子点間隔 a で周期的に並んだものを考え，各原子の質量を m とします．簡単のため一次元（座標 x）の固体を考え，その方向に原子が N 個並んでいるとします．このような結晶のハミルトニアン H は，j（$1 \le j \le N$）番目

の原子の位置を x_j，運動量を p_j として

$$\mathrm{H}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j{}^2}{m}+V\left(x_1,x_2\cdots,x_N\right) \tag{3}$$

と表されます．本節では簡単のためポテンシャル V を変位の二乗で増加する線形バネ的なものと考え（調和近似），新しい座標として各原子の平衡位置からの変位 w_j（$\equiv x_j - aj$）を導入すると，V は変位に対する力定数を g として

$$V=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}g\left(w_{j+1}-w_j\right)^2 \tag{4}$$

と表されます．式(3), (4)における p および w は正準量子化の過程で演算子となり，次の量子力学的交換関係を満たす必要が生じます．

$$[w_j,p_k]\equiv w_jp_k-p_kw_j=i\hbar\delta_{jk} \tag{5}$$

式(3)はこの関係を満たすハミルトニアンとして

$$\mathrm{H}=\frac{1}{2m}\sum_j p_jp_j+\frac{g}{2}\sum_j\left(2w_jw_j-w_jw_{j+1}-w_jw_{j-1}\right) \tag{6}$$

と書かれます．

一方，結晶サイズ（$aN\equiv L$）が有限であることによる結晶表面の存在は特異的で数学的に扱いにくいことから，一次元の鎖の両端を互いに接続し，これに L の並進対称性（$w_j = w_{j+N}$ という制約）を課して扱うのが便利です．さらに，この一次元結晶をなす各原子の変位がハミルトニアンの固有状態であるとし，各固有状態に対応する固有エネルギー E があるものとします．すなわち

$$E\left|w_1,w_2\cdots,w_N\right\rangle=\mathrm{H}\cdot\left|w_1,w_2\cdots,w_N\right\rangle \tag{7}$$

であるとします．一方，式(6)からハミルトニアンは演算子の順番を変えないサイクリックな演算子交換には不変であることから

$$\begin{aligned}&E\left|w_{j+1},w_{j+2}\cdots,w_{j+N}\right\rangle\\&=\mathrm{H}\left(w_{j+1},w_{j+2}\cdots,w_{j+N}\right)\cdot\left|w_{j+1},w_{j+2}\cdots,w_{j+N}\right\rangle\\&=\mathrm{H}\left(w_1,w_2\cdots,w_N\right)\cdot\left|w_{j+1},w_{j+2}\cdots,w_{j+N}\right\rangle\end{aligned} \tag{8}$$

の関係が成り立ちます．これは N 個の同等な固有関数が存在することを意味しますが[2]，量子力学においては物理的に同等な固有関数は互いに位相分 $e^{i\theta}$ だけ異なっていてもよいことから

$$\left|w_2,w_3\cdots,w_N,w_1\right\rangle=e^{iq}\left|w_1,w_2\cdots,w_N\right\rangle \tag{9}$$

と q を定義します．この演算を j 回繰り返すと

$$\left|w_{j+1},w_{j+2}\cdots,w_N,\cdots,w_j\right\rangle=e^{ijq}\left|w_1,w_2\cdots,w_N\right\rangle \tag{10}$$

となりますが，この操作を N 回繰り返した時点で元に戻ることから，制約条件としては

$$e^{iqN}=1, \tag{11}$$

すなわち

$$q_n\equiv\frac{2\pi n}{N},\quad\left(n=1,2\cdots\right) \tag{12}$$

が課せられることになります．

これらは波数 q_n/a をもつモードを意味しますが，重要なことは q_n に 2πの整数倍を加減したものは q_n と物理的に同じであるという点です[3]．すなわち式(12)からはモードの数が無限にあるように見えますが，実際には N 個しかなく，q は $-\pi < q \leq \pi$ の範囲に限られることになります．

式(9)を満たす演算子 w_j の関数としては，c を任意定数として例えば次のような e^{inq} (n = 1, 2···, N) を直交基底とした w_j の線形結合が考えられます．

$$\begin{aligned}&\mathrm{W}_q\left(w_1,w_2\cdots,w_N\right)\\&\equiv c(w_1e^{iq}+w_2e^{i2q}+\cdots+w_Ne^{iNq})=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_j w_je^{ijq}\end{aligned} \tag{13}$$

このように定義された演算子 W_q は w_j の q に関するフーリエ級数となっています．

3.2 モード分解と量子化

上ではやや先送り的に「波数 q_n/a を持つモード」という表現を用いましたが，フォノンの理解の上で重要なことは，ハミルトニアンを（式(6)における変位座標によってではなく）モード座標 q によって記述できる点にあり，これは以下のように行うことができます[4]．

まず，式(13)の逆フーリエ変換により w_j は

$$w_j=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_q\mathrm{W}_qe^{-ijq} \tag{14}$$

のように W_q の線形結合によって表されます．w_j

と共役な運動量p_jについても同様な手順により以下のように表されます．

$$p_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q \mathrm{P}_q e^{ijq} \tag{15}$$

P_qはp_jのqに対するフーリエ級数となっています[5]．式(14)および(15)を式(6)に代入すると次の形のハミルトニアンが得られます[4]．

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2m} \sum_q \mathrm{P}_q \mathrm{P}_{-q} + g \sum_q \mathrm{W}_q \mathrm{W}_{-q} (1 - \cos q) \tag{16}$$

これが式(6)のハミルトニアンと異なるのは，式(6)では隣接原子同士が結合して力学的相互作用が行われる描像であるのに対し，式(16)ではモード q はその反対向きの伝播モード- q と結合するのみで異なるモードq' $(\neq |q|)$とは結合せず，互いに独立なモードに分解されている点です．

さらに，標準的な第二量子化の手続き[6]によりW_qとP_qを用いて消滅演算子 a および生成演算子 a*が表され，ハミルトニアンはこれらの演算子により次のように表されます．

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2} \sum_q \hbar\omega_q \left\{ \mathrm{a}_q{}^* \mathrm{a}_q + \mathrm{a}_q \mathrm{a}_q{}^* \right\} \tag{17}$$

ここでω_qはモードqの角振動数を表します．さらに $\mathrm{a}_q{}^*\ \mathrm{a}_q$ は数演算子 n に等しいこと[6]および消滅・生成演算子の交換関係 $[\mathrm{a}_q, \mathrm{a}_q{}^*] = 1$ を用いると式(17)は

$$\mathrm{H} = \sum_q \hbar\omega_q \left(\mathrm{n}_q + \frac{1}{2} \right) \tag{18}$$

と書き換えられます．式(18)に対応するモード q の量子数n_qに対応する固有状態を $|n_q>$と書くと，その固有値E_qは$\mathrm{H}\,|n_q> = E_q\,|n_q>$ より

$$E_q = \hbar\omega_q \left(n_q + \frac{1}{2} \right) \tag{19}$$

と導かれ，各モードのエネルギーは$\hbar\omega_q$の「整数 + 1/2」倍として表されます．この理由により，その基本単位をフォノンという擬粒子（ボーズ粒子）とみなし，この描像により「モードq_nがn_q番目の励起状態にある」とは言わず，「モードq_nにn_q個のフォノンが存在する」という言い方をします．

結晶内のフォノンの全エネルギーE_{tot} については式(19)において全モード（$-\pi < q \leq \pi$）について和をとり

$$E_{\mathrm{tot}} = \sum_q \hbar\omega_q \left(n_q + \frac{1}{2} \right) \tag{20}$$

と表されます．

3.3 量子性と空間離散性

a_q*とa_qの交換関係の中でW_qとP_qの交換関係[5]を用いながらW_qとP_qを消去してゆくと，以下の波数$k \equiv q/a$と振動数ω_qとの関係（分散関係）が導かれます．

$$\omega_q = 2\sqrt{\frac{g}{m}} \left| \sin \frac{q}{2} \right| = 2\sqrt{\frac{g}{m}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \tag{21}$$

図 1 にこの分散曲線上に模式的に表した有限温度におけるフォノン数分布の様子を示します．この図から二種類のエネルギー離散性が併在している事がわかります．一方は縦軸に付した"A"の離散性であり，他方は各モード内における"B"の離散性です．両者とも“エネルギーのとびとび”である事から混同されがちですが，これらは物理的に別物であり区別することが重要です．"B"の離散性は量子性によるものですが，"A"の方は格子点の空間離散性に起因するもので量子性とは無関係なものです．

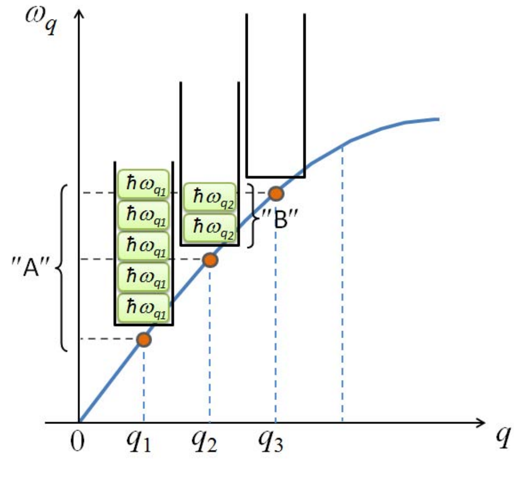

図 1　分散曲線の上に表した有限温度（$T \neq 0$）におけるフォノンの数分布の模式図．

3.4 黒体放射問題との類似性

本稿冒頭で結晶における原子集団振動と黒体空洞における輻射のアナロジーについて述べました．両者には幾つかの類似性がありますが，本節では

古典論の破綻における類似性を述べます．

熱放射研究の初期において，黒体から放射される輻射の強度の波長分布を説明する試みとして，古典統計力学に基づき全モードにエネルギーが分配されるとした Rayleigh & Jeans の式の破綻[7]が有名です．一方，固体の比熱の研究においては，固体を構成する全原子に温度に比例したエネルギーが分配されるという古典的描像に基づいた Dulong & Petit の法則がありました．これは，単一元素のみからなる固体の比熱は材料・温度によらず 3R = 24.94 [J K^{-1} mol^{-1}]（R: 気体定数）の一定値になると予想したものです. Dulong & Petit 則は室温付近では実験結果とある程度良い一致を示す一方，低温域においては比熱が温度低下と共に単調減少するという実験結果を説明できないことが知られていました．

Rayleigh & Jeans の式では空間が連続体であることから無限のモードにエネルギー分配が行われ，従って空洞が無限大のエネルギーで満たされることになるため破綻は明快でしたが，Dulong & Petit 則では格子点の空間離散性によってモードの数が有限（$-\pi < q \leq \pi$）に限られるため，その破綻は前者ほど劇的ではありませんでした．いずれにせよこれらの破綻は全てのモードに温度に比例したエネルギーが分配されるという古典統計に依ったために生じたものでした．黒体放射の場合には，プランクが量子の考えを導入してこの破綻を回避しました[7]．固体の比熱においては，低温域ではω_qの大きなモードには最低単位（$\hbar\omega_q$）のエネルギーが配分できなくなるため，これらはエネルギーの分配に与らないモードとして比熱に寄与しなくなります．三次元結晶の場合には十分低温において比熱は温度の三乗に比例して低下してゆくことが知られています（デバイの三乗則）[8].

4. フォノン間相互作用

4.1 調和近似の問題点

前節では各原子がそれぞれの平衡位置周りに調和振動を行うという近似を用いました．これは振動子同士が線形バネで結びつけられていることに対応し，振動モードが互いに独立で相互作用が存在しないことを意味します．すなわち，初期状態としてフォノン分布 $|n_1, n_2 \cdots, n_N >$ が形成されると，この分布が時間に対して不変となることを意味します．この状況では各フォノンは（黒体空洞における輻射のように）音速で結晶内を伝播し，その結果，十分大きく高純度な結晶では無限大の熱伝導率を持つことになります．これは我々の経験とは異なります.

熱伝導率（熱抵抗）を考えるためには，式(4)において無視された三次以上の非調和項の存在を考慮する必要があります．このような非線形バネにおいて初めてモード間の相互作用が可能になるからです．その結果，例えば三次の項まで考慮した場合，エネルギーと波数が保存される範囲において，二個のフォノンから一個のフォノンが生成される，および一個のフォノンが二個に分裂するといったフォノン分布の時間変化が可能となります.

4.2 Umklapp 過程

固体が熱抵抗を示すためには，式(3)の V に非調和項が組み込まれた上で，フォノンの進行の向きを反転させる何らかの機構が必要です．図 2 に，進行の向きが同じで波数がそれぞれ k_1 と k_2 のフォノンを示します．3.1 節での議論から，実際の波数は$-\pi/a < k \leq \pi/a$ の範囲（第一ブリルアン・ゾーンと呼ばれる領域）にありますので，ここでは k_1 と k_2 は共にこの範囲に収まるように書かれています．今，これら二つのフォノンが衝突・消滅し，波数 k_3 のフォノンが生成される過程を考えます．$k_3 < \pi/a$ であれば，これは依然第一ブリルアン・ゾーンにあることから，生成したフォノンは前と同じ向きに進行を続けます．このような過程を Normal 過程（正常過程）と呼びます.

一方，$k_1 + k_2 > \pi/a$ となる場合には，合計後の波数が物理的に意味のある第一ブリルアン・ゾーンを飛び出していることから，k_3 を同ゾーンに戻すべく，3.1 節で述べた波数における $2\pi/a$ の整数倍

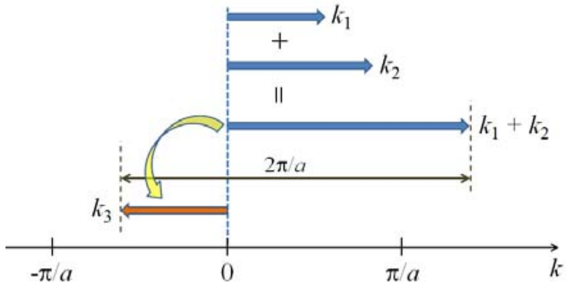

図 2　Umklapp 過程を一次元空間の波数ベクトルにより表した模式図.

の差の任意性を利用して $k_3 = k_1 + k_2 - 2\pi/a$ として同ゾーンに収まるようにします．この結果，図 2 に示すように生成されたフォノン（k_3）は元々のフォノン（k_1, k_2）とは逆の向きに進行するようになります．このような過程は Umklapp 過程（反転過程，Umklapp はドイツ語で flip-over の意味）と呼ばれ，固体に熱抵抗が存在することの主要な原因となります．

4.3 フォノン進行方向の反転

波数の $2\pi/a$ の整数倍の加減の任意性を説明する際，教科書ではしばしば図 3 のような図が示されます．この図は「結晶格子点が離散的である以上，第一ブリルアン・ゾーン外の波動（実線）は第一ブリルアン・ゾーン内の波動（破線）以上の何物でもない」という点を的確に表しており有益なのですが，肝心の「波の進行の向きが反転する」という点までを掴むことは困難です．筆者自身の経験から次のアナロジーを考えることがこの点の視覚的理解に有益と考えますので，以下に示しておきます．

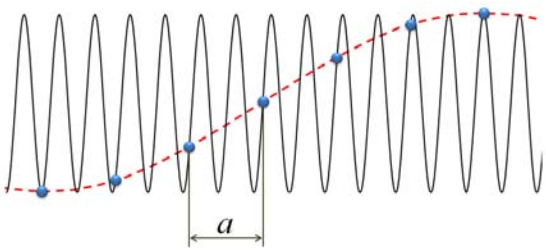

図 3　第一ブリルアン・ゾーン内（破線）および同ゾーン外（実線）にある波動の比較の模式図．丸印は結晶を構成する原子．縦方向はその平衡位置からの変位を表す．

皆さんは自動車のテレビコマーシャルでタイヤのホイールが逆回りに回転して見えた経験があるかと思います．図 4 にその模式図を示しますが，ここではタイヤホイールが六回対称性を持つとし，テレビ画面のリフレッシュレートを 60 フレーム毎秒とします．タイヤが 10 Hz で回転している時には 1 フレーム当たり $2\pi \times 10 \div 60 = \pi/3$ rad 回転し，ホイールは無回転に見えることになります．一方，5 Hz で回転しているときには $\pi/6$ rad ずつ異なる絵が交互に見え，タイヤがどちら向きに回転しているのか判らないことになります．今，タイヤが 9 Hz で回転しているとします．1 フレーム当たりの回転角は $360° \times 9 \div 60 = 54°$ですが，ホイールの対称性が 60°であることから，画面上ではタイヤがフレーム毎に- 6°ずつ逆回転するように見えることになります．すなわち，この例では現象に $\pi/3$ の整数倍の加減の任意性があることになります．

さらに今，同じ回転質量をもつ二個のタイヤが同じ向きに回転しており，回転数をそれぞれ 4 Hz および 3.5 Hz とします．この二個のタイヤが衝突・消滅して一個のタイヤを生成したとします．角運動量は保存されることから，生成されたタイヤの回転数は $4 + 3.5 = 7.5$ Hz，すなわち $2\pi \times 7.5 \div 60 = \pi/4$ [rad/frame]となります．しかし，$\pi/3$ の整数倍の加減の任意性により，これは画面上では $\pi/4 - \pi/3 = -\pi/12$ [rad/frame]で逆回転しているように見えることになります．

タイヤホイールの逆回転という不自然な現象はテレビのコマが時間について離散的であるというアーティファクト（人為性）から生じたものです．一方，固体におけるフォノン伝導においては，結晶格子の空間離散性はアーティファクトではなく

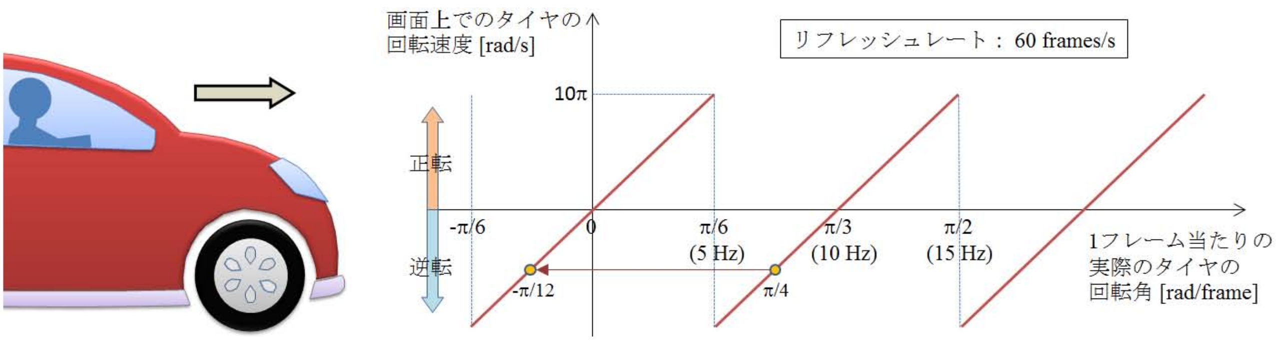

図 4　テレビ画面上における自動車のタイヤホイール回転方向反転の，Umklapp 過程におけるフォノン進行方向反転に対するアナロジー．

現実のものです．すなわち図 2 - 4 に示したことが原因となって固体は熱抵抗を有し，固体における熱伝導は式(1)および(2)によって記述される拡散的なものとなっているのです．

5. フォノンポアズイユ流

本稿冒頭でフォノンの概念を用いることにより熱伝導現象に対し気体分子運動論的な描像を援用可能になると述べました．以下に，この点がよく現れる例を示します．

本節で想定する固体結晶は内部に欠陥が無く，フォノンの（フォノン以外による）散乱は結晶表面においてのみ起こるものとします．三次元空間における熱伝導率κはフォノンの平均自由行程Λ [m]，比熱 C [J/kg K]，およびフォノンの速度（~音速）υ [m/s]を用いて

$$\kappa = \frac{1}{3} C \upsilon \Lambda \tag{22}$$

と表されます[8]．十分低温では波数の小さいフォノンのみが励起されていることから，フォノン同士の相互作用としては Normal 過程のみ考えればよいことになります．すなわちこのような状況では Umklapp 過程は起こらないため，固体内部の熱抵抗はゼロと見なすことができます．

今，試料として直径 L の結晶ロッドを考えると，フォノンの平均自由行程は L の程度を上限として制限されることになります．また，Normal 過程と Umklapp 過程の平均自由行程Λ_NおよびΛ_Uはそれぞれ T^{-5} および $\exp(\Theta_U/T)$に比例して変化します（Θ_Uはケルビン単位の定数）[8,9]．図 5(a)に示すように，ある温度領域において$\Lambda_N < L < \Lambda_U$という条件が満たされます．この領域では「起こるのは Normal 過程のみだが，その平均自由行程は試料のサイズより小さい」ということになります．

このような状況を保ちながら結晶ロッドの両端に温度差をつけると，フォノンはロッド表面のみから運動量の供給を受けつつ，内部では平均として運動量を保存しながらロッド軸方向に沿って輸送されてゆきます．フォノンを粒子と見なせば，運動量はロッド表面のみから供給されるため，フォノンが輸送される様子（半径方向の運動量分布）は円管内ポアズイユ流れと相似になります．

このような描像のもとで，ロッド内部のフォノンが結晶表面によって散乱される間に軸方向に移動する平均距離を新たな平均自由行程$\lambda(T, L)$と定義すると，これは

$$\lambda \sim \frac{L^2}{\Lambda_N} \tag{23}$$

と導かれます[9]．すなわちロッド軸方向の熱伝導率は式(22)のΛを式(23)のλによって置き換えたもので与えられます．前述のように比熱 C は十分低温で T^3 に比例し変化する一方，λは T^5 で変化するため，この領域では熱伝導率が T^8 に比例して変化することが予想されます．実際，図 5(b)に示すように，極低温の ^{4}He 結晶において熱伝導率が T^8 に比例して変化する挙動が観測されています[10]．このような例は，固体を構成する原子の熱的な集団振動をフォノンといった擬粒子で捉え，そこに気体分子運動論における考えを援用することの有益さを示しています．

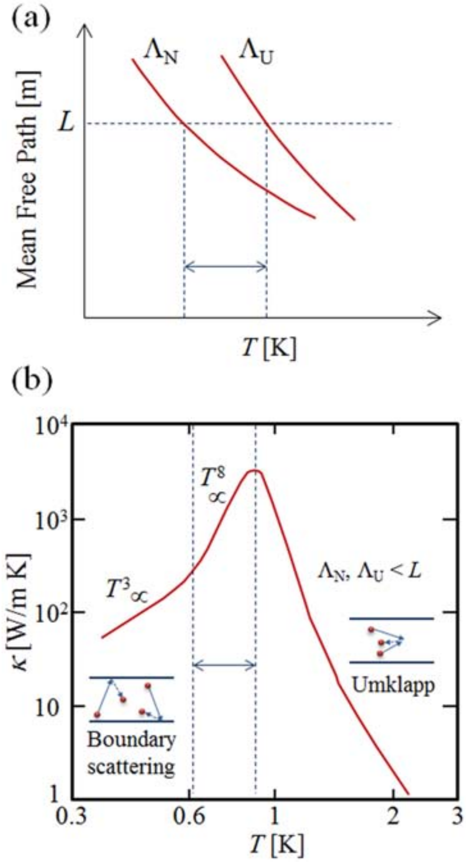

図 5　(a) Λ_NおよびΛ_Uの温度依存性．(b) ^{4}He 結晶における熱伝導率の温度依存性，グラフの曲線は文献 9 の Fig. 2-28 に基づき筆者が再構成した．

6. まとめ

伝熱工学において頻用される式(1)は，その導出において使用される式(2)の経験的由来によってしばしば連続体極限に対応するものと捉えられます. この理解は式の適用の面では正しいのですが，式(1)，すなわち温度場の伝播が拡散的になることは，物質が本質的に連続体でないことに根差していることを理解することが重要です.

3.2 節に述べたように，フォノンという考え方を用いる利点は固体中の原子の振動を集団的に考えた上，それを個々の独立モードに分解できる点にあります．ただし，単一なモード q（単一な波数 k_q）を考えた場合には格子振動は空間的に無限に広がってしまい，空間局在性は表現できません．このことから，実際の場面では波数 k を中心とした Δk の範囲で複数のモードのフォノンがまとまって励起されていると考え，それらの波数の重ね合わせにより空間局在性が表現されることになります.

参考文献

[1] Arpaci, V. A., *Conduction Heat Transfer*, Addison-Wesley (1966).
[2] エネルギー固有値が N 重に縮退している場合も考えられます.
[3] 式(10)において $e^{ij(q+2\pi)} = e^{ijq}e^{ij2\pi} = e^{ijq}$ による.
[4] Ziman, J. M., *Electrons and Phonons*, Oxford University Press (1960).
[5] $[W_q, P_{q'}] = i\hbar\delta_{qq'}$ の交換関係が成立します.
[6] 例えば，小出昭一郎，量子力学(II)，裳華房 (1990)．
[7] 花村克悟，マックス・プランクの功績，伝熱，**48-205** (2009) 32.
[8] Ashcroft, N. W. and Mermin, N. D., *Solid State Physics*, Harcourt College Publishers (1976).
[9] Blakemore, J. S., *Solid State Physics 2nd Ed.*, Cambridge University Press (1985).
[10] この領域ではフォノン間衝突の平均自由行程が短くなる程熱伝導率が増大します.