

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	特異モデルにおけるベイズ仮説検定に関する理論的研究
Title(English)	Theoretical Study of Bayesian Hypothesis Testing for Singular Models
著者(和文)	仮屋夏樹
Author(English)	Natsuki Kariya
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第11891号, 授与年月日:2021年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:渡邊 澄夫,三好 直人,金森 敬文,山下 真,中野 張
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第11891号, Conferred date:2021/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	論文要旨
Type(English)	Summary

論文要旨

THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	数理・計算科学 数理・計算科学	系 コース	申請学位 (専攻分野)： Academic Degree Requested	博士 Doctor of	(理学)
学生氏名： Student's Name	仮屋 夏樹		指導教員 (主)： Academic Supervisor(main)	渡辺 澄夫	
			指導教員 (副)： Academic Supervisor(sub)		

要旨 (和文 2000 字程度)

Thesis Summary (approx.2000 Japanese Characters)

本論文では、特異モデルに対するベイズ仮説検定についての理論的な研究を行った。仮説検定は意思決定を支える手段として、自然科学から社会科学に至るまで様々な分野で利用されてきている。なかでも、データを記述する確率モデルとして複数のコンポーネントの確率分布の混合からなる混合分布を用いて、適切なコンポーネント数についての仮説を検定する枠組みは「均一性の検定」と呼ばれ、広く知られている。この均一性の検定は、特異モデルに対する仮説検定の典型例を与える。具体的には、確率モデルのパラメータ空間において、帰無仮説を記述するパラメータの集合が空間内の一点とはならず、確率モデルによる帰無仮説の表現に冗長性が生じているケースである。

このようなケースでは、仮説検定においてこれまで利用されてきた理論や結果が妥当性を持たない。具体的には、検定統計量としてしばしば用いられる対数尤度比の漸近分布がカイ二乗分布に従わず、カイ二乗検定が適用できない。このため、均一性の検定をはじめ特異モデルに対する仮説検定に適用可能な理論の確立は重要である。

ところで、ベイズ統計学の枠組みと代数幾何学の特異点解消定理に基づく、特異モデルに対する統計的推論の理論である特異学習理論が近年大きく進展してきている。現在までの研究では、統計的推論に関する研究が主になされてきたが、この枠組みは特異モデルに対する仮説検定の理論の構築にも有効と考えられ、均一性の検定の構築に貢献可能と期待ができる。一方で、このような取り組みは筆者の知る限り現在まで殆ど見られない。

理論的な観点からは、次の点でこの問題に興味を持たれる。仮説検定の理論の構築は、特異学習理論において重要な量である自由エネルギーの確率的挙動の評価を必要とする。これは仮説検定では検定統計量の確率分布が必要となるためであるが、そのためには統計的推論に必要な項よりも高次の項を含めた解析が必要となる。しかしこの解析は、筆者の知る限りその重要性にもかかわらず、現在まで十分に取組みられてこなかった。

以上の背景から筆者は特異学習理論に基づく特異モデルの仮説検定の理論的研究を行った。本論文ではその結果について報告する。本論文の構成は以下の通りである。

第1章では、イントロダクションとして、本研究で扱う問題とその意義、関連する先行研究、研究の目的及び既往研究との関係性についてまとめた。具体的には、「均一性の検定」の問題設定とその有用性、また均一性の検定が特異モデルの典型例であることの説明を行った。特異モデルに対する仮説検定の先行研究について整理し、同時に本研究の土台となる特異学習理論に関してもその概要を紹介し、本研究の目的と意義について述べた。

第2章では、本研究の対象である仮説検定の枠組み、特に本研究の基礎であるベイズ仮説検定のレビューを行った。具体的には、仮説検定の既知の結果を整理した上で、ベイズ仮説検定の枠組みについてまとめた。また、特異モデルの特異性がどのように仮説検定の構築に困難をもたらすのか、という点についても整理した。

第3章以降が本研究の主要結果である。第3章では、一つ目の結果として、典型的な特異モデルである混合正規分布に対する均一性の検定の理論について報告した。ここでは、帰無仮説と対立仮説の判別が難しい、具体的には local alternative に相当するような対立仮説が設定されたケースを想定して、ベイズ仮説検定において最強検定を与える検定統計量である、周辺尤度比の漸近分布を理論的に導出している。これにより、最強検定を構築することができる。また、合わせて仮説の採択手段としてベイズファクターによる仮説の選択と、今回導出した仮説検定の比較も行った。今回扱ったケースは帰無仮説と対立仮説の判別の難しいケースに相当するが、このようなケースでも、今回導出した漸近分布に基づく仮説検定は機能することが分かった。

第4章では、二つ目の結果について報告した。ここでは事後分布の近似手法として有用な変分ベイズ法を特異モデルの仮説検定の問題に初めて適用し、検定統計量である変分ベイズ自由エネルギーの漸近挙動を解析的に導出した。これは従来知られていた結果の高次項を含めた拡張に相当し、この結果を用いて新たな仮説検定として、変分ベイズ検定を構築した。数値実験を通じ、導出した漸近分布の妥当性や仮説検定が機能することを確認した。

第5章では、三つ目の結果について報告した。ここでは、特異モデルに対するベイズ仮説検定における第一種、第二種の過誤について、それらの上界を理論的に解析した。これは、従来の仮説検定における Chernoff bound の一般化に相当する。解析の結果、特異モデルにおいては仮説検定における誤差の上界は非特異モデルとは異なり、特異点周辺の幾何学的性質を特徴づける重要な量である実対数閾値によって記述されることを明らかにした。

第6章では本論文の結論として、一連の結果の要約と研究の今後の展望について述べた。

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note : Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800

Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。
Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).

(博士課程)
Doctoral Program

論文要旨

THESIS SUMMARY

系・コース： 数理・計算科学 系
Department of, Graduate major in 数理・計算科学 コース

学生氏名： 仮屋 夏樹
Student's Name

申請学位 (専攻分野)： 博士 (理学)
Academic Degree Requested Doctor of (理学)

指導教員 (主)： 渡辺 澄夫
Academic Supervisor(main)

指導教員 (副)：
Academic Supervisor(sub)

要旨 (英文 300 語程度)

Thesis Summary (approx.300 English Words)

In this thesis, we studied Bayesian hypothesis testing for singular models theoretically. Hypothesis testing using mixture models has been widely used in various fields, but it is not easy to give the foundation of it theoretically, due to singularities in the models. Many statisticians have studied this problem because it is both appealing and challenging.

In recent years, the theory of statistical inference for singular models has been developed based on Bayesian statistics and algebraic geometry. Bayesian singular learning theory has been proved to be a very useful framework for the theoretical treatment of singular models.

We attempted a theoretical analysis of hypothesis testing for singular models from the perspective of Bayesian singular learning theory. Technically, the theory of hypothesis testing requires probability distribution of the test statistic, and it needs some theoretical extension that has not been sufficiently addressed, due to factors such as the need to include higher-order terms beyond the results obtained for statistical inference. Such problems have been hardly tackled despite their importance, as far as the author knows.

This thesis presents several new results obtained through the study. More specifically, we studied the test of homogeneity for normal mixture, because it is one of the most typical singular models. Our first result is that the asymptotic distributions of the marginal likelihood ratio, which is the test statistics of the most powerful test in the Bayesian hypothesis testing, are derived theoretically in several cases.

Second, we applied the variational Bayes approximation for the first time, which is known useful for approximating the posterior distribution, to the problem of hypothesis testing for singular models. We could derive the asymptotic behavior of variational Bayesian free energy, which is the test statistics of our hypothesis testing, and construct the hypothesis specifically.

Furthermore, we analyzed the type I and the type II errors in Bayesian hypothesis testing for singular models theoretically. The relationship between the errors in the hypothesis test and the real log canonical threshold, which is important quantities that characterize the geometrical properties of singular models around their singularities are derived.

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note：Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1 copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。

Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).