

論文 / 著書情報
Article / Book Information

論題(和文)	風洞実験を踏まえた超弾性三次元角柱の振動特性の把握のための基礎的検討 その2 連続体振動理論とFEMによる弾性固有値解析
Title(English)	Basic study to obtain the vibration characteristics of 3D hyperelastic square cylinder based on the wind tunnel test Part2 Elastic eigenvalue analysis by continuum vibration theory and FEM
著者(和文)	山口雄大, 佐藤大樹, 中川尚大, 丸山勇祐, 田村哲郎
Authors(English)	Yudai Yamaguchi, Daiki Sato, Naohiro Nakagawa, Yusuke Maruyama, Tetsuro Tamura
出典 / Citation	日本建築学会関東支部研究報告集, , , pp. 297-300
Citation(English)	, , , pp. 297-300
発行日 / Pub. date	2021, 3

風洞実験を踏まえた超弾性三次元角柱の振動特性の把握のための基礎的検討

その2 連続体振動理論と FEM による弾性固有値解析

構造—振動

正会員 ○ 山口雄大*¹正会員 佐藤大樹*²〃 中川尚大*³〃 丸山勇祐*³〃 田村哲郎*⁴

超弾性体 連続体振動理論 固有値解析

FEM 解析

1. 緒言

本報その1では、自由振動実験により2種類の超弾性三次元角柱の固有振動数と減衰定数を評価し、その結果を踏まえて空力振動実験の再評価を試みた。本報その2では、連続体振動理論とFEMを用いた弾性固有値解析から、自由振動実験では得られなかった高次モードの曲げ固有振動数や捩れ固有振動数を調べた結果を報告する。また最後に、得られた結果を用いて、空力振動実験時の振動モードと質量減衰パラメータに関して検証を行う。

2. 連続体の自由振動理論

本章では、連続体の自由振動理論に基づき、角柱の固有振動数と固有モードに関する理論式の導出を行う。

2.1 曲げ自由振動

Fig.1に示すような、密度 ρ 、断面積 A 、ヤング係数 E 、断面二次モーメント I の一様断面を持つ長さ H の弾性角柱モデルの無減衰自由振動の運動方程式は、任意の微小要素における力の釣り合いから、次式のようになる。

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = 0 \quad (1)$$

式(1)の解を、次のような形で仮定する。

$$y(z, t) = u(z)q(t) \quad (2)$$

式(2)を式(1)に代入して整理すると、次式が得られる。

$$\frac{1}{u} \frac{d^4 u}{dz^4} = -\frac{\rho A}{EI} \frac{1}{q} \frac{d^2 q}{dt^2} \quad (3)$$

式(3)の左辺は z のみの式、右辺は t のみの式であるため、式(3)が恒常的に成り立つためには、両辺が定数と等しくなる必要がある。そこで、式(3)の両辺を定数 λ^4 とおいて整理すると、式(4)、(5)が得られる。

$$\frac{d^4 u}{dz^4} - \lambda^4 u = 0, \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{EI}{\rho A} \lambda^4 q = 0 \quad (4), (5)$$

式(4)の一般解が固有モードの式であり、双曲線関数と三

角関数を用いて表すと次式のようになる。

$$u = A_1 \cosh \lambda z + A_2 \sinh \lambda z + A_3 \cos \lambda z + A_4 \sin \lambda z \quad (6)$$

ここに、式(6)の $A_1 \sim A_4$ は定数である。一方で、式(5)は単振動の運動方程式であり、一般解は次式のようになる。

$$q = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \lambda^2 \quad (7), (8)$$

ここに、 B_1 と B_2 は定数、式(8)は曲げ固有円振動数である。

ここで、次のような固定—自由の境界条件

$$u|_{z=0} = 0, \quad \frac{du}{dz}|_{z=0} = 0, \quad \frac{d^2 u}{dz^2}|_{z=H} = 0, \quad \frac{d^3 u}{dz^3}|_{z=H} = 0 \quad (9)$$

を式(6)に適用して整理すると、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \cosh \lambda H + \cos \lambda H & \sinh \lambda H + \sin \lambda H \\ \sinh \lambda H - \sin \lambda H & \cosh \lambda H + \cos \lambda H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

式(10)が振動状態を表すための条件

$$\begin{bmatrix} \cosh \lambda H + \cos \lambda H & \sinh \lambda H + \sin \lambda H \\ \sinh \lambda H - \sin \lambda H & \cosh \lambda H + \cos \lambda H \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

より、振動方程式が次式のように得られる。

$$\cos \lambda H \cosh \lambda H + 1 = 0 \quad (12)$$

式(12)の解は、モードの次数 n に応じて次のように求まる。

$$(n, \lambda_n H) = (1, 1.875), (2, 4.691), (3, 7.855), \dots \quad (13)$$

上の結果と式(8)より、 n 次の曲げ固有振動数に関する式は、次式のようになる。

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda_n H}{H} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (14)$$

また、 n 次の曲げ固有モードを表す式は、式(9)の左から

Basic study to obtain the vibration characteristics of 3D hyper-elastic square cylinder based on the wind tunnel test
Part2 Elastic eigenvalue analysis by continuum vibration theory and FEM

YAMAGUCHI Yudai, SATO Daiki, NAKAGAWA Naohiro,
MARUYAMA Yusuke, TAMURA Tetsuro

3つの条件を式(6)に適用して得られる式を用いて A_2, A_3, A_4 を A_1 で表すことにより、次式のように整理される。

$$u_n(z) = A_1 \left\{ \begin{array}{l} \cosh \lambda_n z - \cos \lambda_n z \\ -\frac{\cosh \lambda_n H + \cos \lambda_n H}{\sinh \lambda_n H + \sin \lambda_n H} (\sinh \lambda_n z - \sin \lambda_n z) \end{array} \right\} \quad (15)$$

2.2 振れ自由振動

2.2.1 円柱モデルにおける理論展開

Fig.2 に示すような密度 ρ 、半径 a 、せん断弾性係数 G 、断面二次極モーメント I_p の円断面をもつ長さ H の一様な弾性円柱モデルの振れ振動について考える。任意の微小要素における力（トルク）のつり合いから、無減衰振れ自由振動の方程式は次式のような波動方程式の形で表される。

$$\rho I_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = G I_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (16)$$

ここに、 ϕ は振れ角を表す。ここで、式(16)の解を次式のように仮定する。

$$\phi(z, t) = \Theta(z)Q(t) \quad (17)$$

式(17)を式(16)に代入して整理すると、次式が得られる。

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{dt^2} = \frac{1}{\Theta} \frac{G}{\rho} \frac{d^2 \Theta}{dz^2} \quad (18)$$

式(18)が恒常的に成り立ち、かつ振動するためには、両辺は負の定数でなければならないため、両辺を $-\Omega^2$ ($\Omega > 0$) とおいて整理すると、式(19), (20)が得られる。

$$\frac{d^2 \Theta}{dz^2} + \left(\sqrt{\frac{\rho}{G}} \Omega \right)^2 \Theta = 0, \quad \frac{d^2 Q}{dt^2} + \Omega^2 Q = 0 \quad (19), (20)$$

上式はいずれも単振動の方程式であるから、一般解はそれぞれ次式のように表される。

$$\Theta = C_1 \cos \left(\sqrt{\frac{\rho}{G}} \Omega z \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\frac{\rho}{G}} \Omega z \right) \quad (21)$$

$$Q = D_1 \cos \Omega t + D_2 \sin \Omega t \quad (22)$$

ここに、 C_1, C_2, D_1, D_2 は定数、 Ω は振れの固有円振動数である。

ここで、次に示す固定-自由の境界条件

$$\Theta|_{z=0} = 0, \quad \frac{d\Theta}{dz} \Big|_{z=H} = 0 \quad (23)$$

を式(21)に適用すると、 $C_1 = 0$ となり、次式が得られる。

$$\sqrt{\frac{\rho}{G}} \Omega H = \frac{2n-1}{2} \pi \quad (24)$$

ここに、 n はモードの次数である。式(24)より、 n 次の振れ固有振動数は次式のようにになる。

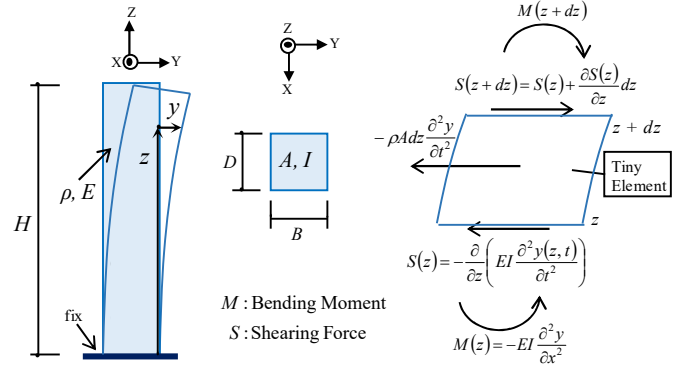


Fig.1 Bending free vibration of elastic square cylinder

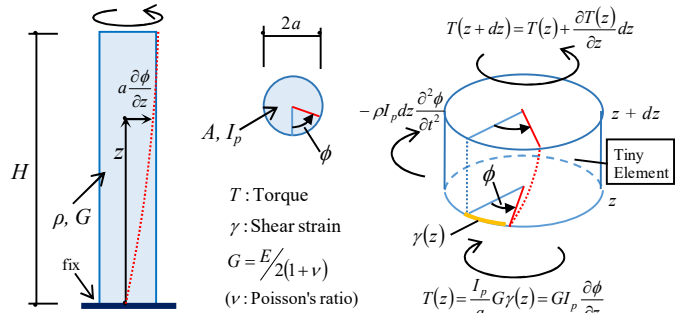


Fig.2 Torsional free vibration of elastic circular cylinder

$$F_n = \frac{2n-1}{4H} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (25)$$

また、 n 次の振れ固有モードは次式のようにになる。

$$\Theta_n(z) = C_2 \sin \frac{2n-1}{2H} \pi z \quad (26)$$

2.2.2 角柱モデルへの適用

2.2.1 項の議論は円柱モデルでのみ成立するもので、角柱の場合は振れ振動に関する厳密な理論展開は困難である。そこで、本項では、円柱モデルの理論に長方形断面におけるサンプナンの振り定数を後付け的に導入することで、角柱モデルの振れ振動特性を近似することを試みる。

円柱モデルの無減衰振れ自由振動の方程式である式(16)に着目すると、式の構造から、左辺の I_p は回転慣性を表すのに対し、右辺の I_p は円断面の振れ強さを表す量であることが分かる。よって、右辺の I_p をサンプナンの振り定数 J に置き換えると、式(16)は次式のようにになる。

$$\rho I_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = G J \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (27)$$

式(27)より、2.2.1 項と同様の手順から、 n 次の振れ固有振動数が次式のように得られる。

$$F_n = \frac{2n-1}{4H} \sqrt{\frac{GJ}{\rho I_p}} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (28)$$

ここで、見附幅 B 、奥行 D の長方形断面の場合、 J の値は次式により求められる¹⁰⁾。

$$J = \beta D B^3 \quad (29)$$

ここに、 β は辺長比 D/B ごとに決まる定数である。 $D/B = 1, 2, 3$ の場合、 β の値は以下のようになる¹⁰⁾。

$$(D/B, \beta) = (1, 0.1406), (2, 0.2287), (3, 0.2633) \quad (30)$$

以上の結果を角柱の振れ振動に関する式として採用し、FEM 解析結果との比較を試みることにする。

3. FEMによる弾性固有値解析の概要

FEM 解析モデルのパラメータを Table1 に示す。パラメータは、基本的に実験模型に基づいているが、ヤング係数 E やポアソン比 ν については把握できていない。そこで、 E の値は、本報その1の自由振動実験から得られた1次の曲げ固有振動数 f_1 の値を式(14)に代入することで得た値を用いることとし、 ν の値は 0.47 とした。厳密な物性の把握のための材料実験は、今後の検討課題の1つである。なお、解析には Abaqus / CAE を用い、弾性体モデルで固有値解析を実施する。Fig.3 に、解析モデル図を示す。解析精度と計算負荷に関して検証を行った結果、要素タイプを六面体の1次要素(非適合モード)である C3D8I、要素サイズは各辺 10 mm とすることとした。要素タイプや要素サイズごとの解析精度の検証の概要については付録に示すこととする。

4. 理論式と FEMによる固有値解析結果とその比較

Table2 に、2章で示した連続体振動に関する理論式と3章で述べた FEM 解析により得られた超弾性角柱の固有振動数の値を示す。 f と F はそれぞれ曲げと振れの固有振動数を示し、Theory と FEM は、それぞれ理論計算値と FEM 解析値を表す。表に示す通り、本解析では、1次から3次までの曲げモードと、1次と2次の振れモードに結果を限定している。また、振れの理論計算は、2.2.2 項で示した円柱の理論を角柱に適用した近似式を用いているため、厳密な理論に基づくものではないが、ここでは便宜上これも Theory と表示している。

まず、理論値と FEM 解析値の整合性について考察する。曲げ1次モードに関しては、116Y と 116B は E の値を自由振動実験の結果に合わせこんでいることもあり、理論値と FEM 値がどちらも実験値と精度よく一致している。一方で、高次モードでは、いずれのモデルでも FEM 解析値が理論値より小さく、また、次数が最も大きい3次モードの場合が最もその差が大きいことが分かる。一方で、振れモードの場合は、FEM 解析値と理論値(近似式による計算結果)が、1次と2次のどちらもほぼ一致していることが確認できる。この結果から、円柱の振れ振動理論にサンブナンの振り定数を適用した近似式は、正四角柱の振れモードの予測に有用であると考えられる。

次に、振動モードの出現順に着目すると、理論では、1次曲げ、1次振れ、2次曲げ、3次曲げ、2次振れの順で

Table1 Parameters for analysis

Name of model	116Y	116B
Breadth B [m]	0.08	0.08
Depth D [m]	0.08	0.08
Height H [m]	0.48	0.48
Density ρ [kg/m ³]	15.8	49.1
Young's modulus E [N/m ²]	6.22×10^4	3.92×10^5
Poisson's ratio ν	0.47	0.47

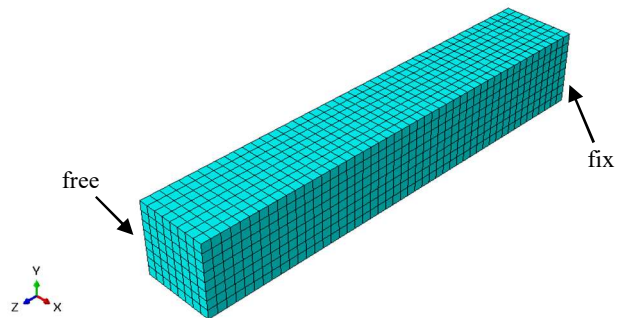


Fig.3 FEM analysis model of cylinder

Table2 Natural frequency derived from theory and FEM

		Theory [Hz]	FEM [Hz]	FEM / Theory
116Y				
Bending mode	f_1	3.52	3.52	1.001
	f_2	22.03	19.53	0.886
	f_3	61.77	47.51	0.769
Torsional mode	F_1	17.51	17.43	0.996
	F_2	52.53	52.27	0.995
116B				
Bending mode	f_1	5.01	5.01	1.000
	f_2	31.36	27.77	0.885
	f_3	87.92	67.56	0.768
Torsional mode	F_1	24.92	24.79	0.995
	F_2	74.76	74.33	0.994

あるのに対し、FEM では、1次曲げ、1次振れ、2次曲げ、2次振れ、3次曲げの順となっている。また、FEM では、2次曲げと1次振れの固有振動数が近い値となっていることも特徴として挙げられる。

今後は、振動台を用いた加振実験により、これらの結果を検証していく予定である。

5. 空力振動時のモードと質量減衰パラメータの評価

Fig.4 に、116B と 116Y の風洞実験により得られた風速と応答(標準偏差)の関係図⁷⁾から抽出した共振風速時の風直交方向の変形モードと、式(15)により得られた1次曲げの変形モード、そして、ロッキングモードを重ねた図を示す。図から、実験のモードと理論の曲げモードがほぼ一致しており、空力振動時に曲げの1次モードで振動していたことが確認できる。

一般に、角柱の空力振動特性の評価指標として、次式で

定義される質量減衰パラメータ δ ⁸⁾が用いられている。

$$\delta = \frac{M_1}{\rho_a BDH} h \quad (31)$$

$$M_1 = \int_0^H m(z)u(z)^2 dz \quad (32)$$

ここに、 ρ_a は空気密度、 h は減衰定数、 M_1 は1次モードの一般化質量、 $m(z)$ と $u(z)$ はそれぞれ高さ z における質量と振動モード、他の変数はTable1と同様である。既往研究では、 δ の導出時にロッキングモード仮定が用いられてきた^{2),9)}。しかし、超弾性角柱の場合、前述のように空力振動時の振動モードは連続体の曲げ振動モードとなる。そこで、本報その1で示した共振風速時の減衰定数の評価値を用い、曲げモードとロッキングモードの2つの仮定から116Yと116Bの δ を導出し、その結果を比較してみることにした。Table3に δ の計算結果を示す。なお、計算に用いる曲げモードは理論式(15)を採用し、 M_1 の導出にはSimpson則¹¹⁾による数値積分を用いた。Table3の結果より、ロッキングモード仮定の場合、曲げモードを用いた場合よりも δ が3割程度過大評価されていることが分かる。よって、超弾性角柱の空力振動特性を δ で評価しようとする場合、やはり連続体の振動モードを用いて厳密に δ を算出することが望ましいものと考えられる。

6. 結言

本報その2では、連続体振動理論と弾性FEM解析により超弾性三次元角柱の固有値解析を実施し、結果の比較を行った。その結果、高次の曲げモードでは、FEMによる固有振動数の解析値が理論値よりも小さい評価となった。また、角柱の捩れ固有振動数の近似式に関して、2次モードまでFEM解析と高精度で一致する解が得られることを確認した。さらに、空力振動時の振動モードが理論の曲げ振動モードと一致することを確認したうえで、曲げ振動モードに基づいて質量減衰パラメータの導出を行い、ロッキングモードを仮定した場合との比較を行った。

得られた結果を踏まえて、今後は振動台による加振実験を行い、超弾性角柱の振動特性を実験的に調べていく予定である。また、材料や辺長比の異なるモデルについても実験や解析を実施し、材料特性を踏まえた超弾性角柱の空力振動特性の評価手法について詳細に検討していく。

謝辞

本報告は、前田建設工業株式会社と東京工業大学による共同研究の成果の一部をまとめたものです。また、本研究の一部は、JST産学共創プラットフォーム共同研究推進プログラム(JPMJP1723)によるものです。ここに記して謝意を表します。

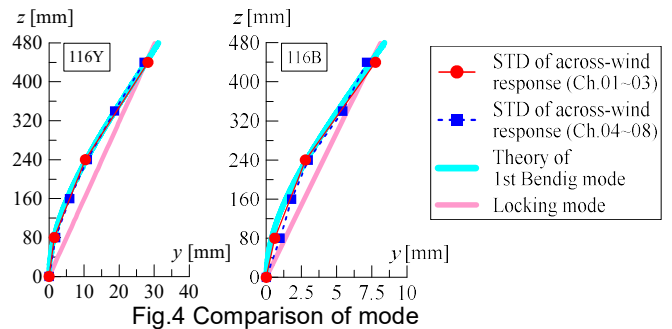


Table3 Comparison of δ derived from each mode

116Y	δ			116B	δ		
	$\delta_{\text{Bend.}}$	$\delta_{\text{Lock.}}$	$\delta_{\text{Lock.}} / \delta_{\text{Bend.}}$		$\delta_{\text{Bend.}}$	$\delta_{\text{Lock.}}$	$\delta_{\text{Lock.}} / \delta_{\text{Bend.}}$
	0.162	0.217	1.337		0.491	0.655	1.334

参考文献

- 河井宏允, 超高層建築物の渦励振について, 日本建築学会大会学術講演梗概集(東北), pp.27-28, 1991.9.
- 天野輝久, 一様流中における三次元正四角柱の渦励振およびギャロッピングに及ぼす隅欠き・隅切りの効果, 日本建築学会構造系論文集, 第478号, pp.63-69, 1995.12.
- 中山昌尚, 田中宏, 山本浩二, 佐々木康人, 棚木勇悟, 田中清, 超高層建築物の風応答評価法に関する研究, その2 空力弾性模型実験の結果概要, 日本建築学会大会学術講演梗概集(北陸), pp.107-108, 1992.8.
- 樋上琇一, 鶴飼邦夫, 原克己, 緑川功, 小坂橋裕一, GTBビルの耐風設計について(その3: 空力弾性模型による空力振動実験), 日本建築学会学術講演梗概集(北陸), pp.115-116, 1992.8.
- 丸川比佐夫, 片桐純治, 勝村章, 藤井邦雄, 多質点弾性模型の開発と高層建築物の風応答評価についての検討, 日本建築学会構造系論文集 第484号, pp.39-48, 1996年6月.
- 三菱地所, TOKYO TORCH 東京駅前常盤橋プロジェクト, <https://www.mcc.co.jp/tokiwabashi/> (2020.12.14 参照).
- 中川尚大, 丸山勇祐, 長尾悠生, 田村哲郎, 佐藤大樹, 河合英徳, 吳嘉瑞, 超弾性体三次元角柱の不安定振動挙動に関する実験的研究, 日本流体力学会年会2020, p.252, 2020.9.
- 日本建築学会, 建築物荷重指針・解説(2015), 丸善出版, p.14, 2015.
- 佐藤大樹, 笠井和彦, 田村哲郎, 高層建築物の制振を対象とした風洞実験装置の開発および風応答に関する基礎的研究—粘性・粘弾性ダンパーを有する高層建築物の一様流中における風洞実験—, 日本建築学会構造系論文集 第609号, pp.65-73, 2006.11.
- 日本機械学会, JSME テキストシリーズ 材料力学, 丸善出版, p.45, 2016.
- 川崎晴久, C&FORTRANによる数値解析の基礎, 共立出版, p.196, 2002.

付録 FEM解析における要素の種類とサイズごとの精度の比較

Fig.Aに、要素の種類とサイズごとのFEM解析精度の比較を示す。縦軸は節点数、横軸は曲げ固有振動数の解析結果を理論値で除した値である。解析モデルの詳細は、C3D4が四面体1次要素、C3D10が四面体2次要素、C3D8が六面体1次要素、C3D8Iが六面体1次要素の非適合モード、C3D20が六面体2次要素である。プロットの種類は凡例に示す通りである。

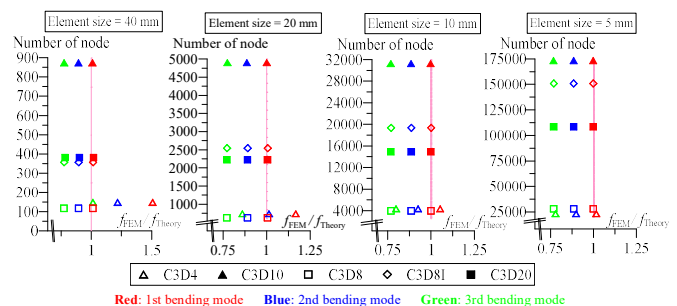


Fig.A Verification of FEM analysis model

*1 東京工業大学 環境・社会理工学院 大学院生

*2 東京工業大学 未来産業技術研究所 准教授・博士(工学)

*3 前田建設工業(株) ICI総合センター

*4 東京工業大学 工博

Graduate Student, School of Environment and Society, Tokyo Institute of Technology*1

Associate Prof., FIRST, Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.*2

ICI Center, Maeda Corporation*3

Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.*4