

論文 / 著書情報
Article / Book Information

論題(和文)	回転慣性とせん断変形を考慮した一様弾性梁の曲げ固有振動数の実用的な計算手法
Title(English)	A PRACTICAL METHOD FOR CALCULATING NATURAL BENDING FREQUENCIES OF UNIFORM ELASTIC BEAMS CONSIDERING ROTATORY INERTIA AND SHEAR DEFORMATION
著者(和文)	山口雄大, 佐藤大樹, 田村哲郎
Authors(English)	Yudai Yamaguchi, Daiki Sato, Tetsuro Tamura
出典(和文)	日本建築学会構造系論文集, Vol. 87, No. 791, pp. 72-82
Citation(English)	Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 87, No. 791, pp. 72-82
発行日 / Pub. date	2022, 1
権利情報	一般社団法人 日本建築学会

回転慣性とせん断変形を考慮した一様弾性梁の曲げ固有振動数の実用的な計算手法

A PRACTICAL METHOD FOR CALCULATING NATURAL BENDING FREQUENCIES OF UNIFORM ELASTIC BEAMS CONSIDERING ROTATORY INERTIA AND SHEAR DEFORMATION

山口雄大^{*1}, 佐藤大樹^{*2}, 田村哲郎^{*3}

Yudai YAMAGUCHI, Daiki SATO and Tetsuro TAMURA

In general, eigenvalue analysis for beams considering rotatory inertia and shear deformation is not trivial, even in the case of uniform beams. In this paper, a practical method is proposed for calculating natural bending frequencies of uniform elastic beams considering rotatory inertia and shear deformation. The proposed method is based on the modified Timoshenko beam theory, which is more rigorous and realistic than the traditional Timoshenko beam theory. It is shown that the proposed method calculates the natural frequencies of an arbitrary order-vibration mode for beams of arbitrary cross-sections with a high level of accuracy, similar to numerical analysis.

Keywords: Uniform elastic beam, Bending vibration, Natural frequency, Rotatory inertia, Shear deformation, Practical method

一様弾性梁, 曲げ振動, 固有振動数, 回転慣性, せん断変形, 実用的手法

1. 緒言

1 次元弾性梁（以降、梁）の曲げ振動の理論として、古典理論である Bernoulli-Euler の梁理論（以降、BEB 理論）が一般的である。BEB 理論は、運動方程式や振動数方程式が単純明快で、例えば、一様な梁であれば複雑な数値解析を要せず簡単に固有振動数を求められるなど、実用性に優れており、工学分野での理論的検討に用いやすい。一方で、BEB 理論では断面の回転慣性やせん断変形が完全に無視されており、細長比の小さい梁や高次の振動モードを評価する場合には、その影響が無視できなくなる¹⁾。そのような BEB 理論の問題に対し、Timoshenko は、曲げ変形による回転慣性とせん断変形を考慮したより厳密な梁の曲げ振動理論（以降、TB 理論）を提案した²⁾⁻³⁾。さらに、Traill-Nash⁴⁾や Huang⁵⁾は、TB 理論の運動方程式から一般的な支持条件の場合についての境界条件式や振動数方程式を導出し、固有振動数や固有モードの特性の分析を行った。それ以降も、多くの研究者によって TB 理論について検証がなされ、TB 理論は高次のモードでなければ高精度な解を得られることが明らかにされた。ただし、TB 理論は、梁の物性値と断面のパラメータにより定義される上限の振動数（以降、限界振動数）を上回る振動数領域では精度が保証されていない⁶⁾⁻⁸⁾。また、節の数が同じ固有モードが複数現れる特性が確認されており⁴⁾、長きに渡って議論されているが^{例えば 9)-13)}、明確な結論は出されていない。

そのような状況のなか、Wan らにより、TB 理論で無視されてい

たせん断変形に起因する回転慣性の影響を加えた修正理論（修正 Timoshenko 梁理論、以降、MTB 理論）が提案された¹⁴⁾。Wan らは、MTB 理論では限界振動数が存在せず、また、TB 理論において議論されてきた先述の特性も現れないことを確認し、MTB 理論の厳密性と物理的な合理性を示した¹⁴⁾。さらに、Wan らは、複数の断面形状の梁について数値計算による検証を行い、TB 理論に代わる梁理論としての MTB 理論の妥当性と有用性を示した¹⁵⁾。

梁の振動理論は汎用性が高く、TB 理論については、円筒シェル¹⁶⁾や高層建物¹⁷⁾⁻¹⁹⁾の振動解析へ適用する研究などがなされてきた。今後は、TB 理論に代わり、MTB 理論が工学分野の研究や実務の場面で幅広く用いられることが期待される¹⁴⁾。しかし、これらの理論は、一様な梁であっても固有振動数の計算に数値解析や FEM 解析が逐一必要であるなど、計算が簡易な BEB 理論と比べると実務の場面で理論的検討に用いるにはややハードルが高いと言える。よって、厳密性の高い梁理論の利用をより一般化していくためには、数値解析の道具や知識がなくても扱いやすい実用的な手法を検討していくことが望ましいものと考えられるが、その手の検討は戸部²⁰⁾の例があるのみである。戸部²⁰⁾は、TB 理論の振動数方程式の近似式を用いて一様な梁の固有振動数の計算式を導出しているが、対象が低次モードのみであるうえ、境界条件が正確に適用されていなかったり^{注1)}、省略算が用いられていたり^{注2)}と厳密性に欠ける部分が多い。

このような状況に鑑み、本論文では、回転慣性とせん断変形を考

*1 東京工業大学環境・社会理工学部 大学院生

*2 東京工業大学未来産業技術研究所 准教授・博士（工学）

*3 東京工業大学 名誉教授・工博

Grad. Student, School of Environment and Society, Tokyo Institute of Technology

Assoc. Prof., FIRST, Tokyo Institute of Technology, Dr.Eng.

Emeritus Prof., Tokyo Institute of Technology, Dr.Eng.

慮した厳密性の高い梁理論の実用性の向上を目的として、一様断面梁を対象に、複雑な数値解析や FEM 解析を行わずに固有振動数を高精度に計算するための実用的な手法を提案する。本論文で提案する手法は、以下をポイントとする。

- (1) 現在提案されている梁理論の中で最も厳密かつ合理的と考えられる MTB 理論に基づいたものとする。
 - (2) BEB 理論に大きく劣らない実用性を有するものとする。
 - (3) 対象とする梁のパラメータや固有モードの次数を限定することなく、MTB 理論の振動数方程式を数値計算して得られる固有振動数の数値解と大きな誤差が無い計算値が得られるものとする。
- 2 章では、まず、本検討で扱う MTB 理論の概略を示す。3 章では、支持条件やパラメータの異なる矩形断面梁について、MTB 理論の振動数方程式から 10 次モードまでの固有振動数の数値解を求め、その結果と運動方程式の特性を利用して固有振動数を実用的に計算できる近似式を導く。4 章では、数値解との比較により、提案した計算手法の精度と適用範囲を検証する。なお、本検討では、減衰は無視することとする。

2. MTB 理論¹⁴⁾⁻¹⁵⁾の概略

本章では、本論文で扱う MTB 理論¹⁴⁾⁻¹⁵⁾の概略を示す。Fig.1(a)に示すような梁の無減衰の曲げ自由振動を考える。軸方向の位置 x において、鉛直方向の変位 y が生じていると仮定する。ここで、Fig1(b)に示すように、たわみ角 $\partial y/\partial x$ を、曲げによる回転角 θ と断面に一樣に分布すると仮定したせん断ひずみ γ の和として考える。また、MTB 理論では、慣性力として、鉛直方向の慣性力と曲げ回転による回転慣性に加え、せん断変形による回転慣性が考慮される。従って、軸方向の任意の位置の微小要素に生じる力は Fig.(c)のように仮定され、ダランベールの原理より、回転運動と鉛直方向の並進運動に関する運動方程式がそれぞれ次式のように導かれる。

$$EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho I \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} + k' \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \theta \right) GA = 0 \tag{1}$$

$$-\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k' \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) GA = 0 \tag{2}$$

ここに、 ρ は密度、 A は断面積、 t は時間、 E はヤング係数、 G はせん断弾性係数 ($=E/2(1+\nu)$, ν : ポアソン比)、 I は断面二次モーメント、 k' はせん断係数である。なお、 k' については、Cowper が静的なつり合い条件から断面形状ごとに計算式を導いている²¹⁾。式(1)、(2)から θ を消去すると次式の運動方程式が得られる。

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \tag{3}$$

式(3)を解くため、解を式(4)、(5)のように仮定し、式(3)に代入して整理することにより式(6)が得られる。

$$y = u_{MT} \exp(i\omega_{MT}t), \quad u_{MT} = \exp(\phi_{MT}x) \quad (i^2 = -1) \tag{4}, (5)$$

$$\phi_{MT}^4 + \frac{2\alpha_{MT1}}{L^2} \phi_{MT}^2 - \frac{\alpha_{MT2}^2}{L^4} = 0 \tag{6}$$

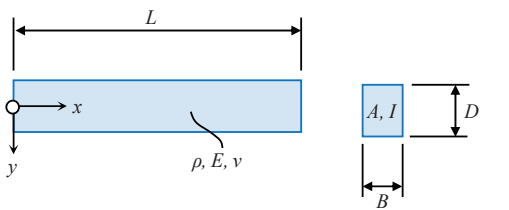
ここに、 L は梁の軸方向の長さであり、 α_{MT1} , α_{MT2}^2 , r , κ , μ の定義はそれぞれ以下の通りである。

$$\alpha_{MT1} = \frac{\omega_{MT}^2 r^2 L^2}{2\mu^2} (1 + \kappa), \quad \alpha_{MT2}^2 = \frac{\omega_{MT}^2 L^4}{\mu^2} \tag{7}, (8)$$

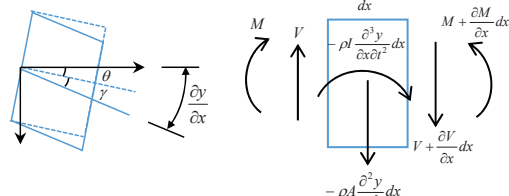
$$r = \sqrt{I/A}, \quad \kappa = E/k'G, \quad \mu = \sqrt{EI/\rho A} \tag{9}, (10), (11)$$

ω_{MT} , u_{MT} がそれぞれ MTB 理論における梁の曲げ固有角振動数と並進運動の固有モードとなる。

ここで、TB 理論の運動方程式の場合、式(6)の左辺の最後の項の正負により解の場合分けが生じる。そのとき、場合分けの境界として限界振動数 f_c (付録 A 参照) が定義されるが、MTB 理論では、式(8)より、常に $\alpha_{MT2}^2 > 0$ であるから、 f_c が定義されないことが分かる。この点が、TB 理論と MTB 理論の大きな特徴の違いである。



(a) Longitudinal plane and cross section



(b) Element deformation (c) Balance of forces on a tiny element

Fig.1 Bending free vibration of a uniform beam model

Table1 Summary of boundary conditions and frequency equations

Boundary Condition	
Clamped	$u_{MT} = 0$
Free	$\left\{ 1 + \kappa \left(1 + \kappa \left(\frac{r^2 \omega_{MT}}{\mu} \right)^2 \right) \right\} \frac{d^2 u_{MT}}{dx^2} + \kappa r^2 \frac{d^3 u_{MT}}{dx^3} = 0$
Hinged	$u_{MT} = 0$
Frequency Equation	
Clamped-Free	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \psi_{MT1} & 0 & \psi_{MT2} \\ \phi_{MT1} \psi_{MT1} \cosh \phi_{MT1} L & \phi_{MT1} \psi_{MT1} \sinh \phi_{MT1} L & -\phi_{MT2} \psi_{MT2} \cos \phi_{MT2} L & -\phi_{MT2} \psi_{MT2} \sin \phi_{MT2} L \\ (\psi_{MT1} - \phi_{MT1}) \sinh \phi_{MT1} L & (\psi_{MT1} - \phi_{MT1}) \cosh \phi_{MT1} L & -(\psi_{MT2} - \phi_{MT2}) \sin \phi_{MT2} L & (\psi_{MT2} - \phi_{MT2}) \cos \phi_{MT2} L \end{vmatrix} = 0$
Clamped-Clamped	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \psi_{MT1} & 0 & \psi_{MT2} \\ \cosh \phi_{MT1} L & \sinh \phi_{MT1} L & \cos \phi_{MT2} L & \sin \phi_{MT2} L \\ \psi_{MT1} \sinh \phi_{MT1} L & \psi_{MT1} \cosh \phi_{MT1} L & -\psi_{MT2} \sin \phi_{MT2} L & \psi_{MT2} \cos \phi_{MT2} L \end{vmatrix} = 0$
Clamped-Hinged	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \psi_{MT1} & 0 & \psi_{MT2} \\ \cosh \phi_{MT1} L & \sinh \phi_{MT1} L & \cos \phi_{MT2} L & \sin \phi_{MT2} L \\ \phi_{MT1} \psi_{MT1} \cosh \phi_{MT1} L & \phi_{MT1} \psi_{MT1} \sinh \phi_{MT1} L & -\phi_{MT2} \psi_{MT2} \cos \phi_{MT2} L & -\phi_{MT2} \psi_{MT2} \sin \phi_{MT2} L \end{vmatrix} = 0$
Hinged-Hinged	$\sin \phi_{MT2} L = 0$

※ $\psi_{MT1} = \phi_{MT1} \left\{ 1 + \kappa \left(1 + \kappa \left(\frac{r^2 \omega_{MT}}{\mu} \right)^2 \right) \right\}$, $\psi_{MT2} = \phi_{MT2} \left\{ 1 + \kappa \left(1 + \kappa \left(\frac{r^2 \omega_{MT}}{\mu} \right)^2 \right) \right\}$

従って、式(6)の解は常に次式のように与えられる。

$$\phi_{MT} = \pm\phi_{MT1}, \pm i\phi_{MT2} \quad (12)$$

$$\phi_{MT1} = \frac{1}{L} \sqrt{\alpha_{MT1}^2 + \alpha_{MT2}^2 - \alpha_{MT1}} \quad (13)$$

$$\phi_{MT2} = \frac{1}{L} \sqrt{\alpha_{MT1}^2 + \alpha_{MT2}^2 + \alpha_{MT1}} \quad (14)$$

よって、固有モード u_{MT} の一般式は次式のように整理される。

$$u_{MT} = A_1 \cosh \phi_{MT1}x + A_2 \sinh \phi_{MT1}x + A_3 \cos \phi_{MT2}x + A_4 \sin \phi_{MT2}x \quad (15)$$

ここに、 $A_1 \sim A_4$ は定数である。

式(15)に境界条件式を適用することで、振動数方程式が得られ、振動数方程式を解くことで固有角振動数 ω_{MT} の数値解が求まる。具体的には、 ω_{MT} の初期値を仮定して振動数方程式に代入し、振動数方程式が所定の精度で満足されるまで ω_{MT} の値を更新しながらこれを繰り返すことで ω_{MT} の数値解を探索することができる。なお、梁の支持条件ごとの具体的な境界条件式と振動数方程式は、Table1 (前頁) にまとめて示す。

3. MTB 理論に基づいた固有振動数の実用的な計算手法

本章では、矩形断面を有する梁について、MTB 理論に基づいて曲げ固有角振動数 ω_{MT} の数値解を求め、その結果を用いて数値計算が不要な f_{MT} の近似計算式を導出する。

3. 1 数値計算の概要

まず、2章で述べた方法により ω_{MT} の数値解を求める。梁は、断面の見附幅 $B = 1$ 、梁せい $D = 1$ とし、軸方向長さ L と梁せいの比 L/D とポアソン比 ν の異なる複数のものを対象とする。具体的には、 L/D は 3~20 まで 0.5 刻みで 35 通りとし、 ν は、0.001, 0.2, 0.47 の 3 通りとする。支持条件は、固定-自由 (Clamped-Free, 以降 CF), 固定-固定 (Clamped-Clamped, 以降 CC), 固定-ヒンジ (Clamped-Hinged, 以降 CH), ヒンジ-ヒンジ (Hinged-Hinged, 以降 HH) の 4 種類とする。密度やヤング係数については、本検討では重要ではないため適当な値とする。なお、本検討では 10 次モードまでの数値解を求める。

3. 2 数値計算結果と運動方程式を利用した線形近似と式展開

次に、 ω_{MT} の数値解を、式(7)、式(8)に代入し、それぞれの梁について 1 次から 10 次モードまでの α_{MT1} と α_{MT2}^2 の値を求め、両者の関係に着目する。Fig.2 に、4 種類の支持条件の場合について、 $L/D = 3 \sim 20$ の梁の α_{MT1} と α_{MT2}^2 の計算結果をプロットした図を示す。なお、ここでは $\nu = 0.2$ の場合のみを代表として示しており、プロットの種類はモードの次数ごとに分けている。また、図示の便宜上、最大値が 1 となるよう基準化した結果を示している。さらには、図からは判別できないが、 α_{MT1} は L/D が小さいほど大きくなり、逆に、 α_{MT2}^2 は L/D が大きいほど大きな値となっている。すなわち、Fig.2 では、横軸の値が 1 のプロットが $L/D = 3$ のもので、横軸の値が最も 0 に近いプロットが $L/D = 20$ のものである。Fig.2 から、いずれの支持条件の場合も、モードの次数ごとに α_{MT1} と α_{MT2}^2 がほぼ線形関係を有していることが見て取れる。なお、Sezawa²²⁾ や戸部²⁰⁾ は、TB 理論の振動数方程式から低次モードについて同様の線形関係を導いている^{注 2)}。1 章で触れた戸部²⁰⁾ の固有振動数の近似計算式は、その直線近似式に TB 理論の運動方程式を代入することにより導出されている (付録 B 参照)。本検討では、この手順を参考に、まず

α_{MT1} と α_{MT2}^2 の線形近似式を作成し、その式に MTB 理論式 (式(7)、式(8)) を代入するという手順をとる。

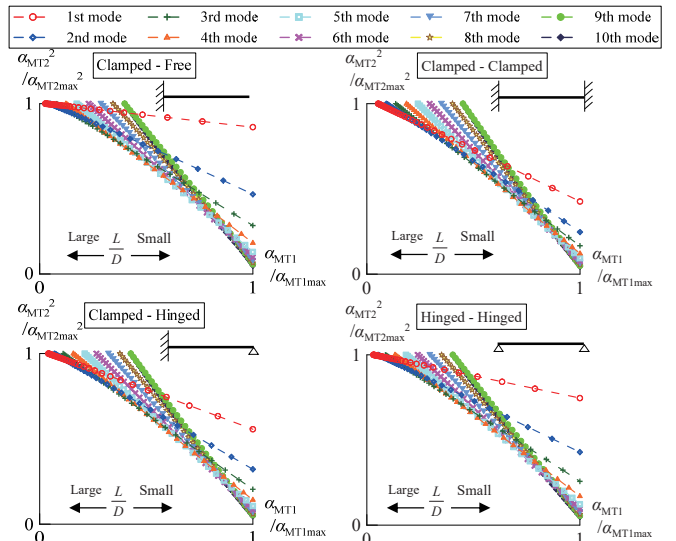


Fig.2 Relationship between α_{MT1} (Eq.7) and α_{MT2}^2 (Eq.8) from 1st to 10th mode on each support condition [$\nu = 0.2$]

Fig.2 の結果を踏まえ、 n 次モード (n : モードの次数) における α_{MT1} と α_{MT2}^2 の関係を、次のような式で仮定する。

$$\alpha_{MT2}^2 = d^4 - e^2 \cdot \alpha_{MT1} \quad (16)$$

ここに、 d 、 e は定数である。ただし、 d はよく知られた BEB 理論の振動数方程式 (付録 C 参照) の解である。従って、 d はモードの次数 n に応じて得られる物理量となり、式(16)では e のみが未定定数である。 d の仮定の妥当性については付録 D に示す。

式(16)に、式(7)、(8)を代入することにより、MTB 理論に基づいた固有振動数 f_{MT} の計算式が次式のように導かれる。

$$f_{MT} = f_{BE} \left\{ 1 + 0.5(1 + \kappa) \left(\frac{e}{\lambda} \right)^2 \right\}^{-0.5} \quad (17)$$

ここに、

$$f_{BE} = (d/L)^2 \mu / 2\pi, \quad \lambda = L/r \quad (18), (19)$$

であり、それぞれ BEB 理論の固有振動数と細長比を表す。式(17)は、一般的な BEB 理論の固有振動数 f_{BE} に、新たに $\{ \}$ 部分を計算して乗じるだけで、より厳密な MTB 理論に基づく固有振動数 f_{MT} の近似計算値が得られる構造である。すなわち、式(17)を用いることで、梁のパラメータを変更する度に Table1 の複雑な振動数方程式を逐一解き直す計算の手間が大幅に改善される。

3. 3 未定定数 e の同定および定式化

本節では、式(16)の未定定数 e について検討する。Table2(a)~(d) に、支持条件ごとに、式(16)を数値計算結果 (α_{MT1} と α_{MT2}^2 のプロット) とフィッティングさせ、最小二乗法により同定した e の値を示す。なお、表中には d の値も記載した。また、表中の $\Delta e_{0.001}$ と $\Delta e_{0.47}$ は、 $\nu = 0.2$ の場合の e の同定値に対する $\nu = 0.001, 0.47$ の場合の e の同定値の誤差を表している。これを見ると、HH の場合は $\Delta e_{0.001}$ と $\Delta e_{0.47}$ はほぼ 0 であり、CF の場合も最大で 0.18% 程度と非常に小さい。一方で、CC と CH の場合は、低次モードで $\Delta e_{0.001}$ と $\Delta e_{0.47}$ が

1%を上回っており、 ν の大きさによって e の値にやや差異が生じる結果となった。

ここで、さらに e とモードの次数 n の關係に着目する。Fig.3に、 $\nu=0.2$ の場合を代表としてTable2の e と n の關係をプロットで示す。Fig.3のプロットより、両者はほぼ線形の關係を有していることが見て取れる。そこで、本検討では、 e を n の1次関数として次のように定式化することを考える。

$$e = \beta_1 n + \beta_2 \tag{20}$$

最小二乗法による検討の結果、式(20)の β_1 、 β_2 を、支持条件ごとに次のように決定した。

(a) 固定-自由 (Clamped - Free)

$$n \leq 2: \beta_1 = 5.052, \beta_2 = -2.015 \tag{21}, (22)$$

$$n \geq 3: \beta_1 = 4.454, \beta_2 = -0.917 \tag{23}, (24)$$

(b) 固定-固定 (Clamped - Clamped)

$$n \leq 2: \beta_1 = 4.744, \beta_2 = 4.187 \tag{25}, (26)$$

$$n \geq 3: \beta_1 = 4.422, \beta_2 = 4.840 \tag{27}, (28)$$

(c) 固定-ヒンジ (Clamped - Hinged)

$$\beta_1 = 4.431, \beta_2 = 2.422 \tag{29}, (30)$$

(d) ヒンジ-ヒンジ (Hinged - Hinged)

$$\beta_1 = 4.443, \beta_2 = 0 \tag{31}, (32)$$

式(21)~(32)は、 $\nu=0.2$ のモデルを対象に導出している。また、CFとCCの場合のみ、 β_1 と β_2 の値を n に応じて場合分けしている。この理由は、 β_1 と β_2 を場合分けしなかった際に、低次モードにおいて、式(17)による固有振動数の計算値と数値解との誤差がやや大きくなる場合が生じたためである。 β_1 と β_2 を場合分けせずに e を定式化した場合の検証については付録Eを参照されたい。

Table2 Values of e obtained by the linear regression to relationships between α_{MT1} (Eq.7) and α_{MT2}^2 (Eq.8)

(a) Clamped - Free						(b) Clamped - Clamped							
n	d	e			$\Delta e_{0.001}$ [%]	$\Delta e_{0.47}$ [%]	n	d	e			$\Delta e_{0.001}$ [%]	$\Delta e_{0.47}$ [%]
		$\nu=0.001$	$\nu=0.2$	$\nu=0.47$					$\nu=0.001$	$\nu=0.2$	$\nu=0.47$		
1	1.875	3.036	3.037	3.039	-0.04	0.06	1	4.730	8.786	8.932	9.082	-1.63	1.69
2	4.694	8.085	8.089	8.092	-0.05	0.04	2	7.853	13.521	13.676	13.833	-1.13	1.15
3	7.855	12.438	12.423	12.401	0.12	-0.18	3	10.996	17.960	18.103	18.244	-0.79	0.78
4	10.996	16.939	16.917	16.887	0.13	-0.18	4	14.137	22.400	22.533	22.662	-0.59	0.57
5	14.137	21.381	21.351	21.312	0.14	-0.18	5	17.279	26.831	26.954	27.072	-0.46	0.44
6	17.279	25.844	25.810	25.767	0.13	-0.17	6	20.420	31.255	31.370	31.480	-0.37	0.35
7	20.420	30.293	30.256	30.207	0.12	-0.16	7	23.562	35.685	35.793	35.895	-0.30	0.28
8	23.562	34.751	34.711	34.660	0.11	-0.15	8	26.704	40.118	40.219	40.313	-0.25	0.23
9	26.704	39.205	39.163	39.108	0.11	-0.14	9	29.845	44.541	44.637	44.724	-0.21	0.20
10	29.845	43.657	43.613	43.557	0.10	-0.13	10	32.987	48.974	49.064	49.145	-0.18	0.16

(c) Clamped - Hinged						(d) Hinged - Hinged							
n	d	e			$\Delta e_{0.001}$ [%]	$\Delta e_{0.47}$ [%]	n	d	e			$\Delta e_{0.001}$ [%]	$\Delta e_{0.47}$ [%]
		$\nu=0.001$	$\nu=0.2$	$\nu=0.47$					$\nu=0.001$	$\nu=0.2$	$\nu=0.47$		
1	3.927	6.755	6.834	6.915	-1.16	1.19	1	3.142	4.443	4.443	4.443	0.00	0.00
2	7.069	11.222	11.299	11.376	-0.68	0.68	2	6.283	8.886	8.886	8.886	0.00	0.00
3	10.210	15.651	15.722	15.790	-0.45	0.44	3	9.425	13.329	13.329	13.329	0.00	0.00
4	13.352	20.089	20.153	20.215	-0.32	0.31	4	12.566	17.772	17.772	17.772	0.00	0.00
5	16.493	24.514	24.574	24.631	-0.24	0.23	5	15.708	22.215	22.215	22.215	0.00	0.00
6	19.635	28.952	29.008	29.060	-0.19	0.18	6	18.850	26.658	26.658	26.658	0.00	0.00
7	22.777	33.390	33.442	33.491	-0.16	0.15	7	21.991	31.101	31.101	31.101	0.00	0.00
8	25.918	37.819	37.869	37.914	-0.13	0.12	8	25.133	35.543	35.543	35.543	0.00	0.00
9	29.060	42.258	42.304	42.346	-0.11	0.10	9	28.274	39.986	39.986	39.986	0.00	0.00
10	32.201	46.689	46.733	46.772	-0.09	0.08	10	31.416	44.429	44.429	44.429	0.00	0.00

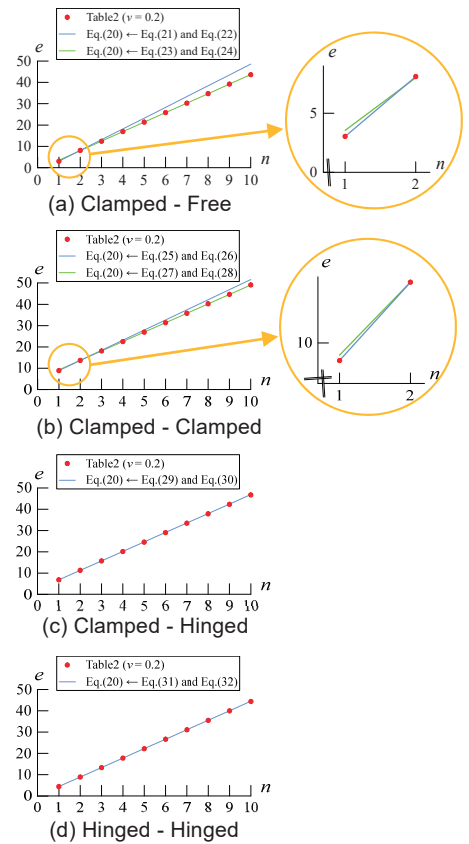


Fig.3 Relationship between coefficient e and mode number n

Table3 Error between value of e by use of Eq.20 to Eq.32 and value of e shown in Table2

(a) Clamped - Free				(b) Clamped - Clamped				(c) Clamped - Hinged				(d) Hinged - Hinged			
n	δe [%]			n	δe [%]			n	δe [%]			n	δe [%]		
	$\nu=0.001$	$\nu=0.2$	$\nu=0.47$		$\nu=0.001$	$\nu=0.2$	$\nu=0.47$		$\nu=0.001$	$\nu=0.2$	$\nu=0.47$		$\nu=0.001$	$\nu=0.2$	$\nu=0.47$
1	0.04	0.00	-0.05	1	1.66	-0.01	-1.66	1	1.45	0.28	-0.90	1	-0.01	0.00	0.00
2	0.05	0.00	-0.04	2	1.14	-0.01	-1.14	2	0.55	-0.13	-0.80	2	0.00	0.00	0.00
3	0.06	0.18	0.36	3	0.81	0.02	-0.75	3	0.41	-0.04	-0.48	3	0.00	0.00	0.00
4	-0.24	-0.11	0.07	4	0.57	-0.02	-0.59	4	0.28	-0.04	-0.34	4	0.00	0.00	0.00
5	-0.13	0.01	0.19	5	0.44	-0.01	-0.45	5	0.26	0.01	-0.22	5	0.00	0.00	0.00
6	-0.14	-0.01	0.16	6	0.38	0.01	-0.34	6	0.19	0.00	-0.18	6	0.00	0.00	0.00
7	-0.11	0.02	0.18	7	0.30	0.00	-0.28	7	0.15	-0.01	-0.15	7	0.00	0.00	0.00
8	-0.10	0.01	0.16	8	0.24	-0.01	-0.24	8	0.13	0.00	-0.12	8	0.00	0.00	0.00
9	-0.09	0.02	0.16	9	0.22	0.00	-0.19	9	0.10	-0.01	-0.11	9	0.00	0.00	0.00
10	-0.08	0.02	0.15	10	0.18	-0.01	-0.17	10	0.09	0.00	-0.09	10	0.00	0.00	0.00

Fig.3の実線は、式(20)に式(21)~(32)の値を代入して得られる。また、Table2に示した e の同定値に対する式(20)~(32)から得られる e の計算値の誤差を δe と定義し、Table3に支持条件ごとに δe の計算結果を示す。全体的に δe は非常に小さく、式(20)の仮定の妥当

性が確認できる。ただ、 $\nu=0.2$ のモデルを対象に β_1 と β_2 を決めたことにより、CCとCHのモデルでは、 ν が0.001や0.47の場合に、低次モードで δe がやや大きくなっている。これを考慮しようとする場合、 β_1 と β_2 をさらに ν の関数として定式化することが考えられ

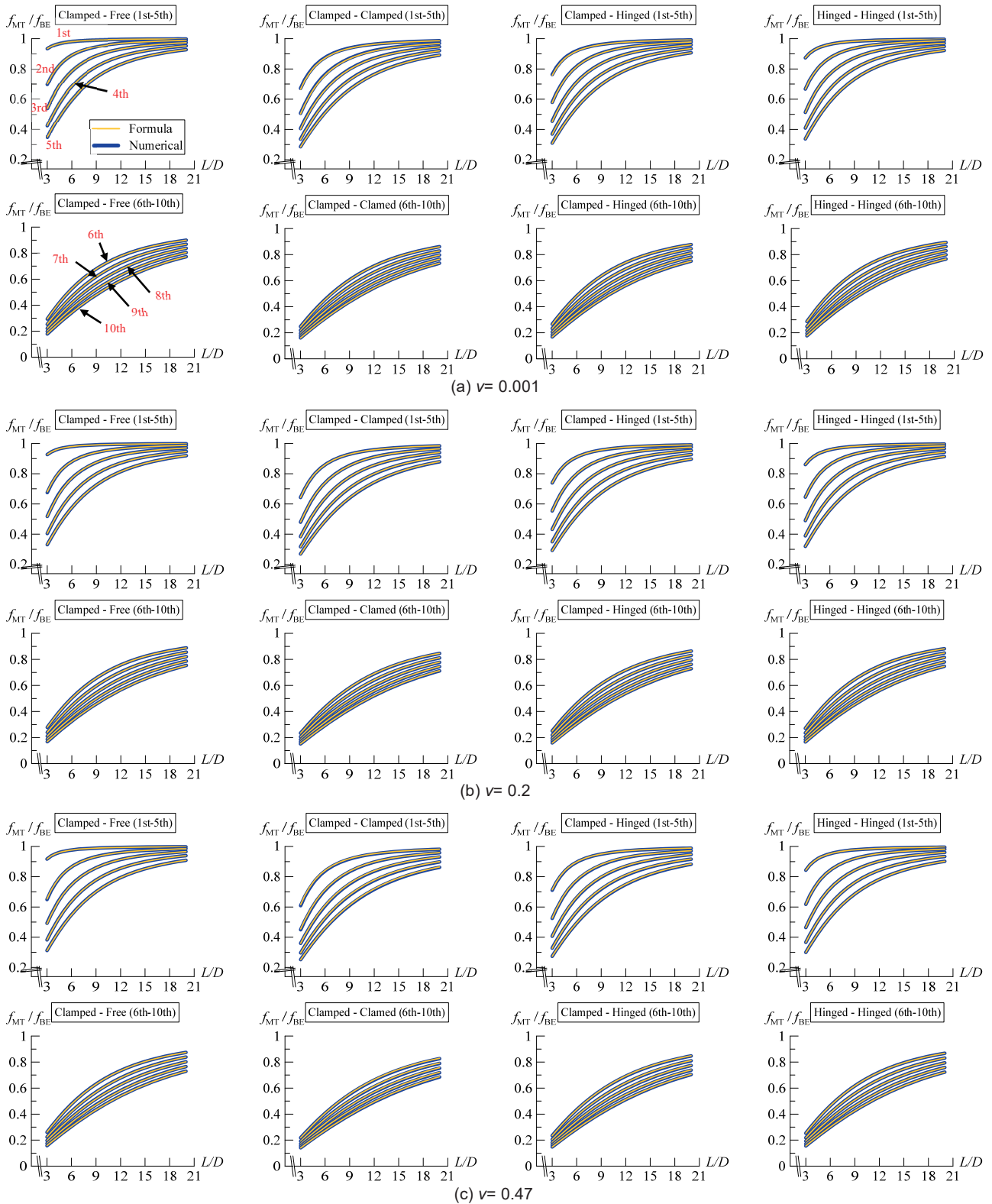


Fig.4 Comparison of the results of numerical calculation and proposed formula (Eq.17) on the rectangular cross section beam [Natural frequency f_{MT} of 1st ~ 10th mode]

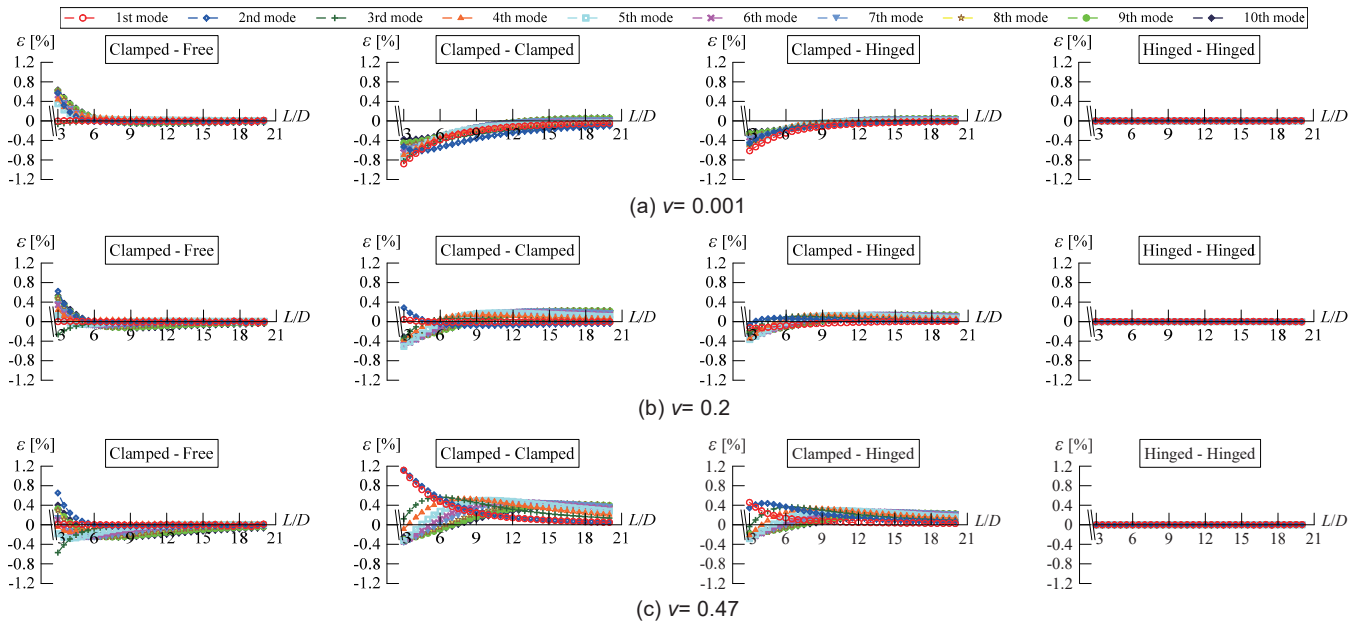


Fig.5 Error of natural frequencies f_{MT} obtained by proposed formula (Eq.17) against numerical solutions on the rectangular cross-section beam

るが、式が複雑になりすぎるのを避けるため、本検討では $\delta\epsilon$ には目を瞑り、 $\nu = 0.2$ の場合の結果を本論文で提案する固有振動数の計算手法に適用して検証を行うこととする。

4. 提案した計算手法の検証

本章では、3章で示した固有振動数 f_{MT} の計算手法の精度と適用範囲について、数値計算との比較により検証を行う。

4.1 矩形断面梁での検証

3章で示した計算手法は、矩形断面梁の10次モードまでの数値計算結果に基づいたものである。そこで、まずは同様の条件で精度の検証を行う。Fig.4 (前頁) に、3章で求めた各支持条件の場合の1次から10次までの固有振動数 f_{MT} の数値解 (Numerical) と、式(17)を用いて得た実用計算値 (Formula) の比較を示す。ただし、図の横軸は L/D で、縦軸は f_{MT} を f_{BE} ^{注3)} で基準化した f_{MT}/f_{BE} である。

はじめに、Fig.4 の数値解と実用計算値の曲線を比較する。両者は、支持条件、モードの次数、ポアソン比の大小によらず、いずれの場合も精度よく一致していることが見て取れ、大きな差異は図からは確認されない。

次に、Fig.4 から読み取ることができる回転慣性やせん断変形が固有振動数に及ぼす一般的な影響について確認しておく。一般に、 L/D が小さい (細長比が小さい) 梁ほど、回転慣性やせん断変形の影響を受けて固有振動数が低下する傾向にあり、BEB理論に基づいて固有振動数を評価すると過大評価となる。また、モードの次数が上がるにつれてその影響はさらに大きなものとなり、高次モードでは L/D が大きい梁であっても BEB理論では固有振動数が過大評価となることが分かる。さらに、ポアソン比 ν の違いに着目すると、 ν が大きい梁ほど固有振動数が低下することが分かる。これは、 ν が大きくなるほどせん断弾性係数 G が小さくなり、それによってせん断変形が大きくなるためである。以上の結果から、梁の曲げ振動の問題において、回転慣性やせん断変形を考慮することの重要性を

再確認することができる。

次に、Fig.4 で示した数値解と実用計算値の誤差について具体的な傾向を確認する。Fig.4 の固有振動数の数値解に対する実用計算値の誤差を ϵ と定義し、Fig.5 に ϵ の計算結果を図示する。図の横軸は Fig.4 と同様に L/D である。Fig.5 から、HH の梁は、Table3 の $\delta\epsilon$ がほぼ 0 であることに対応するように、パラメータやモードの次数 n によらず ϵ はほぼ 0 であることが分かる。一方で、他の支持条件の梁では、 L/D が小さい範囲で ϵ が大きくなる傾向が見て取れる。また、計算に用いた β_1 と β_2 の値を $\nu = 0.2$ の場合の結果を基にして決定したことにより、CC や CH の梁では、 $\nu = 0.001$ または 0.47 の場合に特に ϵ が大きくなる傾向にある。特に、CC の $\nu = 0.47$ の場合にその傾向が顕著であり、 $L/D = 3$ のモデルの1次モードにおいて ϵ が全ての中で最大となっている。しかし、その ϵ の最大値は 1.1%程度であり、大きな誤差ではない。

以上の結果から、3章で示した固有振動数の計算手法は、様々な L/D や ν を有する矩形断面梁に対して幅広く用いることができると言える。

4.2 数値例題による適用範囲の検証

本節では、数値例題により、10次モードを上回るさらに高次のモードを評価する場合や、矩形断面以外の断面形状を有する梁においても、提案した計算手法が有効であるかどうかを検証する。

Table4 に、検証に用いる、断面形状、寸法、支持条件、材料パラメータの異なる4種類の梁のモデルを示す。なお、本検証では、各モデルの材料パラメータを一般的な構造材料である鉄骨やコンクリートを想定したものとしており、 ν は 0.2 または 0.3 としている。また、表中のせん断係数 k' の値は Cowper の式 ²⁾ から算出した。

Table5 に、Table4 の〈1〉～〈4〉のモデルについての固有振動数 f_{MT} の数値解 (Numerical) と式(17)による実用計算値 (Formula)、および数値解に対する実用計算値の誤差 (Error) をまとめて示す。なお、数値解はこれまでと同様に2章で述べた方法により求めた。

Table4 Beam models for numerical example

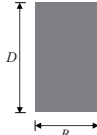
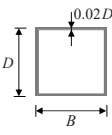
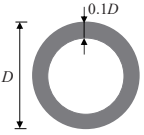
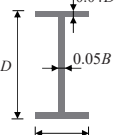
No.	(1)	(2)	(3)	(4)
Section	Rectangle 	Thin-Walled Square 	Hollow Circle 	Thin-Walled I-Section 
Boundary Condition	Clamped - Clamped	Hinged - Hinged	Clamped - Free	Clamped - Hinged
B [m]	0.5	0.5	—	0.2
D [m]	1.0	0.5	5.0	0.4
L [m]	4.0	4.0	75.0	8.0
ρ [kg/m ³]	2.4×10^3	7.8×10^3	2.4×10^3	7.8×10^3
E [MPa]	2.0×10^4	2.0×10^5	2.0×10^4	2.0×10^5
ν	0.20	0.30	0.20	0.30
k'	0.845	0.436	0.532	0.373

Table5 Results of numerical example

Mode	Natural Frequency	(1)	(2)	(3)	(4)	
1st	f_{MT} [Hz]	Numerical	138.30	91.87	0.46	30.91
		Formula	138.32	91.90	0.46	31.00
	Error		0.01%	0.03%	0.00%	0.31%
2nd	f_{MT} [Hz]	Numerical	301.44	306.19	2.77	94.05
		Formula	301.75	306.17	2.77	94.60
	Error		0.10%	-0.01%	-0.03%	0.58%
5th	f_{MT} [Hz]	Numerical	863.74	1079.83	20.84	395.29
		Formula	860.97	1079.81	20.84	398.30
	Error		-0.32%	0.00%	-0.02%	0.76%
10th	f_{MT} [Hz]	Numerical	1806.73	2330.76	63.45	991.03
		Formula	1801.51	2330.72	63.27	994.35
	Error		-0.29%	0.00%	-0.29%	0.33%
20th	f_{MT} [Hz]	Numerical	3664.52	4760.58	150.14	2164.57
		Formula	3664.89	4760.48	149.62	2167.28
	Error		0.01%	0.00%	-0.34%	0.13%
50th	f_{MT} [Hz]	Numerical	9199.67	11973.67	399.78	5570.11
		Formula	9225.31	11973.41	399.21	5579.96
	Error		0.28%	0.00%	-0.14%	0.18%

また、Table5には、1次、2次、5次、10次、20次、50次の6つのモードについての計算結果を示している。Table5の結果を見ると、誤差に多少の差はあるものの、矩形以外の断面の場合にも、式(17)により十分な精度で固有振動数を計算できていることが分かる。また、10次モードを上回る20次、50次モードにおいても、実用計算値と数値解の誤差は小さい。以上の結果から、提案した計算手法は、矩形以外の断面形状を有する梁や、高次のモードを評価の対象とする場合であっても有効であると考えられる。

5. 結言

本論文では、回転慣性とせん断変形を考慮した一様な弾性梁の曲げ固有振動数の実用的な近似計算手法を提案した。提案した計算手法を以下のTable6にまとめる。

Table6 Summary of proposed calculation method

	$f_{MT} = f_{BE} \left\{ 1 + 0.5(1 + \kappa)(e/\lambda)^2 \right\}^{0.5}$	$e = \beta_1 n + \beta_2$
Clamped - Free	$n \leq 2$: $\beta_1 = 5.052$, $\beta_2 = -2.015$	
	$n \geq 3$: $\beta_1 = 4.454$, $\beta_2 = -0.917$	
Clamped - Clamped	$n \leq 2$: $\beta_1 = 4.744$, $\beta_2 = 4.187$	
	$n \geq 3$: $\beta_1 = 4.422$, $\beta_2 = 4.840$	
Clamped - Hinged	$\beta_1 = 4.431$, $\beta_2 = 2.422$	
Hinged - Hinged	$\beta_1 = 4.443$, $\beta_2 = 0$	

f_{MT} : Natural frequency based on the Modified Timoshenko beam theory
 f_{BE} : Natural frequency based on the Bernoulli - Euler beam theory (Eq.(18))
 λ : Slenderness ratio $\kappa = 2(1 + \nu)/k'$: Elastic modulus ratio
 ν : Poisson's ratio k' : Shear coefficient n : Mode number

提案した手法について、特徴および検証の結果を以下にまとめる。

- (1) 提案した手法は、Wanら¹⁴⁾⁻¹⁵⁾が提案した修正 Timoshenko 梁理論 (MTB 理論) に基づいている。
- (2) 提案した手法は、Bernoulli-Euler の梁理論 (BEB 理論) における固有振動数に新たな項を乗じるだけで厳密性の高い固有振動数の理論値を近似計算することができ、複雑な数値解析が不要で実用性の高い手法であると言える。
- (3) 提案した手法は、ヒンジ-ヒンジ支持以外のとき、梁の長さ L と梁せい D の比 L/D が小さい場合や、ポアソン比 ν が極端に小

さいか、あるいは大きい場合に、数値解との誤差が大きくなりやすい。しかし、矩形断面梁において検証を行った範囲では、その誤差は最大でも 1%程度であり、精度は十分であった。

- (4) 数値例題により検証を行った範囲では、提案した手法は、矩形以外の断面形状を有する梁や、10次モードを上回る高次の固有モードを評価の対象とする場合においても有効であることが確認された。

謝辞

本稿は、前田建設工業㈱と東京工業大学による共同研究の成果の一部をまとめたものであり、本研究の一部は、JST 産学共創プラットフォーム共同研究推進プログラム (JPMJOP1723) によるものです。また、本稿の作成にあたり、前田建設工業㈱ 丸山勇祐氏、中川尚大氏、長尾悠生氏、東京工業大学 坂田弘安教授の各位に貴重なご助言を賜りました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Taniguchi, O. and Tamura, A.: Shin-pan Kogyo shindo gaku, CORONA PUBLISHING CO., LTD., pp.372-390, 1977 (In Japanese)
谷口修, 田村章義: 新版 工業振動学, コロナ社, pp.387-390, 1977
- 2) S.P. Timoshenko: On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol. 41, pp. 744-746, 1921
- 3) S.P. Timoshenko: On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section, Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol. 43, pp. 125-131, 1922
- 4) R.W. Traill-Nash and A.R. Collar: The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 6, pp. 186-222, 1953
- 5) T.C. Huang: The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions, Journal of Applied Mechanics, Vol. 28, No. 4, pp. 579-584, 1961
- 6) J.R. Hutchinson: Transverse vibrations of beams, exact versus approximate solutions, Journal of Applied Mechanics, Vol. 48, pp. 923-928, 1981
- 7) N.G. Stephen and S. Puchegger: On the valid frequency range of Timoshenko beam theory, Journal of Sound and Vibration, Vol. 297, pp. 1082-1087, 2006

8) Akiyama, K., Kishino, Y. and Murai, S.: Discussion on applicability of the Timoshenko beam theory based on the exact theory of wave propagation, Proceedings of JSCE A, Vol. 63, pp. 232-241, 2007 (in Japanese)
 穂山和男, 岸野佑次, 村井貞規: 弾性波動論に基づく Timoshenko はり理論の適用性の考察, 土木学会論文集 A, Vol. 63, pp. 232-241, 2007

9) G.R. Bhashyam and G. Prathap: The second frequency spectrum of Timoshenko Beams, Journal of Sound and Vibration, Vol. 76, pp. 407-420, 1981

10) N.G. Stephen: The second frequency spectrum of Timoshenko beams, Journal of Sound and Vibration, Vol. 80, pp. 578-582, 1982

11) M. Levinson and D.W. Cooke: On the two frequency spectra of Timoshenko beams, Journal of Sound and Vibration, Vol. 84, pp. 319-326, 1982

12) V.V. Nesterenko: A theory for transverse vibrations of the Timoshenko beam, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 57, pp. 669-677, 1993

13) N.G. Stephen: The second frequency spectrum of Timoshenko beam theory—Further assessment, Journal of Sound and Vibration, No. 292, pp. 372-389, 2006

14) Chunfeng Wan, Rong Chen, Songtao Xue and Zhishen Wu: Development of a novel beam model and its dynamic characteristics, Mechanics of Advanced Materials and Structures, Vol. 22, pp. 402-412, 2015

15) Chunfeng Wan, Huachen Jiang, Liyu Xie, Caiqian Yang, Youliang Ding, Hesheng Tang and Songtao Xue: Natural frequency characteristics of the beam with different cross sections considering the shear deformation induced rotary inertia, Applied Sciences, Vol. 10, 5245, 2020

16) Komatsu, K. and Toda, S.: Beam-type vibrations of short thin cylindrical shells, Technical report of National Aerospace Laboratory, TR-502, 1977 (in Japanese)
 小松敬治, 戸田勲: 円筒シェルの梁状曲げ振動について, 航空宇宙技術研究所報告, TR-502, 1977

17) R. Rahgozar, H. Safari and P. Kaviani: Free vibration of tall buildings using Timoshenko beams with variable cross-section, Structures Under Shock and Impact VIII, Vol. 73, pp. 233-242, 2004

18) Mahdi Ebrahimiyan and Maria I. Todorovska: Wave propagation in a Timoshenko beam building model, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 140, 040414018, 2014

19) Ming Hei Cheng and Thomas H. Heaton: Simulating building motions using ratios of the building's natural frequencies and a Timoshenko beam model, Earthquake Spectra, Vol. 31, pp. 403-420, 2015

20) Tobe, T.: Kaiten kansei oyobi sendanryoku no eikyo wo koryo seru kin-itu danmen hari no yoko shindo ni tsuite, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol.17, No.57, pp.14-19, 1951 (in Japanese)
 戸部俊美: 回転慣性およびせん断力の影響を考慮せる均一断面はりの横振動について, 日本機械学会論文集, Vol. 17, No. 57, pp. 14-19, 1951

21) G.R. Cowper: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, Journal of Applied Mechanics, Vol. 33, pp. 335-340, 1966

22) K. Sezawa: Die wirkung des enddruckes auf die biegunsschwingung eines stabes mit innerer dämpfung, ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 12, pp. 275-279, 1932 (in German)

23) ABAQUS Analysis User's Manual (v6.6), 23.3.3 Choosing a beam element,
<https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/usb/default.htm?startat=pt06ch23s03alm07.html>
 (Reference date: 2021/ 04/ 10)

注

注1) 振動数方程式の導出のためには, 梁端部の支持条件に応じた境界条件式が必要となる. TB 理論での境界条件式は文献 4)や文献 5)に示されている通りであり, BEB 理論のものとは異なる. しかし, 文献 20)及び文献 22)では, TB 理論の運動方程式に BEB 理論での境界条件式を適用して振動数方程式が導出されているため, 厳密とは言えない.

注2) 実際には, 文献 20)及び文献 22)では, 振動数方程式を α_{T1} と α_{T2}^2 (付録 A 参照)のみで表し, その式から α_{T1} と α_{T2}^2 の線形近似式を直接導いているため, 本論文と異なり, 固有振動数の数値解を求めるという手順が含まれていない. なお, 注 1)で述べたように, 文献 20)及び文献 22)の振動数方程式は厳密でなく, TB 理論の厳密な振動数方程式には α_{T1} と α_{T2}^2 以外にも含まれる.

注3) f_{BE} の値は, 式(18)に Table2 の d の値と梁のパラメータを代入することで得られる. なお, 提案した計算手法では, f_{MT}/f_{BE} は式(17)の { } 部分のみを計算することで得られる.

付録 A TB 理論の運動方程式と限界振動数

TB 理論では, せん断変形に起因する回転慣性は考慮されないことから, 回転運動の運動方程式が次式ようになる.

$$EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + k \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \theta \right) GA = 0 \tag{A1}$$

並進運動の運動方程式は本論の式(2)と同様である. 従って, 式(2)と式(A1)から θ を消去し, 次式のような運動方程式が得られる.

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{k'G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \tag{A2}$$

上式から分かるように, TB 理論では時間 t に関する 4 階微分の項が存在する. MTB 理論と同様の形で解を仮定して式(A2)に代入すると, 次式を得る.

$$\phi_T^4 + \frac{2\alpha_{T1}}{L^2} \phi_T^2 - \frac{\alpha_{T2}^2}{L^4} = 0 \tag{A3}$$

$$\alpha_{T1} = \frac{\omega_T^2 r^2 L^2}{2\mu^2} (1 + \kappa), \quad \alpha_{T2}^2 = \frac{\omega_T^2 L^4}{\mu^2} \left(1 - \kappa \frac{r^4 \omega_T^2}{\mu^2} \right) \tag{A4, A5}$$

ただし, MTB 理論と区別するため, ここでは添字を T としている. 式(A3)の解は, 式(A5)の正負に応じて場合分けされる. 従って, 式(A5)より, 場合分けの境界となる振動数, 限界振動数 f_c が次のように決まる.

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu}{r^2} \sqrt{\frac{1}{\kappa}} \tag{A6}$$

固有振動数を f_T とすると, [1] $f_T < f_c$ の場合と, [2] $f_T > f_c$ の場合の固有モードの一般式はそれぞれ次式のようになる.

$$[1] \quad u_T = A_1 \cosh \phi_{T1} x + A_2 \sinh \phi_{T1} x + A_3 \cos \phi_{T2} x + A_4 \sin \phi_{T2} x \tag{A7}$$

$$[2] \quad u_T = A_1 \cos \phi_{T3} x + A_2 \sin \phi_{T3} x + A_3 \cosh \phi_{T4} x + A_4 \sinh \phi_{T4} x \tag{A8}$$

ここに,

$$\phi_{T1} = \frac{1}{L} \sqrt{\alpha_{T1}^2 + \alpha_{T2}^2} - \alpha_{T1}, \quad \phi_{T2} = \frac{1}{L} \sqrt{\alpha_{T1}^2 + \alpha_{T2}^2} + \alpha_{T1} \tag{A9, A10}$$

$$\phi_{T3} = \frac{1}{L} \sqrt{\alpha_{T1} - \sqrt{\alpha_{T1}^2 + \alpha_{T2}^2}}, \quad \phi_{T4} = \frac{1}{L} \sqrt{\alpha_{T1} + \sqrt{\alpha_{T1}^2 + \alpha_{T2}^2}} \tag{A11, A12}$$

である.

ここでは, CF の梁を例に, f_c (式(A6))の近傍の振動数域における TB 理論と MTB 理論の固有モードの特性の違いについて簡単に検証することとする. Table A1 に, TB 理論における固定端と自由端での境界条件式と, それらを [1] 式(A7), [2] 式(A8)にそれぞれ適用して得られる CF の場合の振動数方程式を示す. また, CF の場合の固有モードの式は, 定数 $A_2 \sim A_4$ を A_1 を用いて表すことにより Table A2 のように整理される. なお, 式の構造上, Table A2 の [1]の式の ϕ_{T1} , ϕ_{T2} , ψ_{T1} , ψ_{T2} をそれぞれ ϕ_{MT1} , ϕ_{MT2} , ψ_{MT1} , ψ_{MT2} に置き換えたものが, MTB 理論での固有モードの式となる.

Table A1 Boundary conditions and frequency equations on TB theory (Clamped - Free)

Boundary Condition	
Clamped	$u_T = 0$ $\left\{ 1 + \left(\frac{\kappa r^2 \omega_T^2}{\mu} \right) \frac{d^2 u_T}{dx^2} + \kappa^2 \frac{d^4 u_T}{dx^4} = 0 \right.$
Free	$\left\{ 1 + \left(\frac{\kappa r^2 \omega_T^2}{\mu} \right) \frac{d^2 u_T}{dx^2} + \kappa^2 \frac{d^4 u_T}{dx^4} = 0 \right.$ $\left. \frac{d^3 u_T}{dx^3} + (1 + \kappa) \frac{\rho \omega_T^2}{\mu} \frac{d u_T}{dx} = 0 \right.$
Frequency Equation	
Clamped-Free	[1] $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \psi_{T1} & 0 & \psi_{T2} \\ \phi_{T1} \psi_{T1} \cosh \phi_{T1} L & \phi_{T1} \psi_{T1} \sinh \phi_{T1} L & -\phi_{T2} \psi_{T2} \cos \phi_{T2} L & -\phi_{T2} \psi_{T2} \sin \phi_{T2} L \\ [\psi_{T1} - (1 - \alpha_T^2 / \alpha_{T1}^2) \phi_{T1}] \sinh \phi_{T1} L & [\psi_{T1} - (1 - \alpha_T^2 / \alpha_{T1}^2) \phi_{T1}] \cosh \phi_{T1} L & -[\psi_{T2} - (1 - \alpha_T^2 / \alpha_{T2}^2) \phi_{T2}] \sin \phi_{T2} L & [\psi_{T2} - (1 - \alpha_T^2 / \alpha_{T2}^2) \phi_{T2}] \cos \phi_{T2} L \end{vmatrix} = 0$
	[2] $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \psi_{T1} & 0 & \psi_{T2} \\ \phi_{T1} \psi_{T1} \cosh \phi_{T1} L & \phi_{T1} \psi_{T1} \sinh \phi_{T1} L & \phi_{T1} \psi_{T1} \cosh \phi_{T1} L & \phi_{T1} \psi_{T1} \sinh \phi_{T1} L \\ -[\psi_{T1} - (1 - \alpha_T^2 / \alpha_{T1}^2) \phi_{T1}] \sin \phi_{T1} L & [\psi_{T1} - (1 - \alpha_T^2 / \alpha_{T1}^2) \phi_{T1}] \cos \phi_{T1} L & -[\psi_{T2} - (1 - \alpha_T^2 / \alpha_{T2}^2) \phi_{T2}] \sin \phi_{T2} L & [\psi_{T2} - (1 - \alpha_T^2 / \alpha_{T2}^2) \phi_{T2}] \cos \phi_{T2} L \end{vmatrix} = 0$

$$** \psi_{T1} = \phi_{T1} \left\{ 1 + \left(\frac{\kappa r^2 \omega_T^2}{\mu} \right) + \kappa^2 \phi_{T1}^2 \right\}, \psi_{T2} = \phi_{T2} \left\{ 1 + \left(\frac{\kappa r^2 \omega_T^2}{\mu} \right) - \kappa^2 \phi_{T2}^2 \right\}, \psi_{T3} = \phi_{T3} \left\{ 1 + \left(\frac{\kappa r^2 \omega_T^2}{\mu} \right) - \kappa^2 \phi_{T3}^2 \right\}, \psi_{T4} = \phi_{T4} \left\{ 1 + \left(\frac{\kappa r^2 \omega_T^2}{\mu} \right) - \kappa^2 \phi_{T4}^2 \right\}$$

Table A2 Eigenmode equation on TB theory (Clamped - Free)

$$[1] \quad u_T = A_1 \left\{ \cosh \phi_{T1} x - \cos \phi_{T2} x - \frac{\phi_{T1} \psi_{T1} \cosh \phi_{T1} L + \phi_{T2} \psi_{T2} \cos \phi_{T2} L}{\phi_{T1} \psi_{T1} \sinh \phi_{T1} L + \phi_{T2} \psi_{T2} \sin \phi_{T2} L} \left(\sinh \phi_{T1} x - \frac{\psi_{T1}}{\psi_{T2}} \sin \phi_{T2} x \right) \right\}$$

$$[2] \quad u_T = A_1 \left\{ \cos \phi_{T3} x - \cosh \phi_{T4} x - \frac{\phi_{T3} \psi_{T3} \cos \phi_{T3} L - \phi_{T4} \psi_{T4} \cosh \phi_{T4} L}{\phi_{T3} \psi_{T3} \sin \phi_{T3} L - \phi_{T4} \psi_{T4} \sinh \phi_{T4} L} \left(\sin \phi_{T3} x - \frac{\psi_{T3}}{\psi_{T4}} \sin \phi_{T4} x \right) \right\}$$

※ On [1], Replacing $\phi_{T1}, \phi_{T2}, \psi_{T1}, \psi_{T2}$ with $\phi_{MT1}, \phi_{MT2}, \psi_{MT1}, \psi_{MT2}$ gives u_{MT} .

Fig.A に、 $L/D = 6$, $\nu = 0.2$ の CF の梁モデルの 7 次～10 次の固有モード図を示す。また、各モードに対応する固有振動数を f_c で除した値を図の凡例に示している。図の Numerical は、TB 理論と MTB 理論に基づいた数値計算結果を表す。なお、固有モードの数値計算結果は、該当する振動数方程式 (Table A1, Table1 参照) から 2 章で述べた方法により固有角振動数の数値解を求め、その値を固有モードの式 (Table A2) に代入することで得られた結果である (前述のように、MTB 理論における固有モード式は Table A2 の [1] と同様の形である)。また、図の FEM とは、汎用 FEM 解析ソフト ABAQUS / CAE 2017 による固有値解析の結果である。FEM の解析モデルは、ソフトに実装されている 2 次元梁要素 B22²²⁾ を用いて作成し、要素のサイズは、梁のモデルが軸方向に 48 等分される大きさとした。図から、TB 理論に基づいた数値計算結果と FEM 解析結果はほぼ一致しており、汎用 FEM 解析ソフトに TB 理論が反映されていることが確認できる。また、両者の結果では、 f_c を上回る振動数域で同じ数の節を有するモードが 2 つ現れていることが見て取れる。これは、Traill-Nash ら⁴⁾によって示されたあと、長きに渡って議論されてきた特性である。一方で、MTB 理論では、振動数の大きさに関わらず、節の数が同じ固有モードは 1 つしか現れていない。この特徴から、Wan らは、MTB 理論は厳密性が高いだけでなく、現実的で合理性のある結果を与えるものであると述べている¹⁴⁾。また、MTB 理論では TB 理論よりも僅かに固有振動数が低下する。この傾向も Wan ら¹⁴⁾の結果と一致している。

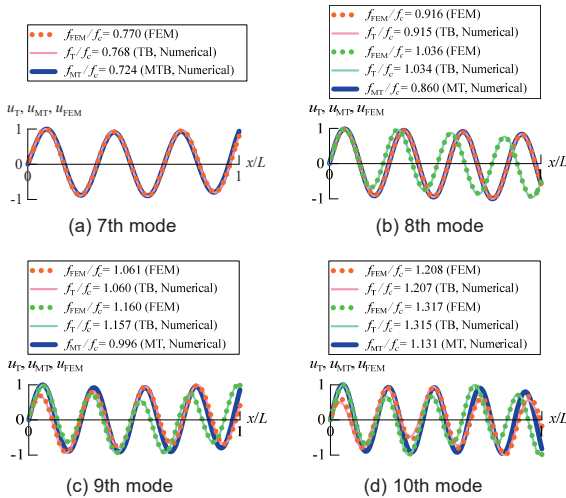


Fig.A Comparison of the eigenmodes around the cut-off frequency f_c

付録 B 戸部の固有振動数の近似計算式²⁰⁾

戸部の提案した、回転慣性とせん断変形を考慮した固有振動数の近似計算式²⁰⁾について、代表して固定-自由の梁の場合を示す。TB 理論の運動方程式における α_{T1} (式(A4)) と α_{T2}^2 (式(A5)) を、振動数方程式の近似式(B1), (B2)に代入し、微小近似による省略算を適用して整理すると、1 次と 2 次の固有振動数の近似計算式が式(B3), (B4)のように得られる。なお、記号等は全て本論文に合わせて書き換えている。

$$1 \text{ 次: } \alpha_{T2}^2 = 12.4 \left(1 - \frac{1}{1.23} \alpha_{T1} \right), \quad 2 \text{ 次: } \alpha_{T2}^2 = 484 \left(1 - \frac{1}{11} \alpha_{T1} \right) \quad (B1), (B2)$$

$$1 \text{ 次: } f_T = \frac{3.52}{2\pi} \frac{\mu}{L^2} \left\{ 1 - 2.52 \frac{\nu^2}{L^2} \left(1 + \frac{E}{kG} \right) \right\} = f_{BE} \left\{ 1 - \frac{2.52}{\lambda^2} (1 + \kappa) \right\} \quad (B3)$$

$$2 \text{ 次: } f_T = \frac{22}{2\pi} \frac{\mu}{L^2} \left\{ 1 - 11 \frac{\nu^2}{L^2} \left(1 + \frac{E}{kG} \right) \right\} = f_{BE} \left\{ 1 - \frac{11}{\lambda^2} (1 + \kappa) \right\} \quad (B4)$$

Fig.B1 に、式(B3), (B4)を用いた固有振動数の計算結果と、TB 理論に基づく数値計算結果の比較を示す。横軸は L/D 、縦軸は f_T/f_{BE} である。また、Fig.B2 に、式(B3), (B4)を用いた計算結果と数値計算結果との誤差 ε を示す。これらの図から、式(B3), (B4)では、梁のパラメータによっては数値計算との誤差が非常に大きくなるのが分かる。特に $L/D = 3$, $\nu = 0.47$ のモデルでは、2 次モードでおよそ 16% の誤差となっている。この大きな理由は、注 1)に示したように、式(B1), (B2)の基になっている振動数方程式が正確な境界条件式を適用して導出されたものではないためであると考えられる。さらに、式(B3), (B4)は、式の整理の際に、微小近似仮定による省略算が適用されており、そのことも誤差の要因となっているものと推察される。

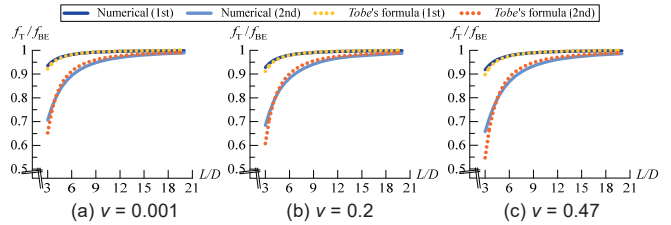


Fig.B1 Comparison of numerical calculation and Tobe's formula (Eq.(B3) and Eq.(B4))

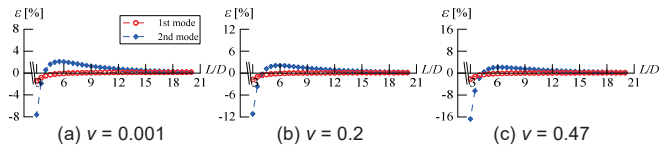


Fig.B2 Comparison of numerical calculation and Tobe's formula (Eq.(B3) and (B4))

付録 C BEB 理論における振動数方程式と固有振動数

BEB 理論の運動方程式は、式(3)あるいは式(A2)の左辺の第 3 項以降を消去したものとなり、支持条件ごとの振動数方程式は Table C のように得られる。また、固有振動数の式は、式(C)のようになる。

Table C Frequency equations of BEB theory

Clamped-Free	$\cosh \phi_{BE} L \cdot \cos \phi_{BE} L + 1 = 0$
Clamped-Clamped	$\cosh \phi_{BE} L \cdot \cos \phi_{BE} L - 1 = 0$
Clamped-Hinged	$\tanh \phi_{BE} L - \tan \phi_{BE} L = 0$
Hinged-Hinged	$\sin \phi_{BE} L = 0$

$$f_{BE} = (\phi_{BE} L / L)^2 \mu / 2\pi = \phi_{BE}^2 \mu / 2\pi \quad (C)$$

Table1 に示した MTB 理論における振動数方程式と比較すると、Table C は非常に単純な式であることが分かる。また、 ϕ_{MT1} , ϕ_{MT2} (式(13), (14)) が固有振動数を変数に含んでいるのに対し、Table C の ϕ_{BE} は固有振動数とは無関係に値が決まる。従って、初めに Table C の振動数方程式からモードの次数ごとに $\phi_{BE} L$ の値を求めれば、あとは式(C)により代数的に固有振動数が得られる。Table C の HH 以外の式については、 $\phi_{BE} L$ を得るためには Newton 法などの数値解法を用いる必要があるが、低次のいくつかのモードの $\phi_{BE} L$ の値については、振動工学の専門書にも記載されており^{例えば 1)}、結果を用いることができる。

付録 D 式(16)の d の仮定について

L/D が大きくなるほど α_{MT1} は 0 に近づくことから、軸方向に無限に長い梁では $\alpha_{MT1} = 0$ になると考えることができる。また、その場合、 $f_{MT} = f_{BE}$ となり、式(16)より次式が得られる。

$$\alpha_{MT2}^2 = \omega_{BE}^2 L^2 / \mu^2 = d^4 \quad (D1)$$

式(D1)を整理すると次式が得られる。

$$f_{BE} = \omega_{BE} / 2\pi = (d/L)^2 \mu / 2\pi \quad (D2)$$

上式と式(C)を比較すると、 d は $\phi_{BE} L$ に相当する値となることが分かる。

付録E 場合分けをせずに e を定式化したときの誤差

本論では、梁の支持条件が CH および CC の場合のみ、 e の式をモードの次数 n の大きさに応じて 2 つに場合分けしたが、ここでは、場合分けをしなかった場合の結果について示す。 $\nu = 0.2$ の CH および CC の梁について、数値計算から得られた α_{MT1} と α_{MT2}^2 の関係を、 n に応じた場合分けをせずに 1 本の直線で最小二乗近似した場合、式(20)の β_1 と β_2 はそれぞれ次のような値となる。

(a) 固定-自由 (Clamped - Free)

$$\beta_1 = 4.477, \quad \beta_2 = -1.084 \quad (E1), (E2)$$

(b) 固定-固定 (Clamped - Clamped)

$$\beta_1 = 4.441, \quad \beta_2 = 4.705 \quad (E3), (E4)$$

上式の値を適用した場合 (場合分けなし) の式(17)を用いた固有振動数の計算結果と、数値計算により得られる固有振動数の数値解との誤差 ε を Fig.E1 に示す。図から分かるように、場合分けなしの場合、本論で示した手法 (場合分けあり) で計算した場合に比べて、低次モードの固有振動数の最大誤差が大きくなる。CF の場合では、 $L/D = 3$ で $\nu = 0.47$ の場合に 2 次モードで 2.2 % の誤差が、CC の場合では、 $L/D = 3$ で $\nu = 0.001$ の場合に 1 次モードで 2.2 % の誤差がそれぞれ生じており、場合分けなしの場合の最大誤差の 2 倍以上となっている。しかし、図から分かるように、誤差 ε が大きくなる範囲は L/D が小さい場合に限られており、 L/D がある程度大きければ、場合分けなしの式でも ν の大きさに関わらず数値計算と 1 % 以内の誤差で固有振動数を計算できる。また、数値計算との 2 % 程度の誤差を許容し得るならば、パラメータによらず場合分けは必要ないと言える。ただし、本検討では、出来る限り数値計算との最大誤差を小さくし、広範囲で高精度に固有振動数を計算できるような計算手法の提案を目的としていることから、 e の式を場合分けした計算手法と検証結果を選択して本論に示している。

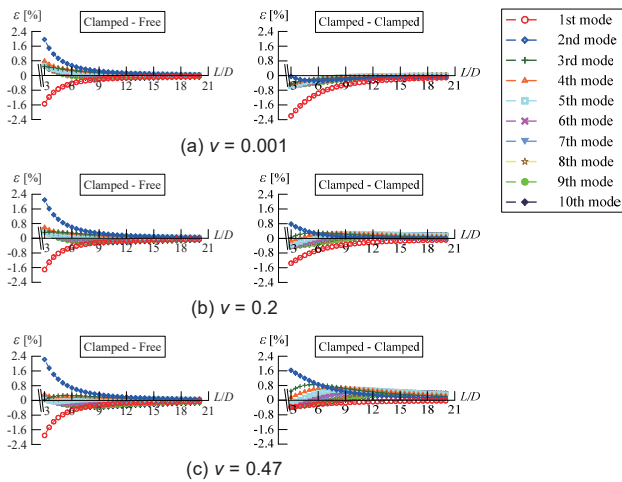


Fig.E Error of evaluation of natural frequency on rectangular cross section beams by the practical formula

[If the equation of e is not divided into cases according to the value of n]

A PRACTICAL METHOD FOR CALCULATING NATURAL BENDING FREQUENCIES OF UNIFORM ELASTIC BEAMS CONSIDERING ROTATORY INERTIA AND SHEAR DEFORMATION

Yudai YAMAGUCHI^{*1}, *Daiki SATO*^{*2} and *Tetsuro TAMURA*^{*3}^{*1} Grad. Student, School of Environment and Society, Tokyo Institute of Technology^{*2} Assoc. Prof., FIRST, Tokyo Institute of Technology, Dr.Eng.^{*3} Emeritus Prof., Tokyo Institute of Technology, Dr.Eng.

In general, the Bernoulli-Euler beam theory (BEB theory) is the most well-known in bending vibration theory of 1D elastic beams. However, large errors occur in BEB theory for short beams or high-order modes due to neglect of rotatory inertia and shear deformation in the theory¹⁾. A more rigorous theory for bending vibration of beams has been proposed by Timoshenko, which takes into account shear deformation and bending deformation induced rotatory inertia²⁾⁻³⁾. Many previous studies have shown that the Timoshenko beam theory (TB theory) is highly accurate for low-order modes. However, TB theory has a cut-off frequency, defined by parameters of the beam, above which the accuracy of the evaluation is not guaranteed⁶⁾⁻⁸⁾. In addition, although the problem of TB theory having two frequency spectra above the cut-off frequency has been shown and discussed for many years, the debate has not been yet resolved⁹⁾⁻¹³⁾. Recently, a new beam theory, the modified Timoshenko beam theory (MTB theory) has been proposed¹⁴⁾⁻¹⁵⁾. The improvement in MTB theory is that consideration is given towards shear deformation induced rotatory inertia, which was neglected on TB theory. MTB theory does not have a cut-off frequency and there is no second spectrum in any frequency region¹⁴⁾. Therefore, MTB theory is more rigorous and realistic than TB theory.

Rigorous vibration theories for beams are highly versatile¹⁶⁾⁻¹⁹⁾. In the future, MTB theory is likely to be adopted across many engineering fields instead of TB theory. However, this theory does not have the simplicity and practicality of BEB theory, and requires complex numerical analysis to calculate the natural frequencies even for uniform beams. Therefore, it is desirable to establish practical methods that can be used without the need for numerical analysis. Although a simplified formula for calculating natural frequencies of uniform beams based on TB theory exists²⁰⁾, it lacks in accuracy and applicability range.

Therefore, in this paper a practical method is proposed for calculating the natural bending frequencies of uniform beams considering rotatory inertia and shear deformation, based on MTB theory. First, numerical solutions of natural frequencies based on MTB theory are obtained up to the 10th mode for rectangular cross-section beams with different support conditions and parameters such as slenderness ratio and Poisson's ratio. Next, a linear equation is created by focusing on properties of the numerical solution. By use of the linear equation and the equation of motion, a simplified formula for natural frequencies (Eq.(17)) is derived. Using the derived formula, we can calculate natural frequency based on MTB theory by simply multiplying a natural frequency obtained from BEB theory by a term. A coefficient in the term of the formula is obtained according to the order of the mode. For very short beams and beams with very small or large Poisson's ratios, the errors of natural frequencies calculated by the proposed formula increase, however, tend to be within about 1 % for the range of parameters considered in this study. Furthermore, verification by numerical examples show that the proposed method keeps high accuracy for beams with other types of cross-section, and for higher-order modes. These results demonstrate that the proposed practical method for calculating natural bending frequencies of uniform beams is widely effective, regardless of the order of the mode or parameters of beam.

(2021年7月7日原稿受理, 2021年9月7日採用決定)