T2R2 東京科学大学 リサーチリポジトリ
Science Tokyo Research Repository

# 論文 / 著書情報
# Article / Book Information

| | |
|---|---|
| 題目(和文) | 正射影光線-波面変換を用いた大規模ホログラフィック・ディスプレイの計算法に関する研究 |
| Title(English) | |
| 著者(和文) | 五十嵐俊亮 |
| Author(English) | Shunsuke Igarashi |
| 出典(和文) | 学位:博士(工学),<br>学位授与機関:東京工業大学,<br>報告番号:甲第11434号,<br>授与年月日:2020年3月26日,<br>学位の種別:課程博士,<br>審査員:山口 雅浩,渡辺 義浩,中村 健太郎,金子 寛彦,小尾 高史 |
| Citation(English) | Degree:Doctor (Engineering),<br>Conferring organization: Tokyo Institute of Technology,<br>Report number:甲第11434号,<br>Conferred date:2020/3/26,<br>Degree Type:Course doctor,<br>Examiner:,,,, |
| 学位種別(和文) | 博士論文 |
| Type(English) | Doctoral Thesis |

Powered by T2R2 (Science Tokyo Research Repository)

学 位 論 文

# 正射影光線-波面変換を用いた<br>大規模ホログラフィック・ディスプレイ<br>の計算法に関する研究

2020年2月 提出

東京工業大学 工学院 情報通信系
五十嵐 俊亮

# 目次


第 1 章　序論　5

1.1　研究背景　5

1.2　本研究の目的　8

1.3　論文構成　9

第 2 章　光線サンプリング面を用いたホログラムの計算法　11

2.1　ホログラフィの原理と計算機合成ホログラム　11

2.2　光線サンプリング面を用いた CGH 計算法の原理　18

2.3　大規模ホログラムの計算における問題　21

2.4　本章の結論　24

第 3 章　正射影光線-波面変換に基づく CGH 計算法　25

3.1　RS 面を用いた CGH 計算法の変形と正射影画像　25

3.2　正射影光線-波面変換法と余剰伝搬の除去　30

3.3　計算量の見積もりとシミュレーションによる比較　32

3.4　実験結果：CGH の生成と光学再生　36

3.5　本章の結論　48

第 4 章　大規模 CGH の分割計算法　49

4.1　RS 面における大規模 CGH 計算の問題　49

4.2　正射影光線のシフトと伝達関数　50

4.3　数値計算上のテクニック　52

4.4　正射影光線の組み換えによる並列分割計算　53

4.5　計算量の見積もりと計算時間の比較　56

4.6　実験結果：大規模 CGH の生成と光学再生　59

4.7　視点移動に伴う視覚効果の付与　64

4.8　実物体から生成した点群モデルを用いた CGH 計算　66

4.9　本章の結論　68

第 5 章　相互オクルージョン処理を用いた広深度 CGH 計算法　69

5.1　相互オクルージョン処理における先行研究　69

5.2 正射影光線-波面相互変換における相互オクルージョン処理 . . . . . 71
5.3 実験結果：広深度 CGH の生成と光学再生 . . . . . 73
5.4 大規模空間立体像の計算と再生 . . . . . 74
5.5 本章の結論 . . . . . 77

第 6 章 深度可変正射影光線-波面変換法 81
6.1 光線の出射深度を可変とする計算法 . . . . . 81
6.2 再生シミュレーションによる比較 . . . . . 83
6.3 実験結果：広深度大規模 CGH の計算 . . . . . 84
6.4 本章の結論 . . . . . 87

第 7 章 波面の分割伝搬計算におけるアーティファクト除去法 89
7.1 波面伝搬とその計算手法 . . . . . 89
7.2 波面の分割伝搬と境界上のノイズ . . . . . 90
7.3 高速かつ正確なフレネル伝搬の分割計算法 . . . . . 92
7.4 シミュレーション結果 . . . . . 94
7.5 正射影光線-波面変換との融合 . . . . . 95
7.6 本章の結論 . . . . . 98

第 8 章 結論 99
8.1 本論文の総括 . . . . . 99
8.2 学術的な意義 . . . . . 100
8.3 課題と今後の展望 . . . . . 102

付録 A 正射影光線-波面変換における幾何光学近似 105
A.1 幾何光学近似とアイコナール方程式の導出 . . . . . 105
A.2 光波場のフーリエ変換と正射影関数 . . . . . 106
A.3 光波場の正射影変換 . . . . . 108
A.4 伝搬におけるテイラー展開と幾何光学近似 . . . . . 108
A.5 輸送方程式と光線-波面変換法の導出 . . . . . 110
A.6 光線の作る場とその物理的解釈 . . . . . 111
A.7 直線上の光波場の区分的伝搬と正射影関数 . . . . . 112
A.8 正射影光線-波面変換法の導出 . . . . . 116

参考文献 119

謝辞 126

業績一覧 128

# 第 1 章

# 序論

## 1.1 研究背景

現在我々の身の回りでも数多くの 3 次元視覚効果を持ったメディアを見ることができるようになった．映画や携帯ゲーム機，さらには近年いくつかの企業がヘッドマウント型ディスプレイをコンシューマー向けに販売し，コンテンツも急速に充実してきている．これらの多くは 2 枚の画像を左右の目で別々に見るステレオグラムの原理に基づくものであり，その簡便性から効果的な技術である．しかし輻輳と調節の不一致 (VAC: Vergence-Accommodation Conflict) と呼ばれる問題を抱えており，長時間の利用は疲労を感じさせるという問題がある [1].

近年はさらに多眼表示による立体像再生技術も盛んに研究されている．これは左右の視差のみでなく多方向への光線を再生する技術であり，インテグラル・フォトグラフィ [2] の原理に基づいている．多眼表示方式の中でも，視点間隔が瞳径より小さい場合には超多眼表示方式と呼ばれ，限られた奥行き範囲においては前述の輻輳調節矛盾の解決が可能となる．一方で問題となるのは光線の角度分解能や回折の影響から奥行きの深い立体像を再生する場合像が不鮮明になる点である．

これらの光線再生法式を用いた 3D メディアに代わる次世代の技術として研究されているのがホログラフィック・3D ディスプレイである．ホログラフィとは光の波面を記録・再生する技術であり 1947 年に Gabor によって電子顕微鏡の解像度を向上させる技術として発明された [3]. その後レーザーの発明，そして Leith と Upatnieks らの研究によるオフアクシスホログラムの提案 [4,5] を経て現在では様々な分野に応用されている．特に 3D ディスプレイに利用する場合，波面を再生することから人間の奥行き知覚要因を全て満足する立体像再生技術である．実際の物体とレーザー光源，感光材料を用いて記録するアナログホログラムでは既に実物と見紛う立体像の表示が可能である [6,7].

ホログラムを計算機によって生成･表示する技術を計算機合成ホログラフィ（CGH: Computer-Generated Holography）と呼ぶ．計算機によりホログラムを生成することで空間光変調器を用いた電子的な動画表示が可能であり，次世代の 3D ディスプレイへの応用が期待されている．その一方で光を波面として変調するために生じる課題が数多く存在し，その解決のため計算

手法・ハードウェア両面での研究が盛んに行われている．ハードウェアの面では実用に足る視野角を確保するためのサブミクロン単位のピクセルピッチ，そしてその上で十分なディスプレイサイズを実現するための膨大な画素数が課題となる．例として 1.0 µm のピクセルピッチで 100 mm × 200 mm のディスプレイを実現する為には $2 \times 10^{10}$ ピクセル，すなわち現在実用化に向けて研究開発が進んでいる 8K ディスプレイの約 500 倍以上の画素を扱う必要がある．

上記の問題の解決のため様々な研究が行われており，近年ではホログラムを表示するハードウェア，そして表示手法の研究も発展してきた．フルカラー表示についても空間的・時間的に多波長の立体像を多重することで達成されつつある [8–13]．またホログラム再生時のコヒーレント光照明に由来するスペックルノイズ [14] を軽減する手法も行われている [15–17]．多くの CGH の研究では振幅と位相どちらかを変調することで波面再生を行うが，複素振幅共に変調することでより高い品質の像を再生するような手法も提案されている [18]．また Metasurface と呼ばれる光波の波長より微小な構造体を利用することで光を電磁場として制御しより高品質な像を提示する研究も行われている [19–21]．CGH をホログラムとして物理実装する技術も発展を重ねており，ホログラフィック・プリンターや波面プリンターと呼ばれる技術として提案されている [22–25]．近年では厚み方向に分布を持つ変調素子の設計により複数波長の像の多重などの機能を付与する研究も行われはじめた [26–28]．表示光学系においても様々な工夫がなされており，古くは MIT Media Lab によって開発された HoloVideo や [29]，近年では複数の空間光変調器を用いることで大画面化・広視野化を目指す方式 [30, 31] や凹面鏡の機能をもったホログラフィック光学素子に立体像を投影することで大画面化を図る方式 [32]，凸面鏡上に立体像を投影することで全視野を達成する方式 [33] などが提案されている．また Near Eye ディスプレイへの応用としてフーリエ変換光学系を用いた手法も存在する [34]．またホログラム計算専用ハードウェアの研究も行われており [35] フル HD 程度の画素数であればリアルタイムに計算・表示が可能になりつつある．

一方で計算手法においても様々なアプローチにより研究が進んでいる．CGH 計算の各種の課題も同様に光を波面として扱う原理的な難しさから来ており，特に上記のような大規模な画素に対し波動光学シミュレーションを適用する難しさが，種々の問題を生む．将来達成されるべきリアルタイム計算・表示を見据えると，そのような大規模な CGH の高速分割並列計算が達成されなければならない．その上で実用に耐えうる立体像の質，すなわち高い分解能や奥行き幅，そしてリアリティを表現する上で重要な物体表面の反射・透過特性を表現することが必要となる．

立体像再生における CGH 計算法は，計算機上の物体を点光源・ポリゴンに分解する手法 [36–59]，光線として表現する手法 [60–78] に大別できる．加えて近年特徴的な手法として Deep Learning を用いた計算法のコンセプトも提唱された [79]．点光源・ポリゴン法は物体を仮想光源の集合として表現し，これらの回折計算に基づきホログラム面の波面を求める手法である．この手法を用いて計算したホログラムは回折の物理現象をモデル化しているため，ホログラム面から深い奥行きに再生されている物体に対しても高分解能の立体像再生が可能である．計算の高速化に関してもルックアップテーブルを用いる手法 [37–39] や，GPU の利用 [40, 41]，漸化式による計算 [42]，中間面の導入 [43]，相似を利用した高速化 [44] など様々に提案されている．これに加えて近年ポリゴン法での反射・透過特性においても，鏡面反射の表現法等を含む様々な

手法が提案されている [46,47]．また 3DCG 等の分野では一般的な陰面消去法も波動光学の文脈から定式化されつつある [48–54]．しかし任意の反射・透過特性を波動光学に基づき直接表現・計算する技術は確立しておらず，複雑な透過・屈折や皮下散乱等の現代のフォトリアルな 3DCG では必ずと言ってよいほど用いられている表現の実現には更なる進歩が必要となる．

前述した大規模計算においては，点光源法・ポリゴン法では計算機のメモリ制限から代表的にタイリングと呼ばれる手法 [57] がとられる．この手法はホログラム上での波面を一度に計算可能な画素数のタイルに分割し，波面要素（点光源・ポリゴン・中間面等）からの伝搬を足し合わせることで，ホログラム上での波面を求める．中間面を用いる手法は高速フーリエ変換（FFT: Fast Fourier Transform）の利用が可能であることから，基本的にシンプルな点光源法よりも高速である．しかしことタイリング計算に関しては，分割数の増加に伴いタイル間の組み合わせ問題により計算量が爆発的に増大するため一つのタイルはできる限り大きくとられる．これに対し近年物体面を時分割形式で表現する手法や [58]，仮想メモリを用いることでタイリングを利用せず計算する手法が提案されてはいるものの [59]，今後必要になると考えられる分割並列計算には対応していない．

一方ホログラフィック・ステレオグラム（HS: Holographic Stereogram）の原理に基づく CGH 計算手法も古くから提案されている [60]．これはホログラムによる多視点立体像表示であるが，視点数を増やしさらに水平・垂直の全方向視差を記録する場合には，ライトフィールドを再生するホログラムということができる．この手法では 3DCG ソフトウェアなどを用いた光線情報処理を直接用いることが可能であり，複雑な反射・透過特性の再現やオクルージョン処理を簡便に実装できる．しかしこの手法では立体像がホログラム面から離れるほど光線のサンプリングや回折の問題から立体像の分解能が低下するため，深い奥行き表現という波面再生型ディスプレイの最大の特徴を生かすことができない．

この点を解決するため，光線ベースの手法は様々な形で発展を遂げている．いくつかの手法は点光源法と光線を用いる手法の融合として提案されており Diffraction Specific Method [61] はその一つである．この手法は HS ベースの計算の拡張であり点光源法と HS の中間の性質を持つ．また Fully Computered Stereogram [64] は，透視投影画像とその奥行き情報から点光源法を用いて計算する手法である．これは光線を用いて奥行きの深いホログラムが計算可能でありさらに複数のレイヤーを用いた発展形の計算手法も存在する [65]．

またホログラフィック・ステレオグラムの光線に位相を付加し，奥行きの向上を図った手法が PAS（Phase Added Stereogram）として提案されている [66]．その発展として，より正確な位相付加と光線密度増加を加えかつ高速な計算を達成した計算法も提案されている [62,63,68]．これらのホログラフィック・ステレオグラムを発展させた手法ではホログラム面は Hogel と呼ばれる小さなセルに区切られ独立に計算されるため，大規模計算への拡張は容易である．

他に光線情報を用いる手法として，インテグラル・フォトグラフィの原理から波面計算を行う手法 [69] や，Diffraction Specific Method の発展形である Reconfigurable Image Projection [74]，CT と同様の原理から導かれた手法 [75] も提案されている．また Coase Integral Imaging と呼ばれる原理 [80] を用いて，角度ごとに異なるホログラムを計算する手法も提案されている [81]．しかしいずれの手法でも上に述べた大規模 CGH の計算における広い奥行き幅を持つ立体像再生

の実証は行われていない．

光線を用いて深い奥行きでも高分解に再生する別のアプローチとして，光線サンプリング（RS: Ray-Sampling）面 [70–73] と呼ばれる手法が我々のグループにより提案されている．この手法では物体近傍で取得した光線情報を波面に変換することで，深い奥行きでの高い分解能を達成している [70, 71]．また複数の光線サンプリング面を用いそれらの間で相互オクルージョン処理を施すことで，奥行き幅の深いシーンにも拡張可能である [72]．加えてコヒーレント光源由来のスペックルノイズを除去するような手法の検討も行われている [73]．

RS 面を用いた手法は立体像の高い品質の立体像を計算可能であるが，計算の枠組みとしては中間波面を設ける手法により近くその大規模計算にはタイリングが用いられる．そのため分割数に伴い計算量が急激に増大し，その高い品質を引き出す大規模計算の大きな障害となる．この計算量の問題に関しては第 2 章でより詳しく述べる．

## 1.2 本研究の目的

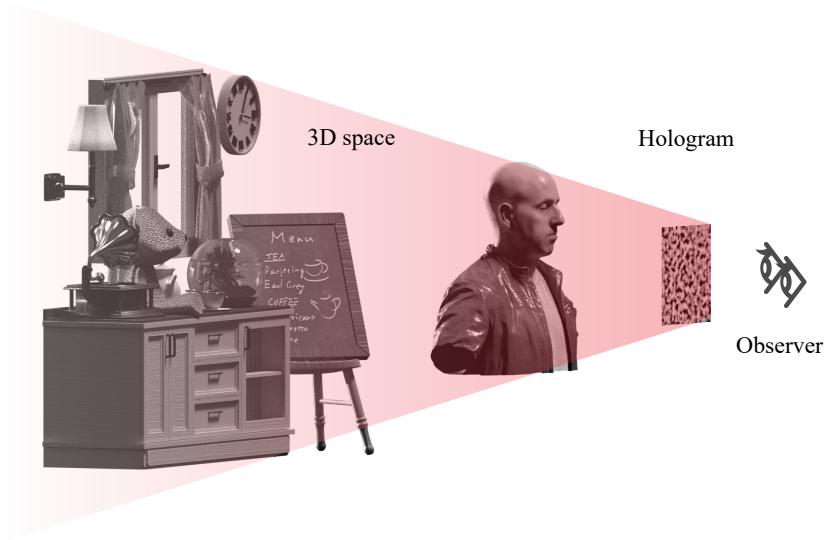



図 1.1 本研究の究極目標

本研究は図 1.1 のように 3D ディスプレイの奥に写実的かつ広い奥行き幅を持つ立体像空間を再生可能なホログラムの計算を目標とする．その達成のため本論文では上記の RS 面を用いた CGH 計算法をベースとして，この手法が原理的に達成可能な立体像の質を保持しつつ大規模ホログラムの分割並列計算法の構築を目指す．特にホログラフィ固有の幅広い奥行き表現に着目し，これを幅広い種類のシーンに適用可能とする．また将来の応用を鑑みて，3DCG などの仮想物体・現実に存在する実物体を問わず立体像を計算可能であることが望ましい．

また CGH においては現段階ではホログラフィ元来のポテンシャルを示すような光学再生の実証は達成されていない．静止画であっても計算機により生成したホログラムの立体像が確かにア

ナログ露光のホログラムに迫り，それ超えるだけの質を示すことができると実証することはハードウェアの研究開発を後押しするという意味でも重要である．したがって広い奥行きに渡って写実性の高い立体像を表示可能であると実証することも本研究の目標の一つとする．

## 1.3 論文構成

図 1.2 に本論文の構成図を示す．第 1 章では本論文の研究背景と目的について述べた．第 2 章ではホログラフィの原理と計算機合成ホログラムの計算法について概説し，特に従来の RS 面を用いた CGH 計算法の原理について解説する．

そして第 3 章で本論文で提案する正射影光線-波面変換の原理を導出し，その帰結として得られるアルゴリズムについて述べる．さらに計算量の推定と計算時間の比較から従来手法と比較した提案手法の優位性を示す．本手法により確かに立体像再生が可能なホログラムを計算可能であることを，立体像の数値的・光学的再生から実証する．第 4 章では正射影光線-波面変換を大規模計算機合成ホログラムの生成に拡張する手法とその原理について述べる．ここでも計算量・計算時間の観点から従来手法に対する優位性を示す．またここでは計算した 10 ギガピクセルを超えるホログラムをレーザーリソグラフィ装置を用いて振幅マスクとして物理実装し，その光学再生像を確認する．さらに提案手法を用いることで実物体から立体像を計算可能であることも示す．第 5 章では正射影光線-波面変換を用いてさらに広い奥行き幅を計算するため，正射影画像間の相互オクルージョン処理を適用する手法を提案する．この手法により 1.0 m 立方の空間をホログラムの奥に再生することを可能とし，立体像の光学再生によりそれを実証する．第 6 章では光線の出射深度を可変とすることで同等の計算量でより幅広い奥行きのホログラムを計算する手法を提案する．この手法においてもシミュレーションと光学実験からその効果を確認する．第 7 章では正射影光線-波面変換から離れ，波面伝搬計算一般に適用可能な大規模波面伝搬を正確かつ効率的に行う手法について提案する．これはフレネル伝搬の数学的性質を用いるものであり，シミュレーションからその有用性を実証する．この手法は 4 章以降の計算の中で用いられている．第 8 章では論文全体の総括を述べ，学術的な意義と将来の展望について述べる．

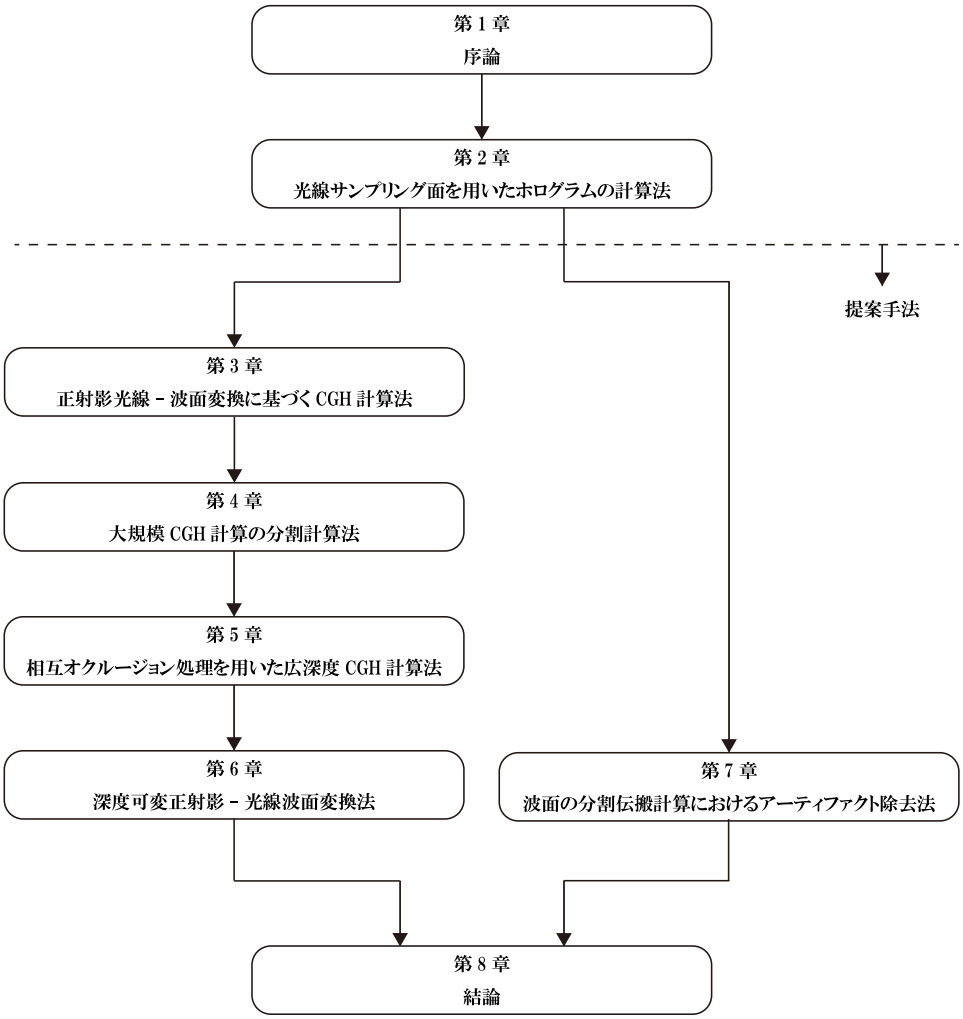

第 1 章
序論
第 2 章
光線サンプリング面を用いたホログラムの計算法
提案手法
第 3 章
正射影光線 – 波面変換に基づく CGH 計算法
第 4 章
大規模 CGH 計算の分割計算法
第 5 章
相互オクルージョン処理を用いた広深度 CGH 計算法
第 6 章
深度可変正射影 – 光線波面変換法
第 7 章
波面の分割伝搬計算におけるアーティファクト除去法
第 8 章
結論

図 1.2　論文構成

# 第 2 章

# 光線サンプリング面を用いたホログラムの計算法

この章でははじめにホログラフィの原理と，計算によりホログラムを生成する計算機合成ホログラムについて述べる．その上で本論文の土台となる光線サンプリング面を用いたホログラムの計算法について，その原理と計算法について解説する．そして最後にこの手法を用いて大規模なホログラムを計算する際の問題とその原因について述べる．

---

## 2.1　ホログラフィの原理と計算機合成ホログラム

### 2.1.1　ホログラフィの記録と再生の原理

ホログラフィは光の波面を記録・再生する技術である．1947 年に Gabor によって電子顕微鏡の解像度を向上させる技術として発明され [3]，その後レーザーの発明と Leith，Upatnieks らによるオフアクシスホログラムの提案 [4,5] を経て現在では様々な分野に応用されている．

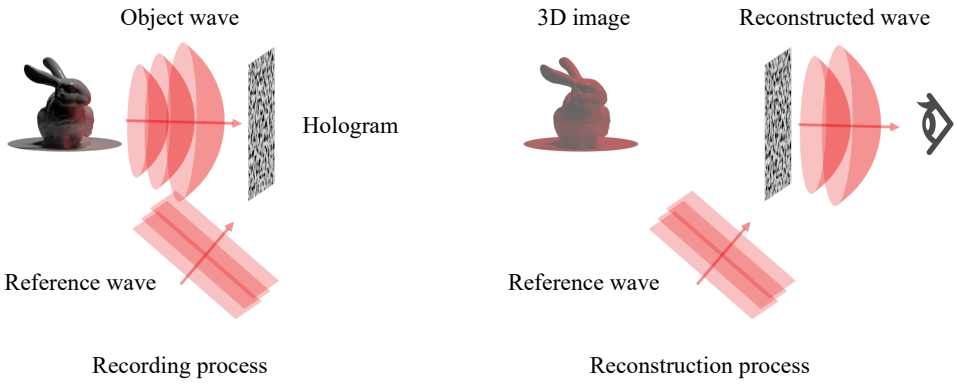



図 2.1　ホログラムの記録と再生の概念図

ホログラムは図 2.1 のように物体光と参照光の干渉縞として記録される．物体光を

$$E_{\mathrm{O}}(x,y) = O(x,y)\exp\left(j\phi(x,y)\right) \tag{2.1}$$

参照光を

$$E_{\mathrm{R}}(x,y) = R(x,y)\exp\left(j\psi(x,y)\right) \tag{2.2}$$

と表すとき，これらの干渉縞は

$$\begin{aligned} I(x,y) &= \left|E_{\mathrm{O}}(x,y) + E_{\mathrm{R}}(x,y)\right|^2 && (2.3)\\ &= \left|O(x,y)\right|^2 + \left|R(x,y)\right|^2 + 2O(x,y)R(x,y)\cos\left(\phi(x,y)-\psi(x,y)\right) && (2.4)\\ &= \left|E_{\mathrm{O}}\right|^2 + \left|E_{\mathrm{R}}\right|^2 + E_{\mathrm{O}}^{*}E_{\mathrm{R}} + E_{\mathrm{O}}E_{\mathrm{R}}^{*} && (2.5) \end{aligned}$$

この干渉縞に参照光と同様の再生照明光によって照明することで物体光が再生され立体像を観察することができる．このプロセスは以下のように定式化される．

再生照明光を照明されたホログラムから伝搬する波面は以下のように書くことができる．

$$E_{\mathrm{R}}I(x,y) = E_{\mathrm{R}}\left(\left|E_{\mathrm{O}}\right|^2 + \left|E_{\mathrm{R}}\right|^2\right) + E_{\mathrm{O}}^{*}E_{\mathrm{R}}^{2} + E_{\mathrm{O}}\left|E_{\mathrm{R}}\right|^2 \tag{2.6}$$

第 1 項は直接光（0 次光），第 2 項は共役光（-1 次光），そして第 3 項が所望の物体光（1 次光）である．特に

$$\left|E_{\mathrm{R}}\right|^2 = 1 \tag{2.7}$$

のとき物体光の振幅・位相ともに完全に再生されることになる．

### 2.1.2 スカラー回折理論に基づく伝搬計算

CGH 計算ではホログラム記録時の物理現象のシミュレーションにより，干渉縞を生成する．上記のプロセスを計算機上で再現する場合，波動光学のシミュレーションによりホログラム面上での波面を得ることが必須となる．数多くある CGH の計算方法でもこの部分は基本的に共通する最終目標である．

その際大きな役割を果たすのが光波の伝搬を記述するスカラー回折理論である．ここでは特によく利用される角スペクトル伝搬とその近似であるフレネル伝搬について説明する．$z=0$ 平面上の領域 $S$ で定義された光波場 $w_{\mathrm{o}}(x,y;0)$ に対しこれが自由空間伝搬した結果 $z=d$ 上に作る光波場 $w_{\mathrm{t}}(x,y;d)$ は角スペクトル理論に基づけば以下のように記述される．

$$w_{\mathrm{t}}(x,y;d) = \mathcal{F}^{-1}\left[W_{\mathrm{o}}(f_x,f_y;0)\cdot H(f_x,f_y;d)\right] \tag{2.8}$$

ここで $\mathcal{F}[\cdot]$ はフーリエ変換を示す．また

$$W_{\mathrm{o}}(f_x,f_y;0) = \mathcal{F}\left[w_{\mathrm{o}}(x,y;0)\right] \tag{2.9}$$

であり，$H(f_x,f_y;d)$ は伝搬伝達関数と呼ばれる以下の式で定義される関数である．

$$H(f_x,f_y;d) = \begin{cases} \exp\left(j\frac{2\pi d}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}\right) & (\lambda f_x)^2+(\lambda f_y)^2 < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.10}$$

ここで $\lambda$ は波長である．またこの角スペクトル伝搬法は次に示す第一レイリーゾンマーフェルト回折積分と等価であることが知られている [82].

$$w_{\mathrm{t}}(x,y;d) = \frac{1}{j\lambda}\iint w_{\mathrm{o}}(\xi,\eta;0)\frac{\exp(jkr)}{r}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})d\xi d\eta \tag{2.11}$$

ここで $k$ は波数であり，$\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x-\xi \\ y-\eta \\ d \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

また $\boldsymbol{n}$ は入力波面が定義される平面の単位法線ベクトルである．ここでは $\boldsymbol{n} = [0\,0\,1]^t$ となる．

またこの近似として得られるフレネル伝搬は以下の式で記述される．

$$w_{\mathrm{t}}(x,y;d) = \frac{\exp(jkd)}{j\lambda d}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_{\mathrm{o}}(\xi,\eta;0)\exp\left(j\frac{\pi}{\lambda d}\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\right)d\xi d\eta \tag{2.13}$$

ただしこの近似が成り立つためには以下の条件を満たす必要がある．

$$d^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda}\left(\xi^2+\eta^2\right) \tag{2.14}$$

実用的にはこれより多少緩い条件でも十分に成り立つことが知られている．

いずれの伝搬法においても Shift-invariant な系となっており畳み込みとして計算できることは非常に重要である．すなわち

$$w_{\mathrm{t}}(x,y;d) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[w_{\mathrm{o}}(x,y;0)\right]\cdot\mathcal{F}\left[h(x,y;d)\right]\right] \tag{2.15}$$

として数値計算の際高速フーリエ変換の恩恵を得ることができる．ここで $h(x,y;d)$ を応答関数と呼ぶ．

### 2.1.3 伝搬計算における帯域制限

回折積分を数値計算する際重要なのが，エイリアシングを除去するため応答関数に帯域制限を適用する点である．簡単のため 1 次元の場合について述べる．応答関数の位相を $\phi_r(x,y)$，実空間でのサンプリング間隔を $\Delta x$ とするとき

$$\Delta x\left|\frac{\partial\phi_r}{\partial x}\right| \leq \pi \tag{2.16}$$

を満たすよう応答関数に帯域制限を適用する必要がある [83].

第一レイリーゾンマーフェルト回折積分，角スペクトル伝搬の場合，伝搬距離 $z$ に対する応答関数の位相は

$$\phi_s = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{x^2+z^2} \tag{2.17}$$

として書くことができる．このとき

$$\frac{\partial\phi_s}{\partial x} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} \tag{2.18}$$

したがって $x > 0$ のとき

$$\Delta x \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} \leq \pi \tag{2.19}$$

$$x^2 \leq \left(\frac{\lambda}{2\Delta x}\right)^2 \left(x^2 + z^2\right) \tag{2.20}$$

$$\left(1 - \left(\frac{\lambda}{2\Delta x}\right)^2\right) x^2 \leq \left(\frac{\lambda}{2\Delta x}\right)^2 z^2 \tag{2.21}$$

$$x \leq \frac{\lambda}{2\Delta x} z \left(1 - \left(\frac{\lambda}{2\Delta x}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{2.22}$$

が条件となる．これは物理的には次のように解釈できる．最大回折角 $\theta_{\mathrm{D}}$ について以下の式が成り立つことはよく知られている．

$$\theta_{\mathrm{D}} = \frac{\lambda}{2\Delta x} \tag{2.23}$$

したがって

$$\frac{x}{z_0} \leq \sin\theta_{\mathrm{D}} \cdot \left(1 - \sin^2\theta_{\mathrm{D}}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{2.24}$$

$$\frac{x}{z} \leq \frac{\sin\theta_{\mathrm{D}}}{\cos\theta_{\mathrm{D}}} \tag{2.25}$$

$$\tan\theta \leq \tan\theta_{\mathrm{D}} \tag{2.26}$$

すなわちエイリアシングを起こさない帯域制限とは最大回折角までの伝搬であるということが自然に理解できる．

次にフレネル伝搬の場合について述べる．この場合応答関数の位相は以下の式で与えられる．

$$\phi_F(x) = \frac{\pi}{\lambda z} x^2 \tag{2.27}$$

したがって $x > 0$ の領域で

$$\Delta x \frac{\partial \phi_F}{\partial x} \leq \pi \tag{2.28}$$

$$\Delta x \frac{2}{\lambda z} x \leq 1 \tag{2.29}$$

$$\frac{x}{z} \leq \frac{\lambda}{2\Delta x} \tag{2.30}$$

球面波の場合と同様に物理的な洞察を以下のように得ることができる

$$\tan\theta \leq \sin\theta_{\mathrm{D}} \tag{2.31}$$

一般に

$$\sin\theta \leq \tan\theta \tag{2.32}$$

であることを考えるとフレネル伝搬では球面波応答関数とする伝搬よりも狭い帯域で伝搬を行うことになる．ただしフレネル近似はそもそも

$$\sin\theta_{\mathrm{D}} \simeq \tan\theta_{\mathrm{D}} \tag{2.33}$$

の成り立つ領域であることを考えれば計算する帯域にほぼ差はない．

### 2.1.4 ディスプレイサイズと視野角

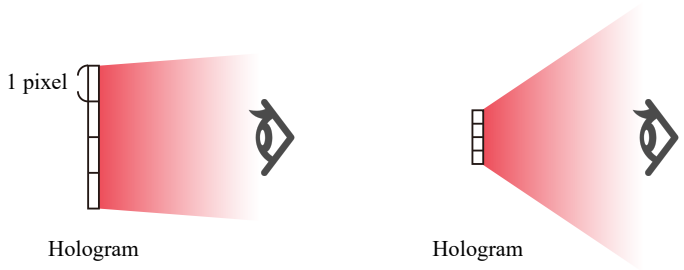



図 2.2 ディスプレイサイズとピクセルピッチの関係

図 2.2 にディスプレイサイズとピクセルピッチの関係の図を示す．画素数を $N$，ピクセルピッチを $\Delta x$ とするときディスプレイサイズ $S_x$ は次の式で書くことができる．

$$S_x = N\Delta x \tag{2.34}$$

一方でホログラフィック・3D ディスプレイの視野角を決定する回折角は以下の式で書くことができる．

$$\theta_D = \sin^{-1}\frac{\lambda}{2\Delta x} \tag{2.35}$$

すなわち画素数を一定とするときディスプレイサイズと視野角の間にはトレードオフの関係がある．従って 3D ディスプレイとして十分なサイズと視野角を同時に達成するためには画素数 $N$ を十分にとる必要があり，これが CGH の画素数を大規模化させる．さらにホログラフィを 3D ディスプレイとして利用する際には，直接光・共役像と所望の物体光との重なりを避けるため，参照光に角度を持たせオフアクシスホログラムとして作成することが一般的である [4, 5]．垂直方向に参照光角度を与える場合には，半分の帯域を共役像が占めるために実効的な視野角は水平方向の 1/2 となる．

### 2.1.5 CGH 計算法

**(a) 点光源法**

代表的な CGH 計算手法の一つとして挙げられるのが点光源法である [84]．概念図を図 2.3 に示す．この手法では物体を点光源の集合として表現し，その点光源の CGH 面への寄与を重ね合わせることで所望の CGH 面の波面を求める手法である．$N$ 点の点光源が存在し，$n$ 番目の点光源の CGH 面から見た座標を $\boldsymbol{r}_n$，振幅を $A_n$，初期位相を $\psi_n$ とするとき，点光源法における CGH 面の波面は以下の式で与えられる．

$$w_{\mathrm{t}}(x,y) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n \frac{\exp(jkr_n)}{r_n} \tag{2.36}$$

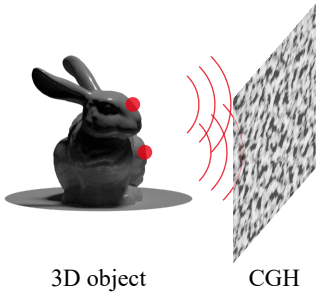



図 2.3　点光源法に基づく CGH 計算法の概念図

各点光源は波動光学的に厳密に再生されるために，ホログラムに特異な深い奥行きでの高い分解能を達成することが可能である．一方で点光源数に比例して長大化する計算時間や，陰面消去処理など種々の課題が存在し，それらを解決するため種々の手法が提案されている．計算の高速化に関してはルックアップテーブルを用いる手法 [37–39] や，GPU の利用 [40, 41]，漸化式による計算 [42]，中間面の導入 [43]，相似を利用した高速化 [44] など様々に提案されている．近年では CGH 計算専用計算機の研究が発展し，フル HD 解像度であればリアルタイム計算・表示が可能になりつつある [35]．また陰面消去法についても発展しつつある [52, 59]．

### (b) ポリゴン法

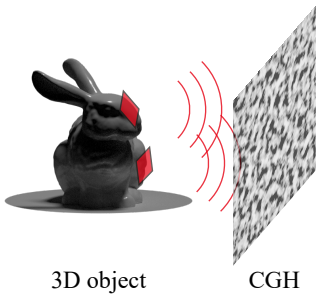



図 2.4　ポリゴン法に基づく CGH 計算法の概念図

ポリゴン法は物体面上にポリゴン形状の面光源を設け，それらの伝搬結果の重ね合わせとして CGH 面上での波面を求める計算法である [36, 49, 50]．その概念図を図 2.4 に示す．ポリゴン法では伝搬計算に FFT を用いた高速畳み込みが適用可能であり，同等の物体を点光源数より圧倒的に小数のポリゴン数で表現することが可能であるために，大規模 CGH の生成において有利である．各ポリゴンに対する伝搬計算には CGH 面に対し傾斜を持った平面からの伝搬計算を行う必要があり，その際角スペクトルの回転変換という処理が行われる [85]．ポリゴン法においても立体像の写実性を高める研究が行われており，厳密な陰面消去法の実装や [54] や光沢を持った物体の計算法などが提案されている [46]．

### (c) 光線再生型 CGH 計算法

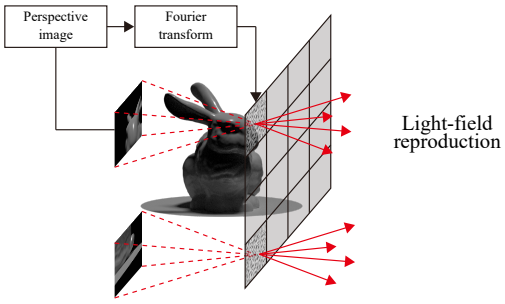



図 2.5　光線再生型 CGH の生成と再生

図 2.5 に光線再生型 CGH [60] の概要を示す．光線再生型 CGH はホログラフィック・ステレオグラムの原理に基づく立体像再生法である [60]．この計算法ではホログラムは Hogel と呼ばれる，微小な矩形領域に分割される．Hogel の大きさは人間の目の分解能以下に取る．そして各 Hogel を通過する光線情報は，これを中心とした透視投影画像としてサンプリングされる．各 Hogel 上の複素振幅分布は角スペクトル理論に基づき各透視投影画像をフーリエ変換することで得られる．そして参照光との干渉を計算することで所望の干渉縞を取得可能である．

透視投影画像群を起点として CGH を計算可能であることから，現代高度に発達した 3DCG のテクニックやイメージベースドレンダリング，また実写の多視点映像を利用可能である．したがって物体表面の反射・透過特性の角度依存性を表現可能であり，写実的な立体像を表示可能なホログラムを計算することができる．

一方でこの手法には分解能の面で課題がある．この原因と光線のサンプリング，そしてその回折と大きく二つに分けて考えることができる．観察者と CGH の距離を $W$，CGH と立体像の距離を $z$ とする．そして Hogel の間隔を $p$ とするとき，光線の空間的なサンプリング間隔が決定する立体像の分解能の限界はその幾何光学的関係から

$$\delta_s = \frac{p}{W}(z+W) \tag{2.37}$$

として書くことができる．

一方で分解能は光線の角度分解能，つまり角度方向に何本の光線をサンプリングするかにも依存する．角度分解能を $\Delta\theta_a$ とするときここから決定される立体像の分解能は

$$\delta_a = |z|\cdot\Delta\theta_a \tag{2.38}$$

と書くことができる．$\delta_s$ と $\delta_s$ のうちより値の大きい分解能が，ある距離 $z$ における分解能を決定する．式からも分かるようにいずれのケースでも $z$ の増大に従って分解能は低下する．

光線を高密度でサンプリングし小さな $\Delta\theta_a$ と $p_s$ を達成したとしても，再成された光線の回折の影響によって立体像の分解能は低下する．再成された光線は，微小な開口から出射する平面波

として振る舞う．この平面波の回折も考慮に入れた立体像の分解能は

$$\delta_D = p + 2z \tan \Delta\theta_D \tag{2.39}$$

$$\simeq p + \frac{\lambda z}{p} \tag{2.40}$$

として書くことができる．

$$\frac{\partial \delta_D}{\partial p} = 1 - \frac{\lambda z}{p^2} \tag{2.41}$$

よりある CGH-物体間の距離 $z$ が与えられたとき，最も高い分解能を与える $p$ は

$$\frac{\partial \delta_D}{\partial p} = 0 \tag{2.42}$$

$$p = \sqrt{\lambda z} \tag{2.43}$$

として与えられる．このときの分解能 $\delta_{\mathrm{Dmax}}$ は

$$\delta_{\mathrm{Dmax}} = \sqrt{\lambda z} + \frac{\lambda z}{\sqrt{\lambda z}} \tag{2.44}$$

$$= 2\sqrt{\lambda z} \tag{2.45}$$

即ち立体像の分解能は光線を十分にサンプリングしたとしても，奥行きが深くなるほど回折によって低下することが分かる．

この分解能限界は同時にライトフィールド再生型 3D ディスプレイの分解能限界でもあり，ホログラフィック・3D ディスプレイが次世代の立体像表示技術として期待されている所以でもある．

## 2.2 光線サンプリング面を用いた CGH 計算法の原理

ここでは本論文のベースとなる光線サンプリング（RS: Ray Sampling）面を用いた計算法の原理について記述する．RS 面を用いた手法は Wakunami により提案された，波面ベース・光線ベースの CGH 計算法双方の利点を併せ持つ手法である [70]．序論で述べた通り，これらの手法にはそれぞれ利点欠点が存在する．波面ベースの手法ではその波動光学的正確性から深い奥行きにおいても高い分解能を得られる一方，写実的な表現において重要な役割を果たす物体表面の反射・透過特性の表現に難がある．また光線ベースの手法では反射・透過特性の表現が容易である一方，その波動光学的な近似精度の低さから深い奥行きでの分解能が低下するという問題が生じる．RS 面を用いることで，立体像の写実的な表現を可能としながらも深い奥行きでの高い分解能を実現することが可能になる．

### 2.2.1 RS 面を用いた CGH 計算法のアルゴリズム

RS 面を用いた CGH 計算法は光線再生型 CGH 計算法の問題を解決するために提案された．光線再生型の CGH において深い奥行きの分解能が低下するのは光線をサンプリングする面と物

体表面の距離が大きいためである．従ってこの手法の根本的なコンセプトとして物体表面の近くで幾何光学に基づいて光線をサンプリングし，それを波面に変換した上で長距離の伝搬を波動光学に基づいて伝搬を行えば問題を解決できることになる．

そのような考えから，この手法では始めに物体近くに平面を設ける．この平面上でのライトフィールドのサンプリングから計算を行うことから，この面を光線サンプリング面（RS 面）と呼ぶ．RS 面を通過するライトフィールドを 3DCG や実写の多視点画像等から取得する．この光線情報を光線波面変換と呼ばれる手法によって波面へと変換しホログラム面まで伝搬させることで，CGH 面上での波面を得る．この計算手法の概念図を図 2.6 に示す．

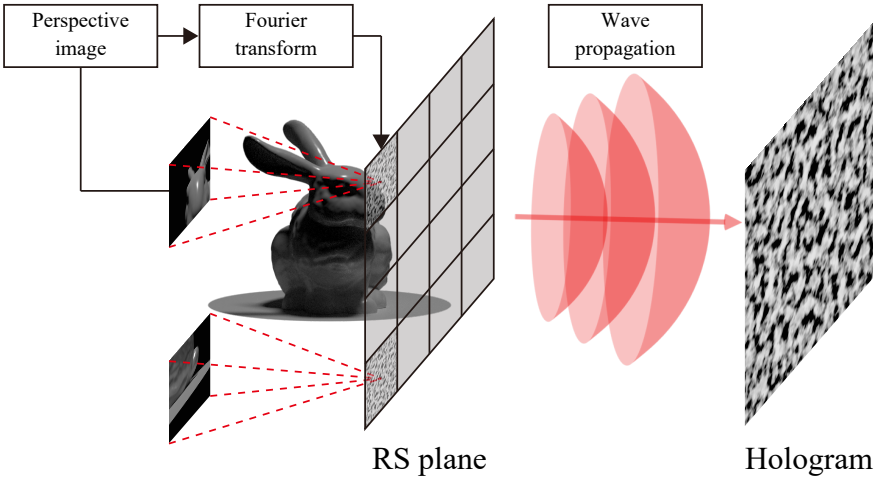



図 2.6　光線波面変換による CGH 計算の概念図

光線波面変換のプロセスは基本的には光線再生型 CGH を計算する際のプロセスと同様である．ただしその根本思想に光線の位相も含め，正確にサンプリングすべきという Phase Added Stereogram の考えがあることには注意する [66].

RS 面を用いた CGH 計算法全体のプロセスは次のようになる．

1. 物体近くに RS 面と呼ばれる面を設置する
2. RS 面上のライトフィールドを様々な位置で撮影した透視投影画像として取得する（各透視投影画像を要素画像と呼ぶ）
3. 各要素画像にランダム位相を乗算する
4. 各要素画像をフーリエ変換する
5. フーリエ変換された要素画像を並べ RS 面での波面とする
6. 波面伝搬計算に基づきホログラム面での波面を計算
7. 参照光との干渉を計算する

透視投影画像はある 1 点に集まるような各方向の光線を取得するため，要素画像自身は周波数空間にある．従ってこのフーリエ変換は要素画像を取得した点周辺の波面に相当する．ただし光線には位相の情報が含まれていないため，ランダムな位相を付加している．RS 面とホログラ

ム面の間の伝搬計算は典型的には高速畳み込みにより行われる．すなわち RS 面での波面を高速フーリエ変換し，伝達関数と乗算したうえで逆フーリエ変換することでホログラム面での波面を得る．

$K$ 枚の要素画像があるとし，各要素画像は $M$ ピクセルの画素数を持つとする．$k$ 番目の要素画像を $\boldsymbol{p}_m$ とする．また RS 面と CGH 面の画素数は $N = M \times K$ とする．波面のサンプリングピッチを $\Delta x$ とするとき，要素画像間の間隔は $M\Delta x$ と書くことができる．そして取得する透視投影画像の画角 $\theta_{\mathrm{p}}$ は回折角に一致させる．すなわち以下のようにサンプリングピッチと波長 $\lambda$ により決定される．

$$\theta_{\mathrm{p}} = 2\sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{2\Delta x}\right) \tag{2.46}$$

これらに注意して簡単のため 1 次元で最も基本的な RS 面を用いた CGH 計算のアルゴリズムを書き下す．

**Algorithm: Generation of CGH using an RS plane**

---

**Ray-sampling stage**

Set an RS plane near the object.
**for** $k \in \{0, \cdots, K-1\}$
  Capture the $k$-th perspective image $\boldsymbol{p}_m$ at the position $kM\Delta x$.
**end for** $k$

**Generation of the wavefront at the RS plane**

Allocate memory of $N$ length vector, $\boldsymbol{w}$.
**for** $k \in \{0, \cdots, K-1\}$
  Multiply random phase with $\boldsymbol{p}_k$.
  FFT $\boldsymbol{p}_m$ as $\boldsymbol{P}_m$
  Embed $\boldsymbol{P}_m$ into $\boldsymbol{w}[mM]$.
**end for** $k$

**Propagation between the RS plane and CGH**

Embed $\boldsymbol{w}$ into double-length zero-vector, as $\boldsymbol{w}'$.
IFFT $\boldsymbol{w}'$, as $\boldsymbol{W}'$.
Multiply the transfer function $H$ with $\boldsymbol{W}'$.
IFFT $\boldsymbol{W}'$, as $\boldsymbol{w}'$.
Crop the center of $\boldsymbol{w}'$, and obtain the final wavefront of CGH, $\boldsymbol{w}$.

**Interference stage**

Interfere $\boldsymbol{w}$ with the reference wave $\boldsymbol{r}$, and obtain the fringe pattern $\boldsymbol{I}$.

上記のようなアルゴリズムで RS 面を用いて CGH を計算することができる．

## 2.3 大規模ホログラムの計算における問題

上記の RS 面を用いた CGH 計算法は写実的な立体像を深い奥行きに再生する際には強力な手法である．一方で本論文の目標とするホログラムの奥に立体空間が広がるような像の生成は，計算時間の問題から現実的に不可能と言ってよい．序論で述べた通り CGH による 3D ディスプレイでは立体像観察に十分な視野角を確保するため光波を広い角度に回折させる必要があり，結果としてピクセルピッチを波長程度にとる必要がある．その上で両眼視可能なディスプレイサイズを実現しようとすれば少なくとも 100 mm 程度の幅を確保する必要がある．すなわち結果として 10 ギガピクセルを超えるような大規模なホログラムを計算する必要があり，これが種々の問題を引き起こす．これついて本項にてより詳しく解説する．

### 2.3.1 大規模波面の伝搬計算の問題

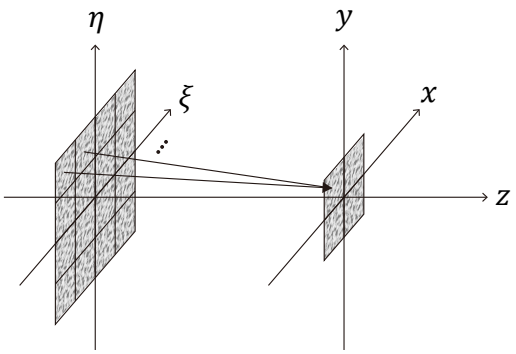



図 2.7 波面伝搬の分割計算の概念図

10 ギガピクセルの複素振幅を double 型の変数，すなわち 8 バイトの倍精度浮動小数点実数として取り扱う場合必要なメモリは単純に計算して 160 ギガバイト，そして波面の伝搬計算を行うためにはゼロパディングと呼ばれる 4 倍の配列に埋め込む操作をするために最低でも 640 ギガバイトの RAM を要することになる．それだけのメモリを一度に確保することは現代の一般的な個人用計算機では不可能である．ディスクを仮想メモリを用いるという手もあるが，これは記憶領域へのアクセス速度の問題から致命的な計算時間の増大を引き起こす．したがってそれだけの大規模な波面を取り扱うために CGH を小領域に分割し計算するという手段が広く用いられている．また将来的にそれだけのメモリを確保可能になったとしても究極的には現在のコンシューマゲームのレンダリングの中で行われているように描画面を小領域に分割し独立に並列計算する技術が求められるであろう．RS 面を用いた CGH 計算法では，さらに言えば物体近くに中間面を設けそこでの波面を一度計算するような計算法では，この CGH 分割計算を行う際，光波の伝搬を扱うが故の根源的な計算量の問題に直面する．

図 2.7 に波面の分割伝搬計算の概念図を示す．上記のような大規模な波面伝搬を計算する際，伝搬元・先の面を矩形領域に分割する．FFT 用いた高速畳み込みを用いるため，等しいサンプル数の矩形領域に分割する必要がある．図では例として伝搬元の波面を $4 \times 4$ 分割，伝搬先の波面を $2 \times 2$ 分割している．この計算のテクニックは「タイリング」と呼ばれている [57]．またある矩形領域の波面をタイルと呼ぶことにする．伝搬元の $(m, n)$ 番目のタイルを $w_{mn}(\xi, \eta)$，伝搬先の $(i, j)$ 番目のタイルを $w'_{ij}(x, y)$ とする．また $x, y$ 軸方向のタイルのサイズを $s_x, s_y$ とする．このとき $w'_{ij}(x, y)$ は重ね合わせの原理から距離 $d$ の波面伝搬は以下の式で表すことができる．

$$w'_{ij}(x, y) = \sum_n \sum_m \left\{ \iint w_{mn}(\xi, \eta) h\left(x - \xi, y - \eta; s_x(m - i), s_y(n - j), d\right) d\xi d\eta \right\} \tag{2.47}$$

ここで $h\left(\xi, \eta; x_1, y_1, z_1\right))$ は $(x_1, y_1, z_1)$ だけ離れた原点を持つ平面間の伝搬を記述する応答関数である．すなわち伝搬先のあるタイルは，伝搬元の全てのタイルからの伝搬結果を足すことで求めることができる．

しかしながらこの総和計算が結果として総計算量を増大させる．これを計算量の観点から説明する．中間面を用いる CGH 計算の枠組みにおいて，計算量は次のように概算できる．簡単のためにホログラムと中間面が同じサイズであるとし画素数を $X \times X$ ピクセル，そしてタイリングによってこれらが $N \times N$ 枚の $X/N \times X/N$ ピクセルのタイルに分割されるとする．このとき全てのタイルは独立に計算されるとし，タイル間の伝搬は FFT を用いた高速畳み込みによって達成されるとする．全体の計算量 $C$ を複素乗算の回数により見積もると，次のような要素に書き下すことができる．

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \tag{2.48}$$

ここで $C_1$，$C_2$，と $C_3$ はそれぞれ周波数空間での波面生成，伝達関数との複素乗算，ホログラム面での波面を求める逆フーリエ変換の計算量を示す．このときそれぞれの項は次のように見積もることができる．

$$C_1 = C_w + N^2 \left(\frac{X}{N}\right)^2 \log\left(\frac{X}{N}\right) \tag{2.49}$$

$$C_2 = N^2 \left(\frac{X}{N}\right)^2 \tag{2.50}$$

$$C_3 = \left(\frac{X}{N}\right)^2 \log\left(\frac{X}{N}\right) \tag{2.51}$$

$C_w$ は中間面での波面の算出に必要な計算量である．従って

$$C = N^2 \left(C_w + X^2 \log\left(\frac{X}{N}\right) + X^2\right) + X^2 \log\left(\frac{X}{N}\right) \tag{2.52}$$

すなわち従来の計算方法では少なくとも $O\left(N^2 X^2 \log X\right)$ の計算量を必要とすることを示しタイル数の増加に比例して総計算量が増大することが分かる．この計算量の増加が結果的に RS 面を用いた CGH 計算法，ひいては中間面を用いる CGH 計算法を大規模計算に適用することを難しくしている．

### 2.3.2 大規模波面の相互オクルージョン処理の問題

上記のタイリングに伴う計算量の増加は，本研究が目標とするホログラムの奥に空間が広がるような立体像を計算する際により顕著になる．詳しくは第 5 章の相互オクルージョン処理の章にて述べるが，単一の RS 面を用いて計算可能な立体像の奥行き幅には限りがある．したがって奥行き幅のあるような立体像の計算の際には複数の RS 面とその間での相互オクルージョン処理を用いることになる．相互オクルージョン処理とは手前の物体で奥の物体を隠すような処理のことをいう．

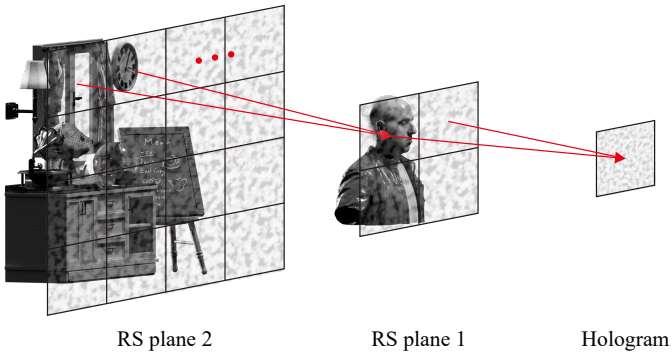



図 2.8 RS 面を用いて広い立体空間の計算をする際の計算量的問題

例えば序章の図 1.1 のような立体像を RS 面を用いて計算する場合，図のように人間の深度に一枚，背後の壁の位置に一枚 RS 面を配置する．そして波動光学的に正確なオクルージョンを計算するためには奥の面から手前の面まで伝搬し相互オクルージョン処理を加えた上で再度ホログラムまで伝搬する必要があることが知られている．この面の数に応じた段階的な伝搬計算が前述のタイリングの計算量問題をより悪化させる．特に奥の面程大規模な波面を扱う必要があるために，分割伝搬計算の複雑性は飛躍的に増大する．

$L$ 枚の RS 面を用いて立体像を計算する際に必要な計算量を簡単な条件で見積もる．図 2.8 のように $L$ 番目の波面は $2^L$ 枚のタイルを持つとする．すると奥の面から全てのタイル間の組み合わせにおいて伝搬計算を行う必要があるために $l$ 番目のタイルと $l+1$ 番目のタイルの間の伝搬計算の回数 $n_{\mathrm{p}}(l)$ は

$$n_{\mathrm{p}}(l) = 2^l \cdot 2^{l+1} \tag{2.53}$$

$$= 2^{2l+1} \tag{2.54}$$

従って奥の RS 面から順に伝搬しホログラム面まで辿り着くために必要な伝搬計算の回数は

$$N_{\mathrm{p}}(L) = \sum_{l=0}^{L-1} n_{\mathrm{p}}(l) \tag{2.55}$$

$$= \sum_{l=0}^{L-1} 2^{2l+1} \tag{2.56}$$

$$= \sum_{l=0}^{L-1} 2 \cdot 4^{l} \tag{2.57}$$

等比級数の和として求めることができるため

$$N_{\mathrm{p}}(L) = \frac{2(4^{L-1}-1)}{4-1} \tag{2.58}$$

$$= \frac{2(4^{L-1}-1)}{3} \tag{2.59}$$

つまり RS 面の枚数に対し指数関数的に計算時間が増大することになる．これらの原因が RS 面を用いての大規模計算機合成ホログラムの計算を難しくしている．

## 2.4 本章の結論

この章ではホログラフィの原理，CGH の概念，光波の伝搬と RS 面を用いた CGH の計算法について述べた．ホログラフィは光の波面を記録・再生する技術であり，それを用いた 3D ディスプレイは人間の奥行き知覚要因を全て満足する．ホログラムを計算により生成するためには波面伝搬理論に基づきそのシミュレーションにより CGH 上での光波を求める必要がある．

従来提案された光線再生型 CGH 計算法は光線場を再生することで写実的な立体像の再生を可能とするが，一方で深い奥行きにて分解能が低下する問題がある．RS 面を用いた CGH 計算法はこの問題を解決するために提案され，物体近くで光線をサンプリングしそれを波面に変換した上で CGH 面まで伝搬させることで，写実的な表現と深い奥行きを同時に達成する．

一方で RS 面を用いて大規模なホログラムを計算する際計算量が増大する問題が存在し，目標とする空間全体を埋めるような立体像の計算の際にはそれが顕著になる．その大きな理由として波面の分割伝搬に伴う計算量の増大がある．またこの計算量の増大は奥行き幅の広い立体像を計算する際より大きな問題となる．従って本論文ではこの課題の解決を図ることを目標とする．

# 第 3 章

# 正射影光線-波面変換に基づく CGH 計算法

この章では本論文の根幹を成す正射影光線-波面変換法を用いた CGH 計算法の原理について述べる．はじめに従来の RS 面を用いた計算手法の変形から，正射影画像のフーリエ変換を並べることで物体波面の角スペクトルが計算できることを導く．そしてこの原理を用いることで余剰な光波伝搬計算の除去が可能になることを述べる．提案する計算法が計算量的に従来手法に勝ることを理論的に示し，それを計算時間の測定により実証する．次に詳しい実装法について述べ，本手法を用いて計算したホログラムから立体像が確かに再生できることを実証する．

---

## 3.1 RS 面を用いた CGH 計算法の変形と正射影画像

本項では従来の RS 面を用いた CGH 計算法における透視投影画像から波面への変換のプロセスを変形することで提案手法における計算原理を導く．従来の RS 面による計算では，透視投影画像の集合として光線場を取得する．すなわちある一点に集まる光線を空間的に走査し光線場を取得している．一方本論文で提案する正射影光線-波面変換では光線取得の順を変え，正射影光線と呼ばれる一方向の光線の空間分布を角度を変え取得することで光線場を取得する．図 3.1 にこの 2 つの光線取得法の関係を示す．

上記を前提として従来の RS 面を用いた CGH 計算法を以下のように離散フーリエ変換の性質を用いることでの変形し，正射影画像からの計算法を導く．透視投影画像の枚数を $K$，その画素数を $M$ とする．$k$ 番目の透視投影画像を次の $M$ 次元ベクトルで表す．

$$\boldsymbol{p}_k = [p_k[0] \cdots p_k[M-1]]^t \tag{3.1}$$

一方正射影画像は全透視投影画像の一成分を一挙に取得する．すなわち $m$ 番目の正射影画像を次の $K$ 次元のベクトルで表すことができる．どちらの光線取得法を用いても総光線数は変化しないことに注意．

$$\boldsymbol{o}_m = [p_0[m] \cdots p_{K-1}[m]]^t \tag{3.2}$$

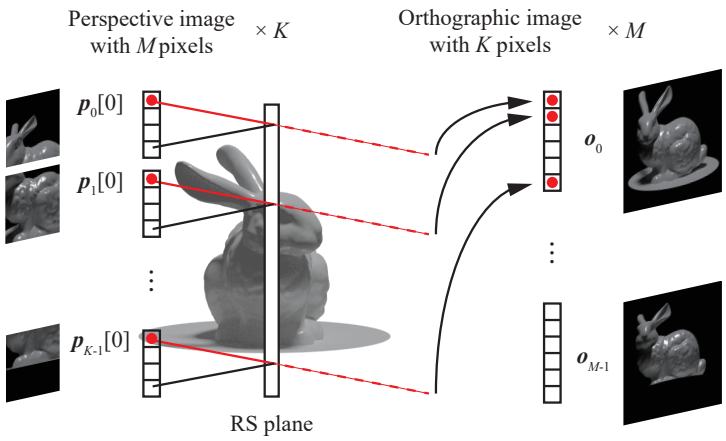



図 3.1　透視投影画像と正射影光線の関係

ここでサンプル数 $N$ の離散信号

$$\boldsymbol{x} = [x_0, \cdots, x_{N-1}]^t \tag{3.3}$$

の離散フーリエ変換（DFT）を表すベクトル

$$\boldsymbol{X} = [X_0, \cdots, X_{N-1}]^t \tag{3.4}$$

は次で定義される．

$$\boldsymbol{X}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j2\pi \frac{kn}{N}\right) \tag{3.5}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{kn} \tag{3.6}$$

ここで回転因子 $W_N^p$ を次のように定義した．

$$W_N^p = \exp\left(-j2\pi \frac{p}{N}\right) \tag{3.7}$$

DFT は次の行列によって表現可能である．

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} W^{00} & \cdots & W^{0(N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W^{(N-1)0} & \cdots & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = F_N \boldsymbol{x} \tag{3.8}$$

ここで離散フーリエ変換の性質として次のシフト則とフーリエ変換の対称性を用いる．

**(1) シフト則**

信号 $\boldsymbol{x}$ を $m$ だけ巡回シフトした信号

$$\boldsymbol{g} = [x_{N-m}, \cdots, x_{N-1}, x_0, \cdots, x_{N-m-1}]^t \tag{3.9}$$

の DFT は

$$G_k = W_N^{km} X_k \tag{3.10}$$

と書くことができる．これを行列で表現すると次のようになる．

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} W^{0m} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W^{(N-1)m} \end{bmatrix} \boldsymbol{X} = S_N^m \boldsymbol{X} \tag{3.11}$$

**(2) フーリエ変換の対称性**

DFT を信号 $\boldsymbol{x}$ に対して 2 回行った場合次のようになる．

$$F_N \boldsymbol{X} = F_N^2 \boldsymbol{x} = N \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & 1 \\ \vdots & & & \\ 0 & 1 & & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = N R_N \boldsymbol{x} \tag{3.12}$$

RS 面を用いた CGH 計算の中で光学的に等価な変形として，拡大した透視投影画像を次のように定義する．

$$\boldsymbol{p}' = \begin{bmatrix} p\,(0) \\ \vdots \\ p\,(0) \\ \vdots \\ p\,(M-1) \\ \vdots \\ p\,(M-1) \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ K \\ \\ \\ \\ K \end{matrix} \tag{3.13}$$

このように考えると，離散フーリエ変換された RS 面上の波面は次のように書くことができる．

$$\boldsymbol{W}_{\mathrm{RS}} = F_{MK} \boldsymbol{w}_{\mathrm{RS}} \tag{3.14}$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} S_{MK}^{Mk} F_{MK} \left\{ F_{MK} \boldsymbol{p}_k^{'} \right\} \tag{3.15}$$

$$= N \sum_{k=0}^{K-1} S_{MK}^{Mk} R_{MK} \boldsymbol{p}_k^{'} \tag{3.16}$$

ベクトル $\boldsymbol{p}_k^{'}$ の次元数を鑑みれば $MK$ の大きさを考えれば以下のように見て差し支えない．

$$R_{MK} \boldsymbol{p}_k^{'} = \begin{bmatrix} p_k\,(M-1) \\ \vdots \\ p_k\,(M-1) \\ \vdots \\ p_k\,(0) \\ \vdots \\ p_k\,(0) \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ K \\ \\ \\ \\ K \end{matrix} \tag{3.17}$$

従って

$$W_{\mathrm{RS}} = N \sum_{k=0}^{K-1} S_{MK}^{Mk} \begin{bmatrix} p_k\,(M-1) \\ \vdots \\ p_k\,(M-1) \\ \vdots \\ p_k\,(0) \\ \vdots \\ p_k\,(0) \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ K \\ \\ \\ \\ K \end{matrix} \tag{3.18}$$

ここで $S_{MK}^{Mk}$ の対角成分には周期性があり，次のように書くことができる．

$$S_{MK}^{Mk} = \begin{bmatrix} W_K^{0k} & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & \\ & & W_K^{(K-1)k} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & W_K^{0k} & & \\ & O & & & & \ddots & \\ & & & & & & W_K^{(K-1)k} \end{bmatrix} K \tag{3.19}$$

ここから

$$\boldsymbol{W}_{\mathrm{RS}}[mK+i] = \sum_{n=0}^{K-1} p_n[M-1-m] W_N^{in} \tag{3.20}$$

これは明らかに $M-1-m$ 番目の正射影画像の離散フーリエ変換になっており，すなわち

$$\boldsymbol{W}_{\mathrm{RS}} = [F_K \boldsymbol{o}_{M-1}, \cdots, F_K \boldsymbol{o}_0]^t \tag{3.21}$$

として計算することができる．すなわち正射影画像の離散フーリエ変換を並べることで，離散フーリエ変換された RS 面上の波面を直接生成できることになる．

RS 面上での角スペクトルを上記のプロセスで得た後，CGH 面までの伝搬計算を行う．第 2 章で述べた通り伝搬計算は畳み込みを用いて計算される．$H_d$ を距離 $d$ の伝搬伝達関数を与える対角行列とすると，CGH 面上での波面は以下の式で得ることができる．

$$\boldsymbol{W}_{\mathrm{CGH}} = F_N^{-1} H_d \boldsymbol{W}_{\mathrm{RS}} \tag{3.22}$$

上記のプロセスを正射影光線-波面変換を用いた CGH 計算法と呼ぶことにする．

上記は次のようにさらに直観的に説明することもできる．$w_{\mathrm{h}}(x)$ をホログラム面での波面，$W_{\mathrm{RS}}(f_x)$ を中間面の角スペクトルとする．上記の議論から $W_{\mathrm{RS}}$ は，正射影画像のフーリエ変換を空間的にシフトし重ね合わせることで計算可能である．正射影画像のサンプリング間隔を $\Delta o$ とし，角度 $\alpha$ に対する正射影画像を $o(x;\alpha)$ と表すと，サンプリングされた正射影画像が与える波面は次のように表すことができる．

$$w_{\mathrm{o}}(x;\alpha) = \left(o(x;\alpha) \cdot \mathrm{comb}\left(\frac{x}{\Delta o}\right)\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{x}{\Delta o}\right) \cdot \exp(-j2\pi \sin\alpha) \tag{3.23}$$

RS 面を用いた CGH 計算と提案手法において取得する光線は同等であることを考えると，従来の RS 面上に作られる波面は以下の式で書くことができる．

$$w_{\mathrm{RS}}(x) = \sum_{m=0}^{M-1} w_{\mathrm{o}}(x;\alpha_m) \tag{3.24}$$

これをフーリエ変換して

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[w_{\mathrm{RS}}(x)] =& W_{RS}(f_x) && (3.25)\\
=& \sum_{m=0}^{M-1} \mathcal{F}[W_{\mathrm{o}}(x;\alpha_m)] && (3.26)\\
=& \Delta o^2 \cdot \mathrm{sinc}\left(\Delta o(f_x + \sin\alpha_m)\right) && (3.27)\\
& \cdot \left(O(f_x + \sin\alpha_m) * \mathrm{comb}\left(\Delta o(f_x + \sin\alpha_m)\right)\right) && (3.28)
\end{aligned}$$

sinc 関数を近似することで以下の式を得ることができる．

$$W_{RS}(f_x) = \Delta o^2 \cdot \sum_m \mathrm{rect}\left(\Delta o(f_x + \sin\alpha_m)\right) \cdot O(f_x + \sin\alpha_m;\alpha_m) \tag{3.29}$$

これは即ち，$W_{\mathrm{RS}}(f_x)$ は正射影画像のフーリエ変換を並べることで計算できるということを示している．ここで距離 $d$ に対する伝搬伝達関数を $H(f_x;d)$ とすれば，所望の CGH 面での波面は

$$w_{\mathrm{CGH}}(x;d) = \mathcal{F}^{-1}\left[W_{\mathrm{RS}}(f_x) \cdot H(f_x;d)\right] \tag{3.30}$$

として計算することができる．

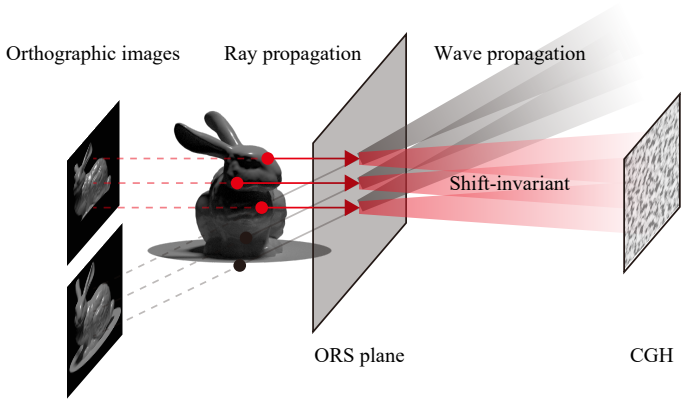



図 3.2　正射影光線-波面変換を用いた CGH 計算法の物理的イメージ

この計算法の物理的イメージを図示すると図 3.2 のようになる．物体表面から ORS 面までの伝搬は幾何光学近似に基づき計算される．そして ORS 面上で波面に変換され波動光学に基づき CGH 面まで伝搬計算を行う．平行光線間での波面としての伝搬は Shift-invariant であるために高速畳み込みを用いて計算することが可能である．幾何光学的により詳しい正射影光線-波面変換法についての議論を付録 A に示すので参照のこと．

## 3.2 正射影光線-波面変換法と余剰伝搬の除去

ここまでの議論に基づき正射影光線-波面変換を用いた CGH 計算法を書き下す．ここでも簡単のために一次元で記述する．光線をサンプリングする方向数，すなわち正射影光線の枚数を $M$ とする．また $m$ 番目の正射影画像をベクトルとして表現したものを $\boldsymbol{o}_m$ とする．このベクトルの次元数，すなわち正射影画像のピクセル数を $K$ とする．正射影光線-波面変換に従って $N = MK$ ピクセルのホログラムを計算する最も基本的なアルゴリズムは，以下のようになる．エイリアシング除去のためゼロパティングがなされていることに注意．

**Algorithm: Generation of CGH using orthographic ray-wavefront conversion**

---

**Ray-sampling stage**

Set an ORS plane near the object.
**for** $m \in \{0, \cdots, M-1\}$
  Capture the $m$-th orthographic image $\boldsymbol{o}_m$ from the angle $m\Delta\theta$.
**end for** $m$

**Orthographic ray-wavefront conversion**

Allocate memory of $2N$ length vector, $\boldsymbol{W}'$.
**for** $m \in \{0, \cdots, M-1\}$
  Multiply random phase with $\boldsymbol{o}_m$.
  Embed $\boldsymbol{o}_m$ into double-length zero-vector, as $\boldsymbol{o}'_m$.
  FFT $\boldsymbol{o}'_m$ as $\boldsymbol{O}'_m$
  Embed $\boldsymbol{O}'_m$ into $\boldsymbol{W}'[2mK]$.
**end for** $m$
Multiply the transfer function $H$ with $\boldsymbol{W}'$.
IFFT $\boldsymbol{W}'$, as $\boldsymbol{w}'$.
Crop the center of $\boldsymbol{w}'$, and obtain the final wavefront of CGH, $\boldsymbol{w}$.

**Interference stage**

Interfere $\boldsymbol{w}$ with the reference wave $\boldsymbol{r}$, and obtain the fringe pattern $\boldsymbol{I}$.

---

提案手法における重要な新規性として，正射影光線から CGH 計算を開始することで余剰な伝搬計算を除去できるという特徴がある．図 3.3(a) に示すように従来の RS 面を用いたホログラム計算では生成した RS 面上における波面の中にホログラム面に到達しない成分が含まれている．これにより特に CGH 面の奥深くに CGH より大きな物体があるような場合に余剰な計算が増加することが問題となる．従来の RS 面計算に用いられる透視投影画像は図 3.4 (a) のようにある

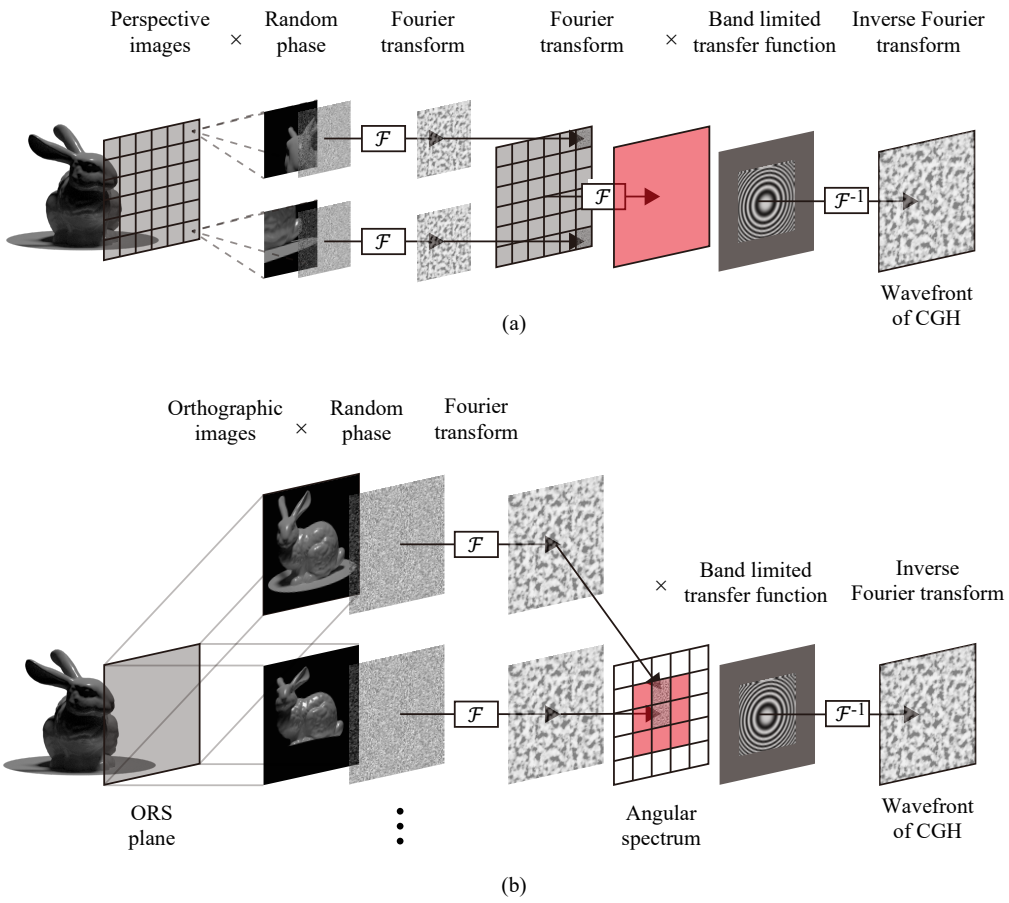



図 3.3　(a) 従来の RS 面を用いた CGH 計算法と (b) 正射影光線-波面変換を用いた CGH 計算法の比較

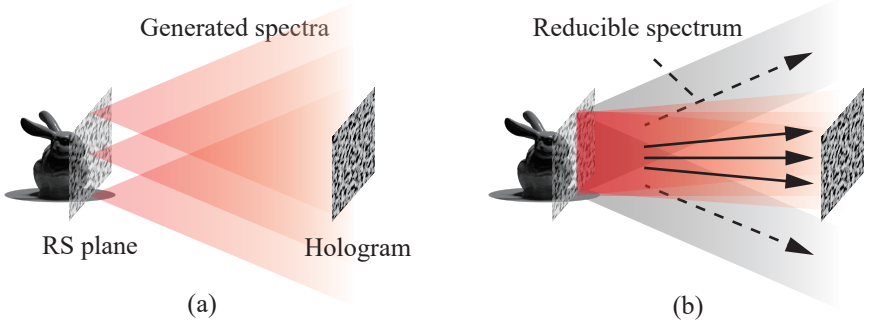



図 3.4　(a) 従来の RS 面を用いた計算法と (b) 提案手法による余剰伝搬計算の除去

一点から異なる方向へ伝搬する光線の集合であるため，上記 CGH 面に入射しないような成分が含まれていたとしても計算から分離することは難しかった．

一方正射影を用いた計算法では，図 3.3(b) のように物体面上の角スペクトルを直接生成することが可能となる．したがって伝搬伝達関数における制限された帯域にあたる角スペクトルは最初から計算から除去可能であり，光線の取得も必要ない．これは図 3.4 (b) のように理解することができる．正射影画像，すなわち平行光線の集合を用いて計算するため CGH 面に入射しないような余剰な波面成分の伝搬計算の除去を可能としている．従ってこの干渉縞生成に寄与しない成分のみを計算から省くため，再生像の画質を犠牲にせず計算を高速化を達成可能である．この余剰計算の除去は後の章で述べる分割計算に対しても有効である．

## 3.3 計算量の見積もりとシミュレーションによる比較

ここでは従来手法と提案手法の計算量の比較を行い提案手法の優位性を示す．簡単のため 1 次元の場合において複素乗算回数から計算量を考察する．透視投影画像の枚数を $K$，その画素数を $M$ とする．すなわち正射影画像の枚数を $M$，その画素数を $K$ としている．また CGH 画素数を $X$，ピクセルピッチを $\Delta x$ とする．したがって CGH 面のサイズは $S_x = X\Delta x$ となる．

### 3.3.1 伝搬距離と計算量に関する考察

CGH 面と同じ大きさの RS 面，同軸として伝搬距離と計算量の関係に関する考察を行う．

**(1) 従来の RS 面を用いた CGH 計算法**

始めに従来手法についてその計算量を考える．CGH 面での波面の計算は次の 4 つの段階に分けられる．

1. 要素画像の FFT による光線波面変換
2. RS 面全体の FFT
3. 伝搬のための畳み込み乗算
4. 逆フーリエ変換

ステップ 1 の計算時間はサンプル数 $M$ の FFT を $K$ 回行うため次のように書ける．

$$C_1 = K\,(M \log M) \tag{3.31}$$

ステップ 2 の計算時間はサンプル数 $2MK$ の FFT を行うため次のように書ける．エイリアシングを除去するためゼロパディングが行われていることに注意.

$$C_2 = 2X \log 2X \tag{3.32}$$

ステップ 3 の計算時間はサンプル数 $2MK$ の複素数乗算を行うため次のように書ける．

$$C_3 = 2X \tag{3.33}$$

ステップ 4 の計算時間はサンプル数 2MK の FFT を行うためステップ 2 と同じ．従って CGH での波面を計算するのに要する計算量は

$$C_{\mathrm{RS}} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \tag{3.34}$$
$$= X \log M + 4X \log 2X + 2X \tag{3.35}$$

と書くことができる．

**(2) 提案手法**

次に提案手法における計算量について考察する．CGH 面での波面の計算は次の 3 つの段階に分けられる．

1. 周波数空間で必要な分だけ正射影画像を FFT
2. 周波数空間で必要な分だけ畳み込み乗算
3. 逆フーリエ変換

この計算量の考察のためにシフト角スペクトル法 [83] における，周波数空間でのサンプル数を計算する必要がある．シフトなしの場合（同軸の場合）角スペクトル法において，周波数空間で計算するバンド幅は次のように書ける．

$$B_{f_x} = 2\left\{(2z\Delta u)^2 + 1\right\}^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-1} \tag{3.36}$$

ここで

$$\Delta f_x = \frac{1}{2S_x} = \frac{1}{2X\Delta x} \tag{3.37}$$

を代入すると

$$B_{f_x} = 2\left\{\left(\frac{z}{S_x}\right)^2 + 1\right\}^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-1} \tag{3.38}$$

従って必要なサンプル数は

$$\frac{B_{f_x}}{\Delta f_x} = 2\left\{\left(\frac{z}{S_x}\right)^2 + 1\right\}^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-1} \cdot 2X\Delta x \tag{3.39}$$
$$= \frac{2X}{\sqrt{\left(\frac{z}{S_x}\right)^2 + 1}} \frac{\Delta x}{\lambda} \tag{3.40}$$

ここで波長とサンプリング間隔は同程度の大きさにとるので，

$$\frac{\Delta x}{\lambda} \simeq 1 \tag{3.41}$$

よって周波数空間で必要なサンプル数は

$$\frac{B_{f_x}}{\Delta f_x} = \frac{2X}{\sqrt{\left(\frac{z}{W}\right)^2 + 1}} \tag{3.42}$$

ただしこれが $C_W = 2MK$ を超えることはない．

従って，ステップ 1 の計算量は多めに見積もって

$$C_1' = \frac{4X}{\sqrt{\left(\frac{z}{S_x}\right)^2 + 1}} \log \frac{4X}{\sqrt{\left(\frac{z}{S_x}\right) + 1}} \tag{3.43}$$

同様にステップ 2 も次のように書くことができる．

$$C_2' = \frac{4X}{\sqrt{\left(\frac{z}{S_x}\right)^2 + 1}} \tag{3.44}$$

ステップ 3 は配列全体の FFT を必要とするので

$$C_3' = 2X \log 2X \tag{3.45}$$

従って CGH 面での波面を計算するのに要する計算量は次のように書ける．

$$C_{\mathrm{ORS}} = C_1' + C_2' + C_3' \tag{3.46}$$

$$= \frac{4X}{\sqrt{\left(\frac{z}{S_x}\right)^2 + 1}} + \frac{4X}{\sqrt{\left(\frac{z}{S_x}\right)^2 + 1}} \log \frac{4X}{\sqrt{\left(\frac{z}{S_x}\right)^2 + 1}} + 2X \log 2X \tag{3.47}$$

これを元に従来手法と提案手法で計算量をプロットすると図 3.5 のようになる．

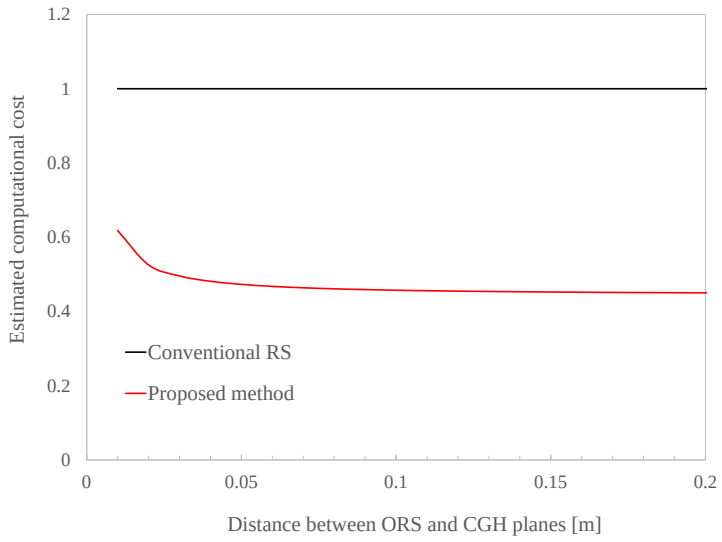



図 3.5　伝搬距離に対する従来手法と提案手法における計算量の推定

ただし $X = 2048, M = 16, \Delta x = 1.0\,\mu\mathrm{m}, \lambda = 532\,\mathrm{nm}$ とした．すなわち伝搬距離が長くなるほど従来手法と比べ高速に計算できることが分かる．伝搬面間の距離が大きくなるほど不要なスペクトルは増大するのであるから，その余剰を省略する提案手法がこのような形での優位性を持つことは直観的にも理解できる．

### 3.3.2 RS 面のサイズと計算量に関する考察

ここでは RS 面のサイズの変化に対する計算量の考察を行う．RS 面が CGH 面の $A$ 倍であるとして計算する．

**(1) 従来の RS 面を用いた計算法**

従来の RS 面を用いた計算法では

$$C_1 = AX \log M \tag{3.48}$$
$$C_2 = 2AX \log 2X \tag{3.49}$$
$$C_3 = 2AX \tag{3.50}$$
$$C_4 = 2X \log 2X \tag{3.51}$$

したがって

$$C_{\mathrm{RS}} = AX \log M + 2(A+1)X \log 2X + 2AX \tag{3.52}$$

となる．当然のことながら，RS 面が大きくなるほどに計算量は増大する．本論文で目標とするような CGH は視野全体を埋めるような立体像である．従って $A$ の最大値を考えたとき

$$A_{\max} = 1 + 2d \tan\left(\sin^{-1}\frac{\lambda}{2\Delta x}\right) \tag{3.53}$$
$$= 1 + \frac{2d}{S_x}\left(\left(\frac{2S_x}{X\lambda}\right)^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.54}$$
$$\simeq 1 + \frac{d\lambda}{S_x^2}X \tag{3.55}$$

すなわち計算量オーダーとしては $O(X^2 \log X)$ となる．

**(2) 提案手法**

提案法では RS 面の大きさが増大するほどに干渉縞生成に寄与する正射影画像の枚数が増大する．その枚数は RS 面が視野のどれだけの割合を占めているかにほぼ比例する．すなわち

$$C_1' = M\frac{A}{A_{\max}} 2K \log 2K \tag{3.56}$$
$$C_2' = 2X \tag{3.57}$$
$$C_3' = 2X \log 2X \tag{3.58}$$

より

$$C_{\mathrm{ORS}} = M\frac{A}{A_{\max}} 2K \log 2K + 2X \log 2X + 2X \tag{3.59}$$

となり RS 面のサイズに対して増大するものの最大でも $O(X \log X)$ となることが分かる．したがって提案手法によりオーダーレベルの高速化を可能としていることが分かる．

これをもとに RS 面の大きさに対する計算量の関係をプロットしたものが図 3.6 となる．ただし $X = 2048, M = 16, \Delta x = 1.0\,\mu\mathrm{m}, \lambda = 532\,\mathrm{nm}, d = 50\,\mathrm{mm}$ とした．

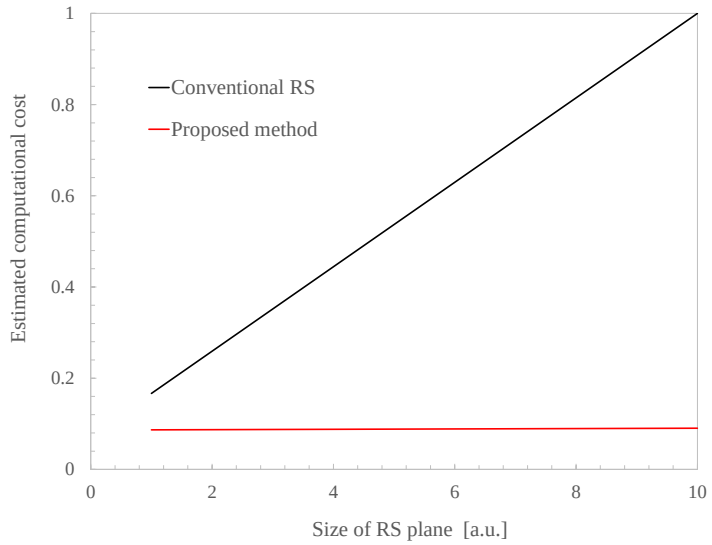



図 3.6　RS 面の大きさに対する従来手法と提案手法における計算量の推定

## 3.4　実験結果：CGH の生成と光学再生

ここでは提案手法により実際に干渉縞を計算し，それを数値的・光学的に再生することで提案手法の立体像計算可能性の実証を行う．同時に従来の RS 面を用いた CGH 計算と計算時間を比較する．

### 3.4.1　正射影光線-波面変換法の実装

提案する正射影光線-波面変換を用いた CGH 計算を実装する場合，以下のような手順に従って計算を進めることになる．

1. 多視点から正射影画像をレンダリング
2. 正射影画像にランダム位相をかけ FFT
3. 伝達関数を生成し乗算
4. 逆 FFT し CGH 面での波面を生成
5. 参照光との干渉を計算し干渉縞を生成

それぞれのステップについて解説する．

**(1) 多視点から正射影画像をレンダリング**

この手法では始めに正射影画像を取得する必要がある．仮想物体の立体像を計算する場合，3DCG ソフトなどにより正射影画像をレンダリングする．基本的に正射影画像さえ取得できればソフトウェアを用いても構わない．本論文中では立体像の写実性のデモンストレーションのため

レンダラーとして高度なフォトリアル系レンダリングが可能な Blender Cycles を利用した．多少質を犠牲にしても問題なければゲームエンジンとして用いられるソフトウェア，例えば Unity や Unreal Engine 等の利用はレンダリング時間の短縮を実現するであろう．

まず任意の 3DCG モデルを用意する．ここで ORS 面にあたる平面を設け，面の大きさと位置，向きを決定する．ORS 面から離れるほど像が不鮮明になる点に留意して設置する必要がある．この平面を中心としてカメラを回すように正射影画像をレンダリングする．$M$ 枚の正射影画像をレンダリングするとき $m$ 番目の正射影画像のレンダリング角は

$$\theta_n = \frac{2}{M}\left(m - \frac{M}{2}\right)\sin^{-1}\frac{\lambda}{2\Delta x} \tag{3.60}$$

となる．正射影画像の枚数が従来の RS 面を用いた CGH 計算における透視投影画像の画素数にあたり，逆に正射影画像の画素数が元の RS 点の数にあたる．また RS 面と CGH 面の位置関係が分かっていれば伝搬計算に必要な分の光線情報を計算することができる．クオリティの高い CG シーンを用いることができるのが光線情報を用いた CGH 計算の利点であるが，そのためのレンダリング時間は無視できない程度に必要となる．従って不要な光線情報をレンダリングせずに済むのであればその分高速に計算できることになる．そのため 3DCG ソフトの 1 部分だけレンダリングする機能を用いて必要な光線情報のみ計算することが望ましい．その際，回折によって入射する分の光線を含めることが重要である．この点については第 4 章で議論する．

**(2) 正射影画像にランダム位相をかけ FFT**

取得した正射影画像にランダム位相を加え FFT を行う．本来であれば PAS [66] の議論に従い物体面上で光線の位相が一致するような位相を与えるのが理想的であるが，簡便のためにランダム位相を用いても実装は可能である．その結果を並べたものが ORS 面の角スペクトルに相当する．

**(3) 伝達関数を生成し乗算**

基本的に畳み込みベースの伝搬手法であればどの伝達関数を用いても構わない．帯域制限フレネル伝搬 [86] 等多くの手法が存在するが，この章ではシフト角スペクトル伝搬 [83] を用いる．シフト角スペクトル法はオフアクシスにおける角スペクトル法での伝搬計算を行う手法であり正確性に優れる．空間的なシフトのない伝達関数は次のように書くことができる．

$$H\left(f_x, f_y; z\right) = \begin{cases} \exp\left(j2\pi\lambda^{-1}z\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}\right) & (\lambda f_x)^2+(\lambda f_y)^2 \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.61}$$

さらに空間的なシフト $(x_0, y_0)$ の位相をかけると次のようになる．

$$\hat{H}\left(u, v; z_0\right) = H\left(u, v; z_0\right)\exp\left\{j2\pi\left(x_0 f_x + y_0 f_y\right)\right\} \tag{3.62}$$

この伝達関数に対してエイリアシングを防ぐため次の条件

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial f_x}\right|\Delta f_x \leq \pi \tag{3.63}$$

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial f_y}\right|\Delta f_y \leq \pi \tag{3.64}$$

を満たすよう帯域制限を行うと，次の帯域で畳み込み計算を行えばいいことになる．

$$\begin{cases} f_x^{(-)} < f_x < f_x^{(+)} & S_x < x_0 \\ -f_x^{(-)} < f_x < f_x^{(+)} & -S_x < x_0 < S_x \\ -f_x^{(-)} < f_x < -f_x^{(+)} & x_0 < -S_x \end{cases} \tag{3.65}$$

ここで

$$f_x^{(\pm)} = \left\{ \left(x_0 \pm S_x\right)^{-2} z^2 + 1 \right\}^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-1} \tag{3.66}$$

である．$f_y$ についても同様である．

**(4) 逆 FFT し CGH 面での波面を生成**

乗算した後，全体を逆 FFT 変換することで波面を求めることができる．

**(5) 参照光との干渉を計算し干渉縞を生成**

参照光との干渉を計算して CGH パターンを得る．第 2 章で説明した通り通常ホログラムとして記録されるのは表される干渉縞の振幅強度である．しかし CGH では直接物体光再生に関わる項のみを記録することができる．すなわち

$$I\left(x,y\right) = \cos\left(\phi\left(x,y\right) - \psi\left(x,y\right)\right) \tag{3.67}$$

のみを記録することで立体像の再生が可能である．ここで $\phi\left(x,y\right)$ は物体光位相，$\psi\left(x,y\right)$ は参照光位相である．

### 3.4.2 再生シミュレーション

ホログラムの物理実装の前段階としてのシミュレーションや理想的な条件での立体像の確認などのため CGH 再生シミュレーションを構築する．本論文の再生シミュレーションは文献 [73] と同様に CGH に参照光位相を与え，そこから目の機構を模したシミュレーションにより網膜上の像を計算することで実現している．この像再生シミュレーションは次のような手順で行う．

1. CGH 面上での波面を生成する
2. 波面を瞳面まで伝搬計算し瞳径に合わせ円形にマスキングする
3. レンズの位相変調を波面に与える
4. 位相変調された波面を網膜にあたる面まで伝搬させる
5. 網膜上の光波の強度を計算する

CGH 面から瞳面，瞳面から網膜上と 2 回伝搬計算を行うがどちらもシフト角スペクトル法によって計算する．レンズによる波面の位相変調は次の式で与えられる．

$$U_l'(x,y) = U_l(x,y)\exp\left(-j\frac{k}{2f}\left(x^2+y^2\right)\right) \tag{3.68}$$

$U_l(x,y)$ は位相変調前の波面であり，$U_l'(x,y)$ は位相変調後の波面である．$f$ は焦点距離を示す．CGH 面と瞳の距離は可変であり，距離を変えた場合の再生像の様子も確認できる．レンズの焦点距離を網膜上で結像するように次のレンズの公式から与えるある．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f} \tag{3.69}$$

$a$ は物体からレンズまでの距離，$b$ はレンズから網膜までの距離，$f$ は焦点距離である．網膜上に結像する像は反転していることに注意する．また生成したホログラムが立体的に見えるか確認するために，視点位置を変えた状態での再生シミュレーションも行う必要がある．そのためには CGH 面から必要な分だけ瞳面を平行移動し，それに合わせてスクリーンの位置も移動することで運動視差を確認することができる．

### 3.4.3 計算時間の評価

ここではホログラムを計算に要した時間を従来の RS 面を用いた計算法と提案手法で比較する．

**(1) 物体-CGH 面間距離と計算時間の関係**

始めに物体-CGH 面間の距離と計算時間の関係についての評価を行う．表 3.1 のパラメータで CGH を生成し伝搬距離を変化させ計算時間を比較した．

表 3.1 物体-CGH 面間の距離に対する計算時間評価に用いるパラメータ

| | |
|---|---|
| CGH 面解像度 | $2048 \times 2048$ |
| ORS 面解像度 | $2048 \times 2048$ |
| 正射影画像解像度 | $128 \times 128$ |
| 光線方向数 | $16 \times 16$ |
| ピクセルピッチ | $2\,\mu\mathrm{m}$ |
| 伝搬距離 | $300\,\mathrm{mm}$ |

また計算環境を次の表 3.2 に示す．
計算時間を比較した結果は図 3.7 ようになる．ただし正射影画像のレンダリング時間は含まない．

与えた伝搬距離においては提案手法は従来 RS 面を用いた CGH 計算法より高速であり，理論通り伝搬距離が長くなるに従って計算時間が短くなることが分かる．また図 3.5 に示した伝搬距離と計算量の関係をよく説明する結果である．

表 3.2　CGH 計算に用いた環境

| | |
|---|---|
| CPU | Intel Core i7 4790K |
| RAM | 16GB |
| OS | Windows 8.1 |
| IDE | Visual Studio 2013 |
| Used library | FFTW |

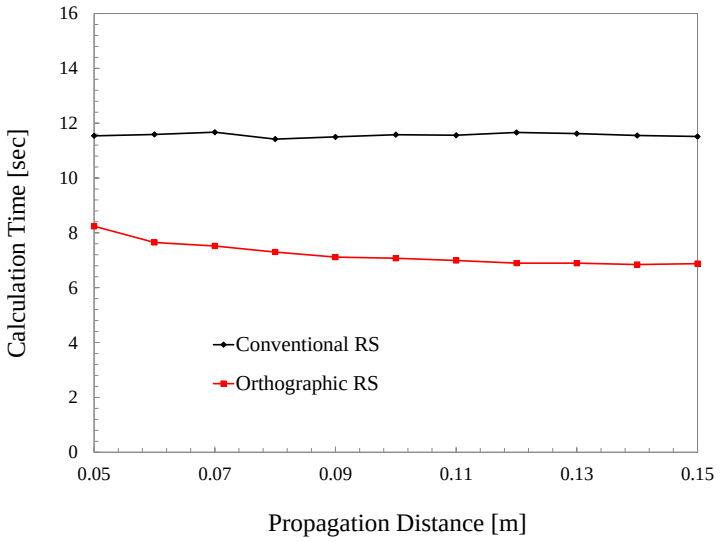



図 3.7　従来手法と提案手法の伝搬距離に対する計算時間の比較

**(2)RS 面のサイズと計算時間の関係**

次に RS 面のサイズと計算時間の関係について評価を行う．物体サイズが CGH 面と比較し大きな場合 CGH 面に入射しない余剰な光線が増加するために，従来手法に比べ高速に計算できることが予想できる．表 3.3 パラメータで計算時間の比較を行った．

表 3.3　RS 面のサイズに対する計算時間評価に用いるパラメータ

| | |
|---|---|
| CGH 面解像度 | $2K \times 2K$ |
| ORS 面解像度 | $2K \times 2K \sim 16K \times 16K$ |
| 正射影画像解像度 | $128 \times 128$ |
| 光線方向数 | $16 \times 16$ |
| ピクセルピッチ | $2\,\mu\mathrm{m}$ |
| 伝搬距離 | $300\,\mathrm{mm}$ |

前項と同様の計算環境のもとで計算時間を比較した結果は図 3.8 のようになる．

ここから予想通り RS 面が大きくなるほど従来手法より高速に計算可能であることが分かる．また図 3.6 に示した RS 面のサイズと計算量の関係をよく説明する結果である．

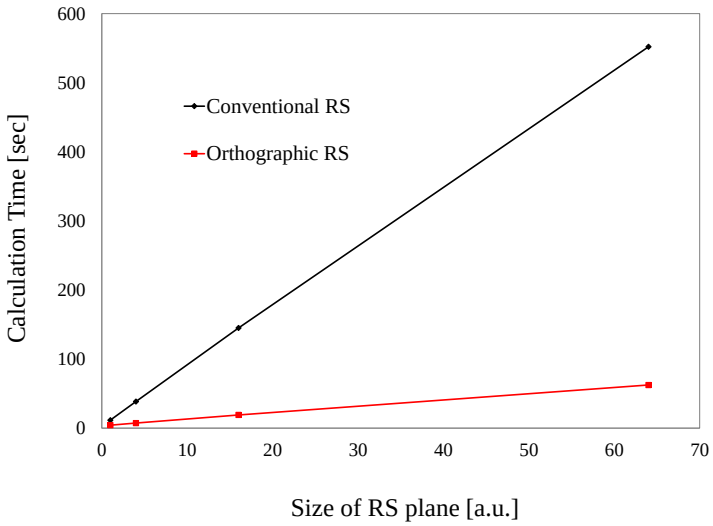



図 3.8　従来手法・提案手法における RS 面サイズと計算時間関係の比較

### 3.4.4　再生像の比較

本項では提案手法により生成される立体像の解像度を比較再生シミュレーションにより確認する．正射影光線-波面変換による CGH 計算法は原理的にいくつかの近似の近似の上に成り立っている．すなわち以下の 4 つの近似である．

1. 物体表面-ORS 面間の幾何光学近似
2. 光線の初期位相の近似
3. 光線の空間的離散化
4. 光線方向の離散化

これらの近似により立体像の空間・角度分解能が低下する．しかしながら 3D ディスプレイに特異な条件として観察するのが人間であり，網膜上の光波強度のみが問題となるという特徴がある．すなわち空間的に人間の目の分解能を満たせばよく，また網膜上での光波の位相は任意である．

はじめに光線の空間的離散化の効果について確認する．図 3.9 のように USAF テストチャートの立体像を再生する CGH を点光源法・RS 面を用いた計算法・提案手法を用いて計算する．CGH 画素数を 2048 × 2048 ピクセル，正射影画像画素数を 128 × 128 ピクセル，光線方向数を 16 × 16 とした．波長を 532 nm，ピクセルピッチを 0.8 µm とした．物体-CGH 面距離は 2.46 mm とし，RS 面・ORS 面は物体面上に配置する．すなわち幾何光学近似に基づく伝搬の精度低下はない．再生シミュレーション結果と 30 µm ピッチの縞上に示した赤色のライン上の強度プロファイルを図 3.10 に示す．点光源法・従来の RS 面を用いた手法ともに 30 µm ピッチの縞をサンプリングできている．一方で提案手法は物体面を約 12.8 µm 間隔でサンプリングしてい

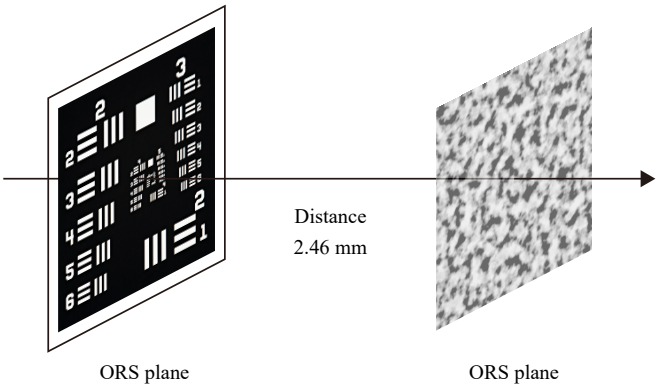



図 3.9　再生像比較における物体と CGH のセットアップ

ることが分かる．従って点光源法・RS 面を用いた計算法同様，30 µm ピッチの縞をサンプリングできていることが分かる．

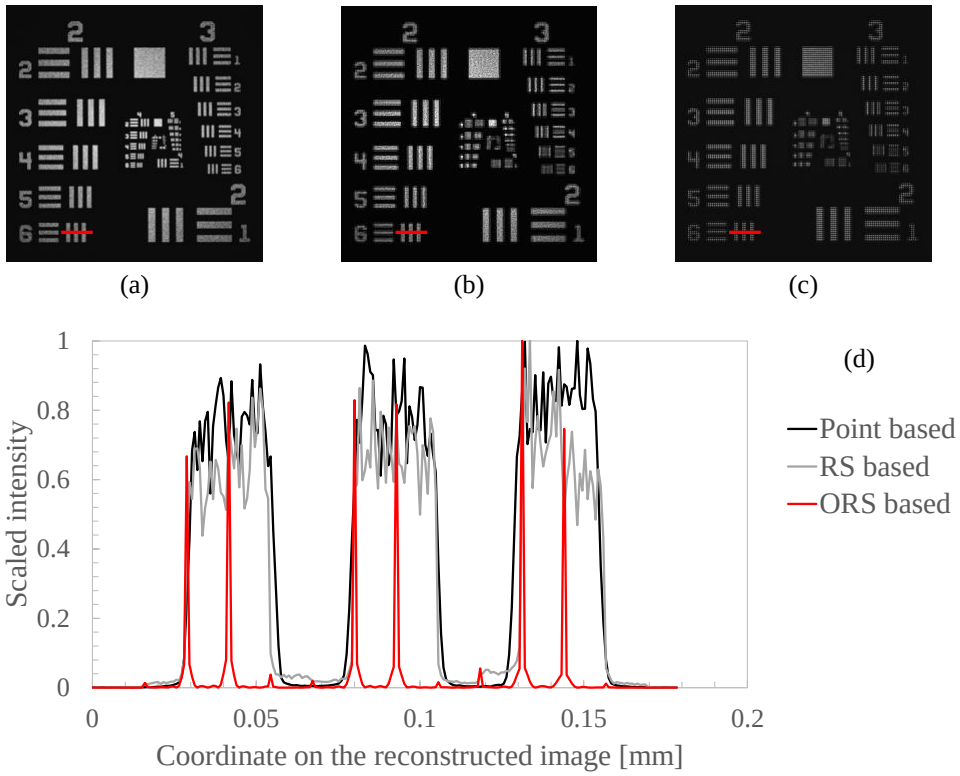



図 3.10　(a) 点光源法，(b) 従来手法，(c) 提案手法における再生像の比較と (d) ラインプロファイル

次に物体面-ORS 面間の距離と分解能の関係について確認する．CGH 画素数を 2048×2048 ピクセル，正射影画像画素数を 128×128 ピクセル，光線方向数を 16×16 とした．波長を 532 nm，

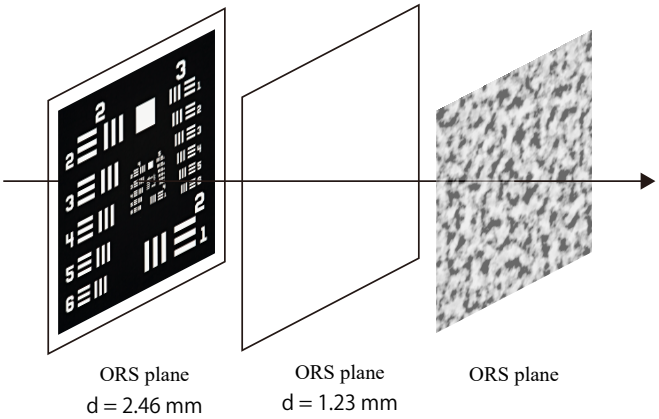



図 3.11　物体面-ORS 面間距離に対する再生像比較における物体と CGH のセットアップ

ピクセルピッチを 0.8 µm とした．物体-CGH 面距離は 2.46 mm とし，ORS 面は図 3.11 のように物体面上と物体面の手前 1.26 mm に配置する．再生シミュレーション結果と 30 µm ピッチの縞上のラインプロファイルを図 3.12 に示す．物体面-ORS 面間距離が増大するほど幾何光学に基づく伝搬距離が増大し近似精度を低下させ，分解能が低下することが予想できる．図 3.12(c) から確かに再生像の縞のコントラストを低下させることが確認できる．

### 3.4.5　CGH プリンタによる干渉縞の物理実装

提案手法による立体像再生を光学実験により実証する．計算した CGH から立体像を観察するには，生成した干渉縞をなんらかの形で物理実装する必要がある．本章では感光材料上に生成した干渉縞を投影し露光することで振幅マスクとしてホログラムの出力を実現する．干渉縞の投影はレーザープロジェクタと顕微鏡を用いた図 3.13 のような光学系の CGH プリンタを用いる．

この CGH プリンタではレーザープロジェクタから干渉縞を投影し，対物レンズによって記録材料上に縮小結像させ感光させる．生成した CGH パターンを分割し印刷のための適切な処理を施した後，$X-Y$ ステージによって順に記録してゆく．

一度に投影できる干渉縞は $400\times400$ ピクセルである．したがって例えば $16K\times16K$ の CGH を露光する場合には約 1600 枚の画像に分け印刷する．この条件では露光に約 40 分程度を要する．40 倍の対物レンズを用い縮小結像させることでピクセルピッチ 1.2 µm の干渉縞を振幅マスクとして出力することが可能になる．波長を 532 nm とするときこのピクセルピッチでは視野角では 12 $deg$ 程度の再生像を実現できる．また重要な点として，CGH 計算時の正射影画像の取得角度はこの印刷可能な干渉縞間隔という物理的要請から来ていることに注意すべきである．広い視野角を実現するためには可能な限り小さいピクセルピッチの干渉縞を印刷する必要があるが，その際高倍率の対物レンズを使うために投影画像に歪みを生じる．これは結果として再生像品質の劣化，典型的には立体像の分解能低下に繋がる．この CGH プリンタの投影光学系によって画像に加えられる歪みは次の 3 つが主となる．

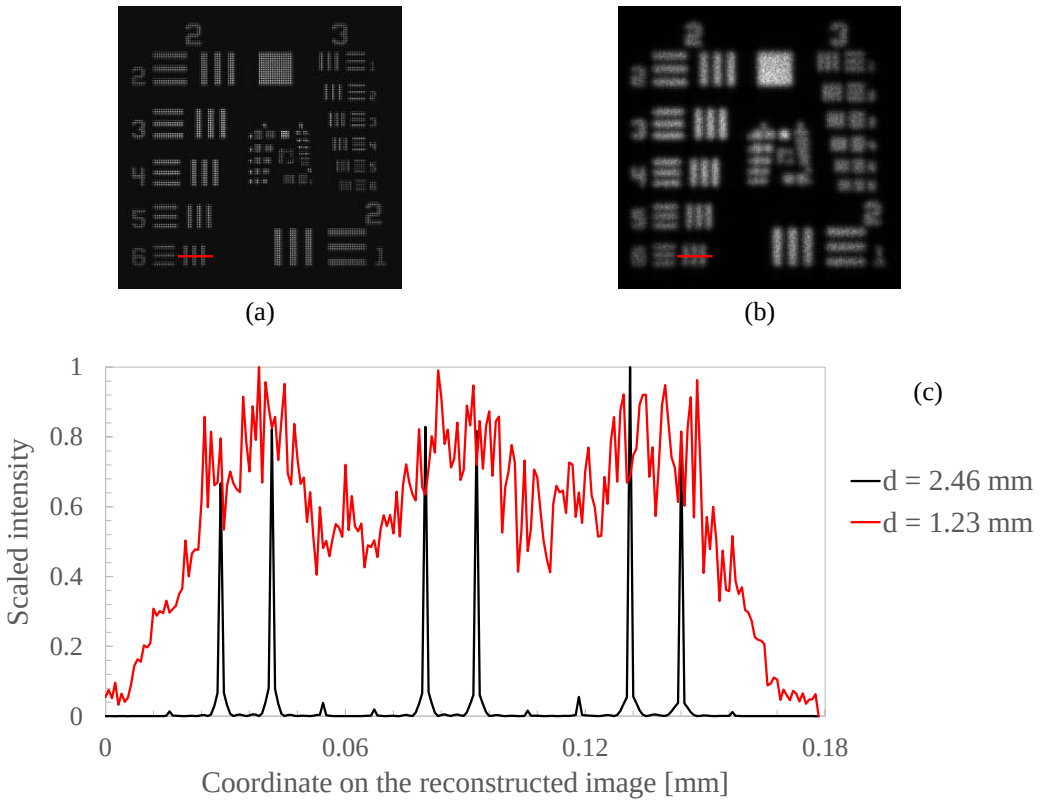



図 3.12　物体-ORS 面間距離 (a)0.0 mm，(b)1.26 mm における再生像の比較と (c) ラインプロファイル

1. プロジェクタのセッティングの誤差による画像の回転
2. 投影面上でのによる台形歪み
3. レンズの収差による樽型歪み

当然ながら，光学系の設計・調整によってこれらの歪みは最大限解消されることが望ましい．その上で，画像に逆歪みを加え投影することでより高品質な CGH を出力することが可能となる．次のような手順で画像に逆歪みを加える．

1. 回転変換
2. 台形補正
3. 糸巻型歪み
4. 二値化

二値化は光学系の歪みとは別に，干渉縞のコントラストを向上させることで高い回折効率を得るために加える．今回はこの逆歪み変換のパラメータを印刷を繰り返しトライアルアンドエラーで求めている．本来はこのプロセスを自動化しより正確な補正パラメータを求めることが望ましい．各変換，特に回転変換では画像にマージンがないと欠けが起きてしまう．そのため $380 \times 380$ ピクセルの画像を投影することにする．変換前と変換後の画像を比較したものを図 3.14 に示す．

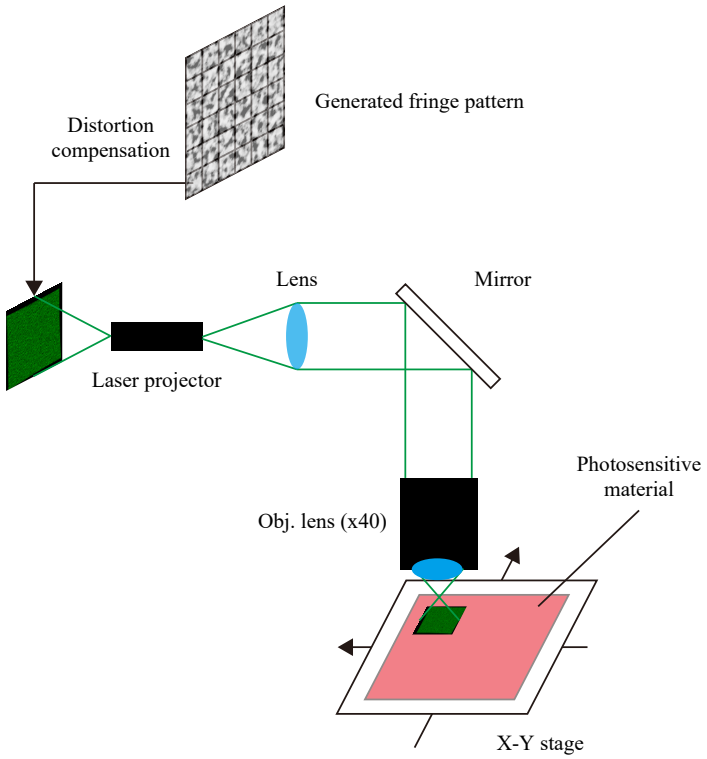



図 3.13　レーザープロジェクタと対物レンズを用いた CGH プリンタの光学系図

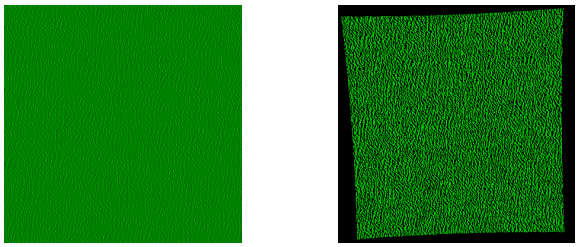
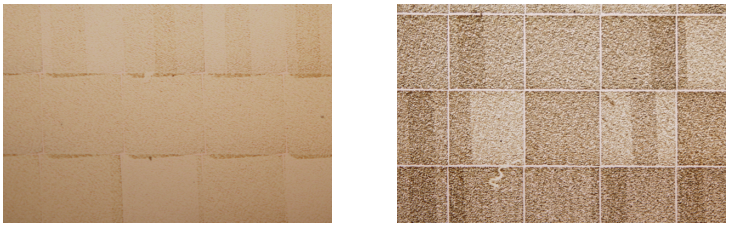



図 3.14　(a) 補正前，(b) 補正後の投影干渉縞パターン

緑色の画像を投影することでレーザープロジェクタの単一波長成分のみを用いることができる．B チャネルを用いることで回折限界から原理的にはより高い分解能を得ることができるはずであるが，今回用いる感光材用の感光特性の問題から G チャネルを用いている．このように干渉縞に補正を加え感材に投影することで振幅マスクを実装することが可能となる．図 3.15 に補正前の投影画像で露光した干渉縞，補正を加え露光した干渉縞をそれぞれ顕微鏡で撮影した写真を示す．補正によってより正確な印刷が可能となることが確認できる．

記録材料として Ultimate ホログラム用感材 U-08 の青緑感光を用いている．現像液・漂白剤



(a) (b)

図 3.15 (a) 補正前，(b) 補正後の CGH プリンタ印刷パターン

についても本製品用のものを使用している．赤色の波長帯域には感光しないことを利用し定期的に赤色のテストパターンを投影して感光材料上にピントを合わせる．

### 3.4.6 提案手法による立体像の光学再生の実証

実験として提案手法により CGH を計算し再生像が光学再生可能であることを実証する．利用する 3DCG として，ワイングラスの奥に TOKYO TECH の文字が浮かぶシーンを作成した．ワイングラスによる透過・屈折・反射などの複雑な物体表面の反射・透過特性を含むような立体像の再生を実証する．ホログラムの画素数は $16K \times 16K$，RS 面の画素数は $32K \times 32K$ とした．ピクセルピッチは CGH プリンタに合わせ 1.2 µm，波長は緑色の半導体レーザー光源に合わせた 532 nm とした．従って回折角は 12 deg と計算され，この角度に合わせ正射影画像をサンプリングする．また参照光は角度 6 deg の平面波とした．一枚の正射影画像は $512 \times 512$ ピクセルであり，これを $64 \times 64$ の異なる角度からレンダリングする．そのうちいくつかの例を図 3.16 に示す．




図 3.16 ワイングラス CGH における正射影画像例

伝搬距離は 140 mm とした．この CGH を従来の RS 面を用いた CGH 計算法と提案手法両方で計算する．その再生シミュレーション結果を図 3.17(a)(b) に示す．また計算時間を表 3.4 に示す．




図 3.17　(a) 従来の RS 面，(b) 提案手法再生像のシミュレーション結果．提案手法によって計算した (c) 左と (d) 右から観察した CGH の光学再生像．

表 3.4　ワイングラス CGH における計算時間の比較

| | 従来の RS 面を用いた CGH 計算法 | 正射影光線-波面変換 |
|---|---|---|
| 計算時間 | 47 min | 8 min |

従来手法での計算は 47 分，提案手法での計算は 8 分であった．したがって約 8 倍の高速化を達成できていることが分かる．再生シミュレーションを踏まえ提案手法は再生像の劣化なしに高速化が図れていることが確認できる．

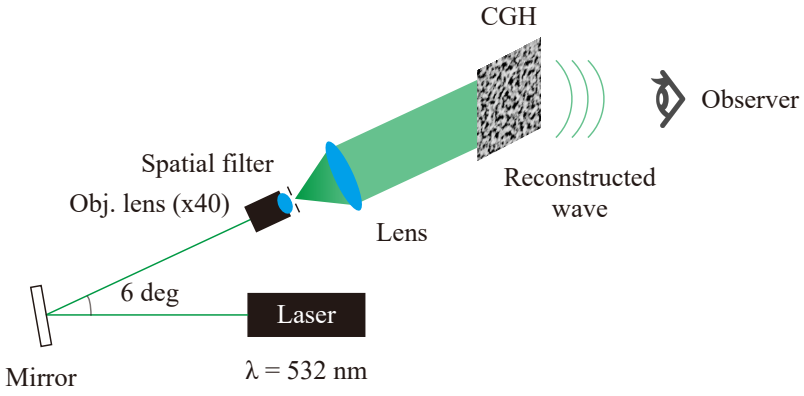
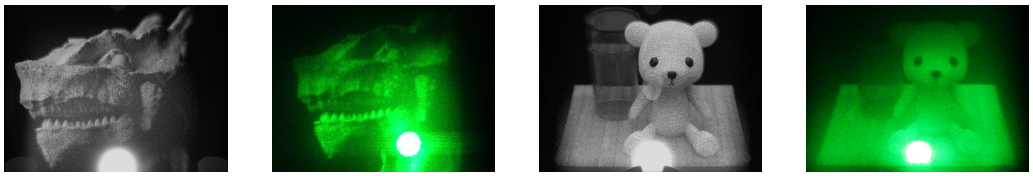



図 3.18　CGH 再生光学系図

次に提案手法により計算した CGH を前述の CGH プリンタを用いてバイナリ振幅マスクとして印刷する．印刷した CGH に対し図 3.18 のような光学系を用いて再生照明光を照射することで，虚像として図 3.17(c)(d) の光学再生像を観察できる．グラスを通した文字の位置から物体表面での屈折を運動視差から確認できる．

参考までに他の 3DCG から同様のパラメータで計算した CGH のシミュレーションによる再生像と光学再生像を比較したものを図 3.19 に示す．シミュレーション結果と比較すると，歪み補正の画像処理によって補正しきれなかった歪みや感光材料上への結像時におけるフォーカスのずれ，現像時の干渉縞のコントラスト低下などに起因する干渉縞の劣化が結果的には再生像の劣

化として現れている．また，上記の像はすべてレーザー光による照明で再生している．



(a) (b) (c) (d)

図 3.19　ホログラム再生像例．竜の立体像を再生する CGH における (a) 再生シミュレーション結果と (b) 光学再生像．クマとコップの立体像における (c) 再生シミュレーション結果と (d) 光学再生像．

## 3.5　本章の結論

この章では本論文において提案する正射影光線-波面変換法の原理をスカラー回折理論の近似として導出し，それを用いて CGH を計算する新たな手法を提案した．物体表面上の波面を正射影光線の成分に分解し，ORS 面と呼ぶ中間面までの短距離伝搬を幾何光学近似基づき，長距離伝搬を波動光学に基づき伝搬することで CGH 面上での波面を求めることができることを示した．そしてこの手法が従来提案の RS 面を用いた CGH 計算と等価であることを理論的に示した．

本手法は正射影光線から CGH を計算することが可能であるために，幾何光学に基づく物体表面の反射・透過特性の表現が容易であり，結果として写実的な立体像を表示可能である．また長距離の伝搬を波動光学に基づき計算するために深い奥行きでも高分解能である．

正射影成分のフーリエ変換を並べることでが ORS 面上での波面のフーリエ変換を計算可能であるという性質を利用することで余剰な光波の伝搬を除去することが可能になり，結果として従来の RS 面を用いた計算と比較し効率的な計算を可能とする．これを計算量の観点から理論的に示し，さらに計算時間の比較によりその効果を実証した．

また実験では本提案手法を用いて $16K \times 16K$ の画素数をもつ干渉縞を計算しそれを CGH プリンタを用いて振幅マスクとして出力した．干渉縞をレーザー光にて照明することで確かに立体像が光学再生可能であることを実証した．

# 第 4 章

# 大規模 CGH の分割計算法

前章では正射影光線-波面変換の原理を提案し，従来の RS 面との等価性と，それと比較した計算量的優位性を理論的に示した．また立体像再生が可能であることを数値的・光学的に実証した．しかしながら第 2 章で述べたような大規模 CGH の計算量問題に対してはこの原理のみでは解決に至らず，さらに新たな手法を提案する必要がある．

本章では，光線波面変換の原理に加え光線情報の組み換えと呼ぶ操作を加えることで，10 ギガピクセルを超えるような大規模 CGH を効果的に分割・並列計算する手法を提案する．この計算法が従来の RS 面を用いた計算と比較し大規模 CGH の計算において計算量的に有利であることを理論的に示し，計算時間の比較からその優位性を実証する．さらに本手法が実物体の立体像を計算可能であることを光学実験により確認する．

---

## 4.1 RS 面における大規模 CGH 計算の問題

CGH の計算において，点光源・ポリゴン・光線群から直接ホログラム面での波面を求めるのでなく一度物体近くに中間波面を設け，それらの平面間の伝搬計算から所望の波面を求める手法はしばしば利用される．その理由は 2 つあり，その一つは波面にせよ光線にせよ，物体から出射する光波が回折により拡がる範囲が狭い物体近傍で波面をサンプリングすることで，計算量的な優位性が得られる点である．もう一つは平面間の伝搬計算法はこれまでに様々な形で発展しており，その恩恵を得られる点である．多くの面対面の伝搬では高速フーリエ変換による畳み込みを利用可能であるため，高速計算が可能となる．

一方で第 2 章で述べた通り，高速畳み込みを利用する場合メモリの制限から一挙に計算できる波面のサンプル数は限られることになる．また CGH 面を細分化しそれぞれ並列に計算することで高速計算を達成しようとする場合にも，上記の分割を用いる．このケースでは第 2 章のとおりタイリングと呼ばれる計算法を用い，中間波面・ホログラム面を一定のピクセル数のタイルに区切り重ね合わせの原理を用いて，中間波面の各タイルからの伝搬結果の総和として計算する手法がとられる．しかしタイリングの欠点として全く同じ波面伝搬を計算するのにも分割数が増加するに従ってその計算量は増加する点が挙げられる．この問題は物体近くに中間面を設置する RS 面を用いた計算法においてもこの問題は存在する．また RS 面を用いた CGH 計算においては上

記の分割伝搬計算に加え，さらに光線のサンプリングに要する問題が生じる．大規模な RS 面上でのを生成するためにはそれに応じた膨大な本数の光線取得が不可避である．特に 3DCG から仮想物体の立体像を再生する CGH においては多視点画像のレンダリングにおける計算時間は決して無視できない．第 3 章で提案した正射影光線-波面変換の原理のみでは取得する光線は RS 面と同等であるために上記の光線取得の問題も同様に存在する．

次項より正射影光線-波面変換を用いた計算法と光線の組み換え呼ぶ手法を新たに提案し，大規模 CGH を効果的に分割計算する手法を提案する．

## 4.2 正射影光線のシフトと伝達関数

第 4 章の基礎となる理論を構築する．簡単のため 1 次元の場合について説明する．角度 $\alpha_m$ に対応する正射影光線 $o(x;\alpha_m)$ を $s_x$ だけ空間的にシフトした関数 $o'(x;\alpha_m)$ を考える．すなわち

$$o'(x;\alpha_m) = o(x - s_x;\alpha_m) \tag{4.1}$$

このときフレネル伝搬に基づく CGH 面までの距離 $d$ での波面 $w_m(x;d)$ を考えると

$$\begin{aligned}
& w_m(x;d) && (4.2)\\
=& \int_{-\infty}^{\infty} o(\xi;\alpha_m)\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha_m\xi\right)\cdot\exp\left(j\frac{\pi}{\lambda d}(x-\xi)^2\right)d\xi && (4.3)\\
=& \int_{-\infty}^{\infty} o'(\xi+s_x;\alpha_m)\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha_m(\xi+s_x)\right)\exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha_m s_x\right) && (4.4)\\
& \cdot\exp\left(j\frac{\pi}{\lambda d}(x-\xi)^2\right)d\xi && (4.5)
\end{aligned}$$

ただし $\lambda$ は波長である．両辺をフーリエ変換すると

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}\left[w_m(x;d)\right] && (4.6)\\
=& \mathcal{F}\left[o'(x+s_x;\alpha_m)\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha_m(x+s_x)\right)\right] && (4.7)\\
& \cdot\exp\left(-j\pi\lambda d f_x^2\right)\exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha_m s_x\right) && (4.8)\\
=& O'(f_x - \frac{\sin\alpha_m}{\lambda};\alpha_m)\exp\left(j2\pi s_x f_x\right) && (4.9)\\
& \cdot\exp\left(-j\pi\lambda d f_x^2\right)\exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha_m s_x\right) && (4.10)
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
& \exp\left(j2\pi s_x f_x\right)\cdot\exp\left(-j\pi\lambda z f_x^2\right) && (4.11)\\
=& \exp\left(-j\pi\lambda d\left(f_x - \frac{s_x}{\lambda d}\right)^2\right)\exp\left(j\pi\lambda d\left(\frac{s_x}{\lambda d}\right)^2\right) && (4.12)\\
=& \exp\left(-j\pi\lambda d\left(f_x - \frac{s_x}{\lambda d}\right)^2\right)\exp\left(j\pi\frac{s_x^2}{\lambda d}\right) && (4.13)
\end{aligned}$$

より

$$\mathcal{F}\left[w_m(x;d)\right] \tag{4.14}$$
$$=O'(f_x-\frac{\sin\alpha_m}{\lambda};\alpha_m)\exp\left(-j\pi\lambda d\left(f_x-\frac{s_x}{\lambda d}\right)^2\right) \tag{4.15}$$
$$\cdot\exp\left(j\pi\frac{s_x^2}{\lambda d}\right)\exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha_m s_x\right) \tag{4.16}$$

シフト量を次の式を満たすように選ぶとする．

$$s_x = d\sin\alpha_m \tag{4.17}$$

すると

$$\mathcal{F}\left[w_m(x;d)\right] \tag{4.18}$$
$$=O'(f_x-\frac{\sin\alpha_m}{\lambda};\alpha_m)\exp\left(-j\pi\lambda d\left(f_x-\frac{\sin\alpha_m}{\lambda}\right)^2\right) \tag{4.19}$$
$$\cdot\exp\left(j\frac{\pi}{\lambda}d\sin^2\alpha_m\right)\exp\left(-j\frac{\pi}{\lambda}d\sin^2\alpha_m\right) \tag{4.20}$$
$$=O'(f_x-\frac{\sin\alpha_m}{\lambda};\alpha_m)\exp\left(-j\pi\lambda d\left(f_x-\frac{\sin\alpha_m}{\lambda}\right)^2\right) \tag{4.21}$$

ここで

$$H_{\mathrm{F}}(f_x;d)=\exp\left(-j\pi\lambda d f_x^2\right) \tag{4.22}$$
$$A(f_x;d)=O'(f_x;d)H_{\mathrm{F}}(f_x;d) \tag{4.23}$$

と定義すれば，正射影-光線波面変換の理論より

$$w(x;d)\simeq\mathcal{F}^{-1}\left[\sum_m\mathcal{F}[w_m(x;d)]\right] \tag{4.24}$$
$$=\mathcal{F}^{-1}\left[\sum_m A\left(f_x-\frac{\sin\alpha_m}{\lambda};m\right)\right] \tag{4.25}$$

さてこの変形により与えられる計算法においてどのような物理的解釈が可能であるか考えてみる．フレネル領域では次の近似が成り立つ．

$$\sin\alpha_m\simeq\tan\alpha_m \tag{4.26}$$

すなわちシフト量は以下のように近似できる．

$$s_x=-d\sin\alpha_m \tag{4.27}$$
$$\simeq-d\tan\alpha_m \tag{4.28}$$

すると式 (4.22) は物理的に図 4.1 のように解釈できる．すなわち CGH 面からみてその投影角から幾何光学的にシフトした正射影光線から CGH 波面の角スペクトルを計算する際には，シフトした正射影光線をフーリエ変換し同軸の伝達関数を乗算した上で通常の正射影光線-波面変換法と同様に周波数空間で並べればよい．

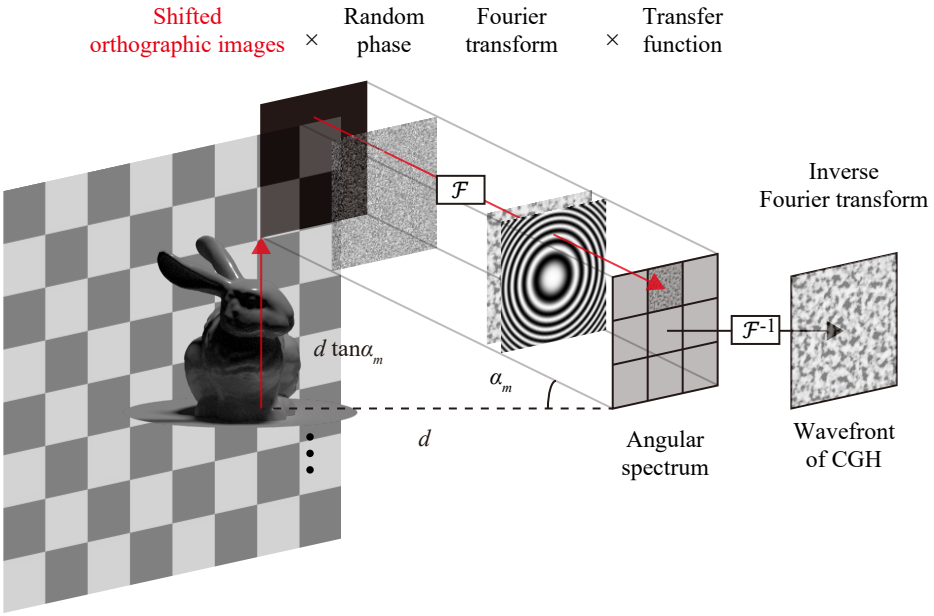



図 4.1　シフト正射影光線を用いた CGH 計算法

## 4.3　数値計算上のテクニック

光線のサンプリング角について以下のように設定することで周波数空間において等間隔に配置することが可能となる．$M$ の光線方向数をサンプリングする．そしてホログラムの画素数を $X$ としたとき，$m$ 番目の光線方向 $\sin\alpha_m$ は次の式を満たす．

$$\frac{2X}{M}\cdot\frac{2m-M+1}{2}\Delta f_x=\frac{\sin\alpha_m}{\lambda} \tag{4.29}$$

これを $\sin\alpha_m$ について解くことで次の式を得る．

$$\sin\alpha_m=\lambda\frac{X}{M}\cdot(2m-M+1)\,\frac{1}{2X\Delta x} \tag{4.30}$$

$$=\frac{2m-M+1}{M}\cdot\frac{\lambda}{2\Delta x} \tag{4.31}$$

$$=\frac{2m-M+1}{M}\sin\theta_{\mathrm{D}} \tag{4.32}$$

ここで $\sin\theta_{\mathrm{D}}$ は最大回折角である．

加えて，フレネル近似が成り立つ領域で光線が ORS 面上の格子点で一点に交わるという条件を加える．正射影光線のサンプリング間隔 $\Delta o$ は

$$\Delta o=M\Delta x \tag{4.33}$$

で与えられる．従って ORS 面の深度 $d$ が次の条件を満たすとき，サンプリングした光線は ORS 面上で一点に交わる．

$$d\tan\alpha_{m+1}-d\tan\alpha_m=i\Delta o\qquad(i\in\mathbb{N}) \tag{4.34}$$

フレネル近似が成り立つ領域において

$$\tan\alpha_m \simeq \sin\alpha_m \tag{4.35}$$

であることを考えれば，上記の条件は

$$d\frac{2\sin\theta_{\mathrm{D}}}{M} = i\Delta o \tag{4.36}$$

$$d = iM^2\Delta x\frac{1}{2\sin\theta_{\mathrm{D}}} \tag{4.37}$$

$$d = i\frac{(M\Delta x)^2}{\lambda} \tag{4.38}$$

典型的なケースとして

$$M = 64 \tag{4.39}$$

$$\Delta x = 0.8\,[\mu\mathrm{m}] \tag{4.40}$$

$$\lambda = 532\,[\mathrm{nm}] \tag{4.41}$$

を代入すると

$$d = i\cdot 4.93\times 10^{-3}\,[\mathrm{m}] \tag{4.42}$$

となる．本論文にて想定している CGH と物体のスケールを考えれば十分に達成可能な条件である．ただし伝達関数の周波数空間上での帯域制限を十分に考慮に入れる必要がある．フレネル伝搬における周波数空間上でのナイキスト周波数は以下の式で与えられる．

$$B_{f_x} = (2\lambda d\Delta f_x)^{-1} \tag{4.43}$$

画素数にして

$$B_{f_x}\Delta f_x^{-1} = \left(2\lambda d\Delta f_x^2\right)^{-1} \tag{4.44}$$

$$= \left(2\lambda i\frac{(M\Delta x)^2}{\lambda}\frac{1}{(2MK\Delta x)^2}\right)^{-1} \tag{4.45}$$

$$= \frac{2K^2}{i} \tag{4.46}$$

これが $K$ を下回るとき，周波数空間で格子状に値の存在しない領域が生まれることになり立体像に格子状のノイズを生ずる．従って条件として

$$\frac{2K^2}{i} > K \tag{4.47}$$

$$2K > i \tag{4.48}$$

となる．

## 4.4 正射影光線の組み換えによる並列分割計算

上記のシフト正射影光線本章にて提案する手法のコンセプトは次のように説明できる．CGH 面のタイルの大きさが伝搬距離に比べ十分小さい場合，中間波面タイルから一つの CGH タイル

に入射するスペクトルはごく一部である．すなわちある CGH タイルの計算において，実空間で波面として見ると中間面の全波面データを要するが周波数空間で角スペクトルとして見た場合には，一つの CGH タイルの計算に必要なデータはごく一部である．よってある CGH タイルの計算に必要な角スペクトルを直接生成することができるのであれば，各タイルを完全に独立に計算可能になる．したがってタイリングによる大規模ホログラム計算，また並列分散計算を効果的に行うことができる．そして正射影光線-波面変換より ORS 面上での角スペクトルを求める提案手法はそれを可能とする．

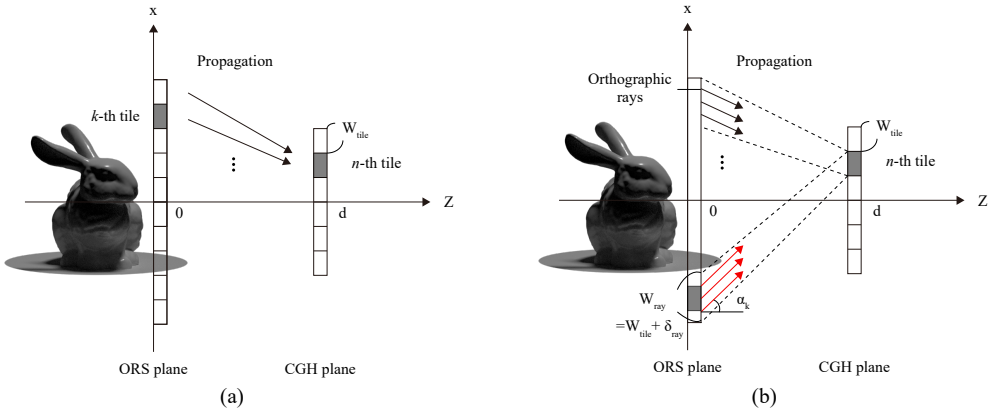



図 4.2　(a) 従来のタイリング計算と比較した (b) 正射影光線-波面変換を用いた大規模 CGH 分割計算のコンセプト

上記のコンセプトは次のように定式化できる．図 4.2 に従来のタイリング計算と比較した提案手法の計算の概念図を示す．はじめに (a) 従来のタイリングを用いた計算法について解説する．CGH 面，中間波面がそれぞれ $N$ 枚，$K$ 枚のタイルに分割されているとする．$n$ 番目の CGH タイル上の波面 $w'_n(x)$ を求める場合，従来のタイリングを用いた手法では以下のように計算される．

$$w'_n(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\sum_{k=0}^{K-1} \mathcal{F}\left[w_k(x)\right] \cdot H_{nk}(f_x; d)\right] \tag{4.49}$$

ただし $w_k(x)$ は $k$ 番目の中間面タイルの波面，$H_{nk}(f_x; z)$ は $n, k$ と伝搬距離 $d$ によって決定される伝搬伝達関数である．つまりこれまでに説明した通り，CGH タイルは全ての中間面タイルからの伝搬の重ね合わせとして計算される．

一方で提案手法は次のように計算される．投影角 $\alpha_m$ に対応する正射影画像を $o_{\alpha_m}(x)$ とする．このときこの正射影画像が $n$ 番目のタイルに与える寄与は次のように書くことができる．

$$o'_{a_m}(x) = o_{a_m}(x) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{x - (nW_{\mathrm{tile}} - d\tan\alpha_m)}{W_{\mathrm{ray}}}\right) \tag{4.50}$$

$W_{\mathrm{tile}}$ はタイルの大きさであり，$W_{\mathrm{ray}}$ は距離 $d$ だけ伝搬した回折によって拡がる光線の幅である．この回折によって拡がり入射する光線を計算に含めなければ，ホログラムとして正確に求め

ることができないことに注意する．正射影画像のサンプリング間隔を $\Delta o$ とするとき，距離 $d$ に対する光線の拡がりは次のように書くことができる．

$$\delta_{\mathrm{ray}} = \frac{\lambda d}{\Delta o} \tag{4.51}$$

ここで光線のサンプリング間隔 $\Delta o$ は人間の目の分解能程度にとる．すなわち人間の目の角度分解能を $\theta_{\mathrm{eye}}$ とするとき

$$\Delta o = d\theta_{\mathrm{eye}} \tag{4.52}$$

従って

$$\delta_{\mathrm{ray}} = \frac{\lambda d}{\Delta o} = \frac{\lambda}{\theta_{\mathrm{eye}}} = \mathrm{const.} \tag{4.53}$$

として計算できるため，光線の拡がり角も次のように定数となる．

$$W_{\mathrm{ray}} = W_{\mathrm{tile}} + \delta_{\mathrm{ray}} = W_{\mathrm{tile}} + \frac{\lambda}{\theta_{\mathrm{eye}}} = \mathrm{const.} \tag{4.54}$$

これらの式から最終的に $n$ 番目の CGH タイルに寄与する正射影光線は

$$o'_{a_m}(x) = o_{a_m}(x) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{x - (nW_{\mathrm{tile}} - d\tan\alpha_m)}{W_{\mathrm{tile}} + \frac{\lambda}{\theta_{\mathrm{eye}}}}\right) \tag{4.55}$$

ここから正射影光線-波面変換の理論に従えば CGH タイル上での波面は次のように求めることができる．

$$w'_n(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\left[\mathcal{F}\left[o'_m(x)\right] \cdot H_{mk}(f_x; d)\right]\right] \tag{4.56}$$

ただし $M$ は正射影光線の枚数，つまり光線方向数である．

$\mathcal{F}\left[o'_m(x)\right]$ の計算の中で正射影光線はタイルに入射する分のみ矩形算数によって制限されている．したがってこの矩形関数内に存在する光線のみフーリエ変換すればよいことになる．元来サンプリングするはずだった正射影画像が 1 タイルの $K$ 倍であったとすると，矩形関数が制限する入力光線の割合は

$$r = \frac{W_{\mathrm{ray}}}{KW_{\mathrm{tile}}} \tag{4.57}$$

$$= \frac{1}{K}\left(1 + \frac{\lambda}{W_{\mathrm{tile}}\theta_{\mathrm{eye}}}\right) \tag{4.58}$$

典型的なパラメータとして

$$\theta_{\mathrm{eye}} = 2.9 \times 10^{-4}\ [\mathrm{rad}] \tag{4.59}$$

$$\lambda = 633\ [\mathrm{nm}] \tag{4.60}$$

を代入すると

$$r = \frac{1}{K}\left(1 + \frac{2.2 \times 10^{-3}}{W_{\mathrm{tile}}}\right) \tag{4.61}$$

したがってタイルの大きさが 2.2 mm より大きければあるタイルを計算するのに必要な光線の本数を $1/K \sim 2/K$ まで減少させることができる．したがって ORS 面上全ての光線を入力する必

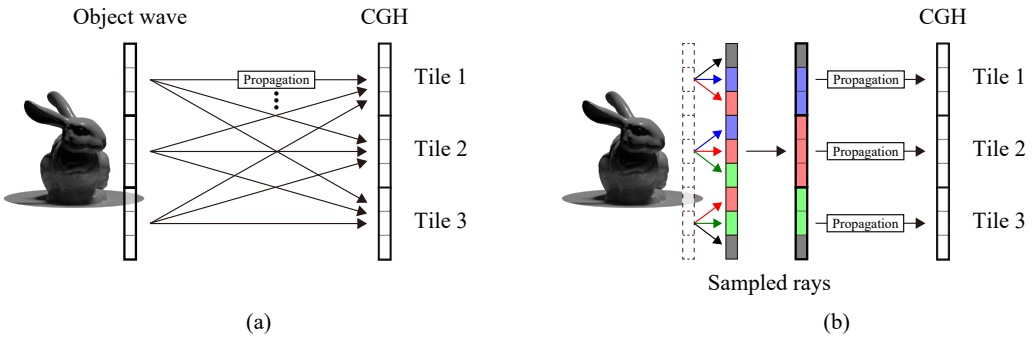



図 4.3　(a) 従来のタイリングを用いた伝搬計算と (b) 提案する光線組み換えによる伝搬計算

要がなく，またそれらに対する巨大なフーリエ変換を計算する必要がなくなるため，結果として効率的に大規模 CGH を分割計算することが可能となる．

図 4.3 に従来のタイリング法と比較した提案法の概念図を示す．タイル間の伝搬に必要な帯域が限られるという特徴は，伝搬伝達関数の帯域制限として解釈できる．つまり正射影光線-波面変換の理論を用いると，各 CGH タイルに必要なのは，そこに収まる帯域のみであると言える．したがって正射影光線-波面変換を用いることで各タイルを完全に独立に計算することが可能となる．すなわちこの手法は正射影光線の再配置によってホログラムタイルとそのサンプル数と同程度の光線データとを一対一に対応させ，大規模なタイルを分割し独立に並列計算することを可能にしているといえる．

## 4.5　計算量の見積もりと計算時間の比較

本項では従来のタイリングを用いた分割計算法と提案手法における計算量の見積もりを行う．また実際に CGH の計算時間を測定しその優位性を示す．

### 4.5.1　計算量の見積もり

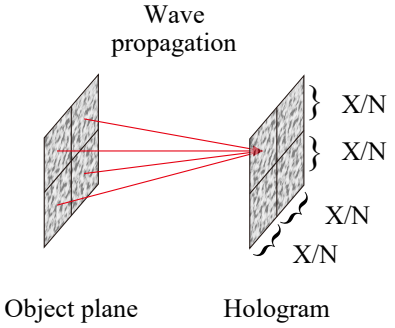



図 4.4　タイリングを用いた CGH 計算の計算量概算

．図 4.4 に示すように，CGH と中間面を $X \times X$ ピクセルとしタイリングによってこれらが $N \times N$ 枚の $X/N \times X/N$ ピクセルを持つタイルに分割されるとする．このとき全ての CGH タイルは独立に計算されるとし，タイル間の伝搬は畳み込みによって達成されるとする．全体の計算量 $C$ を複素乗算の回数により見積もる．プロセス全体の計算量は次のような要素に書き下すことができる．

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \tag{4.62}$$

ここで $C_1$，$C_2$，$C_3$ はそれぞれ中間面での角スペクトル生成，伝達関数との複素乗算，ホログラム面での波面を求める逆フーリエ変換の計算量を示す．

**(1) 従来のタイリング伝搬計算**

第 2 章で示した従来の中間面を用いる CGH 計算の枠組みにおいて，計算量は次のように概算できる．

$$C_{\mathrm{C}} = N^2 \left( C_w + X^2 \log \left( \frac{X}{N} \right) + X^2 \right) + X^2 \log \left( \frac{X}{N} \right) \tag{4.63}$$

$C_w$ は中間面での波面の算出に必要な計算量である．従って従来の計算方法では少なくとも $O\left(N^2 X^2 \log X\right)$ の計算量を必要としタイル数の増加に比例して総計算量が増大することが分かる．

**(2) 提案手法**

次に提案手法による分割 CGH 計算における計算量を同様に算出する．まず仮の定数として，実際に問題となる各ホログラムタイルに対して平均的に FFT を行う正射影画像の枚数を $\overline{A}$ としておく．このとき，タイル化された正射影画像の画素数を $N_o \times N_o$ とし光線方向数を $M \times M$ とすると，$C_1$ は次のように表すことができる．

$$C_1' = \overline{A} \left( \frac{N_o}{N} \right)^2 \log N_o \tag{4.64}$$

ここで $X = N_x N_\theta$ の関係式を用いた．さらに，ほかの 2 つの項に関しても

$$C_2' = \overline{A} \left( \frac{N_o}{N} \right)^2 \tag{4.65}$$

$$C_3' = \left( \frac{X}{N} \right)^2 \log \left( \frac{X}{N} \right) \tag{4.66}$$

として計算することができる．従ってこれらを代入すると提案手法の計算量は

$$C_{\mathrm{ORS}} = \overline{A} N_o^2 \log N_o + \overline{A} N_o^2 + X^2 \log \frac{X}{N} \tag{4.67}$$

最後に $\overline{A}$ に関して最悪のケース，最も計算量が大きいケースを想定すると，全ての方向の正射影画像をフーリエ変換する場合であるから，最大の計算量として

$$C_{\mathrm{ORS}}^{\max} = (M N_o)^2 \log N_o + (M N_o)^2 + X^2 \log \frac{X}{N} \tag{4.68}$$

$$= X^2 \log N_o + X^2 + X^2 \log \frac{X}{N} \tag{4.69}$$

すなわち最大でも $O\left(X^2 \log X\right)$ の計算量で CGH を生成することが可能であり，タイル数に関わらず計算を行うことができる．従って提案手法により大規模な CGH を分割し入力データもそれに従い独立に計算する可能であることが分かる．この手法は並列化を行った際特に効果を発揮する．

### 4.5.2 計算時間の比較

次に CGH 分割数と計算時間の関係を，従来の RS 面計算手法と提案手法で比較するここで，本手法が大規模 CGH の分割並列計算に有用であることを示す．CGH，RS 面ともに画素数は $16K \times 16K$ ，角度サンプリング数は $16 \times 16$ とした．波長 633 nm, ピクセルピッチ 0.8 µm とした．回折角は ±23.3 deg である．伝搬距離は 60 mm とした．概念図を図 4.5 に示す．レンダリングは Blender Cycles により行い，レンダリング時間も計算時間に含める．計算環境は前章と同様である．

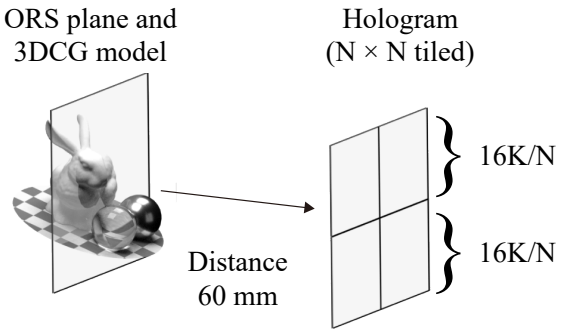



図 4.5 従来の RS 面と ORS 面における分割計算時間の比較結果

計算時間の測定結果を図 4.6 に，再生シミュレーション結果を図 4.7 に示す．計算量見積もりと同様の傾向を示し，従来手法ではタイル数の増加に伴い計算時間が爆発的に増大している．一方で提案手法では分割数によらず計算時間が 12 分を上回ることはない．従って本手法は CGH の分割並列計算を可能にすることが示された．

### 4.5.3 分割計算とノイズ比の評価

本章で提案するタイリングが再生像に与える影響を再生シミュレーションにより評価する．図 3.9 と同様，に USAF テストチャートの立体像を再生する CGH を提案手法を用いて計算する．CGH 画素数を $2048 \times 2048$ ピクセル，正射影画像画素数を $128 \times 128$ ピクセル，光線方向数を $16 \times 16$ とした．波長を 532 nm，ピクセルピッチを 0.8 µm とした．物体-CGH 面距離は 2.46 mm とし ORS 面は物体面上に配置する．また CGH 面を分割なし，$2 \times 2$, $4 \times 4$ 分割し計算する．分割なしで計算した CGH の再生像を基準として，分割した CGH の再生像の RMSE(Root mean square error) を評価する．再生像の強度は最大値が 1 となるよう規格化されている．再生像を図 4.8 に，RMSE を表 4.1 に示す．分割計算により徐々に RMSE が上昇し

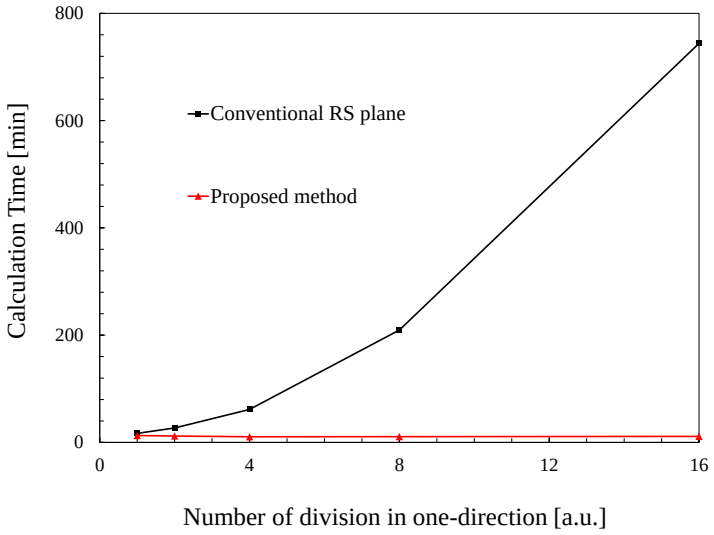



図 4.6　従来の RS 面と ORS 面における分割計算時間の比較結果

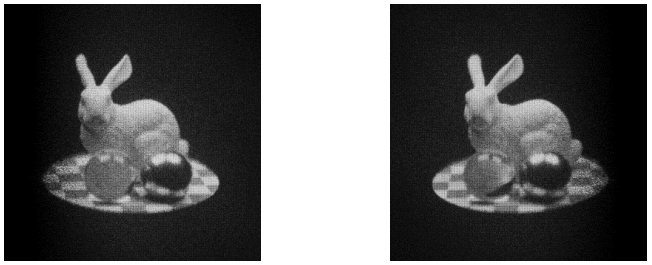



図 4.7　ORS 面を用いた CGH からの (a) 左と (b) 右から観察した立体像再生シミュレーション結果

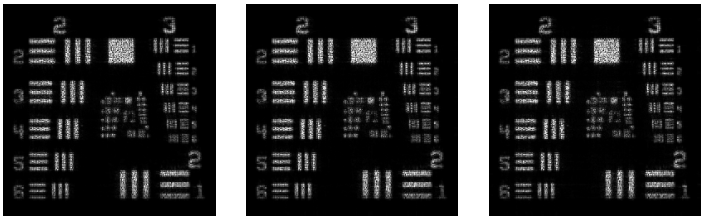
ているが $512 \times 512$ ピクセルのタイルまで分割しても 0.5% 程度のノイズで分割計算を行えていることが確認できる．

表 4.1　CGH の分割計算と RMSE の関係

| | $2 \times 2$ 分割 | $4 \times 4$ 分割 |
|---|---|---|
| RMSE | 0.0030 | 0.0052 |

## 4.6　実験結果：大規模 CGH の生成と光学再生

本項では実際に提案手法により大規模な CGH を計算し，干渉縞を高品質なバイナリ振幅マスクとして出力する．またそのホログラムを用いた光学再生により CGH としてはこれまでにない



(a) (b) (c)

図 4.8 (a) タイリングを用いず計算した結果と (b)2 × 2(c)4 × 4 分割し計算した CGH の再構成画像

高品質な立体像を広い視野角で観察できることを示す.



(a) (b)

図 4.9 CGH 計算に利用した (a) ウィスキー，(b) クマとグラスの 3DCG シーン

今回計算する CGH には図 4.9 のような 3DCG ソフトウェア Blender を用いて作成した (1) ウィスキーとグラスのシーン，(2) クマのぬいぐるみのシーンを用いる．これらは布や紙による単純な散乱，ウィスキー瓶と 2 つのグラスによる反射・透過・屈折，氷による散乱を含む透過・屈折，アイスペールの金属による異方性反射シェーダー等，多くの反射・透過特性を含むシーンである．

計算する CGH のパラメータを表 4.2 に示す．また，ウィスキー CGH の ORS 面，ホログラム面の位置関係を図 4.10 に示す．クマの場合も伝搬距離以外は同様.

表 4.2 大規模 CGH の分割計算に用いるパラメータ

| | |
|---|---|
| CGH 面画素数 | $128K \times 128K$ |
| ORS 面画素数 | $128K \times 128K$ |
| タイル数 | $8 \times 8$ |
| ピクセルピッチ | 0.8 µm |

ホログラムのサイズは 105 mm 四方であり，立体像も同程度の大きさである．ORS 面は立

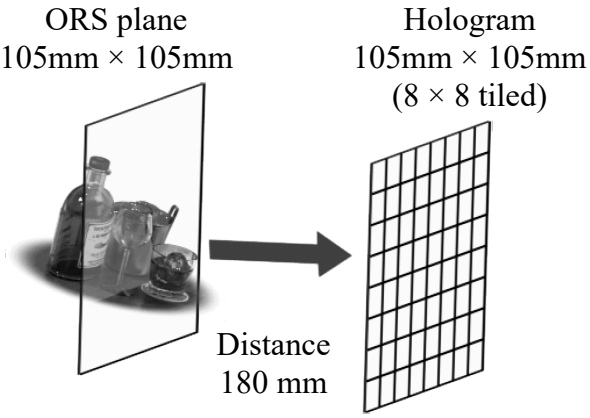



図 4.10　ウィスキー CGH の計算における物体と CGH の位置関係

体像の中心に設置し，ホログラム面との距離は (1)180 mm，(2)100 mm とした．正射影画像は 1024 × 1024 ピクセルの画像を 64 × 64 の異なる角度からレンダリングした．単純な拡散物体として表現可能であると考えられる物体，(1) ではラベルの紙，(2) ではクマの布地・板に関しては高速化のためにテクスチャを張り付けレンダリングした．

計算した干渉縞データをバイナリ化し，関西大学デジタルホロスタジオのレーザーリソグラフィ装置（Heidelberg Instruments DWL 66+）により実物のホログラムとして出力する．この際に一度干渉縞データをバイナリビットマップデータから CAD データに変換，それをガラス基板上に印刷する．図 4.11 が実際のバイナリ振幅マスクの写真である．



図 4.11　ガラス基板上に印刷したバイナリ振幅マスク

このようにして作成したホログラムをレーザー光を光源とする球面波によって照明すること

で，虚像として裸眼で立体像を観察することができる．ウィスキー，またクマとワイングラスの光学再生像を下図に示す．

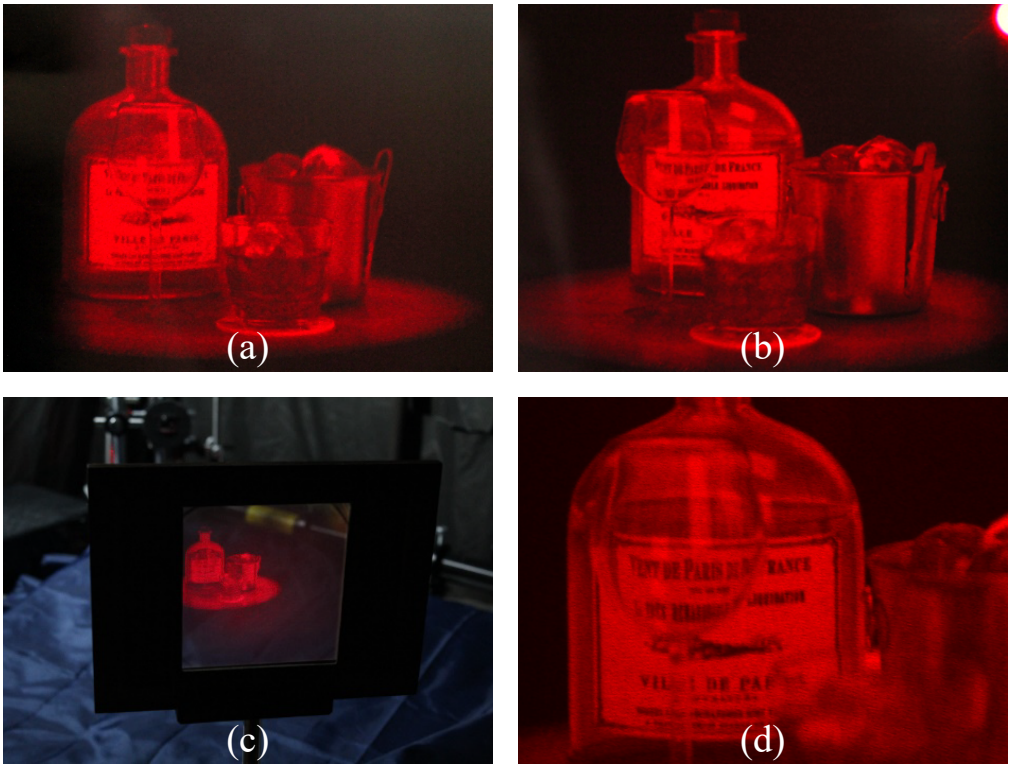



図 4.12　(a) 左 (b) 右 (c) 遠く (d) 近くから撮影したウィスキー CGH 光学再生像

(1) について，透過・屈折の効果によって，ワイングラスを通して覗いたウィスキーボトルのラベルが歪んでいることが分かる．また同様の透過・屈折を含むシーンでも氷では散乱と形の複雑さから異なった透明感が見て取れる．また金属は異方性反射物体として認識できる．

立体像表示における反射・透過特性表現において 2 次元画像と比較した場合の大きな差として，見る角度を変えた際に反射・透過特性の違いによって物体の見え方を変える必要があるという特徴がある．3DCG におけるレンダリング手法は単純にテクスチャを張り付けるだけのものから物理ベースのレンダリングまで幅広く存在するが，その差が立体像表示に与える影響は二次元画像とは異なる．二次元画像としてのレンダリングでは現実とほとんど変わりなく見えるようなレンダリング手法でも，立体像として観察すると全く反射・透過特性が表現されないということが起こりうる．例えば金属を表現する際に，一方向から見た金属のテクスチャを物体に貼るだけでは 3 次元表示においては金属のテクスチャが張られた拡散物体としか表現されず，その反射・透過特性を損なう．すなわち何らかの手法で物体から出る光波を角度ごとにサンプリングしなければならない．

提案手法ではこの角度による見え方の違いを，様々な角度の光線をサンプリングすることで達

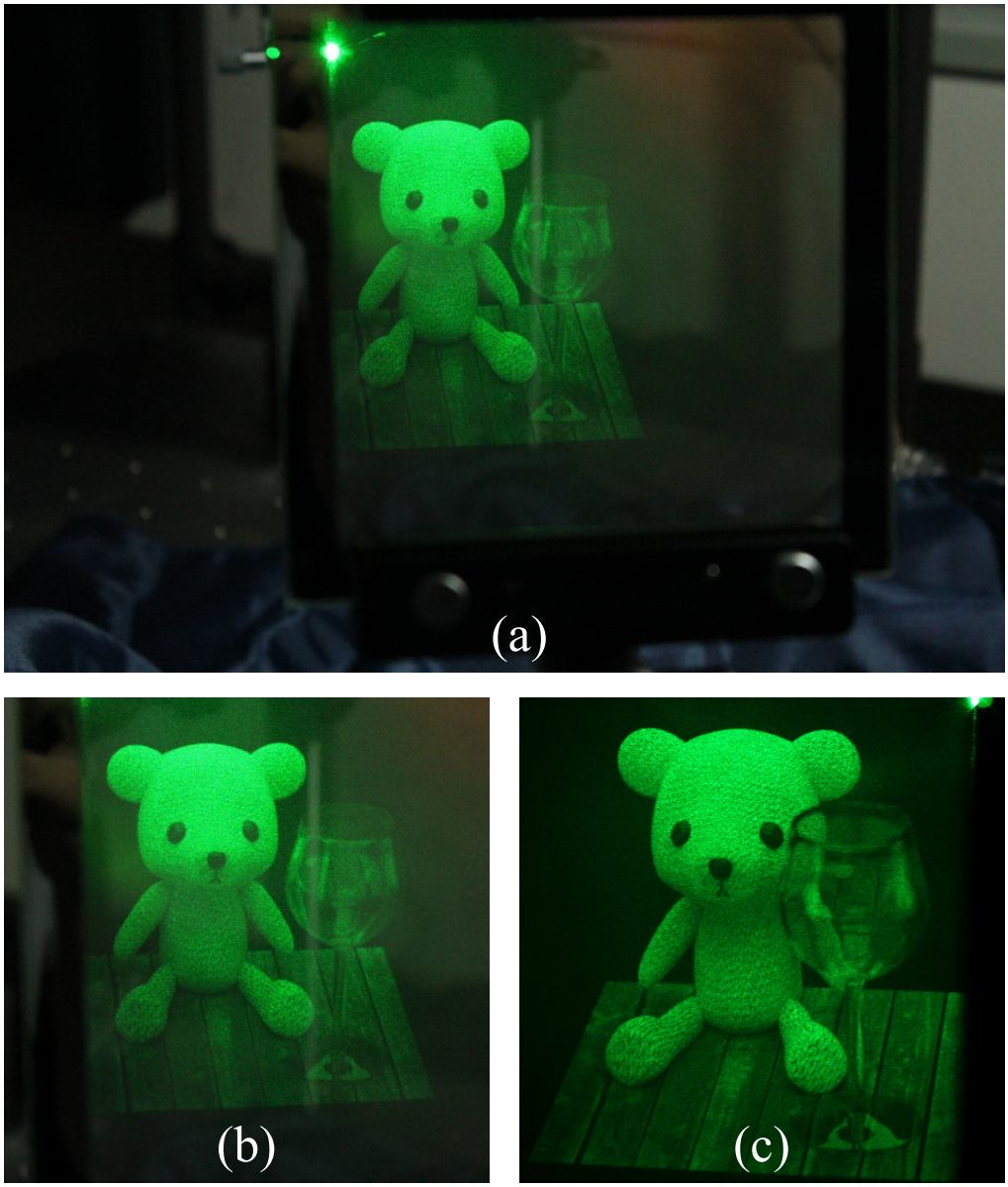



図 4.13　(a) 左 (b) 右 (c) 正面から撮影したクマとワイングラス CGH 光学再生像

成している．光線を用いることの利点はこれまで長く 3DCG 等の分野で培われてきた高度な反射・透過特性表現をそのまま波面計算に適用できる点であり，正射影光線サンプリング面上でまとめて光線をサンプリングすることで，物体どうしのオクルージョン処理も同時に達成することができる．本章では視点移動によって見え方が大きく変化する反射・透過・屈折物体においては特に時間をかけ BSDF から計算し，立体像観察での高い写実性を目標としている．ヘッドアップディスプレイなどの装置を身に着けることなく両裸眼で立体像を観察することを前提とする場

合，視域を確保するためにある程度ホログラムを大きく作る必要がある．その際に本章で提案した大規模なホログラムの計算は有用である．

また再生像に粒子状のノイズが確認できる．これはスペックルノイズノイズと呼ばれるノイズであり，高コヒーレンスの再生照明光を用いていることに由来するものである [14]．スペックルノイズの粒子径は観察時の実効的な開口数（NA）が決定し，NA が小さくなるほどスペックルノイズは荒くなる．スペックルノイズの低減法は様々に提案されており，過去に RS 面を用いた手法においても時分割方式にて低減を実現する手法が提案されている [73]．

## 4.7 視点移動に伴う視覚効果の付与

本項では正射影光線-波面変換を用いた CGH 計算手法を応用し，視点移動に伴う視覚効果を伴う立体像を再生する CGH 計算手法を提案する．光線サンプリングの段階で視点移動に伴う物体の移動などの視覚効果を加えその光線から波面を取得することでこれを達成することが可能となる．これまでにも角度ごとに異なる立体像を感光材料に多重露光することで物体の移動を達成する手法 [28] やホログラフィック・ステレオグラムを用いた手法 [87] は提案されている．本手法では計算のみでその達成が可能であり，加えて通常の正射影光線-波面変換と全く変わらないフローで計算可能である．

光線サンプリングの段階で物体に動きを加えた光線を取得する．このように取得した光線情報から前述と全く同様に CGH を計算すると，再生した立体像でも視点移動に伴い動画が再生されるような効果を付与することが可能となる．立体像の動きに限らず，観察する角度によって全く異なる立体像の再生や，取得した正射影画像に発光効果などの画像処理を加えることで，視覚効果を持った立体像の再生も可能になる．

水平方向の視点移動に伴う動きを加える場合両眼視差に矛盾が生じるため，像の歪みや不整合が生じる．しかし垂直方向の視点移動に伴う動きであれば，自然な動きを表現することができる．点光源法などではこのような視覚効果の付与には角度ごとに異なるホログラムを計算し，帯域制限を加えて多重するなどの処理が必要になる．本手法では取得する光線数は変化しないため，光線レンダリングに伴う計算時間は変化せず，また CGH 計算のフローも通常の正射影光線-波面変換を用いた計算と全く同様であるため，簡便に視点移動に伴う特殊効果を付与することが可能である．

実証実験として 3DCG ソフトウェア Blender を用いて作成した図 4.14 のようなダイアモンドのシーンを用いて CGH を計算する．視点移動に伴い，ダイアモンドが回転・転倒する効果を加えた．ダイアモンドによる複雑な透過・屈折・反射に加え，波長分散の効果も加えている．計算する CGH のパラメータを表 4.3 に示す．

ホログラムのサイズは 150 mm × 100 mm であり ORS 面は 150 mm × 150 mm である．正射影 RS 面は立体像の中心に設置し，ホログラム面との距離は 200 mm とした．正射影画像は 1024 × 1024 ピクセルの画像を 64 × 64 の異なる角度からレンダリングした．計算した干渉縞データをバイナリ化し振幅マスクとして印刷した．

このようにして作成したホログラムを He-Ne レーザーを光源とする球面波によって照明する

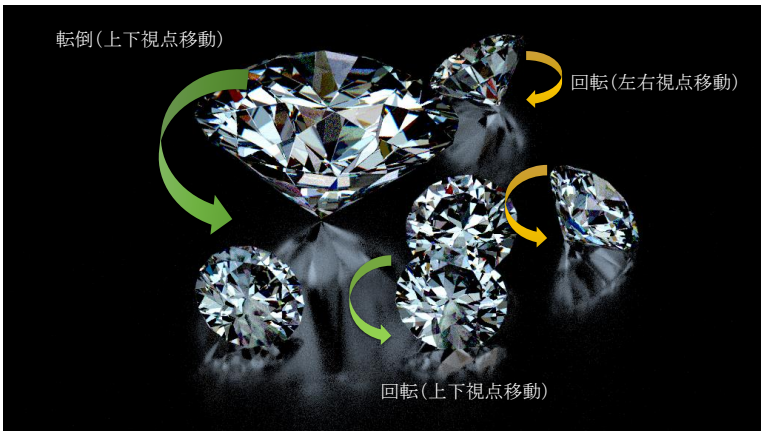



図 4.14　視覚効果を付与した CGH に用いる 3DCG シーン

表 4.3　視覚効果を付与した CGH 計算に用いるパラメータ

| | |
|---|---|
| CGH 面画素数 | $192K \times 128K$ |
| ORS 面画素数 | $128K \times 128K$ |
| 波長 | 633 nm |
| ピクセルピッチ | 0.8 µm |

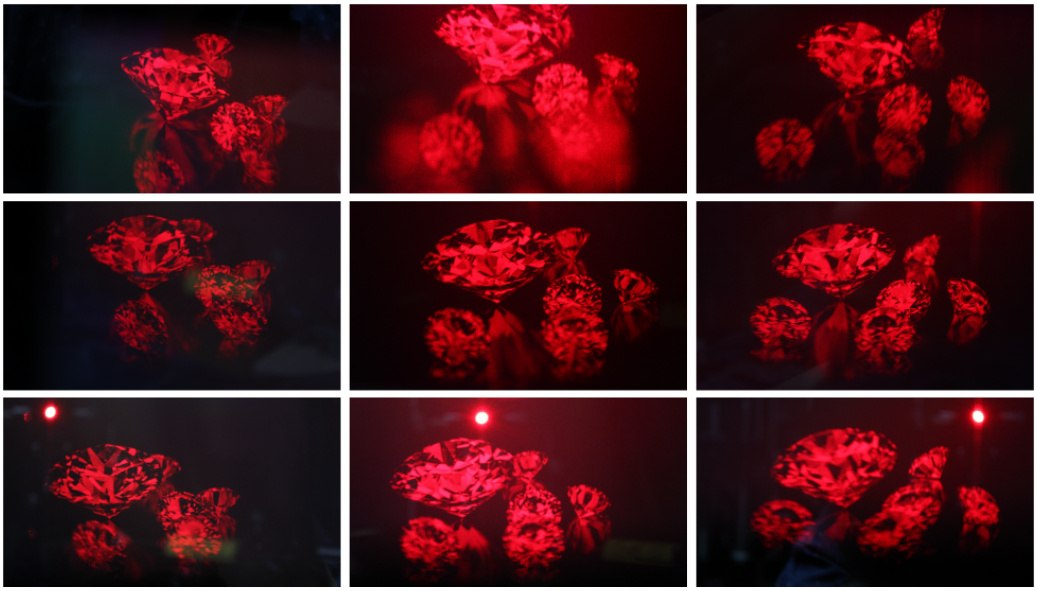


図 4.15　視覚効果を付与した CGH の光学再生像

ことで，虚像として裸眼で立体像を観察することができる．様々な視点から観察した再生像の写真を図 4.15 に示す．ダイアモンドの複雑な透過・屈折に加え，上下左右の視点移動によりダイアモンドが回転・転倒することで，光のきらめきをより強調して表現できている．本項にて提案した手法を応用することで，限られたフレーム数ではあるが 3D 動画像のデモンストレーションが可能となる．将来的に大規模ホログラフィック・ディスプレイの電子的な動画表示が可能となった際にどのような立体像が提示可能となるか，その将来像を示す意味で有用な手法である．

## 4.8 実物体から生成した点群モデルを用いた CGH 計算

本項では正射影光線-波面変換により，実物体から生成した点群モデルを用いて CGH を計算する手法について述べ，その光学再生を実証する．提案手法を用いて実物体のホログラムを計算する場合，直接ここの手法を用いると 10,000 枚以上の正射影画像が必要である．物体の光線を直接画像として取得する試みは過去いくつかの研究で行われている [71] が，これらの手法ではやはり膨大な視点数の画像を要する．本項では新たな可能性の検討のため，点群 3D モデルを六角形に配置された 7 台のカメラによってキャプチャされた画像から生成し [88]，正射影画像をモデルから再キャプチャする方式により，小数の画像から実物体の CGH を計算する方式について検討する．

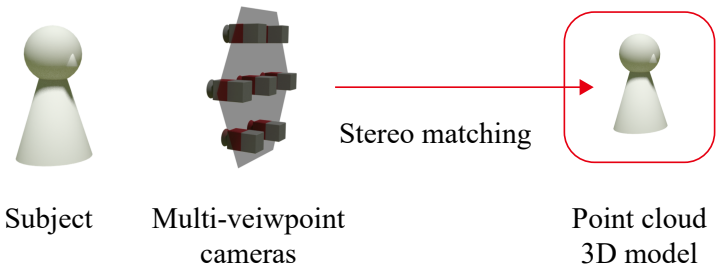



図 4.16 カメラアレイを用いた実物体の 3D 点群データ取得概念図

ここで用いるカメラアレイシステムは図 4.16 に示すように 6 台のカメラが正六角形パターンで配置され，7 台目が六角形の中心に設置される． この配置により水平方向だけでなく垂直方向の 3D 情報もキャプチャ可能である．奥行き情報を多視点画像を使用したステレオマッチングによって推定し，3D 点群モデルを全てのカメラから抽出されたピクセルの Back Propagation により生成される． 各視点のカメラの 3D 点群モデルにおける信頼性の低い領域は他のカメラからキャプチャされた情報を使用して補間されることになる．

実験では等身大の人間を再構成する $128K \times 256K$ のホログラムを計算した．はじめにカメラアレイシステムを使用して実際の人間の 3D モデルを生成した．得られた 3D モデルはホログラム面から 600 mm 離れた位置に仮想的に配置され，この配置のもとで正射影画像を $128 \times 128$ の視点から取得する．最後に正射影光線-波面変換を使用して波面を計算する．. 水平および垂直ピクセルピッチはそれぞれ 0.8 µm および 0.4 µm であり，波長は再生照明光に使用されるレーザー

の波長に合わせ 526 nm に設定した．最大回折角は 19.2deg および 41.1deg となる．ホログラムと立体像のサイズはそれぞれ 105 mm × 105 mm と 500 mm × 500 mm となる．

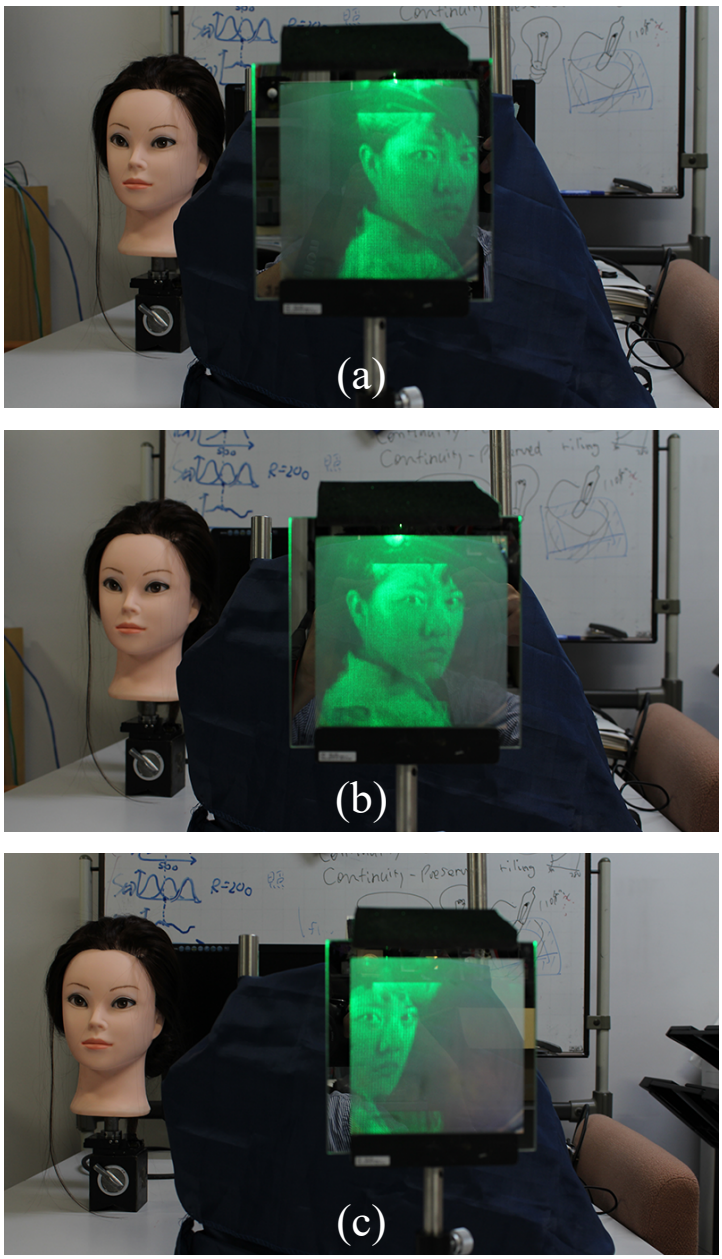



図 4.17　(a) 左 (b) 正面 (c) 右から撮影した実物体を用いた CGH 光学再生像

計算したホログラムの光学再生像を図 4.17 に示す．この結果から本手法による実物体からの立体像計算・再構成が可能であることが分かる．実際のサイズと同じサイズのら 600 mm の人間の頭部マネキンと比較すると，立体像はほぼ同じサイズで再構築された．一方で実際に観察した

際には実物大の人間として知覚されないという問題も生じている．これは比較対象のない単一の立体像のみが空中に浮いているようなデザインであり，大きさにおける手がかりが少ないためそのように知覚されると考えられる．

## 4.9 本章の結論

この章では光線波面変換の原理に加え，あるタイルの波面計算に寄与するような正射影光線成分を用いることで 10 ギガピクセルを超える大規模 CGH を効果的に分割計算する手法を提案した．従来の RS 面を用いた計算法で上記のようなホログラムを計算する場合，膨大な光線のサンプリングと分割したタイル間の全組み合わせの伝搬計算が必要である．一方提案手法では回折によって入射する光線のみを取り扱うことで，各 CGH タイルとその波面の計算に必要な光線を一対一に対応づけることが可能となる．この計算法が従来の RS 面を用いた計算と比較し大規模 CGH の計算において計算量的に有利であることを理論的に示し，計算時間の比較からその優位性を実証した．さらに実験としてこの手法を用いて計算した $128K \times 128K$ ピクセルの干渉縞を振幅マスクとして実装し，レーザー光によって照明することで写実的かつ大型の立体像を深い奥行きに再生可能であることを光学実験により実証した．さらに本手法が実物体の立体像を計算可能であることを，カメラアレイシステムにより人間の 3D モデルを取得しそこから立体像を計算することで実証した．

# 第 5 章

# 相互オクルージョン処理を用いた広深度 CGH 計算法

前章までに述べた正射影光線-波面変換を用いる CGH 計算により，CGH 面深部の仮想物体の CGH を写実性や分解能を犠牲にせずに高速に合成することが可能となった．しかし分解能劣化を防ぐためには物体と ORS 面が近接している必要があるため，単一の ORS 面では深い距離範囲に連続的に分布するような物体の再生は不可能である．．したがって最終目標に掲げるディスプレイの奥幅広い奥行きに渡って高分解能の立体像を再生するような CGH の計算には上記に加え新たな計算法の工夫が必要となる．本章では単一の ORS 面のみでは実現不可能な幅広い奥行きを持つ立体像の計算を，複数の ORS 面とその間の相互オクルージョン処理を用いて実現する手法について述べる．

---

## 5.1　相互オクルージョン処理における先行研究

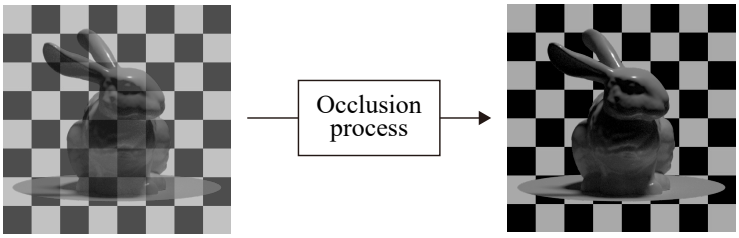



図 5.1　相互オクルージョン処理の効果

図 5.1 のように手前の物体で奥の物体を隠す処理を隠面消去処理（オクルージョン処理）と呼ぶ．単一の物体における陰面消去処理を自己オクルージョン処理，複数の物体間における陰面消去処理を相互オクルージョンという．この処理は 3DCG 等の光線に基づく計算ではごく一般的なテクニックであるが，ホログラフィの波面に基づく計算では回折の影響から問題はより複雑化する．

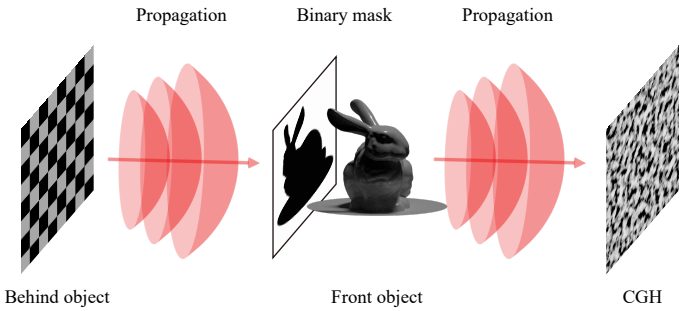



図 5.2　シルエット法を用いた相互オクルージョン処理

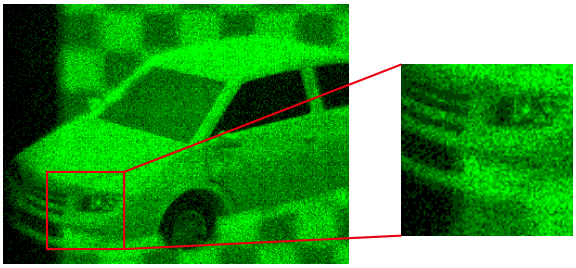


図 5.3　オクルージョンエラーの例

CGH 計算における相互オクルージョン処理として代表的なものが図 5.2 に示すようなシルエット法と呼ばれる処理である [49]．この手法では後方の物体光波を一度手前の物体の深度まで伝搬する．そして手前の物体のシルエット型のマスクを乗算し，手前の物体の光波と合成した上で CGH 面まで再度伝搬することで相互オクルージョンを達成している．この手法の問題として観察の角度を変化させるとオクルージョン処理の正確性が失われ，図 5.3 手前の物体のエッジにて奥の物体が透けて見えるオクルージョンエラーと呼ばれる現象が生じる点が挙げられる．これを解決すべく提案されたのがスイッチバック法と呼ばれる手法である [50]．この手法ではバビネの原理と呼ばれる光波合成の性質を応用し，ポリゴンごとにオクルージョン処理を施すことでオクルージョンエラーを防いでいる．また近年ではより厳密なオクルージョンを施す手法についても提案されている [54]．

一方 RS 面を用いた CGH 計算においても，幅広い深度の立体像を計算するためには複数の RS 面を設置しその間で相互オクルージョン処理を施す必要があることが知られている [72]．

従来の RS 面を複数用いた相互オクルージョン処理は既に提案されており，図 5.5 のようなフローで処理を行う．従来はオクルージョン処理を波面から光線への変換を用いて実装されていた．要素画像をフーリエ変換して波面を得ることができるように，波面の一部を切り出して逆フーリエ変換すれば要素画像に相当するスペクトルを得ることができる．この性質を利用し，奥の RS 面から手前の RS 面まで一度伝搬させ，それをもう一度光線空間に移す．その上で手前の RS 面の光線によりオクルージョン処理を行い，もう一度波面に戻してホログラム面まで伝搬させることで相互オクルージョン処理を実現する．

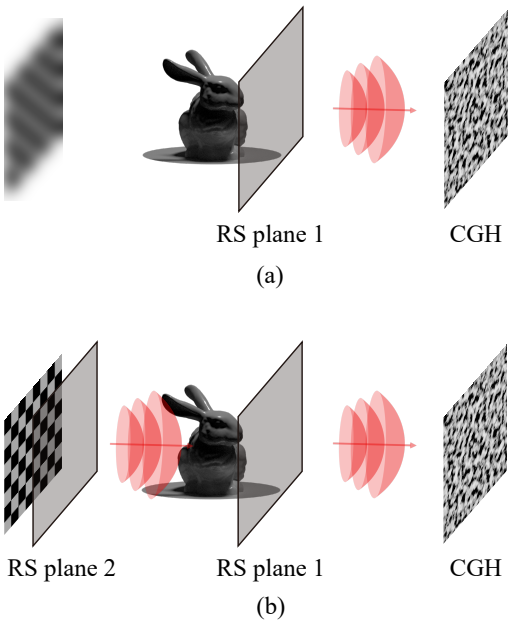



図 5.4　(a) 単一の RS 面による深度の限界と (b) 複数 ORS 面の設置による広深度表現

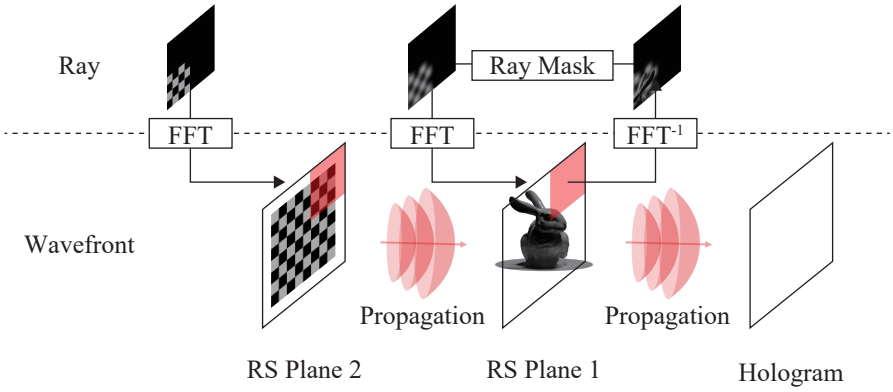



図 5.5　従来の RS 面を用いた相互オクルージョン処理のフロー

## 5.2　正射影光線-波面相互変換における相互オクルージョン処理

この章では複数の ORS 面とその間の相互オクルージョン処理を実現することで広い深度の立体像を計算する手法を提案する．提案手法では上記の RS 面を用いた CGH 計算における相互オクルージョン処理と等価な計算を，正射影画像を用いた計算法に実装する．提案手法のフローを図 5.6 に示す．RS 面を 2 枚用いる場合，始めに奥側の RS 面 2 から手前の RS 面 1 に対して波面の伝搬計算をする．そして RS 面 2 の上で波面を光線に変換し，正射影画像によるマスキングを行う．この状態で再度光線波面変換を行い，RS 面 1 からホログラム面まで波面の伝搬計算を

行う．正射影を用いた高速計算法では，この一連の処理は各正射影画像に対して独立に実行できる．この処理は従来提案されているシルエット法と呼ばれる相互オクルージョン処理手法を角度ごとに適用することに対応している．波面を正射影成分に分解することでこの処理が可能となる．その結果を並べたものはホログラム面における周波数空間上の波面に相当するため，全体を逆フーリエ変換することでホログラム面上の波面を得ることができる．

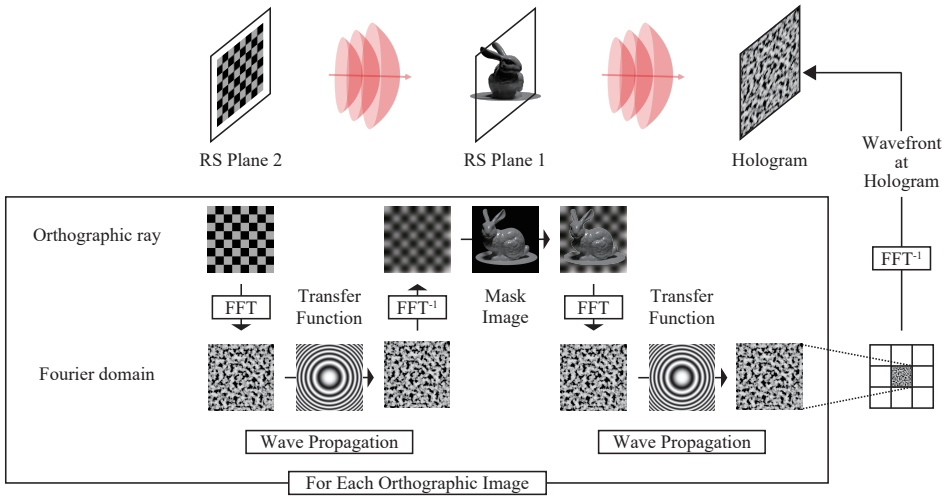



図 5.6　ORS 面を用いた相互オクルージョン処理のフロー

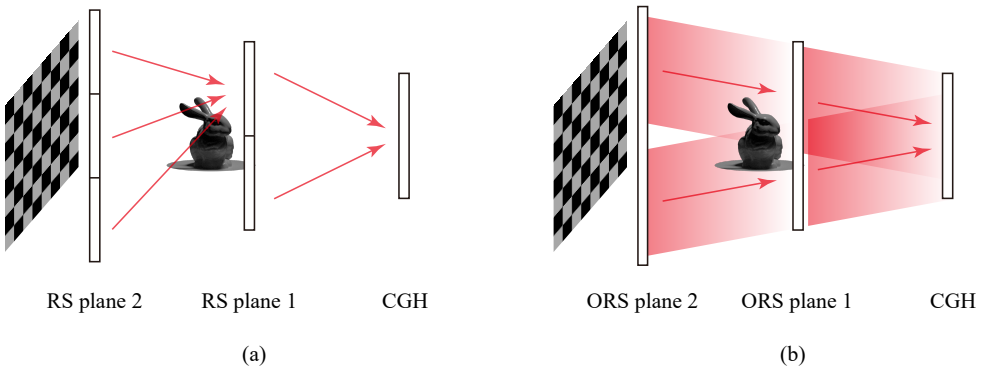



図 5.7　(a) 従来の RS 面を用いた相互オクルージョン処理と (b) 提案手法の比較

従来の RS 面を用いた計算と異なる点として，各方向の光線ごとに独立に計算できる点が挙げられる．従来では全体の波面を生成してから伝搬し，そこでパースペクティブな光線に変換しオクルージョン処理を行っていた．それに対し提案手法では正射影画像ごとに独立に計算できるため，メモリを大幅に削減可能でありまた並列化も容易である．本研究ではオクルージョンを光線空間上で処理しため，シンプルかつ高速に処理を行うことが可能となる．

また大型の立体像を計算する際における従来手法と提案手法の比較を図 5.7 に示す．従来は大

型の物体を計算する際には RS 面を分割し，タイリングにより伝搬計算を行っていた．第 2 章で述べた通り，この全タイルの組み合わせに対する伝搬計算が面数の増加によって指数関数的に増大することが問題であった．一方本手法では，波面を正射影光線に分解することで物体面上のタイルという概念を消失させることを可能にしている．提案手法により面数に比例する程度の計算量で相互オクルージョン処理の実現を達成している．

## 5.3 実験結果：広深度 CGH の生成と光学再生

ここでは上記の手法を用い実際に複数 ORS 面を用いた CGH の計算を行う．始めに従来手法と比較した計算時間の測定を行い，提案手法の優位性を示す．次に再生シミュレーション結果と光学再生により，幅広い奥行きに立体像が再生可能であることを実証する．

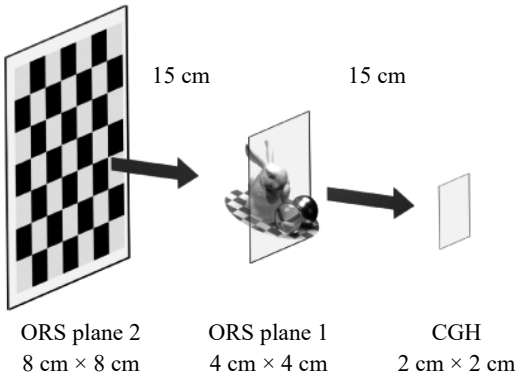



図 5.8　計算する CGH と立体像の位置関係

図 5.8 に示すような立体像のる CGH を計算する．ホログラムは $16K \times 16K$ ピクセル，ピクセルピッチは 1.2 µm とした．2 枚の ORS 面を奥行き位置 150 mm のスタンフォードバニー，300 mm のチェッカーボードそれぞれの位置に配置する．計算時間の比較を表 5.1 従来の RS 面を用いた相互オクルージョン処理でこのホログラムを計算した場合，421 分を要した．これに対し，提案手法では約 33 分と，約 13 倍の高速化が達成できていることが分かる．さらに 3 章の分割計算と GPU（GeForce GTX 980）を用いたフーリエ変換を適用することで，90 秒で計算することができた．64 分割して計算している．今回はすべてのタイルを順に計算していたが，このタイルを全て並列に計算することができれば約 1.5 秒で全計算が完了することになる．

表 5.1　複数の RS 面と相互オクルージョン処理を用いた CGH 計算時間測定

| | 従来法 (CPU のみ) | 提案手法 (CPU のみ) | 提案手法 (GPU 利用) |
|---|---|---|---|
| 計算時間 | 421 min | 35 min | 1.5 min |

図 5.9 は，計算したホログラムから再生シミュレーションを行ったものであり，それぞれの像の位置にピントを合わせている．この図から異なる奥行きの立体像がオクルージョンの効果を含めて再生できていることがわかる．

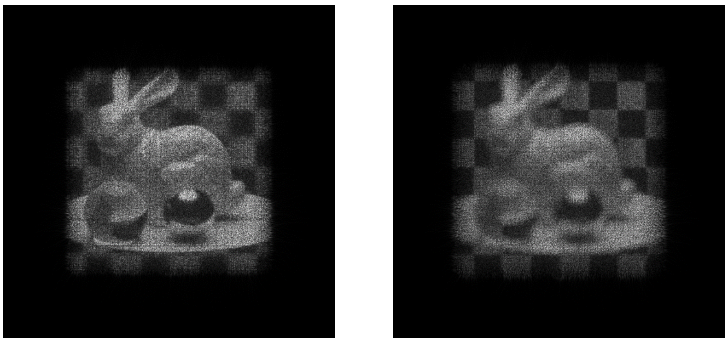



図 5.9 相互オクルージョン処理を用いた CGH の再生シミュレーション結果．(a) 手前 (b) 奥の面にピントを合わせた．

次に光学実験によるオクルージョン効果の実証を行う．図 5.10(a) のような CGH を計算する．奥行き幅 80 mm 程度の 3DCG シーンを用い，手前のネズミの位置に RS 面 1，奥のネコの位置に RS 面 2 を設置した．RS 面 1 はホログラム面から 140 mm の距離に設定し，RS 面 2 は RS 面 1 から 40 mm 奥に離れた場所に設置した．計算に用いたパラメータを表 5.2 に示す．

表 5.2 相互オクルージョン処理を用いた CGH 計算に用いるパラメータ

| | |
|---|---|
| CGH 画素数 | $16K \times 16K$ |
| ORS 面 1 画素数 | $32K \times 32K$ |
| ORS 面 2 画素数 | $16K \times 16K$ |
| 波長 | 532 nm |
| ピクセルピッチ | 1.2 µm |

第 3 章にて説明した光学顕微鏡を用いた CGH プリンタを用いて印刷し，レーザー光にて照明することで光学再生像を確認した．上図 (b) にネコにピントを合わせた光学再生像を，上図 (c) にネズミにピントを合わせた光学再生像を示す．奥行き分布を持った立体像が良好に再生されていること，手前側のネズミの像によって奥側の床が適切に遮蔽されていることが確認された．

## 5.4 大規模空間立体像の計算と再生

本項では提案手法により大規模空間立体像の計算が可能であることを実験により示す．第 2 章にて説明した通り，CGH の奥深くに広い奥行き幅で空間全体を満たすような立体像を計算する場合，レイヤー数に応じて計算量が爆発的に増大する．

ディスプレイの奥深くに大きな空間が広がる表現は波面を再生するホログラフィに特異な表現であるが，実際のところ点光源・ポリゴン法・光線に基づく手法どの手法でもその計算は膨大な計算量の問題から困難を伴う．点光源法・ポリゴン法において FFT を利用するため物体近くに中間波面を用いるとする．例えば 1.0 m × 1.0 m の波面を 1.0 µm でサンプリングする場合，

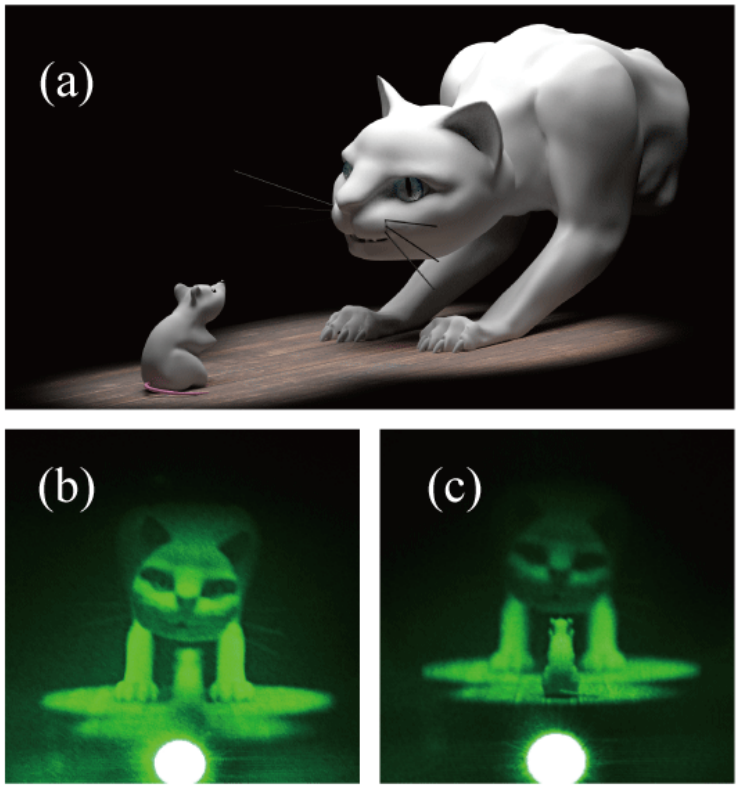



図 5.10 (a) ホログラム生成に用いた 3DCG シーン，(b) ネコにピントを合わせた光学再生像，(c) ネズミにピントを合わせた光学再生像

$1000K \times 1000K$ の物体波面から $100K \times 100K$ の CGH 面への伝搬計算が必要になる．

一方で物体波面のサイズに対して CGH 面が小さい場合には，物体波面の中に CGH に入射しない成分が多く含まれることは明らかである．正射影光線-波面変換を用いることで，光線空間でそのような余剰な成分を排除することが可能になる．そして CGH に回折で入射する光線のみ利用して計算を行うことで，結果的に $100K \times 100K$ の物体波面から $100K \times 100K$ の CGH 面までの伝搬と同等の計算量で CGH を生成することが可能になる．また CGH 面を分割して並列計算した場合この効果はより顕著になる．従来の計算法では分割数に従ってトータルの計算量が増加するが，提案手法を用いることで分割数によらず一定の計算量で計算可能であるため，効率的な並列化が可能になる．

実験では図 5.11 のような室内の縮尺約 50% の 3DCG モデルを制作し，それを用いて CGH を計算した．105 mm × 105 mm の CGH の奥 200 mm に 1 枚目の ORS 面を，1000 mm 奥に 2 枚目の ORS 面を配置する．生成した CGH のパラメータを表 5.3 に示す．

正射影画像のレンダラーとして Blender Cycles を利用した．CGH 計算の際レンダリングした正射影画像群を一旦ディスク上に保存し，伝搬計算時には再度それらをメモリ上に読み込むことで計算する．計算環境として CPU に Intel Core i7 4790K を，RAM32GB，GPU に GeForce GTX 980 を用いた．レンダリング時間に 38 時間，波面伝搬計算時間に 6 時間を要した．計算




図 5.11　CGH 計算に用いる CG シーン

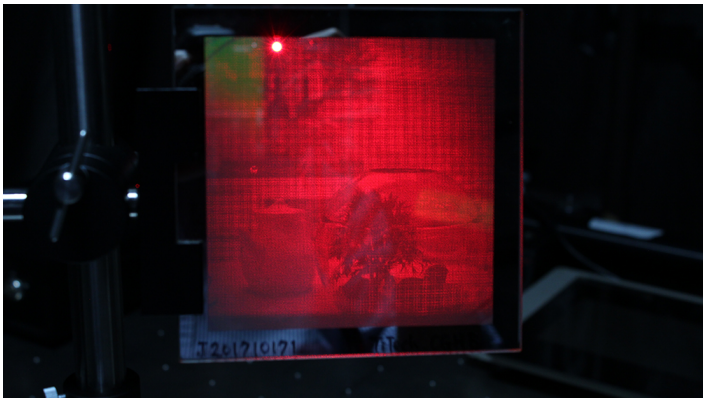
表 5.3　室内の CGH 計算に用いたパラメータ

| | |
|---|---|
| CGH 面画素数 | $128K \times 128K$ |
| CGH 分割数 | $64 \times 64$ |
| 波長 | 633 nm |
| ピクセルピッチ | 0.8 µm |
| 視野角 | ±23.3 deg |
| 伝搬距離（手前） | 200 mm |
| 正射影画像画素数（手前） | $2048 \times 2048$ |
| 正射影画像視点数（手前） | $64 \times 32$ |
| 伝搬距離（奥） | 1000 mm |
| 正射影画像画素数（奥） | $1024 \times 1024$ |
| 正射影画像視点数（奥） | $128 \times 64$ |

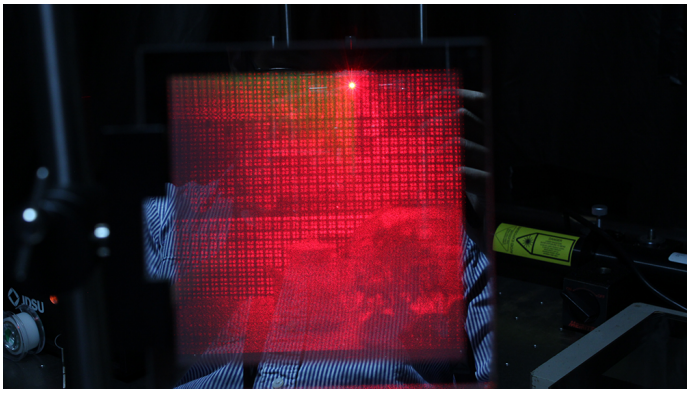
した干渉縞は関大デジタルスタジオのレーザーリソグラフィ装置によりバイナリ振幅マスクとして出力しレーザー光源により照明することで図 5.12 のような光学再生像を得た．

前方の ORS 面によって生成された立体像 (a) においてはガラスによる透過屈折などの効果も含め明瞭に再生できていることが分かる．立体像のサイズについては奥 1.0 m の位置に 1.0 m × 1.0 m 大の像を再生できており奥行き幅の深く大型の立体像再生を確認することができた．その一方で後方の RS 面で生成した立体像には格子状のノイズが乗ってしまっていることが分かる． これは光線サンプル数の不足に起因する問題であると考えられる．空間的なサンプリング間隔としては 1.0 mm 程度であるため人間の目の分解能を考えれば問題ないが角度のサンプリングが不足しており，フーリエ面で格子状の空隙が生まれそれが視覚的に現れたものだと考えられる．また観察した際に設定した奥行きほどには深い位置に像が再生されて見えないという現象も生じた．これは格子状ノイズの影響に加え，$z$ 方向に連続的に物体が存在しないためではないかという予想を立てた．

上記の反省を踏まえ図 5.13 に示す 3DCG シーンを用い回折によって入射する光線を含め新た



(a)



(b)

図 5.12　(a) 手前 (b) 奥の像にピントを合わせた部屋の CGH 光学再生像

に CGH を計算した．計算した CGH のパラメータを表 5.4 に示す．

この CGH の光学再生像を図 5.14 に示す．図 5.14(a)(b) から手前から奥の物体まで，広い奥行き幅に渡り明瞭に立体像が再生されていることが分かる．そして回折により入射する光線を全て含めることで後方物体の格子状ノイズが除去されていることも確認できる．また図 5.14(c)(d)(e)(f) からも人形の縫い目や窓の奥に見える木の葉，本のラベルの光沢感，ボトルのラベルの文字，パンの表面の粗さやバスケットの網目など，写実性の高い表現を実現している．従って本手法により，空間を再現するような立体像を計算可能であることを実証することができた．

## 5.5　本章の結論

本章では単一の ORS 面のみでは実現不可能な幅広い奥行きを持つ立体像の計算を，複数の ORS 面とその間の相互オクルージョン処理を用いて実現する手法を提案した．波面を正射影成

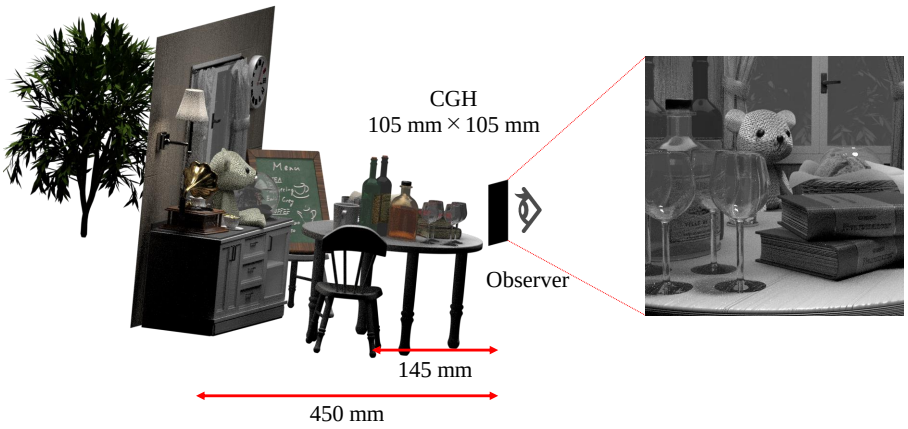


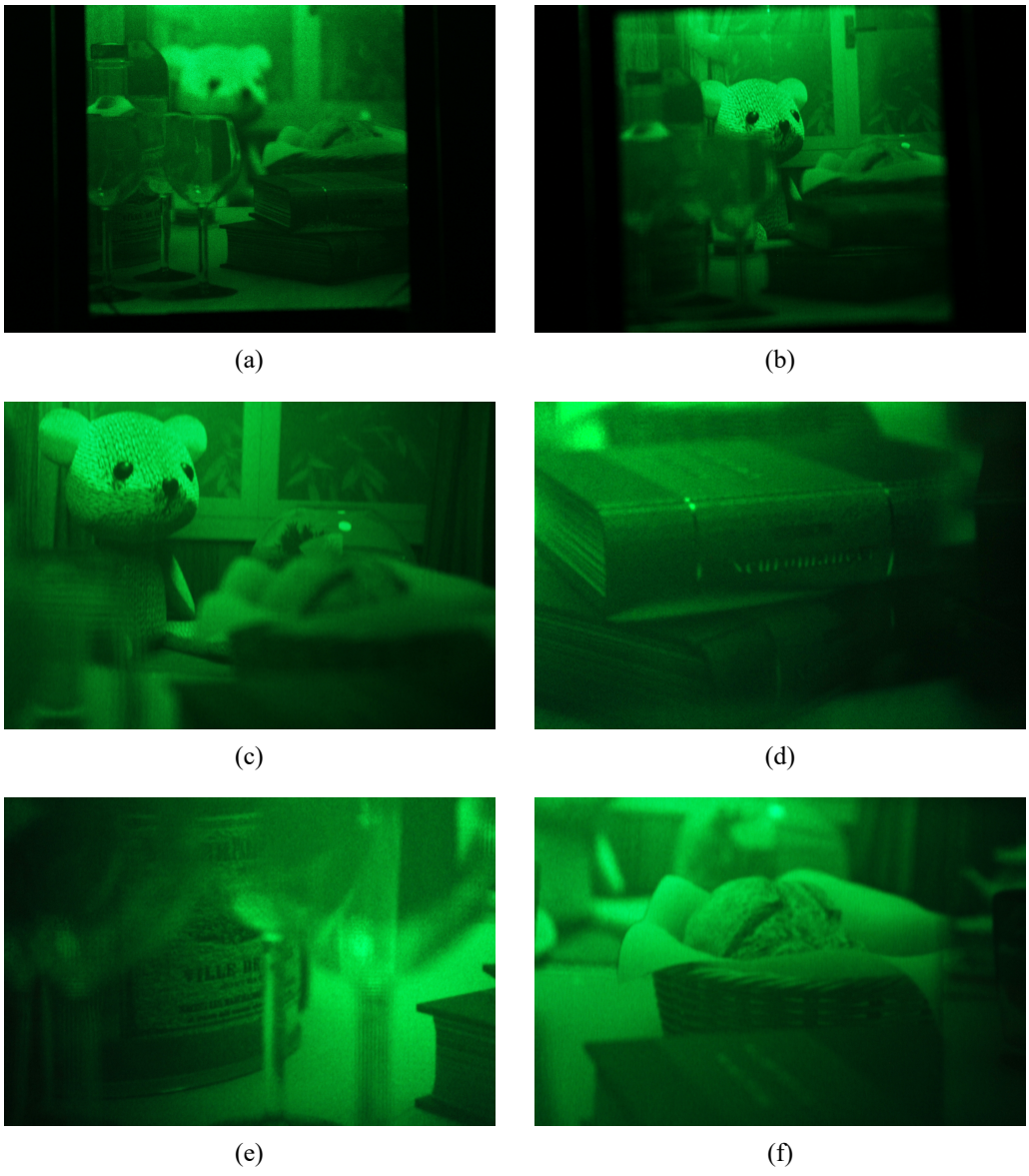

図 5.13　CGH 計算に用いる 3DCG シーンと CGH の位置関係

表 5.4　室内の CGH 計算に用いたパラメータ

| | |
|---|---|
| CGH 面画素数 | $128K \times 256K$ |
| CGH 分割数 | $16 \times 16$ |
| 波長 | 532 nm |
| ピクセルピッチ | $0.8\,\mu\text{m} \times 0.4\,\mu\text{m}$ |
| 伝搬距離（手前） | 145 mm |
| 正射影画像画素数（手前） | $2048 \times 2048$ |
| 正射影画像視点数（手前） | $64 \times 64$ |
| 伝搬距離（奥） | 450 mm |
| 正射影画像画素数（奥） | $2048 \times 2048$ |
| 正射影画像視点数（奥） | $64 \times 64$ |

分に分解し，各正射影成分の間で多段階の伝搬を行いオクルージョンマスクを適用することで，エラーのない相互オクルージョン処理の実行が可能である．また前章までに提案した正射影光線-波面変換の特徴を用いることにより余剰な伝搬を除去し，従来非現実的な計算量を要した空間全体を埋めるような立体像の計算を可能とした．同様のホログラムを従来手法と提案手法で計算しその計算時間を比較することで，提案手法の優位性を示した．

実験では実際に幅広い奥行きを持つ立体像を再生する CGH を計算し，その干渉縞を振幅マスクとして出力した．その干渉縞をレーザー光で証明することで確かに幅広い奥行きと高い写実性を持つ立体像を光学再生可能であることを実証した．



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

図 5.14　格子状ノイズを除去した CGH の光学再生像．(a) 手前 (b) 奥の物体にピントを合わせた再生像．(c) クマ (d) 本 (e) ボトルのラベル (f) パンにピントを合わせ撮影した再生像．

# 第 6 章

# 深度可変正射影光線-波面変換法

この章では光線の出射深度を可変とすることで，広い深度を持つ立体像をより効率的に計算する手法を提案する．原理の実証としてシミュレーションによる立体像の分解能向上を確認し，光学再生によりその効果を確認する．

---

## 6.1　光線の出射深度を可変とする計算法

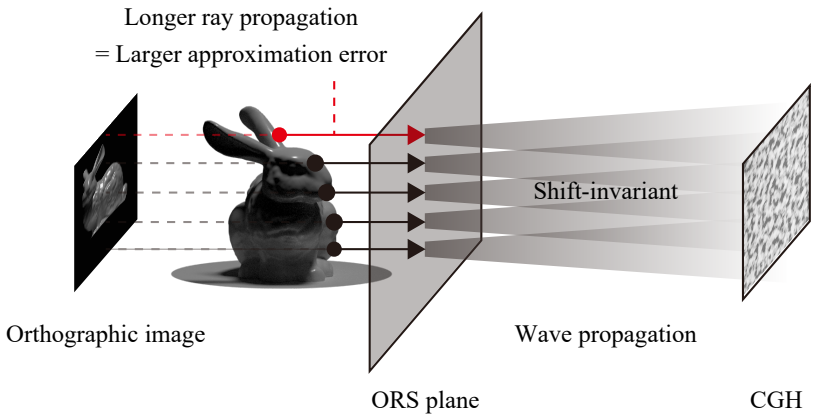



図 6.1　正射影光線-波面変換法における幾何光学近似に伴う精度低下の原因

図 6.1 にこれまで提案した正射影光線-波面変換法の概念図を示す．再度提案手法について概説すると，物体近くに ORS 面と呼ぶ中間面を設ける．物体表面からこの面までの光波伝搬は幾何光学近似に基づき取り扱い，物体の三次元情報も光線群としてサンプリングする．そして ORS 面上で光線を波面に変換する．各光線を微小な開口を通過する平面波とみなし，また初期位相を与える．同方向に伝搬する光線群は正射影光線と呼ばれ，光線群を正射影光線に分化し扱うことで寄与が Shift-invariant となり高速畳み込みを用いて計算可能になる．同時にこの段階で余剰な光波伝搬を除去により効率的な計算が可能である．

しかしながら原理的にも明らかだが，図示されているように物体表面と ORS 面の距離が遠いほど幾何光学近似により制度が低下し，結果として再生像の分解能低下に繋がる．この近似精度の低下が原因となり単一の ORS 面で表現可能な奥行きが限られることになる．従って何らかの方法でこの近似精度を高めることができれば，表現可能な奥行幅が向上し，ひいては広い深度の立体像を再生することが可能になる．従来の RS 面を用いた計算法においても原理的には光線の出射点を物体面上に設けることで精度が向上するという主張はなされていたが，平面間の高速畳み込みを用いた伝搬計算の適用が難しくなる点やその実装難度から実証はされていなかった．

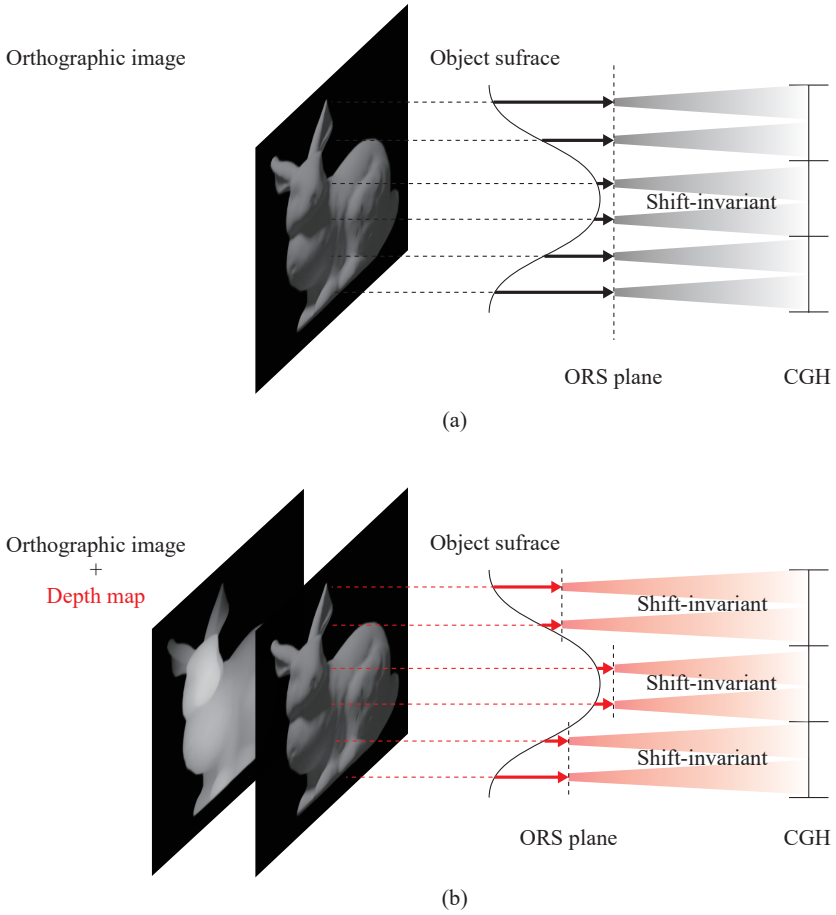



図 6.2　(a) 通常の正射影光線-波面変換法と (b) 深度可変法の概念図

上記の発想のもとで提案する，深度可変正射影光線-波面変換法のコンセプトを図 6.2 に示す．簡便な説明のため，一方向の光線にのみ着目している．通常の正射影光線-波面変換法を用いた計算法では前述の通り光線の出射点を一定の深度に定める．これによりある角度の光線から CGH 面への寄与を Shift-invariant とし，FFT を用いた高速畳み込み計算が可能となり，効率的な計算を実現している．また図では説明の便宜上 ORS 面を物体表面より手前に配置しているが，物体表面を $z$ 方向に区切るように配置しても問題はない．

一方この章にて提案する手法では近似精度の低下による分解能低下の原因に着目し，広い深

度の立体像を効率的に計算することを可能とする．ギガピクセル単位の解像度を扱う大規模なCGH の計算では，前述したように CGH 面を分割し独立に計算するタイリングを用いる．この狭いタイルの範囲に入る正射影光線の中で光線の出射点が一定の深度にあれば，通常と同様に高速畳み込みを用いて計算することができる．従って正射影画像と同時にその深度マップを取得し，それを用いて光線の出射点を可変とし物体面に這わせることで，近似精度を高めることが可能となる．

つまりある正射影光線 $\boldsymbol{o}_n(x)$ における CGH 面と物体面の距離を $z_n$ とするとき，CGH 面上の波面 $\boldsymbol{w}(x)$ との関係は

$$\mathcal{F}\left[\boldsymbol{w}(x)\right] = \begin{bmatrix} \mathcal{F}\left[\boldsymbol{o}_1(x)\right] \cdot H(f_x; z_1) \\ \vdots \\ \mathcal{F}\left[\boldsymbol{o}_N(x)\right] \cdot H(f_x; z_N) \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

として表すことができる．ただし，$H(f_x; z)$ は距離 $z$ における伝達関数である．アルゴリズムの観点でも従来全方向に対し同様の伝達関数を用いていた部分を，各方向の正射影光線の深度に合わせて生成するのみで実装可能である．従って計算量としては全く変化せず，また実装も簡便である．

## 6.2 再生シミュレーションによる比較

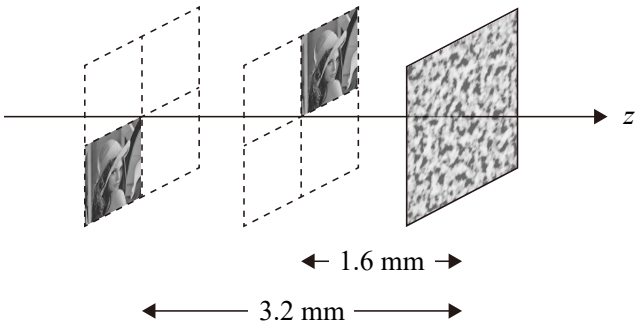



図 6.3 深度可変法による分解能向上確認シミュレーションのセットアップ

始めに提案手法による分解能の向上を確認するため図 6.3 のように 3.2 mm × 3.2 mm のホログラムの 1.6 mm 奥，3.2 mm 奥に同様の平面物体が存在する CGH を，通常の正射影光線-波面変換法と深度可変法で生成した．ピクセルピッチを 0.8 µm × 0.8 µm ，波長を 527 nm とした．また CGH 画素数を $4K \times 4K$ とし，CGH 面を $2 \times 2$ のタイルに分割して計算している．光線方向数は $16 \times 16$ とした．また通常の正射影光線-波面変換法を用いた計算ではある深度を指定しその面で最大の分解能を発揮するよう設定するためここでは手前の面にピントを合わせた．計算環境は CPU: Intel Core i5-7200U，RAM: 8GB，計算時間は従来手法で 30 秒，提案手法で 109 秒であった．

計算した CGH からの再生シミュレーションの結果を図 6.4 に示す．(a) と (b) は従来の ORS

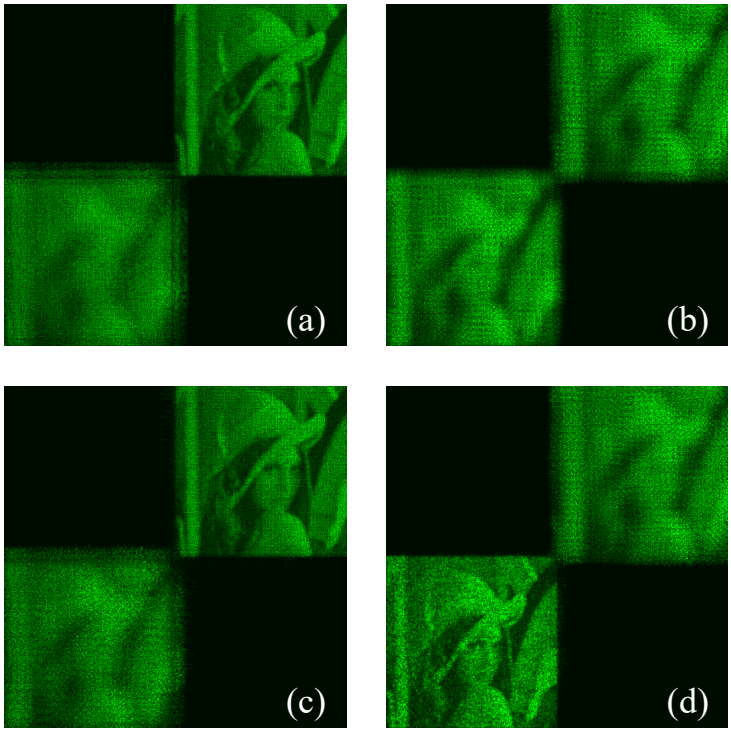



図 6.4　再生シミュレーション結果．通常の ORS 面を用いた CGH から再生し (a) 手前 (b) 奥にピントを合わせた像と，深度可変法を用いた CGH から再生し (c) 手前 (d) 奥にピントを合わせた像．

面を用いた手法により，(c) と (d) は提案手法により計算した CGH の再生像である．また (a) と (c) は手前の平面物体に，(b) と (d) は奥の平面物体にピントを合わせている．手前の物体に関してはどちらも高い分解能で再生できていることが分かるが，奥の物体に対しては従来の ORS 面を用いた計算ではボケてしまっている．これは光線の出射点を手前の面に合わせた結果である．一方で提案手法では手前・奥どちらの面でも高い分解能で再生できていることが分かる．この結果から提案手法が従来手法と比較し広い深度に渡って高い分解能を再生可能であることを示すことができた．

## 6.3　実験結果：広深度大規模 CGH の計算

次に提案手法を用いて 10 ギガピクセルを超えかつ深度に幅があるような CGH を計算可能であることを確認する．図 6.5 のような人間と壁の 3DCG モデルを制作し，それを用いて CGH を計算した．105 mm × 105 mm の CGH の奥 50 mm ∼ 120 mm に渡り物体を配置する．生成した CGH のパラメータを表 6.1 に示す．

計算環境は CPU: Intel Core i7-8700K (3.70GHz)，RAM: 64GB，計算時間はレンダリング時間を除き 31 時間であった．金属やガラス，人間の肌などの多様な反射・透過特性を含み，か

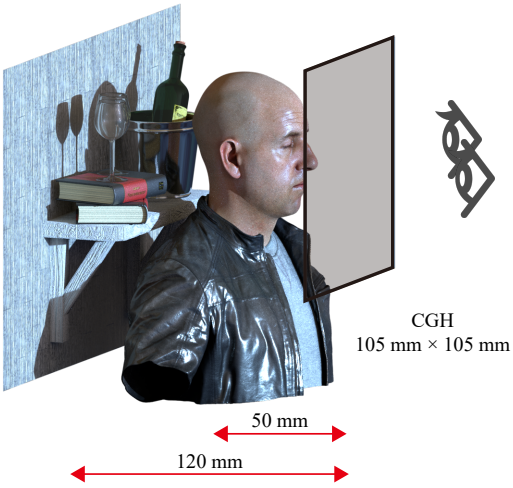



図 6.5　計算する立体像と CGH のセットアップ

表 6.1　深度可変法による CGH 計算のパラメータ

| | |
|---|---|
| CGH 面画素数 | $128K \times 128K$ |
| CGH 分割数 | $16 \times 16$ |
| 波長 | 526 nm |
| ピクセルピッチ | $0.8\,\mu\text{m} \times 0.4\,\mu\text{m}$ |
| 視野角 | $\pm 23.3$ deg |
| 正射影画像画素数 | $512 \times 512$ |
| 光線方向数 | $64 \times 64$ |

つ物体同士のオクルージョンも複雑なシーンであるが，図 6.6 のように明瞭に光学再生されていることが確認できる．

一方で図 6.7 のように通常の正射影光線-波面変換法には見られなかったタイル状のノイズが再生像に現れていることも見て取れる．さらにこのタイル状ノイズの出現位置が角度ごとに異なることも確認される．これはタイルごと，角度ごとに光線の出射深度を変更する際，畳み込まれる応答関数のエネルギーが異なるため現れる現象であると考えることができる．この点の改善には応答関数のエネルギーに応じて規格化することが必要であると考えられる．

また原理的には従来と変わらない計算量でより深度の幅が広い立体像を計算できるものの，従来一度生成すればよかった伝達関数を逐次生成するため計算時間が増大している．この点は伝達関数のルックアップテーブル化などで改善可能であると考えられる．

一方で本手法を用い生成した CGH により立体像を光学再生可能であることを実証した点，さらにこれまで省メモリ化，並列化から用いていたタイリングを精度の向上に利用できる可能性を示した点については価値のある結果である．

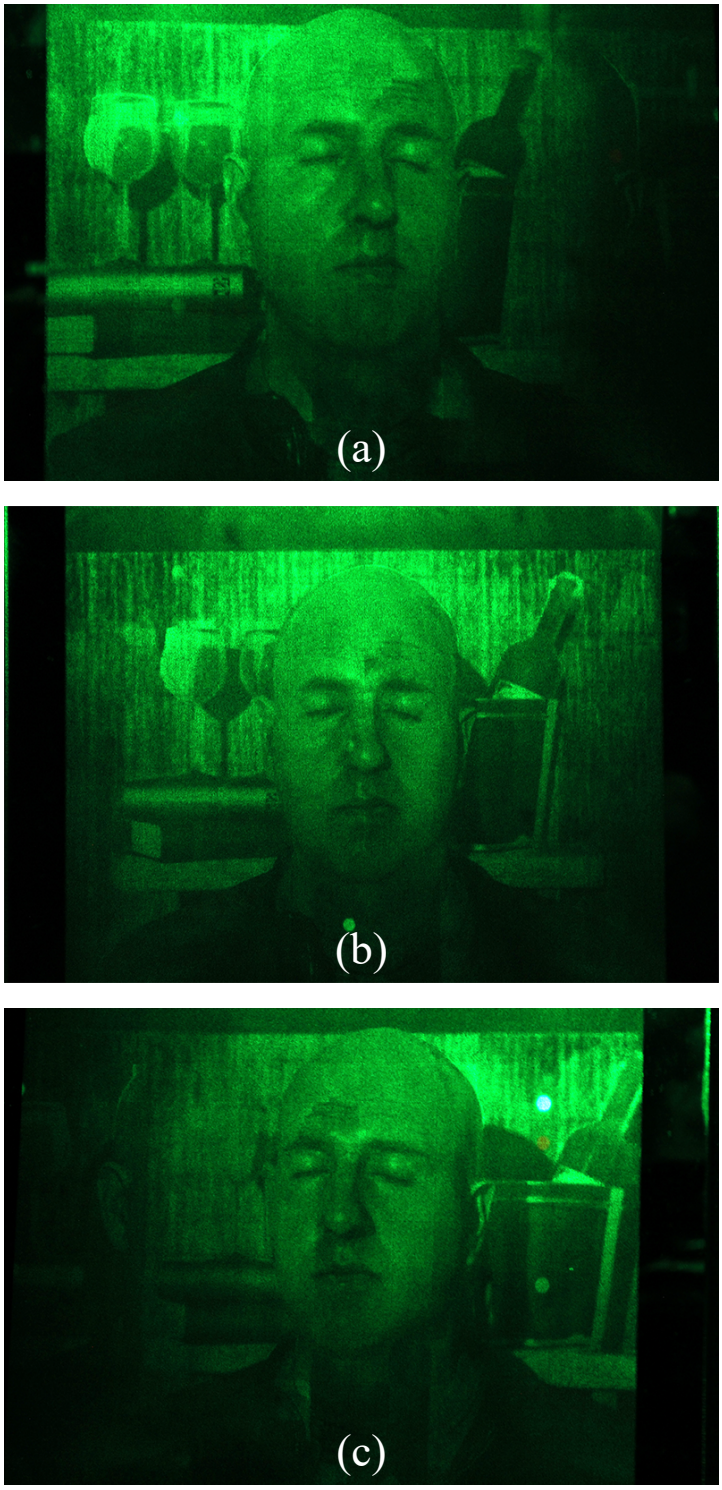



図 6.6　(a) 左 (b) 正面 (c) 右から撮影した深度可変法で計算した CGH の光学再生像

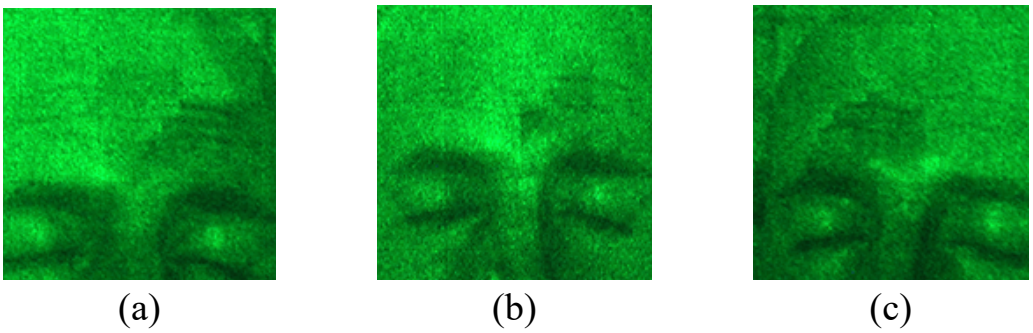



図 6.7　(a) 左 (b) 正面 (c) 右から撮影した光学再生像に見られるタイル状ノイズ

## 6.4　本章の結論

この章では光線の出射深度を可変とする ORS 面を用いた CGH 計算を提案し，それにより幅広い深度を持つ立体像を効率的に計算する手法を提案した．ORS 面をタイルごと，角度ごとに物体に沿わせるよう配置し幾何光学に基づき伝搬する距離を小さくすることで，近似精度の低下を防ぐ．実験では 105 mm × 105 mm のホログラムの奥 50 mm ～ 120 mm に渡る立体像を再生する CGH を提案手法により計算し再生シミュレーションにより再生像を確認した．

# 第 7 章

# 波面の分割伝搬計算における境界アーティファクト除去法

この章では大規模な光波の伝搬を高速かつ正確に分割計算する手法について述べる．大規模波面の伝搬計算は正射影光線-波面変換のみならず他のグループから提案されている様々な手法においても大きな役割を果たすものであり，また広くはホログラムという分野を超え回折計算を必要とする多くの分野で有用である．本項ではフレネル伝搬をその数学的性質を用いて高速・正確計算する手法を提案し，シミュレーションにより有用性を示す．

---

## 7.1　波面伝搬とその計算手法

光波の伝搬は長年スカラー回折理論に基づき研究されてきた [89,90]．自由空間の伝搬はヘルムホルツ方程式を支配方程式とするが，グリーン関数によりこれを積分方程式へと変換することで，境界面上での値のみから解を求めることが可能になる．この理論に基づき 2 平面間の伝搬を境界要素法として数値計算する手法は，今日の波動光学では応用上非常に重要な役割を果たしている．例えばデジタルホログラフィ・DOE・数値的リフォーカシング・プラズマ解析などの分野で用いられており [91]，特に計算機合成ホログラムの研究においてはこの伝搬計算の速度・正確性が結果に強く影響を与える．2 平面間の回折を記述する形式は第 1 種・第 2 種レイリーゾンマーフェルド回折積分，第 2 種と等価な解を与える角スペクトル伝搬，またそれらの近似であるフレネル回折積分が存在する．角スペクトル法とフレネル回折積分を計算すると当然前者の方が計算精度が高いが，実用上フレネル回折積分で十分に正確な解が得られるケースも多く存在する．その数値計算法については多数研究されており，現在では計算量の観点から FFT を用いた畳み込み計算が広く用いられている．より高い精度で計算する手立ても確立しつつあり，エイリアシングを防ぐべく施すゼロパディングと呼ばれる処理や [86]，周波数空間でのフィルタリングが一般に適用される [83]．また伝搬元・伝搬先の面で自由にサンプリング間隔を設定する手法もフレネル回折 [92,93]，角スペクトル伝搬共に提案されている [94,95]．また平行平面のみならず，角スペクトルの回転変換と呼ばれる処理を用いることで非平行平面の間で伝搬を行う手法も開発されている [85,91]．近年ではさらに進んだテクニックとしてオフアクシスの計算をより効

率的に行う手法 [96] やゼロパディングを必要としない少メモリの計算法も提案された [97,98].

近年では計算機の発展によりサンプル数が 10 ギガ点を超えるような大規模な波面を扱うことが可能になりつつある [13]．本論文の扱う CGH もその一つである．これまでに何度も述べたように，サンプル数がそれだけ膨大になると一度に畳み込みの計算を行うことが不可能になるため，分割して計算するタイリングと呼ばれる手法を用いることになる [57]．オフアクシスの伝搬が可能な手法であればタイリングを適用することが可能である．しかしながらこのタイリング計算の際，タイル境界にノイズが生じるという問題があることを見出した．特にホログラフィック・3D ディスプレイにこのタイリングを用いる際にはアーティファクトとして立体像の質の低下を招くことが分かった．同様の問題について近年 Blinder らも指摘しており [59]，彼らはタイル周辺に余剰なマージンを取る，または実空間で点応答関数のアポダイゼーションを用いることで対応可能であると述べている．従ってこの論文では分割計算を達成しつつ，アーティファクトを除去する伝搬計算手法を提案する．特にフレネル近似で十分な領域では，上記に加えて高速計算を達成することが可能となる．この手法はフレネル伝搬の数学的性質に注目することで達成可能なものである．数値計算ではノイズ比，計算時間，メモリ使用量を比較することにより提案手法の効率を検証した．さらに応用の一例としてタイリングにより CGH を計算しその再生像からアーティファクトノイズが除去できていることをシミュレーションにより確認した．

## 7.2 波面の分割伝搬と境界上のノイズ

本項ではタイリングを用いた伝播の概要と，タイルのエッジでのアーティファクトの原因について説明する． 元の平面と伝搬先のターゲットの平面をそれぞれ $w_{\mathrm{o}}(\xi,\eta)$ および $w_{rmt}(x,y)$ とする．現在主として用いられている伝搬計算法では，これらの面間の関係は，次のように畳み込み形式で記述できる．

$$w_{\mathrm{t}}(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}w_{\mathrm{o}}(\xi,\eta)h(x-\xi,y-\eta;z)d\xi d\eta \tag{7.1}$$

ここで，$h(x,y)$ はインパルス応答関数，$z$ は平面間の距離である． よく知られているように，この畳み込みはフーリエ変換によって次のように変換できる．

$$w_{\mathrm{t}}(x,y)=\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[w_{\mathrm{o}}(\xi,\eta)\right]\cdot H(f_x,f_y;z)\right] \tag{7.2}$$

ここで，$H(f_x,f_y;z)$ は伝達関数でありインパルス応答のフーリエ変換に対応する．$H(f_x,f_y;z)$ の解析解は，フレネルおよび角度スペクトル伝搬で知られているため，フーリエ変換なしで直接生成可能である． フレネル伝播では，応答関数と伝達関数は次のように記述される．

$$h_{\mathrm{F}}(x,y;z)=c(z)\exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)\right) \tag{7.3}$$

$$H_{\mathrm{F}}(f_x,f_y;z)=c(z)\exp\left(j\pi\lambda z(f_x^2+f_y^2)\right) \tag{7.4}$$

ここで，$\lambda$ は波長，$c(z)$ は次のように記述される係数である．

$$c(z)=\frac{\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}z\right)}{j\lambda z} \tag{7.5}$$

実際にはエイリアシングを回避するために，伝達関数は周波数空間で矩形関数によって次のように帯域制限される．

$$w_{\mathrm{t}}(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[w_{\mathrm{o}}(\xi,\eta)\right]\cdot H(f_x,f_y;z)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f_x}{B_{f_x}},\frac{f_y}{B_{f_y}}\right)\right] \tag{7.6}$$

ここで $B_{f_x}$ および $B_{f_y}$ は，それぞれ $f_x$ および $f_y$ 軸の帯域幅である． これらは波長，面間の距離，およびサンプリングピッチによって定義される． 離散形式では，

$$w_{\mathrm{t}}[m,n] = \mathrm{FFT}^{-1}\left[\mathrm{FFT}\left[w_o[m,n]\right]\cdot H[m,n]\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{m\Delta f_x}{B_{f_x}},\frac{n\Delta f_y}{B_{f_y}}\right)\right]. \tag{7.7}$$

ここで，$\Delta f_x$ および $\Delta f_y$ は，それぞれ周波数空間での $f_x$ および $f_y$ 軸のサンプリング間隔である． ここではこのタイプの伝播を「2-FFT 伝播」と呼ぶことにする．ここで元の波面 $w_{\mathrm{o}}[m,n]$ は，$x$ および $y$ 軸ののゼロ配列に 2 倍の大きさに埋め込まれていることに注意する．このゼロパディングは，FFT を使用した巡回畳み込みでのエイリアシングを防ぐためのものである． フレネル伝播では，帯域幅は次のように記述される．

$$B_{f_x} = (2\lambda z\Delta f_x)^{-1} \tag{7.8}$$

$$B_{f_y} = (2\lambda z\Delta f_y)^{-1} \tag{7.9}$$

これまでにも繰り返し述べているように，大規模な波面伝搬計算にはタイリングを用いる [57]．伝搬元の平面とターゲット平面を等しいサンプル数の $N$ タイルに分割する．このとき，$i$ 番目のターゲットタイルの波面 $w_{\mathrm{t}i}$ は，すべての元波面のタイルからの伝播の総和として計算できる．

$$w_{\mathrm{t}i}[m,n] = \mathrm{FFT}^{-1}\left[\sum_{j=0}^{N-1}\mathrm{FFT}\left[w_{\mathrm{o}j}[m,n]\right]\cdot H'_{ij}[m,n]\right] \tag{7.10}$$

ここで，$H'_{ij}[m,n]$ は，元のタイルとターゲットタイルの位置関係によって定義される，オフアクシス伝搬の伝達関数である．ただし帯域制限を含むことに注意する．

しかしこの矩形帯域制限とタイリングは，計算結果にアーティファクトノイズを発生させる．一方でエイリアシングを回避するためにこれらを適用することは避けられない． 図 7.1 は，従来の帯域制限およびゼロパディングを適用したフレネル伝播の結果を示している． ピクセルピッチと波長はそれぞれ 0.8 µm と 526 nm とした．また平面間の距離は 20 mm． ピクセル数 $1024\times1024$ で，波面はタイルに分割されている． 簡単のため元の波面には中心に 1 つの点光源のみを持つこととした．図 7.1 に示すように，タイルの数が増えるとノイズが明らかに増大していることが分かる．

この問題の原因は次のように説明できる． 2-FFT 伝播法ではサンプリングされた伝達関数は次のように記述される．

$$H_{\mathrm{F}}[m,n] = H_{\mathrm{F}}(m\Delta f_x, n\Delta f_y) \tag{7.11}$$

したがって畳み込まれる実際の応答関数 $h(x,y)$ は次のように記述される．

$$h(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\left[H(f_x,f_y;z)\cdot \mathrm{comb}\left(\frac{f_x}{\Delta f_x},\frac{f_x}{\Delta f_y}\right)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f_x}{B_{f_x}},\frac{f_y}{B_{f_y}}\right)\right] \tag{7.12}$$

$$= h_{\mathrm{F}}(x,y) * \Delta f_x\Delta f_y \mathrm{comb}(x\Delta f_x, y\Delta f_y) * B_{f_x}B_{f_y}\mathrm{sinc}\left(xB_{f_x}, yB_{f_y}\right) \tag{7.13}$$

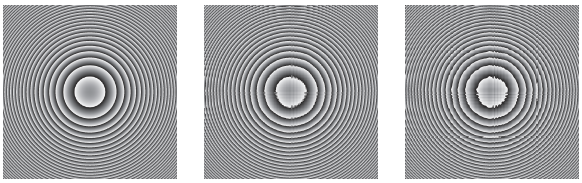



図 7.1　帯域制限フレネル伝搬によって計算された位相．(a) タイリングなし，(b)2 × 2 タイリング，(c)4 × 4 タイリング．

(7.13) 式に導出されるように，応答関数は comb 関数および sinc 関数が畳み込まれていることが分かる． 結果的に得られた畳み込みカーネルは隣の領域の信号の影響を受けていることになる． このアーティファクトは，ターゲットタイルの端に強く現れる． その結果，タイルリングを用いた伝播にはアーティファクトノイズが発生することになる．

## 7.3　高速かつ正確なフレネル伝搬の分割計算法

本提案の目標は，畳み込みに基づく伝播の計算量的な利点を失うことなく，アーティファクトノイズを克服することである．前項で説明したように，巡回畳み込みのカーネルのエッジにノイズがある限り，それがアーティファクトを生ずる． したがってシンプルな解決法として，ノイズのない畳み込みカーネルを使用すれな問題は解決することになる． このときカーネルの位相はタイル間で連続している必要があることに注意． 図 7.2 に原理の概念図を示す．

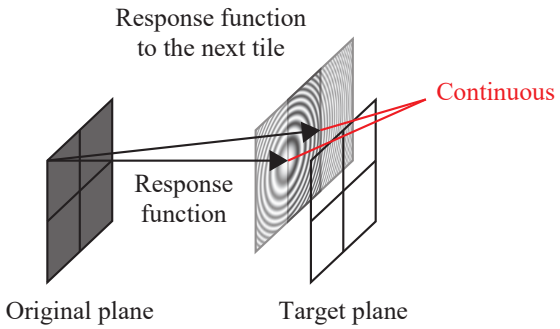



図 7.2　アーティファクトノイズを生じない分割伝搬計算の原理

この手法を実装するには，はじめに実空間で応答関数を生成する必要がある．伝達関数はこの応答関数のフーリエ変換によって生成される．このとき，エイリアシングを除去するには，応答関数に矩形関数を掛ける必要がある． したがってこの手法は次のように定式化できる．

$$w_{\mathrm{t}}(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[w_{\mathrm{t}}(x,y)\right] \cdot \mathcal{F}\left[h(x,y) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{x}{B_x}, \frac{y}{B_y}\right)\right]\right] \tag{7.14}$$

離散化された形式では

$$w_{\mathrm{t}}\left[m,n\right]=\mathrm{FFT}^{-1}\left[\mathrm{FFT}\left[w_{\mathrm{o}}\left[m,n\right]\right]\cdot\mathrm{FFT}\left[h\left[m,n\right]\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{m}{B_x},\frac{n}{B_y}\right)\right]\right] \tag{7.15}$$

この方法を角スペクトル伝搬に適用する場合，どちらかと言えばその伝搬計算はレイリーゾンマーフェルトの第 2 回折積分のシミュレーションとして見ることができる．なぜなら角スペクトル伝搬のカーネルはワイルの積分 [90] からレイリーゾンマーフェルトの第 2 回折積分と等価であると知られているためである．したがって，応答関数は次のように記述できる．

$$h(x,y)=\frac{1}{\sqrt{\left(x-s_x\right)^2+\left(y-s_y\right)^2+z^2}}\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\left(x-s_x\right)^2+\left(y-s_y\right)^2+z^2}\right) \tag{7.16}$$

ここで，$s_x$ と $s_y$ は，それぞれ $x$ と $y$ 座標シフトである．

精度の観点だけで言えば，この単純な処理で十分なに正確な解を得ることができる．ただし計算の効率においては，この方法を用いるとは FFT を 3 回実行する必要があるため，2-FFT 伝搬よりも長い時間を要する． タイルの組み合わせごとに伝播計算が必要であることを考慮すると，このコストは無視できると結論付けることはできない．

したがって本論文ではさらにターゲット面がフレネル領域にある場合に限り，より効率的なアルゴリズムを提案する． フレネル伝播が実空間と周波数空間の両方で 2 次位相を持っているという数学的定式化に着目することで，従来の 2-FFT 伝播よりもさらに高速な計算が可能になる．

距離 $z$ に対する同軸フレネル伝搬の応答関数は，次のように記述される．

$$h_{\mathrm{F}}\left(x,y;z\right)=c(z)\exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z}\left(x^2+y^2\right)\right) \tag{7.17}$$

したがって $(s_x,s_y)$ だけシフトした平面への応答関数は以下のように書くことができる．

$$\begin{aligned}
&h_{\mathrm{t}}\left(x,y;z\right) && (7.18)\\
=&h_{\mathrm{F}}\left(x-s_x,y-s_y;z\right) && (7.19)\\
=&c(z)\exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z}\left(\left(x-s_x\right)^2+\left(y-s_y\right)^2\right)\right) && (7.20)\\
=&c(z)\exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z}\left(x^2+y^2+2\left(xs_x+ys_y\right)+{s_x}^2+{s_y}^2\right)\right) && (7.21)\\
=&c(z)\exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z}\left(x^2+y^2\right)\right)\cdot\exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda z}\left(xs_x+ys_y\right)\right)\cdot\exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z}\left({s_x}^2+{s_y}^2\right)\right) && (7.22)\\
=&h_{\mathrm{F}}\left(x,y;z\right)\cdot\exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda z}\left(xs_x+ys_y\right)\right)\cdot\exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z}\left({s_x}^2+{s_y}^2\right)\right) && (7.23)
\end{aligned}$$

よって伝達関数は

$$\begin{aligned}
H_{\mathrm{t}}\left(f_x,f_y;z\right)&=\mathcal{F}\left[h_{\mathrm{t}}\left(x,y;z\right)\right] && (7.24)\\
&=\mathcal{F}\left[h_{\mathrm{F}}\left(x,y;z\right)\cdot\exp\left(-j2\pi\left(\frac{s_x}{\lambda z}x+\frac{s_y}{\lambda z}y\right)\right)\cdot\exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z}\left({s_x}^2+{s_y}^2\right)\right)\right] && (7.25)\\
&=H_{\mathrm{F}}\left(f_x-\frac{s_x}{\lambda z},f_x-\frac{s_y}{\lambda z};z\right)\cdot\exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z}\left({s_x}^2+{s_y}^2\right)\right) && (7.26)
\end{aligned}$$

したがって軸外フレネル伝播の伝達関数は，一定の位相を掛けた同軸伝播のシフト伝達関数に等しいという重要な結論が得られる．上記の議論によれば，提案手法は以下のアルゴリズムで計算

できることになる．元の平面とターゲット平面をそれぞれ $N$ と $M$ のタイルに分割することとする．

**Algorithm: Accurate tiled Fresnel propagation**

---

**Pre-process**

Generate the coaxial response function $h_{\mathrm{F}}(x, y; z)$.
FFT $h_{\mathrm{F}}(x, y; z)$ and obtain the transfer function $H_{\mathrm{F}}(f_x, f_y; z)$.

**Propagation process**

**for** $i \in \{0, \cdots, N-1\}$
Choose one target tile $i$.

**for** $j \in \{0, \cdots, M-1\}$
Crop wavefront at one tile of the original plane $j$ as $w_j(\xi, \eta)$.
Embed $w_j(\xi, \eta)$ into double-length zero-vector, as $w'_j(\xi, \eta)$
FFT $w'_j(\xi, \eta)$.
Multiply shifted transfer function, $H_{\mathrm{F}}\left(f_x - \frac{s_x}{\lambda z}, f_x - \frac{s_y}{\lambda z}; z\right)$
Multiply constant phase, $\exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z}\left({s_x}^2 + {s_y}^2\right)\right)$.
Add the result to the angular spectrum of the target tile $j$ as $W'_i(f_x, f_y)$.
**end for** $j$

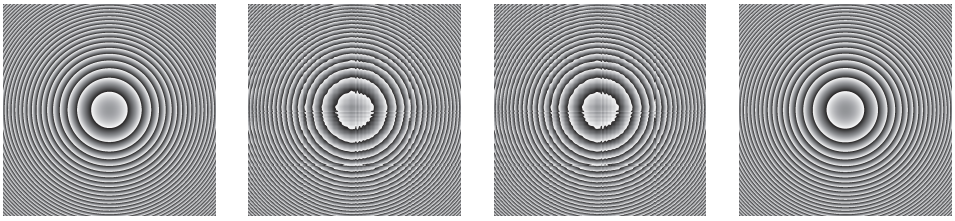
IFFT $W'_i(f_x, f_y)$ and obtain the wavefront of the target tile as $w'_i(x, y)$.
Crop the center of $w'_i(x, y)$, and obtain the final result $w_i(x, y)$.
**end for** $i$

---

フレネル伝播の正確な結果をこの手順に従うことで計算することができる．2-FFT 伝播法とは異なり，タイル間の伝播ごとに伝達関数を再生成する必要がないため，提案された方法は正確であるだけでなく高速な計算を可能とする．

## 7.4 シミュレーション結果

本項ではフレネル領域での伝播を正確かつ効率的に計算可能であることを示す．波面の伝播を（a）解析解，（b）帯域制限フレネル [86]，（c）シフト角スペクトル [83]，および（d）提案された方法で計算する．波面は $1024 \times 1024$ ピクセルでサンプリングされている． 簡単のため元の平面の中心に単一の点光源があると設定した．ターゲット平面との距離を 10 mm とする．ピクセルピッチと波長はそれぞれ 0.8 µm と 526 nm である．元の平面とターゲット平面は，$4 \times 4$ タイルに分割した．



(a) (b) (c) (d)

図 7.3 各種伝搬計算法を用いた結果の位相．(a) 解析解，(b) 帯域制限フレネル伝搬，(c) シフト角スペクトル法，(c) 提案手法．

表 7.1 伝搬計算法における MSE と計算時間の比較

| | Band-limited Fresnel | Shifted-angular spectrum | Proposed method |
|---|---|---|---|
| MSE | 0.0329 | 0.0313 | 0.0246 |
| Time (sec) | 4.35 | 4.46 | 2.28 |

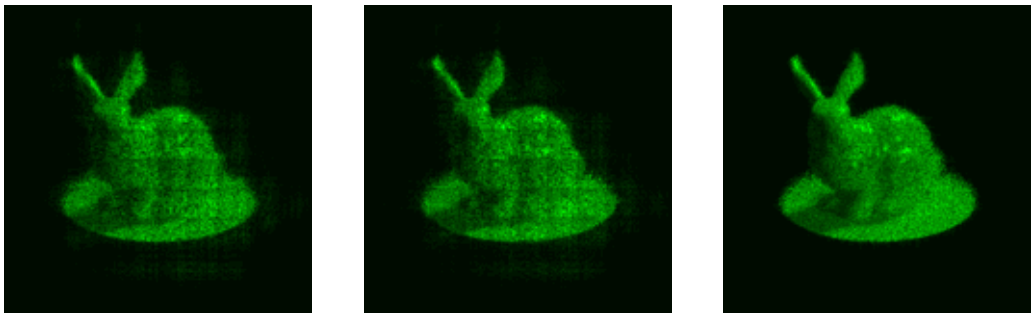
得られた波面の位相を図 7.3 に示す．また平均二乗誤差（MSE）と計算時間を表 7.1 に比較する．計算時間は，同様の計算 100 回の平均として測定した．CPU は Intel Core i7-8750H，RAM は 32GB である．結果に示されているようにアーティファクトノイズが（b）帯域制限フレネルおよび（c）シフト角スペクトル法で MSE を劣化させる．一方提案方法を用いることでアーティファクトノイズは除去され，最も高い MSE を示した． さらに計算時間は従来手法と比較して約 2 倍に高速な計算を可能としている．これらの結果から，提案手法が正確かつ高速であると結論付けることができる．

次に応用例の一つとして CGH をタイリング計算した．元の波面は，上記に提案した正射投影光線波面変換を用いて生成する．ピクセルピッチと波長は先のしミューレションと同様． 平面間の伝播距離は 20 mm とした．それぞれの波面の解像度は $2048 \times 2048$ ピクセルであり，$8 \times 8$ タイルに分割されている．

（a）帯域制限フレネル伝播，（b）シフト角スペクトル法，および（c）提案方法によって計算されたホログラムからの再生シミュレーション結果を図 7.4 に示す．アーティファクトノイズが図 7.4（a）および（b）のタイルの境界で見られる．一方提案方法を用いて波面の伝搬計算を行うことで図 7.4（c）のようにノイズの除去を実現している．

## 7.5 正射影光線-波面変換との融合

最後に本章にて提案した手法を正射影光線-波面変換法と組み合わせる際のテクニックについて述べる．前述の通り正射影光線-波面変換法においては光線の出射点，すなわち ORS 面の深度 $d$ をある程度自由に設定できる．また CGH 面・ORS 面のタイルの大きさを $T_x, T_y$ とする．そ



(a) (b) (c)

図 7.4 (a) 帯域制限フレネル伝搬，(b) シフト角スペクトル法，(c) 提案手法を用いて生成した CGH の再生シミュレーション結果

の際，$d$ を次の条件を満たすよう選定することとする．

$$\frac{T_x^2}{\lambda d} = 2m \qquad (m \in \mathbb{N}) \tag{7.27}$$

$$\frac{T_y^2}{\lambda d} = 2n \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{7.28}$$

すると本章の手法で乗算すべき定数位相項について

$$\exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z}\left({s_x}^2 + {s_y}^2\right)\right) = \exp\left(j2\pi\left(m+n\right)\right) \tag{7.29}$$

$$= 1 \tag{7.30}$$

すなわち定数位相項を乗算する必要がなくなる．さらに周波数空間でのサンプリング間隔が

$$\Delta f_x = \frac{1}{2T_x} \tag{7.31}$$

$$\Delta f_y = \frac{1}{2T_y} \tag{7.32}$$

であることを考えれば，伝達関数の周波数空間でのシフト量は

$$\frac{T_x}{\lambda d}\Delta f_x^{-1} = \frac{2T_x^2}{\lambda d} = 4m \tag{7.33}$$

$$\frac{T_y}{\lambda d}\Delta f_y^{-1} = \frac{2T_y^2}{\lambda d} = 4n \tag{7.34}$$

と整数となる．すなわち周波数空間でサブピクセルシフトにおける補完処理などを行う必要がなく，単純な整数画素のシフトのみで実装可能となる．

さらに考察を進める．元来の 2-FFT 型フレネル伝搬における周波数空間での帯域幅はピクセ

ル単位で

$$B_{f_x}\Delta f_x^{-1} = (2\lambda d\Delta f_x)^{-1}\Delta f_x^{-1} \tag{7.35}$$

$$= \frac{2T_x^2}{\lambda d} \tag{7.36}$$

$$= 4m \tag{7.37}$$

$$B_{f_y}\Delta f_y^{-1} = 4n \tag{7.38}$$

と計算できる．これは即ち周波数空間でのシフト量と一致していることになる．これにより空間を ORS 面のタイルが満たすとき，伝搬における周波数空間も同様に満たされることになり物理的直観と一致する．

ところで正射影光線-波面変換法における理想的な条件として，ORS 面にて光線が交差するというものがあった．ここでも $d$ に対する条件を課されており，すなわち

$$d = i\frac{(M\Delta x)^2}{\lambda} \qquad (i \in \mathbb{N}) \tag{7.39}$$

タイルの大きさを正方形，$T_x = T_y = T$ とすると

$$d = i\frac{(M\Delta x)^2}{\lambda} = \frac{T^2}{2m\lambda} \tag{7.40}$$

ここから

$$im = \frac{X^2}{2M^2} = \frac{1}{2}K^2 \tag{7.41}$$

の関係にあることが分かる．ただし $K$ はタイルあたりの正射影画像の解像度である．すなわち上記の条件を満たすような $i, m$ を選ぶ必要があることが分かる．

例として $X = 4096, M = 64, K = 64, \lambda = 532\,\mathrm{nm}, \Delta x = 0.8\,\mu\mathrm{m}$ のパラメータを与えたとする．そして物体が約 80 mm に存在しここに合わせ ORS 面の深度 $d$ を決定する．

$$\frac{(M\Delta x)^2}{\lambda} = 4.93 \times 10^{-3}\,[\mathrm{m}] \tag{7.42}$$

より

$$i = 16 \tag{7.43}$$

を選ぶことで

$$m = \frac{K^2}{32} = 64 \tag{7.44}$$

となり理想的な条件を満たす．このとき

$$d = 16 \times 4.93 \times 10^{-3} = 78.8 \times 10^{-3}\,[\mathrm{m}] \tag{7.45}$$

の距離に ORS 面を設置することになる．当然のことながら上記の条件は離散化した全ての値が整数となり扱いが簡便となるというだけの話であり，これ満たさなければ計算できないということはない．

## 7.6 本章の結論

本章では，フレネル伝播を計算するの正確かつ高速手法を提案した．フレネル伝播の実空間と周波数空間の両方で 2 次位相を持っているという性質を用い，オフアクシス伝搬の正確な伝達関数を事前に計算された同軸伝達関数から取得できることを示した．実験では，提案手法のノイズ比，計算時間に関して検証を行った．また，応用例として，CGH のタイリング計算の例を示した．本手法は正射影光線-波面変換法のみならず，他の伝搬計算を必要とする分野にも適用可能な手法である．

# 第 8 章

# 結論

本章ではここまでに本論文にて提案した正射影光線-波面変換を用いた CGH 計算法とそれを用いた大規模 CGH の計算について総括を行う．そして本論文の学術的な意義について述べる．最後に新たな課題，将来の展望について述べる．

---

## 8.1 本論文の総括

本論文では写実的かつ幅広い奥行きを提示する立体像表示技術の確立を目標とし，そのような立体像を再生可能な 10 ギガピクセルを超える大規模 CGH を計算可能とする手法として正射影光線-波面変換を用いた新たな CGH 計算法の原理を提案した．

第 3 章で正射影光線-波面変換の原理を伝搬理論の近似として導出し，その帰結として得られるアルゴリズムについて述べた．従来 RS 面と呼ばれていた中間面は実のところ伝搬計算における多項式展開の展開点であることを明らかにした．そして光波を人間が観察するという 3D ディスプレイに特異な条件の下で物体表面から短距離の伝搬を幾何光学近似により，長距離の伝搬を波動光学に基づいて行うことで様々な利便性を得ることができることを明らかにした．その一つがホログラフィック・3D ディスプレイ最大の特徴である深い奥行きであり，これは長距離の伝搬を波動光学に基づき計算することで達成されるものである．次が表現可能な物体表面の反射・透過特性である．これはサンプリングした光線から CGH を計算することに由来するものであり，波面ベースの計算法では現在難しいものである．最後が計算量的優位性であり，これは提案手法により余剰な光波伝搬の除去を可能としたことに起因する．提案手法と従来の RS 面を用いた計算法を計算量の理論的な見積もりと，実際の計算時間において比較することで，上記の優位性を実証した．原理実証実験として，提案手法により確かに立体像を再生可能な CGH が計算可能であることを再生シミュレーションと光学実験により実証した．

第 4 章では前章で提案した正射影光線-波面変換の原理に基づき，10 ギガピクセルを超える大規模 CGH を効率的に分割計算可能とする計算手法を提案した．CGH の分割計算においてはその分割数の増加に伴う計算量の増大がこれまでの課題であった．本論文ではある分割したタイルの計算に寄与する光線は限られるという着想をもとに，入力する光線とタイルをほぼ一対一に対応させる手法を提案した．またその際回折によって入射する光線も伝搬計算に含めることが重要

である点についても述べた．本手法によって CGH の分割計算における計算量的優位性を理論的に示し，計算時間の測定によってそれを確認した．また実証実験として $128K \times 128K$ ピクセルの CGH を分割計算し振幅マスクとして物理実装することで，CGH を用いた 3D ディスプレイとしてはこれまで報告されていなかった写実性と立体像サイズを提示可能であることを実証した．さらに現実に存在する実物体においても実物大で立体像計算・再生が可能であることをコンセプトレベルではあるが示した．

第 5 章では正射影光線-波面変換を用いてさらに広い奥行き幅を計算するため，正射影画像間の相互オクルージョン処理を適用する手法を提案した．幅広い奥行きに対しては複数の ORS 面を設けることで高い分解能で再生する．その際にそれぞれの面の間でオクルージョン処理と呼ばれる，前面の物体で背後の物体を覆い隠す処理が必要になるが，物体波面を正射影成分に分解しその間で段階的な伝搬とマスキング処理を行うことで，これを実現する．従来この複数面を用いた印面消去処理を行う際，大規模波面の計算においては面の数に従って計算量が爆発的に増大してしまうことが問題となっていた．本手法では波面の正射影成分への分解により余剰計算を除去し，従来法と比較し大幅に高速な計算を可能としていることを示した．実証実験として本手法により 1.0 m 立方の空間をホログラムの奥に再生することを可能とし，立体像の光学再生によりそれを示した．またさらに 0.5 m までの奥行きを写実的な立体像で充填するような CGH の計算も実現し，それを光学再生により実証した．

第 6 章では光線の出射深度を可変とすることで同等の計算量でより幅広い奥行きのホログラムを計算する手法を提案する．正射影光線-波面変換ではその原理から ORS 面と物体表面の距離が大きいほど近似精度が低下し分解能を低下させる．本手法では CGH 面の分割により ORS 面を物体に可能な限り沿って配置することが可能となり，それにより同等な計算量で表示可能な奥行き幅を向上させている．この手法においてもシミュレーションと光学実験からその効果を確認した．

第 7 章では正射影光線-波面変換から離れ，波面伝搬計算一般に適用可能な大規模波面伝搬を正確かつ効率的に行う汎用的な手法について提案した．これはフレネル伝搬が実空間・周波数空間で 2 次位相を持という数学的性質を用いるものである．他の伝搬手法を用いて計算した伝搬結果とノイズ比・計算時間を比較し，また CGH 再生シミュレーションからその有用性を実証した．

## 8.2 学術的な意義

本論文により提案した正射影光線-波面変換は，今後実現に向けさらに発展してゆくであろうホログラフィック・3D ディスプレイの研究において，立体像の品質を追求する上での一つの基盤となる点で学術的に意義のあるものである．波面制御の根源的な難しさを超えなおこの技術の実用化を達成するためには，従来の 3D ディスプレイでは到底表現不可能な立体像を提示しなければならない．波面再生が可能にする奥行き表現はその最たる例であり，ホログラフィという技術のポテンシャルから考えればディスプレイの奥に全く現実と見分けのつかない立体像を表示することも決して不可能ではない．しかしこれまでに報告されている CGH を用いた 3D ディスプレイではその将来像を想起させるだけの写実性・サイズ・視野角・奥行き表現を達成できてはお

らず，これはそのような CGH の計算の難度から来るものである．本研究では CGH の立体像表示技術としてのポテンシャルを最大限活用する新たな計算理論を提案したことは意義ある成果である．

また電子的ホログラフィック・3D ディスプレイの実用化には表示デバイス・ハードウェアの発展が不可欠である．そしてその研究開発には，原動力となる将来像の提示が必要である．本論文で実証した大規模 CGH からの立体像再生は静止画ではあるものの，実物と見紛う高い品質の立体像を肉眼で観察可能な形で提示できた点において価値ある結果である．

第 3 章と付録 A に示した伝搬理論から近似を用い正射影光線-波面変換法を導出する過程は本論文のみならず他の光線ベースの手法においても，より確かな理論的見通しを立てることを可能とする点で意義ある成果である．実際に第 6 章で提案した深度可変法はこの理論構築の中で生まれた着想であり，他グループの提案する手法においても同様の発想で近似精度の向上を図ることができるだろう．またこの過程は従来全く別の相対する計算法と考えられてきたポリゴン法と RS 面を用いた計算法が実のところ異なる境界条件と近似を用い全く同じ問題を扱っていることを示唆している．CGH 計算法間の関係性を明らかにすることで，今後これらの特徴を併せ持つより高い質の立体像を計算することが可能になるであろう．

第 7 章で提案した高速・正確な波面分割伝搬法は CGH のみならず，波面伝搬を扱うデジタル・ホログラフィ，レンズレスイメージング，回折光学素子の設計など様々な分野に応用可能な手法である．実装も簡潔であり，そのような汎用性の高い手法を提案・実証できたという点で意義がある．

本論文の提案する CGH 計算法は表示形態によらない汎用的な手法である．従って静止画として 3D サイネージ，電子的な動画像表示として Near-Eye ディスプレイ，裸眼観察型 3D ディスプレイなど様々な表示形態において応用可能である．例として A4 サイズ，すなわち $297\,\mathrm{mm} \times 210\,\mathrm{mm}$，波長 $532\,\mathrm{nm}$，視野角 $\pm 60\,\mathrm{deg}$ の静止画の 3D サイネージを考える．この条件から必要な画素数は $990,000 \times 700,000$ となり，ピクセルピッチは $0.3\,\mu\mathrm{m}$ となる．$8K \times 8K$ のタイルに分割するとし，物体面-CGH 面間の距離を $200\,\mathrm{mm}$ とする．光線波面変換を用いて CGH を計算する場合，仮に本手法を用いることで一枚のタイルを 3.5 秒にて計算可能であるとすると，総計算時間はタイル数に比例するため約 10 時間と算出することができる．一方で，全く同じ CGH を従来の RS 面を用いた手法にて計算する場合には，物体面，CGH 面の全てのタイルの組み合わせだけ伝搬計算が必要であることを考えると，約 $4,000$ 日の計算時間が必要であると試算される．仮に 100 並列し計算するとしても従来法では約 40 日を要する一方で提案手法では約 6 分で計算可能であることになる．さらに深い奥行きを表現するため複数の RS 面とその間の相互オクルージョン処理を利用するとすれば，空間全体を充填する場合従来手法では面数に対し指数関数的に計算時間が増大するため，現実的な計算時間では計算不可能となる．一方の提案手法では面数に対し比例するだけの計算時間にて計算可能であるために，従来不可能であった広い奥行き幅の立体像を計算可能であると言える．

## 8.3 課題と今後の展望

まずは本論文の究極目標であったディスプレイ手前から無限遠まで連続的に広がる，現実と見紛う写実性の立体空間再生の実証が残された点において課題が残る．奥行き 500 mm まで空間全体を写実的な立体像により充填するような CGH の計算と光学再生による確認は本論文にて達成しているが，今後本提案手法をさらに発展させ無限遠までの奥行きを表現可能とすることが必要である．改良の余地が残されている点として，正射影光線の空間的なサンプリング間隔を奥行きによって変化させることで，深い奥行きをより効率的に計算するという手法が考えられる．同様のコンセプト自体は過去にも点光源法において提案されている [99]．人間の目の分解能を考えれば奥の物体ほど荒いサンプリング間隔にて計算してよいはずであり，これまで様々な形で提案されているサンプリング間隔をスケール可能な伝搬計算法を応用することでそれが可能となるだろう．またマルチ GPU を用いた高速並列計算 [100]，またスーパーコンピュータなどを用いることで，より大規模かつ広い奥行き幅の立体像が計算可能となるであろう．

コヒーレント光で照明することに由来するスペックルノイズの除去も大きな課題として残されている．深い奥行きを高い分解能で表示するためには高いコヒーレンスを持つ照明光が不可欠でありスペックルノイズは避けられない問題である．RS 面用いた計算法においてもこれまでに時分割表示によりスペックルノイズを低減する手法が提案されているため [17, 73]，それらとの融合により解決を図ることが必要である．

またフルカラー表示も実用化に向けては解決すべき重要な課題である．これまでに時間多重方式，カラーフィルタを用いた空間分割方式，フォトポリマーへの転写方式など様々な方式が提案されているが [8–13]，どの方式であれば本手法にて達成された高い分解能と写実性を損うことなくフルカラー表示を達成可能であるか検討が必要である．

また再生された立体像の評価法についても検討を要する．CGH により再生された立体像，特に本論文にて達成された奥行き幅が広く写実性の高い立体像の評価法においては，未だ研究途上の分野である．本論文中では分解能の評価に留まっているが，奥行きや質感の評価法の構築において今後より詳細に検討を行い，主観評価実験を含め立体像の質に関するより緻密な議論を行う必要がある．

さらに 3DCG にて用いられている技術との融合もより深く検討すべきである．レンダリング，すなわち光線取得に関わる部分では現在提案されている，また将来提案されるであろう多くの技術が直接適用可能であると考えられる．特に本論文においては膨大な視点数から正射影画像を取得する必要があるが，動画のフレーム補完技術 [101] は本手法において大いに有用であると考えられる．またコンセプト自体のアナロジーから CGH 計算を発展させることも可能であり，例として注視点以外の像の解像度を低下させることで高速化を図る Foveated Rendering と呼ばれる技術 [102] は将来の CGH の電子的動画表示における高速計算に有用であろう．また光線を像面から追跡しレンダリングする技術は 3DCG ではごく一般的であるが，これを CGH 計算において適用する場合にはホログラム面から波面を追跡し計算するというアイデアとして応用することができる．実のところ，CGH に入射する波面のみから計算する本論文の手法はこの一例である

ということができる．将来的にはこれをさらに一般化した技術が発展すると考えられる．

# 付録 A

# 正射影光線-波面変換における回折理論と幾何光学近似

現在までに光線情報を用いる CGH 計算手法はいくつか提案されているが，実のところ波動光学的な取り扱いを始点とし，そこから妥当な近似の帰結として光線ベースの計算法までたどり着いている手法は少ない．本項では正射影光線-波面変換法の原理が確かに角スペクトル伝搬理論の近似として導出可能であることを理論的に示す．

## A.1　幾何光学近似とアイコナール方程式の導出

ここでは幾何光学近似について説明する．注意としてこの部分に関しては Born and Wolf の著書などに記述される通り [90] 良く知られる知られる事実であり，本論文の貢献ではない．真空中の単色光波場 $w(\boldsymbol{r})$ は一般に振幅 $a(\boldsymbol{r})$ と位相 $\phi\boldsymbol{r}$ を用いて以下の形式で記述することができる．

$$w(\boldsymbol{r}) = a(\boldsymbol{r}) \exp(jk\phi(\boldsymbol{r})) \tag{A.1}$$

だたし $k$ は波数である．この光波場は支配方程式である Helmholz 方程式

$$(\nabla^2 + k^2)w(x, y, z) = 0 \tag{A.2}$$

を満たす．従って式 (A.2) に式 (A.1) を代入すると

$$k^2(1 - |\nabla\phi(\boldsymbol{r})|^2)a(\boldsymbol{r}) + \nabla^2 a(\boldsymbol{r}) + jk\left\{2\nabla a(\boldsymbol{r}) \cdot \nabla\phi(\boldsymbol{r}) + a(\boldsymbol{r})\nabla^2\phi(\boldsymbol{r})\right\} = 0 \tag{A.3}$$

この式が恒等的に成り立つためには

$$k^2(1 - |\nabla\phi(\boldsymbol{r})|^2)a(\boldsymbol{r}) + \nabla^2 a(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{A.4}$$

$$2\nabla a(\boldsymbol{r}) \cdot \nabla\phi(\boldsymbol{r}) + a(\boldsymbol{r})\nabla^2\phi(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{A.5}$$

特に式 (A.4) に関して

$$k^2(1 - |\nabla\phi(\boldsymbol{r})|^2)a(\boldsymbol{r}) + \nabla^2 a(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{A.6}$$

$$|\nabla\phi(\boldsymbol{r})|^2 = 1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{\nabla^2 a(\boldsymbol{r})}{a(\boldsymbol{r})} \tag{A.7}$$

波長 $\lambda$ が十分に小さい場合を考える．これは幾何光学近似と呼ばれ，この近似のもとで以下の**アイコナール方程式**を得ることができる．

$$|\nabla\phi(\boldsymbol{r})|^2 = 1 \tag{A.8}$$

また式 (A.5) は輸送方程式などと呼ばれる．ベクトル $\nabla\phi(\boldsymbol{r})$ を光線ベクトルという．

ここで

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \text{const.} \tag{A.9}$$

によって記述される等位相面（**波面**と呼ばれる）を考える．等値な陰関数表示

$$F(\boldsymbol{r}) = \phi(\boldsymbol{r}) - C = 0 \tag{A.10}$$

が与える面に対し両辺の全微分をとると

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0 \tag{A.11}$$

$$\nabla\phi(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \tag{A.12}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は接平面上のベクトルである．すなわち **光線方向は波面と直交する．**

## A.2 光波場のフーリエ変換と正射影関数

以下より，正射影波面変換にまつわる諸定理について記述してゆく．簡単のため 1 次元の光波場について考える．その対称性から 2 次元への拡張は容易である．区間 $[0, S_x]$ に定義された光波場 $w(x)$ において，そのフーリエ変換は以下の式で定義される．

$$W(f_x) = \mathcal{F}\left[w(x)\right] \tag{A.13}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} w(x)\exp(-j2\pi x f_x)dx \tag{A.14}$$

ここで次の関数を定義する．

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{A.15}$$

この関数を用いると光波場 $w(x)$ を以下のように小区間 $[n\Delta x, (n+1)\Delta x]$ の光波場の和として書くことができる．

$$w(x) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n(x - n\Delta x) \tag{A.16}$$

ただし $N$ を整数として

$$\Delta x = \frac{S_x}{N} \tag{A.17}$$

$$w_n(x) = \Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right) w(x + n\Delta x) \tag{A.18}$$

すると式 (A.13) のフーリエ変換は小区間のフーリエ変換の和として表すことができ

$$\mathcal{F}\left[w(x)\right] = \mathcal{F}\left[\sum_n w_n(x - n\Delta x)\right] \tag{A.19}$$

$$= \sum_n \mathcal{F}\left[w_n(x - n\Delta x)\right] \tag{A.20}$$

$$= \sum_n W_n(f_x)\exp(-j2\pi n\Delta x f_x) \tag{A.21}$$

ここで

$$W_n(f_x) = \mathcal{F}[w_n(x)] \tag{A.22}$$

式 (A.21) を以下のように変形する．

$$\mathcal{F}[w(x)] = \sum_n W_n(f_x)\exp(-j2\pi n\Delta x f_x) \tag{A.23}$$

$$= \sum_n \left\{\int_{-\infty}^{\infty} W_n(\xi)\delta(f_x - \xi)d\xi\right\}\exp(-j2\pi n\Delta x f_x) \tag{A.24}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_n W_n(\xi)\exp(-j2\pi x\Delta x f_x)\right\}\delta(f_x - \xi)d\xi \tag{A.25}$$

ただし $\delta(x)$ はデルタ関数である．

さらに次のような関数を新たに定義する．

$$o(s,\xi) = \left\{\sum_{n=0}^{N-1} W_n(\xi)\delta(s - n\Delta x)\right\}\exp(-j2\pi\xi s) \tag{A.26}$$

この関数を正射影関数と呼ぶことにする．物理的には，ある小領域の角スペクトル（後に述べるようにこの量は光線と呼ばれる）の空間分布を示すものである．この関数の $s$ に関するフーリエ変換は

$$O(f_x,\xi) \tag{A.27}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} o(s,\xi)\exp(-j2\pi s f_x)ds \tag{A.28}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_n W_n(\xi)\delta(s - n\Delta x)\right\}\exp(-j2\pi\xi s)\exp(-j2\pi s f_x)ds \tag{A.29}$$

$$= \sum_n W_n(\xi)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-j2\pi s(f_x + \xi))\delta(s - n\Delta x)ds \tag{A.30}$$

$$= \sum_n W_n(\xi)\exp(-j2\pi n\Delta x(f_x + \xi)) \tag{A.31}$$

従って

$$O(f_x - \xi,\xi) = \sum_n W_n(\xi)\exp(-j2\pi n\Delta x f_x) \tag{A.32}$$

上式 (A.32) を式 (A.25) に代入することで次式を得る．

$$\mathcal{F}[w(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} O(f_x - \xi,\xi)\delta(f_x - \xi)d\xi \tag{A.33}$$

従ってある波面のフーリエ変換は正射影関数のフーリエ変換の **0** 次成分の空間周波数分布として与えられるという重要な結論が得られる．

## A.3 光波場の正射影変換

直線上の光波場 $w(x)$ からある変数 $\alpha$ における正射影関数 $o(x,\alpha)$ への変換 $T_\alpha$ を考える．ここではこの関数を正射影変換と呼ぶことにする．この変換は，与えられた光波場から特定の波数を持った平面波成分を，その空間的な分布を共に抽出する変換であると考えることができる．前項において正射影関数は以下の式で与えられていた．

$$o(x,\alpha) = \left\{ \sum_n W_n(\alpha)\delta(x - n\Delta x) \right\} \exp(-j2\pi x\alpha) \tag{A.34}$$

ここに

$$W_n(f_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right) w(x + n\Delta x) \exp(-j2\pi x f_x) dx \tag{A.35}$$

を代入することで，以下の正射影変換を定義することができる．

$$o(x,\alpha) \tag{A.36}$$

$$= T_\alpha[w(x)] \tag{A.37}$$

$$= \left\{ \sum_n \delta(x - n\Delta x) \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right) w(x + n\Delta x) \exp(-j2\pi\alpha x) dx \right\} \tag{A.38}$$

$$\exp(-j2\pi\alpha x) \tag{A.39}$$

## A.4 伝搬におけるテイラー展開と幾何光学近似

直線 $z = 0$ 上の領域 $[0, S_x]$ に定義された光波場 $w(x,0)$ を考える．所望の平面 $z = d$ における光波場は，$w(x,0)$ を境界条件とする Helmholz 方程式の解として与えられる．角スペクトル理論によると，解は以下の式で表すことができる [89].

$$w(x,d) = \int_{-\infty}^{\infty} W(f_x,0) H(f_x;d) \exp(j2\pi x f_x) df_x \tag{A.40}$$

ここで $W(f_x,0) = \mathcal{F}_x[w(x,0)]$ であり，また $H(f_x,d)$ は以下の式で与えられる伝達関数である．

$$H(f_x;d) = \begin{cases} \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda} d\sqrt{1-(\lambda f_x)^2}\right) & 1-(\lambda f_x)^2 > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{A.41}$$

さて，直線 $z = 0$ のある小区間 $[0, \Delta x]$ 上に定義された光波場

$$w_\Delta(x,0) = a(x)\exp(jk\phi(x)) \tag{A.42}$$

の伝搬を考える．この式を以下のように変形する．

$$a(x)\exp(jk\phi(x)) \tag{A.43}$$

$$= a(x) \int_{-\infty}^{\infty} P(f_x) \exp(j2\pi x f_x) df_x \tag{A.44}$$

つまり振幅部分は残し，位相部分のみ平面波展開している．ここである変数 $\alpha$ に対し，次の関数を定義する．

$$p(x,0;\alpha) = a(x)P(\alpha)\exp(j2\pi\alpha x) \tag{A.45}$$

式 (A.45) を用いて式 (A.44) を表現すると

$$w_{\Delta}(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,0;\alpha)d\alpha \tag{A.46}$$

さて角スペクトル理論にもとづき $p(x,0;\alpha)$ の伝搬を考える．はじめにこの光波場のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[p(x,0;\alpha)] = A(f_x\alpha)P(\alpha) \tag{A.47}$$

ここで $A(f_x) = \mathcal{F}[a(x)]$ である．式 (A.40) から

$$p(x,d;\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} A(f_x-\alpha)P(\alpha)H(f_x;d)\exp(j2\pi x f_x)df_x \tag{A.48}$$

伝達関数 $H(f_x;d)$ の点 $f_x = \alpha$ におけるテイラー展開を考える．ただし伝達関数全体を展開するのではなく，その位相

$$\psi(x) = \frac{2\pi}{\lambda}d\sqrt{1-(\lambda f_x)^2} \tag{A.49}$$

のみを展開する．$f_x$ に対する偏微分は以下の式で書くことができる．

$$\frac{\partial\psi}{\partial f_x} = -2\pi d\frac{\lambda f_x}{\sqrt{1-(\lambda f_x)^2}} \tag{A.50}$$

従って 1 次近似のもとで

$$\psi(f_x:d) \simeq \psi(\alpha) + \frac{\partial\psi}{\partial f_x}|_{\alpha}(f_x-\alpha) \tag{A.51}$$

$$= kd\sqrt{1-(\lambda\alpha)^2} - 2\pi d\frac{\lambda\alpha}{\sqrt{1-(\lambda\alpha)^2}}(f_x-\alpha) \tag{A.52}$$

ここでアイコナール方程式 (A.8) の要請から $p(x,0:\alpha)$ の位相 $\phi(\boldsymbol{r})$ に対して以下の関係が成り立つ．

$$\nabla\phi = \begin{bmatrix}\partial_x\phi \\ \partial_z\phi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda\alpha \\ \sqrt{1-(\lambda\alpha)^2}\end{bmatrix} \tag{A.53}$$

加えて光線ベクトル $\nabla\phi$ が $x$ 軸となす角について以下のような関係を得ることができる．

$$\tan\theta_{\alpha} = \frac{\partial_x\phi}{\partial_z\phi} \tag{A.54}$$

従って展開した結果をよりシンプルな形に変形することが可能になり

$$\psi(f_x:d) = k\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} - 2\pi\mathrm{d}xf_x \tag{A.55}$$

ただし

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d\tan\theta_{\alpha} \\ d\end{bmatrix} \tag{A.56}$$

この関係から回折積分 (A.48) は以下の形に近似することができる．

$$p(x,d;\alpha) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} A\left(f_x-\alpha\right) P\left(\alpha\right) \exp(jk\nabla\phi\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}) \tag{A.57}$$

$$\exp(j2\pi((x-\mathrm{d}x)f_x)df_x \tag{A.58}$$

$$= \exp(jk\nabla\phi\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r})\cdot p(x-\mathrm{d}x,0;\alpha) \tag{A.59}$$

$$= \exp\left(jk\frac{d}{\sqrt{1-(\lambda\alpha)^2}}\right) p\left(x-d\frac{\lambda\alpha}{\sqrt{1-(\lambda\alpha)^2}},0;\alpha\right) \tag{A.60}$$

従ってこれを式 (A.46) に代入して

$$w_{\Delta}(x,d) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(jk\frac{d}{\sqrt{1-(\lambda\alpha)^2}}\right) p\left(x-d\frac{\lambda\alpha}{\sqrt{1-(\lambda\alpha)^2}},0;\alpha\right) d\alpha \tag{A.61}$$

として幾何光学的な空間座標の移動に加え伝搬光路長に伴う位相変化の項をかけ合わせればよいことになる．従って重要な結論として**角スペクトル伝搬の 1 次近似は位相変化を伴う幾何光学的伝搬である**という知見を得ることができる．

## A.5 輸送方程式と光線-波面変換法の導出

式 (A.45) が与えるある振幅分布を持つ平面波

$$p(x,0;\alpha) = a(x)P\left(\alpha\right)\exp\left(j2\pi\alpha x\right) \tag{A.62}$$

が Helmholz 方程式 (A.2) の解足りうるためにはアイコナール方程式と同時に輸送方程式 (A.5) を満足する必要がある．式 (A.62) において $\nabla^2\phi = 0$ であることに注意すると，輸送方程式は

$$\nabla a(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\phi = 0 \tag{A.63}$$

として与えられる．定義域 $[0,\Delta x]$ における任意の 2 点 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ において式 (A.63) を満足するため

$$(\nabla a(\boldsymbol{r}_1)-\nabla a(\boldsymbol{r}_2))\cdot\nabla\phi = 0 \tag{A.64}$$

より

$$\nabla a(\boldsymbol{r}) = \text{const.} \tag{A.65}$$

また同様に異なる $\alpha_1,\alpha_2$ が作る光線ベクトル $\nabla\phi_{\alpha_1},\nabla\phi_{\alpha_2}$ に対しても

$$\nabla a(\boldsymbol{r})\cdot(\nabla\phi_{\alpha_1}-\nabla\phi_{\alpha_2}) = 0 \tag{A.66}$$

の要請から

$$\nabla a(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{A.67}$$

すなわち

$$a(\boldsymbol{r}) = \text{const.} \tag{A.68}$$

定義域内でこの条件を満たす必要十分な関数として

$$a(x) = a\Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \tag{A.69}$$

ただし $a$ は定数である．この式を用いて式 (A.62) を新たに書き直して

$$\rho(x,\alpha) = p(\alpha)\Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\exp\left(j2\pi\alpha x\right) \tag{A.70}$$

ただし

$$p(\alpha) = aP\left(\alpha\right) \tag{A.71}$$

本論文においてこの定数と微小領域の開口をかけたある角度を持つ平面波を**光線**と定義する．従って式 (A.46) にこれを代入することで

$$w_{\Delta}(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,\alpha)d\alpha \tag{A.72}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}p(\alpha)\Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\exp\left(j2\pi\alpha x\right)d\alpha \tag{A.73}$$

$$= \Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\mathcal{F}^{-1}[p(f_x)] \tag{A.74}$$

ここで $|p(f_x)|$ は透視投影像と呼ばれる分布に対応している．すなわち**微小領域の波面はある位相を与えた透視投影像の逆フーリエ変換として求めることができる**という結論が得られる．これは従来**光線-波面変換法**と呼ばれているものである．

## A.6 光線の作る場とその物理的解釈

導かれた光線が空間的にどのような場を作るかについて調べる．式 (A.70) と式 (A.60) より

$$\rho(x,z;\alpha) = \exp\left(jk\frac{z}{\sqrt{1-(\lambda\alpha)^2}}\right)p(\alpha)\Pi\left(\frac{x-dx}{\Delta x}\right)\exp\left(j2\pi\alpha(x-dx)\right) \tag{A.75}$$

指数項の内部について変形すると

$$jk\frac{z}{\sqrt{1-(\lambda\alpha)^2}} + j2\pi\alpha(x-dx) \tag{A.76}$$

$$= jk\frac{z}{\sqrt{1-(\lambda\alpha)^2}} + j\frac{2\pi}{\lambda}(\lambda\alpha)\left(x - z\frac{\lambda\alpha}{\sqrt{1-(\lambda\alpha)^2}}\right) \tag{A.77}$$

$$= jk\left(x(\lambda\alpha) + z\sqrt{1-(\lambda\alpha)^2}\right) \tag{A.78}$$

$$= \nabla\phi\cdot\boldsymbol{r} \tag{A.79}$$

同様に関数 $\Pi$ の内部について

$$\frac{x-dx}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(x - z\frac{\lambda\alpha}{\sqrt{1-(\lambda\alpha)^2}}\right) \tag{A.80}$$

$$= \frac{1}{\Delta x\sqrt{1-(\lambda\alpha)^2}}\left(x\sqrt{1-(\lambda\alpha)^2} - z(\lambda\alpha)\right) \tag{A.81}$$

$$= \frac{1}{\Delta x\sqrt{1-(\lambda\alpha)^2}}R_{\frac{\pi}{2}}\nabla\phi\cdot\boldsymbol{r} \tag{A.82}$$

ただし $R_\theta$ は角度 $\theta$ の回転変換行列である．従って式 (A.75) は，$x, y$ 軸を作る基底ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を用いて次のように変形できる．

$$\rho(\boldsymbol{r}; \nabla\phi \cdot \boldsymbol{e}_1) = p(\nabla\phi \cdot \boldsymbol{e}_1) \exp(jk\nabla\phi \cdot \boldsymbol{r}) \Pi\left(\frac{1}{\Delta x \nabla\phi \cdot \boldsymbol{e}_2} R_{\frac{\pi}{2}} \nabla\phi \cdot \boldsymbol{r}\right) \tag{A.83}$$

この式からある光線 $r(\boldsymbol{r}; \alpha)$ は，**光線ベクトル $\nabla\phi$ 方向に伝搬する持つ平面波に対し係数 $p$ を与え，光線ベクトルと直交する方向に矩形領域の制限を加えた場を作る**という物理的な解釈が可能になる．

また任意のユニタリ変換 U の与える座標変換 $\boldsymbol{r}' = \mathrm{U}\boldsymbol{r}$ に対し内積の値は保存されることから，光線の座標変換も以下の簡便な形で記述することができる．

$$\rho(\boldsymbol{r}'; \mathrm{U}\nabla\phi \cdot \boldsymbol{u}_1) = p(\mathrm{U}\nabla\phi \cdot \boldsymbol{u}_1) \exp(jk\mathrm{U}\nabla\phi \cdot \boldsymbol{r}') \Pi\left(\frac{1}{\Delta x \nabla\phi \cdot \boldsymbol{u}_2} R_{\frac{\pi}{2}} \mathrm{U}\nabla\phi \cdot \boldsymbol{r}'\right) \tag{A.84}$$

ただし $\boldsymbol{u}_\mu = \mathrm{U}\boldsymbol{e}_\mu$ とする．

## A.7 直線上の光波場の区分的伝搬と正射影関数

ある有限な区間 $[0, S_x]$ で定義された直線 $z = 0$ 上の光波場 $w(x, 0)$ を境界条件とする $z = d$ での光波場の伝搬を幾何光学近似に基づいて考える．この直線状に以下の $N$ 個の点 $\boldsymbol{r}_n$ を与える．

$$\boldsymbol{r}_n = \begin{bmatrix} n\Delta x \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.85}$$

ただし

$$\Delta x = \frac{S_x}{N} \tag{A.86}$$

この直線上の光波場を以下のように区分的に表現する．

$$w(x, 0) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n(x - n\Delta x, 0) \tag{A.87}$$

$$w_n(x, 0) = \Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right) w(x + n\Delta x, 0) \tag{A.88}$$

式 (A.88) を以下のように変形する．

$$w_n(x, 0) = \Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \int_{-\infty}^{\infty} p_n(f_x) \exp(j2\pi x f_x) df_x \tag{A.89}$$

従ってこれまでの議論の通りこの変形の元で次の光線を定義できる．

$$\rho_n(x, 0, \alpha) = p_n(\alpha) \Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \exp(j2\pi\alpha x) \tag{A.90}$$

この光線形式の表現のもとで，$z=0$ 上の光波場を以下のように変形する．

$$w(x,0) \tag{A.91}$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} w_n(x-n\Delta x,0) \tag{A.92}$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x-n\Delta x,d,\alpha)d\alpha \right\} \tag{A.93}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} p_n(\alpha)\Pi\left(\frac{x-n\Delta x}{\Delta x}\right) \exp\left(j2\pi\alpha(x-n\Delta x)\right) \right\} d\alpha \tag{A.94}$$

この被積分関数を以下のように正射影関数を用いて表す．

$$o'(x,0,\alpha) \tag{A.95}$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} p_n(\alpha)\Pi\left(\frac{x-n\Delta x}{\Delta x}\right) \exp\left(j2\pi\alpha(x-n\Delta x)\right) \tag{A.96}$$

これは光線の総和であるから，十分に小さい伝搬距離 $d$ に対しては

$$o'(x,d,\alpha) \tag{A.97}$$
$$\simeq \exp\left(jk\frac{d}{\sqrt{1-(\lambda\alpha)^2}}\right) o'\left(x-d\frac{\lambda\alpha}{\sqrt{1-(\lambda\alpha)^2}},0,\alpha\right) \tag{A.98}$$
$$= \exp\left(jk\nabla\phi(\alpha)\cdot\delta\boldsymbol{r}(d,\alpha)\right) o'\left(x-\delta x(d,\alpha),0,\alpha\right) \tag{A.99}$$

従って

$$w(x,d) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} o'\left(x,d,\alpha\right) d\alpha \tag{A.100}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(jk\nabla\phi\cdot\delta\boldsymbol{r}\right) o'\left(x-\delta x,0,\alpha\right) d\alpha \tag{A.101}$$

として，微小距離の伝搬を正射影関数の空間的なシフトと定数位相の付加から求めることができる．

ここで $w(x,d)$ の正射影変換を考える．

$$T_\alpha[w(x,d)] \tag{A.102}$$
$$= T_\alpha\left[\int_{-\infty}^{\infty} o'\left(x,d,\alpha'\right) d\alpha'\right] \tag{A.103}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} T_\alpha\left[o'\left(x,d,\alpha'\right)\right] d\alpha' \tag{A.104}$$

単一の正射影関数の正射影変換について

$$T_\alpha\left[o'\left(x,d,\alpha'\right)\right] \tag{A.105}$$
$$= T_\alpha\left[o'\left(x-\delta x,0,\alpha'\right)\right] \tag{A.106}$$
$$= \exp(-j2\pi\alpha x)\sum_n \delta(x-n\Delta x)\int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \tag{A.107}$$
$$\exp\left(jk\nabla\phi\cdot\delta\boldsymbol{r}\right) o'(x-\delta x+n\Delta x,d,\alpha')\exp(-j2\pi\alpha x)dx \tag{A.108}$$

この計算について順に見てゆく前に，以下の条件を満たすような $\alpha'$ について調べることとする．

$$\delta x = n_d \Delta x \tag{A.109}$$

一般の場合については後に拡張する．

まず

$$\Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right) o'(x - \delta x + n\Delta x, d, \alpha') \tag{A.110}$$

$$= \Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \sum_{m=0}^{N-1} c(d,\alpha') p_m(\alpha') \Pi\left(\frac{x-(m+n_d-n)\Delta x}{\Delta x}\right) \tag{A.111}$$

$$\exp\left(j2\pi\alpha'(x-(m+n_d-n)\Delta x)\right) \tag{A.112}$$

式の煩雑化を避けるため $c_l = \exp(jk\nabla\phi\cdot\delta\boldsymbol{r})$ とした．関数 $\Pi$ の積が値を持つ $m = n - n_d$ のみ考えればよいので

$$\Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right) o'(x - \delta x + n\Delta x, d, \alpha') \tag{A.113}$$

$$= \Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right) c_l p_{n-n_d}(\alpha') \exp\left(j2\pi\alpha' x\right) \tag{A.114}$$

次に

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right) o'(x - \delta x + n\Delta x, d, \alpha') \exp(-j2\pi\alpha x) dx \tag{A.115}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right) c_l p_{n-n_d}(\alpha') \exp\left(j2\pi(\alpha-\alpha')x\right) dx \tag{A.116}$$

$$= c_l p_{n-n_d}(\alpha') \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \exp\left(j2\pi(\alpha-\alpha')x\right) dx \tag{A.117}$$

$$= c_l p_{n-n_d}(\alpha') \Delta x \hat{\Pi}(\Delta x(\alpha-\alpha')) \tag{A.118}$$

ただし $\hat{\Pi}(f_x) = \mathcal{F}[\Pi(x)]$ とした．ここまで進めると

$$T_\alpha\left[o'\left(x,d,\alpha'\right)\right] \tag{A.119}$$

$$= \left\{\sum_n \delta(x-n\Delta x) c_l p_{n-n_d}(\alpha') \Delta x \hat{\Pi}(\Delta x(\alpha-\alpha'))\right\} \exp(-j2\pi\alpha x) \tag{A.120}$$

従って $w(x,d)$ の正射影変換について

$$o(x,d,\alpha) \tag{A.121}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} T_\alpha\left[o'\left(x,d,\alpha'\right)\right] d\alpha' \tag{A.122}$$

$$= \left\{\sum_n \delta(x-n\Delta x) c_l \int_{-\infty}^{\infty} p_{n-n_d}(\alpha') \Delta x \hat{\Pi}(\Delta x(\alpha-\alpha')) d\alpha'\right\} \tag{A.123}$$

$$\exp(-j2\pi\alpha x) \tag{A.124}$$

総和内部に現れた畳み込み積分について

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{n-n_d}(\alpha')\Delta x\hat{\Pi}(\Delta x(\alpha-\alpha'))d\alpha' \tag{A.125}$$
$$= \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[p_{n-n_d}(\alpha)]\cdot\Pi(\frac{x}{\Delta x})\right] \tag{A.126}$$
$$= \mathcal{F}\left[w(x+(n-n_d)\Delta x)\cdot\Pi(\frac{x}{\Delta x})\cdot\Pi(\frac{x}{\Delta x})\right] \tag{A.127}$$
$$= p_{n-n_d}(\alpha) \tag{A.128}$$

従って次の正射影関数を導くことができる．

$$o(x,d,\alpha) = \left\{\sum_n \delta(x-n\Delta x)c_l p_{n-n_d}(\alpha)\right\}\exp(-j2\pi\alpha x) \tag{A.129}$$

次に一般の $\alpha$ すなわち $\delta x$ が $\Delta x$ の整数倍にならないようなケースについて考える．このとき $\delta x$ は以下の式で表される．

$$\delta x = n_d\Delta x + l \tag{A.130}$$

だたし $0 \le l \le \Delta x$ とする．このとき

$$\Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\sum_{m=0}^{N-1} p_m(\alpha)\Pi\left(\frac{x-(m+n_d-n)\Delta x-l}{\Delta x}\right) \tag{A.131}$$
$$\exp\left(j2\pi\alpha'(x-(m+n_d-n)\Delta x-l)\right) \tag{A.132}$$
$$= p_{n-n_d-1}(\alpha)\Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\Pi\left(\frac{x+\Delta x-l}{\Delta x}\right)\exp\left(j2\pi\alpha'(x+\Delta x-l)\right) \tag{A.133}$$
$$+p_{n-n_d}(\alpha)\Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\Pi\left(\frac{x-l}{\Delta x}\right)\exp\left(j2\pi\alpha'(x-l)\right) \tag{A.134}$$
$$= p_{n-n_d-1}(\alpha)\Pi\left(\frac{x}{l}\right)\exp\left(j2\pi\alpha'(x+\Delta x-l)\right) \tag{A.135}$$
$$+p_{n-n_d}(\alpha)\Pi\left(\frac{x-l}{\Delta x-l}\right)\exp\left(j2\pi\alpha'(x-l)\right) \tag{A.136}$$

となる．式を進めると現れる畳み込み積分について 2 つの項それぞれ分けて考える．第 1 項について

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}\left[p_{n-n_d-1}(f_x)\exp(j2\pi f_x(\Delta x-l))\right]\cdot\Pi\left(\frac{x}{l}\right)\right] \tag{A.137}$$
$$= \mathcal{F}\left[w\left(x+(n-n_d-1)\Delta x+(\Delta x-l)\right)\Pi\left(\frac{x-(\Delta x-l)}{\Delta x}\right)\cdot\Pi\left(\frac{x}{l}\right)\right] \tag{A.138}$$
$$= \mathcal{F}\left[w(x-\delta x+n\Delta x)\Pi\left(\frac{x}{l}\right)\right] \tag{A.139}$$

第 2 項について

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}\left[p_{n-n_d}(f_x)\exp(j2\pi f_x(-l))\right]\cdot\Pi\left(\frac{x-l}{\Delta x-l}\right)\right] \tag{A.140}$$
$$= \mathcal{F}\left[w(x+(n-n_d)\Delta x-l)\Pi\left(\frac{x-l}{\Delta x}\right)\cdot\Pi\left(\frac{x-l}{\Delta x-l}\right)\right] \tag{A.141}$$
$$= \mathcal{F}\left[w(x-\delta x+n\Delta x)\Pi\left(\frac{x-l}{\Delta x-l}\right)\right] \tag{A.142}$$
$$\tag{A.143}$$

従って第 1 項と第 2 項を足し合わせると

$$\mathcal{F}\left[w(x-\delta x+n\Delta x)\left\{\Pi\left(\frac{x}{l}\right)+\Pi\left(\frac{x-l}{\Delta x-l}\right)\right\}\right] \tag{A.144}$$

$$=\mathcal{F}\left[w(x-\delta x+n\Delta x)\Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\right] \tag{A.145}$$

従って $p_n(\alpha)$ の定義をさらに拡張して

$$p(\alpha,s)=\mathcal{F}\left[w(x+s)\Pi\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\right] \tag{A.146}$$

とすることで一般の $\alpha$ に対しても以下のように正射影関数を書くことができる．

$$o(x,d,\alpha)=\left\{\sum_n c_l\delta(x-n\Delta x)p(\alpha,n\Delta x-\delta x)\right\}\exp(-j2\pi\alpha x) \tag{A.147}$$

これは明らかに先に導いた $\delta x$ が $\Delta x$ の整数倍となるようなケースを包含している．したがって**微小距離の伝搬であれば波面を正射影関数に分解して幾何光学近似から求めることが可能であり，なおかつ伝搬先の面で正射影関数を取り直しても正射影関数の形は保持されている**ことが分かる．

## A.8 正射影光線-波面変換法の導出

前項で得られた結論とはすなわち次のようなものである．

1. ある波面のフーリエ変換は正射影関数のフーリエ変換の和として表現できる
2. 角スペクトル伝搬の 1 次近似は位相変化を伴う幾何光学的伝搬である
3. ある光波場の短距離の伝搬を正射影関数に分解して考えることができる

これらの事実に基づけばある物体面から CGH までの距離 $z$ の伝搬を以下のプロセスに分解することが可能になる．

1. 物体面近傍の深度 $\delta_d$ に展開点を設ける
2. 物体波面を正射影関数に分解
3. 物体面から展開点まで幾何光学に基づき伝搬
4. 正射影関数をフーリエ変換し合成することで展開点での角スペクトルを得る
5. 残存する伝搬距離 $d-\delta_d$ の伝搬伝達関数を乗算
6. 逆フーリエ変換

光波場を扱う場合に限り正射影関数を正射影光線と呼ぶことにする．また上記の議論からこれまで RS 面と呼んでいたものは位相のテイラー展開における展開点であると理解できることが分かる．この展開点を，波面を正射影光線に分解するという観点から改めて正射影光線サンプリング（ORS: Orthographic Ray Sampling）面と呼ぶことにする．実用面から考えると波面をサンプリングするよりも光線をサンプリングする方が，仮想物体・実物体共に遥かに簡便である．この点に提案手法の強みがあり実際のホログラムの計算では上記のプロセスを光線のサンプリングからスタートすることになる．すなわち

1. 物体面近傍の深度 $\delta_d$ に展開点を設ける
2. 展開点で物体波面の正射影光線をサンプリング
3. 正射影光線をフーリエ変換し合成することで展開点での角スペクトルを得る
4. 残存する伝搬距離 $d-\delta_d$ の伝搬伝達関数を乗算
5. 逆フーリエ変換

として CGH 面上での波面を計算できることになる．ただし光線の初期位相については簡単には求めることができないことに注意する．これまでに提案されている PAS との融合によりこの点については改善することができる．またここで「正射影画像」を正射影光線の位相を除き強度のみ取得したものと定義する．基本的に我々が簡単に取得可能なのは正射影画像のみである．

実際の計算では無限の本数の光線を取得することは叶わない．したがって短距離伝搬の幾何光学近似に加え，光線の角度を離散化するという近似を行う必要がある．これは正射影画像のフーリエ変換を合成する段，すなわち式 (A.33) における次のような近似として解釈することができる．

$$\mathcal{F}[w(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} O(f_x-\xi,\xi)\delta(f_x-\xi)d\xi \tag{A.148}$$

$$\simeq \sum_m O(f_x-m\Delta\theta, m\Delta\theta)\mathrm{rect}\left(\frac{f_x-m\Delta\theta}{B_\theta}\right) \tag{A.149}$$

ここで $\Delta\theta$ は光線角度のサンプリング間隔であり $B_\theta$ は合成する際の帯域幅である．

# 参考文献


[1] M. Lambooij, M. Fortuin, I. Heynderickx, and W. IJsselsteijn, "Visual discomfort and visual fatigue of stereoscopic displays: A review," Journal of Imaging Science and Technology **53**, 30201–1 (2009).

[2] G. Lippmann, "Epreuves reversibles donnant la sensation du relief," J. Phys. Theor. Appl. **7**, 821–825 (1908).

[3] D. Gabor, "A new microscopic principle," Nature **161**, 777–778 (1948).

[4] E. N. Leith and J. Upatnieks, "Reconstructed wavefronts and communication theory," JOSA **52**, 1123–1130 (1962).

[5] E. N. Leith and J. Upatnieks, "Wavefront reconstruction with diffused illumination and three-dimensional objects," JOSA **54**, 1295–1301 (1964).

[6] Y. N. Denisyuk, "Photographic reconstruction of the optical properties of an object in its own scattered radiation field," in *Soviet Physics Doklady,* vol. 7 (1962), p. 543.

[7] H. I. Bjelkhagen, "Super-realistic imaging based on color holography and lippmann photography," in *Holography: A Tribute to Yuri Denisyuk and Emmett Leith,* vol. 4737 (International Society for Optics and Photonics, 2002), pp. 131–141.

[8] Z. Zeng, H. Zheng, Y. Yu, A. K. Asundi, and S. Valyukh, "Full-color holographic display with increased-viewing-angle," Appl. Opt. **56**, F112–F120 (2017).

[9] X. Li, J. Liu, T. Zhao, and Y. Wang, "Color dynamic holographic display with wide viewing angle by improved complex amplitude modulation," Opt. Express **26**, 2349–2358 (2018).

[10] A. Symeonidou, D. Blinder, and P. Schelkens, "Colour computer-generated holography for point clouds utilizing the phong illumination model," Opt. Express **26**, 10282–10298 (2018).

[11] D. Wang, C. Liu, F. Chu, and Q.-H. Wang, "Full color holographic display system based on intensity matching of reconstructed image," Opt. Express **27**, 16599–16612 (2019).

[12] G. Kim, J. A. Domínguez-Caballero, and R. Menon, "Design and analysis of multi-wavelength diffractive optics," Opt. Express **20**, 2814–2823 (2012).

[13] O. Kunieda and K. Matsushima, "High-quality full-parallax full-color three-dimensional image reconstructed by stacking large-scale computer-generated volume

holograms," Appl. Opt. **58**, G104–G111 (2019).

[14] J. W. Goodman, *Speckle phenomena in optics: theory and applications* (Roberts and Company Publishers, 2007).

[15] T. Kurihara and Y. Takaki, "Speckle-free, shaded 3d images produced by computer-generated holography," Opt. Express **21**, 4044–4054 (2013).

[16] Y. Takaki and K. Taira, "Speckle regularization and miniaturization of computer-generated holographic stereograms," Opt. Express **24**, 6328–6340 (2016).

[17] J. Mäkinen, E. Sahin, and A. Gotchev, "Speckle reduction method for image-based coherent stereogram generation," Opt. Express **26**, 5381–5394 (2018).

[18] A. Jesacher, C. Maurer, A. Schwaighofer, S. Bernet, and M. Ritsch-Marte, "Near-perfect hologram reconstruction with a spatial light modulator," Opt. Express **16**, 2597–2603 (2008).

[19] L. Wang, S. Kruk, H. Tang, T. Li, I. Kravchenko, D. N. Neshev, and Y. S. Kivshar, "Grayscale transparent metasurface holograms," Optica **3**, 1504–1505 (2016).

[20] W. Zhao, H. Jiang, B. Liu, J. Song, Y. Jiang, C. Tang, and J. Li, "Dielectric huygens' metasurface for high-efficiency hologram operating in transmission mode," Sci. Rep. **6**, 30613 (2016).

[21] J. Deng, Z. Li, G. Zheng, J. Tao, Q. Dai, L. Deng, P. He, Q. Deng, and Q. Mao, "Depth perception based 3d holograms enabled with polarization-independent metasurfaces," Opt. Express **26**, 11843–11849 (2018).

[22] M. Yamaguchi, N. Ohyama, and T. Honda, "Holographic three-dimensional printer: new method," Appl. Opt. **31**, 217–222 (1992).

[23] T. Yamaguchi, O. Miyamoto, and H. Yoshikawa, "Volume hologram printer to record the wavefront of three-dimensional objects," Optical Engineering **51**, 075802 (2012).

[24] W. Nishii and K. Matsushima, "A wavefront printer using phase-only spatial light modulator for producing computer-generated volume holograms," in *Practical Holography XXVIII: Materials and Applications,* vol. 9006 (International Society for Optics and Photonics, 2014), p. 90061F.

[25] K. Wakunami, R. Oi, T. Senoh, H. Sasaki, Y. Ichihashi, and K. Yamamoto, "Wavefront printing technique with overlapping approach toward high definition holographic image reconstruction," in *Three-Dimensional Imaging, Visualization, and Display 2016,* vol. 9867 (International Society for Optics and Photonics, 2016), p. 98670J.

[26] H. Yu, K. Lee, J. Park, and Y. Park, "Ultrahigh-definition dynamic 3d holographic display by active control of volume speckle fields," Nature Photonics **11**, 186 (2017).

[27] H. Wang and R. Piestun, "Dynamic 2d implementation of 3d diffractive optics," Optica **5**, 1220–1228 (2018).

[28] L. Cao, Z. Wang, H. Zhang, G. Jin, and C. Gu, "Volume holographic printing using unconventional angular multiplexing for three-dimensional display," Appl. Opt. **55**,

6046–6051 (2016).

[29] S. A. Benton and V. M. Bove Jr, *Holographic imaging* (John Wiley & Sons, 2008).

[30] H. Sasaki, K. Yamamoto, K. Wakunami, Y. Ichihashi, R. Oi, and T. Senoh, "Large size three-dimensional video by electronic holography using multiple spatial light modulators," Sci. Rep. **4**, 6177 (2014).

[31] M. Kujawinska, T. Kozacki, C. Falldorf, T. Meeser, B. M. Hennelly, P. Garbat, W. Zaperty, M. Niemelä, G. Finke, M. Kowiel *et al.*, "Multiwavefront digital holographic television," Opt. Express **22**, 2324–2336 (2014).

[32] K. Wakunami, P.-Y. Hsieh, R. Oi, T. Senoh, H. Sasaki, Y. Ichihashi, M. Okui, Y.-P. Huang, and K. Yamamoto, "Projection-type see-through holographic three-dimensional display," Nature communications **7**, 12954 (2016).

[33] Y. Sando, K. Satoh, T. Kitagawa, M. Kawamura, D. Barada, and T. Yatagai, "Super-wide viewing-zone holographic 3d display using a convex parabolic mirror," Sci. Rep. **8**, 11333 (2018).

[34] R. Watanabe, K. Yamaguchi, and Y. Sakamoto, "Fast calculation method of computer generated hologram animation for viewpoint parallel shift and rotation using fourier transform optical system," Appl. Opt. **55**, A167–A177 (2016).

[35] T. Sugie, T. Akamatsu, T. Nishitsuji, R. Hirayama, N. Masuda, H. Nakayama, Y. Ichihashi, A. Shiraki, M. Oikawa, N. Takada *et al.*, "High-performance parallel computing for next-generation holographic imaging," Nature Electronics **1**, 254 (2018).

[36] D. Leseberg and C. Frère, "Computer-generated holograms of 3-d objects composed of tilted planar segments," Appl. Opt. **27**, 3020–3024 (1988).

[37] M. E. Lucente, "Interactive computation of holograms using a look-up table," Journal of Electronic Imaging **2**, 28–35 (1993).

[38] S.-C. Kim and E.-S. Kim, "Effective generation of digital holograms of three-dimensional objects using a novel look-up table method," Appl. Opt. **47**, D55–D62 (2008).

[39] T. Nishitsuji, T. Shimobaba, T. Kakue, and T. Ito, "Fast calculation of computer-generated hologram using run-length encoding based recurrence relation," Opt. Express **23**, 9852–9857 (2015).

[40] T. Ichikawa, T. Yoneyama, and Y. Sakamoto, "Cgh calculation with the ray tracing method for the fourier transform optical system," Opt. Express **21**, 32019–32031 (2013).

[41] Y. Pan, X. Xu, S. Solanki, X. Liang, R. B. A. Tanjung, C. Tan, and T.-C. Chong, "Fast cgh computation using s-lut on gpu," Opt. Express **17**, 18543–18555 (2009).

[42] H. Yoshikawa, S. Iwase, and T. Oneda, "Fast computation of fresnel holograms employing difference," in *Practical Holography XIV and Holographic Materials VI,* vol. 3956 (International Society for Optics and Photonics, 2000), pp. 48–55.

[43] T. Shimobaba, N. Masuda, and T. Ito, "Simple and fast calculation algorithm for computer-generated hologram with wavefront recording plane," Opt. Lett. **34**, 3133–3135 (2009).

[44] Y.-M. Ji, J.-H. Park *et al.*, "Efficient texture mapping by adaptive mesh division in mesh-based computer generated hologram," Opt. Express **24**, 28154–28169 (2016).

[45] H. Kim, J. Hahn, and B. Lee, "Mathematical modeling of triangle-mesh-modeled three-dimensional surface objects for digital holography," Appl. Opt. **47**, D117–D127 (2008).

[46] H. Nishi, K. Matsushima, and S. Nakahara, "Rendering of specular surfaces in polygon-based computer-generated holograms," Appl. Opt. **50**, H245–H252 (2011).

[47] H.-J. Yeom and J.-H. Park, "Calculation of reflectance distribution using angular spectrum convolution in mesh-based computer generated hologram," Opt. Express **24**, 19801–19813 (2016).

[48] J. S. Underkoffler, "Occlusion processing and smooth surface shading for fully computed synthetic holography," in *Practical Holography XI and Holographic Materials III,* vol. 3011 (International Society for Optics and Photonics, 1997), pp. 19–30.

[49] K. Matsushima and S. Nakahara, "Extremely high-definition full-parallax computer-generated hologram created by the polygon-based method," Appl. Opt. **48**, H54–H63 (2009).

[50] K. Matsushima, M. Nakamura, and S. Nakahara, "Silhouette method for hidden surface removal in computer holography and its acceleration using the switch-back technique," Opt. Express **22**, 24450–24465 (2014).

[51] J. Jia, J. Liu, G. Jin, and Y. Wang, "Fast and effective occlusion culling for 3d holographic displays by inverse orthographic projection with low angular sampling," Appl. Opt. **53**, 6287–6293 (2014).

[52] A. Symeonidou, D. Blinder, A. Munteanu, and P. Schelkens, "Computer-generated holograms by multiple wavefront recording plane method with occlusion culling," Opt. Express **23**, 22149–22161 (2015).

[53] H. Zhang, L. Cao, and G. Jin, "Computer-generated hologram with occlusion effect using layer-based processing," Appl. Opt. **56**, F138–F143 (2017).

[54] K. Nakamoto and K. Matsushima, "Exact mask-based occlusion processing in large-scale computer holography for 3d display," in *Digital Optical Technologies 2019,* vol. 11062 (International Society for Optics and Photonics, 2019), p. 1106204.

[55] Y. Zhao, K.-C. Kwon, M.-U. Erdenebat, M.-S. Islam, S.-H. Jeon, and N. Kim, "Quality enhancement and gpu acceleration for a full-color holographic system using a relocated point cloud gridding method," Appl. Opt. **57**, 4253–4262 (2018).

[56] H. G. Kim and Y. M. Ro, "Ultrafast layer based computer-generated hologram calculation with sparse template holographic fringe pattern for 3-d object," Opt. Express **25**, 30418–30427 (2017).

[57] R. P. Muffoletto, J. M. Tyler, and J. E. Tohline, "Shifted fresnel diffraction for computational holography," Opt. Express **15**, 5631–5640 (2007).

[58] B. J. Jackin, H. Miyata, T. Ohkawa, K. Ootsu, T. Yokota, Y. Hayasaki, T. Yatagai, and T. Baba, "Distributed calculation method for large-pixel-number holograms by decomposition of object and hologram planes," Opt. Lett. **39**, 6867–6870 (2014).

[59] D. Blinder and T. Shimobaba, "Efficient algorithms for the accurate propagation of extreme-resolution holograms," Opt. Express **27**, 29905–29915 (2019).

[60] T. Yatagai, "Stereoscopic approach to 3-d display using computer-generated holograms," Appl. Opt. **15**, 2722–2729 (1976).

[61] M. Lucente, "Diffraction-specific fringe computation for electro-holography," Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology (1994).

[62] H. Kang, T. Fujii, T. Yamaguchi, and H. Yoshikawa, "Compensated phase-added stereogram for real-time holographic display," Optical Engineering **46**, 095802 (2007).

[63] H. Kang, T. Yamaguchi, and H. Yoshikawa, "Accurate phase-added stereogram to improve the coherent stereogram," Appl. Opt. **47**, D44–D54 (2008).

[64] H. Zhang, Y. Zhao, L. Cao, and G. Jin, "Fully computed holographic stereogram based algorithm for computer-generated holograms with accurate depth cues," Opt. Express **23**, 3901–3913 (2015).

[65] H. Zhang, Y. Zhao, L. Cao, and G. Jin, "Layered holographic stereogram based on inverse fresnel diffraction," Appl. Opt. **55**, A154–A159 (2016).

[66] M. Yamaguchi, H. Hoshino, T. Honda, and N. Ohyama, "Phase-added stereogram: calculation of hologram using computer graphics technique," in *Practical Holography VII: Imaging and Materials,* vol. 1914 (International Society for Optics and Photonics, 1993), pp. 25–31.

[67] Y. Takaki and K. Ikeda, "Simplified calculation method for computer-generated holographic stereograms from multi-view images," Opt. Express **21**, 9652–9663 (2013).

[68] H. Kang, E. Stoykova, and H. Yoshikawa, "Fast phase-added stereogram algorithm for generation of photorealistic 3d content," Appl. Opt. **55**, A135–A143 (2016).

[69] T. Mishina, M. Okui, and F. Okano, "Calculation of holograms from elemental images captured by integral photography," Appl. Opt. **45**, 4026–4036 (2006).

[70] K. Wakunami and M. Yamaguchi, "Calculation for computer generated hologram using ray-sampling plane," Opt. Express **19**, 9086–9101 (2011).

[71] K. Wakunami, M. Yamaguchi, and B. Javidi, "High-resolution three-dimensional holographic display using dense ray sampling from integral imaging," Opt. Lett. **37**, 5103–5105 (2012).

[72] K. Wakunami, H. Yamashita, and M. Yamaguchi, "Occlusion culling for computer generated hologram based on ray-wavefront conversion," Opt. Express **21**, 21811–21822 (2013).

[73] T. Utsugi and M. Yamaguchi, "Speckle-suppression in hologram calculation using ray-sampling plane," Opt. Express **22**, 17193–17206 (2014).

[74] W. J. Plesniak, M. W. Halle, V. M. Bove, J. Barabas, and R. Pappu, "Reconfigurable image projection holograms," Optical Engineering **45**, 115801 (2006).

[75] Y. Sando, M. Itoh, and T. Yatagai, "Holographic three-dimensional display synthesized from three-dimensional fourier spectra of real existing objects," Opt. Lett. **28**, 2518–2520 (2003).

[76] J.-H. Park, M.-S. Kim, G. Baasantseren, and N. Kim, "Fresnel and fourier hologram generation using orthographic projection images," Opt. Express **17**, 6320–6334 (2009).

[77] Z. Wang, G. Lv, Q. Feng, A. Wang, and H. Ming, "Simple and fast calculation algorithm for computer-generated hologram based on integral imaging using look-up table," Opt. Express **26**, 13322–13330 (2018).

[78] J. Jia, J. Si, and D. Chu, "Fast two-step layer-based method for computer generated hologram using sub-sparse 2d fast fourier transform," Opt. Express **26**, 17487–17497 (2018).

[79] R. Horisaki, R. Takagi, and J. Tanida, "Deep-learning-generated holography," Appl. Opt. **57**, 3859–3863 (2018).

[80] H. Kakeya, "Formulation of coarse integral imaging and its applications," in *Stereoscopic Displays and Applications XIX,* vol. 6803 (International Society for Optics and Photonics, 2008), p. 680317.

[81] J.-S. Chen, D. Chu, and Q. Y. Smithwick, "Rapid hologram generation utilizing layer-based approach and graphic rendering for realistic three-dimensional image reconstruction by angular tiling," Journal of Electronic Imaging **23**, 023016 (2014).

[82] G. C. Sherman, "Application of the convolution theorem to rayleigh' s integral formulas," JOSA **57**, 546–547 (1967).

[83] K. Matsushima, "Shifted angular spectrum method for off-axis numerical propagation," Opt. Express **18**, 18453–18463 (2010).

[84] J. P. Waters, "Holographic image synthesis utilizing theoretical methods," Applied physics letters **9**, 405–407 (1966).

[85] K. Matsushima, H. Schimmel, and F. Wyrowski, "Fast calculation method for optical diffraction on tilted planes by use of the angular spectrum of plane waves," JOSA A **20**, 1755–1762 (2003).

[86] M. Sypek, "Light propagation in the fresnel region. new numerical approach," Optics communications **116**, 43–48 (1995).

[87] M. Yamaguchi, H. Sugiura, T. Honda, and N. Ohyama, "Automatic recording method for holographic three-dimensional animation," JOSA A **9**, 1200–1205 (1992).

[88] K. Ikeya, J. Arai, T. Mishina, and M. Yamaguchi, "Capturing method for integral three-dimensional imaging using multiviewpoint robotic cameras," Journal of Elec-

tronic Imaging **27**, 023022 (2018).

[89] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier optics* (Roberts and Company Publishers, 2005).

[90] M. Born and E. Wolf, *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light* (Elsevier, 2013).

[91] F. Pérez and M. Grech, "Oblique-incidence, arbitrary-profile wave injection for electromagnetic simulations," Physical Review E **99**, 033307 (2019).

[92] T. Shimobaba, T. Kakue, N. Okada, M. Oikawa, Y. Yamaguchi, and T. Ito, "Aliasing-reduced fresnel diffraction with scale and shift operations," Journal of Optics **15**, 075405 (2013).

[93] N. Okada, T. Shimobaba, Y. Ichihashi, R. Oi, K. Yamamoto, M. Oikawa, T. Kakue, N. Masuda, and T. Ito, "Band-limited double-step fresnel diffraction and its application to computer-generated holograms," Opt. Express **21**, 9192–9197 (2013).

[94] V. Nascov and P. C. Logofătu, "Fast computation algorithm for the rayleigh-sommerfeld diffraction formula using a type of scaled convolution," Appl. Opt. **48**, 4310–4319 (2009).

[95] Y.-H. Kim, C.-W. Byun, H. Oh, J. Lee, J.-E. Pi, G. H. Kim, M.-L. Lee, H. Ryu, H.-Y. Chu, and C.-S. Hwang, "Non-uniform sampling and wide range angular spectrum method," Journal of Optics **16**, 125710 (2014).

[96] A. Ritter, "Modified shifted angular spectrum method for numerical propagation at reduced spatial sampling rates," Opt. Express **22**, 26265–26276 (2014).

[97] P. Lobaz, "Memory-efficient reference calculation of light propagation using the convolution method," Opt. Express **21**, 2795–2806 (2013).

[98] T. Shimobaba, T. Takahashi, Y. Yamamoto, T. Nishitsuji, A. Shiraki, N. Hoshikawa, T. Kakue, and T. Ito, "Efficient diffraction calculations using implicit convolution," OSA Continuum **1**, 642–650 (2018).

[99] J. Weng, T. Shimobaba, N. Okada, H. Nakayama, M. Oikawa, N. Masuda, and T. Ito, "Generation of real-time large computer generated hologram using wavefront recording method," Opt. Express **20**, 4018–4023 (2012).

[100] H. Sato, T. Kakue, Y. Ichihashi, Y. Endo, K. Wakunami, R. Oi, K. Yamamoto, H. Nakayama, T. Shimobaba, and T. Ito, "Real-time colour hologram generation based on ray-sampling plane with multi-gpu acceleration," Sci. Rep. **8**, 1–10 (2018).

[101] W. Bao, W.-S. Lai, C. Ma, X. Zhang, Z. Gao, and M.-H. Yang, "Depth-aware video frame interpolation," in *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition,* (2019), pp. 3703–3712.

[102] B. Guenter, M. Finch, S. Drucker, D. Tan, and J. Snyder, "Foveated 3d graphics," ACM Transactions on Graphics (TOG) **31**, 1–10 (2012).

# 謝辞

まずは本研究を進めるにあたり，多忙にもかかわらず大変熱心なご指導を賜りました山口雅浩教授に多大な感謝を申し上げます．また副指導教員として様々なアドバイスを頂きました渡辺義浩准教授にも深く感謝致します．また本論文をまとめるにあたり多数のご助言を頂きました中村健太郎教授，金子寛彦教授，小尾高史准教授にもこの場を借りてお礼申し上げます．加えて常日頃からディスカッションを交え詳細なご指導を頂きました中村友哉先生にも厚くお礼申し上げさせて頂きます．

関西大学の松島恭治教授には学会・研究会でお会いする度に多くのアドバイスのご助言を頂きました．また関大ホロスタジオの皆様，特に井伊美穂様には研究生活を通し多数の大変素晴らしいホログラムの印刷を頂きました．石井勢津子様には，芸術家としてご視点から非常に貴重な進言，そしてホログラムのデザインを承りました．また NHK 技術研究所の池谷健佑様にはご自身の研究の中で生成した実写点群モデルを貸与頂きました．さらには新たな放送技術を創出する研究者としてこの研究に対する様々なアドバイスを頂きました．この場をお借りして皆様にお礼申し上げさせて頂きます．

そしてお世話になった研究室の皆様，特に同テーマを共に研究し日々議論を重ねた柿沼建太郎君，また数々のアドバイスを頂きました卒業生の皆様，そして研究室の垣根を越えて様々な助言を賜りました国内外の同分野の研究者の方々にも深く感謝します．

# 業績一覧

---

## 投稿論文

1. S. Igarashi, T. Nakamura, K. Matsushima, and M. Yamaguchi, "Efficient tiled calculation of over-10-gigapixel holograms using ray-wavefront conversion," Opt. Express, **26**(8), 10773–10786 (Apr. 2018.)
2. S. Igarashi, T. Nakamura, and M. Yamaguchi, "Fast method of calculating a photorealistic hologram based on orthographic ray-wavefront conversion," Opt. Lett., **41**(7), 1396–1399 (Mar. 2016.)

## 国際会議（査読あり）

1. S. Igarashi, K. Kakinuma, T. Nakamura, K. Ikeya, J. Arai, T. Mishina, K. Matsushima, and M. Yamaguchi, "Computer-generated holograms of a life-size human captured from multi-viewpoint cameras," Digital Holography and 3-D Imaging 2019 (May. 2019).
2. S. Igarashi, T. Nakamura, K. Matsushima, and M. Yamaguchi, "Continuous tiling Fresnel diffraction and its application to over 10-gigapixel computer-generated holograms," The 24th Congress of the International Commission for Optics (Aug. 2017).
3. S. Igarashi, T. Nakamura, K. Matsushima, and M. Yamaguchi, "Calculation and fabrication of photorealistic hologram using orthographic ray-sampling plane," The 6th Japan-Korea Workshop on Digital Holography and Information Photonics (Dec. 2016).
4. S. Igarashi, T. Nakamura, K. Matsushima, and M. Yamaguchi, "Efficient calculation method for realistic deep 3D scene hologram using orthographic projection," SPIE Practical Holography XXX: Materials and Applications, Proc. SPIE, Vol. 9771, 97710O (Mar. 2016).

## 国際会議（査読なし）

1. S. Igarashi, T. Nakamura, S. Ishii, K. Matsushima, and M. Yamaguchi, "Reconstruction of realistic 3D images using over-10-gigapixel computer-generated holograms,"

11th International Symposium on Display Holography (Jun. 2018).

2. S. Igarashi, T. Nakamura, K. Matsushima, and M. Yamaguchi, "GPU acceleration of hologram calculation using an orthographic ray-sampling plane," The 7th Japan-Korea Workshop on Digital Holography and Information Photonics (Dec. 2017).
3. S. Igarashi, T. Nakamura, K. Matsushima, and M. Yamaguchi, "'3D physically based rendering of computer generated holograms by orthographic ray sampling," Information Photonics 2017 (May. 2017).
4. S. Igarashi, and M. Yamaguchi, "Efficient calculation of hologram using ray-sampling plane from orthographic projection images," 14th Workshop on Information Optics IEEE, Th-P7, 1–2 (Jun. 2015).

## 国内会議（査読あり）

1. 五十嵐俊亮, 柿沼建太郎, 中村友哉, 松島恭治, 山口雅浩, "室内空間再生型ホログラフィック 3D ディスプレイの計算法," 3 次元画像コンファレンス (Jul. 2019).

## 国内会議・研究会（査読なし）

1. 五十嵐俊亮, 柿沼建太郎, 中村友哉, 松島恭治, 山口雅浩, "可変正射影光線サンプリング面による広深度ホログラムの計算法," ホログラフィック・ディスプレイ研究会 (Sep. 2019).
2. 五十嵐俊亮, 柿沼建太郎, 中村友哉, 松島恭治, 山口雅浩, "大型物体再生型ホログラムの光線波面変換による計算法," 第 13 回新画像システム・情報フォトニクス研究討論会 (Jun. 2019).
3. 五十嵐俊亮, 中村友哉, 松島恭治, 山口雅浩, "大型の 3 D 室内空間を再生する計算機合成プログラムの計算法," ホログラフィック・ディスプレイ研究会 **38**(3), 6–9 (Sep. 2018).
4. 五十嵐俊亮, 中村友哉, 松島恭治, 山口雅浩, "計算機合成ホログラムにおける光線波面変換を用いた高品質立体像の計算と再生," Optics and Photonics Japan 2017 (Oct. 2017).
5. 五十嵐俊亮, 中村友哉, 石井勢津子, 松島恭治, 山口雅浩, "計算機合成ホログラムにおける視点移動に伴う視覚効果," ホログラフィック・ディスプレイ研究会 **37**(3), 2–5 (Sep. 2017).
6. 五十嵐俊亮, 中村友哉, 松島恭治, 山口雅浩, "光波伝搬における分割計算手法とその計算機合成ホログラムへの応用," 第 10 回計算オプティクス研究会 (Dec. 2016).
7. 五十嵐俊亮, 中村友哉, 松島恭治, 山口雅浩, "正射影光線サンプリング面を用いた計算機合成ホログラムによる質感表現," 電子情報通信学会研究会 (Oct. 2016).
8. 五十嵐俊亮, 中村友哉, 山口雅浩, "正射影光線-波面変換を用いたホログラムの高速並列計算," 第 77 回応用物理学会秋季学術講演会 (Sep. 2016).
9. 五十嵐俊亮, 中村友哉, 松島恭治, 山口雅浩, "正射影光線サンプリング面による大規模計算機合成ホログラムの分割計算," 第 9 回計算オプティクス研究会 (Jul. 2016).
10. 五十嵐俊亮, 中村友哉, 山口雅浩, "正射影を用いた光線-波面変換型計算機合成ホログラムの高速計算法," 第 76 回応用物理学会秋季学術講演会, 14a-2E-4 (Sep. 2015).

11. 五十嵐俊亮, 中村友哉, 山口雅浩, “正射影光線サンプリング面を用いたホログラム計算における相互オクルージョン処理,” ホログラフィック・ディスプレイ研究会 **25**(3), 7–10 (Sep. 2015).
12. 五十嵐俊亮, 中村友哉, 山口雅浩, “光線サンプリング面を用いたホログラム計算の高速化,” 第 7 回計算オプティクス研究会 (Jul. 2015).
13. 五十嵐俊亮, 山口雅浩, “RS 面を用いた CGH 計算の正射影画像による高速化,” 第 9 回関東学生研究論文講演会, p. 10 (Mar. 2015).

## 受賞

1. “2018 年度 HODIC 鈴木・岡田記念賞” (2018).
2. “ホログラフィック・ディスプレイ研究会 学生発表賞” (2018).
3. “映像情報メディア学会 平成 29 年度 優秀研究発表賞” (2017).
4. “DHIP 2016 Outstanding Poster Award” (2016).
5. “東京工業大学物理情報システム専攻 平成 28 年度　優秀研究発表賞” (2016).
6. “映像情報メディア学会 平成 27 年度 優秀研究発表賞” (2015).
7. “東京工業大学物理情報システム専攻 平成 27 年度 優秀構想発表賞” (2015).

## 助成など

1. “日本学術振興会 特別研究員 DC2” (2018).
2. “日本奨学生機構 大学院第一種奨学金 特に優れた業績による返還免除 全額” (2017).
3. “平成 28 年度東京工業大学博士進学エンカレッジ奨学金” (2016).
4. “SPIE Student Travel Grant” (2016).
5. “2015 年度 コニカミノルタ光みらい奨励金” (2015).

# 共著論文など

## 著書

1. T. Nakamura, S. Kimura, K. Takahashi, Y. Aburakawa, S. Takahashi, S. Igarashi, S. Torashima, and M. Yamaguchi, “Holographic Pepper’ s Ghost: Upright Virtual-Image Screen Realized by Holographic Mirror, Holographic Materials and Optical Systems,” IntechOpen (Mar. 2019).

## 投稿論文

1. T. Nakamura, S. Igarashi, Y. Kozawa, and M. Yamaguchi, “Non-diffracting linear-shift point-spread function by focus-multiplexed computer-generated hologram,” Optics Letters **43**(24), 5949–5952 (Dec. 2018).
2. T. Nakamura, S. Kimura, K. Takahashi, Y. Aburakawa, S. Takahashi, S. Igarashi, S. Torashima, and M. Yamaguchi, “Off-axis virtual-image display and camera by holographic mirror and blur compensation,” Optics Express **26**(19), 24864–24880 (Sep. 2018).

## 国際会議（査読あり）

1. K. Kakinuma, S. Igarashi, T. Nakamura, K. Matsushima, and M. Yamaguchi, “Parallel computation of a hologram based on ray-wavefront conversion with a large-scale super computer TSUBAME,” Information Photonics 2019 (Apr. 2019).
2. F. Watanabe, T. Nakamura, S. Torashima, S. Igarashi, S. Kimura, Y. Aburakawa, and M. Yamaguchi, “ Full-color virtual-image display using a holographic optical element and dispersion-compensated projection optics,” Information Photonics 2019 (Apr. 2019).
3. H. Konno, S. Igarashi, T. Nakamura, and M. Yamaguchi, “Waveguide-HOE-based Camera that Captures a Frontal Image for Flat-panel Display,” IDW ’18, Proceedings of the International Display Workshops **25**, 1127–1130 (Dec. 2018).
4. T. Nakamura, S. Kimura, K. Takahashi, Y. Aburakawa, S. Takahashi, S. Igarashi, and Masahiro Yamaguchi, “HOE-Based Screen for Virtual-Image Projection and Scene Capture,” The International Display Workshops (Dec. 2017).

## 国際会議（査読なし）

1. T. Nakamura, S. Kimura, Y. Aburakawa, F. Watanabe, S. Igarashi, S. Torashima, and M. Yamaguchi, “Holographic pepper’s ghost,” The 19th International Meeting

on Information Display (Aug. 2019).

2. T. Nakamura, S. Kimura, K. Takahashi, Y. Aburakawa, S. Takahashi, S. Igarashi, S. Torashima, and M. Yamaguchi, "Holographic off-axis virtual-image display and camera integrating blur-compensation systems," The 8th Japan-Korea Workshop on Digital Holography and Information Photonics (Dec. 2018).
3. M. Yamaguchi, T. Nakamura, and S. Igarashi, "Full-parallax light-field and holographic displays for enriched 3D visual experience," International Workshop on Holography and Related Technologies (Nov. 2017).
4. T. Nakamura, S. Sakurai, S. Igarashi, and M. Yamaguchi, "Demonstration of interactive 3D display using holographic screen and consumer-use 4K projector," The International Display Workshops (Dec. 2015).

## 国内会議・研究会（査読あり）

1. 柿沼建太郎, 五十嵐俊亮, 中村友哉, 松島恭治, 山口雅浩, "光線-波面変換に基づく CGH 並列計算と格子状ノイズの除去," 3 次元画像コンファレンス (Jul. 2019).

## 国内会議・研究会（査読なし）

1. 渡邉拓人, 中村友哉, 五十嵐俊亮, 田島和幸, 山口啓太, 島野健, 山口雅浩, "RGB チャネル合成による FZA レンズレスカメラの分解能向上手法－実験的検証－," 日本光学会年次学術講演会 Optics and Photonics Japan 2019, 3aE7 (Dec. 2019).
2. 渡辺史顕, 中村友哉, 虎島史歩, 五十嵐俊亮, 木村真治, 油川雄司, 山口雅浩, "ホログラフィックオフアクシスミラーを用いたフルカラー虚像投影・撮像システムの分散補償法," 情報ディスプレイ研究会, 映情学技報 **43**(34), 13–16 (Oct. 2019).
3. 柿沼建太郎, 五十嵐俊亮, 中村友哉, 松島恭治, 山口雅浩, " スーパーコンピュータを用いた光線-波面変換に基づく大規模ホログラフィック・ディスプレイの並列計算," 第 66 回応用物理学会春季学術講演会 (Feb. 2019).
4. 渡辺史顕, 中村友哉, 虎島史歩, 五十嵐俊亮, 木村真治, 油川雄司, 山口雅浩, "ホログラム光学素子と分散補償投影系を用いたフルカラー虚像表示," 第 66 回応用物理学会春季学術講演会 (Feb. 2019).
5. 今野光基, 五十嵐俊亮, 中村友哉, 山口雅浩, "ホログラフィック導波路と画像再構成処理を利用した正面撮像ディスプレイ," 日本光学会年次学術講演会 2018, OPJ 講演予稿集, 439–440 (Oct. 2018).
6. 木村真治, 中村友哉, 高橋俊介, 五十嵐俊亮, 虎島史歩, 山口雅浩, 油川雄司, "ホログラフィック光学素子を用いた映像コミュニケーションシステムに関する研究," 電子ディスプレイ研究会, 電子情報通信学会技術研究報告 **118**(265) (Oct. 2018).
7. 渡邉拓人, 島野健, 田島和幸, 山口啓太, 五十嵐俊亮, 中村友哉, 山口雅浩, "カラー伝達関数

合成によるフレネルゾーン開口型レンズレスカメラの高解像度化,” 日本光学会年次学術講演会 (Oct. 2018).

8. 高橋俊介, 中村友哉, 五十嵐俊亮, 虎島史歩, 木村真治, 油川雄司, 山口 雅浩, “映像投影・撮像用大型ホログラム光学素子の空間分割記録,” 第 65 回応用物理学会春季学術講演会 (Mar. 2018).

## 特許

1. 中村友哉, 五十嵐俊亮, 小澤祐市, “ホログラム光学素子，ホログラム光学素子の製造方法，及び光学装置,” 特許. 公開. 国立大学法人東京工業大学, 国立大学法人東北大学. 2017/12/26. 特願 2017-250153. 2019/07/18. 特開 2019-117233. (2019).
2. 中村友哉, 山口雅浩, 五十嵐俊亮, 木村真治, 高橋和彦, 油川雄司, “ボケ補償システム.” 特許. 公開. 国立大学法人東京工業大学, 株式会社 NTT ドコモ. 2017/02/09. 特願 2017-022271. 2018/08/16. 特開 2018-128603. (2018).
3. 中村友哉, 山口雅浩, 五十嵐俊亮, 木村真治, 高橋和彦, 油川雄司, “映像提示システム.” 特許. 公開. 国立大学法人東京工業大学, 株式会社 NTT ドコモ. 2016/09/05. 特願 2016-172878. 2018/02/15. 特開 2018-026775. (2018).