論文 / 著書情報
Article / Book Information

論題	中学校における反復試行の教材の開発とその反応分析
Title	Development of teaching materials for repeated trials in junior high school and their reaction analysis
著者	西仲則博, 吉川厚, 高橋聡
Authors	NISHINAKA Norihiro, YOSHIKAWA Atsushi, TAKAHASHI Satoshi
出典	日本科学教育学会年会論文集,　46,　, pp. 35-38
Citation	Proceedings of the Annual Meeting of Japan Society for Science Education,　46,　, pp. 35-38
発行日 / Pub. date	2022, 9

中学校における反復試行の教材の開発とその反応分析

Development of teaching materials for repeated trials in junior high school and their reaction analysis

○西仲則博[*1]・吉川厚[*2]・高橋聡[*3]
NISHINAKA Norihiro[*1] YOSHIKAWA Atsushi[*2] TAKAHASHI Satoshi[*3]
[*1]近畿大学[*2]東京工業大学[*3]関東学院大学
[*1]Kinki University[*2]Tokyo Institute of Technology[*3]KantoGakuinUniversity

［要約］本研究の目的は，中学校の確率の授業で扱われる「２個のコイン投げ」の課題を反復試行の基礎として捉え，5回の反復試行を用いた「5人の血液型の問題」教材を開発し，その授業を行った．また，その授業後，反復試行を用いた判断ができるかどうかの小テストを行った．その結果，授業では積極的に問題解決に取り組んでいたが，比率が同じで，試行回数が違う反復試行の問題（10回中表が8回出る確率をＰ（A），30回中表が24回出る確率Ｐ（B）として，その値の大小比較）においての回答を分析すると，両方の確率が同じであると判断した生徒が40人/50人の76.9%という結果を得た．生徒の選択理由としては，「8／10＝24／30　よってP(A)=P(B)」，「Aの場合のものを３倍するとBと等しくなるから」というように，全事象（間違った）と個別事象の比率を基に判断していることが解った．

［キーワード］反復試行，確率判断，仮説検定の考え方，標本サイズの影響

Ⅰ．問題の所在

令和３年度から中学校での学習指導要領（平成29年告示）が完全実施され，中学校１学年のデータ活用領域では，第２学年から，「多数の観察や多数回の試行によって得られる確率」が（以降　統計的確率とする）移行し，相対度数の学習の延長として，「相対度数を確率と見なす」（文部科学省 2018）ことが学習されるようになる．これにより，統計的データの判断を確率として見做して，判断できることが期待されている．

第２学年では，コイン，サイコロ，くじのように，今後の確率の学習で，モデルとなる考え方が学習される．特に，コイン投げは，「Yes,No」，「肯定，否定」，「真，偽」，「必然，偶然」のような，二つの対立する概念を確率として取り扱う基本的なモデルであり，また，反復試行の基本的なモデルでもある．これら２つを併せて，高等学校において学習する「仮説検定の考え方」，「仮説検定（二項検定）」に用いられる基本的な考え方をなしている．

一方で，中学校２年生の確率の学習では，場合の数の和の法則，積の法則，確率の和の法則，積の法則などは，扱わず，反復試行も，その内容には入っていない．そのため，統計的データの相対度数を確率と見做して判断するときに，「データが，偶然に起こったかどうかを確率で表す」ことで，判断できない現状がある．

そこで，本研究においては，中学校の２年生において，確率の学習の発展として，反復試行を取り入れた確率判断を行う教材として「血液型の分布」を用いた教材を開発した．また，その学習成果を測るために，授業後，コイントスを行い，10回中８回表が出る確率Ｐ(A)と30回中24回表が出る確率Ｐ(B)の大きさの比較を行う問題を行った．その結果，授業では，生徒から積極的な意見が出されたが，問題では，反復試行の計算を行わず，Ｐ（A）＝Ｐ（B）と，両方の確率が同じであると判断した生徒が40人/50人の76.9%という結果を得た．生徒の選択理由としては，「8／10＝24／30　よってP(A)=P(B)」，「Aの場合のものを３倍するとＢと等しくなるから」というように，コイントスの回数を全事象として捉え，比が同じため，確率は同じであると判断したという結果を得た．これは，コイントスをｎ回行った時の全事象が，2^N回であるのに対して，ｎ回と見做していることを示している．また，表が出る組合わせにつ

いても，45 通り（${}_{10}C_8 = {}_{10}C_2$）と 593,775 通り（${}_{30}C_{24} = {}_{30}C_6$）を無視した結果であり，「標本サイズの影響」（Effect of Sample Size）（Fischbein,1997, Jendraszek,2008, 松浦 2009）と考えられる．これらのことから，反復試行の学習を行っても，「標本サイズの影響」を学習者は受けやすいという結論を得た．

Ⅱ．研究の方法

1．先行研究

① 確率教材の発展的教材の開発について

岩崎（2005）は中学校の確率の学習の発展的教材として，条件付き確率の概念の発達過程を再構成する４つの教材を開発している．そこでは，「条件付確率の概念と方法を，徐々に，今日的かつ現実的な問題の解決に直結するより複雑な確率的状況に対処する方法として発展させていくこととする（岩崎 2005）．」とあるように，4 つの教材が簡単な概念の準備から，複雑化し，現実的な問題へ拡張していくように開発している．

山本・熊倉（2017）は，高等学校での教材・実践研究から，確率の学習指導において，興味・関心を持たせ理解を深めるためには，「意外性のある教材や予想、等の活動を取り入れた指導の工夫が有効であることが指摘できる．」としている．

本研究においては，「簡単な概念の準備から複雑化する」「予想がしやすく，計算した結果が意外性がある」「現実的な問題へ」の３つの方向性で，教材を開発していく．

② コイントスの問題について

「2 枚のコイントス」の問題は，2 つの独立試行であり，また，反復試行と捉えることもできる．このような試行を拡張，一般化することにより，ベルヌーイ試行になる．ベルヌーイ試行のモデルは，標本調査における無作為非復元抽出のモデルであり，仮説検定の考え方の二項検定の考え方のモデルでもある(コルモゴロフ他 2003)．このため，後の学習を考えると，この教材の重要性がわかる．

令和２年に採択された中学校２年生用数学の教科書７社について取り扱われている教材である．また，2 枚のコイントスを行った後に，3 枚のコイントスへ発展しているのが，3 社の教科書の中で扱われている．そのため，コインの扱う枚数を増やすことについては，発展の範疇であると考える．

また，「枚数」を「投げる回数」として，捉え直すことにより，より一般的な数へと発展できることを示すこともできると考える．

2．教材の開発について

本研究では，「コイントス」の問題をもとにして，反復試行を説明した後に，「クラスの５人を選んでＡ型が２人いる確率」の問題に現実的状況に即した問題解決へ発展させていく教材を開発した．開発した問題と活動は次の通りである．

> 問題 1「コインを 5 回投げて，表が 4 回，裏が 1 回出る確率は 4/5 である．」は正しいか間違っているか？
> 活動 1：予想を行い，予想とその根拠を発表する．
> 活動 2：樹形図や概念図を用いて，確率を求める．
> 問題 2「日本人の血液型の分布として，A 型　40％　O 型　30％　B 型 20％　AB 型　10％　と，解っているとき，クラスの中から 5 人を選んで，その中に A 型の人が 2 人いる確率は　40/100＝2/5 である．正しいか，間違っているか？」
> 活動 3：予想を行い，予想とその根拠を発表する．
> 活動 4：樹形図や概念図を用いて，確率を求める．
> 問題 3「5 人をあつめて，来た順に順番をふるとき，3 番目以内に血液型が A 型である人が現れる確率を求めなさい．」
> 活動 5：予想を行い，予想とその根拠を発表する．
> 活動 6：樹形図や概念図を用いて，確率を求める．

問題 1 の提示時前に，2 枚のコイントスや 3 枚のコイントスを投げることを同じコインを 2 回，3 回と投げることと同じように見做すことを説明する．問題毎に予想を行った後に，その確かめとしての確率の計算を行う活動を取り入れている．

② 各問題の数学的考察

活動 1，2 では，コイン投げの回数と全事象についての関係が問われる．

2，3 枚のコイン投げの場合，事象の書き上げをして，全事象を求めることを行うため，枚数と全事象の関係について考察されていない場合が多い．樹形図を用いた場合では，「もっと簡易に求める方法は？」という問いを出すことで，場合の数の和の法則や積の法則の考え方を使うことが考えられるので，それを発展させることも考えられる．その後，n 回投げた場合の全事象は 2^n であることをまとめることもできる．

活動2では，裏が1回のみ出る場合が，1回ではなく，複数回の場合があることを見つけることが必要である．

	1	2	3	4	5
•	う	お	お	お	お
•	お	う	お	お	お
•	お	お	う	お	お
•	お	お	お	う	お
•	お	お	お	お	う

図1．複数回の提示

図1のように，表を「お」，裏を「う」として，回数と出た目の組み合わせを作ることができ，5通りあることを示す．「うおおおお」という1つの場合を取り出し，この確率は，全事象が$2^5=32$（場合の数の積の法則を用いている）で個別事象が「うおおおお」の1通りなので1／32　と場合の数を用いて求めることができる．「う」の出方が5通り（場合の数の和の法則を用いている）あるため，求める確率が5／32となる．

これを，5×（1/2）^{5}と変形することができる．更に，5×（1/2）^{1}（1/2）^{4}と変形することにより，（裏の出る組の組み合わせの数）×（裏の出る確率）×（表の出る確率）　となっていることを示すことができる．更に，表がs回，裏がt回出る場合の確率は，（裏がt回出る組み合わせの数）×（1/2）^{s}（1/2）^{t}となる．

ここで，「裏が出る」を「ある事象が起こる」，「表が出る」を「ある事象が起こらない」と捉え直すことにより，図2のようにまとめることができる．

• ある事象Aの確率をpとすると、そうでない確率（1－p）
Aが3回続く確率
$$p\times p\times p=p^3$$
Aが3回，A以外が2回の場合の確率
（5回中Aが3回出る組合せ）×p×p×p×（1－p）×（1－p）
$$={}_5C_3\times p^3\times(1-p)^2$$

図2．反復試行の確率の求め方

問題2は，服部（2011）の改題であり，基の確率が決まっているときの，個別の確率がどのようになるかを問う問題である．活動3，4では，活動2で行った組み合わせを求める活動が必要となる．5人のうち，2人がA型である組み合わせは，

	ア	イ	ウ	エ	オ
1	A	A	-	-	-
2	A	-	A	-	-
3	A	-	-	A	-
4	A	-	-	-	A
5	-	A	A	-	-
6	-	A	-	A	-
7	-	A	-	-	A
8	-	-	A	A	-
9	-	-	A	-	A
10	-	-	-	A	A

図3．5人のA型の組合わせ

${}_5C_2$ =10通りと求めることができる．計算によって求めることよりは，5人をア，イ，ウ，エオとして，図3のように，書き出すことができ，10通りであることを得ることができる．ここでは，「同一条件下で同じ試行を繰り返す場合に「無作為」であれば，「試行は独立である」」（服部2011　p9）を前提に議論を進める．このことは，生徒には，無理に伝える必要がないと考える．

各場合についてについて，「A型であること」と，「A型でないこと」が起こっている．ここで，「A型であること」を「ある事象が起こること」，「A型でないこと」を「ある事象が起こらないこと」と見做すと，図2を用いて確率を求めることができる．

問題2の仮定より，A型である確率=2/5，A型でない確率=1-2/5 =3/5　と求めることができるので，図4のように求めることができ，2/5よりも確率が小さいことが解り，意外性のある確率となる．

連続して試行が行われる場合の確率と考えて
$${}_5C_2\times p^2\times(1-p)^3$$
$$={}_5C_2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^3$$
$$=\frac{216}{625}$$
$$=0.3456$$

図4．5人中2人がA型の確率

問題3は，問題2の仮定条件の下で，5人とA型が同じで，状況を変えた場合，確率の求め方が変わる問題である．こちらは，1番目にA型が現れる場合，2番目にA型が現れる場合，3番目にA型が現れる場合とそれぞれに場合分けをして確率を求め，それらの和として，求める確率を得ることができる．

1番目にA型が現れる確率=2/5

2番目にA型が現れる確率=（3/5）×（2/5）
=6/25

3番目にA型が現れる確率=（3/5）^{2}×（2/5）
=18/125

となり，この和は　98/125　=0.784　である．

このように，活動1～6では，予想とは違った確率となり，意外性のある活動ができると考える．

③　生徒の授業評価として

本研究としては，反復試行の確率を用いて，統計的事象を判断することができることに繋げることができるかである．そのために，以下の問題を用意した．

評価問題1．

次のようなコイントスの試行A,Bを行います．

A：10回コイントスを行い，「お」が8回出る

B：30回コイントスを行い，「お」が24回出る

A,Bの確率をP（A），P（B）とします．このとき，次のうちどの関係が成り立ちますか？記号を選びその理由を下の□に書いてください。

a. P(A)=P(B)　b.　P(A)>P(B)　c.　P(A)=1－　P(B) d.　P(A)<P(B)

評価問題 2.

次のような広告は正しいでしょうか？正しいか・正しくないかを選択し，その理由を答えて下さい.

A 社が新しい健康食品 B を作りました。この食品 B を食べると、「元気」になるということです。A 社は、このことを次のように説明しています.

「当社のモニターの方々に食品 B を食べていただき、アンケートにお答え頂いた方の 30 人のうち、24 人の方が『元気が出た』とお答え頂きました。」

評価問題 3. 本授業の感想を書いて下さい.

評価問題 1 は，P（A）$= {}_{10}C_8 \times (1/2)^2 (1/2)^8 = 0.043945$ であり，P（B）$= {}_{30}C_{84} \times (1/2)^6 (1/2)^{24} = 0.0005529$ となる．正確な計算は困難であるため，ICT の利用が必要になるが，$2^{10} \ll 2^{30}$ ことを利用すると，P（A）＞P(B)は導くことができる.

3．教材を用いた授業と生徒の反応

① 対象　　国立大学法人附属中学校 2 年生
2 クラス（A：28 名，B：25 名）

② 授業・調査日　2021 年 3 月 18 日～3 月 19 日

③ 調査による不利益を被ることがないことは明記

④授業の形態：感染症対策のため，グループ討議等は控え，教師との問答形式で行った.

Ⅲ．結果と考察

本研究においては，評価問題 1 の結果について報告する．評価問題 1 についての回答の分布は，表 1 のようになった.

表 1．クラス別評価問題 1 回答状況

クラス＼回答	a	b	c	d	Total
A	23	3	0	2	28
B	17	3	2	2	24
Total	40(76.9%)	6(11.5%)	2（3.8%）	4（7.7%）	52

回答ａが 76.9%と多いことがわかる．生徒の選択理由については,「A の場合のものを３倍すると B と等しくなるから」,「8／10＝24／30 よって PA)=P(B)」「コイントスを行った回数と表が出る回数が比例しているから」のように，投げた回数と表の出た回数の比における比較を行っていることと推測できる．これは，確率の計算が困難であることから，簡易な数字の計算を行ったとも考えられる．または，コイントスをｎ回行った時の全事象が，2^N回であるのに対して，ｎ回と見做していることを示している．また, 表が出る組合わせについても, 45 通り（${}_{10}C_8 = {}_{10}C_2$）と 593, 775 通り（${}_{30}C_{24} = {}_{30}C_6$）を無視した結果であり，「標本サイズの影響」であると考えられる（松浦 2009 他）.

これらのことから，反復試行の学習を行っても，生徒は，全事象（間違った）と個別事象の比率を基に判断し.「標本サイズの影響」を学習者は受けやすいという結論を得る.

Ⅳ．おわりに

本研究においては，中学生が仮説検定の考え方を考える前の段階としての反復試行の確率の授業を行ったが，反復試行の確率について十分な理解が得ることができたとは考えていない．今後も教材開発と実践が必要である.

付記・謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費 19K03157 の助成を受けている.

文献

A．コルモゴロフ，A．プロホロフ ,I．ジュルベンコ（著），丸山 哲郎 ，馬場 良和（翻訳）(2003)：コルモゴロフの確率論入門, 森北出版, p155-192

E.Fischbein and D.Schnarch1(1997):The Evolution With Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions, Journal for Research in Mathematics Education,Vol28.1, NCTM,　p96-105.

服部哲也（2011）：確率分布と統計入門,学術図書出版

岩崎浩(2005)：中学校確率の発展的教材としての条件付確率－面白い問題を中心としたその発展過程の再構成－，上越数学教育研究,第 20 号, p.21-30

松浦武人（2009）: 初等教育における児童の確率概念の発達を促す学習材の開発研究」日本数学教育学会誌数学教育論究 Vol. 91，pp.3-13

文部科学省（2018）：中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説数学編，日本文教出版.

P.Jendraszek(2008): Misconceptions of Probability among Future Mathematics Teachers: A study of Certain Influences and Notions that Could Interfere with Understanding,VDM Verlag

山本達也・熊倉啓之(2017)：発展的な考え方の育成を重視した確率の教材開発，日本数学教育学会誌 第 99 巻第 3 号，p.4-12.