論文 / 著書情報
Article / Book Information

論題(和文)	調和加振による超弾性三次元角柱模型の曲げ振動性状の評価 その1：連続体振動理論に基づく伝達関数の導出と検証
Title(English)	Evaluation of bending vibration characteristics on a 3D hyper-elastic square cylinder model by harmonic excitation Part1: Derivation and verification of transfer function based on continuum vibration theory
著者(和文)	山口雄大, 佐藤大樹, 中川尚大, 丸山勇祐, 長尾悠生, 田村哲郎
Authors(English)	Yudai Yamaguchi, Daiki Sato, Naohiro Nakagawa, Yusuke Maruyama, Yuki Nagao, Tetsuro Tamura
出典(和文)	日本建築学会大会学術講演梗概集, , , pp. 937-938
Citation(English)	, , , pp. 937-938
発行日 / Pub. date	2021, 9
権利情報	一般社団法人 日本建築学会

日本建築学会大会学術講演梗概集
（東海） 2021 年 9 月

調和加振による超弾性三次元角柱模型の曲げ振動性状の評価
その 1：連続体振動理論に基づく伝達関数の導出と検証

正会員 ○山口 雄大[*1] 正会員 佐藤 大樹[*1]
同 中川 尚大[*2] 同 丸山 勇祐[*2]
同 長尾 悠生[*2] 同 田村 哲郎[*1]

超弾性模型 調和加振 曲げ振動
連続体振動理論 伝達関数 モード打ち切り

1. 緒言

構造物の更なる超々高層化と建築技術の発展・多様化に伴い，将来的に大変形を許容し得る柔性構造物を検討する場面が出てくることが想定される．そのような構造物の空力振動の評価を行うには，従来のような剛な建物モデルではなく，大変形が可能で，かつ連続体としての曲げや捩れの振動挙動，また，それらの連成による影響などを詳細に調べることができる空力振動実験が必要となることが考えられる．このような背景に鑑み，筆者らは，超弾性の性質を持つ柔性材料で作成した三次元角柱模型（以降，超弾性角柱）を用いた空力振動実験に取り組んでおり [1)]，大変形の振動や，曲げと捩れの連成した不安定振動挙動を再現できることを確認している．しかし，超弾性材料を用いた空力振動実験の例は過去にないため，実験の適切な評価や不安定振動挙動の詳細な分析を行うためには，模型の動的な特性を詳細に把握・分析することが必要である．既報 2)，3)では，自由振動実験と固有値解析から超弾性角柱の固有振動数や減衰定数を調べたが，結果にばらつきや乖離が見られるなど，材料や振動性状に関して別のアプローチからの更なる検証が必要な結果となった．そこで，本報では，振動台を用いた調和加振実験から得られる周波数応答と，連続体振動理論に基づく線形の伝達関数を用いて，超弾性角柱の曲げ振動特性に着目した分析と評価を行うことを試みる．まず，本報その 1 では，実験結果の評価を行うための伝達関数の理論式を連続体振動理論に基づいて導出し，高次モードの打ち切りによる影響と誤差の補正に関して検証を行う．

2. 伝達関数の導出

2.1 運動方程式と伝達関数の導出

Fig.1 に示すような一様な無減衰弾性角柱モデルが振動台に固定され，式(1)のような調和関数で基礎変位加振される場合の曲げ振動の運動方程式は，式(2)のように導かれる．

$$y_0 = a_0 e^{ipt} \quad (i^2 = -1) \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A}\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = p^2 a_0 e^{ipt} \tag{2}$$

ここに，式(1)の a_0 と p はそれぞれ加振振幅と加振円振動数である．ここで，式(2)の定常解を，系の固有モード $u(z)$ とモード座標 $q(t)$ を用いて次式のように仮定する．

$$y(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) q_n(t) \tag{3}$$

ここに，添字の n はモードの次数である．式(3)を式(2)に代入してモードの直交性を適用し，さらに比例減衰を仮定して減衰を付加すると，任意の n 次モードに関する運動方程式が次式のように得られる．

$$\ddot{q}_n + 2h_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \beta_n p^2 a_0 e^{ipt} \tag{4}$$

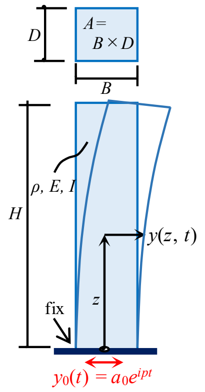

Fig.1 Continuum square cylinder

ここに，式(4)の微分記号は時間微分を表し，h_n，ω_n は，それぞれ n 次のモード減衰定数と固有円振動数である．また，β_n は刺激係数であり，次式のように定義される．

$$\beta_n = \frac{\rho A}{M_n}\int_0^H u_n(z)dz \tag{5}$$

M_n は，n 次モードの一般化質量である．また，n 次の固有モード $u_n(z)$ は，次式のようになる．

$$u_n(z) = C\left\{ \cosh\lambda_n z - \cos\lambda_n z - \frac{\cosh\lambda_n H + \cos\lambda_n H}{\sinh\lambda_n H + \sin\lambda_n H}(\sinh\lambda_n z - \sin\lambda_n z) \right\} \tag{6}$$

ここに，C は $u_n(H)=1$ となるような定数とする．また，λ_n は振動方程式から得られる値である．なお，式(6)の導出は既報 3)で示している．以上のように，連続体でも質点系と同様の理論展開が可能であることが確認できる．

式(4)の定常解を式(7)のように仮定し，質点系の場合と同様の理論展開を行うことで，系の伝達関数 χ（絶対変位応答伝達率）が式(8)のように導かれる．

$$q_n = \beta_n a_n e^{ipt} \tag{7}$$

$$\chi = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n u_n \left\{ \frac{1-\eta_n^2(1-4h_n^2) - 2h_n\eta_n^3 i}{(1-\eta_n^2)^2 + 4h_n^2\eta_n^2} \right\} \tag{8}$$

ここに，η_n は円振動数比 p/ω_n である．

2.2 高次モードの打ち切りと剰余項の導入

ここで，式(8)を，任意の r 次モードを境に次のように分

Evaluation of bending vibration characteristics on a 3D hyper-elastic square cylinder model by harmonic excitation
Part1: Derivation and verification of transfer function based on continuum vibration theory

YAMAGUCHI Yudai, SATO Daiki, NAKAGAWA Naohiro, MARUYAMA Yusuke, NAGAO Yuki, and TAMURA Tetsuro

離する．

$$\chi = \chi|_{n\le r} + \chi|_{r+1\le n} \tag{9}$$

実際の調和加振実験における加振振動数範囲には，1 次モードまたは 1 次の近傍の r 次までの低次モードしか含まれず，実験の評価に用いることを考えると，式(9)の右辺の第 2 項は除外される．しかし，低次モードのみで打ち切ると，伝達関数への影響が懸念される．そこで，次のような補正を考える．モードの次数が大きくなるほど，加振振動数に対して固有振動数が相対的に大きくなり，$\eta_n \ll 1$ と考えることができる [4]．これを考慮すると，式(8)より，式(9)の右辺の第 2 項を高次モードに関する剰余項 R として次のように表すことができる．

$$R \approx \sum_{n=r+1}^{\infty}\beta_n u_n = 1-\sum_{n=1}^{r}\beta_n u_n \qquad \left(\because \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n u_n = 1\right) \tag{10}$$

式(10)は，1 次から r 次モードまでの情報のみで成立している．従って，低次モードの情報のみで評価を行う場合でも，式(10)を剰余項として伝達関数に加えることにより，モード打ち切り誤差を補正し得ることが期待できる．この場合，伝達関数の振幅$|\chi|$と位相 θ は，伝達関数の実部 χ_{Re} と虚部 χ_{Im}，剰余項 R を用いて次式で求められる．

$$|\chi| = \sqrt{(\chi_{\mathrm{Re}}+R)^2 + \chi_{\mathrm{Im}}{}^2} \tag{11}$$

$$\theta = \tan^{-1}\{\chi_{\mathrm{Im}}/(\chi_{\mathrm{Re}}+R)\} \tag{12}$$

3. 伝達関数の検証

本章では Table1 に示す固有振動数 f_n とモード減衰定数 h_n（n はモードの次数）を用いた伝達関数の検証結果を示す．Table1 の値のうち，1 次の値は自由振動実験での評価値 [2]，高次の固有振動数は理論値，高次のモード減衰定数は 1 次と同様の値とした．密度や寸法等のその他のパラメータは本報その 2 に示す．Fig.2 は，高さ方向（z 方向）の位置ごとの伝達関数の振幅と位相の計算結果である．なお，この位置は，実験時に応答測定を行う高さである．図の横軸は加振振動数 $p/2\pi$ [Hz]であり，理論の 2 次モードまでが含まれる範囲を示している（図中の 2 本の縦線は，左から順にそれぞれ 1 次と 2 次の固有振動数 $\omega_1/2\pi$，$\omega_2/2\pi$ を表している）．伝達関数は，採用するモードの上限を 1 次，2 次とした場合のそれぞれで剰余項の無い場合とある場合（凡例の+R）の結果を示し，また，比較のため，10 次モードまで採用して剰余項を付加した場合の結果（以降，高次の結果）を示している．図より，1 次モードの情報のみで計算を行った場合でも，剰余項を加えることにより，1 次の共振点を過ぎたあたりまで高精度で高次の結果と一致させられることが分かる．さらに，2 次モードまで採用したうえで剰余項を加えると，一部の図では反共振点のずれが確認されるものの，図の全域で高次の結果と概ね精度良く一致していることが分かる．反共振点は共振点と異なり，モードの混合割合と位置（本報では z 方向の位置）に依存して変化するため，採用するモード数の違いに敏感で，差異が生じやすいものと考えられる．

Table1 Parameters for verification of transfer function

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n [Hz]	3.52	22.03	61.77	121	200.1	298.9	417.5	555.8	713.9	891.7
h_n	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051

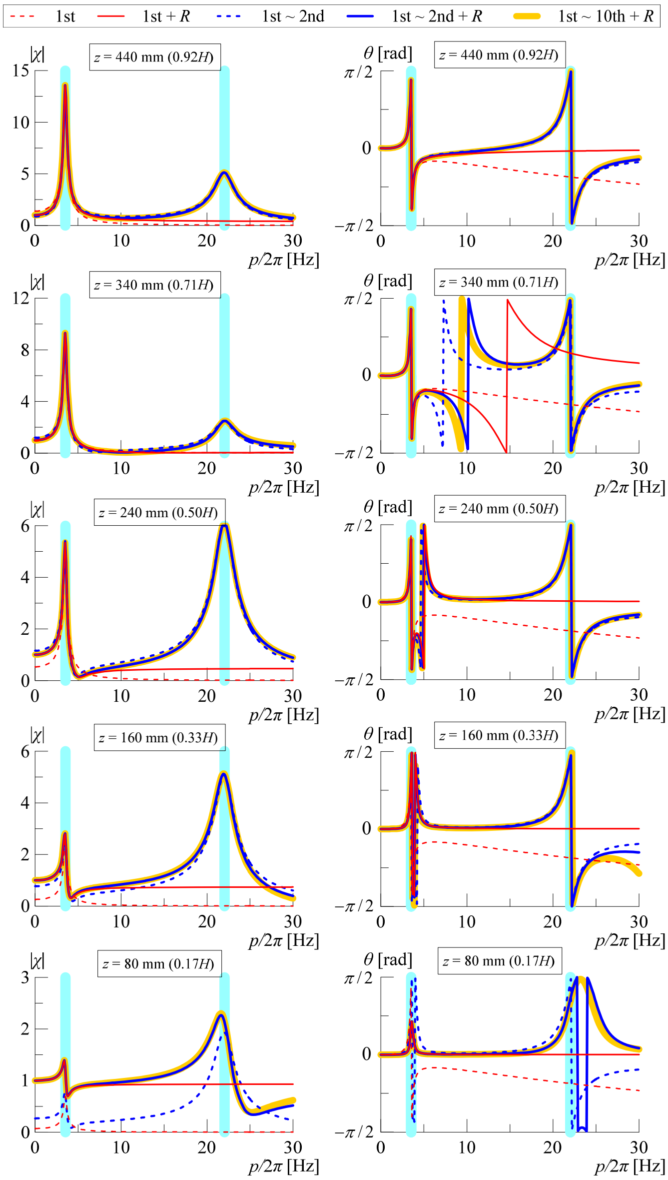

Fig.2 Verification of transfer function (Amplitude and Phase)

4. 結言

本報その 1 では，超弾性角柱模型の調和加振実験の評価に用いるための伝達関数（周波数応答関数）の理論式を，連続体の曲げ振動の運動方程式から導出した．また，剰余項(式(10))の付加により，低次モードの情報のみでモード打ち切り誤差を低減できることを確認した．

（謝辞及び参考文献はその 3 にまとめて示す．）

*1 東京工業大学
*2 前田建設工業

*1 Tokyo Institute of Technology
*2 Maeda Corporation