

論文 / 著書情報  
Article / Book Information

題目(和文)	剛体球及び剛体円筒と半無限弾性体間の凝着転がり接触の解析モデルとその解析解
Title(English)	
著者(和文)	井口洋二
Author(English)	Yoji Iguchi
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第11404号, 授与年月日:2020年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:高橋 邦夫,齊藤 滋規,井上 裕嗣,佐藤 千明,秋田 大輔
Citation(English)	Degree:Doctor (Engineering), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第11404号, Conferred date:2020/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	要約
Type(English)	Outline

剛体球及び剛体円筒と半無限弾性体間の凝着転がり接触の  
解析モデルとその解析解

理工学研究科 国際開発工学専攻

高橋邦夫研究室

井口洋二

# 目次

変数・定数の対応表 .....	1
1 緒論 .....	3
2 剛体傾斜面と半無限弾性体間の凝着接触の解析モデル .....	7
2.1 平面ひずみ状態下の接触モデル(2次元問題) .....	7
2.2 円形接触面における接触モデル(3次元問題) .....	9
2.3 接触面内外の変位分布	
2.3.1 接触面内の変位分布	
2.3.2 接触面外の変位分布	
2.4 計算結果・考察	
2.4.1 弾性変形と圧力分布	
2.4.2 非軸対称な弾性変形	
2.5 結言 .....	9
3 剛体球と半無限弾性体間の凝着転がり接触の解析モデル .....	10
3.1 接触モデルと圧力・変位分布	
3.2 系全体のエネルギーと平衡条件	
3.2.1 弾性エネルギー・界面エネルギー	
3.2.2 平衡条件と接触状態の決定	
3.2.3 パラメータの無次元化	
3.3 接触の安定性	
3.3.1 転がり条件	
3.3.2 脱離条件	
3.4 最大凝着力	
3.5 計算結果・考察	
3.5.1 無回転および転がり時の弾性変形・圧力分布	
3.5.2 エネルギーカーブから見る転がり	
3.5.3 フォースカーブ	
3.5.4 転がりトルクに及ぼす荷重の影響	
3.5.5 接触状態図	
3.6 結言	
4 剛体円筒と半無限弾性体間の凝着転がり接触の解析モデル .....	11
4.1 接触モデルと圧力・変位分布	
4.2 系全体のエネルギーと平衡条件	
4.2.1 弾性エネルギー	
4.2.2 界面エネルギー	
4.2.3 メカニカルポテンシャルエネルギー	

- 4.2.4 平衡条件と接触状態
- 4.2.5 発散するエネルギーカーブの平衡点の可視化

### 4.3 接触の安定性

- 4.3.1 転がり条件
- 4.3.2 脱離条件

### 4.4 計算結果・考察

- 4.4.1 無回転および転がり時の弾性変形・圧力分布
- 4.4.2 無回転時から転がり時へのエネルギーカーブの変化
- 4.4.3 回転角に対するエネルギーカーブ
- 4.4.4 無荷重時から脱離時へのエネルギーカーブおよび平衡点の変化
- 4.4.5 転がりトルク，転がり角に及ぼす荷重の影響
- 4.4.6 接触状態図
- 4.4.7 弾性変形の発散性と現実の境界条件
- 4.4.8 球と円筒の転がりトルク・転がり角の比較
- 4.4.9 転がり抵抗係数

### 4.5 結言

5 結論 .....	12
引用文献 .....	13
Appendix 本論内で用いられる積分 .....	17
A.1 3次元問題における弾性変形導出に用いる積分	
A.1.1 不定積分	
A.1.1 接触面内 $r \leq a$ の変位分布	
A.1.2 接触面外 ( $r \geq a$ ) の変位分布	
A.2 3次元問題における弾性エネルギー導出に用いる積分	
A.3 2次元問題における圧力分布及び弾性変形導出に用いる積分	
A.3.1 圧力分布 $x \leq a$	
A.3.2 接触面外 $x \geq a$ の変位分布	
A.4 2次元問題における弾性エネルギー導出に用いる積分	



## 変数・定数の対応表

本論内で用いる主な変数及び定数，アクセント，添字は以下の表の通りである。

・ 文字一覧

文字	説明
$A, B, C, \alpha, \beta$	任意定数，変数.
$a$	接触半径(3次元問題)または接触幅(2次元問題).
$b$	2次元問題における変位境界条件( $x \rightarrow b, u \rightarrow 0$ ).
$d$	剛体球及び剛体円筒と半無限弾性体間の隙間( $= u - z_{\text{rigid}}$ ).
$E$	弾性体の縦弾性係数(ヤング率).
$E^*$	弾性体の等価弾性係数( $= E/(1 - \nu^2)$ )
$I, J$	積分.
$M$	接触面内に与えられるトルク.
$P$	接触面内に与えられる荷重.
$p$	接触面内の圧力分布.
$R$	剛体球及び剛体円筒の曲率半径.
$r, \varepsilon$	原点を中心とした極座標系における距離及び角度座標.
$s, \phi$	圧力点を中心とした極座標系における距離及び角度座標.
$S$	接触面，接触面積.
$U_{\text{xx}}$	特定の状態におけるエネルギー.
$U_{\text{ela.}}$	半無限弾性体に充填される弾性エネルギー.
$U_{\text{int.}}$	界面エネルギー.
$U_{\text{M.P.}}$	メカニカルポテンシャルエネルギー(2次元問題のみ).
$U_{\text{total}}$	系全体のエネルギー.
$u$	半無限弾性体表面の変位分布，弾性変形.
$u_{\text{H}}$	弾性体の弾性変形の内，球・円筒面形状成分．Hertz 接触に相当.
$u_{\text{B}}$	弾性体の弾性変形の内，平面形状成分．Boussinesq 接触に相当.
$u_{\text{t}}$	弾性体の弾性変形の内，傾斜面形状成分.
$x, y, z$	直交座標.
$z_{\text{rigid}}$	剛体球及び剛体円筒表面形状.
$\gamma_{\text{R}}$	剛体球及び剛体円筒の表面自由エネルギー.
$\gamma_{\text{E}}$	半無限弾性体の表面自由エネルギー.
$\gamma_{\text{RE}}$	剛体と弾性体間の界面自由エネルギー.
$\Delta\gamma$	剛体と弾性体間の凝着仕事( $= \gamma_{\text{R}} + \gamma_{\text{E}} - \gamma_{\text{RE}}$ ).
$\delta$	剛体球及び剛体円筒の垂直変位.
$\theta$	剛体球及び剛体円筒の回転角.
$\nu$	弾性体のポアソン比.

・ アクセント一覧

アクセント	説明
~	3次元問題における無次元化パラメータであることを表す.
-	2次元問題における無次元化パラメータであることを表す.
^	2次元問題における弾性変形及び総エネルギーの発散性を考慮した無次元化パラメータであることを表す.

・ 添字一覧

添字		説明
sta.	stable	エネルギー平衡条件下のパラメータであることを表す.
roll	roll, rolling	転がり条件下のパラメータであることを表す.
det.	detachment	脱離条件下のパラメータであることを表す.
rolldet	rolling detachment	転がり脱離条件下のパラメータであることを表す.
Rlim	Rolling limit	転がり限界条件下のパラメータであることを表す.
adh.	adhesion	最大凝着条件下のパラメータであることを表す.
0	zero load, pressure	無荷重または圧力消失点を意味する.

# 1 緒論

物体の転がりは我々の周囲の至るところで発生、利用されている我々にとって最も身近な物理現象のうちの一つである。古くから人力では運べない重量の大きな物体を運ぶのには転がりが使われてきた。例えば、古代アッシリアの石像の運搬に木で作られた“ころ”が用いられたと言われており[1,2]、牛車や馬車に用いられる車輪はその発展型と言える。これらは物体を摩擦させて移動させるよりも転がして移動した方が直動方向の負荷が小さくなるという転がりの特性を利用したものである。また、直動方向だけでなく回転方向にも転がりを用いることで、物体の回転方向の抵抗を小さくする機構、ベアリングも極めて身近な機械要素であろう。他には回転方向の動力伝達を行う歯車も特にインボリュート歯車であれば接触部において転がりによって動力伝達が成される。実際の転がり接触する機構の工学的な利用としては、ベアリングやLMガイドなどに代表される潤滑機構、電車の車輪や自動車のタイヤ、そしてインボリュート歯車に代表される動力伝達機構などがある。転がり接触のメカニズムを明らかにすることはこれらの機械要素の性能向上に大きく寄与する可能性がある。これらの機械要素は機械中に多数存在するため、これらの性能向上は大きな省エネルギー効果をもたらす可能性が高い。また、近年は機械の微小化や生体分野への利用が進み、アセンブリ時に曲率を持つ微小な部品や生体部品のマニピュレーションが必要な場合も多い。マイクロオーダー以下の接触問題においては重力に代表される体積力よりも固体間凝着力のような面積力の方が支配的となり、物体の把持・脱離が困難となる。これらのマニピュレーションを容易にするために転がりを利用したマニピュレーションなどが検討されており、凝着現象を考慮した転がり接触のメカニズム解明はマイクロマニピュレーションの分野からも強く求められている。

転がり接触は形状によって大きく2つの場合に分けられる。一つは球、もう一つは円筒である。球の転がり接触は物体が点接触する場合で玉軸受や電車のレールなどが該当し、円筒の転がり接触

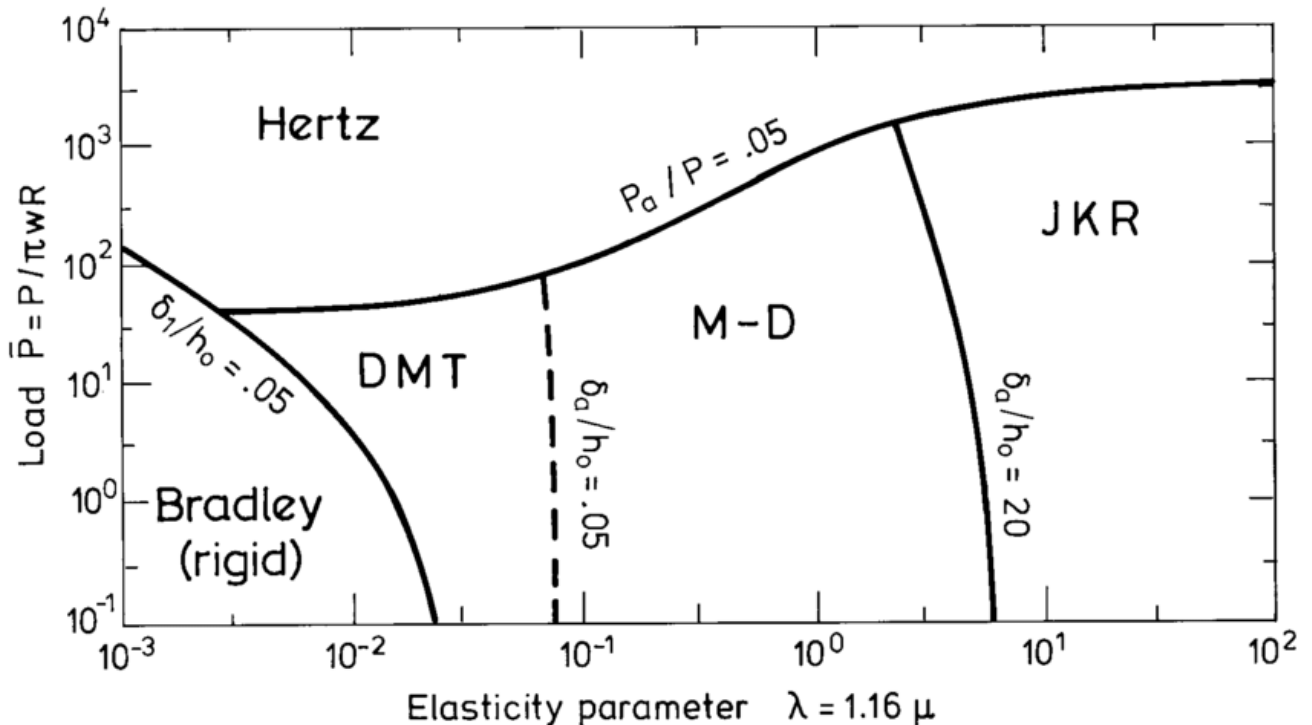


図 1 Johnson-Greenwood の"Adhesion map" [13]

は物体が線接触する場合でころ軸受やインボリュート歯車などが該当する。これらの問題はそれぞれ 3 次元問題と 2 次元問題に切り分けられて研究が成されてきた。

転がり接触の 3 次元問題を説明するに当たって、まず 3 次元弾性論の発展から説明を行う。3 次元弾性論は円形接触面に及ぼす弾性接触問題、Boussinesq 問題に端を発する[3]。主要な Boussinesq 問題に対する解としては球面(Hertz 接触[4])、傾斜面[5,6]、平面(Boussinesq 接触[7])の 3 種類が挙げられ、これらの線形結合によって様々な弾性変形を表現してきた。また、これらの解は例えば Sneddon[7]、Green[5]の場合において、Hankel 変換を用いて応力ひずみ関係を解いているため、複素数を含むような解析となっているが、Timoshenko と Goodier が導いた半無限弾性体に及ぼす 1 点集中荷重に対する弾性変形の解を用いて実数領域で議論出来ることを Johnson が著書で記述している[8,9]。しかし、これらの接触問題は接触面内における応力ひずみ関係が満足されているか否かについて議論されていることが多く、接触面外の弾性変形については議論されることが極めて少ない。接触面外の弾性変形については球面と平面に関して Maugis[10]が議論しているに留まるのみで、傾斜面の変形に関しては未だに議論されていない。この要因として、半無限弾性体面の鉛直方向の軸に対して非軸対称な弾性変形を扱うための座標系が提案されていなかったため、弾性変形を求めるために必要な積分を解析的に計算不可能だったことが挙げられる。

接触における凝着の影響を考慮した凝着接触理論は大きく分けて 2 つ存在する。Hertz 接触から導出した物体間の隙間から算出した表面力を加算した DMT(Derjaguin-Muller-Toporov)理論[11]と Hertz 接触に Boussinesq 接触を凝着の影響として加味した JKR(Johnson-Kendall-Roberts)理論[12]である。これらの接触理論が適用できる領域は Johnson と Greenwood によってそれぞれ”凝着マップ(Adhesion-Map[13], 図 1)”にまとめられており、DMT 理論は凝着現象による弾性変形の影響を考慮していないため、接触物体が極めて弾性率が高い場合以外では適用出来ず、JKR 理論が広い適用範囲を有することを確認出来る。しかし、これらの接触理論は回転方向の自由度を持っておらず、転がりなどの非軸対称変形は議論出来ない。

3 次元の転がり接触問題は Hertz 接触を基に解析モデルが提案されていることが多い。それらの解析モデルは Hertz 接触に滑り・摩擦条件、クリープ変形などを加えたものである[9,14-18]。これらの解析モデルは当然凝着現象の寄与を考慮出来ない。凝着現象の寄与を考慮する場合、物体間が接触する円形接触面の端部において圧力が無限大に発散し[9]、解析的に弾性変形や圧力分布を扱うことが困難になるばかりでなく、転がり始めの閾値が明確でないことが凝着現象の寄与を考慮した解析モデルが極めて少ない要因として挙げられる。数少ないモデルとして Dominik[19]が提案した解析モデルがある。Dominik のモデルは転がり始めの閾値としてトルクによる接触面の回転方向へのシフトを扱っているが、彼のモデルは軸対称な接触を仮定しており、非軸対称な転がり接触を表現出来ていない。したがって、現状の解析モデルにおいて、非軸対称弾性変形を有し、圧力及び弾性変形上で矛盾のない転がり接触を表現出来ているモデルは存在しないと言える。

3 次元問題に対して、2 次元問題は Muskhelishvili[20]によって解決されたものが多い。Muskhelishvili はせん断方向を虚数軸に割り当てることによって応力関数を複素領域に拡張し、垂直方向のみならず、接線方向のトラクション・変形を考慮した解析を行った。Muskhelishvili の解の内、実数領域で表現される垂直方向の圧力・変位を扱った解は特に簡単に表現され、表 1 にあるような円筒面・傾斜面・平面状の弾性変形が著書の中で解説されている。これらが転がり接触及び凝着接

表 1 2次元弾性論における Muskhelishvili の解[20]

	(i)Cylindrical(Parabolic) Punch	(ii)Flat Punch	(iii)Tilted Punch
Geometry			
Condition	Frictionless	No Slip	Frictionless, No slip
Pressure distribution	$P_H = \frac{\pi E^* a}{4R}$ , $p_H(x) = \frac{E^*}{2R} \sqrt{a^2 - x^2}$	$p_B(x) = \frac{P_B}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}$	$M = \frac{\pi E^* a^2}{4} \tan \theta$ , $p_T(x) = \frac{E^* \tan \theta}{2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
Elastic deformation	$\frac{\partial \bar{u}_H}{\partial x}(x) = \begin{cases} -x/R, &  x  \leq a \\ \frac{1}{R} \left( \text{sign}(x) \sqrt{x^2 - a^2} - x \right), &  x  \geq a \end{cases}$	$\frac{\partial \bar{u}_B}{\partial x}(x) = \begin{cases} 0, &  x  \leq a \\ -\frac{2P_B}{\pi^2 E^*} \frac{\text{sign}(x)}{\sqrt{x^2 - a^2}}, &  x  \geq a \end{cases}$	$\frac{\partial \bar{u}_T}{\partial x}(x) = \begin{cases} \tan \theta, &  x  \leq a \\ \tan \theta \left( 1 - \text{sign}(x) \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right), &  x  \geq a \end{cases}$

触を表現するのに用いられる弾性変形である。これらの Muskhelishvili の解を用いて、Kalker は 2 次元問題における円筒の凝着接触問題の解析に取り組んだ。Kalker は円筒面と平面の弾性変形の解の和によって凝着接触の弾性変形を表現し、剛体の剥離時に半無限弾性体に充填された弾性エネルギーが接触面端部において発散され、そのエネルギーが接触界面と物体表面の間のエネルギー差（凝着仕事）に等しいとしてモデルを構築した。しかし、Kalker のモデルは圧力が無限大に発散することを理由に平面上の弾性変形によって充填されるエネルギーのみを接触面端部で発散される対象とし、円筒面状の弾性変形によって充填される弾性エネルギーを無視しており、円筒の形状による弾性エネルギーの変化を考慮していない。これは接触面端部を亀裂と見なして接触端におけるエネルギー散逸のみ考える Savkoor のモデル[21]と同様の近似である。この近似モデルは広く用いられており、また、用いられる要因としては、Muskhelishvili の解と半無限弾性体の境界条件に基づいて弾性変形を計算すると、円筒の垂直変位及び弾性エネルギーが無限大に発散し、現実問題と乖離が発生するため、この弾性エネルギーの議論を避けてエネルギー散逸を対象とすることで解析可能なモデルとしたのである。変位・エネルギーが無限大に発散することに対して Kalker は後に発表した線接触のモデル[22]において半無限弾性体の境界条件を用いずに有限な範囲に変位の収束条件を設けていることから、2次元問題における変位・エネルギーの発散性が解析において大きな問題を孕んでいることがわかる。現状もこの手法が主流であり、形状による弾性エネルギー変化を含んだ系全体のエネルギーを基に接触状態が議論される例は解析的な研究においては極めて少ない。

2次元問題における転がり接触は3次元問題と同様に円筒面状の弾性変形を基にして滑り、粘弾性変形などを加えた解析モデル[9,23-26]や数値計算モデル[27-29]などが提案されている。しかし、これらは転がりのメカニズムを明らかにするものではなく、転がり始めの閾値がどのようなパラメータによって決定されるのかが明快に説明出来るものではない。凝着現象を考慮して構築された解析モデル[30-33]も存在するが、これらもまたメカニズム解明には十分でない。

2次元の凝着転がり接触の解析における大きな進展として Saito ら[34]の有限要素法(FEM)による弾性エネルギー計算を用いたパラメータ推定手法及びモデルが挙げられる。通常、凝着接触において圧力は接触面端部で無限大に発散するため、FEM を用いるとメッシュが粗すぎて接触面端部に

おける弾性変形及び弾性エネルギーの計算誤差が極めて大きくなる．そこで Saito らが用いた弾性エネルギーの計算法は通常 FEM と異なり，圧力の発散速度に合わせて接触面端部に向かってメッシュの密度を上げることで安定した弾性エネルギーの計算を可能にした．Saito らは弾性体円筒と剛体平面における転がり接触において，円筒の回転角を上げていった際に，弾性エネルギーと界面エネルギーから計算されるエネルギー平衡点が消失する点が存在することを示唆した．また，その消失点が転がり始めの閾値を決定し，転がりが発生するメカニズムであると提唱した．消失点における転がりに必要な単位長さ当たりのトルク  $M_{\text{roll}}$  は

$$M_{\text{roll}} = \Delta\gamma R, \quad (1)$$

で表現され，2 物体間の凝着仕事  $\Delta\gamma$  および円筒の曲率半径  $R$  の単純な積で与えられることが示唆された．しかし，数値計算を含むため，転がり始めの閾値がどのようなメカニズムで決定されるのかについて詳細に考察することが出来ないという欠点がある．

これらを踏まえた上で，本論においては，剛体球及び剛体円筒と半無限弾性体間の凝着転がり接触の解析モデルを提案し，解析解を導くことで転がりのメカニズムや転がりの挙動に関して，解析解を与える．本論における解析モデルにおいては転がり接触を球面(または円筒面)・傾斜面・平面状の 3 つの弾性変形の和で表現する．球面(円筒面)・平面の接触に関しては既存研究において解かれているが，傾斜面の解が既存研究において解かれていないため，剛体傾斜面が半無限弾性体に及ぼす接触面内外の弾性変形について 2 章で検討を行う．2 章での検討を基に剛体球の変位制御下の転がり接触に関しては 3 章において解説する．剛体円筒の荷重制御下の転がり接触に関しては 4 章で解説する．3, 4 章の議論の流れはまず接触面内の圧力分布と変位分布の関係について古典弾性論に基づいた手法で導く．次に，エネルギーの観点から考えた接触状態の決定を行う．初期条件を非接触状態と仮定し，半無限弾性体に充填される弾性エネルギー，接触状態の界面と非接触状態の表面の間のエネルギー差である界面エネルギー，そして剛体円筒の場合のみ円筒の位置エネルギーであるメカニカルポテンシャルを考慮した系全体の総エネルギー変化を基にエネルギー平衡条件から接触状態を決定する．2 物体の幾何的な関係とエネルギー平衡点の有無の 2 つの観点から接触の安定性を議論することで，物体の転がりと脱離の条件をそれぞれ議論する．これらの議論は 2 次元問題において問題として挙げられた半無限弾性体の境界条件による弾性変形及び弾性エネルギーの発散性問題を包含し，すべて解析的な手法のみで問題が解かれる．また，これらの議論から転がり，脱離を含む接触状態が解析的に表される．そして，これらの解析解を基に転がり時の弾性変形及び圧力分布，エネルギーカーブ，転がりに必要なトルクや接触状態を視覚的に表現した図“接触状態図”に関して解説を行う．

## 2 剛体傾斜面と半無限弾性体間の凝着接触の解析モデル

剛体傾斜面と半無限弾性体間の接触は平面ひずみ状態下の2次元問題(2.1章)と円形接触面における3次元問題(2.2章)に分けられる。2次元問題に関しては Muskhelishvili [20]によって解かれているため導出の多くは割愛する。本章においては3次元問題について主に説明を行う。

### 2.1 平面ひずみ状態下の接触モデル(2次元問題)

平面ひずみ状態で完全すべり状態下の剛体傾斜面の半無限弾性体に対する接触問題において、図2のような座標系を考えた場合の半無限弾性体にかかる圧力分布 $p(x)$ と接触面内にかかる変位分布 $u(x)$ の関係は応力の釣り合い、ひずみの適合条件式、フックの法則が成り立つ場合、1点集中線荷重の弾性変形の解である Timoshenko-Goodier の解を積分することで以下の式で表される [9,20].

$$\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = -\frac{\pi E^*}{2} \frac{\partial u(x)}{\partial x}. \quad (2)$$

ただし、 $E^*$ は等価弾性率( $= E/(1-\nu)$ )である。また、半無限弾性体に接触する剛体傾斜面は単純な線形な式で表現できるため、接触面内にかかる弾性変形 $u(x)$ は以下の式で表すことができる。

$$u(x) = \tan \theta x + \delta, \quad x \leq a. \quad (3)$$

尚、 $\theta$ は剛体傾斜面の傾斜角、 $\delta$ は $x=0$ における剛体傾斜面の垂直変位である。式(2,3)を組み合わせることで、圧力分布を求めることができる。

式(2,3)に Söhngen-Mikhlin の積分公式[35,36]を適用し、得られる式に対してコーシーの主値で定める広義積分を行うことで以下の解を得ることが出来る (Appendix 参照).

$$p(x) = \frac{E^* \tan \theta}{2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (4)$$

Muskhelishvili の著書には接触面内にしか言及されていないが、Johnson の著書[9]に接触面外の変位分布に対する拡張の方法について記述されている。ただし、Johnson は傾斜面の変形については記述

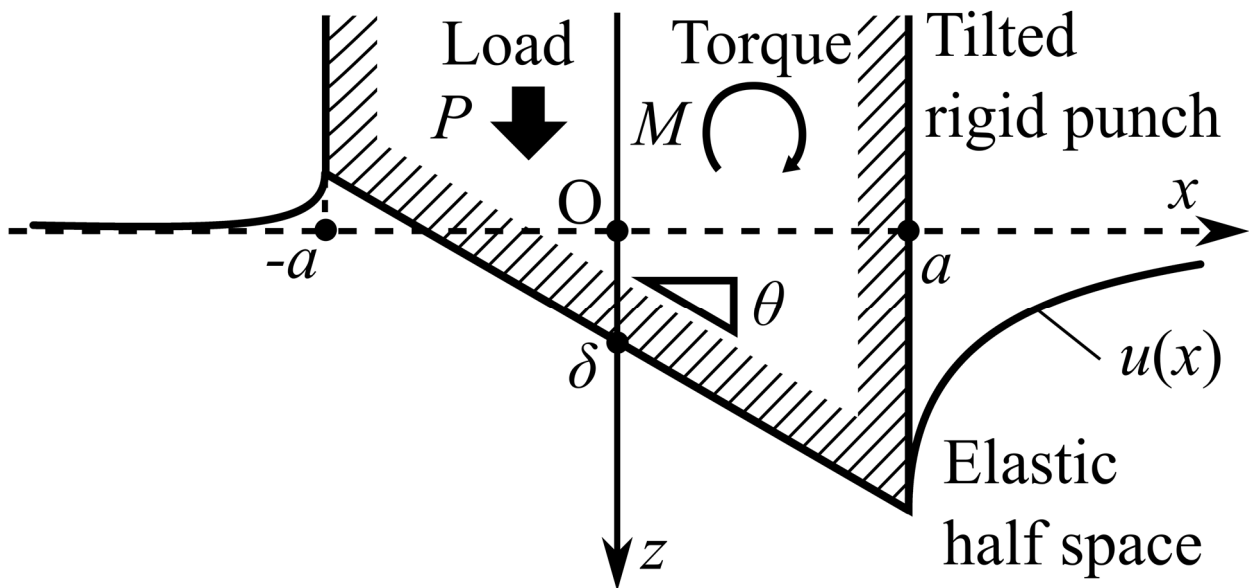


図2 2次元問題における剛体傾斜面の凝着接触の模式図

していないため、本章において傾斜面の部分に関して拡張を行う。(4)を式(2)に代入して接触面外の弾性変形の勾配を求める。

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = -\frac{2}{\pi E^*} \left\{ \frac{P \text{sign}(x)}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \frac{\pi E^* \tan \theta}{2} \left( \frac{x \text{sign}(x)}{\sqrt{x^2 - a^2}} - 1 \right) \right\} \quad (5)$$

式(5)を $x = 0$ のときの垂直変位 $\delta$ を基準に以下の積分を行うことで、接触面外の変位分布を得ることが出来る。

$$u(x) = \delta + \int_0^{a \text{sign}(x)} \frac{\partial u(x)}{\partial x} dx + \int_{a \text{sign}(x)}^x \frac{\partial u(x)}{\partial x} dx, \quad (6)$$

式(5,6)より、接触面外の変位分布は以下の式で求められる。

$$u(x) = \delta + \left\{ \frac{2P}{\pi E^*} \ln \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2} + x \text{sign}(x)} - \tan \theta \left( \text{sign}(x) \sqrt{x^2 - a^2} - x \right) \right\}. \quad (7)$$

ここで、半無限弾性体の境界条件は

$$x \rightarrow \pm\infty, \quad u(x) \rightarrow 0 \quad (8)$$

であるから、この境界条件を式(7)に適用した場合、垂直変位 $\delta$ は以下の式で求められる。

$$\delta = -\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2P}{\pi E^*} \ln \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2} + x \text{sign}(x)} - \tan \theta \left( \text{sign}(x) \sqrt{x^2 - a^2} - x \right) \right\} \quad (9)$$

式(9)を見ればわかる通り、垂直変位は無限大に発散する。したがって、Johnsonは

$$x \rightarrow \pm b, \quad u(x) \rightarrow 0 \quad (10)$$

のような有限な範囲に境界条件を与えることで、有限な垂直変位として与えることが出来ると説明を行っている。この方法は後に Kalker も用いており[22]、有限な変形を与える手法として用いられている。本論4章において、転がり接触を扱う際に同様の問題が現れるが、式(8)の境界条件を維持したまま議論を行う。

## 2.2 円形接触面における接触モデル(3次元問題)

多重公表を禁止している学術ジャーナルへの刊行予定のため，非公表.

## 2.3 結言

多重公表を禁止している学術ジャーナルへの刊行予定のため，非公表.

### 3 剛体球と半無限弾性体間の凝着転がり接触の解析モデル

多重公表を禁止している学術ジャーナルへ投稿中のため，非公表.

## 4 剛体円筒と半無限弾性体間の凝着転がり接触の解析モデル

多重公表を禁止している学術ジャーナルへの投稿準備中のため，非公表.

## 5 結論

多重公表を禁止している学術ジャーナルへの刊行予定，投稿中，投稿予定の内容を含むため，非公表。

## 引用文献

- [1] A.H. Layard, Discoveries in the Ruins of Nineveh and Babylon: With Travels in Armenia, Kurdistan and the Desert, John Murray, 1853.
- [2] 山本雄二, 兼田禎宏, トライボロジー, 第2版, オーム社, 東京, 2010.
- [3] A.E.H. Love, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th edition, Cambridge University Press, 2013.
- [4] H. Hertz, On the contact of elastic solids, *J Reine Angew Math.* 92 (1881) 156–171. doi:10.1515/crll.1882.92.156.
- [5] A.E. Green, On Boussinesq's problem and penny-shaped cracks, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 45 (1949) 251–257. doi:10.1017/S0305004100024804.
- [6] J.R. Barber, Some polynomial solutions for the non-axisymmetric Boussinesq problem, *J. Elast.* 14 (1984) 217–221. doi:10.1007/BF00041668.
- [7] I.N. Sneddon, Boussinesq's problem for a flat-ended cylinder, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 42 (1946) 29. doi:10.1017/S0305004100022702.
- [8] ティモシェンコ S.P., グーディア J.N., 金多潔, 弾性論, コロナ社, 1973.
- [9] K.L. Johnson, Contact mechanics, second edition, Cambridge university press, Cambridge Cambridgeshire; New York, 1987.
- [10] D. Maugis, Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a dugdale model, *J. Colloid Interface Sci.* 150 (1992) 243–269. doi:10.1016/0021-9797(92)90285-T.
- [11] B.V. Derjaguin, V.M. Muller, Yu.P. Toporov, Effect of contact deformations on the adhesion of particles, *J. Colloid Interface Sci.* 53 (1975) 314–326. doi:10.1016/0021-9797(75)90018-1.
- [12] K.L. Johnson, K. Kendall, A.D. Roberts, Surface energy and the contact of elastic solids, *Proc. R. Soc. Lond. Math. Phys. Eng. Sci.* 324 (1971) 301–313. doi:10.1098/rspa.1971.0141.
- [13] K.L. Johnson, J.A. Greenwood, An Adhesion Map for the Contact of Elastic Spheres, *J. Colloid Interface Sci.* 192 (1997) 326–333. doi:10.1006/jcis.1997.4984.
- [14] K.L. Johnson, A review of the theory of rolling contact stresses, *Wear.* 9 (1966) 4–19. doi:10.1016/0043-1648(66)90010-X.
- [15] K.L. Johnson, The effect of a tangential contact force upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane, *J. Appl. Mech.* 80 (1958) 339–346.
- [16] K.L. Johnson, The Influence of elastic deformation upon the motion of a ball rolling between two surfaces, *Proc. Inst. Mech. Eng.* 173 (1959) 795–810. doi:10.1243/PIME\_PROC\_1959\_173\_064\_02.
- [17] J.J. Kalker, On the rolling contact of two elastic bodies in the presence of dry friction, Dr. Diss. Tech. Univ. Delft. (1967). <http://resolver.tudelft.nl/uuid:aa44829b-c75c-4abd-9a03-fec17e121132> (accessed November 30, 2018).
- [18] J.J. Kalker, Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact, Springer Science & Business Media, 2013.

- [19] C. Dominik, A.G.G.M. Tielens, Resistance to rolling in the adhesive contact of two elastic spheres, *Philos. Mag. A*. 72 (1995) 783–803. doi:10.1080/01418619508243800.
- [20] N.I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Springer Netherlands, 1977.
- [21] A.R. Savkoor, G. a. D. Briggs, The effect of tangential force on the contact of elastic solids in adhesion, *Proc R Soc Lond A*. 356 (1977) 103–114. doi:10.1098/rspa.1977.0123.
- [22] J.J. Kalker, On elastic line contact, *J. Appl. Mech.* 39 (1972) 1125–1132. doi:10.1115/1.3422841.
- [23] D. Nowell, D.A. Hills, A. Sackfield, Contact of dissimilar elastic cylinders under normal and tangential loading, *J. Mech. Phys. Solids*. 36 (1988) 59–75. doi:10.1016/0022-5096(88)90020-8.
- [24] K.L. Johnson, One Hundred Years of Hertz Contact, *Proc. Inst. Mech. Eng.* 196 (1982) 363–378. doi:10.1243/PIME\_PROC\_1982\_196\_039\_02.
- [25] C.M. Pereira, A.L. Ramalho, J.A. Ambrósio, A critical overview of internal and external cylinder contact force models, *Nonlinear Dyn.* 63 (2011) 681–697. doi:10.1007/s11071-010-9830-3.
- [26] S.C. Hunter, The Rolling Contact of a Rigid Cylinder With a Viscoelastic Half Space, *J. Appl. Mech.* 28 (1961) 611–617. doi:10.1115/1.3641792.
- [27] R.H. Bentall, K.L. Johnson, Slip in the rolling contact of two dissimilar elastic rollers, *Int. J. Mech. Sci.* 9 (1967) 389–404. doi:10.1016/0020-7403(67)90043-4.
- [28] M. Lovell, Analysis of contact between transversely isotropic coated surfaces: development of stress and displacement relationships using FEM, *Wear*. 214 (1998) 165–174. doi:10.1016/S0043-1648(97)00240-8.
- [29] D. Franke, A. Düster, V. Nübel, E. Rank, A comparison of the h-, p-, hp-, and rp-version of the FEM for the solution of the 2D Hertzian contact problem, *Comput. Mech.* 45 (2010) 513–522. doi:10.1007/s00466-009-0464-6.
- [30] J.-C. Charmet, M. Barquins, Adhesive contact and rolling of a rigid cylinder under the pull of gravity on the underside of a smooth-surfaced sheet of rubber, *Int. J. Adhes. Adhes.* 16 (1996) 249–254. doi:10.1016/S0143-7496(96)00013-9.
- [31] J.A. Greenwood, K.L. Johnson, S.-H. Choi, M.K. Chaudhury, Investigation of adhesion hysteresis between rubber and glass using a pendulum, *J. Phys. Appl. Phys.* 42 (2009) 035301. doi:10.1088/0022-3727/42/3/035301.
- [32] N. Sundaram, T.N. Farris, S. Chandrasekar, JKR adhesion in cylindrical contacts, *J. Mech. Phys. Solids*. 60 (2012) 37–54. doi:10.1016/j.jmps.2011.10.002.
- [33] P.C. Mishra, S. Balakrishnan, H. Rahnejat, Tribology of compression ring-to-cylinder contact at reversal, *Proc. Inst. Mech. Eng. Part J J. Eng. Tribol.* 222 (2008) 815–826. doi:10.1243/13506501JET410.
- [34] S. Saito, T. Ochiai, F. Yoshizawa, M. Dao, Rolling behavior of a micro-cylinder in adhesional contact, *Sci. Rep.* 6 (2016) 34063. doi:10.1038/srep34063.
- [35] H. Söhngen, Die Lösungen der Integralgleichung und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie, *Math. Z.* 45 (1939) 245–264. doi:10.1007/BF01580284.

- [36] S.G. Mikhlin, Integral equations and their applications to certain problems in mechanics, mathematical physics and technology, English edition (Translated by A. H. Armstrong), Math. Gaz. 43 (1959) 156–156. doi:10.2307/3610248.
- [37] N. Menga, G. Carbone, The surface displacements of an elastic half-space subjected to uniform tangential tractions applied on a circular area, Eur. J. Mech. - ASolids. 73 (2019) 137–143. doi:10.1016/j.euromechsol.2018.07.011.
- [38] K. Takahashi, R. Mizuno, T. Onzawa, Influence of the stiffness of the measurement system on the elastic adhesional contact, J. Adhes. Sci. Technol. 9 (1995) 1451–1464. doi:10.1163/156856195X00121.
- [39] Y. Iguchi, P. Hemthavy, S. Saito, K. Takahashi, Analytical solution of elastic deformation inside and outside circular contact area between tilted rigid punch and elastic half space. Submitted, Acta Mechanica., (2019).
- [40] V.M. Muller, V.S. Yushchenko, B.V. Derjaguin, On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane, J. Colloid Interface Sci. 77 (1980) 91–101. doi:10.1016/0021-9797(80)90419-1.
- [41] T.A. Harris, Rolling Bearing Analysis, 4th ed, John Wiley and Sons, New York, 2001.
- [42] H. Söhngen, Zur Theorie der endlichen Hilbert-Transformation, Math. Z. 60 (1954) 31–51. doi:10.1007/BF01187356.
- [43] Y. Iguchi, S. Saito, K. Takahashi, Analytical model for rolling adhesional contact between rigid cylinder and elastic half space under plane strain and no-load conditions without tangential traction. Manuscript in preparation., (2019).
- [44] N. Menga, L. Afferrante, G. Carbone, Adhesive and adhesiveless contact mechanics of elastic layers on slightly wavy rigid substrates, Int. J. Solids Struct. 88–89 (2016) 101–109. doi:10.1016/j.ijsolstr.2016.03.016.
- [45] Sakai M., Viscoelastic Indentation Contact Mechanics Applied to the Rheological Characterization in Micro-Scales, Nihon Reoroji Gakkaishi. 39 (2011) 7–15. doi:10.1678/rheology.39.7.
- [46] M. Sakai, Time-dependent viscoelastic relation between load and penetration for an axisymmetric indenter, Philos. Mag. A. 82 (2002) 1841–1849. doi:10.1080/01418610208235695.
- [47] M. Sakai, S. Shimizu, Indentation rheometry for glass-forming materials, J. Non-Cryst. Solids. 282 (2001) 236–247. doi:10.1016/S0022-3093(01)00316-7.
- [48] J.R.M. Radok, Visco-elastic stress analysis, Q. Appl. Math. 15 (1957) 198–202. doi:10.1090/qam/92453.
- [49] E.H. Lee, J.R.M. Radok, The Contact Problem for Viscoelastic Bodies, J. Appl. Mech. 27 (1960) 438–444. doi:10.1115/1.3644020.
- [50] R. Stribeck, Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit-und Rollenlager, Z. Vereines Dtsch. Ingenieure. 46 (1902) 1341-1348,1432-1438,1463-1470.
- [51] C.M. Mate, Tribology on the Small Scale: A Bottom Up Approach to Friction, Lubrication, and

Wear, Oxford University Press, Oxford, 2008.

## Appendix 本論内で用いられる積分

多重公表を禁止している学術ジャーナルへの投稿中，投稿予定の内容を含むため，非公表.

## 謝辞

本研究を進めるにあたり、東京工業大学環境・社会理工学院教授 高橋邦夫先生に6年間という長期間ご指導を賜りました。研究室に入った当時の自分にとって研究は世界の先端の後追いでしかありませんでした。その根幹にあったのは「研究とは難解である」という先入観であり、「自分の力で新しいことは出来ない」という諦めでした。高橋先生から指導して頂いた論理的思考や、解析と実験が表裏一体となった研究手法は、私にとって目の覚めるような体験でした。研究室に入ってから6年間、様々な紆余曲折を経ながら、転がり接触という極めて一般的な物理モデルの解析に取り組んで参りました。内容は一見難解に見えるものの、その実、先生がふと仰っていた「転がりとは3つの弾性変形で表現出来るんじゃないか」という部分が最も重要で、物事の本質はシンプルな部分にこそあることを教えていただきました。また、いつもお忙しい中、解析や論文執筆に関してたくさんのご助言を賜りました。深く御礼申し上げます。

東京工業大学環境・社会理工学院教授 齊藤滋規先生には高橋研究室との合同ゼミを通して、ご指導を賜りました。研究テーマに行き詰まっていたときに、齊藤先生が投稿した有限要素法を用いた弾性体円筒の転がり接触問題が本研究のモチベーションとなり、本研究の解析問題が「必ず解けるはず」という自信の根源となりました。解析の矛盾点の検証等に関しましても、様々なご助言を賜りました。深く御礼申し上げます。

東京工業大学工学院教授 井上裕嗣先生、東京工業大学科学技術創成研究院教授 佐藤千明先生、東京工業大学環境・社会理工学院准教授 秋田大輔先生に本論文の審査を快諾して頂き、発表及び最終試験に際しましては、様々な有益なご指摘を頂きました。心より御礼申し上げます。

東京工業大学環境・社会理工学院助教 ヘムタビー・パソムポーン先生には研究の相談だけでなく、様々な研究室内におけるサポートをして頂きました。心より感謝申し上げます。また、同研究室の皆さんとは非常に楽しく研究活動を進めることが出来ました。私の研究の進捗が遅いときも、皆さんの様々な研究が良い気分転換となり、解析のアイデアとなることもありました。誠にありがとうございました。

東京工業大学工学院助教 桃園聡先生、中村研八氏には様々なご助言を賜りました。私が修士課程在学中に所属していた京極研究室のときからおよそ10年に渡り、様々な研究に関する情報交換及び本研究の新規性や用途・応用などに関して多くの議論に時間を割いて頂きました。どのように研究を進めればよいのか、参考文献はどのように、どの程度調べ上げるのかといった感覚はお二方と共に研究させて頂いた期間で培われました。当時の私は先生方の調査力、勉強量に驚かされたのを思い出します。昨年度で退官された東京工業大学工学院教授 京極啓史先生の「1年間に論文は最低100本読むのがノルマ」という言葉が冗談ではなく真実であることを目の当たりにしました。私を博士課程の道に導いてくれたのは間違いなくお二方のおかげです。心より御礼申し上げます。

精神的な面を支えてくださった友人の皆さんにも感謝の意を表します。最後に、生活の苦しい中、在学期間の年限まで辛抱強く金銭・生活面でサポートして頂いた母には最大限の感謝の意を表し、謝辞と致します。

2019年8月  
井口 洋二