

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	バイスペクトルを用いた不規則励振系の非ガウス応答解析
Title(English)	
著者(和文)	伊藤大造
Author(English)	Daizoh Itoh
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第12362号, 授与年月日:2023年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:中尾 裕也,早川 朋久,天谷 賢治,原 精一郎,高原 弘樹
Citation(English)	Degree:Doctor (Engineering), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第12362号, Conferred date:2023/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Type(English)	Doctoral Thesis

令和4年度 博士論文

バイスペクトルを用いた
不規則励振系の非ガウス応答解析

指導教員
中尾 裕也 教授

工学院システム制御系

伊藤 大造
2023年2月15日

目次

第 1 章	緒論	1
1.1	緒言	1
1.2	不規則振動系の応答解析に関わる従来研究	2
1.3	高次スペクトルの紹介とその活用例	6
1.4	不規則振動系の応答解析における現状の課題とそれに対して期待できる高次スペクトルを用いた解決策	7
1.5	本研究の目的と概要	9
第 2 章	複素非整数次モーメントを用いた剛性と減衰に非線形性を持つ不規則励振系の過渡応答解析	12
2.1	緒言	12
2.2	メリン変換と複素非整数次モーメント	12
2.3	問題設定と応答振幅の Fokker-Planck 方程式の導出	14
2.4	複素非整数次モーメントを用いた Fokker-Planck 方程式の近似解法	16
2.5	数値計算例	19
2.6	結言	27
第 3 章	バイスペクトルの定義と諸性質	28
3.1	キュムラントと高次スペクトル	28
3.2	バイスペクトルの諸性質と物理的意味	29
3.3	確率過程の 3 周波数成分間の依存性と非対称性	31
3.4	クロスバイスペクトル	32
第 4 章	バイスペクトルに着目した非ガウス性励振が応答の非対称性に与える影響の考察	34
4.1	緒言	34
4.2	非ガウス入力とそのバイスペクトルの導出	35
4.3	クロスバイスペクトルを用いた非ガウス入力線形系の応答の確率密度関数に与える影響の考察	38
4.4	結言	43
第 5 章	同一な非白色ノイズによる係数・外部同時励振下の系の応答非対称性のバイスペクトル解析	45
5.1	緒言	45
5.2	解析モデル	46
5.3	モンテカルロシミュレーションによる応答の確率密度関数の非対称性の調査	46
5.4	摂動法を用いた応答のバイスペクトルの近似解析	57

5.5	規格化されたバイスペクトルを用いた入力のパワースペクトル形状が応答の非対称性に与える影響の考察	74
5.6	結言	81
第 6 章	任意のクロススペクトルを考慮した係数・外部同時励振系の応答バイスペクトル解析	83
6.1	緒言	83
6.2	解析モデル	83
6.3	摂動法を用いた応答のバイスペクトルの近似解析	84
6.4	数値計算例	93
6.5	結言	101
第 7 章	係数励振と外部励振の相関係数が応答歪度に与える影響の調査	102
7.1	緒言	102
7.2	解析モデル	103
7.3	応答歪度の近似解析解	103
7.4	数値計算例	104
7.5	相関係数が応答の非対称性に与える影響の考察	106
7.6	結言	108
第 8 章	結言	109
Appendix A	$Y(t)$ の 3 次の中心モーメント	114
Appendix B	式 (5.45) の証明	116
Appendix C	$E[\bar{F}_m^I \bar{F}_n^I \bar{F}_{-(m+n)}^I]$ の計算	118
Appendix D	$E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^{III}]$ の計算	121
Appendix E	$E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^I \bar{F}_r^{II}]$ の計算	125
謝辞		129
参考文献		130

第 1 章

緒論

1.1 緒言

現実世界では、地震動や風荷重、波荷重等の、非周期的で再現性がなく、予測のできない励振を受ける構造物が多くある。そのような励振を受ける構造物の応答もまた、励振と同様に非周期的で再現性がなく、予測の困難なものとなる。非周期的で再現性がない励振現象に対する構造物の応答解析の方法のひとつとして、実際に記録された励振を用いて、確定論的に応答を求めるというものがある。しかし、このような手法では、使用した記録に残された範囲の励振に対応した応答しか求めることができないため、それ以外の起りうる多くの励振に対する知見が欠落してしまうという問題点がある。そこで、このような振動現象に対しては、不規則な励振を確率過程でモデル化し、確率論的な解析をする必要がある。

不規則な応答を示す系の安全性の評価には、初通過時間の平均や平均閾値通過率などの指標があるが、これらの指標を求めるために必要となるのが、応答の確率密度関数である。そして、それらの指標を正確に求めるには、大きな応答を示す確率に強く関わる、確率密度関数の非対称性や裾の重さといった非ガウス性を正確に捉えることが必要である。

不規則励振系の応答の確率密度関数を求める手法の中で、最も汎用性が高く、広く用いられている手法がモンテカルロシミュレーションである。モンテカルロシミュレーションとは、所望の統計的性質を有する励振の標本関数を用意した後、その励振に対応した応答の標本関数を運動方程式を数値的に解くことで多数計算し、応答の確率的な性質を求める、という手法である。この手法は、入力標本関数の生成さえ可能ならば、任意の不規則励振系に対して適用できるという利点がある。一方、応答の非ガウス性に関係する応答の確率密度関数の裾部や高次の統計量の推定には、大きな応答を示す確率が大きな影響を与える。そして、大きな応答を示す確率は一般的に小さいため、数値シミュレーションにおいて発生する頻度も低くなる。そのため、応答の非ガウス性の正確な推定には、膨大な標本点数が必要になる。また、考えているモデル中のパラメータに対して網羅的に応答特性を調べたいときは、その都度 1 から計算が必要となる。以上のことから、近年のよく発展したコンピュータの計算能力をもってしてもモンテカルロシミュレーションの膨大な計算コストは依然大きな問題であり、様々な理論解析手法が提案され続けている。

現実の構造物に即した数学モデルとして、連続体や多自由度系が用いられることが多い。しかし、不規則励振系の応答の非ガウス性については、1 自由度系の場合における応答でさえもまだ十分にはわかっていない。さらに、モード分解を考えることで、連続体や多自由度系の問題も 1 自由度系の問題に帰着できる場合も多くあるため、1 自由度不規則励振系の解析は、自由度の高い問題を考えたときにも有用で基礎的な知見をもたらす重要な課題であると言える。そこで以降は、不規則励振系の中でも、1 自由度不規則励振系の先行研究を応答の非ガウス性に注目して紹介し、現在の課題を示し、本研究の目的を述べる。

1.2 不規則振動系の応答解析に関わる従来研究

先述の通り、不規則振動系の解析において、応答の非ガウス性を正しく評価することが重要である。そして、不規則励振系の応答が非ガウス性を示すとき、その非ガウス性の原因としては、(i) 系が非線形特性を有している場合、(ii) 不規則励振が非ガウス性を有している場合、(iii) 不規則励振が係数励振の形で系に加わる場合の 3 種類か、またはこれらの組み合わせによるものが考えられる。上記 3 つの場合に対して、先行研究による解析の成果をまとめる。

1.2.1 ガウス性不規則外部励振を受ける非線形系の応答解析

不規則励振の最も基本的なモデルは、定常ガウス過程である。定常ガウス過程は、2 次までの統計量で完全に記述することが可能であるため、数学的な取り扱いが容易であり、また、そのシミュレーション方法もよく発達しているという利点がある。ガウス過程を入力として持つ線形系の応答は、ガウス過程となる。従って、ガウス性の不規則励振を受ける線形系の応答特性は、広く知られている。一方、系に非線形減衰項や非線形剛性項など、非線形な特性を有する要素が存在する場合、応答はもはやガウス過程ではなく、非ガウス性を示す。不規則振動系の解析に関する先行研究では、このガウス性入力を受ける非線形系を対象とした例が多い。これに関して本項では、2 つの観点から先行研究の成果を述べる。1 つめは、ガウス性入力に白色性を仮定した場合の、過渡応答の確率密度関数の近似解析手法、2 つめは、ガウス性入力に非白色性を仮定した場合の、入力のパワースペクトルと定常応答の非ガウス性の関係の調査である。

ガウス性白色入力を受ける非線形系の過渡応答解析

不規則励振系の入力として最も広く使われるモデルはガウス性白色ノイズであるが、過去の履歴に依存しない非線形項を有する 1 自由度系にガウス性白色ノイズが加わった場合、変位応答と速度応答で構成されるベクトルはマルコフ性を示す。マルコフ性とは、ある 1 時刻の状態と、任意の 2 時刻間の確率的な推移の性質さえわかれば、その確率過程の確率的構造が完全にわかるという性質を指す。変位応答と速度応答のベクトルがマルコフ性を有するとき、変位応答と速度応答の結合確率密度関数は Fokker-Planck 方程式と呼ばれる偏微分方程式で支配される。この Fokker-Planck 方程式を解くことができれば、応答の確率密度関数を求めることができる。しかし、1 自由度非線形系を考えた時、定常応答の場合でさえ、対応する Fokker-Planck 方程式の厳密解が得られる非線形系のクラスは限られており [1, 2, 3]、過渡状態に至っては、著者の知る限り厳密解は存在しない。そのため、Galerkin 法 [4]、有限要素法 [5, 6]、Path Integration (PI) 法 [7, 8]、Exponential Polynomial Closure (EPC) 法 [9] などの、Fokker-Planck 方程式の非定常解を求めるための数値計算手法が開発されてきた。これらの手法は、様々な非線形系に対して一定の成果を上げてきたが、精度や計算コストの面で難点がある。具体的には、Galerkin 法は、解析精度が基底関数の選び方に大きく依存してしまう。有限要素法と PI 法は、精度の良い解を得るためには時間刻み幅を細かくする必要があるため、計算コストの面で難点がある。加えて、有限要素法の場合、応答の確率密度関数が負の値をとってしまうことがあり、これは確率密度関数の性質から考えると大きな問題となる。EPC 法では、応答の確率密度関数の形を、多項式を引数として持つ指数関数で仮定するが、精度の向上のためには多項式の次数を高くする必要がある。しかしながら、多項式の次数を高くすると計算の複雑さが著しく上昇する。以上のように、1 自由度非線形系の過渡応答の確率密度関数の近似解析は、依然として困難な問題である。

そのような中、確率密度関数のメルン変換として複素非整数次モーメント (complex fractional moment, CFM) という量が定義され、不規則振動解析の分野に導入された [10]。メルン変換とは、フーリエ変換やラプラス変換と同様の積分変換であり、逆メルン変換によって CFM からもとの確率密度関数を再現することができる。Di Paola は、ガウス性白色ノイズを受ける非線形 1 次系に対応する、1 次元 Fokker-Planck 方程式を CFM を利用して解く手法を開発し、

過渡状態と定常状態の両方の確率密度関数が裾部まで精度よく求まることを報告した [11].

Di Paola による提案手法は 1 次系を対象としたが、ガウス性白色ノイズを受ける 1 自由度非線形系の応答解析を CFM を用いて行うことを考えるとき、確率平均化法が大きな助けとなる。確率平均化法とは、系の減衰や非線形項、入力強度が小さく、不規則励振が広帯域励振である場合に、系の応答が準調和的と見なせることを利用して変数を削減し、振幅のみの方程式を導く手法である [12]。対象とする 1 自由度非線形系に確率平均化法が適用できる場合、対応する Fokker-Planck 方程式の次元を 2 次元から 1 次元に削減できることから、CFM を用いた応答解析と確率平均化法は相性が良い。そのため、これら 2 つを組み合わせ非線形減衰を有する不規則振動系の応答分布を求める研究も行われており、精度よく応答の確率密度関数を再現できることが報告されている [13, 14].

ガウス性非白色入力を受ける非線形系の入力パワースペクトルと定常応答の非ガウス性の関係

ガウス性白色ノイズはその自己相関関数がディラックのデルタ関数で表現され、無限のエネルギーを有する実世界には存在しない理想的な数学モデルである。そして、実際の励振現象のパワースペクトルは顕著な非白色性を示すため [15, 16, 17], ガウス性入力のパワースペクトルに非白色性を考慮した応答解析も多く行われている。入力の非白色性を考慮した場合、前述のマルコフ性の理論を適用することは一般的にはできないが、新たな変数を導入することで、マルコフ過程またはマルコフベクトルを導くことができる。例えば、先述の確率平均化法を用いることによって、応答振幅の支配方程式を導くことができる [18]。この応答振幅は近似的にマルコフ性を有するため、Fokker-Planck 方程式を導出することができる。また、非白色のノイズを白色ノイズを入力として持つフィルターの出力としてモデル化すると、フィルターを記述するための状態変数と系の変位応答と速度応答を併せてマルコフベクトルと見なすことができ、対応する Fokker-Planck 方程式を導出することができる [19]。Fokker-Planck 方程式の導出ができたならば、上述の EPC 法 [20] や Galerkin 法 [21], 有限要素法 [22] などを用いて応答の確率密度関数を求めることで、応答に現れる非ガウス性を捉えることができる。

また、ガウス性ノイズを受ける非線形系の応答解析として、応答モーメントの時間変化を支配するモーメント方程式を用いた手法も存在する。モーメント方程式は、入力の白色性・非白色性によらず利用できるという利点がある。確率密度関数と比較して、モーメントが有する情報は限定的ではあるが、それでもなお確率密度関数の非対称性を表す歪度や裾の重さを表す尖度といった応答の非ガウス性に関して重要な情報を得ることができる。また、4 次までのモーメントを用いて確率密度関数を表現する手法も存在する [12] ことから、不規則振動解析において広く用いられてきた。非線形系にガウス性入力に加わった場合のモーメント方程式は、一般に infinite hierarchy なものとなる。これは、 n 次のモーメントを求めるために n 次より高次のモーメントが必要となり、モーメント方程式が閉じない状態を指す。そのため、等価線形化法 [23, 24, 25] や cumulant neglect closure 法 [26] といった、モーメント方程式を閉じ、解析可能な形式とするための近似手法がいくつか提案されている。

上述のように、ガウス性非白色ノイズを受ける非線形系の応答解析については、多くの研究が行われている。そして、入力のパワースペクトル形状が定常応答の非ガウス性に与える影響について、様々な知見が得られている。例えば、Guo と Shi は、Duffing 系にガウス性非白色ノイズが加わった場合を考え、入力帯域幅によって定常応答の確率密度関数の幅が大きく変化するため、入力のモデル化における入力帯域幅の考慮の重要性を指摘した [20]。また、横山らは、非対称非線形項を含む 1 自由度非線形系にガウス性非白色ノイズが加わる場合を考え、入力パワースペクトルの卓越振動数の幅広い範囲の変化に対して、定常応答の非ガウス性が様々な遷移する様子を示した [25]。

1.2.2 非ガウス性不規則外部励振を受ける系の応答解析

現実の励振現象のなかには、走行中の自動車にかかる垂直方向の加速度 [27] や、強風に起因した風圧 [28], 浅瀬における海洋表面波 [29] など、顕著な非ガウス性を示す例が多く存在する。そのような励振を受ける系の応答を正確に評

価するためには、励振の非ガウス性を反映した入力モデルを考えることが必要となるが、不規則振動系に関する従来研究の多くは、その数学的な取り扱いのしやすさから、入力にガウス性を仮定したものが多かった。しかし、非ガウス確率過程のモデル化手法や解析手法の発展により、現在は非ガウス入力を受ける系の応答解析に関する研究も多く行われてきている。

ガウス確率過程は、2 次までの統計量、すなわち平均と自己相関関数またはパワースペクトルで完全に規定することができる。一方、非ガウス過程は、平均と自己相関関数だけでなく、任意の時刻間の結合確率密度関数によって規定される。しかし、現実の励振現象のモデルとして非ガウス過程を規定することを考えたとき、実データから任意の時刻間の結合確率密度関数を精度よく得る事は困難である。従って、実用上、非ガウス過程をモデル化する際は、いくつかの主要な統計量を選び、その性質を満たすように規定される。この統計量の選び方によって、ガウス過程に無記憶性の非線形変換を施すもの [30, 31]、自己回帰モデルを用いたもの [32]、Karhunen–Loeve 展開を用いた方法 [33]、スペクトル表現中のランダム位相に拘束条件を与える方法 [34]、非線形な確率微分方程式を用いる方法 [35, 36, 37, 38, 39] など、様々なモデル化手法が提案されている。

これらの非ガウス過程モデルを用いた、非ガウス入力を受ける系の応答解析も行われてきている [40, 41, 42]。その中でも、非ガウス入力のパワースペクトル形状が、定常応答の非ガウス性に与える影響について着目した例として、土田らの Cai and Lin モデルを用いた一連の研究が挙げられる。Cai and Lin モデルは、実現したいパワースペクトルと確率密度関数を独立に選ぶことができ、また、その実現したい統計量から非ガウス過程モデルを導く際に近似が含まれないため、高い精度で所望の非ガウス過程を生成することができる、という 2 点において優れた非ガウス入力のモデルである [36]。このモデルを入力として用いた 1 自由度不規則励振系の解析によって、系の周波数応答関数の帯域幅と比較して入力パワースペクトルの帯域幅が狭い場合と広い場合で、定常応答の確率密度関数に現れる入力の非ガウス性が大きく変化する。そして、その変化傾向は、入力の非ガウス過程の確率密度関数によらず同様である、という知見が得られている [43, 44, 45]。この知見から、非ガウス性不規則励振を受ける系の応答の非ガウス性の評価においても、入力のパワースペクトルに着目することが重要であると考えられる。

1.2.3 不規則な係数励振を含む系の応答解析

確定的な入力を対象にした振動解析において、係数励振の振動数がある値になると系が激しい振動状態になることが知られており、これをパラメトリック共振と呼ぶ。そして、パラメトリック共振が発生する系や入力のパラメータの条件について、多くの研究が行われてきた [46]。

不規則振動系の解析においても、パラメトリック共振の重要性は変わることなく、係数励振を含む系の安定性解析に関して多くの研究が行われてきた [47]。Roberts は、航行中の船舶のロール角方向の運動のモデルとして、剛性項にあたる復元モーメントの係数が時間によって不規則に変動する 1 自由度系に、不規則な外部励振が加わる系を考えた [48]。そして、ロール角の応答とその角速度で構成される相平面上の振幅にあたる変数を新たに導入し、確率平均化法を適用することで得られる応答振幅の Fokker-Planck 方程式を用いて応答解析を行った。解析の過程において、係数励振と外部励振のそれぞれの相関時間は、系の時定数と比較して十分短いものである、という仮定をおいた。また、解析過程において、係数励振と外部励振の間の相関性の影響は、無視できるとしている。線形な減衰特性を考えたとき、応答振幅の確率密度関数は解析的に求まり、その存在条件から、系が安定な条件を求めた。具体的には、系の不減衰固有角振動数の 2 倍にあたる周波数における、係数励振のパワースペクトルの値がある値以下であることが、系が安定となる条件であった。さらに、解析の結果から、外部励振は系の安定性には影響を与えないことが分かった。この結果自体は、Roberts 以前に Stratonovich と Romanovskii [49] および Ariaratnam と Tam の研究 [50] で得られた知見と一致するものであった。また、Roberts によると、高次の非線形要素を含む減衰特性を考えた場合、すべてのパラメータに対して応答は安定であることがわかった。これは、系の非線形な要素によって、系の安定性が向上する場合があるこ

とを示唆している。

Roberts は非白色ノイズ入力の場合を考えたが、解析の過程で確率平均化法を使用していることから、入力パワースペクトルとして考慮できる対象は、ホワイトノイズに近い極めて帯域幅の広い場合に限られる。一方、顕著な非白色性を考慮した安定性解析も行われている。ここでは、Floris によって行われた、係数励振の顕著な非白色性を考慮した、モーメント方程式と Cumulant neglect closure 法に基づいた 2 次のモーメントの漸近安定性解析とそこで得られた知見を紹介する [51]。Floris は、1 次の線形フィルター (Langevin 方程式) と 2 次の線形フィルター (1 自由度線形系) にガウシアンホワイトノイズ入力に加わった場合の出力として、非白色入力をモデル化した。1 次の線形フィルターの場合、非白色入力のパワースペクトルは直流成分にピークを持ち、そのピークの鋭さをパラメータによって変化する。2 次の線形フィルターの場合は、非白色入力の入力パワースペクトルは 1 つピークを持ち、その位置と帯域幅を自由に設定できる。1 次の線形フィルターの場合に対する解析より、非白色入力のピーク周りの帯域幅が狭くなると、系が安定となる入力強度が低下することが確認された。そして、2 次の線形フィルターの場合、入力パワースペクトルのピークの位置の変化に依存して、安定となる非白色入力の 2 次モーメントの閾値が大きく変化することが確認された。また、入力パワースペクトルが、系の不減衰固有角振動数の 2 倍の周波数でピークを有するとき、系が不安定になる入力の 2 次モーメントの閾値が最も小さくなる、つまり、不安定になりやすい系のパラメータの範囲が広いことがわかった。

次に、係数励振を含む系の応答解析について述べる。まず、1.2.1 項で述べたガウス性の外部励振の場合と同様に、係数励振についても、最も基本的なモデルはガウス性白色ノイズである。著者の知る限りでは、ガウス性白色ノイズで表現された係数励振を受ける系の応答の確率密度関数の解析に関して、係数励振に加えてそれと独立な外部励振も同時に受ける系の応答解析を対象にした研究が多い。その理由としては、このような同時励振系が、マリンライザーの振動 [52, 53] や、船舶のロール角方向の運動 [48]、ヘリコプターのブレードの運動 [47] といった現実の問題をよく表現できるモデルであることも挙げられるが、外部励振のガウス性ノイズの強度を 0 にすることで、係数励振のみが含まれる場合の応答解析となることもその一因だと考えられる。

この同時励振系は、係数励振項を除いて系が線形系で、不規則励振がガウス性ノイズであったとしても、応答は顕著な非ガウス性を示す [47]。同時励振系には 1.2.1 項で述べた Fokker-Planck 方程式の理論が適用できる場合がある。具体的には、ガウス性白色ノイズでモデル化される係数励振と外部励振を受ける系に対しては、Wong-Zakai の修正項 [54] を考慮することで、対応する Fokker-Planck 方程式を導くことができる。この Fokker-Planck 方程式は、最も基本的な例である 1 自由度線形系の固有角振動数に係数励振が含まれる場合でさえも、その厳密解は求まらない [47]。しかしながら、Fokker-Planck 方程式の導出が一度できれば、系が安定であるという仮定の下で、1.2.1 項で述べた Fokker-Planck 方程式の近似解析手法を用いて応答の確率密度関数を求めることができる [13, 14, 55]。なお、係数励振と外部励振を受ける系に特定の非線形項が含まれる場合は系が detailed balance [56] という特別なクラスになることを利用して、応答の確率密度関数の厳密解を求めることができる [57, 58]。

前述の通り、同時励振系に対する応答解析は多く行われてきたが、それらは近似解析手法の適用可能範囲の広さを示すために行われた意味合いが強く、係数励振に起因した応答の非ガウス性に関する考察はあまり行われていなかった。そのような中、Guo は 1 自由度線形系に、相関を有するガウス性白色ノイズでモデル化される係数励振と外部励振が同時に加わる場合を考え、そのとき、定常応答の確率密度関数に非対称性が現れることを明らかにした [59]。現実の励振現象では、係数励振と外部励振はその力の源が同一な場合があり、このような場合、これら 2 つの励振の独立性は必ずしも満たされない [60]。従って、2 つの励振の相関の導入は、従来研究で考慮していた独立な励振より、より実現象に近い状況を考えていると言える。そして、2 つの励振が独立である場合、この非対称性は現れないため、応答の非対称性は係数励振と外部励振が相関性を有する場合に特有の特徴である。係数励振と外部励振が相関性を有するガウス性白色ノイズの場合、応答に非対称性が現れるという興味深い知見については、その後、過渡状態や相関係数が応答の非対称性に与える影響の観点から詳細な調査が行われた [53, 61]。

係数励振のパワースペクトルがより実際の励振現象に近い非白色性を示す場合を考えると、その非白色性が定常応答の確率密度関数の非ガウス性に与える影響については、十分に明らかにはなっていない。外部励振も有する同時励振系に関しては、上述した Roberts の研究では、係数励振と外部励振が相関を有し非白色ノイズである場合を考慮し、安定性だけでなく定常状態の応答の確率密度関数や応答モーメントの解析も行われた。しかし、その中で考慮された非白色性はほぼ白色性に近い場合のみを対象とするものであった。Guo と Shi は、顕著な非白色性を示す係数励振と外部励振を受ける系に対して定常応答解析を行った [62]。その結果、入力パワースペクトルの形状によって、定常応答の確率密度関数の幅が変化することは確認されたが、考慮したパワースペクトルの種類は 2 種類のみであり、パワースペクトル形状の多様な変化に対して、応答の非ガウス性の知見を得るには十分であるとは言えない。1.2.1 項、1.2.2 項と本項では、応答の非ガウス性の原因は異なるが、先の 2 項では入力のパワースペクトルが応答の非ガウス性に大きな影響を与えることがわかっている。そのため、不規則な係数励振を受ける系の定常応答の非ガウス性も、入力のパワースペクトルによって大きな影響を受けると予想できる。従って、励振のパワースペクトル形状の変化に依存した応答の非ガウス性の変化については、さらなる調査が必要となる。

1.3 高次スペクトルの紹介とその活用例

前節では、先行研究で得られた、応答の非ガウス性に関する重要な知見を紹介した。次節で現状の課題を述べる前の準備として、高次スペクトルという量について述べる。確率過程の各周波数成分を考えたとき、それぞれが独立な場合、その確率過程はガウス過程である。逆に言えば、異なる周波数成分の間に依存関係が存在するとき、その確率過程は非ガウス過程となる。これに関して、パワースペクトルは各周波数の複素振幅の絶対値の 2 乗の期待値であり、異なる周波数成分間の関係についての情報は含まないため、非ガウス性の情報は含まないと言える。一方、確率過程に非ガウス性を生じさせる周波数成分間の関係性・依存性を表す量として、パワースペクトルを拡張した高次スペクトルが存在する。

1962 年に Hasselmann らは、砕波やサーフビートといった、統計的に独立な波の重ね合わせでは表現できない表面波の非線形な現象を解析するために、3 次の相関関数の 2 重フーリエ変換として定義したバイスペクトルを導入した [63]。その後、Brillinger によって、バイスペクトルを含んだ高次のスペクトルについて数学的な定義や性質が整備された [64]。それ以降は、内部波 [65] の解析や、1 自由度系の非線形性の推定 [66, 67]、3 相モータや歯車といった機械構造物に含まれる回転要素の状態モニタリング [68, 69]、脳波を用いた麻酔震度を表す指標の算出 [70]、定常非ガウス過程のモデル化 [71, 72] など、幅広い分野で高次スペクトルの応用について研究されている。

高次スペクトルに関する先行研究の中で、Elgar と Guza は、顕著な非対称性を示す浅瀬における波高と、観測データから求めたバイスペクトルを対応させ、波高の非対称性という現実で見られている非ガウスな現象が周波数成分のどのような依存関係に由来しているかを説明した [29]。また、Lutes と Chen は、振幅がランダムなパルス列を入力として持つバイリニア型ヒステリシスを含む系の応答に対して、高次スペクトルのひとつであるトライスペクトルを求め、応答のトライスペクトルの顕著なピークと応答の非ガウス性がおおよそ対応していることを示した [73]。この考え方を非ガウス性の応答を示す不規則励振系に適用すれば、応答の高次スペクトルを求め、そのピークに注目することで、応答に現れる非ガウス性が応答のどのような周波数成分間の依存関係に由来するか明らかにすることができると予想される。

ここまでは、1 つの確率過程に対する周波数領域上の量を考えていたが、2 つの確率過程によって定義されるものも存在する。その 2 つの確率過程がある系に関して入出力関係にある場合、クロススペクトルの絶対値は入力と応答の各周波数成分の相関の強さを示す指標となる。しかし、クロススペクトルは 2 次の統計量であるため、非ガウス性の入出力関係に関する情報は有していない。これに関して、入出力信号間の非線形（非ガウス）な関係を示す、クロススペクトルを拡張した量である高次のクロススペクトルが存在し、信号の伝播に伴う時間遅れの推定 [74] や、（オート）バイ

スペクトルと同じく非線形性の推定 [66, 67] などに有効に用いられてきた。入力为非ガウスで系が線形系の場合、応答の非ガウス性は入力为非ガウス性のみに起因する。そのため、入力と出力の非ガウスな関係を表した高次のクロススペクトルは、入力为非ガウス性が、入力と応答のどの周波数成分の依存性により応答に伝達・増幅されるかを可視化する量となる。

応答に非ガウス性が現れる場合、同じ分散や平均を持つガウス性の応答よりも、大きな応答を示す確率が大きくなる場合がある。これを考慮すると、高次スペクトルや高次のクロススペクトルを通して、応答に非ガウス性をもたらす周波数成分や応答への非ガウス性の伝達・増幅の構造が明らかになれば、構造物の応答に現れる非ガウス性を抑制する設計手法の開発などを通して、構造物の安全性の向上に寄与できると期待できる。

1.4 不規則振動系の応答解析における現状の課題とそれに対して期待できる高次スペクトルを用いた解決策

ここまで、1 自由度不規則励振系の応答解析に関する従来研究を、その応答の非ガウス性の由来に着目して分類しながら紹介した。また、その後、パワースペクトルを拡張した量である高次スペクトルの利点について、先行研究を交えて紹介した。この節では、以上を基にして、現状の課題について述べる。

(i) 応答の非ガウス性が系の非線形要素に由来する場合

1.2.1 項では、応答の非ガウス性が系に含まれる非線形要素に由来する場合について、従来研究の成果を 2 つの観点から述べた。1 つめのガウス性白色ノイズを受ける非線形系の過渡応答解析に関しては、CFM を用いた手法の拡張が課題として挙げられる。現実の構造物は、大きな変位応答に対しては非線形な復元力特性を示す例が多い。このような剛性の非線形性は、大きな応答を示す確率、つまり応答の確率密度関数の裾部に大きな影響を及ぼす。そのため、非線形剛性を考慮した応答解析は重要である。先行研究 [13, 14] から、CFM を用いた過渡応答解析の有効性が示されたが、非線形剛性項を有する系に対する CFM を用いた応答解析手法の開発はまだ行われていない。よって、ガウス性白色ノイズを受ける非線形剛性項を含む 1 自由度非線形系の CFM を用いた過渡応答解析手法の開発が、(i) の場合における課題として挙げられる。

2 つめの観点である、励振のガウス性非白色ノイズのパワースペクトルと応答の非ガウス性の関係については、多くの知見が得られている [20, 25]。この得られた知見に対して説明を与えることが重要であるが、パワースペクトルのみに着目して応答の非ガウス性の変化に説明を与えることは困難である。事実、1.2.1 項で紹介した先行研究でも、その得られた変化傾向に対しては、部分的な説明に留まっている。

一方、応答の高次スペクトルを見れば、応答に現れる非ガウス性が応答のどのような周波数成分間の依存関係に由来するか明らかにすることができると予想される。これに加えて、入力のパワースペクトルの変化に依存した応答の高次スペクトルの変化を見ることができれば、入力のパワースペクトルの変化に依存した応答の非ガウス性の変化に対して、応答の高次スペクトルを介して説明を与えることができると期待できる。

ここで、不規則入力を受ける 1 自由度非線形系の応答バースペクトルについては、その特徴についての報告がある [67] ほか、ガウス性入力を受ける 1 自由度非線形系の応答のバースペクトル・トライスペクトルの近似解析については、Volterra 級数展開を用いた手法が提案されている [75, 76]。そのため、応答の高次スペクトルを介した、入力のパワースペクトルの変化に対する応答の非ガウス性の変化への説明という点では、一定の成果が得られていると言うことができる。従って、本研究では、2 つめの観点である入力パワースペクトルと応答の非ガウス性の関係について、この (i) の場合については考える対象としないこととする。

(ii) 応答の非ガウス性が不規則入力非ガウス性に由来する場合

次に、応答の非ガウス性が入力非ガウス性に由来する場合、非ガウス入力に Cai and Lin モデルでモデル化されるとき、入力のパワースペクトルと応答の非ガウス性の関係については、多くの知見が得られている [43, 44, 45]. Cai and Lin モデルは、直流成分が卓越するパワースペクトルと、任意の確率密度関数で非ガウス過程を規定するモデル化手法であり、工学的に重要な幅広い非ガウス入力を表現することができる。先述の先行研究では、入力の Cai and Lin モデルに含まれる、パワースペクトルの帯域幅を支配する帯域幅パラメータと、非ガウス確率密度関数の 2 つを様々に変化させて、応答の確率密度関数の特性が調べられた。先行研究を通して、与えた入力の確率密度関数の形状が同じであっても、帯域幅パラメータの大きさの違いによって、応答の確率密度関数に現れる入力非ガウス性の影響の度合いが大きく変化することが確認された。また、このような帯域幅パラメータに依存した入力非ガウス性の影響の変化は、入力の確率密度関数によらず共通することが確認された。よって、入力非ガウス性が応答の確率密度関数に与える影響には、帯域幅パラメータによって特徴づけられる入力の周波数領域における性質が大きく関わっていると予想できる。この点に関して、先行研究では、入力のパワースペクトルの形状やそれに対応する入力波形の特徴から考察が行われた。しかし、2 次の統計量であるパワースペクトルには非ガウス性に関する情報は含まれていないため、入力非ガウス性の情報が周波数領域ではどのように分布するのか、その非ガウス性の情報の分布が入力の帯域幅パラメータの変化に対してどのような変化をするのか、また、その入力非ガウス性の情報がどのように応答に伝達され、応答の確率密度関数に現れるのか、といった周波数領域における非ガウス性の入出力関係の構造については、線形系が対象の場合でさえ、いまだ十分に明らかとなっていない。

そのため、新たに Cai and Lin モデルの場合の入力非ガウス性の周波数領域における性質と、その入力非ガウス性がどのように応答に伝わるかといった点の調査が必要である。Cai and Lin モデルの非ガウス性の情報が周波数領域でどのように分布しているのか、という点については、このモデルに対する高次スペクトルを求めることで明らかにすることができる。また、高次のクロススペクトルを求めることで、入力非ガウス性の応答への伝達構造を可視化できると期待できる。

(iii) 応答の非ガウス性が不規則な係数励振に由来する場合

先述の通り、係数励振と外部励振を同時に受ける不規則励振系において、より実際の励振現象に近い場合を考えたいとき、2 つの励振の非白色性と相関性を同時に考慮する必要がある。一方、これまでは、非白色性が独立性か、片方のみを考慮してきた例がほとんどであった [53, 59, 61, 62]. 係数励振と外部励振の相関性と非白色性の両方を考慮した例もあるが [48, 60], これらの研究内で使用しているパワースペクトル形状は、ホワイトノイズに近い広帯域なものに限定している、狭帯域の場合であってもピークの位置が数通りしか考慮されていない、など限定的であった。そのため、相関を有し非白色な係数励振と外部励振を同時に受ける系の応答の確率密度関数がどのような非ガウス性を表すのか、また、入力のパワースペクトル形状がその非ガウス性にどのような影響を与えるのかという点はほとんど明らかになっていない。対象とする系が異なるが、ガウス性非白色ノイズを受ける非対称非線形系の応答の非ガウス性が、入力パワースペクトル形状に依存して大きく変化すること [25] を考慮すると、詳細な調査が必要であると考えられる。

また、入力パワースペクトル形状に依存して応答の非ガウス性が大きく変化するとわかった場合は、その変化がなぜ起きるのかといった点について説明を与える必要がある。ここで、この (iii) の場合においても、応答の高次スペクトルを見ることで、どのような周波数成分の依存関係に由来して、応答に非ガウス性が生じるのかを考察することができる。

応答の高次スペクトルから応答の確率密度関数の非ガウス性を考察するのみでは、入力のパワースペクトル形状に依存した応答の非ガウス性の変化に対して説明を与えるには不十分であり、入力のパワースペクトルと応答の高次スペク

トルの関係を明らかにする必要がある。しかし、一般的に、応答の高次スペクトルの厳密解は得られないため、近似解析手法を用いて、入力のパワースペクトルが含まれた形の応答の高次スペクトルの解析的な表現を求める必要がある。(i) の系の非線形性に応答の非ガウス性が由来する場合は、Volterra 級数展開を用いた手法などが開発されている。しかし、この (iii) で考えたい同時励振系には、そのような入力のパワースペクトルと応答の高次スペクトルの関係を明らかにする近似解析手法は、いまだ提案されていない。そのため、入力のパワースペクトルと応答の非ガウス性の対応関係が得られたとしても、なぜその入力のパワースペクトルに対して応答の高次スペクトルはその形状をとるのか、といった点に対して考察は十分にはできないと予想できる。よって、入力の非白色性と相関性の両方を考慮した、同時励振系の応答の高次スペクトルの解析手法の開発も必要となる。

1.5 本研究の目的と概要

不規則励振系の応答が非ガウス性を示すとき、その原因は主に 3 種類に大別することができる。すなわち、(i) 系が非線形性を有している場合。(ii) 入力为非ガウス性を有している場合。(iii) 不規則な励振が係数励振の形で加わる場合である。1.4 節で述べた通り、(i) に対しては、ガウス性白色ノイズを受ける、非線形剛性項を含む 1 自由度非線形系の CFM を用いた過渡応答解析手法の開発が、課題として挙げられる。(ii) と (iii) においては、1.4 節で述べた通り、入力の周波数領域における性質と定常応答の非ガウス性の関係について、取り組むべき課題が残されている。(ii) と (iii) においては、応答の非ガウス性のなかでも、応答の確率密度関数の非対称性に注目する。応答の確率密度関数の非対称性、特に裾部に現れる非対称性を見落としてしまうと、正の応答に対しては大きな応答を示す確率を過小評価し、負の応答に対しては過大評価してしまう（またはその逆）といった状況になってしまう。これは、平均閾値通過率や初通過時間の平均といった指標に対して誤った結果を与えてしまい、結果として設計段階において構造物の安全性を損なう恐れがある。そのため、不規則励振系の応答確率密度関数の非対称性の解明は重要であり、本研究でも、この非対称性に注目することとする。また、高次スペクトルの中でも、確率過程の非対称性の周波数領域における分布を表すパワースペクトルを用いて、解析・考察を行う。以降、本論文の構成と、各章における目的と概要を述べる。

第 2 章: 複素非整数次モーメントを用いた剛性と減衰に非線形性を持つ不規則励振系の過渡応答解析

ガウス性白色ノイズを受ける 1 自由度非線形系の応答解析の手法として、CFM を用いた手法が有効であることが先行研究から示された [13, 14]。しかしながら、これらの先行研究では、実際の構造物でよく見られる、非線形な復元力を含む系に対して適用できないという問題点がある。そこで本章では、減衰項と剛性項の両方に非線形性を有する 1 自由度非線形系に、ガウス性白色ノイズが加わる場合を考え、CFM を用いた過渡応答の確率密度関数の近似解析手法を提案する。

まず、等価線形化法を適用することで、非線形剛性の影響を考慮した等価固有角振動数を求める。この等価固有角振動数を用いることで、確率平均化法から、応答振幅の確率密度関数を支配する Fokker-Planck 方程式を導く。この Fokker-Planck 方程式をメルン変換することで、応答振幅の CFM の支配方程式を導出する。そして、導出した CFM の支配方程式から得られた応答振幅の CFM に逆メルン変換を施すことで、過渡応答の確率密度関数を求める。提案手法の有効性は、モンテカルロシミュレーション解と提案手法による近似解析解を比較することで確認する。3 種類の性質の全く異なる非線形系を数値計算例として考え、確率密度関数を裾部まで正確に求めることができること、確率密度関数の幅や峰の数に現れる非ガウス性を正確に捉えることができることを示す。

第 3 章: バイスpekトルの定義と諸性質

第 4 章以降では、高次pekトル、特にバイspekトルが重要な役割を担う。Brillinger によってバイspekトルを含んだ高次pekトルの整備が行われてから半世紀近くが経過しているが、機械工学、とりわけ不規則振動系の研究においては、十分に広く知られているとは言えない。そこで本章では、高次pekトル及びバイspekトルについて紹介する。

第 4 章: バイスpekトルに着目した非ガウス性励振が応答の非対称性に与える影響の考察

本章では、応答の非対称性が、入力为非ガウス性に起因する場合に注目する。具体的には、非ガウス確率過程モデルのひとつである Cai and Lin モデルによる非対称非ガウス性不規則励振を入力として持つ線形系の定常応答を考え、Cai and Lin モデル中の帯域幅パラメータが、変位応答と速度応答の非対称性に与える影響について考察する。先行研究 [43, 77, 45] では、Cai and Lin モデルを入力として持つ 1 自由度系の応答特性の調査が行われた。先行研究を通して、与えた入力の確率密度関数の形状が同じであっても、帯域幅パラメータの大きさの違いによって、定常応答の確率密度関数に現れる入力の非ガウス性の影響の度合いが大きく変化することが確認された。また、このような帯域幅パラメータに依存した入力の非ガウス性の影響の変化は、入力の確率密度関数によらず共通することが確認された。よって、入力の非ガウス性が応答の確率密度関数に与える影響には、帯域幅パラメータによって特徴づけられる入力の周波数領域における性質が大きく関わっていると予想できる。しかし、1.4 節の (ii) で述べた通り、従来のパワースpekトルをもとにした考察では十分に明らかになっていない点も多い。

そこで本研究では、バイspekトル及びクロスバイspekトルに着目して、入力の非ガウス性が周波数領域上でどのように分布し、応答にどのように伝わり、結果として入力の非ガウス性が応答の確率密度関数にどのように現れるか調べる。最初に、Cai and Lin モデルに対して、バイspekトルの解析解を導出する。この解析解に基づいて、モデルの帯域幅パラメータを変化させながら、このモデルの非ガウス性の周波数領域上における特性を示す。そして、Cai and Lin モデルのバイspekトルと線形系の周波数応答関数から、入力と応答のクロスバイspekトルが求まる。これを用いて、入力の非ガウス性がどの周波数成分により応答に伝達・増幅されるか、またはされないかという点を調査し、先行研究 [43, 77, 45] で確認された帯域幅パラメータの値と、応答の確率密度関数の形状との関係を、高次pekトルの観点から明らかにする。

第 5 章から第 7 章では、1 自由度系に相関性を有するガウス性の係数励振と外部励振が加わる場合を考え、そのパワースpekトルやクロスpekトル、相関係数が応答の非対称性に与える影響について考察する。ここで、今回考える、係数励振と外部励振が相関を有する同時励振系の応答の非ガウス性は、定常状態でさえその性質は明らかになっていない。そのため、定常状態を対象に調査する。また、1 自由度系に一般的な相関性を有するガウス性非白色係数励振と外部励振が加わる例を考えたい場合、2 つの励振の相関性は様々な場合を考慮する必要がある。しかし、相関性として最も単純な場合である 2 つの励振が同一である場合でさえも、そのときの応答の性質が未知である。そのため、第 5 章ではまず、係数励振と外部励振が同一のガウス性非白色ノイズで与えられる場合を考える。後に、第 6 章では、第 7 章で行う研究を念頭に、2 つの励振の相関が任意のクロスpekトルで与えられる場合を考え、応答のバイspekトルの近似解析手法を提案する。そして、第 7 章では、係数励振と外部励振の相関係数に注目し、この相関係数が応答の歪度に与える影響を調査する。第 7 章の目的は、第 5 章で考える場合と先行研究で対象となった独立な場合の間の、より広い相関係数を持つ入力に対する応答の非対称性の性質を求めることにある。各章の詳細は次の通り。

第 5 章: 同一な非白色ノイズによる係数・外部同時励振下の系の応答非対称性のバイスペクトル解析

本章では、係数励振と外部励振が同一の場合を考え、これらのパワースペクトルの卓越振動数と帯域幅が応答の確率密度関数の非対称性に与える影響を、バイスペクトルを用いて調査する。まず、モンテカルロシミュレーションによって、入力パワースペクトルの卓越振動数の位置や帯域幅によって、応答に現れる非対称性が、複雑に大きく変化することを示す。その後、応答のバイスペクトルの近似解析解を、摂動法によって求める。近似解析解の精度は、モンテカルロシミュレーションによって求めた応答のバイスペクトルと比較することで確認する。そして、近似解析解を用いて図示した応答のバイスペクトルと応答の確率密度関数を対応させ、バイスペクトルのピークの位置や符号、大きさから、シミュレーションによって得られた応答の非対称性の変化を考察する。また、応答の確率密度関数の非対称性の向きに大きな影響を与える、応答のバイスペクトルの符号について、依存関係にある 3 周波数成分の位相の関係に着目して考察する。

第 6 章: 任意のクロススペクトルを考慮した係数・外部同時励振系の応答バイスペクトル解析

第 5 章では、係数励振と外部励振が同一の場合を考えたが、現実の励振現象はより多様な相関を有する。そこで、2 つの励振が同一な場合と独立な場合の間の状況を考えたい。そこで本章では、任意のパワースペクトルとクロススペクトルを有する係数励振と外部励振に対して、摂動法を用いた近似解析手法を提案する。この解析に際して、2 つの励振の相関性を考慮して、励振のフーリエ級数展開表示をする。この近似解析解によって、第 7 章では 2 つの励振が同一な場合と独立な場合の間の、一般の相関係数を持つ状況における応答の非対称性に与える影響を調査することが可能となる。性質の大きく異なる 3 種類の励振に対して、モンテカルロシミュレーションによって求めた応答のバイスペクトルと比較することで提案手法による近似解析解の精度を確認する。

第 7 章: 係数励振と外部励振の相関係数が応答歪度に与える影響の調査

本章では、第 5 章で得られた係数励振と外部励振が同一の場合と、応答に非対称性が現れない 2 つの励振が独立な場合の間の状況を調査するために、非白色な係数励振と外部励振の相関係数に着目する。具体的には、係数励振と外部励振として、2 つの励振のパワースペクトルは同一で、クロススペクトルはパワースペクトルに相関係数をかけたものと考え、相関係数が応答の確率密度関数の非対称性に与える影響を調査する。相関係数は -1 から 1 の間の実数を取り、この入力モデルは、相関係数が 0 の場合は係数励振と外部励振が独立な場合に相当する。また、相関係数が 1 の場合は、第 5 章で考えた、2 つの励振が同一な場合に相当する。前章で求めた、係数励振と外部励振が任意のクロススペクトルを有する場合の近似解析手法を用いて、クロススペクトルが係数励振に比例する場合の応答のバイスペクトルの近似解析解と、応答歪度の近似解析解を求める。そして、具体的な数値計算例において、モンテカルロシミュレーションによって求めた応答バイスペクトルと応答歪度と比較することで、近似解析解の有効性を確認する。そして、近似解析解を用いて、応答の歪度が相関係数に対してほぼ線形に変化すること、さらに、その変化の傾きは、第 5 章で考える 2 つの励振が同一の場合の応答歪度とほぼ等しい事、そして、その傾きは入力パワースペクトルの卓越振動数や帯域幅によって複雑に変化することを示す。

第 2 章

複素非整数次モーメントを用いた剛性と減衰に非線形性を持つ不規則励振系の過渡応答解析

2.1 緒言

本章では、減衰項と剛性項の両方に非線形性を有する 1 自由度非線形系にガウス性白色ノイズが加わった場合を対象に、複素非整数次モーメント (CFM) を用いた過渡状態の確率密度関数を求める手法を提案する。先行研究 [11, 13, 14] では、CFM を用いた近似解析手法が提案され、この手法によって過渡応答の確率密度関数が精度よく求まることが報告された。しかし、これらの先行研究による提案手法の適用範囲は、減衰項にのみ非線形性が存在する系に限定されている。一方、現実の構造物の中には、大きな変位応答に対しては非線形な復元力特性を示す例が多く存在する。そのため、剛性項に非線形性を有する系に適用できる CFM を用いた近似解析手法の開発が必要となる。

先行研究 [13, 14] から、CFM を用いて 1 自由度系の応答解析を行う場合は、確率平均化法 [18] を用いた次元削減が有効であることがわかっている。確率平均化法を適用する場合、応答は調和振動に近いふるまいをするとして、解の形を仮定する。この際、振動数を定める必要がある。しかし、剛性項に非線形性が含まれる場合、一般に応答の振動数はその振幅に依存してしまうため、振動数を定めることができない。そこで本研究では、等価線形化法を組み合わせ、非線形剛性の影響を考慮した等価的な固有角振動数を導入することでこの問題を解決する。

まず、1 自由度非線形系に等価線形化法を適用することで、非線形剛性の影響を考慮した等価固有角振動数を求める。そして、この等価固有角振動数を用いることで、確率平均化法から、応答振幅の確率密度関数を支配する Fokker-Planck 方程式を得る。この Fokker-Planck 方程式をメルン変換することで、応答振幅の CFM の支配方程式を導出する。この CFM の支配方程式は、線形連立常微分方程式なので、容易に解くことができる。そして、得られた応答振幅の CFM に逆メルン変換を施すことで、過渡応答の確率密度関数を求める。提案手法の有効性を示すために、性質の大きく異なる 3 種類の非線形系に対して、モンテカルロシミュレーション解と提案手法の近似解析解の比較を行う。

2.2 メルン変換と複素非整数次モーメント

Di Paola らにより、複素非整数次モーメント CFM は確率密度関数のメルン変換として定義された [10]。本節ではメルン変換の概要と CFM の重要な特徴を紹介する。

2.2.1 メリン変換

$f(x)$ を $0 \leq x < \infty$ で定義された関数とすると, $f(x)$ のメリン変換 $M_f(\gamma - 1)$ は次のように定義される [11].

$$\mathcal{M}\{f(x); \gamma\} = M_f(\gamma - 1) = \int_0^\infty x^{\gamma-1} f(x) dx; \quad \gamma = \rho + i\eta \quad (2.1)$$

ここで, $i = \sqrt{-1}$, $\rho, \eta \in \mathbb{R}$ である. f に対して M_f が存在するとき, 逆メリン変換は次のように定義される.

$$f(x) = \mathcal{M}^{-1}\{M_f(\gamma - 1); x\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty M_f(\gamma - 1) x^{-\gamma} d\eta; \quad x > 0 \quad (2.2)$$

メリン変換と逆メリン変換の存在条件は, ρ が

$$\begin{cases} -p < \rho < -q \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \mathcal{O}(x^p), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \mathcal{O}(x^q) \end{cases} \quad (2.3)$$

を満たすことである. ここで $\mathcal{O}(\cdot)$ はランダウの記号である.

式 (2.3) を満たすような ρ の領域のことを fundamental strip(FS) と言う. 例えば, $f(x) = 1/(1+x)$ の場合, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = \mathcal{O}(x^0)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1/x = \mathcal{O}(x^{-1})$ なので, FS は $0 < \rho < 1$ となる.

2.2.2 複素非整数次モーメントと離散逆メリン変換

非負の値をとる確率変数 A の n 次モーメント $E[A^n] (n \in \mathbb{N})$ は, A の確率密度関数 $p_A(a)$ を用いて次の式で定義される.

$$E[A^n] = \int_0^\infty a^n p_A(a) da \quad (2.4)$$

$E[\cdot]$ は期待値を表している. n を複素数 $\gamma - 1$ で置き換えると複素非整数次のモーメント CFM が得られ, CFM は確率密度関数 $p_A(a)$ のメリン変換であることがわかる.

$$E[A^{\gamma-1}] = \int_0^\infty a^{\gamma-1} p_A(a) da = M_p(\gamma - 1) \quad (2.5)$$

CFM は確率密度関数のメリン変換なので, CFM に逆メリン変換を施すことによって元の確率密度関数 $p_A(a)$ を再現できる.

$$p_A(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty M_p(\gamma - 1) a^{-\gamma} d\eta \quad (2.6)$$

式 (2.6) の計算は, 虚軸 η に平行に行われ, CFM の次数の実部 ρ が FS 内にある限り, その選び方によらず一意に決まる.

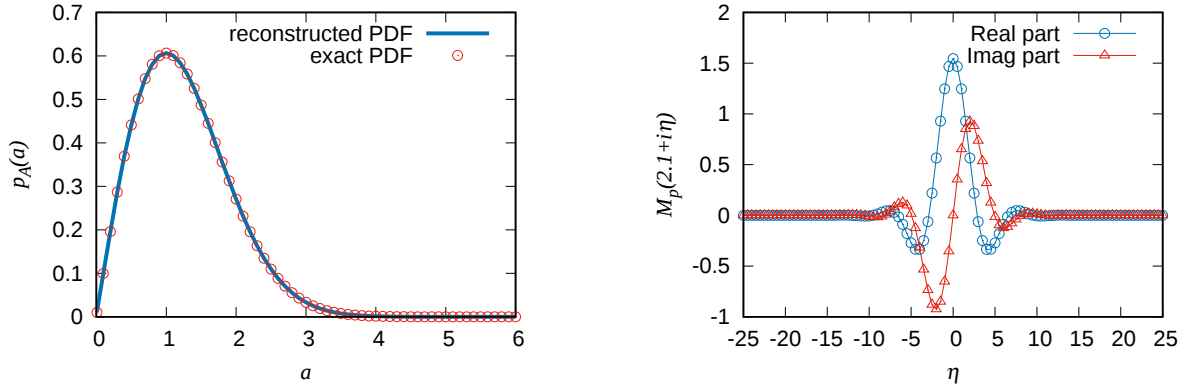
数値的に逆メリン変換を行う際には, 式 (2.6) を次のように離散化する.

$$p_A(a) = \frac{1}{2b} \sum_{k=-m}^m M_p(\gamma_k - 1) a^{-\gamma_k}; \quad a > 0, \quad \gamma_k = \rho + ik\Delta\eta, \quad b = \frac{\pi}{\Delta\eta} \quad (2.7)$$

ここで, $\Delta\eta$ は γ の虚部 η の刻み幅である. m は考慮する η の最大値 $\bar{\eta}$ を決定するパラメータで, $\bar{\eta} = m\Delta\eta$ である.

CFM の例として, パラメータ σ を持つ Rayleigh 分布 $p_A(a)$ とその CFM $M_p(\gamma - 1)$ は次の式であらわされる.

$$p_A(a) = \frac{a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2}{\sigma^2}\right) \quad (2.8)$$



(a) Rayleigh 分布の確率密度関数 (—: CFM より再現した確率密度関数, ○: 式 (2.8) をプロットした確率密度関数) (b) 式 (2.9) より計算した Rayleigh 分布の CFM (○: 実部, △: 虚部)

図 2.1 $\rho = 2.1, \Delta\eta = 0.5, m = 50$ の時の $\sigma = 1$ の Rayleigh 分布の CFM と、式 (2.7) を用いて再現された確率密度関数

$$M_p(\gamma - 1) = (2\sigma^2)^{\frac{\gamma-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \quad (2.9)$$

図 2.1 は Rayleigh 分布の CFM およびそれに式 (2.7) を施して得られた確率密度関数を表している. 図 2.1(a) より, CFM に離散逆メリン変換を施すことで確率密度関数をよく再現できていることが確認できる. また, 図 2.1(b) のように, 一般に CFM の大きさ $|M_p|$ はその次数の虚部 η が $|\eta| \rightarrow \infty$ で $|M_p| \rightarrow 0$ となる. したがって, $\bar{\eta}$ を十分大きく取ることによって, 逆メリン変換を離散化する際に高次の CFM を打ち切った影響は無視できる.

2.3 問題設定と応答振幅の Fokker-Planck 方程式の導出

2.3.1 運動方程式

次式で表される, 不規則励振を受ける 1 自由度非線形系の応答を考える.

$$\ddot{X} + \varepsilon h(X, \dot{X}) + \omega_0^2 X + \varepsilon \omega_0^2 g(X) = \sqrt{\varepsilon} W(t), \quad X(0) = \dot{X}(0) = 0 \quad (2.10)$$

ここで, 式中の X は変位応答, $\dot{\cdot}$ は時刻 t についての微分を表す. ω_0 は $\varepsilon = 0$ のときの固有角振動数であり, $h(X, \dot{X})$ は非線形減衰項, $g(X)$ は非線形剛性項である. $W(t)$ は, 平均 0 でスペクトル密度 S_0 のガウス性白色ノイズである. ε は, 系の減衰の強さと非線形性の強さ, 入力強度を支配するパラメータである.

非線形減衰項 $h(X, \dot{X})$ としては, X と $\dot{X}$ の多項式で表現でき, かつ $\dot{X}$ の次数が奇数である次のような場合を考える.

$$h(X, \dot{X}) = \sum_i c_i X^{n_i} \dot{X}^{2m_i+1}, \quad n_i, m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (2.11)$$

ここで, 式中の c_i は確定的な係数, $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は 0 以上の整数を表す. また, 非線形剛性項 $g(X)$ についても, X の多項式で書ける場合を考える. 機械構造物の非線形減衰・剛性を変位や速度の多項式で表現することは多くあり, また, テイラー展開をすることで, 幅広い非線形関数を同様の多項式に帰着することができる. そのため, 非線形減衰と非線形剛性に関する上述の多項式表現は, 広いクラスの問題に対応していると言える.

2.3.2 等価線形化運動方程式

運動方程式 (2.10) において、 $|\varepsilon| \ll 1$ である場合を考える。このもとでは、応答は調和振動に近いふるまいをすることが考えられる。従って、時間 t に対して徐変化する新たな変数、振幅 $A(t)$ と位相 $\Phi(t)$ を導入することによって、運動方程式 (2.10) の解を次のように仮定できる。

$$\begin{aligned} X &= A \cos(\omega_e(A)t + \Phi) \\ \dot{X} &= -A\omega_e(A) \sin(\omega_e(A)t + \Phi) \end{aligned} \quad (2.12)$$

式中の $\omega_e(A)$ は非線形項の影響を考慮した角振動数である。その値は一般に応答振幅に依存し、 $\varepsilon = 0$ のときの固有角振動数 ω_0 とは異なる値を示す。確率平均化法を適用するためには、適切な $\omega_e(A)$ を定める必要がある。そのために本研究では、等価線形化法を採用する。

等価線形化法では、非線形な運動方程式 (2.10) を、次式で表される等価線形系で置き換えて考える。

$$\ddot{X} + \varepsilon\beta_e(A)\dot{X} + \omega_e^2(A)X = \sqrt{\varepsilon}W(t) \quad (2.13)$$

ここで、 $\beta_e(A)$ は等価減衰係数、 $\omega_e(A)$ は等価固有角振動数である。 $\beta_e(A)$ と $\omega_e(A)$ は、元の系の運動方程式 (2.10) と等価線形系の式 (2.13) の 2 乗平均誤差が最小になるように、次のように決定される [78, 79]。

$$\omega_e^2(A) = \omega_0^2 \left\{ 1 + \varepsilon \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} g(A \cos \Psi) \cos \Psi d\Psi \right\} \quad (2.14)$$

$$\beta_e(A) = -\frac{1}{\pi\omega_e(A)A} \int_0^{2\pi} h(A \cos \Psi, -A\omega_e(A) \sin \Psi) \sin \Psi d\Psi \quad (2.15)$$

上式を導出する際、 $A(t)$ と $\Phi(t)$ は t に対して徐変化することから、1 周期 $T = 2\pi/\omega_e(A)$ の間のそれらの変化はゆるやかであり、一定とみなせることと、非線形減衰 $h(X, \dot{X})$ が式 (2.11) の形で与えられることを用いた。

2.3.3 確率平均化法

式 (2.12) と式 (2.13) より、 $A(t)$ の時間発展の方程式は次のように書ける [12]。

$$\dot{A} = -\varepsilon\beta_e(A)A \sin^2(\omega_e(A)t + \Phi) - \sqrt{\varepsilon} \frac{\sin(\omega_e(A)t + \Phi)}{\omega_e(A)} W(t) \quad (2.16)$$

応答振幅 $A(t)$ の支配方程式 (2.16) には $\Phi(t)$ も含まれているため、振幅 $A(t)$ のみについて解くことはできない。ここで、確率平均化法 [12] を用いることで、位相 $\Phi(t)$ と非連成になった振幅 $A(t)$ の支配方程式が、次のように求まる。

$$\dot{A} = -\frac{\varepsilon\beta_e(A)A}{2} + \frac{\varepsilon\pi S_0}{2A\omega_e^2(A)} + \sqrt{\frac{\varepsilon\pi S_0}{\omega_e^2(A)}} \eta(t) \quad (2.17)$$

ここで、 $\eta(t)$ は平均 0 で強度 1 の白色確率過程である。

ここで、確率平均化法を適用するにあたり、パラメータ ε の大きさについて述べる。先行研究 [78, 79] では、等価線形化法と確率平均化法を組み合わせ、定常応答の確率密度関数および過渡応答の平均・分散を求め、 ε が 0.1 より小さい場合それらが正確に求まることが示された。そのため、等価線形化法と確率平均化法を組み合わせた場合は、 $\varepsilon < 0.1$ の範囲ではこれらの近似は良く機能すると予想できる。

2.3.4 Fokker-Planck 方程式

式 (2.17) は Stratonovich の意味での確率微分方程式である．Wong-Zakai の修正項 [54] を考慮すると，振幅 $A(t)$ についての伊藤の確率微分方程式を次のように得る．

$$dA = \left\{ -\frac{\varepsilon\beta_e(A)A}{2} + \frac{\varepsilon\pi S_0}{2A\omega_e^2(A)} + \frac{\varepsilon\pi S_0}{4} \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{1}{\omega_e^2(A)} \right) \right\} dt + \sqrt{\frac{\varepsilon\pi S_0}{\omega_e^2(A)}} dB(t) \quad (2.18)$$

ここで， $B(t)$ は標準ブラウン運動である．式 (2.18) で表現される振幅 $A(t)$ の確率密度関数は，次の Fokker-Planck 方程式に支配される．

$$\frac{\partial p_A(a, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a} \left[\left\{ -\frac{\varepsilon\beta_e(a)a}{2} + \frac{\varepsilon\pi S_0}{2a\omega_e^2(a)} + \frac{\varepsilon\pi S_0}{4} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{\omega_e^2(a)} \right) \right\} p_A(a, t) \right] + \frac{\varepsilon\pi S_0}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left\{ \frac{p_A(a, t)}{\omega_e^2(a)} \right\} \quad (2.19)$$

式 (2.19) の初期条件として，式 (2.10) の $X(0) = \dot{X}(0) = 0$ より

$$p_A(a, 0) = \hat{\delta}(0) \quad (2.20)$$

と置く．ここで， $\hat{\delta}(\cdot)$ は片側ディラックのデルタ関数である．1次元の偏微分方程式である式 (2.19) を解くことで，応答振幅 $A(t)$ の確率密度関数 $p_A(a, t)$ が得られる．しかし，この Fokker-Planck 方程式の厳密解は求まらないため，これを解くには近似解析手法が必要となる．そこで，次章では複素非整数次モーメント (CFM) を利用して Fokker-Planck 方程式を解き， $p_A(a, t)$ を求める．

2.4 複素非整数次モーメントを用いた Fokker-Planck 方程式の近似解法

2.4.1 CFM の支配方程式の導出

等価固有角振動数 $\omega_e(A)$ を，次のように表現する．

$$\omega_e^2(A) = \omega_0^2 \{1 + \varepsilon s(A)\}, \quad s(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} g(A \cos \Psi) \cos \Psi d\Psi \quad (2.21)$$

ここで， $s(A)$ は非線形剛性の影響を表す項である．Fokker-Planck 方程式から CFM の支配方程式を導くにあたり，式 (2.19) 中の $1/\omega_e^2(a)$ を a の多項式で表現する必要がある．ここで， $|\varepsilon| \ll 1$ であることから，次の近似を導入する．

$$\frac{1}{\omega_e^2(a)} = \frac{1}{\omega_0^2(1 + \varepsilon s(a))} \approx \frac{1}{\omega_0^2} (1 - \varepsilon s(a)) \quad (2.22)$$

この近似を用いると，式 (2.19) は，

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_A(a, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial a} \left[\left\{ -\frac{\varepsilon\beta_e(a)a}{2} + \frac{\varepsilon\pi S_0(1 - \varepsilon s(a))}{2a\omega_0^2} + \frac{\varepsilon\pi S_0}{4} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1 - \varepsilon s(a)}{\omega_0^2} \right) \right\} p_A(a, t) \right] \\ & + \frac{\varepsilon\pi S_0}{2\omega_0^2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \{ (1 - \varepsilon s(a)) p_A(a, t) \} \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる．また，非線形減衰項と非線形剛性項は多項式で表現されるため， $\beta_e(a)$ と $s(a)$ は次のように書くことができる．

$$\begin{aligned} \beta_e(a) &= \sum_{j=0}^{n_\beta} \beta_j a^j \\ s(a) &= \sum_{j=0}^{n_s} s_j a^j \end{aligned} \quad (2.24)$$

式 (2.23) の両辺に $a^{\gamma-1}$ を乗じ、 a について $[0, \infty)$ で積分することでメルン変換を施すと、次を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M_{p_A}(\gamma-1, t) = & \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \sum_{j=0}^{n_\beta} \beta_j [a^{\gamma+j} p_A(a, t)]_0^\infty - (\gamma-1) \sum_{j=0}^{n_\beta} \beta_j \int_0^\infty a^{\gamma-1+j} p_A(a, t) da \right\} \\ & + \frac{\varepsilon \pi S_0}{2\omega_0^2} \left\{ \left[a^{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial a} p_A(a, t) \right]_0^\infty - \gamma [a^{\gamma-2} p_A(a, t)]_0^\infty + (\gamma-1)^2 \int_0^\infty a^{\gamma-3} p_A(a, t) da \right\} \\ & + \frac{\varepsilon^2 \pi S_0}{4\omega_0^2} \left\{ \sum_{j=0}^{n_s} (2\gamma-j) s_j [a^{\gamma-2+j} p_A(a, t)]_0^\infty - 2 \sum_{j=0}^{n_s} s_j \left[a^{\gamma-1+j} \frac{\partial}{\partial a} p_A(a, t) \right]_0^\infty \right. \\ & \left. - (\gamma-1) \sum_{j=0}^{n_s} (2\gamma-2+j) s_j \int_0^\infty a^{\gamma-3+j} p_A(a, t) da \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

式中の $M_{p_A}(\gamma-1, t)$ は応答振幅 $A(t)$ の CFM である. ここで, $p_A(a, t)$ は振幅についての確率密度関数であり, $p_A(0, t)$ は任意の $t > 0$ で有限な値をとること, また, $a \rightarrow \infty$ の極限において多項式より早く $p_A(a, t), \partial p_A(a, t)/\partial a \rightarrow 0$ となると仮定する. この仮定は, $\varepsilon = 0$ の時の応答振幅の確率密度関数の厳密解が Rayleigh 分布により与えられること [79] と, 本研究においては非線形性の強さを表すパラメータ ε が小さいと仮定していることから妥当であると考えられる. この仮定の下, 式 (2.3) で与えられる CFM の存在条件から, ρ を $2 \leq \rho < \infty$ となるように選ぶ. そのとき, 式 (2.25) 右辺に含まれる積分を行わない項 ($[\cdot]_0^\infty$ の項) は, 0 とできる. 以上より, 応答振幅の CFM の支配方程式を次のように得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M_{p_A}(\gamma-1, t) = & -\frac{\varepsilon}{2} (\gamma-1) \sum_{j=0}^{n_\beta} \beta_j M_{p_A}(\gamma-1+j, t) + \frac{\varepsilon \pi S_0}{2\omega_0^2} (\gamma-1)^2 M_{p_A}(\gamma-3, t) \\ & - \frac{\varepsilon^2 \pi S_0}{4\omega_0^2} (\gamma-1) \sum_{j=0}^{n_s} (2\gamma-2+j) s_j M_{p_A}(\gamma-3+j, t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.4.2 CFM の支配方程式の解法

式 (2.26) には, 次数の実部が異なる様々な CFM が含まれている. つまり, 式 (2.26) は閉じておらず, このままでは解くことができない. また, 逆メルン変換は CFM の次数の実部をひとつ選んで固定し, 虚軸に平行に積分が行われる. 従って, 式 (2.26) の各辺に含まれる CFM の次数の実部を揃える必要がある. そのため, 次に示す次数の実部が異なる CFM 同士の近似関係式 [11] を用いる.

$$\begin{aligned} M_{p_A}(\gamma_s - 1 - \Delta\rho, t) &= \sum_{k=-m}^m M_{p_A}(\gamma_k - 1, t) c_{ks}(\Delta\rho) \\ c_{ks}(\Delta\rho) &= \frac{\sin[\pi(k-s) - ib\Delta\rho]}{\pi(k-s) - ib\Delta\rho} \end{aligned} \quad (2.27)$$

ここで, $\gamma_s = \rho + is\Delta\eta$ ($s = -m, \dots, m$) であり, $m, \Delta\eta$ および式 (2.27) 中の b は式 (2.7) で定義されている. 式 (2.26) 中の γ を $\gamma \rightarrow \gamma_s$ とすることで, γ を η 方向に離散化し, 式 (2.27) を適用することで, 次を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M_{p_A}(\gamma_s - 1, t) = & -\frac{\varepsilon}{2} (\gamma_s - 1) \sum_{j=0}^{n_\beta} \beta_j \sum_{k=-m}^m M_{p_A}(\gamma_k - 1, t) c_{ks}(-j) + \frac{\varepsilon \pi S_0}{2\omega_0^2} (\gamma_s - 1)^2 \sum_{k=-m}^m M_{p_A}(\gamma_k - 1, t) c_{ks}(2) \\ & - \frac{\varepsilon^2 \pi S_0}{4\omega_0^2} (\gamma_s - 1) \sum_{j=0}^{n_s} (2\gamma_s - 2 + j) s_j \sum_{k=-m}^m M_{p_A}(\gamma_k - 1, t) c_{ks}(2-j) \end{aligned} \quad (2.28)$$

$(2m+1)$ 本の $M_{p_A}(\gamma_s - 1, t)$ に関する線形連立常微分方程式 (2.28) を解くことによって、応答振幅の CFM が得られる。ここで、CFM から応答振幅の確率密度関数 $p_A(a, t)$ を正確に求めるためには、確率密度関数の正規化条件に対応する CFM の制約条件が必要である。これに関して、 $b = \pi/\Delta\eta$ が十分に大きい場合、区間 $[\exp(-b), \exp(b)]$ における $p_A(a, t)$ の面積は、近似的に 1 とみなすことができる。式 (2.7) の右辺を区間 $[\exp(-b), \exp(b)]$ で積分し、その結果を 1 とすることで、次の関係式が得られる [11]。

$$M_{p_A}(\gamma_0 - 1, t) = \frac{1 - \rho}{e^{b(1-\rho)} - e^{-b(1-\rho)}} \left[2b - \sum_{\substack{k=-m \\ k \neq 0}}^m \frac{e^{b(1-\gamma_k)} - e^{-b(1-\gamma_k)}}{1 - \gamma_k} M_{p_A}(\gamma_k - 1, t) \right] \quad (2.29)$$

式 (2.29) を式 (2.28) に代入することで、CFMM $_{p_A}(\gamma_s - 1, t)$ ($s = -m, \dots, -1, 1, \dots, m$) の時間発展を支配する、 $2m$ 本の線形連立常微分方程式が得られる。確率密度関数の初期条件が $p_A(a, 0) = \delta(0)$ であることから、CFM の初期条件として、

$$M_{p_A}(\gamma_s - 1, 0) = \int_0^\infty p_A(a, 0) a^{\gamma_s - 1} da = 0 \quad (2.30)$$

を与え、求めた常微分方程式を解くことで、過渡応答の CFM が求まる。

CFM の支配方程式は、式 (2.10) の形で運動方程式が与えられれば、等価減衰係数 $\beta_e(A)$ と等価固有角振動数 $\omega_e(A)$ を式 (2.14), (2.15) から計算し、その結果を式 (2.28) - (2.30) に代入することで、直ちに導くことができる。式 (2.10) 中の $h(X, \dot{X})$ と $g(X)$ は、幅広い非線形減衰、非線形剛性に対応した形を考えているので、幅広いクラスの問題に対して、CFM の支配方程式 (2.28) - (2.30) は容易に導くことができる。

従来の Fokker-Planck 方程式の近似解析手法においては、解析精度に大きな影響を与える解析パラメータ（解の形を仮定した際のその解の複雑さを支配するパラメータなど）や解析で用いる基底関数を変化させると、解くべき方程式を新たに導出する必要がしばしばあり、このことが解析の難しさにつながるがあった。応答振幅の CFM の解析精度は解析パラメータ $\Delta\eta$, ρ , m により決まるが、これら解析パラメータを変化させたとしても、CFM の支配方程式は、式 (2.28) - (2.30) で表現され、値の代入のみで解くべき式が直ちに導かれる。これは、CFM を用いた近似解析手法の強みの 1 つである。そして、これらの支配方程式は線形の連立常微分方程式なので、過渡応答の CFM は容易に得ることができる。また、定常応答の CFM を求めたい場合は、式 (2.28) において時間微分項を 0 とすることで得られる、線形な代数方程式を解くことで得られる。

2.4.3 応答の確率密度関数

式 (2.28) - (2.30) から得られた応答振幅の CFMM $_{p_A}(\gamma_s - 1, t)$ ($s = -m, \dots, m$) に対して、式 (2.7) の離散逆メリン変換を施すことで、応答振幅の確率密度関数 $p_A(a, t)$ が求まる。さらに、変位応答 $X(t)$ と速度応答 $\dot{X}(t)$ の結合確率密度関数 $p_{X\dot{X}}(x, \dot{x}, t)$ は、次式から求まる。

$$p_{X\dot{X}}(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2\pi} p_A(a, t) |J| \quad (2.31)$$

ここで、 J は式 (2.12) の変数変換に対応するヤコビアンであり、次で定義される。

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial \dot{x}} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}} \end{vmatrix} \quad (2.32)$$

式 (2.12), (2.32) から、 $|J|$ は次のように計算できる。

$$|J| = \frac{1}{\omega_e(a) - \frac{d}{da} \left(\frac{1}{\omega_e(a)} \right) \dot{x}} \quad (2.33)$$

式 (2.31), (2.33) 中の a には, 次の式を a について解いたものを代入する.

$$a = \sqrt{x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_e^2(a)}} \quad (2.34)$$

式 (2.14) より $\omega_e(a)$ は非線形減衰項 $h(X, \dot{X})$ によらず非線形剛性項 $g(X)$ のみによって決定されることから, J も $g(X)$ のみによって決まる. 例えば, $g(X) = X^3$ の場合に対応する $\omega_e^2(a) = \omega_0^2(1 + 3\varepsilon a^2/4)$ のとき, $|J|$ と a は,

$$|J| = \frac{4\omega_e^3(a)}{\{4\omega_e^4(a) + 3\varepsilon\omega_0^2\dot{x}^2\}a} \quad (2.35)$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{3\varepsilon} \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon x^2\right)^2 + 3\varepsilon \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2}} + \frac{3}{4}\varepsilon x^2 - 1 \right\}}$$

である. 変位応答の確率密度関数 $p_X(x, t)$ と速度応答の確率密度関数 $p_{\dot{X}}(\dot{x}, t)$ は, 結合確率密度関数 $p_{X\dot{X}}(x, \dot{x}, t)$ の周辺分布として求められる.

2.5 数値計算例

本節では, 3 種類の非線形系に対して, 計算例を示す. 応答の確率密度関数の近似解析解と, モンテカルロシミュレーションによって求めた確率密度関数を比較することで, 提案手法の有効性を示す.

2.5.1 Case1: Duffing 系の場合

本研究の目的は, 非線形剛性項を含む系に適用可能な CFM を用いた近似解析手法の開発である. そこで, 非線形剛性を有する系に対する本提案手法の有効性を示す目的で, 系の非線形性が剛性項のみに含まれる場合について考える. 具体的には, $h(X, \dot{X}) = \delta_1 \dot{X}$, $g(X) = X^3$ とし, Duffing 系の場合を考える. 運動方程式は, 次のように書ける.

$$\ddot{X} + \varepsilon\delta_1 \dot{X} + \omega_0^2 X + \varepsilon\omega_0^2 X^3 = \sqrt{\varepsilon}W(t) \quad (2.36)$$

この場合, 等価固有角振動数 $\omega_e(A)$ と等価減衰係数 $\beta_e(A)$ は, 式 (2.14), (2.15) より, 次のように求まる.

$$\omega_e^2(A) = \omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon A^2\right) \quad (2.37)$$

$$\beta_e(A) = \delta_1$$

従って, 式 (2.28), (2.37) から, 応答振幅 $A(t)$ の CFMM $_{p_A}(\gamma_s - 1, t)$ の支配方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M_{p_A}(\gamma_s - 1, t) = & -\frac{\varepsilon\delta_1}{2}(\gamma_s - 1)(\gamma_s - 1, t) + \frac{\varepsilon\pi S_0}{2\omega_0^2}(\gamma_s - 1)^2 \sum_{k=-m}^m M_{p_A}(\gamma_k - 1, t)c_{ks}(2) \\ & - \frac{3\varepsilon^2\pi S_0}{8\omega_0^2}\gamma_s(\gamma_s - 1)M_{p_A}(\gamma_s - 1, t) \end{aligned} \quad (2.38)$$

となる. ここで, $s = -m, \dots, -1, 1, \dots, m$ である. 式 (2.38) は, 初期条件である式 (2.30) の下で, 正規化条件の式 (2.29) と共に数値的に解かれる. 系と励振のパラメータは, $\omega_0 = 1$, $\varepsilon = 0.01$, $\delta_1 = 4$, $S_0 = 1$ とする. 解析パラメータは, $\Delta\eta = 0.5$, $\rho = 4.1$, $m = 50$ とする.

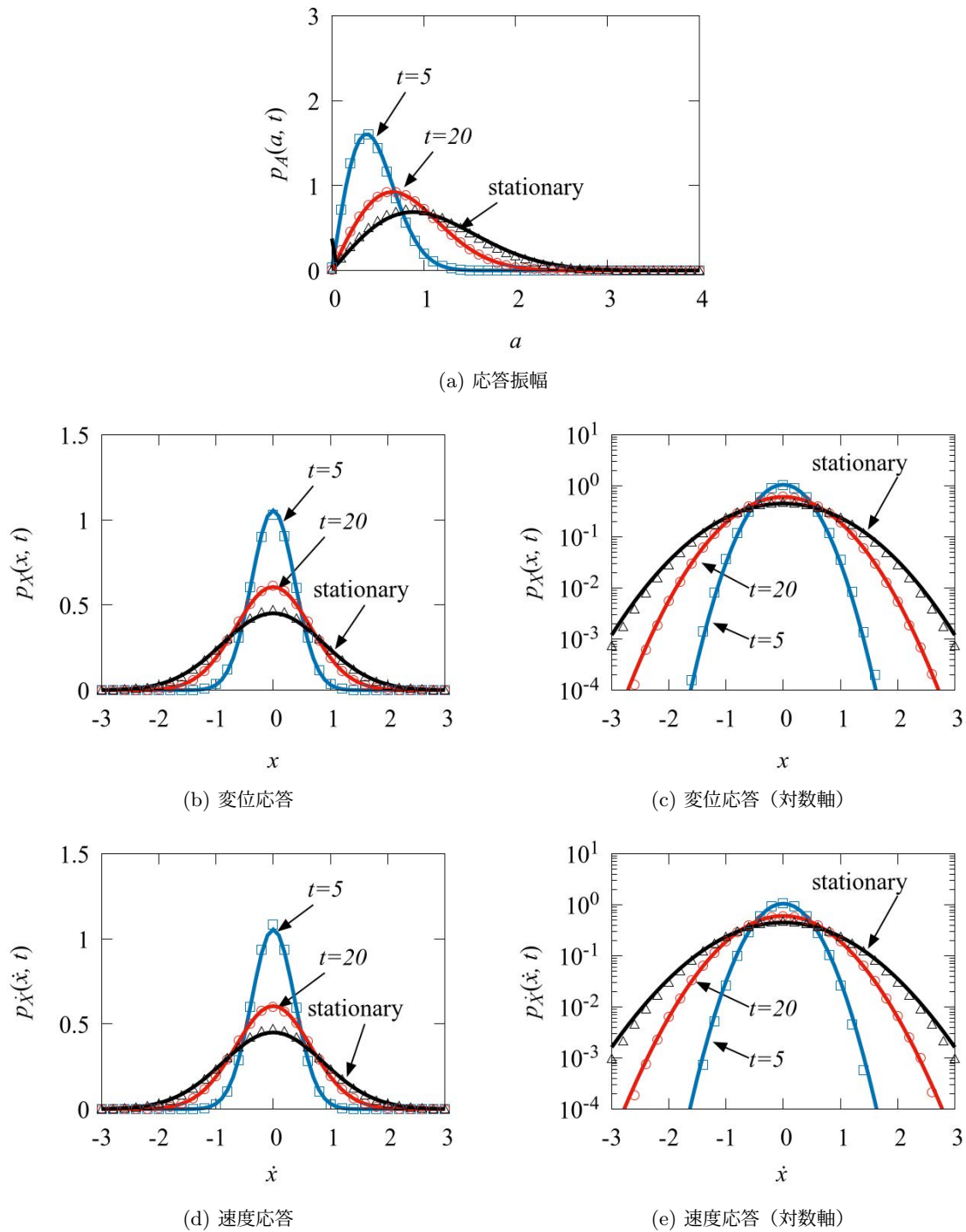


図 2.2 Duffing 系の場合の過渡応答の確率密度関数. 実線: 近似解析解, $\square \circ \triangle$: モンテカルロシミュレーション解

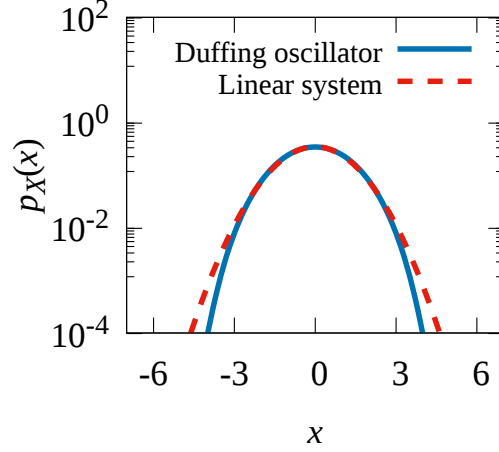


図 2.3 $\varepsilon = 0.05$ の場合の Duffing 系と対応する線形系の定常変位応答の確率密度関数の比較

図 2.2 は、応答振幅 $A(t)$ 、変位応答 $X(t)$ 、速度応答 $\dot{X}(t)$ の確率密度関数 $p_A(a, t)$ 、 $p_X(x, t)$ 、 $p_{\dot{X}}(\dot{x}, t)$ である。提案手法によって求めた近似解析解を実線で、モンテカルロシミュレーション解は記号 ($\square \circ \triangle$) で表している。モンテカルロシミュレーションを行うにあたって、運動方程式 (2.36) を数値的に解く際には、4 次の Runge-Kutta 法を用いた。数値計算の時間刻み幅は $dt = 0.01$ とし、20,000,000 本の標本関数を用意した。また、このシミュレーション方法は、後に示す Case2 と Case3 の場合においても同様である。図 2.2 から、提案手法による近似解析解は、確率密度関数の裾部を含めて、また、過渡状態と定常状態のいずれにおいても、モンテカルロシミュレーション解とよく一致していることが確認できる。

一般に、正の非線形パラメータ ε を有する Duffing 系の場合、系の非線形性は大きな応答を示す確率を抑制するように働く。そのため、対応する線形系の場合と比較して、応答の確率密度関数の幅は狭くなる。ここでは、この非ガウス性の特徴が、提案手法によって捉えられることを示す。Duffing 系である式 (2.36) の比較対象として、次の線形系を考える。

$$\ddot{X} + \varepsilon \delta_1 \dot{X} + \omega_0^2 X = \sqrt{\varepsilon} W(t) \quad (2.39)$$

これは、式 (2.36) において非線形剛性項 $\varepsilon \omega_0^2 X^3$ を 0 としたものに对应する。図 2.3 は、式 (2.36) の Duffing 系と、式 (2.39) で示す対応する線形系の定常変位応答の確率密度関数の比較である。ここで、非線形性の影響をより強調する目的で、非線形パラメータ ε を 0.05 としている。Duffing 系の定常応答の確率密度関数は提案手法から、線形系の確率密度関数は次式で表される厳密解から求めた。

$$p_X(x) = \sqrt{\frac{\delta_1 \omega_0^2}{2\pi^2 S_0}} \exp\left(-\frac{\delta_1 \omega_0^2}{2\pi S_0} x^2\right) \quad (2.40)$$

図 2.3 より、提案手法によって、Duffing 系の応答の確率密度関数の幅が対応する線形系と比較して狭くなる様子を正確に捉えることができています。

2.5.2 Case2: 減衰項と剛性項の両方が非線形性を有する場合

次に、減衰項と剛性項の両方が非線形性を有する場合について考える。具体的には、 $h(X, \dot{X}) = \delta_1 \dot{X} + \delta_3 \dot{X}^3$ 、 $g(X) = \kappa_3 X^3 + \kappa_5 X^5$ とし、減衰に 3 次の非線形項、剛性には 3 次と 5 次の非線形項が存在する場合の運動方程式は、

次のように書ける．

$$\ddot{X} + \varepsilon \left(\delta_1 \dot{X} + \delta_3 \dot{X}^3 \right) + \omega_0^2 X + \varepsilon \omega_0^2 \left(\kappa_3 X^3 + \kappa_5 X^5 \right) = \sqrt{\varepsilon} W(t) \quad (2.41)$$

この場合，等価固有角振動数 $\omega_e(A)$ と等価減衰係数 $\beta_e(A)$ は，次のようになる．

$$\begin{aligned} \omega_e^2(A) &= \omega_0^2 \left\{ 1 + \varepsilon \left(\frac{3}{4} \kappa_3 A^2 + \frac{5}{8} \kappa_5 A^4 \right) \right\} \\ \beta_e(A) &= \delta_1 + \delta_3 \omega_0^2 \left(\frac{3}{4} A^2 + \frac{9}{16} A^4 \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

従って，応答振幅 $A(t)$ の CFMM $_{p_A}(\gamma_s - 1, t)$ の支配方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M_{p_A}(\gamma_s - 1, t) &= -\frac{\varepsilon \delta_1}{2} (\gamma_s - 1) M_{p_A}(\gamma_s - 1, t) \\ &\quad - \frac{3\varepsilon \delta_3 \omega_0^2}{8} (\gamma_s - 1) \sum_{k=-m}^m M_{p_A}(\gamma_k - 1, t) c_{ks}(-2) \\ &\quad - \frac{9\varepsilon \delta_3 \omega_0^2}{32} (\gamma_s - 1) \sum_{k=-m}^m M_{p_A}(\gamma_k - 1, t) c_{ks}(-4) \\ &\quad + \frac{\varepsilon \pi S_0}{2\omega_0^2} (\gamma_s - 1)^2 \sum_{k=-m}^m M_{p_A}(\gamma_k - 1, t) c_{ks}(2) \\ &\quad - \frac{3\varepsilon^2 \pi \kappa_3 S_0}{8\omega_0^2} \gamma_s (\gamma_s - 1) M_{p_A}(\gamma_s - 1, t) \\ &\quad - \frac{5\varepsilon^2 \pi \kappa_5 S_0}{16\omega_0^2} (\gamma_s - 1)^2 \sum_{k=-m}^m M_{p_A}(\gamma_k - 1, t) c_{ks}(-2) \end{aligned} \quad (2.43)$$

となる．ここで， $s = -m, \dots, -1, 1, \dots, m$ である．式 (2.43) は，初期条件である式 (2.30) の下で，正規化条件の式 (2.29) と共に数値的に解かれる．系と励振のパラメータは， $\omega_0 = 1$ ， $\varepsilon = 0.01$ ， $\delta_1 = 8$ ， $\delta_3 = 8$ ， $\kappa_3 = 1$ ， $\delta_5 = 1$ ， $S_0 = 1$ とする．解析パラメータは， $\Delta\eta = 0.5$ ， $\rho = 4.1$ ， $m = 100$ とする．

式 (2.32)，(2.42) より， $g(X) = \kappa_3 X^3 + \kappa_5 X^5$ の場合の応答振幅と変位・速度応答の確率密度関数の関係式 (2.31) 中の $|J|$ は，

$$|J| = \frac{4\omega_e^3(a)}{\{3\varepsilon\kappa_3\omega_0^2\dot{x} + 5\varepsilon\kappa_5\omega_0^2\dot{x}^2 a^2 + 4\omega_e^4(a)\}a} \quad (2.44)$$

となる．式 (2.31) および式 (2.44) 中の a は，式 (2.34) および (2.42) より導かれる次の 6 次方程式の解として与えられる．

$$\frac{5}{8} \varepsilon \kappa_5 a^6 + \left(\frac{3}{4} \varepsilon \kappa_3 - \frac{5}{8} \varepsilon \kappa_5 x^2 \right) a^4 + \left(1 - \frac{3}{4} \varepsilon \kappa_3 \right) a^2 - \left(x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2} \right) = 0 \quad (2.45)$$

図 2.4 から，提案手法による近似解析解は，確率密度関数の裾部を含めて，また，過渡状態と定常状態のいずれにおいても，モンテカルロシミュレーション解とよく一致していることが確認できる．これは，提案手法が，減衰項と剛性項の両方に非線形性が含まれる場合においても有効であることを示している．

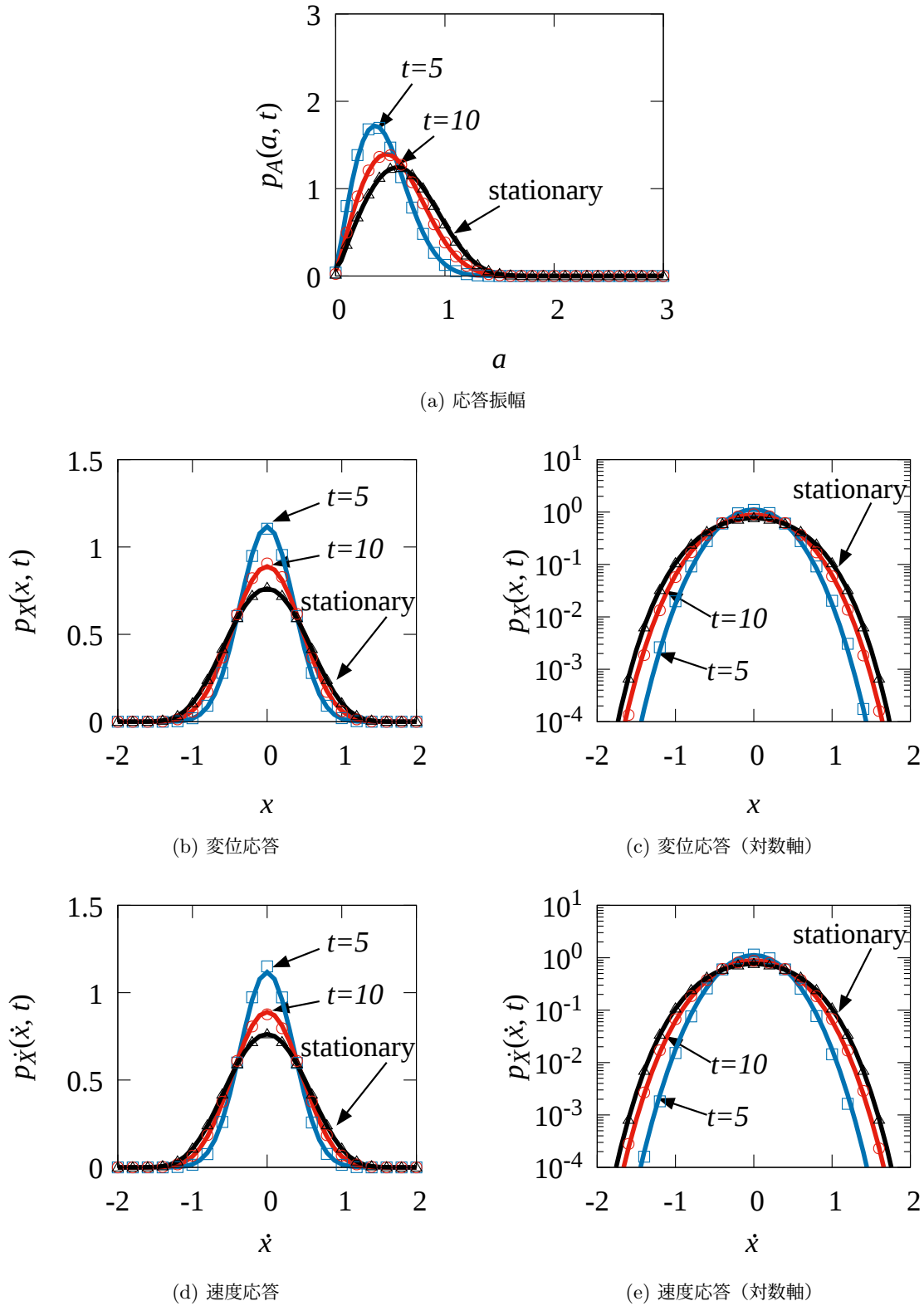


図 2.4 減衰項と剛性項の両方に非線形性が存在する場合の過渡応答の確率密度関数. 実線: 近似解析解, $\square \circ \triangle$: モンテカルロシミュレーション解

2.5.3 Case3: Duffing-van der Pol 振動子の場合

最後に、提案手法の汎用性をさらに示す目的で、定常状態で拡散リミットサイクル挙動を示す Duffing-van der Pol 振動子を考える。その運動方程式は次の通り。

$$\ddot{X} + \varepsilon (\delta_1 + \delta_3 \dot{X}^2) \dot{X} + \omega_0^2 X + \varepsilon \omega_0^2 X^3 = \sqrt{\varepsilon} W(t) \quad (2.46)$$

これは、非線形減衰項 $h(X, \dot{X}) = \delta_1 \dot{X} + \delta_3 \dot{X}^3$ 、非線形剛性項 $g(X) = X^3$ の場合に相当する。この場合、等価固有角振動数 $\omega_e(A)$ と等価減衰係数 $\beta_e(A)$ は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \omega_e^2(A) &= \omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2 \right) \\ \beta_e(A) &= \delta_1 + \frac{1}{4} \delta_3 A^2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

従って、応答振幅 $A(t)$ の CFMM $_{p_A}(\gamma_s - 1, t)$ の支配方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M_{p_A}(\gamma_s - 1, t) &= -\frac{\varepsilon \delta_1}{2} (\gamma_s - 1) M_{p_A}(\gamma_s - 1, t) \\ &\quad - \frac{3\varepsilon \delta_3 \omega_0^2}{8} (\gamma_s - 1) \sum_{k=-m}^m M_{p_A}(\gamma_k - 1, t) c_{ks}(-2) \\ &\quad + \frac{\varepsilon \pi S_0}{2\omega_0^2} (\gamma_s - 1)^2 \sum_{k=-m}^m M_{p_A}(\gamma_k - 1, t) c_{ks}(2) \\ &\quad - \frac{3\varepsilon^2 \pi S_0}{8\omega_0^2} \gamma_s (\gamma_s - 1) M_{p_A}(\gamma_s - 1, t) \end{aligned} \quad (2.48)$$

となる。ここで、 $s = -m, \dots, -1, 1, \dots, m$ である。式 (2.48) は、初期条件である式 (2.30) の下で、正規化条件の式 (2.29) と共に数値的に解かれる。

系の線形減衰係数 δ_1 の符号は、系の動的挙動の特性に大きな影響を与える。 $\delta_1 > 0$ の場合、応答は相平面上において、原点まわりの拡散挙動を示す。一方、 $\delta_1 < 0$ の場合、安定なリミットサイクルが存在する。そのため、提案手法の汎用性を示すため、正負両方の符号の場合について考え、 $\delta_1 = -5, 5$ とする。系と励振のその他のパラメータは、 $\omega_0 = 1$ 、 $\varepsilon = 0.01$ 、 $\delta_3 = 1$ 、 $S_0 = 1$ とする。解析パラメータは、 $\Delta\eta = 0.5$ 、 $\rho = 4.1$ 、 $m = 100$ とする。

提案手法による近似解析解とシミュレーション解の比較を、図 2.5、2.6 に示す。 $\delta_1 = 5$ の場合の結果が図 2.5、 $\delta_1 = -5$ の場合の結果が図 2.6 である。先述の通り、 $\delta_1 = 5$ の場合（図 2.5）では、原点周りで系は拡散挙動を示す。そして、 $\delta_1 = -5$ の場合は、時間経過とともに、リミットサイクルまわりで揺らぐような挙動を示す。このリミットサイクル挙動に起因して、図 2.6(b)-(e) の変位応答と速度応答の確率密度関数は双峰性を示す。提案手法によって、これら大きく異なる 2 つの性質の両方を正確に捉えることができている。

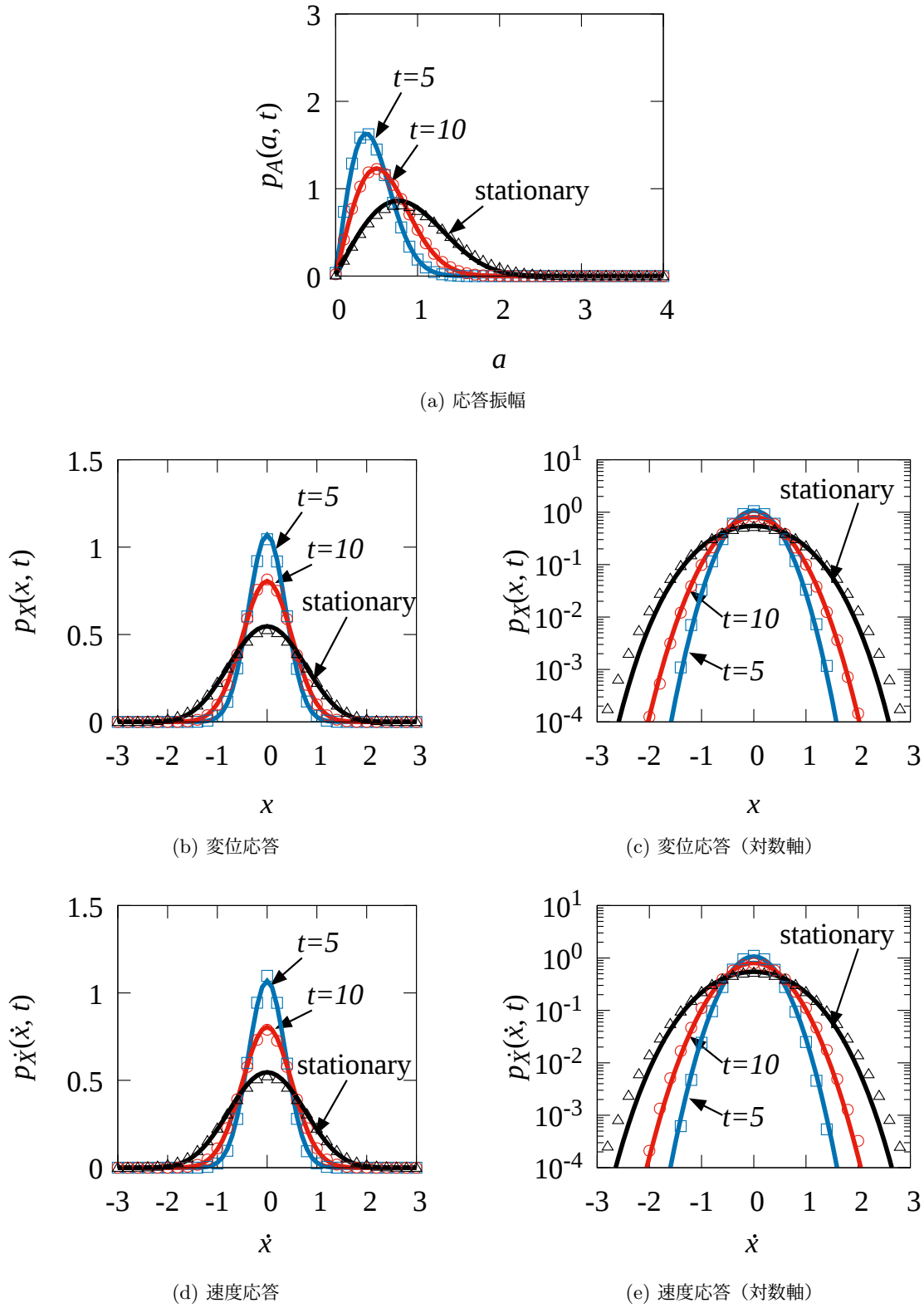
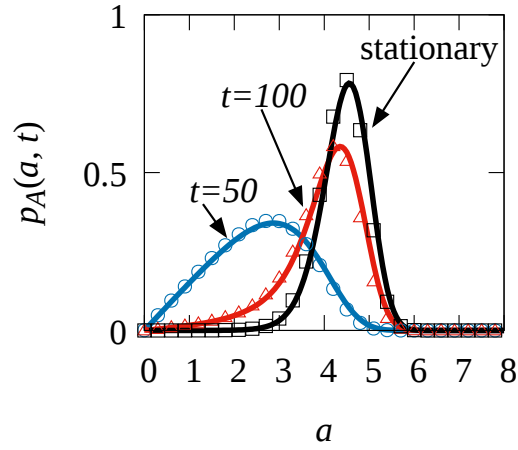
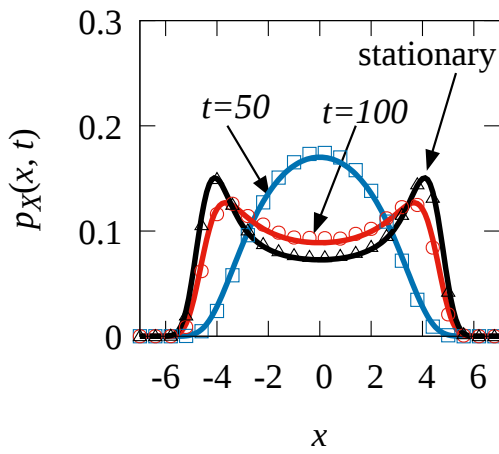


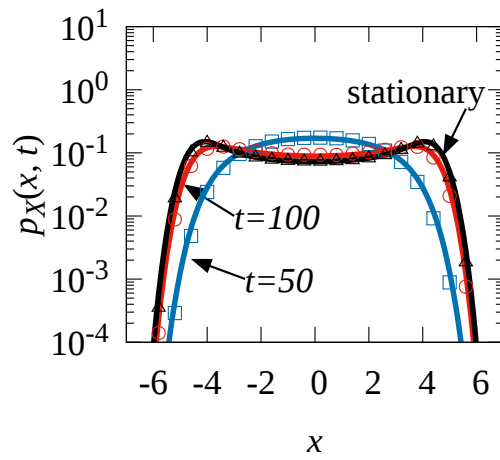
図 2.5 $\delta_1 = 5$ の場合の Duffing-van der Pol 振動子の過渡応答の確率密度関数。実線: 近似解析解, $\square \circ \triangle$: モンテカルロシミュレーション解



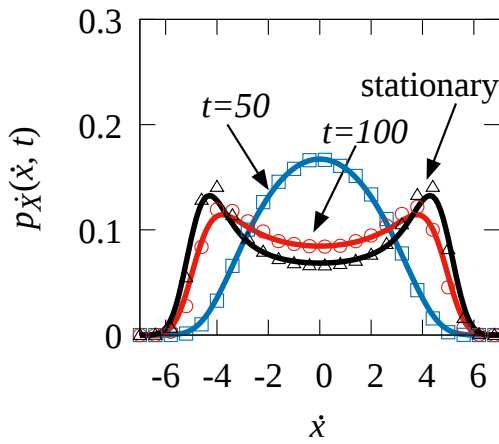
(a) 応答振幅



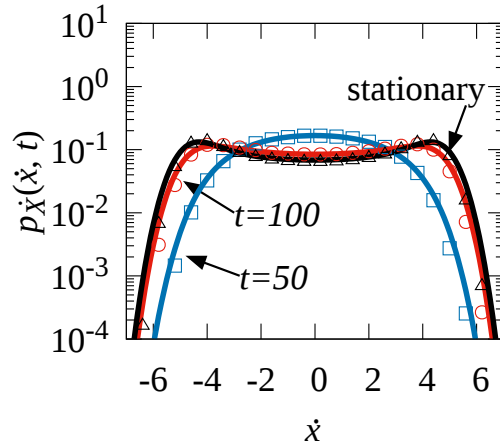
(b) 変位応答



(c) 変位応答 (対数軸)



(d) 速度応答



(e) 速度応答 (対数軸)

図 2.6 $\delta_1 = -5$ の場合の Duffing-van der Pol 振動子の過渡応答の確率密度関数. 実線: 近似解析解, $\square \circ \triangle$: モンテカルロシミュレーション解

2.6 結言

本章では、減衰項と剛性項の両方に非線形性が含まれる系にガウス性白色ノイズが加わる場合に対して、過渡応答の確率密度関数の近似解析手法を提案した。提案手法では、まず、等価線形化法を適用することで、非線形剛性の影響を考慮した等価固有角振動数を求めた。この等価固有角振動数を用いることで、確率平均化法から、応答振幅の確率密度関数を支配する Fokker-Planck 方程式を得た。この Fokker-Planck 方程式をメルン変換することで、応答振幅の CFM の支配方程式を導出した。導出した CFM の支配方程式には、3 つの大きな特徴がある。(i) 幅広いクラスの系に対して、CFM の支配方程式は直ちに求まる。(ii) 解析精度を支配する解析パラメータを変化させた場合も、対応する CFM の支配方程式は直ちに求まる。(iii) CFM の支配方程式は線形連立常微分方程式であるので、過渡状態の CFM も容易に得ることができる。導出した CFM の支配方程式から得られた応答振幅の CFM に逆メルン変換を施すことで、過渡応答の確率密度関数を求めた。

数値計算例として、3 種類の性質の大きく異なる非線形系に対して提案手法を適用した。それらの計算結果から、提案手法による近似解析解と、モンテカルロシミュレーション解が確率密度関数の裾部を含めてよく一致することが確認できた。また、確率密度関数の幅が狭くなる傾向や応答のリミットサイクル挙動の影響による双峰性といった、応答の顕著な非ガウス性を提案手法によって捉えることができることを示した。

第3章

バイスペクトルの定義と諸性質

緒論で述べた通り，本研究では，不規則励振系の応答の非ガウス性について，バイスペクトルを用いて解析・考察を行う．Brillinger によってバイスペクトルを含んだ高次スペクトルの整備が行われてから半世紀近くが経過しているが，機械工学，とりわけ不規則振動系の研究においては，十分に広く知られているとは言えない．そこで，まず本章では，高次スペクトル及びバイスペクトルについて紹介する．

3.1 キュムラントと高次スペクトル

実数値 n 次元確率ベクトル ($n \in \mathbb{N}$) $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ の, $r = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ 次結合モーメント $E[X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}]$ ($r, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$) と r 次の結合キュムラント $\text{Cum}[X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}]$ は, 次のように定義される．

$$E[X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}] = (-i)^r \frac{\partial^r \Phi_{\mathbf{X}}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)}{\partial \theta_1^{k_1} \partial \theta_2^{k_2} \dots \partial \theta_n^{k_n}} \Bigg|_{\theta_1=\theta_2=\dots=\theta_n=0} \quad (3.1)$$

$$\text{Cum}[X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}] = (-i)^r \frac{\partial^r \ln \Phi_{\mathbf{X}}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)}{\partial \theta_1^{k_1} \partial \theta_2^{k_2} \dots \partial \theta_n^{k_n}} \Bigg|_{\theta_1=\theta_2=\dots=\theta_n=0} \quad (3.2)$$

ここで, $E[\cdot]$ は期待値演算, $\Phi_{\mathbf{X}}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ は次で定義される結合特性関数である．

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = E[\exp(i(\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \dots + \theta_n X_n))] \quad (3.3)$$

r 次の結合キュムラントは, r 次までの結合モーメントを用いて表現できる [80, 12]．例えば, $\mathbf{X} = \{X_1\}$ に対して,

$$\begin{aligned} \text{Cum}[X_1] &= E[X_1] \\ \text{Cum}[X_1^2] &= E[X_1^2] - (E[X_1])^2 \\ \text{Cum}[X_1^3] &= E[X_1^3] - 3E[X_1^2]E[X_1] + 2(E[X_1])^3 \\ \text{Cum}[X_1^4] &= E[X_1^4] - 4E[X_1^3]E[X_1] - 3(E[X_1^2])^2 + 12E[X_1^2](E[X_1])^2 - 6(E[X_1])^4 \end{aligned} \quad (3.4)$$

なる関係式が成り立つ．

実数値定常確率過程 $X(t)$ を考える．このとき, n 次のモーメント $E[X(t)X(t+\tau_1)X(t+\tau_2)\dots X(t+\tau_n)]$ は, 時間差 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ のみの関数である．よって, $m_n^X(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = E[X(t)X(t+\tau_1)X(t+\tau_2)\dots X(t+\tau_n)]$ と書ける．同様に, $X(t)$ の n 次のキュムラント $\text{Cum}[X(t)X(t+\tau_1)X(t+\tau_2)\dots X(t+\tau_n)]$ もまた, 時間差 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ のみの関数である． $c_n^X(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \text{Cum}[X(t)X(t+\tau_1)X(t+\tau_2)\dots X(t+\tau_n)]$ と書くと, 4 次までのモーメン

ト m_n^X とキュムラント c_n^X の間には、次のような関係が存在する。

$$\begin{aligned}
c_1^X &= m_1^X \quad (\text{constant}) \\
c_2^X(\tau) &= m_2^X(\tau) - (m_1^X)^2 \\
c_3^X(\tau_1, \tau_2) &= m_3^X(\tau_1, \tau_2) - m_1^X[m_2^X(\tau_1) + m_2^X(\tau_2) + m_2^X(\tau_2 - \tau_1)] + 2(m_1^X)^3 \\
c_4^X(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= m_4^X(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - m_2^X(\tau_1)m_2^X(\tau_3 - \tau_2) - m_2^X(\tau_2)m_2^X(\tau_3 - \tau_1) - m_2^X(\tau_3)m_2^X(\tau_2 - \tau_1) \\
&\quad - m_1^X[m_3^X(\tau_1, \tau_2) + m_3^X(\tau_1, \tau_3) + m_3^X(\tau_2, \tau_3) + m_3^X(\tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_1)] \\
&\quad - (m_1^X)^2[m_2^X(\tau_1) + m_2^X(\tau_2) + m_2^X(\tau_3) + m_2^X(\tau_2 - \tau_1) + m_2^X(\tau_3 - \tau_1) + m_2^X(\tau_3 - \tau_2)] \\
&\quad - 6(m_1^X)^4
\end{aligned} \tag{3.5}$$

キュムラントには、ふたつの重要な性質が存在する。ひとつめは、平均が 0 の確率過程 $X(t)$ を考えたとき、3 次以下のモーメントとキュムラントは一致することである。これは、式 (3.5) において $m_1^X = 0$ とすることで直ちに明らかになる。ただし、4 次以上のモーメントとキュムラントについては、このような関係は成り立たない。ふたつめは、ガウス過程に対して、3 次以上のキュムラントは常に 0 となることである [12]。そのため、3 次以上のキュムラントは、確率過程の非ガウス性を特徴づける量であると言える。

2 次のキュムラント $c_2^X(\tau)$ のフーリエ変換として、パワースペクトル $S_X(\omega)$ は定義される [81]。

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c_2^X(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \tag{3.6}$$

ここで、式中の i は虚数単位である。

n 次のキュムラント ($n \geq 3$) の $n-1$ 重フーリエ変換として、高次スペクトル (Higher-order spectra, HOS) が定義される。特に、 $n=3$ の場合、すなわち、3 次のキュムラント $c_3^X(\tau_1, \tau_2)$ を 2 重フーリエ変換して得られる量はバイスペクトルと呼ばれ [80]、以降 $B_X(\omega_1, \omega_2)$ で表す。

$$B_X(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_3^X(\tau_1, \tau_2) \exp(-i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)) d\tau_1 d\tau_2 \tag{3.7}$$

次節では、バイスペクトルの性質やその物理的意味について、パワースペクトルと比較しながら説明する。

3.2 バイスペクトルの諸性質と物理的意味

まず、バイスペクトルの対称性について触れたのち、バイスペクトルの物理的意味を述べる。2 次のキュムラント $c_2^X(\tau)$ は $c_2^X(-\tau) = c_2^X(\tau)$ なる対称性を有する [81]。この対称性とパワースペクトルの定義より、パワースペクトル $S_X(\omega)$ は $S_X(-\omega) = S_X(\omega)$ なる対称性を有する実数値関数となる。2 次のキュムラントの場合と同様に、3 次のキュムラント $c_3^X(\tau_1, \tau_2)$ も次のような対称性を有する [82]。

$$\begin{aligned}
c_3^X(\tau_1, \tau_2) &= c_3^X(\tau_2, \tau_1) = c_3^X(-\tau_2, \tau_1 - \tau_2) \\
&= c_3^X(-\tau_1, \tau_2 - \tau_1) = c_3^X(\tau_2 - \tau_1, -\tau_1) = c_3^X(\tau_1 - \tau_2, -\tau_2)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

式 (3.8) の対称性より、もし図 3.1 に示している $D_1, D_2, \dots, D_6$ のいずれかの領域での 3 次のキュムラントの値がわかれば、式 (3.8) の対称性を用いることで、すべての (τ_1, τ_2) における 3 次のキュムラントの値を求めることができる。例えば、ある $(\tau_1, \tau_2) \in D_1$ における値 $c_3^X(\tau_1, \tau_2)$ がわかれば、 $(\tau_2, \tau_1) \in D_2$ 、 $(-\tau_2, \tau_1 - \tau_2) \in D_3$ 、 $(-\tau_1, \tau_2 - \tau_1) \in D_4$ 、 $(\tau_2 - \tau_1, -\tau_1) \in D_5$ 、 $(\tau_1 - \tau_2, -\tau_2) \in D_6$ の 5 箇所の 3 次キュムラントの値も直ちに明らかになる。

式 (3.8) で表される 3 次のキュムラントの対称性およびバイスペクトルの定義式 (3.7) より、バイスペクトル

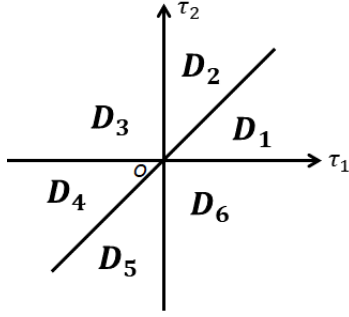


図 3.1 3 次のキュムラントの対称性から導かれる
 $\omega_1 - \omega_2$ 平面上の 6 領域.

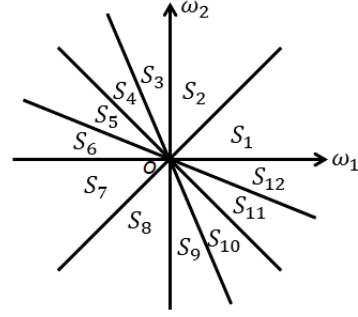


図 3.2 バイスpekトルの対称性から導かれる
 $\omega_1 - \omega_2$ 平面上の 12 領域.

$B_X(\omega_1, \omega_2)$ には次のような 12 の対称性が存在する [82].

$$\begin{aligned} B_X(\omega_1, \omega_2) &= B_X(\omega_2, \omega_1) = B_X^*(-\omega_2, \omega_1 + \omega_2) = B_X^*(-\omega_1, \omega_1 + \omega_2) \\ &= B_X(-\omega_1 - \omega_2, \omega_1) = B_X(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2) = B_X^*(-\omega_1, -\omega_2) = B_X^*(-\omega_2, -\omega_1) \\ &= B_X(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2) = B_X(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2) = B_X^*(\omega_1 + \omega_2, -\omega_1) = B_X^*(\omega_1 + \omega_2, -\omega_2) \end{aligned} \quad (3.9)$$

ここで、式中の $*$ は複素共役を表す. 3 次のキュムラントの時と同様に、もし図 3.2 に示す 12 の領域のいずれかについてバイスpekトルの値がわかれば、式 (3.9) の対称性を用いることで、すべての (ω_1, ω_2) におけるバイスpekトルの値を求めることができる. 例えば、ある $(\omega_1, \omega_2) \in S_1$ における値 $B_X(\omega_1, \omega_2)$ がわかれば、 $(\omega_2, \omega_1) \in S_2$, $(-\omega_1 - \omega_2, \omega_1) \in S_5$, $(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2) \in S_6$, $(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2) \in S_9$, $(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2) \in S_{10}$ の 5 箇所のバイスpekトルの値も直ちに明らかになる. また、 $B_X(\omega_1, \omega_2)$ の複素共役を考えることで、 $(-\omega_2, \omega_1 + \omega_2) \in S_3$, $(-\omega_1, \omega_1 + \omega_2) \in S_4$, $(-\omega_1, -\omega_2) \in S_7$, $(-\omega_2, -\omega_1) \in S_8$, $(\omega_1 + \omega_2, -\omega_1) \in S_{11}$, $(\omega_1 + \omega_2, -\omega_2) \in S_{12}$ の 6 箇所のバイスpekトルも求まる.

次に、バイスpekトルの物理的意味について、パワースpekトルと比較しながら説明する. 以降、定常確率過程 $X(t)$ の平均を μ_X と書く. パワースpekトルを逆フーリエ変換すれば、2 次のキュムラント $c_2^X(\tau)$ が得られる.

$$c_2^X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega \quad (3.10)$$

式 (3.10) において $\tau = 0$ とすることで、次の関係式が得られる.

$$c_2^X(0) = E[(X(t) - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (3.11)$$

これはパワースpekトルが確率過程 $X(t)$ の 2 次の中心モーメント $E[(X(t) - \mu_X)^2]$ の周波数領域における分布であることを表している.

同様に、バイスpekトル $B_X(\omega_1, \omega_2)$ に逆 2 重フーリエ変換を施すと、3 次のキュムラント $c_3^X(\tau_1, \tau_2)$ が得られる.

$$c_3^X(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\omega_1, \omega_2) \exp(i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)) d\omega_1 d\omega_2 \quad (3.12)$$

式 (3.12) において $\tau_1 = \tau_2 = 0$ とすると、次の関係式が得られる.

$$c_3^X(0, 0) = E[(X(t) - \mu_X)^3] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (3.13)$$

式 (3.13) は、バイスpekトルが確率過程 $X(t)$ の 3 次の中心モーメントの周波数領域における分布であることを表している. これに関して、ガウス過程の 3 次のキュムラント $c_3^X(\tau_1, \tau_2)$ は常に 0 であるため、式 (3.7) より、対応する

バイスペクトルも常に 0 となる。すなわち、バイスペクトルは非ガウス過程特有の量である。3 次の中心モーメントは確率過程の非対称性に関わる量であるため、バイスペクトルは非ガウス性の中でも、特に非対称性の周波数領域における性質を表すことがわかる。また、式 (3.9) のバイスペクトルの対称性を利用すると、式 (3.13) は次のように書き直すことができる。

$$E[(X(t) - \mu_X)^3] = 6 \int_0^\infty \int_0^\infty \text{Re} B_X(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (3.14)$$

式中の Re は複素数の実部を表す。

このバイスペクトルの性質より、以降、バイスペクトルを扱う際は、 $0 \leq \omega_1, \omega_2$ の範囲のみを対象とする。また、式 (3.14) より、確率過程の非対称性を表す量である 3 次の中心モーメントはバイスペクトルの実部のみから求まるため、以降は実部のみに注目する。

確率過程に含まれる各周波数成分の複素振幅を用いて、バイスペクトルの物理的意味を考える。定常確率過程は、時間 t に対して $-\infty \leq t \leq \infty$ で定義されるため、これはフーリエ変換できない。そこで、代わりに次で定義される $-T/2 \leq t \leq T/2$ で両端を打ち切ったフーリエ変換 $F_X(\omega)$ を考える。

$$F_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} (X(t) - \mu_X) \exp(-i\omega t) dt \quad (3.15)$$

ここで、 $X(t)$ は確率過程であるため、 $F_X(\omega)$ もまた、各 ω に対して確率変数となる。 $F_X(\omega)$ を用いると、パワースペクトル $S_X(\omega)$ は次のようにも表現できる [81]。

$$S_X(\omega) = 2\pi \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[|F_X(\omega)|^2] \quad (3.16)$$

これより、パワースペクトルが各周波数成分のパワーの期待値であることがわかる。同様に、 $F_X(\omega)$ を用いて、バイスペクトル $B_X(\omega_1, \omega_2)$ は次のようにも表現できる [80]。

$$B_X(\omega_1, \omega_2) = 2\pi \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[F_X(\omega_1) F_X(\omega_2) F_X^*(\omega_1 + \omega_2)] \quad (3.17)$$

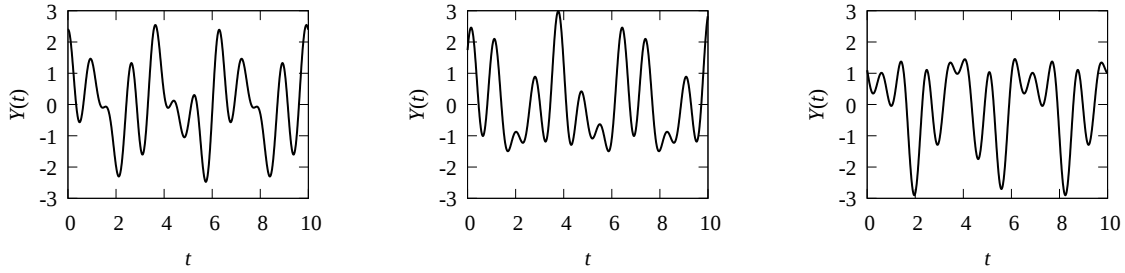
式 (3.17) より、バイスペクトルは $\omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ の 3 つの周波数成分の積の期待値であり、これが非 0 の値を示すとき、これら 3 周波数成分の間には依存関係が存在する。また、式 (3.14) より、バイスペクトルは非対称性の周波数領域における分布であることから、バイスペクトルは、確率過程の非対称性が、どの 3 周波数成分間の依存性に由来しているかを表す。また、バイスペクトルの絶対値が大きいほど、その 3 周波数成分間にはより多くの非対称性に関する情報が含まれていることを表す。

3.3 確率過程の 3 周波数成分間の依存性と非対称性

3 周波数成分間の依存性と非対称性について説明するために、簡単な例として、次で定義される定常確率過程 $Y(t)$ を考える。

$$Y(t) = \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + \cos((\Omega_1 + \Omega_2)t + \theta_3) \quad (3.18)$$

ここで、 $0 < \Omega_2 \leq \Omega_1$ とし、 θ_1 と θ_2 は互いに独立な $[-\pi, \pi)$ の一様分布に従う確率変数である。 θ_3 については 3 種類を考える。(a) θ_3 もまた、 θ_1 と θ_2 と互いに独立な $[-\pi, \pi)$ の一様分布に従う確率変数である場合、(b) $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$ である場合、(c) $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 + \pi$ である場合の 3 通りである。 $\Omega_1 = 5, \Omega_2 = 2$ とした場合の $Y(t)$ の標本関数の一例が図 3.3 である。図 3.3(a) のように、 θ_3 もまた θ_1 と θ_2 と互いに独立な確率変数である場合、 $Y(t)$ に含まれる $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_1 + \Omega_2$ の 3 周波数成分間に依存関係は存在せず、 $Y(t)$ に非対称性はない。 $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$ または $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 + \pi$



(a) θ_3 もまた θ_1, θ_2 と互いに独立な場合.

(b) $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$ の場合.

(c) $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 + \pi$ の場合.

図 3.3 $Y(t)$ の標本関数. $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ の関係性によって非対称性が変化する.

である場合, $Y(t)$ に含まれる $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_1 + \Omega_2$ の 3 周波数成分間に依存関係が生じ, それに起因して $Y(t)$ に非対称性が生じる. 図 3.3(b), (c) より, 位相差 π の有無に従って, その非対称性の向きは異なる. これは, 依存関係にある 3 周波数成分の位相の関係によって, 非対称性の向きが変化することを表している.

また, $Y(t)$ の 3 次のキュムラント $c_3^Y(\tau_1, \tau_2)$ を求め, それに 2 重フーリエ変換を施すことで, $Y(t)$ のパイスpekトル $B_Y(\omega_1, \omega_2)$ が求まる. $0 \leq \omega_2 \leq \omega_1$ における $B_Y(\omega_1, \omega_2)$ は次の通り.

$$B_Y(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 0 & \theta_3 \text{ is independent of } \theta_1 \text{ and } \theta_2 \\ \frac{1}{8}\delta(\omega_1 - \Omega_1)\delta(\omega_2 - \Omega_2) & \theta_3 = \theta_1 + \theta_2 \\ -\frac{1}{8}\delta(\omega_1 - \Omega_1)\delta(\omega_2 - \Omega_2) & \theta_3 = \theta_1 + \theta_2 + \pi \end{cases} \quad (3.19)$$

ここで, 式中の $\delta(\cdot)$ はディラックのデルタ関数である. これより, $Y(t)$ の各周波数成分に依存関係が存在しない場合, パイスpekトルは常に 0 となる. 一方, $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_1 + \Omega_2$ の 3 周波数成分間で依存関係が存在する場合は, それに対応する位置 $(\omega_1, \omega_2) = (\Omega_1, \Omega_2)$ でパイスpekトルはピークを有することがわかる. そして, そのピークの符号は, $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$ の場合は正, $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 + \pi$ の場合は負となり, これは各場合での $Y(t)$ の非対称性の向きと一致する.

以上は, 確率過程に含まれる 3 つの周波数成分間に依存関係が存在する場合, その確率過程には非対称性が存在すること, またその 3 つの周波数成分の位相の関係によって, 確率過程の非対称性の向きが変化することの一例である. そして, パイスpekトルは, その依存関係のある周波数成分の組み合わせと, 位相の関係に由来した非対称性の向きに関する情報を与える.

3.4 クロスパイスpekトル

本節では, 第 4 章で用いるクロスパイスpekトルの定義とその物理的意味を, クロスpekトルと比較しながら述べる.

平均 μ_X の定常確率過程 $X(t)$ と平均 μ_U の定常確率過程 $U(t)$ のクロスpekトル $S_{UX}(\omega)$ を考える. クロスpekトルは $U(t)$ と $X(t)$ の相互共分散関数 $E[(U(t) - \mu_U)(X(t + \tau) - \mu_X)]$ のフーリエ変換対として定義されるが, 式 (3.15) で定義される $F_X(\omega)$ と, 式 (3.15) において $X \rightarrow U$ とすることで得られる, U の両端を打ち切ったフーリエ変換 $F_U(\omega)$ を用いれば, 次のように書ける.

$$S_{UX}(\omega) = 2\pi \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[F_U(\omega)F_X^*(\omega)] \quad (3.20)$$

$U(t)$ と $X(t)$ がシステムの入出力関係にある場合, クロスpekトルの絶対値は入力と応答の各周波数成分の相関の強さを示す指標となる. しかし, クロスpekトルは 2 次の統計量であるため, 非ガウス性に関する情報は有していない.

クロススペクトルを拡張した量として、 $X(t)$ と $U(t)$ のクロスバイスペクトル $B_{UUX}(\omega_1, \omega_2)$ が存在する。これは、 $E[(U(t) - \mu_U)(U(t + \tau_1) - \mu_U)(X(t + \tau_2) - \mu_X)]$ の、 τ_1 と τ_2 に関する 2 重フーリエ変換として定義されるが、 $F_X(\omega)$ と $F_U(\omega)$ を用いると次のように書ける [80]。

$$B_{UUX}(\omega_1, \omega_2) = 2\pi \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[F_U(\omega_1)F_U(\omega_2)F_X^*(\omega_1 + \omega_2)] \quad (3.21)$$

クロスバイスペクトルは、 $U(t)$ の ω_1 および ω_2 成分と、 $X(t)$ の $\omega_1 + \omega_2$ 成分の依存関係を表す。 $U(t)$ と $X(t)$ がシステムの入出力関係にあるとき、クロスバイスペクトルは入力と応答の 3 周波数成分の依存関係を表す。さらに、 $U(t)$ を非ガウス入力、 $X(t)$ を入力 $U(t)$ を持つ線形系の応答とみなす場合、応答の非ガウス性は入力の非ガウス性のみに起因し、 $B_{UUX}(\omega_1, \omega_2)$ は、入力の非ガウス性が、入力と応答のどの周波数成分の依存性により応答に伝達・増幅されるかを表す。

クロスバイスペクトル $B_{UUX}(\omega_1, \omega_2)$ には次のような対称性が存在する [74]。

$$B_{UUX}(\omega_1, \omega_2) = B_{UUX}(\omega_2, \omega_1) = B_{UUX}^*(-\omega_1, -\omega_2) = B_{UUX}^*(-\omega_2, -\omega_1) \quad (3.22)$$

クロスバイスペクトルの場合は、 $\omega_1 = \omega_2$ と $\omega_1 + \omega_2 = 0$ の 2 つの直線によって区切られる 4 つの領域について、対称性が現れる。つまり、図 3.2 の $S_1 + S_{11} + S_{12}$ なる領域におけるクロスバイスペクトルの値がわかれば、すべての (ω_1, ω_2) におけるクロスバイスペクトルの値を求めることができる。

第 4 章

バイスペクトルに着目した非ガウス性励振が応答の非対称性に与える影響の考察

4.1 緒言

本章では、応答の確率密度関数の非対称性が、入力非ガウス性に起因する場合を対象に考える。現実の不規則入力の中には、顕著な非ガウス性を示すものが存在し、そのような入力をガウス過程でモデル化し応答解析を行ってしまうと、系の安全性や信頼性に強く関わる大きな応答を示す確率を低く見積もってしまうなど、誤った結果を導いてしまう恐れがある。従って、不規則入力を非ガウス過程でモデル化し、その入力非ガウス性が系の応答に与える影響を考慮することが重要である。

先行研究 [43, 45, 77] では、非ガウス確率過程モデルの一つである Cai and Lin モデル [36] を入力として持つ 1 自由度系の応答特性の調査が行われた。Cai and Lin モデルは、直流成分が卓越するパワースペクトルと、任意の確率密度関数で非ガウス過程を規定するモデル化手法であり、工学的に重要な幅広い非ガウス入力を表現することができる。先行研究では、入力の Cai and Lin モデルに含まれる、パワースペクトルの帯域幅を支配する帯域幅パラメータと、非ガウス確率密度関数の 2 つを様々に変化させて、応答の確率密度関数の特性が調べられた。先行研究を通して、帯域幅パラメータの大きさの違いによって、応答の確率密度関数に現れる入力非ガウス性の影響の度合いが大きく変化することが確認された。また、このような帯域幅パラメータに依存した入力非ガウス性の影響の変化は、入力の確率密度関数によらず共通することが確認された。よって、入力非ガウス性が応答の確率密度関数に与える影響には、帯域幅パラメータによって特徴づけられる入力の周波数領域における性質が大きく関わっていると予想できる。この点に関して、先行研究では、入力のパワースペクトルの形状やそれに対応する入力波形の特徴から考察が行われた。しかし、2 次の統計量であるパワースペクトルには非ガウス性に関する情報は含まれていないため、入力非ガウス性の情報が周波数領域ではどのように分布するのか、その非ガウス性の情報の分布が入力の帯域幅パラメータの変化に対してどのような変化をするのか、また、その入力非ガウス性の情報がどのように応答に伝達され、応答の確率密度関数に現れるのか、といった周波数領域における非ガウス性の入出力関係の構造については、いまだ十分に明らかとなっていない。この点を明らかにし、先行研究で得られた知見に対して理論的な裏付けを与えることができれば、より複雑な系である、非ガウス入力を受ける非線形系や多自由度系の応答解析にも適用できる重要かつ基礎的な知見を得る事ができる。

本研究では、上記の未解明な点を、バイスペクトルおよびクロスバイスペクトルを用いて明らかにする。最初に、Cai and Lin モデルに対して、バイスペクトルの解析解を導出する。このモデルの帯域幅パラメータに依存した、非対称性の周波数領域における特性の変化を、導出した解析解に基づいて示す。そして、Cai and Lin モデルのバイスペクトルと線形系の周波数応答関数から、入力と応答のクロスバイスペクトルが求まる。これを用いて、入力非対称性がどの周波数成分により応答に伝達・増幅されるか、またはされないかという点を調査し、先行研究 [43, 45, 77] で確認され

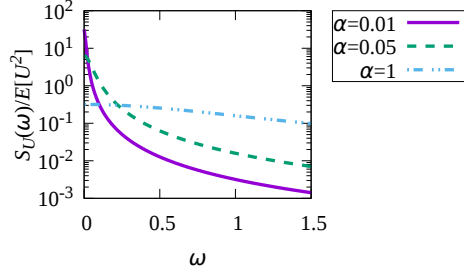


図 4.1 $E[U^2]$ で規格化された入力パワースペクトル $S_U(\omega)$.

た帯域幅パラメータの値と、応答の確率密度関数の形状との関係を、高次スペクトルの観点から明らかにする。

4.2 非ガウス入力とそのバイスペクトルの導出

4.2.1 Cai and Lin モデル

本章では、定常非ガウス過程を入力として持つ 1 自由度線形系の定常応答を考える。運動方程式は次の通り。

$$\ddot{X} + 2\zeta\dot{X} + X = U(t) \quad (4.1)$$

ζ は減衰比、 $U(t)$ は定常非ガウス過程である。また、式中の t は系の不減衰固有角振動数によって無次元化された時間を表す。この運動に対して、前章で導入したバイスペクトルとクロスバイスペクトルの特徴を利用し、入力の非ガウス性、特に非対称性が応答の確率密度関数に与える影響について考察する。

与えられた統計量から非ガウス過程を規定するモデル化手法には様々なものがあるが、その中のひとつとして Cai と Lin によって提案されたモデル [36] がある。このモデルは、後述する $\omega = 0$ で卓越するパワースペクトルと、任意の確率密度関数を持つような、工学的に重要な幅広い非ガウス確率過程を表現できる。そのため、非ガウス入力系の応答に与える影響に関する研究において、しばしば用いられている [43, 45, 77]。Cai and Lin モデルの上記の特徴をふまえて、またこれらの先行研究で得られた Cai and Lin モデル中の帯域幅パラメータと応答の確率密度関数の関係について、バイスペクトルとクロスバイスペクトルの観点からさらに詳細な調査を行うことを目的に、本研究でもこのモデルを入力 $U(t)$ として採用する。

Cai and Lin モデルでは、平均 0 の定常非ガウス入力 $U(t)$ は、定数 $\alpha > 0$ と拡散係数 $D(\cdot)$ を用いて、次の伊藤型確率微分方程式により記述される。

$$dU = -\alpha U dt + D(U) dB(t) \quad (4.2)$$

ここで、 $B(t)$ は標準ブラウン運動である。 $U(t)$ が式 (4.2) で表されると、 $U(t)$ のパワースペクトル $S_U(\omega)$ は次の通り。

$$S_U(\omega) = \frac{\alpha E[U^2]}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} \quad (4.3)$$

$\alpha = 0.01, 0.05, 1$ の場合、 $E[U^2]$ で規格化したパワースペクトル $S_U(\omega)/E[U^2]$ を図 4.1 に示す。図 4.1 からわかるように、 $S_U(\omega)$ は $\omega = 0$ でピークを持つ様々な形状のパワースペクトルを表現できる。また、 α は帯域幅を表すパラメータであり、 α が大きいほど入力はホワイトノイズに近づき、 α が小さいほど $\omega = 0$ の直流成分が卓越した入力となる。式 (4.2) 中の拡散係数 $D(\cdot)$ は、 $U(t)$ の確率密度関数 $p_U(u)$ を用いて次のように決定される。

$$D^2(u) = \frac{-2\alpha}{p_U(u)} \int_{-\infty}^u sp_U(s) ds \quad (4.4)$$

拡散係数を式 (4.4) と定めることで, Cai and Lin モデルの確率密度関数は, α にかかわらず $p_U(u)$ となる [36].

4.2.2 Cai and Lin モデルのバイスペクトルの導出

Cai and Lin モデルの非ガウス性は, 確率密度関数 $p_U(u)$ を通して与えられるが, その非ガウス性を周波数領域上で可視化する高次スペクトルについては, まだ導出が行われておらず, その性質も明らかになっていない. そこで, 本節では, Cai and Lin モデルについて, 高次スペクトルの 1 つであるバイスペクトルの導出を行う.

Cai and Lin モデルのバイスペクトルの導出を行うにあたって, まず Cai and Lin モデルの 3 次キュムラント $c_3^U(t_2 - t_1, t_3 - t_1) = E[U(t_1)U(t_2)U(t_3)]$ ($t_1 \leq t_2 \leq t_3$) の導出を行う. 3 次の結合確率密度関数 $p_U(u_3, t_3; u_2, t_2; u_1, t_1)$ を用いると, $c_3^U(t_2 - t_1, t_3 - t_1)$ は

$$c_3^U(t_2 - t_1, t_3 - t_1) = E[U(t_1)U(t_2)U(t_3)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_3 u_2 u_1 p_U(u_3, t_3; u_2, t_2; u_1, t_1) du_3 du_2 du_1 \quad (4.5)$$

となる. $U(t)$ は式 (4.2) のように伊藤型確率微分方程式で記述されるので, $U(t)$ はマルコフ性を有する. よって, 式 (4.5) 中の結合確率密度関数 $p_U(u_3, t_3; u_2, t_2; u_1, t_1)$ は, 条件付き確率密度関数 $p_U(\cdot|\cdot)$ を用いて次のように書き直すことができる.

$$\begin{aligned} p_U(u_3, t_3; u_2, t_2; u_1, t_1) &= p_U(u_3, t_3|u_2, t_2)p_U(u_2, t_2|u_1, t_1)p(u_1, t_1) \\ &= p_U(u_3, t_3|u_2, t_2)p_U(u_1, t_2|u_2, t_1)p(u_2, t_1) \end{aligned} \quad (4.6)$$

ここで, Cai and Lin モデルの $U(t)$ が時間反転性 $p_U(u_2, t_2|u_1, t_1)p(u_1, t_1) = p_U(u_1, t_2|u_2, t_1)p(u_2, t_1)$ を有していることを利用した. Cai and Lin モデルの $U(t)$ が時間反転性を有することは, $U(t)$ が detailed balance condition[56] を満たしていることから確認できる. 式 (4.6) を用いて, 式 (4.5) を変形する.

$$\begin{aligned} c_3^U(t_2 - t_1, t_3 - t_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_3 u_2 u_1 p_U(u_3, t_3; u_2, t_2; u_1, t_1) du_3 du_2 du_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_3 u_2 u_1 p_U(u_3, t_3|u_2, t_2)p_U(u_1, t_2|u_2, t_1)p(u_2, t_1) du_3 du_2 du_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u_3 p_U(u_3, t_3|u_2, t_2) du_3 \int_{-\infty}^{\infty} u_1 p_U(u_1, t_2|u_2, t_1) du_1 \right\} u_2 p(u_2, t_1) du_2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

式 (4.7) 右辺の $\int_{-\infty}^{\infty} u_3 p_U(u_3, t_3|u_2, t_2) du_3$ と $\int_{-\infty}^{\infty} u_1 p_U(u_1, t_2|u_2, t_1) du_1$ は, それぞれ $U(t_2) = u_2$ および $U(t_1) = u_2$ と条件のついた $U(t)$ の条件付き平均である. 以降, これらの条件付き期待値は, $E[U(t_3)|U(t_2) = u_2] = \int_{-\infty}^{\infty} u_3 p_U(u_3, t_3|u_2, t_2) du_3$ および $E[U(t_2)|U(t_1) = u_2] = \int_{-\infty}^{\infty} u_1 p_U(u_1, t_2|u_2, t_1) du_1$ と書く.

次に, これら条件付き期待値の導出を行う. 式 (4.2) において両辺期待値をとり, dt で割ると, $U(t)$ の平均に関する常微分方程式が得られる.

$$\frac{d}{dt} E[U(t)] = -\alpha E[U(t)] \quad (4.8)$$

これに初期条件として, $E[U(t_3)|U(t_2) = u_2]$ の場合は $E[U(t_2)] = u_2$, $E[U(t_2)|U(t_1) = u_2]$ の場合は $U(t_1) = u_2$ をそれぞれ与えて解くと, 求めるべき条件付き平均値

$$E[U(t_3)|U(t_2) = u_2] = \int_{-\infty}^{\infty} u_3 p_U(u_3, t_3|u_2, t_2) du_3 = u_2 \exp(-\alpha(t_3 - t_2)) \quad (4.9)$$

$$E[U(t_2)|U(t_1) = u_2] = \int_{-\infty}^{\infty} u_1 p_U(u_1, t_2|u_2, t_1) du_1 = u_2 \exp(-\alpha(t_2 - t_1)) \quad (4.10)$$

を得る.

式 (4.9) と式 (4.10) を式 (4.7) に代入すると, 次を得る.

$$\begin{aligned}
 c_3^U(t_2 - t_1, t_3 - t_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u_3 p_U(u_3, t_3 | u_2, t_2) du_3 \int_{-\infty}^{\infty} u_1 p_U(u_1, t_2 | u_2, t_1) du_1 \right\} u_2 p(u_2, t_1) du_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} u_2 \exp(-\alpha(t_3 - t_2)) u_2 \exp(-\alpha(t_2 - t_1)) u_2 p(u_2, t_2) du_2 \\
 &= \exp(-\alpha(t_3 - t_1)) \int_{-\infty}^{\infty} u_2^3 p(u_2, t_2) du_2 = E[U^3] \exp(-\alpha(t_3 - t_1))
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

ここで, $U(t)$ の定常性により, $E[U^3(t_2)]$ が時刻 t_2 に依らないことを用いた. $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_1$ ($0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$) を導入して整理すると, Cai and Lin モデル $U(t)$ の 3 次キュムラント $c_3^U(\tau_1, \tau_2)$ は

$$c_3^U(\tau_1, \tau_2) = E[U^3] \exp(-\alpha\tau_2), \quad (\tau_1, \tau_2) \in D_2 \tag{4.12}$$

となる. 式 (4.12) 中の D_2 は, 図 3.1 中の領域の 1 つである. ほかの 5 つの領域についても, 式 (3.8) を用いて 3 次のキュムラントを次のように求めることができる.

$$c_3^U(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} E[U^3] \exp(-\alpha\tau_1) & (\tau_1, \tau_2) \in D_1 \\ E[U^3] \exp(-\alpha(\tau_2 - \tau_1)) & (\tau_1, \tau_2) \in D_3 \\ E[U^3] \exp(\alpha\tau_1) & (\tau_1, \tau_2) \in D_4 \\ E[U^3] \exp(\alpha\tau_2) & (\tau_1, \tau_2) \in D_5 \\ E[U^3] \exp(-\alpha(\tau_1 - \tau_2)) & (\tau_1, \tau_2) \in D_6 \end{cases} \tag{4.13}$$

こうして得られた 3 次のキュムラントを 2 重フーリエ変換することで, $U(t)$ のパイスペクトル $B_U(\omega_1, \omega_2)$ が求まる.

$$\begin{aligned}
 B_U(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_3^U(\tau_1, \tau_2) \exp(-i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)) d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= \frac{E[U^3]}{(2\pi)^2} \frac{2\alpha^2(3\alpha^2 + \omega_1^2 + \omega_1\omega_2 + \omega_2^2)}{(\alpha^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2)(\alpha^2 + \omega_1^2)(\alpha^2 + \omega_2^2)}, \quad (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

式 (4.14) は, すべての (ω_1, ω_2) について成立する. 3 次キュムラントとパイスペクトルには, 入力の変動分布の影響が $E[U^3]$ に現れるのみである. 従って, 帯域幅パラメータ α と入力の変動分布が同じなら, 3 次キュムラントとパイスペクトルは入力の変動分布によらず同じ形状を示す. $\alpha = 0.01, 0.05, 1$ の場合, $E[U^3]$ で規格化したパイスペクトル $B_U(\omega_1, \omega_2)/E[U^3]$ を図 4.2 の上段に示す. なお, 式 (3.9) に示すパイスペクトルの対称性により, $0 \leq \omega_1, \omega_2$ の領域のみを図示している. また, このパイスペクトルの $\omega_1 = \omega_2$ 軸上の様子を, 図 4.2 の下段に示す.

図 4.2(a) のように, α が小さい場合, Cai and Lin モデルのパイスペクトルは $(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)$ で大きなピークを持ち, $(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)$ から離れるに従って速やかに減衰する. $B_U(0, 0)$ は直流成分に含まれる非対称性を示すため, α が小さいとき, Cai and Lin モデルの非対称性に関する情報は直流成分に集中しているとみることができる. α が大きくなるに従って (図 4.2(b)), ピークの値は小さく, $(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)$ 付近の変化が緩やかになる. そして, 図 4.2(c) のように, α が大きい場合, 変化が緩やかで平面に近い形状をとる. これは, α が大きい場合, 様々な $\omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ の 3 つの周波数成分間で依存性が存在し, 非対称性に関する情報が周波数領域において広く分布していることを表している.

本節では, Cai and Lin モデルのパイスペクトルの導出を行い, その結果をもとに, このモデルの周波数領域における非対称性の特性を, 帯域幅 α を大きく変化させつつ確認した. これらの非対称性の特性は, パワースペクトル図 4.1 からは読み取れず, パイスペクトルを求めることで初めて明らかになることである.

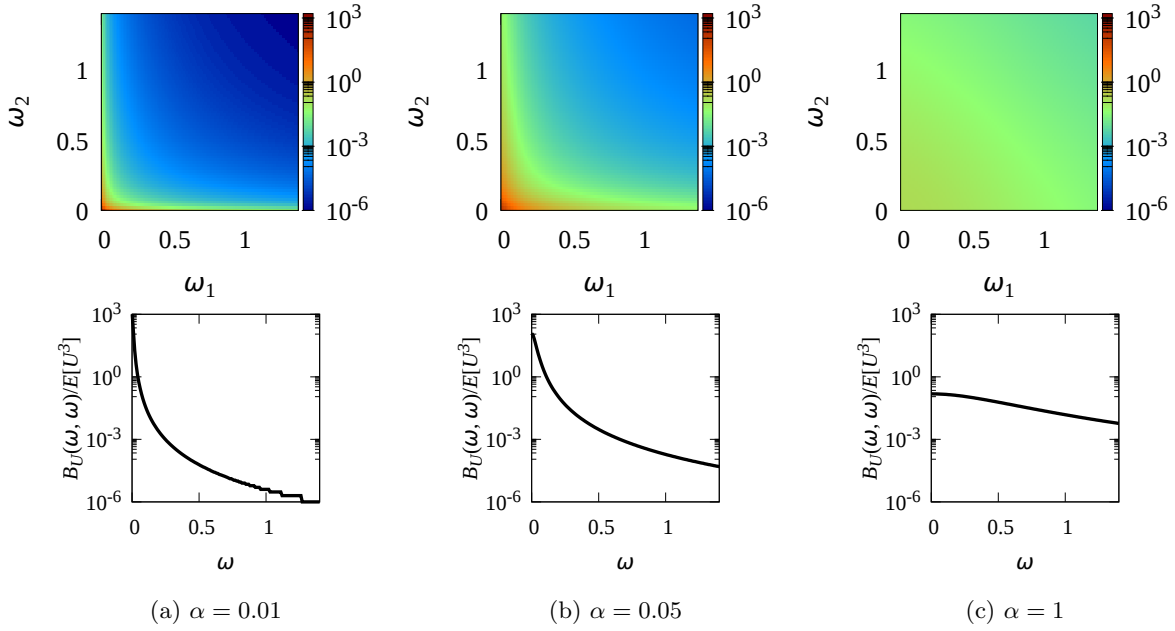


図 4.2 $E[U^3]$ で規格化された $U(t)$ のバイスペクトル $B_X(\omega_1, \omega_2)$. (上図: $\omega_1 - \omega_2$ 平面上の様子, 下図: 直線 $\omega_1 = \omega_2$ 上の様子). α が小さい場合, バイスペクトルは原点に大きなピークを有し, これは, $U(t)$ の非対称性の情報が直流成分に集中していることを表す. α が大きい場合, バイスペクトルは平面に近い形状をとり, これは, 非対称性の情報が様々な周波数成分に広く

分布していることを表す.

4.3 クロスバイスペクトルを用いた非ガウス入力線形系の応答の確率密度関数に与える影響の考察

本節では, 運動方程式 (4.1) で示される系について, Cai and Lin モデルで与えられる入力 $U(t)$ の非ガウス性, 特に非対称性が応答の確率密度関数に与える影響を, 入力と応答のクロスバイスペクトルの絶対値を用いて考察する. 減衰比 ζ は, 本研究では, $\zeta = 0.05$ とする.

4.3.1 先行研究で得られた知見の概要

先行研究 [43, 45] では, 運動方程式 (4.1) で表される系に対してモンテカルロシミュレーションを行い, 変位応答の確率密度関数が入力の帯域幅パラメータ α に依存して大きく変化することが示された. 先行研究で得られた知見の概要を以下に記す. 計算例として用いる入力の確率密度関数 $p_U(u)$ として, 次式で与えられる, 平均が 0 となるように平行移動した分散 1 の対数正規分布を考える.

$$p_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \log s(u + m\sqrt{s})}} \exp\left(-\frac{(\log(u/m + \sqrt{s}))^2}{2 \log s}\right), \quad m = \frac{5}{\sqrt{6}}, s = 1.2 \quad (4.15)$$

帯域幅パラメータ α については, 系の周波数応答関数の帯域幅を表す ζ と比較して, それより小さい値, 等しい値, 大きい値として $\alpha = 0.01, 0.05, 1$ を選んだ.

モンテカルロシミュレーションでは, Cai and Lin モデルの定義式である確率微分方程式 (4.2) をオイラー丸山法

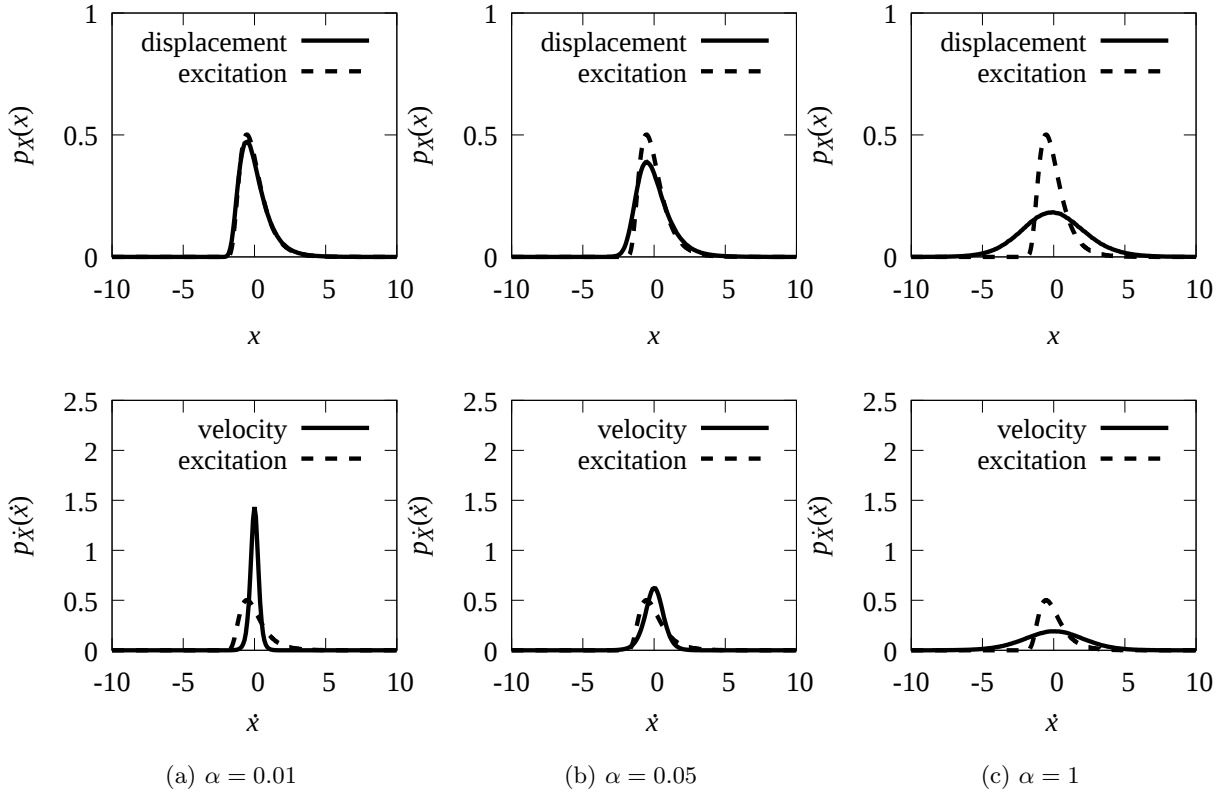


図 4.3 シミュレーションから得られた応答の確率密度関数（上図: 変位応答, 下図: 速度応答）.

[83] で数値的に解くことで、与えた対数正規分布と α に対応したパワースペクトルの両方を有する定常非ガウス入力の変位関数を多数生成する．これを用いて運動方程式 (4.1) の応答計算を行い、その応答標本をもとに、定常変位応答と定常速度応答の確率密度関数を求めた．運動方程式を数値的に解く際には、4 次の Runge-Kutta 法を用いた．数値計算の時間刻み幅は $\alpha = 0.01$ と 0.05 の場合は 0.05 、 $\alpha = 1$ の場合は 0.01 とした．標本関数は 2,000,000 本で、各標本関数は応答が定常だとみなせる無次元時間で 175 まで計算した．

モンテカルロシミュレーションにより得られた変位応答の確率密度関数 $p_X(x)$ が図 4.3 上段である．図中の実線が変位応答の確率密度関数、破線が入力の対数正規分布である．図 4.3(a) 上段の図より、入力の帯域幅が系の周波数応答関数の帯域幅 $\zeta = 0.05$ より狭い場合、変位応答の確率密度関数は入力の確率密度関数の非ガウス性をよく反映した形となっている．そして、 α が大きくなり帯域幅が広くなるにつれて、変位応答の確率密度関数はガウス分布に近い形状をとるようになる．図 4.3(c) 上段の図より、入力の帯域幅が系の周波数応答関数の帯域幅より広い場合、入力の対数正規分布の非対称性は変位応答の確率密度関数にはほとんど現れない．以上は対数正規分布特有の傾向ではなく、入力の Cai and Lin モデルの確率密度関数として、ガンマ分布やラプラス分布、双峰性を示す分布など、様々な形状の非ガウス分布を選んだ場合でも共通して確認されている [43, 45]．

図 4.3 下段はモンテカルロシミュレーションによって得られた速度応答の確率密度関数 $p_{\dot{X}}(\dot{x})$ を表している．変位応答の図と同様に、図中の実線が速度応答の確率密度関数、破線が入力の対数正規分布である．図より、速度応答の確率密度関数は、 α の値によらず常に入力の非対称性を有さず、ガウス分布に近い形状をとっている．これも対数正規分布特有の傾向ではなく、入力の Cai and Lin モデルの確率密度関数として、ガンマ分布やバイモーダル分布、ラプラス分布を選んだ場合でも確認できる．

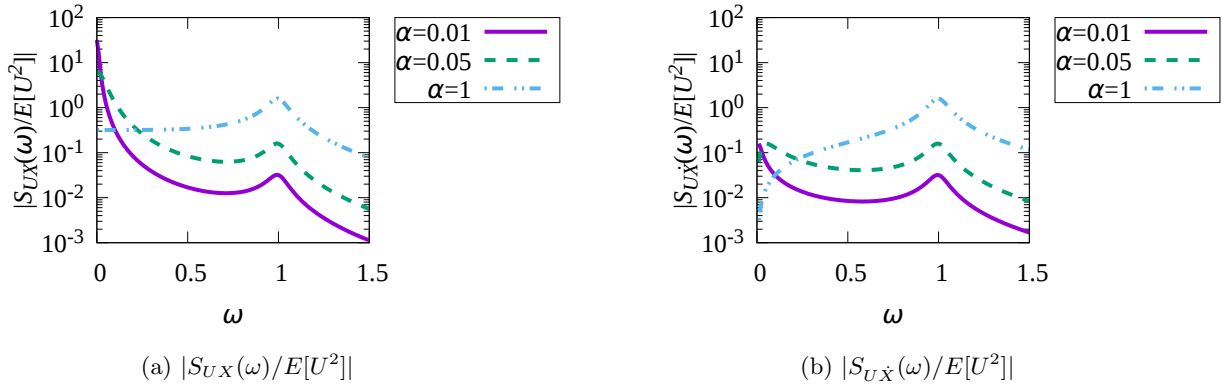


図 4.4 規格化されたクロススペクトル.

以上のように、先行研究において、Cai and Lin モデルを入力として持つ線形系の応答は、入力周波数特性を特徴づける帯域幅パラメータに大きく依存することと、応答の確率密度関数に現れる入力の非ガウス性の度合いが、変位応答と速度応答で大きく異なることが報告されている。先行研究では、この知見に関する考察は、2 次の統計量である入力のパワースペクトルや、それに対応する入力波形の特徴に着目して行われてきた。しかし、第 3 章で述べた通り、パワースペクトルには非ガウス性に関する情報は含まれていないため、入力の周波数特性と、入力の非ガウス性が応答に与える影響度合いの関係を明らかにするには、まだ十分ではない。そこで、高次スペクトルを用いて議論することで、4.2.2 項で述べた入力の非対称性の周波数領域における分布の特徴とあわせて、入力の非ガウス性がどのような周波数成分を通してどの程度応答へ反映されるかといった点が明らかになると期待できる。本研究では、式 (4.1) で表される運動に対して、高次スペクトルの 1 種であるクロスバイスペクトルを解析する。入力を持つ非ガウス性、特に非対称性が応答の確率密度関数に反映されることを、本研究では非ガウス性の伝達と呼ぶ。次節では、図 4.3 で示した確率密度関数とクロスバイスペクトルを対応させながら、非ガウス性の伝達の度合いや、またどのような周波数成分を通して伝達されるかを可視化し、それらが入力の非ガウス性の周波数領域における分布の仕方に依存してどのように変化するかを明らかにする。

4.3.2 クロスバイスペクトルを用いた考察

前節で示した先行研究によって得られた傾向について、クロスバイスペクトルを図示しながら考察を行う。入力の帯域幅 α としては、図 4.3 の場合と同様に、 $\alpha = 0.01, 0.05, 1$ とし、幅広い α について考える。

線形系を対象とする場合、入力と変位応答のクロススペクトル $S_{UX}(\omega)$ 、および入力と速度応答のクロススペクトル $S_{U\dot{X}}(\omega)$ は、入力のパワースペクトル $S_U(\omega)$ と系の周波数応答関数 $H(\omega) = 1/(1 - \omega^2 + i2\zeta\omega)$ を用いて、次のように表現できる。

$$S_{UX}(\omega) = H^*(\omega)S_U(\omega) \quad (4.16)$$

$$S_{U\dot{X}}(\omega) = -i\omega H^*(\omega)S_U(\omega) \quad (4.17)$$

この式より、Cai and Lin モデルを入力として持つ 1 自由度線形系の、規格化されたクロススペクトルの絶対値 $|S_{UX}(\omega)/E[U^2]|$ 、 $|S_{U\dot{X}}(\omega)/E[U^2]|$ は図 4.4 となる。これより、変位応答については、入力の帯域幅が系の周波数応答関数の帯域幅より狭い場合 ($\alpha = 0.01$) は、入力の直流成分が持つパワーが応答によく伝達されており、また共振周波数成分 ($\omega = 1$) のパワーも系により増幅されていることがわかる。また、入力の帯域幅が系の周波数応答関数の帯域幅より広い場合 ($\alpha = 1$) は、共振周波数成分のパワーが系により増幅され、応答によく現れることがわかる。一方、

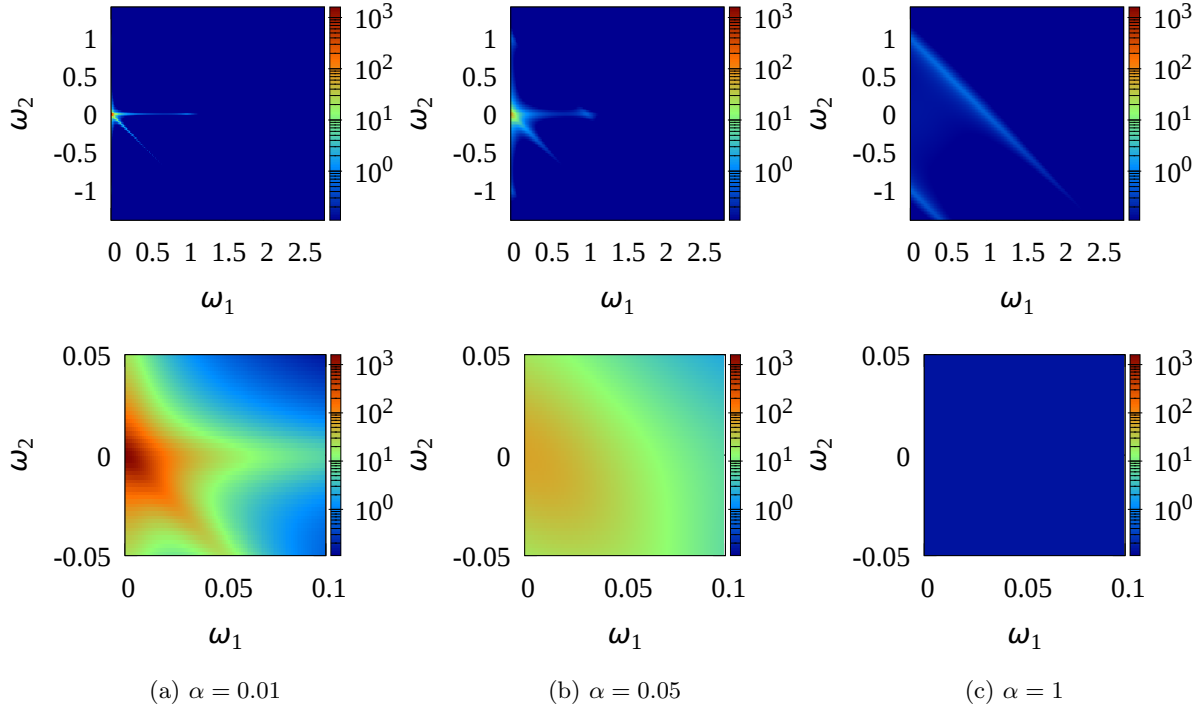


図 4.5 規格化されたクロスバイスペクトルの絶対値 $|B_{UUX}(\omega_1, \omega_2)/E[U^3]|$ (下図は原点付近の拡大図).

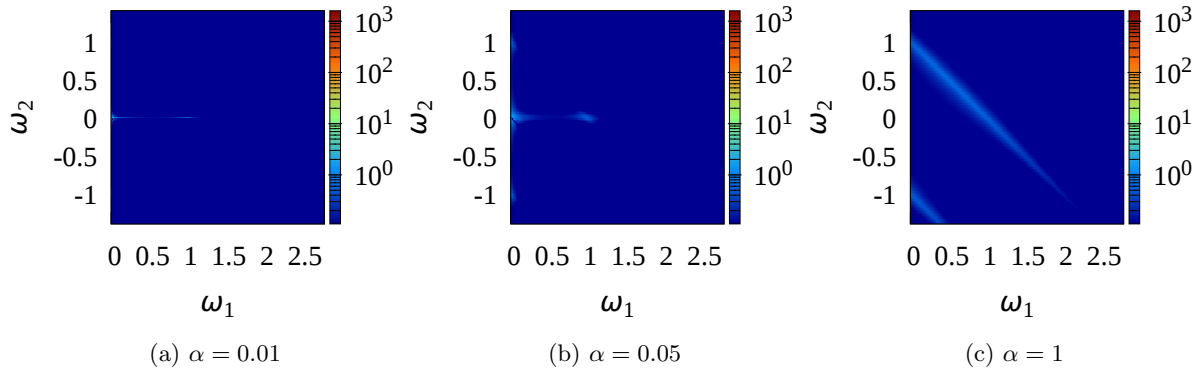


図 4.6 規格化されたクロスバイスペクトルの絶対値 $|B_{UUX}(\omega_1, \omega_2)/E[U^3]|$.

速度応答については、入力直流成分 ($\omega = 0$) のパワーは常に応答には伝わらず、共振周波数成分のパワーが増幅されて応答に現れる、ということがわかる。しかし、クロススペクトルは 2 次の情報しか有していないため、入力の非ガウス性が応答にどのように伝達・増幅されるか、という知見をクロススペクトルから得ることはできない。

入力と変位応答のクロススペクトルと同様に、入力と変位応答のクロスバイスペクトル $B_{UUX}(\omega_1, \omega_2)$ は、入力のバイスペクトル $B_U(\omega_1, \omega_2)$ と系の周波数応答関数 $H(\omega)$ を用いて、次のように表現できる [80]。

$$B_{UUX}(\omega_1, \omega_2) = H^*(\omega_1 + \omega_2)B_U(\omega_1, \omega_2) \quad (4.18)$$

$\alpha = 0.01, 0.05, 1$ の場合の規格化された入力と変位応答のクロスバイスペクトルの絶対値 $|B_{UUX}(\omega_1, \omega_2)/E[U^3]|$ が

図 4.5 である．なお，クロスバースペクトルの対称性により， $0 \leq \omega_1$ の範囲のみ図示している．図 4.5 の下段には， $(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)$ 付近を拡大した図も併せて表示してある．

式 (4.14) より，入力のパースペクトルには，入力の非ガウス分布の影響は $E[U^3]$ が係数に現れるのみである．従って，式 (4.18) より，入力と変位応答のクロスバースペクトルについても，入力の非ガウス分布の影響は $E[U^3]$ が係数に現れるのみである．これより，規格化された入力と変位応答のクロスバースペクトルの絶対値 $|B_{UUX}(\omega_1, \omega_2)/E[U^3]|$ は，入力の非ガウス分布の形状に依存しない．このことは，先行研究で得られた，帯域幅パラメータに依存した入力の非ガウス性の応答への影響の度合いが，Cai and Lin モデルに与えた非ガウス分布によらず共通するという知見と対応している．以降は図 4.3 を参照しながらクロスバースペクトルを用いた考察を行うが，その議論は入力の確率密度関数として対数正規分布を選んだ場合だけでなく，Cai and Lin モデルを入力として有する線形系の応答全般に適用できる．

$\alpha = 0.01$ のとき，図 4.5(a) より，クロスバースペクトルは $(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)$ で大きいピークを有する．これは，応答の直流成分が持つ非対称性の情報が，入力の直流成分が持つ非対称性の情報に強く依存していることを表している． $\alpha = 0.01$ のとき，入力のパースペクトルもまた $(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)$ 付近で大きなピークを有しており（図 4.2 (a)），入力の非対称性の情報は直流成分に集中している．よって， $\alpha = 0.01$ のとき，入力の直流成分に集中している確率密度関数の非対称性に関する情報が，応答の直流成分によく伝達されていることがわかる．従って，図 4.3 (a) 上段のように，変位応答の確率密度関数は入力の確率密度関数と近い形状をとる．入力と変位応答のクロスバースペクトル図 4.4(a) を見ると， $\alpha = 0.01$ の場合， $\omega = 0$ の大きなピークと $\omega = 1$ 付近の小さなピークの 2 つのピークが存在する．しかし，クロスバースペクトルは 2 次の統計量であるため，どの周波数成分によって確率密度関数の非対称性に関する情報が応答に伝達されているかはわからない．一方，クロスバースペクトルを見ることで，直流成分によって非対称性に関する情報が応答に伝達されていることが分かる．

図 4.5(b) を見ると， $\alpha = 0.05$ のときも， $(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)$ でピークを持つことがわかる．一方，ピークの値は， $\alpha = 0.01$ のときと比べて， $1/10$ ほどの値となっている．これは，入力のパースペクトルの $(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)$ における値が， $\alpha = 0.01$ のときよりも減少していることに起因する．前章で述べた通り，クロスバースペクトルは，非対称性の伝達に寄与する入力と応答の 3 周波数成分の依存関係を示すため， $(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)$ でのクロスバースペクトルの値が小さくなったということは，入力と応答の直流成分を介した非対称性の伝達が少なくなったということができる．一方，直流成分を除いた領域においては，顕著な値は確認できないため，直流成分以外の周波数成分を通した非対称性の情報の応答への伝達はほぼないと考えることができる．これらをあわせて考えると，入力の確率密度関数の非対称性に関する情報が， $\alpha = 0.01$ と比べて，応答に反映されないため，変位応答の確率密度関数は，図 4.3 (b) 上段のように，入力の確率密度関数と比較して非対称性が薄れ，ガウス分布と入力の対数正規分布の中間の形状をとる．

図 4.5(c) の $\alpha = 1$ の時を見ると， $\alpha = 0.01, 0.05$ の場合と異なり $(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)$ にピークは確認できないが，これは $\alpha = 1$ の場合は入力のパースペクトルが平面に近い形状をとり， $(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)$ に顕著なピークを持たないことに起因する（図 4.2(c)）．一方， $\omega_1 + \omega_2 = 1$ 付近で低い峰が見える．クロスバースペクトルのフーリエ変換を用いた表現である式 (3.21) より，これは応答における共振周波数成分 $\omega = 1$ の影響を表している．しかし， $\omega_1 + \omega_2 = 1$ 付近における峰の高さは $\alpha = 0.01, 0.05$ の $(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)$ でのピークと比較してかなり小さい．これは，共振周波数成分は入力の非対称性の応答への伝達または増幅にはほとんど寄与しないことを表しており，結果として，変位応答の確率密度関数は，図 4.3(c) 上段のように，ガウス分布に近い形状をとる．図 4.4(a) を見ると， $\alpha = 1$ のとき，クロスバースペクトルは $\omega = 1$ でピークを有している．これは，入力の共振周波数成分 $\omega = 1$ のパワーが，系によって増幅されていることを表している．しかし，共振周波数によって入力の非対称性がほとんど伝達・増幅されないという点は，2 次の統計量であるクロスバースペクトルから読み取ることはできず，クロスバースペクトルを用いて初めて分かることである．

入力と速度応答のクロスバースペクトル $B_{UUX}(\omega_1, \omega_2)$ も， $B_{UUX}(\omega_1, \omega_2)$ と同様に，入力のパースペクトル

$B_U(\omega_1, \omega_2)$ と速度応答の周波数応答関数 $i\omega H(\omega)$ を用いて、次のように表現できる [80].

$$B_{UU\dot{X}}(\omega_1, \omega_2) = -i(\omega_1 + \omega_2)H^*(\omega_1 + \omega_2)B_U(\omega_1, \omega_2) \quad (4.19)$$

$\alpha = 0.01, 0.05, 1$ の場合の規格化された入力と速度応答のクロスバースペクトルの絶対値 $|B_{UU\dot{X}}(\omega_1, \omega_2)/E[U^3]|$ が図 4.6 である. 入力と変位応答のクロスバースペクトルの場合と同様に, 入力と速度応答のクロスバースペクトルにも, 入力の非ガウス分布の影響は $E[U^3]$ が係数に現れるのみであり, 規格化された入力と速度応答のクロスバースペクトルの絶対値 $|B_{UU\dot{X}}(\omega_1, \omega_2)/E[U^3]|$ は, 入力の非ガウス分布の形状に依存しない. 従って, 以降の議論も入力の確率密度関数として対数正規分布を選んだ場合だけでなく, Cai and Lin モデルを入力として有する線形系の応答全般に適用できる. 図 4.6 より, 全ての α について, 入力と速度応答のクロスバースペクトルの値は小さい値を示していることがわかる. これは, 速度応答には入力の非対称性がほとんど伝達または増幅されないことを表している. 結果として, 図 4.3 の下段の結果のように, 速度応答の確率密度関数は, 帯域幅パラメータ α によらず, 入力の非対称性の影響が反映されないガウス分布に近い形状をとる. 特に, 変位応答の結果と大きく異なる点として, α が小さいとき, 速度応答の確率密度関数には非対称性が現れないことが挙げられる. これは, 速度応答の周波数応答関数 $i\omega H(\omega)$ より求まる式 (4.19) 右辺の $(\omega_1 + \omega_2)$ が, $(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)$ では 0 になることより, α が小さいとき直流成分に集中している入力の非対称性の情報 (図 4.2(a)) が, 速度応答には反映されないことに起因する. 入力の直流成分付近のパワーがどのように応答に伝達されるかについては, 図 4.4(b) のクロススペクトルからもわかることではあるが, 入力の非対称性の情報が直流成分に集中している点, また, そのため速度応答に入力の非対称性の影響がほとんど現れない点は, バースペクトルおよびクロスバースペクトルを用いて初めて明らかになることである.

4.4 結言

Cai and Lin モデルで表現される非ガウス励振を受ける 1 自由度線形系の応答について, バースペクトルとクロスバースペクトルを用いることで, 入力の非ガウス性が応答に与える影響を, 非ガウス性の中でも非対称性に注目して調査した. Cai and Lin モデルは, 直流成分が卓越するパワースペクトルと, 任意の非ガウス性確率密度関数を持つような幅広い非ガウス過程を表現できる. その Cai and Lin モデルに対応するバースペクトルを導出した. 導出したバースペクトルより, Cai and Lin モデルの周波数領域における非対称性の特徴として, 次がわかった.

- 帯域幅パラメータが小さい場合は, モデルの非対称性の情報は直流成分に集中する.
- 帯域幅パラメータが大きくなるに従って, モデルの非対称性の情報は, 周波数領域全体に広く分布するようになる.

さらに, 導出したバースペクトルより求まる入力と応答のクロスバースペクトルを計算し, 次の知見を得た.

- 入力の帯域幅が系の周波数応答関数の帯域幅と比べて狭い場合, 直流成分に集中する入力の非対称性の情報が変位応答の直流成分によく伝達される. 結果的に, 変位応答の確率密度関数は, 入力の確率密度関数と近い形状をとる. 一方, 速度応答には, その周波数応答関数の特徴に起因して, 入力の直流成分の非対称性はほとんど伝達されない. 従って, 速度応答の確率密度関数は, ガウス分布に近い形状をとる.
- 入力の帯域幅が系の周波数応答関数の帯域幅と比べて広い場合, クロススペクトルにおいては共振周波数成分の値が顕著である. クロスバースペクトル上では, 共振周波数成分の値が他の周波数成分と比較して大きいことがわかるが, その値自体は小さいものである. そのため共振周波数成分は, 入力の非対称性の変位・速度応答への伝達・増幅にはほとんど寄与しない. 従って, 帯域幅が広い場合, 変位応答と速度応答の確率密度関数は, いずれもガウス分布に近い形状をとる.

以上のように，従来研究のようなパワースペクトルに着目した研究では知ることのできなかった，周波数領域における非対称性の入出力関係の構造を，バースペクトルとクロスバースペクトルを用いることで明らかにした．本研究で対象としたのは，非ガウス不規則入力を受ける系として最も簡単な，1 自由度線形系である．しかし，本研究で得られた Cai and Lin モデルの周波数領域における非対称性の分布や，その応答への伝達構造に関する知見は基礎的で普遍的なものであるため，より現実の構造物に近い非線形系や多自由度系の応答解析の際にも重要な役割を担うと期待できる．

第 5 章

同一な非白色ノイズによる係数・外部同時励振下の系の応答非対称性のバイスペクトル解析

5.1 緒言

本章から第 7 章までは、相関を有するガウス性非白色ノイズでモデル化される係数励振と外部励振が、同時に系に加わることに起因して応答に非対称性が生じる場合を考える。本章ではまず、最も単純なモデルである係数励振と外部励振が同一のガウス性非白色ノイズで与えられる場合を対象に、入力のパワースペクトル形状が応答の確率密度関数の非対称性に与える影響について考える。

現実の励振現象は多様な非白色性のパワースペクトルを有するが、1 つのピークを有する形状でよく表現できる例は多くある。そのため、非白色性不規則励振を受ける系の解析に関する先行研究においても、入力パワースペクトル形状として 1 つのピークを有するものを考える場合が多く、そのピークの位置や帯域幅に依存して、応答の非ガウス性や系の安定性が大きく変化することが明らかになっている [20, 25, 48, 51]。これは、安全な構造物の設計を念頭において不規則励振系の応答を解析する際は、入力パワースペクトルのピークの位置や帯域幅を考慮することが必要であることを示唆している。このピークの位置や鋭さの重要性を受け、本研究ではピークを 1 つ有する入力のパワースペクトルを考え、そのピークの位置やピーク周りの帯域幅を様々に変化させることで、その形状変化が応答の確率密度関数の非対称性に与える影響を、モンテカルロシミュレーションによって調査する。このとき、確率密度関数の非対称性の指標として、3 次の統計量である歪度を用いる。

モンテカルロシミュレーションによる調査結果に対して、応答バイスペクトルのピークの位置や大きさ、符号といった性質から、入力のパワースペクトル形状（ピークの位置と帯域幅）がどのように応答の非対称性に影響を与えるのかを考察する。バイスペクトルを用いた考察について、本研究ではまず、対象系の応答のバイスペクトルの近似解析解を導出する。係数励振と外部励振の両方を受ける系の応答のバイスペクトルを解析的手法で求める方法は報告されていないため、本研究では新たに、摂動法を用いた手法を提案する。また、前述のように、歪度を非対称性の指標として用いるため、応答の 2 次の中心モーメントの 1.5 乗で規格化したバイスペクトルを用いて考察を行う。導出したバイスペクトルの近似解析解をシミュレーションから求めたものと比較することで、その精度を確認する。次に、得られたバイスペクトルを用いて、そのピークの位置や大きさ、符号といった性質から、入力のパワースペクトル形状（ピークの位置と帯域幅）がどのように応答の非対称性に影響を与えるのかを考察する。そして、応答の非対称性の向きに大きな影響を与える応答のバイスペクトルの符号に関して、導出した近似解を用いて、依存関係にある 3 周波数成分の位相の關係に着目して考察する。

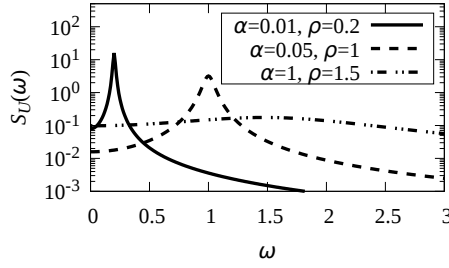


図 5.1 $U(t)$ のパワースペクトル.

5.2 解析モデル

本研究では、定常で相関を有するガウス性非白色係数励振と外部励振を同時に受ける 1 自由度系の定常応答を考える。2 つの非白色励振の相関性は様々なものが考えられるが、著者らの知る限りでは、最も単純なモデルである 2 つの励振が同一である場合でさえも、そのときの応答の特性は明らかになっていない。そこで本研究では係数励振と外部励振が同一の確率過程で表現される場合を考える。このとき、運動方程式は次の通り。

$$\ddot{X} + 2\zeta\dot{X} + X = U(t) + \varepsilon XU(t) \quad (5.1)$$

ここで、式中の $X(t)$ は変位応答、 ζ は減衰比であり、本研究では $\zeta = 0.05$ とする。 t は系の不減衰固有角振動数で無次元化した時間を表し、ドット記号はこの無次元時間での微分を表す。 $U(t)$ は平均 0 の定常ガウス性非白色ノイズである。正の定数 ε は系に加わる係数励振の大きさを支配するパラメータである。 ε が大きいと系が不安定になり、応答が発散してしまう。そこで本研究では、今回考える入力と系のパラメータ設定に対して系が安定である、小さい ε を対象に考え、 $\varepsilon = 0.1$ とする。

定常ガウス性非白色ノイズ $U(t)$ のパワースペクトル密度関数 $S_U(\omega)$ として次を考える。

$$S_U(\omega) = \frac{E[U^2]}{\pi} \frac{\alpha(\alpha^2 + \rho^2 + \omega^2)}{(\alpha^2 + \rho^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \quad (5.2)$$

ここで、 $E[\cdot]$ は期待値演算を表し、 $E[U^2]$ は $U(t)$ の 2 乗平均値である。本研究では、 $E[U^2] = 1$ とする。式中の α と ρ はそれぞれパワースペクトルの帯域幅パラメータと卓越振動数パラメータである。 $E[U^2] = 1$, $(\alpha, \rho) = (0.01, 0.2), (0.05, 1), (1, 1.5)$ に対応したパワースペクトルを図 5.1 に示す。 $S_U(\omega)$ は 1 つのピークを有し、 α が小さいほどそのピーク周りの帯域幅は狭く、 α が大きいほど帯域幅は広く、平坦に近い形状となる。また、パワースペクトルのピークは、 $\omega = \rho$ 付近に現れる。式 (5.2) は、 (α, ρ) を適当に設定することで、工学的に重要な幅広いスペクトルを表現することができる。

5.3 モンテカルロシミュレーションによる応答の確率密度関数の非対称性の調査

5.3.1 計算方法とパラメータ設定

式 (5.1) で表される系の定常変位応答の確率密度関数の厳密解は求められない。そこで本研究では、モンテカルロシミュレーションを行う。以下で紹介する手法によって生成した多数の標本関数を入力として持つ運動方程式 (5.1) の解を数値的に求め、応答の標本関数を多数求める。その応答の標本関数をもとに正規化したヒストグラムを求め、それを応答の確率密度関数とする。また、応答の確率密度関数の非対称性を定量的に評価するための指標として、歪度

(Skewness) を用いる。歪度は、3 次の中心モーメント $E[(X - E[X])^3]$ を 2 次の中心モーメント $E[(X - E[X])^2]$ の 1.5 乗で規格化した量であり、確率密度関数の非対称性の強さを表す量である。

$$\text{Skewness} = \frac{E[(X - E[X])^3]}{(E[(X - E[X])^2])^{1.5}} \quad (5.3)$$

正の歪度の場合、その確率密度関数は右裾が重く、左裾が軽い形状となる。一方、負の歪度の場合、その確率密度関数は左裾が重く、右裾が軽い形状となる。そして、確率密度関数がガウス分布などの対称な分布の場合、歪度は 0 となる。

パワースペクトルが式 (5.2) を満たすガウス性非白色不規則入力 $U(t)$ の標本関数は、次の 2 次元の伊藤型確率微分方程式を数値的に解くことで効率的に得ることができる。

$$\begin{aligned} dU &= (-\alpha U + \rho V)dt + \sqrt{2\alpha}dB_1(t) \\ dV &= (-\rho U - \alpha V)dt + \sqrt{2\alpha}dB_2(t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

ここで、 $B_1(t)$ と $B_2(t)$ は互いに独立な標準ブラウン運動である。式中の $V(t)$ は、 $U(t)$ を生成するために補助的に導入する確率過程であり、 $U(t)$ の生成以降は使用しない。式 (5.4) は、Cai と Lin が提案したモデル [36] において、 $U(t)$ と $V(t)$ が独立で、いずれも分散 1 のガウス分布に従う場合に相当する。式 (5.4) の数値解法としては、オイラー丸山法 [83] を採用した。

標本関数の数を 1,000,000 本、1 本の標本関数中のデータ点数を 2^{19} とし、定常応答の確率密度関数を正確に求めるために十分に大きな値を設定した。数値計算の際の時間刻み幅は 0.001 とし、定常応答の確率密度関数を正確に求めるために十分に小さな値を設定した。また、加振開始から時間にして $T = 100$ までの間、つまり数値計算のステップ数としては 100,000 ステップの間は過渡状態とみなし、 $T = 100$ 以降に 2^{19} のデータ点数をとった。

入力のガウス性非白色ノイズのパラメータ (α, ρ) を様々に変化させて、入力のパワースペクトルのピークの位置やそのピーク周りの帯域幅が応答の確率密度関数の非対称性に与える影響を調査する。本研究では、入力の帯域幅 α として、 $\varepsilon = 0$ としたときの線形系の周波数応答関数の帯域幅を表す $\zeta = 0.05$ より小さい値、同じ値、大きい値を考える。先行研究において、著者らの 1 人は、式 (5.2) と同じパワースペクトルを持つ非ガウス性外部励振を受ける 1 自由度線形系を対象に、パワースペクトルの帯域幅 α と系の帯域幅 ζ の比 $A = \alpha/\zeta$ を導入し、励振のパワースペクトル形状が応答の非ガウス性に与える影響を調査した [44]。この先行研究では、 $A = 10$ に代表される入力帯域幅が系の帯域幅より広い場合と、 $A = 0.1$ に代表される入力帯域幅が系の帯域幅より狭い場合で、応答の確率密度関数に現れる入力の非ガウス性が大きく異なることが報告された。また、その中間の場合として $A = 1$ 、つまり入力と系の帯域幅が等しい場合、入力帯域幅が広い場合と狭い場合の中間程度の性質を示すことも報告された。この先行研究と本研究の対象系は異なっているが、入力のパワースペクトル形状が応答の非ガウス性に与える影響の調査という点では共通している。そこで本研究でも、先行研究の知見を参考に、入力と系の帯域幅比 $A = \alpha/\zeta$ を考え、運動方程式 (5.1) に対して予備的なシミュレーションを実行し、その結果から帯域幅パラメータの設定を行った。具体的には、まず、 $A = 0.1$ から 20 まで 0.1 刻み (α としては $\alpha = 0.005$ から 1 まで 0.005 刻み) で計 200 種類の A と、 $\rho = 0$ から 2 まで 0.1 刻みで、21 種類の ρ に対して、1,000 本という少数の標本数でモンテカルロシミュレーションを行い、応答歪度の変化傾向を確認した。この事前調査の結果、(i) $A > 1$ の場合と $A < 1$ の場合とで、卓越振動数パラメータに依存した応答歪度の変化の性質が異なること、さらに、(ii) この変化の性質は、 $A > 1$ の場合と $A < 1$ の場合のそれぞれの範囲内では、 A の値によらずほぼ同様であることが確認された。そこで、入力帯域幅に依存した応答の非対称性の変化傾向を明らかにするには、帯域幅パラメータが系の帯域幅より小さい場合 ($A < 1$) と大きい場合 ($A > 1$) から代表値をひとつずつ選び、詳細に調べれば十分である。具体的に代表値としては、 $\alpha = 0.01$ ($A = 0.2$)、 1 ($A = 20$) を選んだ。さらに、その中間程度の性質を示す値の代表値として、入力の帯域幅と系の帯域幅が等しくなる $\alpha = 0.05$ ($A = 1$) の場合について調査する。

入力卓越振動数 ρ としては、 $\varepsilon = 0$ としたときの線形系の共振周波数 $\omega \approx 1$ と一致する $\rho = 1$ より小さい値から大きい値まで幅広く考慮する。パラメトリック共振が発生する $\rho = 2$ 付近の応答の特性は、工学的に重要である。しかし、先述の予備的なシミュレーションから、パラメトリック共振が発生する場合、系の応答の標本関数に発散するものが確認された。そのような場合、定常応答の確率密度関数は存在しないため、本研究の主目的である応答の非対称性に関する議論は不可能である。また、現実の不規則励振現象のパワースペクトルは、多様な卓越振動数を有することが知られているため、パラメトリック共振を示す場合以外の卓越振動数に対する調査も重要である。従って、本研究では、入力卓越振動数として、系の応答が安定な $\rho = 0$ から $\rho = 1.5$ までを対象とし、0.1 刻みで計 16 種類を考える。なお、本研究では ε が小さい範囲を考えることから、以降 $\varepsilon \neq 0$ の場合であっても、 $\omega = 1$ を系の共振周波数と呼ぶこととする。

5.3.2 シミュレーション結果

こうして得られた変位応答の確率密度関数が図 5.2, 5.3, 5.4 である。ここでは実際に計算した 16 種類の ρ のうち、 $\rho = 0$ と 0.1 の場合の結果は近しいため、図の配置の都合上 $\rho = 0$ を除いた 15 種類の場合の結果を示す。確率密度関数の裾部の様子を詳しく見るために、それぞれの図の縦軸は対数軸としてある。図中の赤実線が、運動方程式 (5.1) で表現される運動の定常応答の確率密度関数である。黒破線は赤実線のシミュレーション結果と同じ平均、分散を有するガウス分布であり、確率密度関数の非対称性をより明確にする目的でプロットした。また、図 5.5 は、入力卓越振動数パラメータ ρ と応答歪度の関係を表す。横軸が入力卓越振動数パラメータ ρ 、縦軸が応答の確率密度関数の歪度である。図 5.5 については、計算したすべての α と ρ に対する結果を示してある。

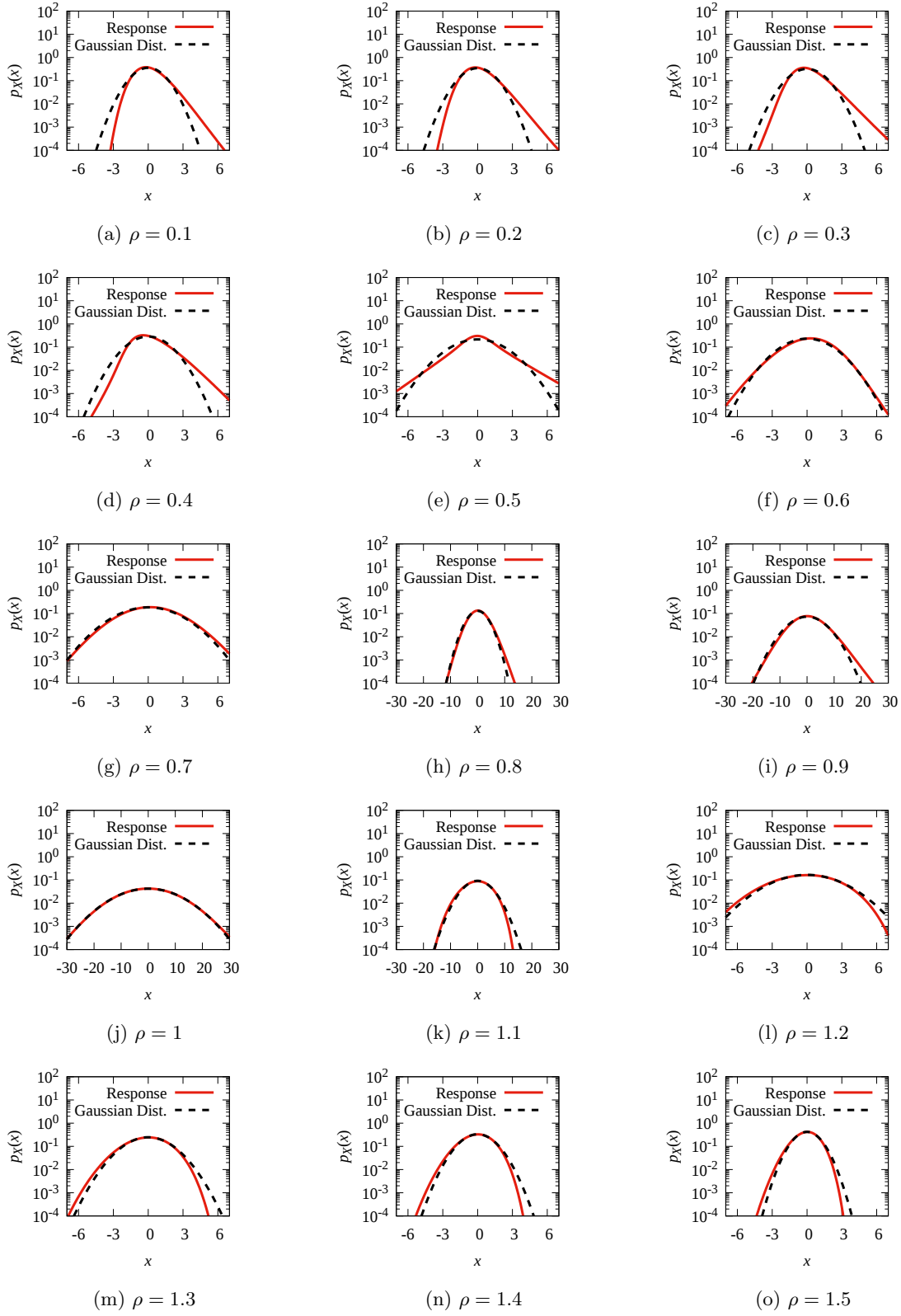


図 5.2 $\alpha = 0.01$ の場合の変位応答の確率密度関数.

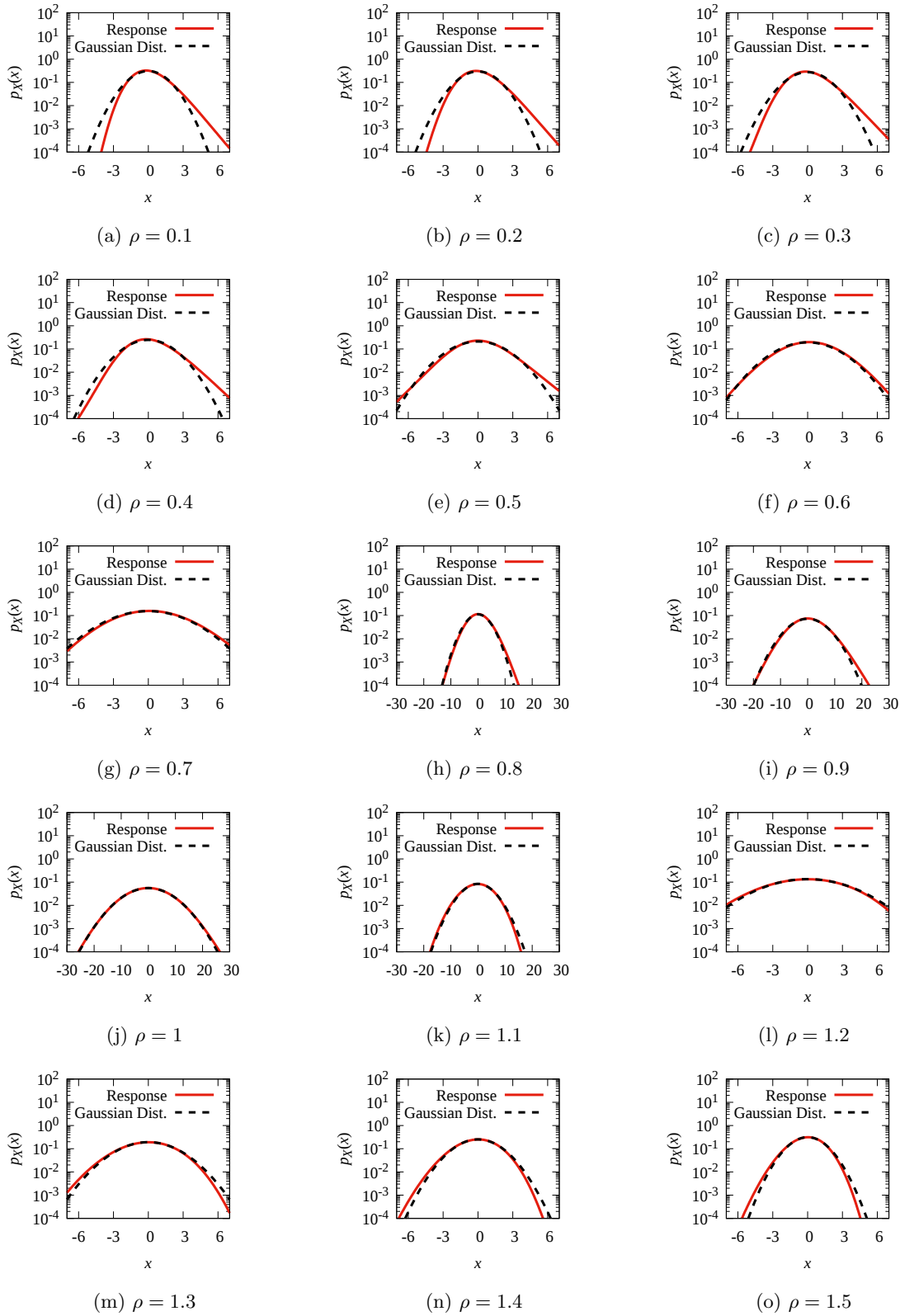
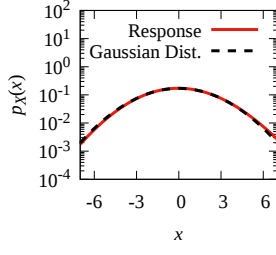
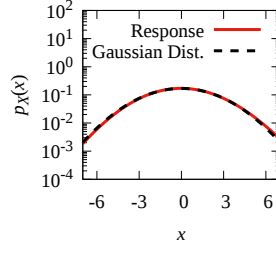
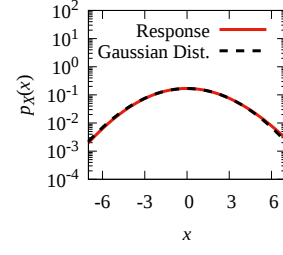
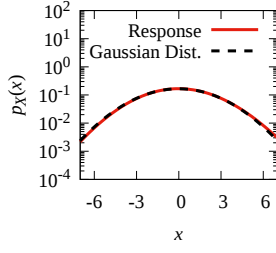
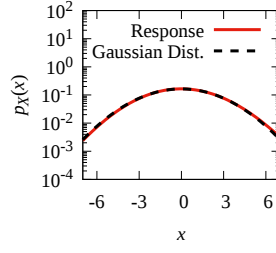
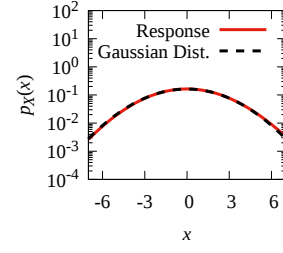
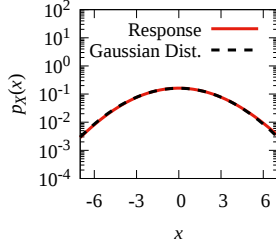
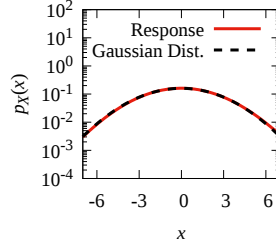
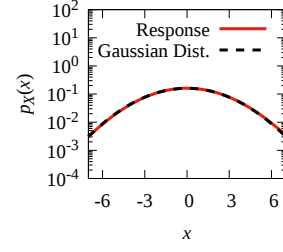
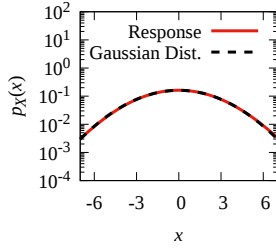
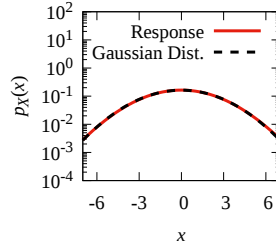
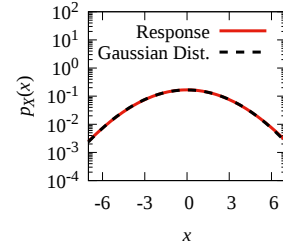
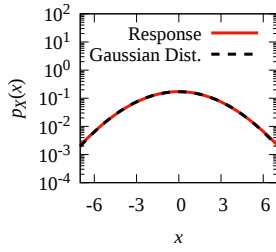
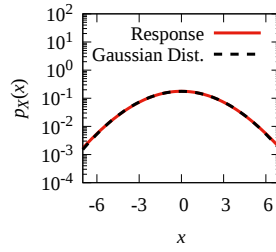
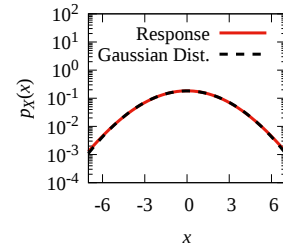


図 5.3 $\alpha = 0.05$ の場合の変位応答の確率密度関数.

(a) $\rho = 0.1$ (b) $\rho = 0.2$ (c) $\rho = 0.3$ (d) $\rho = 0.4$ (e) $\rho = 0.5$ (f) $\rho = 0.6$ (g) $\rho = 0.7$ (h) $\rho = 0.8$ (i) $\rho = 0.9$ (j) $\rho = 1$ (k) $\rho = 1.1$ (l) $\rho = 1.2$ (m) $\rho = 1.3$ (n) $\rho = 1.4$ (o) $\rho = 1.5$ 図 5.4 $\alpha = 1$ の場合の変位応答の確率密度関数.

5.3.3 $\alpha = 0.01$ の場合の入力のパワースペクトル形状と応答の非対称性の関係

図 5.2 は、入力帯域幅が系の帯域幅と比較して狭い $A < 1$ の場合の代表値である、 $\alpha = 0.01$ とした時の応答の確率密度関数である。図 5.2(a) より、卓越振動数が直流成分付近にある ($\rho = 0.1$) とき、応答の確率密度関数は、対応するガウス分布に比べて、正の x については裾が重くなり、負の x については裾が軽くなる。図 5.5(a) の $\rho = 0.1$ を見ると、これに対応して応答歪度は正の値を示している。図 5.2(d) の $\rho = 0.4$ では、 $\rho = 0.1$ のときと比較して、確率密度関数の非対称性がより顕著になっている。応答の確率密度関数に正の歪度に対応する非対称性が存在する場合、対応するガウス分布と比べて、正の大きな応答を示す確率が高いということとなる。すなわち、このシミュレーション結果は、従来の不規則振動解析でしばしば用いられてきた応答のガウス性の仮定を用いてしまうと、正の大きな応答を示す確率を過小評価することとなり、信頼性や安全性を考える際に誤った結論を導いてしまうということを意味する。従って、同時励振系の応答の非対称性を正確に捉えることは重要である。

一方、図 5.2(e) の $\rho = 0.5$ では、応答の確率密度関数に非対称性は見られない。そして、図 5.2(f) の $\rho = 0.6$ では、応答の確率密度関数は非対称性を有しているが、そのひずむ向きは、 $\rho = 0.1, 0.4$ のときとは逆である。図 5.5(a) を見ても、 $\rho = 0.1$ から $\rho = 0.4$ にかけて応答歪度は増大傾向にあるが、 $\rho = 0.5$ を境に歪度は急激に減少し、 $\rho = 0.6$ では負の歪度を示す。

$\rho = 1$ 、つまり系の共振周波数と入力の卓越振動数が一致する場合、図 5.2(j) の通り、応答の確率密度関数は対応するガウス分布とほぼ一致しており、図 5.5(a) の歪度を見ても 0 に近い値を示している。そして、図 5.2(o) の $\rho = 1.5$ では、応答の確率密度関数は $\rho = 0.1$ のときとは逆向きにひずむ。応答歪度も、 $\rho = 0.1$ では正の値を示すのに対して、 $\rho = 1.5$ では負の歪度となっていることが確認できる。

5.3.4 $\alpha = 0.05$ の場合の入力のパワースペクトル形状と応答の非対称性の関係

入力と系の帯域幅が等しい $A = 1$ 、つまり $\alpha = 0.05$ のとき、 $\alpha = 0.01$ ($A < 1$) のときと同様に、 ρ に依存して応答の確率密度関数の非対称性は大きく変化する (図 5.3)。しかし、その変化傾向には相違点も確認できる。

$\alpha = 0.01$ のとき、 $\rho = 0.4$ は $\rho = 0.1$ のときと比較して確率密度関数の非対称性が顕著になっている (図 5.2(a), (d))。一方、 $\alpha = 0.05$ のときは、そのような特徴は見られない (図 5.3(a), (d))。応答歪度の変化を示す図 5.5 を見ても、 $\alpha = 0.01$ の場合では、 $\rho = 0$ から $\rho = 0.4$ にかけて応答歪度は増大傾向にあるが (図 5.5(a))、 $\alpha = 0.05$ の場合では、 $\rho = 0.1$ から $\rho = 0.4$ にかけて応答歪度は減少傾向にあることがわかる (図 5.5(b))。

また、 $\rho = 0.6$ のとき、 $\alpha = 0.01$ では応答歪度は負の値を示している (図 5.5(a)) が、 $\alpha = 0.05$ のときは応答歪度は 0 に近い正の値を示している (図 5.5(b))。また、 $\alpha = 0.05$ のとき、すべての ρ に対して、応答に現れる歪度の絶対値が $\alpha = 0.01$ のときよりも小さくなっている。つまり、応答の非対称性が、 $\alpha = 0.01$ のときと比較して弱まっている。

5.3.5 $\alpha = 1$ の場合の入力のパワースペクトル形状と応答の非対称性の関係

入力帯域幅が系の帯域幅と比較して広い $A > 1$ の場合の代表値である $\alpha = 1$ のとき、図 5.4 より、応答の確率密度関数に非対称性はほとんど確認できず、 ρ に関係なくガウス分布に近い形状を示す。図 5.5(c) の歪度を見ても、全体的に 0 に近い値を示している。

以上より、同一のガウス性非白色ノイズでモデル化される係数励振と外部励振を同時に受ける系の応答の確率密度関数には、非対称性が現れることを確認した。また、その非対称性は、入力パワースペクトルのピークの位置やそのピーク周りの帯域幅に依存し、大きく複雑な変化をすることを明らかにした。このような非対称性の特徴は、係数・外部励

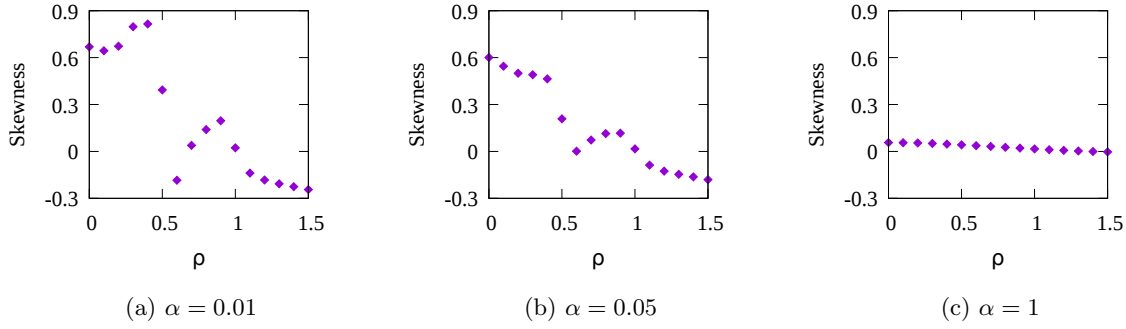


図 5.5 応答歪度と入力卓越振動数パラメータ ρ の関係.

振の相関性と非白色性の両方を考慮することではじめて観察されたものであり、従来研究のように励振の白色性や独立性を仮定した際には見られなかったものである。

5.3.6 シミュレーション結果に対するパワースペクトルの観点からの考察

前項で得られたシミュレーション結果に対してパワースペクトルの観点から考察するにあたって、まずパワースペクトルの観点から応答の非対称性について考察することで、パワースペクトルを用いることで明らかになる点を明確にしたい。そのために本項では、係数励振と外部励振が同一な場合に応答に非対称性が現れる理由と、それと関連して、2つの励振が独立な場合は応答に非対称性が現れない理由について、パワースペクトル、つまり各周波数成分のパワーやそこから考えられる波形の観点から考察を行う。そのため、本項では運動方程式 (5.1) 中の外部励振と係数励振を区別し、それぞれ $U_1(t)$, $U_2(t)$ と書く。

$$\ddot{X} + 2\zeta\dot{X} + X = U_1(t) + \varepsilon XU_2(t) \quad (5.5)$$

運動方程式 (5.5) の解 $X(t)$ を、微小なパラメータ ε について 2 次の項まで展開して考える。

$$\tilde{X}(t) = X_0(t) + \varepsilon X_1(t) + \varepsilon^2 X_2(t) \quad (5.6)$$

$\tilde{X}(t)$ を運動方程式 (5.5) に代入して整理すると、 $X_0(t)$, $X_1(t)$, $X_2(t)$ が満たすべき方程式が次の通りに求まる。

$$\varepsilon^0: \quad \ddot{X}_0 + 2\zeta\dot{X}_0 + X_0 = U_1(t) \quad (5.7)$$

$$\varepsilon^1: \quad \ddot{X}_1 + 2\zeta\dot{X}_1 + X_1 = X_0 U_2(t) \quad (5.8)$$

$$\varepsilon^2: \quad \ddot{X}_2 + 2\zeta\dot{X}_2 + X_2 = X_1 U_2(t) \quad (5.9)$$

ここで、応答の非対称性の有無と向きの指標として、 $\tilde{X}(t)$ の 3 次の中心モーメントを求める。

$$\begin{aligned} E[(\tilde{X} - E[\tilde{X}])^3] &= E[(X_0 - E[X_0]) + \varepsilon(X_1 - E[X_1]) + \varepsilon^2(X_2 - E[X_2])]^3 \\ &= E[(X_0 - E[X_0])^3] + \varepsilon E[3(X_0 - E[X_0])^2(X_1 - E[X_1])] \\ &\quad + 3\varepsilon^2 E[(X_0 - E[X_0])(X_1 - E[X_1])^2 + (X_0 - E[X_0])^2(X_2 - E[X_2])] + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (5.10)$$

ここで、 $O(\cdot)$ はランダウの記号である。式 (5.10) の各項を求める。まず、 $U_1(t)$ が平均 0 のガウス過程であることから、 $X_0(t)$ も平均 0 のガウス過程であるので、 $E[(X_0 - E[X_0])^3] = 0$ である。また、線形系 $\ddot{X} + 2\zeta\dot{X} + X = 0$ の単位インパルス応答関数を $h(t)$ とする。このとき、 $X_0(t)$, $X_1(t)$, $X_2(t)$ の定常応答は、次のように書ける。

$$X_0(t) = \int_{-\infty}^t U_1(\tau_0) h(t - \tau_0) d\tau_0 \quad (5.11)$$

$$X_1(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau_1} U_1(\tau_0) U_2(\tau_1) h(\tau_1 - \tau_0) h(t - \tau_1) d\tau_0 d\tau_1 \quad (5.12)$$

$$X_2(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau_2} \int_{-\infty}^{\tau_1} U_1(\tau_0) U_2(\tau_1) U_2(\tau_2) h(\tau_1 - \tau_0) h(\tau_2 - \tau_1) h(t - \tau_2) d\tau_0 d\tau_1 d\tau_2 \quad (5.13)$$

式 (5.13) より, $E[U_1(\tau_0)U_2(\tau_1)U_2(\tau_2)] = 0$ から, $E[X_2] = 0$ である. 式 (5.11), (5.13) および $E[X_2] = 0$ から $E[(X_0 - E[X_0])^2(X_2 - E[X_2])]$ は次のように求まる.

$$\begin{aligned} E[(X_0 - E[X_0])^2(X_2 - E[X_2])] &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau_2} \int_{-\infty}^{\tau_1} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t E[U_1(v_0)U_1(\phi_0)U_1(\tau_0)U_2(\tau_1)U_2(\tau_2)] \\ &\quad \times h(t - v_0)h(t - \phi_0)h(\tau_1 - \tau_0)h(\tau_2 - \tau_1)h(t - \tau_2)dv_0d\phi_0d\tau_0d\tau_1d\tau_2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

ここで, $U_1(t)$ と $U_2(t)$ は平均 0 の定常ガウス過程なので, $E[U_1(v_0)U_1(\phi_0)U_1(\tau_0)U_2(\tau_1)U_2(\tau_2)] = 0$ である. 従って, $E[(X_0 - E[X_0])^2(X_2 - E[X_2])] = 0$ である.

以上より, $\tilde{X}(t)$ の 3 次の中心モーメントは, 改めて次のように書ける.

$$E[(\tilde{X} - E[\tilde{X}])^3] = \varepsilon E[3(X_0 - E[X_0])^2(X_1 - E[X_1])] + 3\varepsilon^2 E[(X_0 - E[X_0])(X_1 - E[X_1])^2] + O(\varepsilon^3) \quad (5.15)$$

ε について 3 次以上を微小項として無視すると, 応答の非対称性の有無と向きを考えるには, $X_0(t)$ と $X_1(t)$ を考えればよいとすることができる.

式 (5.8) の両辺に ε を乗じて, 式 (5.7) と辺々を加えると, 次を得る.

$$(\ddot{X}_0 + \varepsilon \ddot{X}_1) + 2\zeta(\dot{X}_0 + \varepsilon \dot{X}_1) + (X_0 + \varepsilon X_1) = U_1(t) + \varepsilon X_0 U_2(t) \quad (5.16)$$

応答の非対称性の有無と向きを考えるには $X_0(t)$ と $X_1(t)$ を考えれば十分であることと, 式 (5.16) と運動方程式 (5.5) の比較から, 応答の非対称性の有無と向きを考える際は式 (5.5) の右辺を $U_1(t) + \varepsilon X_0 U_2(t)$ と近似することができる. すなわち, 運動方程式の励振項を次のように置き換えて考える.

$$\begin{aligned} \ddot{X} + 2\zeta \dot{X} + X &= U_1(t) + \varepsilon X_0 U_2(t) \\ \ddot{X}_0 + 2\zeta \dot{X}_0 + X_0 &= U_1(t) \end{aligned} \quad (5.17)$$

これは, 同時励振系を非ガウス過程 $U_1(t) + \varepsilon X_0 U_2(t)$ を入力として持つ線形系と近似することに相当する. 以降, 導入した入力を $Y(t) = U_1(t) + \varepsilon X_0 U_2(t)$ とする. 続いて, 非ガウス入力 $Y(t)$ と応答 $X(t)$ の非対称性について, 外部励振 $U_1(t)$ と係数励振 $U_2(t)$ が同一な場合と独立な場合に分けて考える.

$U_1(t)$ と $U_2(t)$ が独立な場合

$U_1(t)$ と $U_2(t)$ が独立な場合, $X_0(t)$ と $U_2(t)$ もまた独立となり, このとき $X_0 U_2(t)$ は非対称性を有さない. これは, $X_0 U_2(t)$ の 3 次の中心モーメントを求めることで確かめることができる.

$$E[X_0 U_2(t)] = E[X_0]E[U_2(t)] = 0 \quad (5.18)$$

$$E[(X_0 U_2(t) - E[X_0 U_2(t)])^3] = E[X_0^3 U_2^3(t)] = E[X_0^3]E[U_2^3(t)] = 0 \quad (5.19)$$

図 5.6 は, $U_1(t)$ と $U_2(t)$ が独立な場合の $U_2(t)$, $X_0(t)$, $X_0 U_2(t)$ の標本関数である. 青実線が $U_2(t)$, 黒一点鎖線が $X_0(t)$, 赤破線が $X_0 U_2(t)$ であり, $(\alpha, \rho) = (0.01, 0.5), (1, 1)$ の 2 種類の場合を示している. どちらの場合も, 赤破線で示した $X_0 U_2(t)$ に非対称性は確認できない.

従って, $Y(t)$ も非対称性は有さない非ガウス過程となり, この $Y(t)$ を入力として持つ線形系の応答 $X(t)$ もまた, 非対称性は示さない. 従って, 元の同時励振系においても, 係数励振と外部励振が独立な場合, 応答は非対称性を示さない. なお, $Y(t)$ の非対称性については, Appendix A において, 3 次の中心モーメントを求めることで確認している.

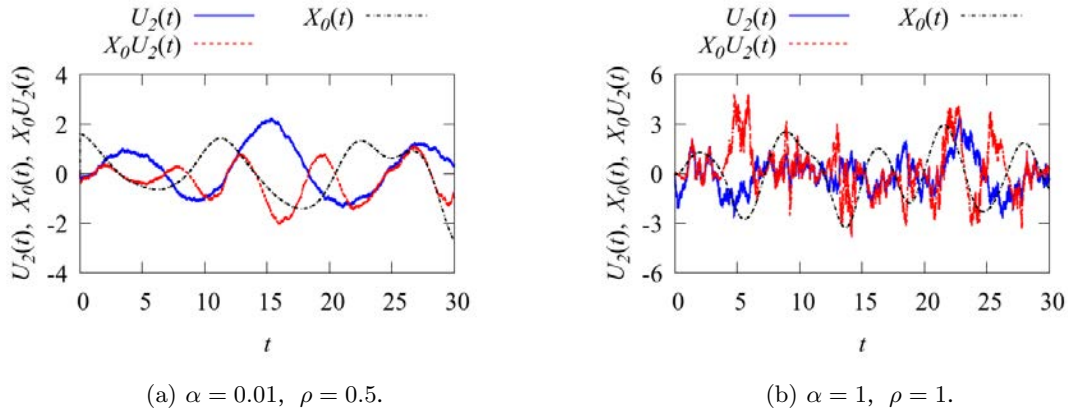


図 5.6 係数励振と外部励振が独立な場合の $Y(t)$ に含まれる $X_0U_2(t)$ の標本関数.

$U_1(t)$ と $U_2(t)$ が同一な場合

次に, $U_1(t)$ と $U_2(t)$ が同一な場合を考える. すなわち,

$$U_2(t) = U_1(t) \quad (5.20)$$

と書ける場合を考える. $U_1(t)$ と $X_0(t)$ は独立でないことに注意して, $Y(t) = U_1(t) + \varepsilon X_0U_2(t) = U_1(t) + \varepsilon X_0U_1(t)$ の非対称性を考える. なお, 以降は $Y(t)$ の非対称性について, その波形から考察するが, Appendix A において 3 次の中心モーメントを求めることでも確認している.

まず, $U_1(t)$ のパワースペクトルの帯域幅が狭い場合を考える. このとき, $U_1(t)$ の波形は卓越振動数成分が支配的であり, そのため $X_0(t)$ の波形も入力卓越振動数成分が支配的となる. さらに, その入力の卓越振動数が共振周波数 1 よりも小さい場合, $U_1(t)$ と $X_0(t)$ の間に位相遅れは存在しないとみなすことができる. このとき, $Y(t)$ に含まれる $X_0U_1(t)$ を同位相な波同士の積と近似的に見なすと, 常に正の値を示す. 図 5.7 には, $U_1(t) = U_2(t)$ かつ入力帯域幅が系の帯域幅より狭い場合の代表値である $\alpha = 0.01$ のときの $U_1(t)$, $X_0(t)$, $X_0U_1(t)$ の標本関数を示す. $\rho = 0.4$ の場合に対応する図 5.7(a) 中の, 青実線で示した $U_1(t)$ と黒一点鎖線で示した $X_0(t)$ を比較すると, 顕著な谷や山の位置がほぼ一致しており, $U_1(t)$ と $X_0(t)$ は同位相であることが確認できる. これによって, 赤破線で示した $X_0U_1(t)$ は, 正の値をとる頻度の高い, 非対称性を示した波形となっている. $X_0U_1(t)$ が正の値をとる頻度の高い非対称性を示す場合, $Y(t)$ も同様の非対称性を有し, この非ガウス入力の非対称性に起因して, 応答 $X(t)$ は非対称性を示すことができる.

卓越振動数が共振周波数 1 と等しい場合, $X_0U_1(t)$ は位相が $\pi/2$ だけずれた波同士の積と近似的に見なせるため, 顕著な非対称性は現れない. $\rho = 1$ の場合に対応する図 5.7(b) を見ても, 赤破線はほぼ対称的な波形となっている. そのため, 非ガウス入力 $Y(t)$ も非対称性をほとんど示さず, 結果として応答 $X(t)$ にも非対称性はほとんど現れない.

卓越振動数が共振周波数 1 よりも大きい場合, $U_1(t)$ と $X_0(t)$ の共振周波数成分の間に, $-\pi$ だけの位相遅れが存在するとみなすことができる. このとき, $Y(t)$ に含まれる $X_0U_1(t)$ は, 逆位相な波同士の積と近似的に見なすと, 常に負の値を示す. 図 5.7(c) で示した $\rho = 1.5$ の場合, $U_1(t)$ の谷と $X_0(t)$ の山の位置 (または $U_1(t)$ の山と $X_0(t)$ の谷の位置) がほぼ一致しており, $U_1(t)$ と $X_0(t)$ が逆位相の関係にあることが確認できる. これによって, 赤破線で示した $X_0U_1(t)$ は, 負の値をとる頻度の高い, 非対称性を示した波形となっている. $X_0U_1(t)$ が負の値をとる頻度の高い非対称性を示す場合, $Y(t)$ も同様に負の値をとる頻度の高い非対称性を有し, この非ガウス入力の非対称性に起因して,

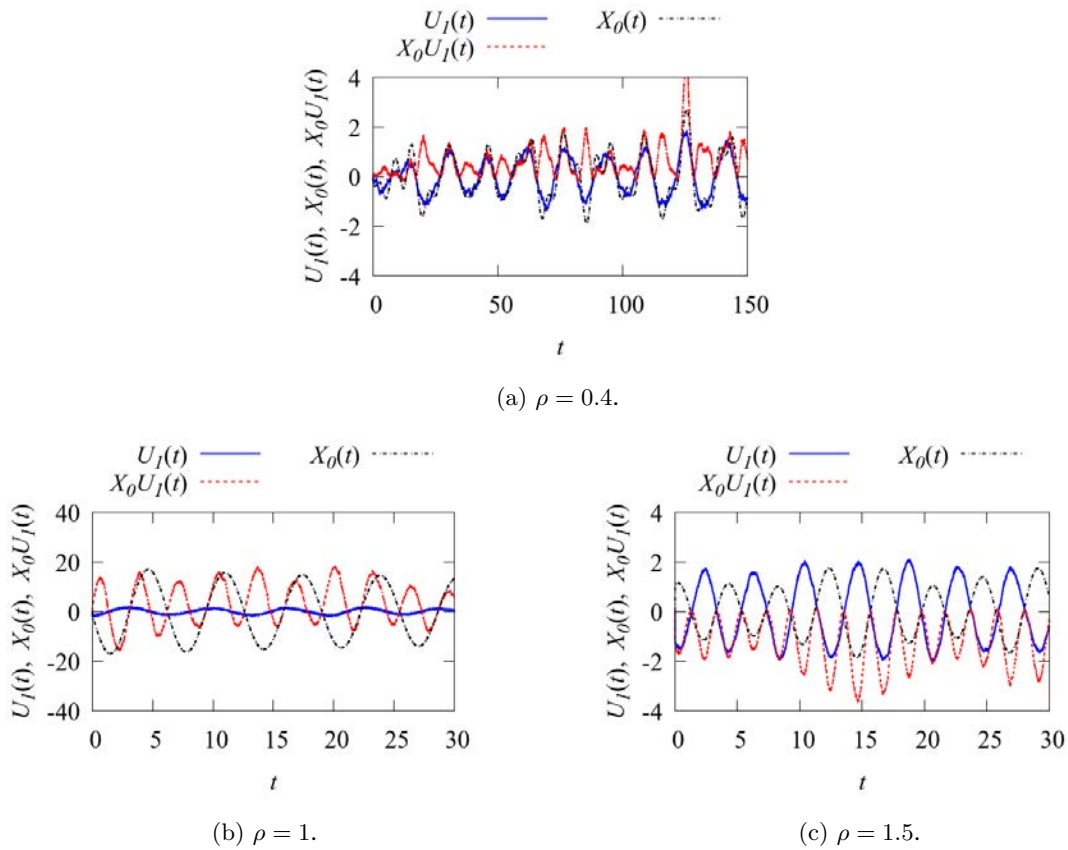


図 5.7 $\alpha = 0.01$ と入力帯域幅が狭く係数励振と外部励振が同一な場合の $Y(t)$ に含まれる $X_0U_1(t)$ の標本関数.

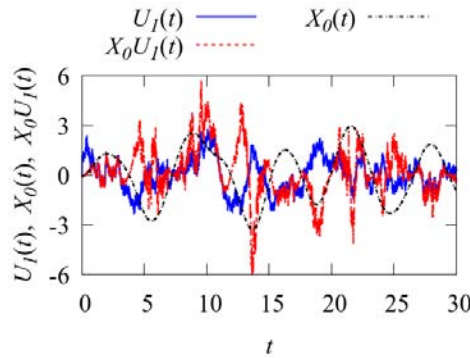


図 5.8 入力帯域幅が広く係数励振と外部励振が同一な場合の $Y(t)$ に含まれる $X_0U_1(t)$ の標本関数 ($\alpha = 1, \rho = 1$).

応答 $X(t)$ は非対称性を示すと考えることができる. このとき, $X_0U_1(t)$ の非対称性の向きに起因して, 入力の卓越振動数が共振周波数 1 よりも小さい場合と比較して応答 $X(t)$ の非対称性の向きは逆向きになると考えられる. これは図 5.5(a) において, $\rho = 0$ の場合の応答歪度と, $\rho = 1.5$ の場合の応答歪度の符号が反転していることと対応している.

入力帯域幅が広い場合, $U_1(t)$ には, パワーがほぼ等しい様々な周波数成分が存在する. このとき $X_0(t)$ のパワースペクトルは, 共振周波数でピークを持ち, そのピークでほぼ対称な形となる. また, 位相遅れを考えると, 共振周波数より低周波数成分には位相遅れが存在せず, 共振周波数より高周波数成分には $-\pi$ だけ位相遅れが存在する. すなわ

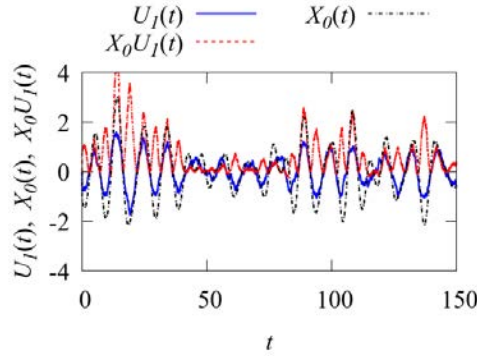


図 5.9 $(\alpha, \rho) = (0.01, 0.6)$ で係数励振と外部励振が同一な場合の $Y(t)$ に含まれる $X_0 U_1(t)$ の標本関数.

ち, $X_0(t)$ には $U_1(t)$ と比較して, 位相遅れが存在しない項と存在する項が等しく含まれることとなり, $X_0 U_1(t)$ に顕著な非対称性は現れない. 図 5.8 を見ても, 青実線で示した $U_1(t)$ は, 図 5.7 の青実線のような, 特定の周波数成分の影響がよく現れるような波形ではない. そして, 赤破線で示した $X_0 U_1(t)$ に非対称性はほとんど確認できない.

本項で行った, パワースペクトルとそれに対応する波形に基づいた考察を, 次のようにまとめる.

- 同時励振系の応答の非対称性の向きや有無を考える際, 励振項は, 外部励振を一度線形系に加えた応答と係数励振の積と外部励振の和とみなすことができる. すなわち $U_1(t) + \varepsilon X U_2(t) \approx U_1(t) + \varepsilon X_0(t) U_2(t)$ として考える.
- $U_1(t)$ と $U_2(t)$ が独立な場合, $X_0(t)$ と $U_2(t)$ も独立なので, $U_1(t) + \varepsilon X_0(t) U_2(t)$ は対称な非ガウス過程となる. そのため, 応答に非対称性は現れない.
- $U_1(t)$ と $U_2(t)$ が同一な場合, $U_1(t) + \varepsilon X_0(t) U_2(t) = U_1(t) + \varepsilon X_0 U_1(t)$ は非対称性を示しうる. その非対称性の有無と向きは, $U_1(t)$ のパワースペクトル形状を考慮すると, $X_0(t)$ と $U_1(t)$ の位相の関係から導くことができる.

ここで, 図 5.9 は, $(\alpha, \rho) = (0.01, 0.6)$ で係数励振と外部励振が同一な場合における, $U_1(t)$, $X_0(t)$, $X_0 U_1(t)$ の標本関数である. $(\alpha, \rho) = (0.01, 0.4)$ の場合の標本関数である図 5.7(a) と比較すると, $U_1(t)$ と $X_0(t)$ が同位相の関係にあることや, $X_0 U_1(t)$ が正の値をとる頻度の高い非対称性を示すことなど, 波形の特徴に大きな変化は見られない. しかしながら, 図 5.5(a) で観察できる通り, $\alpha = 0.01$ のとき $\rho = 0.4$ と 0.6 では, 応答の非対称性の向きが反転する. 従って, パワースペクトルや波形に基づいた考察では, 前項で得られた応答の非対称性の変化に対して十分な考察を与えるのが困難な場合があることがわかる.

そこで本章の以降では, 確率過程の非対称性の周波数領域における分布を可視化するバイスペクトルを用いて, 入力のパワースペクトル形状の変化に依存した応答の非対称性の変化について, より詳細に調査する.

5.4 摂動法を用いた応答のバイスペクトルの近似解析

本節以降は, バイスペクトルを用いて, 入力のパワースペクトル形状が応答の非対称性に及ぼす影響を考察する. 前節では応答の非対称性を歪度により評価した一方, バイスペクトルは 3 次の中心モーメントの周波数領域における分布である. 従って, 本研究では, 2 次の中心モーメントの 1.5 乗で規格化したバイスペクトルを用いて考察を行う. この

規格化されたバイスペクトルは、積分することで応答の歪度が得られるため、歪度の周波数領域における分布を表す。本節では、摂動法を用いて、応答のバイスペクトルの近似解析解を導出し、その精度を確認する。次に、5.5節では、得られた近似解を用いて、入力のパワースペクトルの形状と応答歪度の関係を考察する。

5.4.1 ガウス性非白色ノイズの近似表現

近似解析解の導出を入力の各周波数成分のフーリエ係数を利用して進めるために、入力 $U(t)$ を近似的に次の式で定義される $\tilde{U}(t)$ で表す。

$$\tilde{U}(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^N \sqrt{2S_U(\omega_k)\Delta\omega} \cos(\omega_k t + \theta_k) \quad (5.21)$$

ここで、 $\Delta\omega$ は周波数の刻み幅であり、また $\omega_k = k\Delta\omega$ とする。 $S_U(\cdot)$ は式 (5.2) で与えられるパワースペクトルであり、 θ_k は互いに独立な、 $[-\pi, \pi)$ の一様分布に従う確率変数である。カットオフ周波数 ω_u を $\omega_u = N\Delta\omega$ とし、 $S_U(\omega_u)$ の値が無視できるほど小さくなるような十分大きい ω_u を考える。 ω_u を固定した上で $N \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow 0$ なる極限を考えると、 $\tilde{U}(t)$ は、 $|\omega| < \omega_u$ なる ω において、パワースペクトルが $S_U(\omega)$ と一致する定常ガウス過程となる [84]。オイラーの公式より、 $\tilde{U}(t)$ はさらに次のように整理できる。

$$\tilde{U}(t) = \sum_{k=-N}^N U_k \exp(i(\omega_k t + \theta_k)) \quad (5.22)$$

ここで、 $U_k = \sqrt{S_U(\omega_k)\Delta\omega}$ であり、パワースペクトルの対称性から、 $U_k = U_{-k}$ を満たす。また、非 0 の整数 k について、 $\theta_{-k} = -\theta_k$ である。

5.4.2 摂動法を用いた応答の近似解析と近似解のフーリエ係数

本研究における係数励振の大きさを支配するパラメータ ε は、 $|\varepsilon| \ll 1$ を満たす。そこで、運動方程式 (5.1) の定常応答 $X(t)$ の近似解 $\tilde{X}(t)$ を、 ε を用いて次のように表現する。

$$\tilde{X}(t) = X_0 + \varepsilon X_1(t) + \varepsilon^2 X_2(t) + \varepsilon^3 X_3(t) \quad (5.23)$$

式 (5.23) を運動方程式 (5.1) に代入し、 $U(t)$ を式 (5.22) の $\tilde{U}(t)$ とすることで、 $X_m(t)$ ($m = 0, 1, 2, 3$) が満たすべき方程式が次のように求まる。

$$\varepsilon^0: \quad \ddot{X}_0 + 2\zeta\dot{X}_0 + X_0 = \tilde{U}(t) \quad (5.24)$$

$$\varepsilon^1: \quad \ddot{X}_1 + 2\zeta\dot{X}_1 + X_1 = X_0\tilde{U}(t) \quad (5.25)$$

$$\varepsilon^2: \quad \ddot{X}_2 + 2\zeta\dot{X}_2 + X_2 = X_1\tilde{U}(t) \quad (5.26)$$

$$\varepsilon^3: \quad \ddot{X}_3 + 2\zeta\dot{X}_3 + X_3 = X_2\tilde{U}(t) \quad (5.27)$$

$X_0(t)$ の定常解は、線形系の式 (5.24) の周波数応答関数 $H(\omega) = 1/(1 - \omega^2 + i2\zeta\omega)$ を用いて次のように書ける。

$$X_0(t) = \sum_{m=-N}^N U_m H_m \exp(i(\omega_m t + \theta_m)) \quad (5.28)$$

ここで, $H_m = H(\omega_m)$ である. 次に, $X_1(t)$ の定常解について考える. $X_1(t)$ の支配方程式 (5.25) の右辺の励振項 $X_0\tilde{U}(t)$ を求める. ここで, 式 (5.22), (5.28) より, $\tilde{U}(t)$ と $X_0(t)$ の総和記号中の添え字はそれぞれ k と m であるが, $X_0\tilde{U}(t)$ を求める際は, $X_0(t)$ では j , $\tilde{U}(t)$ では m を, それぞれ添え字として用いる.

$$\begin{aligned} X_0\tilde{U}(t) &= \left(\sum_{j=-N}^N U_j H_j \exp(i(\omega_j t + \theta_j)) \right) \left(\sum_{m=-N}^N U_m \exp(i(\omega_m t + \theta_m)) \right) \\ &= \sum_{m=-N}^N \sum_{j=-N}^N U_j U_m H_j \exp(i((\omega_j + \omega_m)t + \theta_j + \theta_m)) \end{aligned} \quad (5.29)$$

これより, $X_1(t)$ の定常応答は次のように書ける.

$$X_1(t) = \sum_{m=-N}^N \sum_{j=-N}^N U_j U_m H_j H_{m+j} \exp(i((\omega_j + \omega_m)t + \theta_j + \theta_m)) \quad (5.30)$$

同様に考えて, $X_2(t)$ と $X_3(t)$ の定常応答は次のようになる.

$$X_2(t) = \sum_{m=-N}^N \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N U_j U_k U_m H_j H_{j+k} H_{j+k+m} \exp(i((\omega_j + \omega_k + \omega_m)t + \theta_j + \theta_k + \theta_m)) \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} X_3(t) &= \sum_{m=-N}^N \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N U_j U_k U_l U_m H_j H_{j+k} H_{j+k+l} H_{j+k+l+m} \\ &\quad \times \exp(i((\omega_j + \omega_k + \omega_l + \omega_m)t + \theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_m)) \end{aligned} \quad (5.32)$$

ここで, 式 (5.31), (5.32) では, 以降 $\tilde{X}(t)$ をそのフーリエ係数を用いて表現する際に簡潔に書けるようにする目的で, 式 (5.29) の場合と同様に, 総和記号で用いる添え字を適宜入れ替えている.

従って, ここまでの結果を用いて $\tilde{X}(t)$ は,

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t) &= \sum_{m=-N}^N U_m H_m \exp(i(\omega_m t + \theta_m)) + \varepsilon \sum_{m=-N}^N \sum_{j=-N}^N U_j U_m H_j H_{m+j} \exp(i((\omega_j + \omega_m)t + \theta_j + \theta_m)) \\ &\quad + \varepsilon^2 \sum_{m=-N}^N \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N U_j U_k U_m H_j H_{j+k} H_{j+k+m} \exp(i((\omega_j + \omega_k + \omega_m)t + \theta_j + \theta_k + \theta_m)) \\ &\quad + \varepsilon^3 \sum_{m=-N}^N \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N U_j U_k U_l U_m H_j H_{j+k} H_{j+k+l} H_{j+k+l+m} \\ &\quad \times \exp(i((\omega_j + \omega_k + \omega_l + \omega_m)t + \theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_m)) \end{aligned} \quad (5.33)$$

となる. この $\tilde{X}(t)$ を運動方程式 (5.1) の定常応答の近似解とみなす. $\tilde{X}(t)$ を, その複素フーリエ係数 F_m を用いて次のように書き直す.

$$\tilde{X}(t) = \sum_{m=-4N}^{4N} F_m \exp(i\omega_m t) \quad (5.34)$$

F_m を新たに $F_m = F_m^0 + \varepsilon F_m^I + \varepsilon^2 F_m^{II} + \varepsilon^3 F_m^{III}$ とおくと, 式 (5.33) より, F_m^0 , F_m^I , F_m^{II} , F_m^{III} はそれぞれ次のようになる.

$$F_m^0 = U_m H_m \exp(i\theta_m) \mathbb{1}_{[-N, N]}(m) \quad (5.35)$$

$$F_m^I = H_m \sum_{j=-N}^N U_j U_{m-j} H_j \exp(i(\theta_j + \theta_{m-j})) \mathbb{1}_{[-N, N]}(m-j) \mathbb{1}_{[-2N, 2N]}(m) \quad (5.36)$$

$$F_m^{II} = H_m \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N U_j U_k U_{m-(j+k)} H_j H_{j+k} \exp(i(\theta_j + \theta_k + \theta_{m-(j+k)})) \mathbb{1}_{[-N, N]}(m-(j+k)) \mathbb{1}_{[-3N, 3N]}(m) \quad (5.37)$$

$$F_m^{III} = H_m \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N U_j U_k U_l U_{m-(j+k+l)} H_j H_{j+k} H_{j+k+l} \times \exp(i(\theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_{m-(j+k+l)})) \mathbb{1}_{[-N, N]}(m-(j+k+l)) \mathbb{1}_{[-4N, 4N]}(m) \quad (5.38)$$

式中の $\mathbb{1}_A(\cdot)$ は、集合 A に対する指示関数であり、次のように定義される。

$$\mathbb{1}_A(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \in A, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (5.39)$$

式 (5.36) - (5.38) に含まれる 2 つの指示関数について考えると、それぞれ 1 つ目の指示関数が 1 となると、2 つ目の指示関数も常に 1 となる。例として式 (5.36) を考えると、 $-N \leq j \leq N$ かつ $-N \leq m-j \leq N$ を満たす m は、常に $-2N \leq m \leq 2N$ を満たす。従って、式 (5.36) - (5.38) に含まれる 2 つの指示関数のうち、以降は 1 つ目のみを考える。

5.4.3 $\tilde{X}(t)$ の平均の導出

$\tilde{X}$ の 3 次のキュムラントからバイスペクトルを求めたい。そのために、 $\tilde{X}(t)$ から平均を除いた $\tilde{X} - E[\tilde{X}]$ とそのフーリエ係数 $\tilde{F}_m$ を求める必要がある。そこで、 $\tilde{X}(t)$ の複素フーリエ係数の平均 $E[F_m]$ を求める。

$$E[F_m] = E[F_m^0] + \varepsilon E[F_m^I] + \varepsilon^2 E[F_m^{II}] + \varepsilon^3 E[F_m^{III}] \quad (5.40)$$

ここで

$$E[F_m^0] = U_m H_m E[\exp(i\theta_m)] \mathbb{1}_{[-N, N]}(m) \quad (5.41)$$

$$E[F_m^I] = H_m \sum_{j=-N}^N U_j U_{m-j} H_j E[\exp(i(\theta_j + \theta_{m-j}))] \mathbb{1}_{[-N, N]}(m-j) \quad (5.42)$$

$$E[F_m^{II}] = H_m \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N U_j U_k U_{m-(j+k)} H_j H_{j+k} E[\exp(i(\theta_j + \theta_k + \theta_{m-(j+k)}))] \mathbb{1}_{[-N, N]}(m-(j+k)) \quad (5.43)$$

$$E[F_m^{III}] = H_m \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N U_j U_k U_l U_{m-(j+k+l)} H_j H_{j+k} H_{j+k+l} \times E[\exp(i(\theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_{m-(j+k+l)}))] \mathbb{1}_{[-N, N]}(m-(j+k+l)) \quad (5.44)$$

である。これらの $E[F_m^0]$, $E[F_m^I]$, $E[F_m^{II}]$, $E[F_m^{III}]$ を求める際、ランダム位相 θ を引数として有する複素指数関数の期待値を評価する必要がある。そこで、次の式を用いる。

$$E \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^M \theta_{r_k} \right) \right] = \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{k=1}^M \theta_{r_k} = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (5.45)$$

ここで, r_k ($k = 1, 2, \dots, M$) は $-N \leq r_k \leq N$ を満たす整数である. 式 (5.45) の導出は Appendix B にて行っている. 式 (5.45) を考えると, 複素指数関数に含まれるランダム位相 θ_{r_k} の個数 M が奇数の場合, その期待値は常に 0 となる.

式 (5.41) 中の $E[\exp(i\theta_m)]$ は, 式 (5.45) より, すべての m について 0 である. 従って,

$$E[F_m^0] = 0 \quad (5.46)$$

となる.

式 (5.42) 中の $E[\exp(i(\theta_j + \theta_{m-j}))]$ について考えると, $\theta_j + \theta_{m-j} = 0$ となるには, 非 0 の整数 p に対して $\theta_{-p} = -\theta_p$ であるから, $j + (m - j) = 0$ つまり $m = 0$ が必要である. $m = 0$ かつ $j = 0$ の場合は, $E[\exp(i(\theta_0 + \theta_{0-0}))] = E[\exp(i(2\theta_0))] = 0$ となることも考慮すると, $E[\exp(i(\theta_j + \theta_{m-j}))]$ は $m = 0$ かつ $j \neq 0$ の場合 1 となり, それ以外の場合については 0 となる. よって,

$$E[F_m^I] = \begin{cases} H_0 \sum_{\substack{j=-N, \\ j \neq 0}}^N U_j^2 H_j & \text{if } m = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (5.47)$$

となる.

式 (5.43) 中の $E[\exp(i(\theta_j + \theta_k + \theta_{m-(j+k)}))]$ は, 式 (5.45) を考慮すると, 複素指数関数に含まれる θ_k の個数が奇数であることから, すべての m, j, k に対して $E[\exp(i(\theta_j + \theta_k + \theta_{m-(j+k)}))] = 0$ である. よって,

$$E[F_m^{II}] = 0 \quad (5.48)$$

となる.

最後に, 式 (5.44) について考える. この式中の $E[\exp(i(\theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_{m-(j+k+l)}))]$ が非 0 の値を示す条件は, 式 (5.45) より, $\theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_{m-(j+k+l)} = 0$ である. 非 0 の整数 p に対して $\theta_{-p} = -\theta_p$ であること, θ の添え字は非 0 でなくてはならないことに注意すると, この条件が満たされる j, k, l の状況は次のように整理できる.

状況 4.1-1 $\theta_j + \theta_k = 0$ かつ $\theta_l + \theta_{m-(j+k+l)} = 0$, つまり $j + k = 0$ かつ $m = 0$ かつ j と l がどちらも 0 ではない場合

状況 4.1-2 $\theta_j + \theta_l = 0$ かつ $\theta_k + \theta_{m-(j+k+l)} = 0$, つまり $j + l = 0$ かつ $m = 0$ かつ j と k がどちらも 0 ではない場合

状況 4.1-3 $\theta_k + \theta_l = 0$ かつ $\theta_j + \theta_{m-(j+k+l)} = 0$, つまり $k + l = 0$ かつ $m = 0$ かつ j と k がどちらも 0 ではない場合

上記の 4.1-1 から 4.1-3 全てにおいて, $j, k, l \neq 0$ が必要であることがわかる. 従って, 式 (5.44) は

$$E[F_m^{III}] = \begin{cases} H_m \sum_{\substack{j=-N, \\ j \neq 0}}^N \sum_{\substack{k=-N, \\ k \neq 0}}^N \sum_{\substack{l=-N, \\ l \neq 0}}^N U_j U_k U_l U_{m-(j+k+l)} H_j H_{j+k} H_{j+k+l} \\ \quad \times (1 - \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(j+k) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(j+l) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(k+l)) & \text{if } m = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (5.49)$$

とできる. ここで, $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合であり, 式中の $(1 - \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(j+k) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(j+l) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(k+l))$ は, $j+k, j+l, k+l$ のいずれかが 0 の場合 1, それ以外の場合は 0 となる.

これらを用いることで, $\tilde{X}$ から平均を除いた, $\tilde{X} - E[\tilde{X}]$ の複素フーリエ係数 $\bar{F}_m = F_m - E[F_m]$ を考えることができる. また, $\bar{F}_m = \bar{F}_m^0 + \varepsilon \bar{F}_m^I + \varepsilon^2 \bar{F}_m^{II} + \varepsilon^3 \bar{F}_m^{III}$ とすると, $\bar{F}_m^0 = F_m^0$, $\bar{F}_m^I = F_m^I - E[F_m^I]$, $\bar{F}_m^{II} = F_m^{II}$, $\bar{F}_m^{III} = F_m^{III} - E[F_m^{III}]$ である. 以降, これら $\bar{F}_m^0, \bar{F}_m^I, \bar{F}_m^{II}, \bar{F}_m^{III}$ を用いて, $\tilde{X}(t)$ の 2 次の中心モーメントやバイスペクトルを求める.

5.4.4 $\tilde{X}(t)$ の 2 次の中心モーメントの導出

応答のバイスペクトルを規格化するために、応答の 2 次の中心モーメント $E[(X(t) - E[X(t)])^2]$ を求めたい。そこで、 $\tilde{X}(t)$ の 2 次の中心モーメント $E[(\tilde{X}(t) - E[\tilde{X}])^2]$ に対して、入力周波数の刻み幅を 0 とする極限 $\Delta\omega \rightarrow 0$ を考えることで、 $E[(X(t) - E[X(t)])^2]$ の近似解を求める。

$\tilde{X}(t)$ の 2 次の中心モーメントは式 (5.34) より、 $\bar{F}_m$ を用いて次のように計算できる。

$$E[(\tilde{X}(t) - E[\tilde{X}])^2] = \sum_{m=-4N}^{4N} \sum_{n=-4N}^{4N} E[\bar{F}_m \bar{F}_n] \exp(i(\omega_m + \omega_n)t) \quad (5.50)$$

ここで、 $\tilde{X}(t)$ は定常な確率過程であるので、その 2 次の中心モーメントは、時間に依存しない定数である。また、 $\omega_m + \omega_n = \omega_{m+n} = (m+n)\Delta\omega$ である。そのため、 m と n に関する総和 $\sum_m \sum_n$ のうち、 $m+n=0$ なる場合のみ考えればよい。よって、 $\tilde{X}(t)$ の 2 次の中心モーメントは

$$E[(\tilde{X}(t) - E[\tilde{X}])^2] = \sum_{m=-4N}^{4N} E[\bar{F}_m \bar{F}_{-m}] \quad (5.51)$$

となる。式 (5.45) を考慮し、また ε について 4 次以上の項を微小項として無視すると、 $E[\bar{F}_m \bar{F}_{-m}]$ は次のように整理できる。

$$E[\bar{F}_m \bar{F}_{-m}] = E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_{-m}^0] + \varepsilon^2 (E[\bar{F}_m^I \bar{F}_{-m}^I] + \bar{F}_m^0 \bar{F}_{-m}^{II} + \bar{F}_m^{II} \bar{F}_{-m}^0) \quad (5.52)$$

ここで、式 (5.45) より、 ε^3 の項は 0 であるため、 ε について 2 次の項まで現れる。式 (5.52) の右辺の各項を求める。

まず、 $E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_{-m}^0]$ は、式 (5.35) より

$$\begin{aligned} E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_{-m}^0] &= U_m^2 |H_m|^2 E[\exp(i(\theta_m + \theta_{-m}))] \mathbb{1}_{[-N, N]}(m) \\ &= U_m^2 |H_m|^2 \mathbb{1}_{[-N, N] \setminus \{0\}}(m) \end{aligned} \quad (5.53)$$

である。ここで、 $U_m = U_{-m}$ 、 $H_{-m} = H_m^*$ であることを用いた。

次に $E[\bar{F}_m^I \bar{F}_{-m}^I]$ を考える。式 (5.47) に注意すると、式 (5.36) から、次のようになる。

$$E[\bar{F}_m^I \bar{F}_{-m}^I] = \begin{cases} U_0^4 H_0^4 E[\exp(i2\theta_0)] & \text{if } m = 0 \\ |H_m|^2 \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N U_j U_{m-j} U_k U_{-m-k} H_j H_k E[\exp(i(\theta_j + \theta_{m-j} + \theta_k + \theta_{-m-k}))] \\ \quad \times \mathbb{1}_{[-N, N]}(m-j) \mathbb{1}_{[-N, N]}(-m-k) & \text{if } 1 \leq |m| \leq 2N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.54)$$

ここで、 $E[\exp(i2\theta_0)] = 0$ である。また、 $E[\exp(i(\theta_j + \theta_{m-j} + \theta_k + \theta_{-m-k}))]$ が非 0 の値を示すのは、式 (5.45) より、 $\theta_j + \theta_{m-j} + \theta_k + \theta_{-m-k} = 0$ となる場合に限る。 $m \neq 0$ に注意して、式 (5.49) を求めた場合と同様に考えると、 $\theta_j + \theta_{m-j} + \theta_k + \theta_{-m-k} = 0$ となる j と k の状況は次の通り。

状況 4.2-1 $\theta_j + \theta_k = 0$ かつ $\theta_{m-j} + \theta_{-m-k} = 0$ 、つまり $j + k = 0$ かつ $j, m-j$ がどちらも 0 ではない場合

状況 4.2-2 $\theta_j + \theta_{-m-k} = 0$ かつ $\theta_{m-j} + \theta_k = 0$ 、つまり $j - k = m$ かつ $j, m-j$ がどちらも 0 ではない場合

ここで, $j = m/2$ のとき, 上記の 4.2-1 と 4.2-2 を両方とも満たすことになる. このことに注意して整理すると, 式 (5.54) 右辺 2 段目の式は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}
& |H_m|^2 \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N U_j U_{m-j} U_k U_{-m-k} H_j H_k \\
& \quad \times E[\exp(i(\theta_j + \theta_{m-j} + \theta_k + \theta_{-m-k}))] \mathbb{1}_{[-N, N]}(m-j) \mathbb{1}_{[-N, N]}(-m-k) \\
& = |H_m|^2 \sum_{\substack{j=-N, \\ j \neq 0, m}}^N U_j^2 U_{m-j}^2 (H_j H_{-j} + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{m/2\}}(j) H_j H_{-m+j}) \mathbb{1}_{[-N, N]}(m-j)
\end{aligned} \tag{5.55}$$

ここで, $\mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{m/2\}}(j)$ は, j が $m/2$ 以外の整数の場合は 1 を, それ以外の場合は 0 を返す関数である. 式 (5.55) より, $E[\exp(i(\theta_j + \theta_{m-j} + \theta_k + \theta_{-m-k}))]$ が非 0 の値を示す条件を考えることによって, 総和に含まれる多数の項の中から, 0 となる項を除いた 2 次の中心モーメントを構成する重要な項のみを抜き出して考えることができる. 以降も式 (5.45) を用いて整理できる式が現れた場合は, 同様の方針で計算する.

最後に, $E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_{-m}^{II}]$ を考える. これは式 (5.35) と (5.37) から次のようになる.

$$\begin{aligned}
E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_{-m}^{II}] &= U_m |H_m|^2 \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N U_j U_k U_{-m-(j+k)} H_j H_{j+k} E[\exp(i(\theta_m + \theta_j + \theta_k + \theta_{-m-(j+k)}))] \\
& \quad \times \mathbb{1}_{[-N, N]}(-m-(j+k))
\end{aligned} \tag{5.56}$$

式 (5.49) と式 (5.55) を求めたときと同様に, 式 (5.45) を用いると, $E[\exp(i(\theta_m + \theta_j + \theta_k + \theta_{-m-(j+k)}))]$ が非 0 の値を示す j と k の状況は次の通りに整理できる.

状況 4.3-1 $\theta_m + \theta_j = 0$ かつ $\theta_k + \theta_{-m-(j+k)} = 0$, つまり $m + j = 0$ かつ m と k がどちらも 0 ではない場合

状況 4.3-2 $\theta_m + \theta_k = 0$ かつ $\theta_j + \theta_{-m-(j+k)} = 0$, つまり $m + k = 0$ かつ m と j がどちらも 0 ではない場合

状況 4.3-3 $\theta_m + \theta_{-m-(j+k)} = 0$ かつ $\theta_j + \theta_k = 0$, つまり $j + k = 0$ かつ m と j がどちらも 0 ではない場合

上記の 4.3-1 から 4.3-3 より, $E[\exp(i(\theta_m + \theta_j + \theta_k + \theta_{-m-(j+k)}))]$ が非 0 の値を示すためには, $m \neq 0$ が必要であることがわかる. さらに, $j = k = -m$ としたとき, 上記の 4.3-1 と 4.3-2 を両方とも満たすことになる. 同様に, $j = -m$, $k = m$ としたとき, 上記の 4.3-1 と 4.3-3 を両方とも満たすこととなる. 最後に, $j = m$, $k = -m$ としたとき, 上記の 4.3-2 と 4.3-3 を両方とも満たすこととなる. これらに注意すると, $E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_{-m}^{II}]$ は次のようになる.

$$E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_{-m}^{II}] = \begin{cases} 0 & \text{if } m = 0, \\ U_m^2 |H_m|^2 \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N U_j^2 (H_{-m} H_{-m+j} + H_j H_{-m+j} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-m\}}(j) + H_j H_0 \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-m, m\}}(j)) & \text{if } 1 \leq |m| \leq N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5.57}$$

$E[\bar{F}_m^{II} \bar{F}_{-m}^0]$ は, 式 (5.57) において m の符号を反転させることで求まる.

以上, 式 (5.51), (5.52), (5.53), (5.54), (5.55), (5.57) を用いると, $\tilde{X}(t)$ の 2 次の中心モーメントは次のよう

に書くことができる.

$$\begin{aligned}
& E[(\tilde{X}(t) - E[\tilde{X}])^2] \\
&= \sum_{m=-4N}^{4N} \left[U_m^2 |H_m|^2 \mathbb{1}_{[-N, N] \setminus \{0\}}(m) \right. \\
&\quad + \varepsilon^2 \left\{ |H_m|^2 \sum_{\substack{j=-N, \\ j \neq 0, m}}^N U_j^2 U_{m-j}^2 (H_j H_{-j} + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{m/2\}}(j) H_j H_{-m+j}) \mathbb{1}_{[-N, N]}(m-j) \mathbb{1}_{[-2N, 2N] \setminus \{0\}}(m) \right. \\
&\quad + U_m^2 |H_m|^2 \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N U_j^2 (H_{-m} H_{-m+j} + H_j H_{-m+j} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-m\}}(j) + H_j H_0 \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-m, m\}}(j)) \mathbb{1}_{[-N, N] \setminus \{0\}}(m) \\
&\quad \left. \left. + U_m^2 |H_m|^2 \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N U_j^2 (H_m H_{m+j} + H_j H_{m+j} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{m\}}(j) + H_j H_0 \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-m, m\}}(j)) \mathbb{1}_{[-N, N] \setminus \{0\}}(m) \right\} \right]
\end{aligned} \tag{5.58}$$

$U_k = \sqrt{S_U(\omega_k) \Delta\omega}$ を代入し, $\omega_u = N\Delta\omega$ を固定した上で $\Delta\omega \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) を考える. このとき, 極限を考える過程で式 (5.58) 右辺に存在する, $\mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{m/2\}}(j)$ をはじめとした特定のパラメータの組み合わせのみ 0 となる指示関数はすべて 1 としてよい. また, $\mathbb{1}_{[-N, N] \setminus \{0\}}(m)$ についても, $\mathbb{1}_{[-N, N]}(m)$ とできる. これらのことに注意すると, $\tilde{X}(t)$ の 2 次の中心モーメントの極限は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} E[(\tilde{X}(t) - E[\tilde{X}])^2] \\
&= \int_{-4\omega_u}^{4\omega_u} \mathbb{1}_{[-\omega_u, \omega_u]}(\omega) \left[S_U(\omega) |H(\omega)|^2 \mathbb{1}_{[-\omega_u, \omega_u]}(\omega) \right. \\
&\quad + \varepsilon^2 \left\{ |H(\omega)|^2 \int_{-\omega_u}^{\omega_u} S_U(\omega') S_U(\omega - \omega') (|H(\omega')|^2 + H(\omega') H(-\omega + \omega')) \right. \\
&\quad \quad \times \mathbb{1}_{[-\omega_u, \omega_u]}(\omega - \omega') \mathbb{1}_{[-2\omega_u, 2\omega_u]}(\omega) d\omega' \\
&\quad + S_U(\omega) |H(\omega)|^2 \int_{-\omega_u}^{\omega_u} S_U(\omega') (H(-\omega) H(-\omega + \omega') + H(\omega) H(\omega + \omega') \\
&\quad \quad + H(\omega') (H(-\omega + \omega') + H(\omega + \omega')) + 2H(-\omega') H(0)) \mathbb{1}_{[-\omega_u, \omega_u]}(\omega') d\omega' \left. \right\} d\omega
\end{aligned} \tag{5.59}$$

ω_u が十分大きな場合を考えているので, 式 (5.59) 右辺の $\mathbb{1}_{[-\omega_u, \omega_u]}(\omega)$ と $\mathbb{1}_{[-\omega_u, \omega_u]}(\omega - \omega')$ は 1 と見なすことができる. また, $[-\omega_u, \omega_u]$ の範囲に対する積分も, 実数全体に対する積分と見なすことができる. これらを考慮すると, 応答の 2 次の中心モーメント $E[(X(t) - E[X])^2]$ の近似解析解は次のように得られる.

$$\begin{aligned}
E[(X(t) - E[X])^2] &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \left[S_U(\omega) |H(\omega)|^2 \right. \\
&\quad + \varepsilon^2 |H(\omega)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ S_U(\omega') S_U(\omega - \omega') (|H(\omega')|^2 + H(\omega') H(-\omega + \omega')) \right. \\
&\quad \quad + S_U(\omega) S_U(\omega') (H(-\omega) H(-\omega + \omega') + H(\omega) H(\omega + \omega') \\
&\quad \quad \quad \left. + H(\omega') (H(-\omega + \omega') + H(\omega + \omega')) + 2H(-\omega') H(0)) \right\} d\omega' \left. \right] d\omega
\end{aligned} \tag{5.60}$$

なお, これは ε について 3 次まで考慮した場合の, 応答の 2 次の中心モーメントの近似解析解である. しかし, ε^3 の項は存在しないため, ε について 2 次まで考慮した場合の応答の 2 次の中心モーメントの近似解析解も, 同様に式 (5.60) で計算できる.

5.4.5 $\tilde{X}(t)$ の 3 次のキュムラントとそれを用いたバイスペクトルの導出

$\tilde{X}(t)$ の 3 次キュムラントから応答のバイスペクトルの近似解析解を求める． $\tilde{X}(t)$ の 3 次のキュムラント $c_3^{\tilde{X}}(\tau_1, \tau_2)$ は、 $\bar{F}_m$ を用いると次のように書ける．

$$\begin{aligned} c_3^{\tilde{X}}(\tau_1, \tau_2) &= E[(\tilde{X}(t) - E[\tilde{X}])(\tilde{X}(t + \tau_1) - E[\tilde{X}])(\tilde{X}(t + \tau_2) - E[\tilde{X}])] \\ &= \sum_{m=-4N}^{4N} \sum_{n=-4N}^{4N} \sum_{o=-4N}^{4N} E[\bar{F}_m \bar{F}_n \bar{F}_o] \exp(i((\omega_m + \omega_n + \omega_o)t + \omega_m \tau_1 + \omega_n \tau_2)) \end{aligned} \quad (5.61)$$

ここで、 $\tilde{X}(t)$ は定常な確率過程であるので、3 次のキュムラントは時間差 τ_1 と τ_2 のみの関数である．また、 $\omega_m + \omega_n + \omega_o = \omega_{m+n+o} = (m+n+o)\Delta\omega$ である．従って、 m, n, o に関する総和 $\sum_m \sum_n \sum_o$ のうち、 $m+n+o=0$ なる場合のみ考えればよい．よって、 $\tilde{X}(t)$ の 3 次のキュムラントは

$$c_3^{\tilde{X}}(\tau_1, \tau_2) = \sum_{m=-4N}^{4N} \sum_{n=-4N}^{4N} E[\bar{F}_m \bar{F}_n \bar{F}_{-(m+n)}] \exp(i(\omega_m \tau_1 + \omega_n \tau_2)) \quad (5.62)$$

となる．従って、 $E[\bar{F}_m \bar{F}_n \bar{F}_{-(m+n)}]$ を求めることで、 $\tilde{X}$ の 3 次のキュムラントが求まる．本研究では、 $N\Delta\omega = \omega_u$ において ω_u および N が十分大きな値となるような値を考える．このことと、3 次のキュムラントの対称性も考慮して、 $E[\bar{F}_m \bar{F}_n \bar{F}_{-(m+n)}]$ 中の m と n は、 $0 \leq m, n \leq N/2$ となる場合に限定して考えれば十分である．

2 次の中心モーメントを求めたときと同様に式 (5.45) を考慮し、また ε について 4 次以上の項を微小項として無視すると、 $E[\bar{F}_m \bar{F}_n \bar{F}_{-(m+n)}]$ は次のように整理できる．

$$\begin{aligned} E[\bar{F}_m \bar{F}_n \bar{F}_{-(m+n)}] &= \varepsilon \left(E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_n^0 \bar{F}_{-(m+n)}^I] + E[\bar{F}_{-(m+n)}^0 \bar{F}_m^0 \bar{F}_n^I] + E[\bar{F}_{-(m+n)}^0 \bar{F}_n^0 \bar{F}_m^I] \right) \\ &\quad + \varepsilon^3 \left(E[\bar{F}_m^I \bar{F}_n^I \bar{F}_{-(m+n)}^I] + E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_n^0 \bar{F}_{-(m+n)}^{III}] \right. \\ &\quad + E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_{-(m+n)}^0 \bar{F}_n^{III}] + E[\bar{F}_{-(m+n)}^0 \bar{F}_n^0 \bar{F}_m^{III}] \\ &\quad + E[\bar{F}_n^I \bar{F}_m^I \bar{F}_{-(m+n)}^0] + E[\bar{F}_m^I \bar{F}_n^{II} \bar{F}_{-(m+n)}^0] + E[\bar{F}_m^I \bar{F}_{-(m+n)}^{II} \bar{F}_n^0] \\ &\quad \left. + E[\bar{F}_n^I \bar{F}_{-(m+n)}^{II} \bar{F}_m^0] + E[\bar{F}_{-(m+n)}^I \bar{F}_n^{II} \bar{F}_m^0] + E[\bar{F}_{-(m+n)}^I \bar{F}_m^{II} \bar{F}_n^0] \right) \end{aligned} \quad (5.63)$$

以降、式 (5.63) の各項を評価する．

まず、 $E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_n^0 \bar{F}_{-(m+n)}^I]$ 、 $E[\bar{F}_{-(m+n)}^0 \bar{F}_m^0 \bar{F}_n^I]$ 、 $E[\bar{F}_{-(m+n)}^0 \bar{F}_n^0 \bar{F}_m^I]$ を評価するために、 $E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^I] (-N \leq p, q, r \leq N, p+q+r=0)$ を考える．ここで、 $\bar{F}_m^I = F_m^I - E[F_m^I]$ と式 (5.36)、(5.47) より、

$$\bar{F}_m^I = \begin{cases} U_0^2 H_0^2 \exp(i2\theta_0) & \text{if } m = 0, \\ F_m^I & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (5.64)$$

であるから、 $\bar{F}_r^I$ の添え字 r については、0 とそれ以外の場合で分けて考える必要がある．しかし、 $\bar{F}_0^I$ には $\exp(i2\theta_0)$ が含まれるため、式 (5.45) から、 $\bar{F}_0^I$ を含んだ周波数成分の積の期待値は常に 0 となる．ゆえに $r \neq 0$ とすると、

$$E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^I] = U_p U_q H_p H_q H_r \sum_{j=-N}^N U_j U_{r-j} H_j E[\exp(i(\theta_p + \theta_q + \theta_j + \theta_{r-j}))] \mathbb{1}_{[-N, N]}(r-j) \quad (5.65)$$

となる．ここで、 $r \neq 0$ に注意して、 $E[\exp(i(\theta_p + \theta_q + \theta_j + \theta_{r-j}))]$ が非 0 の値を示す j の状況は次の 2 通りに限られる．

状況 4.4-1 $\theta_p + \theta_j = 0$ かつ $\theta_q + \theta_{r-j} = 0$ 、つまり $p+j=0$ かつ p, q がいずれも 0 ではない場合

状況 4.4-2 $\theta_p + \theta_{r-j} = 0$ かつ $\theta_q + \theta_j = 0$, つまり $q + j = 0$ かつ p, q がいずれも 0 ではない場合

ここで, 上記の 4.4-1 および 4.4-2 において, $-N \leq r - j \leq N$ は満たされる. また, $p = q$ のとき 4.4-1 と 4.4-2 の両方を満たすことに注意すると, $E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^I]$ ($1 \leq p, q$) は次のように整理できる.

$$E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^I] = U_p^2 U_q^2 H_p H_q H_r (H_{-p} + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(p - q) H_{-q}) \quad (5.66)$$

それ以外の, 式 (5.63) 中の ε^3 の各項は, 次のように評価できる. それぞれの導出は, Appendix C, D, E で行っている.

$$E[\bar{F}_m^I \bar{F}_n^I \bar{F}_{-(m+n)}^I] = H_m H_n H_{-(m+n)} \sum_{\substack{j=-N, \\ j \neq 0}}^N \tilde{\lambda}(m, n, j) \quad (5.67)$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(m, n, j) = & U_j^2 U_{m-j}^2 \left[U_{n+j}^2 H_j H_{-j} H_{-m+j} \mathbb{1}_{[-N+m, N-n] \setminus \{-n, m\}}(j) \right. \\ & + U_{n+j}^2 H_j H_{-j} H_{-n-j} \mathbb{1}_{[-N+m, N-n] \setminus \{-n, m, (m-n)/2\}}(j) \\ & + U_{m+n-j}^2 H_j H_{-m+j} H_{-j} \mathbb{1}_{[-N+m+n, N+m] \setminus \{m/2, m, m+n\}}(j) \\ & + U_{m+n-j}^2 H_j H_{m+n-j} H_{-j} \mathbb{1}_{[-N+m+n, N+m] \setminus \{m, m+n, (2m+n)/2\}}(j) \\ & + U_{n+j}^2 H_j H_{n+j} H_{-m+j} \mathbb{1}_{[-N+m, N-n] \setminus \{-n, -n/2, m/2, m\}}(j) \\ & + U_{n+j}^2 H_j H_{n+j} H_{-n-j} \mathbb{1}_{[-N+m, N+m] \setminus \{-n, -n/2, (m-n)/2, m\}}(j) \\ & + U_{m+n-j}^2 H_j H_{-m+j} H_{-m-n+j} \mathbb{1}_{[-N+m+n, N+m] \setminus \{m/2, m, (m+n)/2, m+n\}}(j) \\ & \left. + U_{m+n-j}^2 H_j H_{m+n-j} H_{-m-n+j} \mathbb{1}_{[-N+m, N+m] \setminus \{m/2, m, (m+n)/2, (2m+n)/2, m+n\}}(j) \right] \quad (5.68) \end{aligned}$$

$$E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^{III}] = H_p H_q H_r \sum_{\substack{j=-N, \\ j \neq 0}}^N \tilde{\mu}(p, q, j) \quad (5.69)$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(p, q, j) = & U_p^2 U_q^2 U_j^2 \left[H_{-p} H_{-p-q} H_{-p-q+j} + H_{-p} H_{-p+j} H_{-p} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-q\}}(j) \right. \\ & + H_{-p} H_{-p+j} H_{-p-q+j} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-q, q\}}(j) \\ & + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(p - q) \left\{ H_{-q} H_{-p-q} H_{-p-q+j} + H_{-q} H_{-q+j} H_{-q} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p\}}(j) \right. \\ & \left. + H_{-q} H_{-q+j} H_{-p-q+j} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p, p\}}(j) \right\} \\ & + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p, -q\}}(j) \left\{ H_j H_0 H_{-p} + H_j H_0 H_{-q} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(p - q) + H_j H_{-p+j} H_{-p} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{p\}}(j) \right. \\ & + H_j H_{-q+j} H_{-q} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(p - q) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{q\}}(j) \\ & + H_j H_{-p+j} H_{-p-q+j} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{p, q\}}(j) \\ & \left. \left. + H_j H_{-q+j} H_{-p-q+j} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(p - q) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{p, q\}}(j) \right\} \right] \quad (5.70) \end{aligned}$$

$$E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^I \bar{F}_r^{II}] = H_p H_q H_r \sum_{\substack{j=-N, \\ j \neq 0}}^N \tilde{\nu}(p, q, j) \quad (5.71)$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(p, q, j) = & U_p^2 U_j^2 \left[\mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(p+q) U_{p+q}^2 \left\{ H_{-p} H_{-p-q} H_{-p-q+j} + H_{-p} H_j H_{-p-q+j} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p-q\}}(j) \right. \right. \\ & \left. \left. + H_{-p} H_j H_0 \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p-q, p+q\}}(j) \right\} \right. \\ & + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(p+q) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(2p+q) U_{p+q}^2 \left\{ H_{p+q} H_{-p-q} H_{-p-q+j} \right. \\ & \left. + H_{p+q} H_j H_{-p-q+j} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p-q\}}(j) \right. \\ & \left. + H_{p+q} H_j H_0 \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p-q, p+q\}}(j) \right\} \\ & + \mathbb{1}_{[-N+q, N+q] \setminus \{-p, q, p+q\}}(j) U_{q-j}^2 \left\{ H_j H_{-j} H_{-p-j} + H_j H_{-j} H_{-q} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p+q\}}(j) \right. \\ & \left. + H_j H_{-p} H_{-p-j} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{p\}}(j) \right. \\ & \left. + H_j H_{-q+j} H_{-q} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p+q, q/2\}}(j) \right. \\ & \left. + H_j H_{-p} H_{-p-q+j} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{q/2, p\}}(j) \right. \\ & \left. + H_j H_{-q+j} H_{-p-q+j} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p+q, q/2, p\}}(j) \right\} \left. \right] \quad (5.72) \end{aligned}$$

以上をまとめると、式 (5.62) 中の $E[\bar{F}_m \bar{F}_n \bar{F}_{-(m+n)}]$ ($0 \leq m, n \leq N/2$) は次のように書ける。

$$\begin{aligned} & E[\bar{F}_m \bar{F}_n \bar{F}_{-(m+n)}] \\ & = H_m H_n H_{-(m+n)} \left[\varepsilon \left\{ U_m^2 U_n^2 (H_{-m} + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(m-n) H_{-n}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + U_m^2 U_{m+n}^2 (H_{-m} + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(2m+n) H_{m+n}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + U_n^2 U_{m+n}^2 (H_{-n} + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(m+2n) H_{m+n}) \right\} \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^3 \sum_{\substack{j=-N, \\ j \neq 0}}^N \left\{ \tilde{\lambda}(m, n, j) + \tilde{\mu}(m, n, j) + \tilde{\mu}(m, -m-n, j) + \tilde{\mu}(n, -m-n, j) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \tilde{\nu}(m, n, j) + \tilde{\nu}(n, m, j) + \tilde{\nu}(m, -m-n, j) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \tilde{\nu}(-m-n, m, j) + \tilde{\nu}(n, -m-n, j) + \tilde{\nu}(-m-n, n, j) \right\} \right] \quad (5.73) \end{aligned}$$

$\tilde{X}(t)$ の 3 次のキュムラントに対して、 $U_k = \sqrt{S_U(\omega_k)} \Delta\omega$ を代入し、 $\omega_u = N\Delta\omega$ を固定した上で $\Delta\omega \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) を考える。2 次のキュムラントの極限を考えたときと同様に、極限を考える過程で式 (5.68), (5.70), (5.72) の右辺に存在する、 $\mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-q\}}(j)$ をはじめとした特定のパラメータの組み合わせのみ 0 となる指示関数は 1 としてよい。また、式 (5.68) に現れる $\mathbb{1}_{[-N+m, N-n] \setminus \{-n, m\}}(j)$ をはじめとした、用いられる領域に N が含まれる指示関数の値も常に 1 としてよい。さらに、式 (5.73) は $0 \leq m, n \leq N/2$ に対する式であるが、 $N \rightarrow \infty$ の極限を考える過程でこの条件

も無視できる．これらのことに注意すると， $\tilde{X}(t)$ の 3 次のキュムラント式 (5.63) の極限は次のように計算できる．

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} c_3^{\tilde{X}}(\tau_1, \tau_2) &= \int_{-\omega_u}^{\omega_u} \int_{-\omega_u}^{\omega_u} \exp(i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)) \left[\varepsilon \{ \kappa(\omega_1, \omega_2) + \kappa(\omega_1, -(\omega_1 + \omega_2)) + \kappa(-(\omega_1 + \omega_2), \omega_2) \} \right. \\ &\quad + \varepsilon^3 H(\omega_1)H(\omega_2)H(-(\omega_1 + \omega_2)) \int_{-\omega_u}^{\omega_u} \lambda(\omega_1, \omega_2, \omega') \\ &\quad + \mu(\omega_1, \omega_2, \omega') + \mu(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2, \omega') + \mu(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2, \omega') \\ &\quad + \nu(\omega_1, \omega_2, \omega') + \nu(\omega_2, \omega_1, \omega') + \nu(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2, \omega') \\ &\quad \left. + \nu(-\omega_1 - \omega_2, \omega_1, \omega') + \nu(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2, \omega') + \nu(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2, \omega') d\omega' \right] d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned} \quad (5.74)$$

ここで

$$\kappa(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1)H(\omega_2)H(-(\omega_1 + \omega_2))S_U(\omega_1)S_U(\omega_2)(H(-\omega_1) + H(-\omega_2)) \quad (5.75)$$

$$\begin{aligned} \lambda(\omega_1, \omega_2, \omega') &= S_U(\omega')S_U(\omega_1 - \omega') \left[S_U(\omega_2 + \omega')H(\omega') \{ H(-\omega') + H(\omega_2 + \omega') \} \right. \\ &\quad \times \{ H(-\omega_1 + \omega') + H(-\omega_2 - \omega') \} \\ &\quad + S_U(\omega_1 + \omega_2 - \omega')H(\omega') \{ H(-\omega') + H(-\omega_1 - \omega_2 + \omega') \} \\ &\quad \left. \times \{ H(-\omega_1 + \omega') + H(\omega_1 + \omega_2 - \omega') \} \right] \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} \mu(\omega_1, \omega_2, \omega') &= S_U(\omega_1)S_U(\omega_2)S_U(\omega') \left[H(-\omega_1) \{ H(-\omega_1 - \omega_2)H(-\omega_1 - \omega_2 + \omega') \right. \\ &\quad \left. + H(-\omega_1 + \omega')H(-\omega_1) + H(-\omega_1 + \omega')H(-\omega_1 - \omega_2 + \omega') \} \right. \\ &\quad + H(-\omega_2) \{ H(-\omega_1 - \omega_2)H(-\omega_1 - \omega_2 + \omega') + H(-\omega_2 + \omega')H(-\omega_2) \} \\ &\quad \left. + H(-\omega_2 + \omega')H(-\omega_1 - \omega_2 + \omega') \} \right. \\ &\quad + H(\omega') \{ H(0)H(-\omega_1) + H(0)H(-\omega_2) + H(-\omega_1 + \omega')H(-\omega_1) \\ &\quad + H(-\omega_2 + \omega')H(-\omega_2) + H(-\omega_1 + \omega')H(-\omega_1 - \omega_2 + \omega') \\ &\quad \left. + H(-\omega_2 + \omega')H(-\omega_1 - \omega_2 + \omega') \} \right] \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned} \nu(\omega_1, \omega_2, \omega') &= S_U(\omega_1)S_U(\omega') \left[S_U(\omega_1 + \omega_2) \{ H(-\omega_1) + H(\omega_1 + \omega_2) \} \right. \\ &\quad \left\{ H(-\omega_1 - \omega_2)H(-\omega_1 - \omega_2 + \omega') \right. \\ &\quad \left. + H(\omega')H(-\omega_1 - \omega_2 + \omega') + H(\omega')H(0) \} \right. \\ &\quad + S_U(\omega_2 - \omega')H(\omega') \{ H(-\omega')H(-\omega_1 - \omega') + H(-\omega')H(-\omega_2) \\ &\quad + H(-\omega_1)H(-\omega_1 - \omega') + H(-\omega_2 + \omega')H(-\omega_2) \\ &\quad \left. + H(-\omega_1)H(-\omega_1 - \omega_2 + \omega') + H(-\omega_2 + \omega')H(-\omega_1 - \omega_2 + \omega') \} \right] \end{aligned} \quad (5.78)$$

である．

応答のパワースペクトルを求めたときと同様に考えて， ω_u が十分大きな場合を考えているので， $[-\omega_u, \omega_u]$ の範囲に対する積分も，実数全体に対する積分と見なすことができる．そのもとで，3 次キュムラントとパワースペクトルの関係式 (3.12) を考えると，元の運動方程式 (5.1) の応答のパワースペクトル $B_X(\omega_1, \omega_2)$ の近似解析解は次のように得ら

れる.

$$\begin{aligned}
B_X(\omega_1, \omega_2) \approx & \varepsilon \{ \kappa(\omega_1, \omega_2) + \kappa(\omega_1, -(\omega_1 + \omega_2)) + \kappa(-(\omega_1 + \omega_2), \omega_2) \} \\
& + \varepsilon^3 H(\omega_1) H(\omega_2) H(-(\omega_1 + \omega_2)) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lambda(\omega_1, \omega_2, \omega') \right. \\
& + \mu(\omega_1, \omega_2, \omega') + \mu(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2, \omega') + \mu(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2, \omega') \\
& + \nu(\omega_1, \omega_2, \omega') + \nu(\omega_2, \omega_1, \omega') + \nu(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2, \omega') \\
& \left. + \nu(-\omega_1 - \omega_2, \omega_1, \omega') + \nu(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2, \omega') + \nu(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2, \omega') \right\} d\omega'
\end{aligned} \tag{5.79}$$

本研究では、応答歪度の特性をバイスペクトルを用いて考察することが目的にあるため、応答のバイスペクトルの近似解を 5.4.4 項で求めた 2 次の中心モーメントの近似解の 1.5 乗で割ったものを用いる。規格化されたバイスペクトル $B_X(\omega_1, \omega_2)/(E[(X - E[X])^2])^{1.5}$ の実部を、以降 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ と表す。

2 次の中心モーメントの式 (5.60) とバイスペクトルの式 (5.79) は、共に ε について 3 次まで考慮した場合の近似解析解であるため、この 2 式から計算した $b_X(\omega_1, \omega_2)$ も、 ε について 3 次まで考慮した場合の近似解析解である。次に、式 (5.79) において、 ε^3 の項を無視すると、 ε について 2 次まで考慮した場合の応答のバイスペクトルの近似解析解が次のように求まる。

$$B_X(\omega_1, \omega_2) \approx \varepsilon \{ \kappa(\omega_1, \omega_2) + \kappa(\omega_1, -(\omega_1 + \omega_2)) + \kappa(-(\omega_1 + \omega_2), \omega_2) \} \tag{5.80}$$

ε について 2 次まで考慮した場合の応答の 2 次の中心モーメントも、式 (5.60) で計算できることを考えると、式 (5.60) と (5.80) から求まる $b_X(\omega_1, \omega_2)$ は、 ε について 2 次まで考慮した場合の規格化したバイスペクトルの近似解析解である。

次項では、本項までで求めた近似解析解の精度および、 ε について 3 次まで考慮した場合と 2 次まで考慮した場合の近似解析解の比較を行う。

5.4.6 近似解析解の精度の検証

前節までで求めた近似解析解の精度を、シミュレーションから求めた規格化されたバイスペクトルと比較することで確認する。式 (5.60)、(5.79) 中の積分を解析的に求めることはできない。そのため、台形則に従って数値計算を行う。

シミュレーション結果からバイスペクトルを求める際は、式 (3.15) および式 (3.17) に基づいて推定する手法を採用する [85]。その概要を以下に説明する。

1. シミュレーションより求められた、 $k(k = 1, \dots, K)$ 本目の標本関数の、 $l(l = 1, \dots, L)$ 番目の値を、 x_l^k とする。
ここで、5.3 節より、 $K = 1,000,000$ 、 $L = 2^{19}$ である。
2. x_l^k から k 本目の標本関数の平均を除いた値を $\bar{x}_l^k$ とすると、次のように計算できる。

$$\bar{x}_l^k = x_l^k - \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L x_l^k \tag{5.81}$$

3. 高速フーリエ変換によって、各標本関数に対してフーリエ係数 X_j^k を求める。

$$X_j^k = \sum_{l=1}^L \bar{x}_l^k \exp(-i2\pi lj/L) \tag{5.82}$$

ただし、 $j = 1, 2, \dots, L/2$

4. X_j^k を用いて, 各標本関数に対するパイスペクトル $B^k(\omega_m, \omega_n)$ を求める.

$$B^k(\omega_m, \omega_n) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{(\Delta t)^2}{L} X_m^k X_n^k X_{m+n}^{*k} \quad (5.83)$$

ここで, Δt は数値計算を行う際の時間刻み幅で, 本研究では $\Delta t = 0.001$ である.

5. 全標本関数にわたって $B^k(\omega_m, \omega_n)$ の平均を求め, それをシミュレーションから求めるパイスペクトル $B(\omega_m, \omega_n)$ とする.

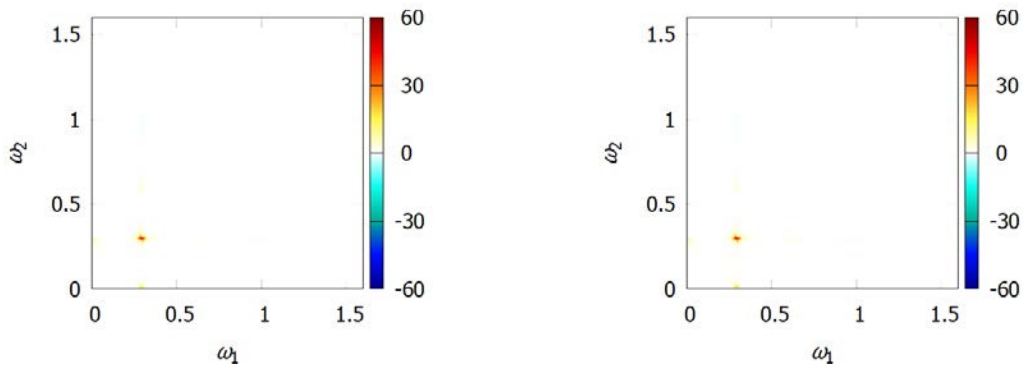
$$B(\omega_m, \omega_n) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K B^k(\omega_m, \omega_n) \quad (5.84)$$

なお, シミュレーションから得られた波形から平均を除く操作を行う関係で, パイスペクトルは $\omega_1, \omega_2 \neq 0$ の範囲のみを考える.

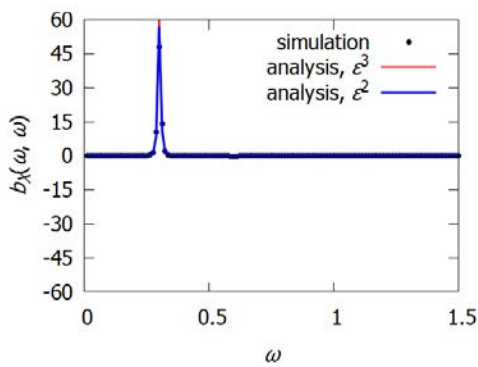
図 5.10-5.12 にはそれぞれ, $(\alpha, \rho) = (0.01, 0.3), (0.05, 0.8), (1, 1.3)$ の場合の規格化された応答のパイスペクトルの実部 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ を示している. すべての図には, 摂動法によって求めた $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の近似解析解と, シミュレーションから求めた $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の両方をプロットしている. 図 5.10-5.12 の (a) と (b) では, $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の様子をコンター図でプロットしている. 第 3 章で示した図 3.2 より, $0 \leq \omega_1, \omega_2$ では直線 $\omega_1 = \omega_2$ に対してパイスペクトルは線対称である. そこで, 図 5.10-5.12 の (a) と (b) では, $\omega_2 < \omega_1$ なる範囲では $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の近似解析解を, $\omega_1 \leq \omega_2$ なる範囲ではシミュレーションによって求めた $b_X(\omega_1, \omega_2)$ を表示してある. 図 5.10-5.12(a) では ε について 2 次まで考慮した場合の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の近似解析解, 図 5.10-5.12(b) では ε について 3 次まで考慮した場合の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の近似解析解をそれぞれプロットしている.

図 5.10-5.12 の (a) と (b) を見ると, 共通して $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho), (\rho, 0), (0, \rho)$ 付近で $b_X(\omega_1, \omega_2)$ は顕著な値を示す. 図 5.10-5.12 の (c) では, $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho)$ におけるピークの様子を見る目的で, 直線 $\omega_1 = \omega_2$ 上の様子を示す. 図 5.10-5.12 の (d) では, 直線 $\omega_2 = \Delta\omega$ 上の様子を示している. これは, $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, 0)$ の様子を見るための図であるが, シミュレーションからは $\omega_2 = 0$ 上のパイスペクトルの値は求まらない. そこで, シミュレーションにおける周波数の刻み幅 $\Delta\omega = 2\pi/(L\Delta t) \approx 0.01$ (L は 1 標本関数中の標本点数, Δt は時間刻み幅) を用いて, 直線 $\omega_2 = 0$ に最も近いものとして $\omega_2 = \Delta\omega$ を選んだ. また, パイスペクトルの対称性より, $(\rho, 0)$ と $(0, \rho)$ におけるピークは等しい. 従って, 図 5.10-5.12 の (d) は, $(\omega_1, \omega_2) = (0, \rho)$ におけるピーク様子でもある. 図 5.10-5.12 の (e) では, 直線 $\omega_2 = \rho$ 上の様子を示している. これは, $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho), (0, \rho)$ の様子を見るための図である. 各図の (c), (d), (e) 共に, ● がシミュレーションによって求めた $b_X(\omega_1, \omega_2)$, 赤実線が ε について 3 次まで考慮した場合の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の近似解析解, 青実線が ε について 2 次まで考慮した場合の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の近似解析解である.

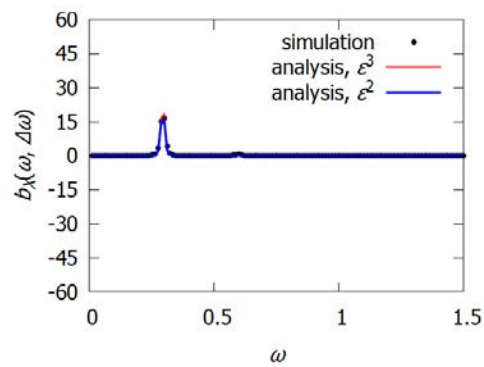
図 5.10 と図 5.12 より, $\alpha = 0.01$ と $\alpha = 1$ の場合, ε について 3 次まで考慮した場合の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の近似解析解と 2 次まで考慮した近似解析解は, 共に良い精度でシミュレーション解を再現できている. 図 5.10(c)-(e) および図 5.12(c)-(e) で示した, ピークの様子を観察するための直線上のパイスペクトルを見ても, ε について 3 次まで考慮した場合と 2 次まで考慮した場合で, 近似解析解の違いはほとんど確認できない. $\alpha = 0.05$ の時の図 5.11 を見ると, ε について 3 次まで考慮した場合の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の近似解析解は, シミュレーションによって求めた $b_X(\omega_1, \omega_2)$ と高い精度で一致している. そして, ε について 2 次まで考慮した場合の近似解析解も, パイスペクトルの値をよく再現できている. 図 5.11(c)-(e) を見ると, ε について 3 次まで考慮した近似解析解は, 2 次まで考慮した解よりもよりシミュレーション解に近い結果が得られている. しかし, 3 次までを考慮した解において用いる式 (5.79) には解析的に評価が困難な積分が含まれている一方, 2 次までを考慮した解において用いる式 (5.80) は周波数応答関数 $H(\omega)$ とパワースペクトル $S_U(\omega)$ の積と和で表現されており, より数理的な解析が行いやすい形となっている. 本研究では, 入力パワースペクトルの卓越振動数と帯域幅の変化が応答の非対称性に与える影響を考察することが目的なので, 以降では, ε について 2 次まで考慮した場合の近似解析解を用いて考察する.



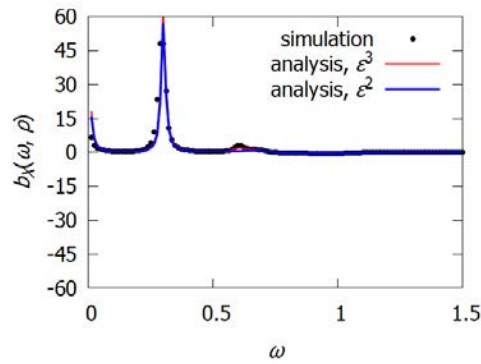
(a) $\omega_1 - \omega_2$ 平面上的シミュレーション解と ε^2 まで考慮した (b) $\omega_1 - \omega_2$ 平面上のシミュレーション解と ε^3 まで考慮した場合の近似解析解の比較.



(c) 直線 $\omega_1 = \omega_2$ 上の様子.

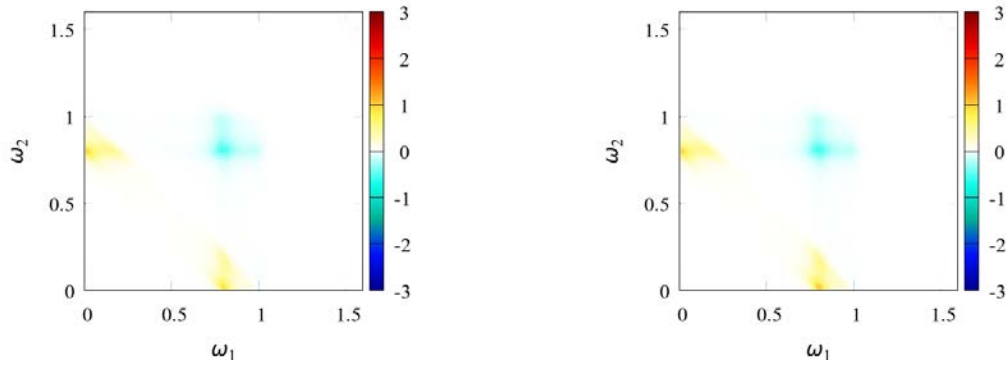


(d) 直線 $\omega_2 = \Delta\omega$ 上の様子.

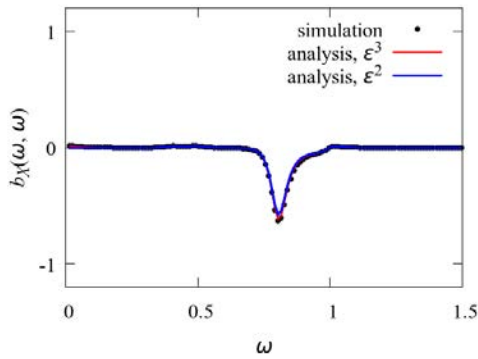


(e) 直線 $\omega_2 = \rho$ 上の様子.

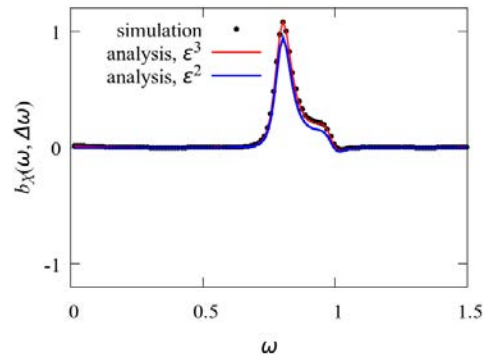
図 5.10 $\alpha = 0.01$, $\rho = 0.3$ の場合の規格化された応答パワースペクトルの実部 $b_X(\omega, \omega_2)$ の近似解析解とシミュレーション解の比較. (a) と (b) においては $\omega_2 < \omega_1$ なる領域には解析解を, $\omega_1 \leq \omega_2$ なる領域にはシミュレーション解をプロットしている. (c) から (e) はある直線に沿った $b_X(\omega, \omega_2)$ をプロットしており, 黒点がシミュレーション解, 赤実線が ε について 3 次まで考慮した場合, 青実線は ε について 2 次まで考慮した場合の近似解析解である.



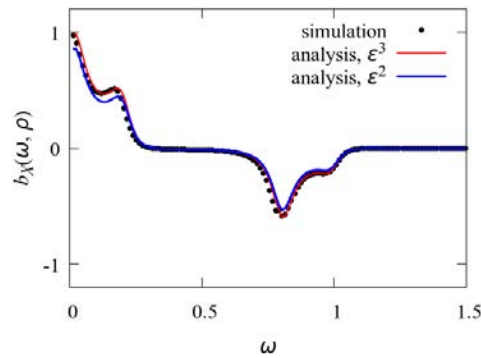
(a) $\omega_1 - \omega_2$ 平面上的シミュレーション解と ε^2 まで考慮した (b) $\omega_1 - \omega_2$ 平面上のシミュレーション解と ε^3 まで考慮した場合の近似解析解の比較.



(c) 直線 $\omega_1 = \omega_2$ 上の様子.

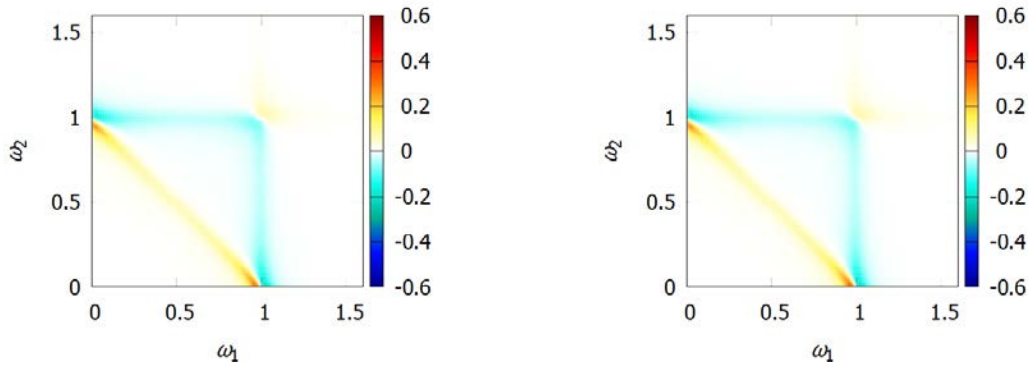


(d) 直線 $\omega_2 = \Delta\omega$ 上の様子.

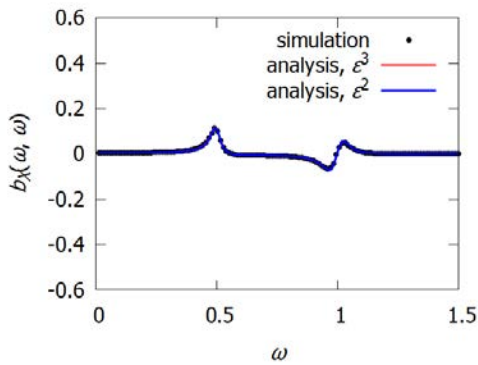


(e) 直線 $\omega_2 = \rho$ 上の様子.

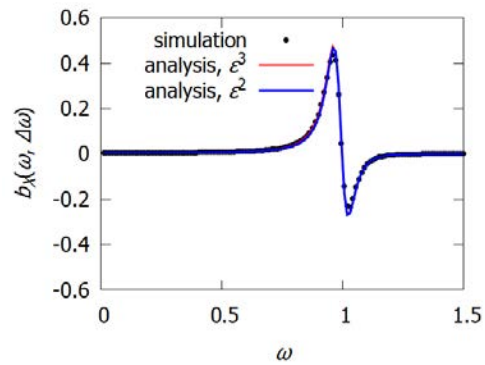
図 5.11 $\alpha = 0.05$, $\rho = 0.8$ の場合の規格化された応答バイスペクトルの実部 $b_X(\omega, \omega_2)$ の近似解析解とシミュレーション解の比較. (a) と (b) においては $\omega_2 < \omega_1$ なる領域には解析解を, $\omega_1 \leq \omega_2$ なる領域にはシミュレーション解をプロットしている. (c) から (e) はある直線に沿った $b_X(\omega, \omega_2)$ をプロットしており, 黒点がシミュレーション解, 赤実線が ε について 3 次まで考慮した場合, 青実線は ε について 2 次まで考慮した場合の近似解析解である.



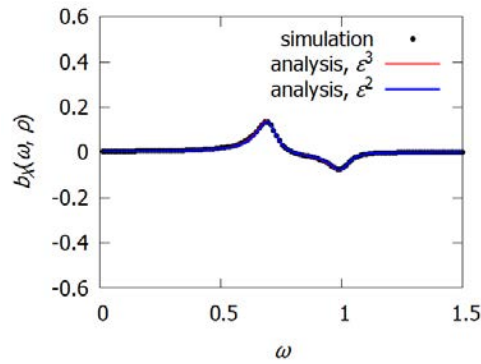
(a) $\omega_1 - \omega_2$ 平面上のシミュレーション解と ε^2 まで考慮した (b) $\omega_1 - \omega_2$ 平面上のシミュレーション解と ε^3 まで考慮した場合の近似解析解の比較.



(c) 直線 $\omega_1 = \omega_2$ 上の様子.



(d) 直線 $\omega_2 = \Delta\omega$ 上の様子.



(e) 直線 $\omega_2 = \rho$ 上の様子.

図 5.12 $\alpha = 1$, $\rho = 1.3$ の場合の規格化された応答バイスペクトルの実部 $b_X(\omega, \omega_2)$ の近似解析解とシミュレーション解の比較. (a) と (b) においては $\omega_2 < \omega_1$ なる領域には解析解を, $\omega_1 \leq \omega_2$ なる領域にはシミュレーション解をプロットしている. (c) から (e) はある直線に沿った $b_X(\omega, \omega_2)$ をプロットしており, 黒点がシミュレーション解, 赤実線が ε について 3 次まで考慮した場合, 青実線は ε について 2 次まで考慮した場合の近似解析解である.

5.5 規格化されたバイスペクトルを用いた入力のパワースペクトル形状が応答の非対称性に与える影響の考察

図 5.13, 5.15, 5.16 は規格化された応答のバイスペクトルの実部 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ を、帯域幅パラメータ α ごとに表している。図 5.13 では $\alpha = 0.05$, 図 5.15 では $\alpha = 0.01$, 図 5.16 では $\alpha = 1$ である、それぞれの図のキャプションには、対応するシミュレーションから求めた歪度の値もあわせて記載している。応答歪度の周波数領域における分布であるこれらの $b_X(\omega_1, \omega_2)$ を用いて、入力のパワースペクトル形状が応答の非対称性にどのような影響を与えるかを考察する。

5.5.1 $\alpha = 0.05$ の場合

まず、卓越振動数パラメータ ρ に依存したバイスペクトルの変化が視覚的に顕著な、 $\alpha = 0.05$ の場合から述べる。図 5.13 には、 $\alpha = 0.05$, $\rho = 0.1$ から 1.5 とした場合の規格化された応答のバイスペクトルの実部 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ を示す。これらの図から、 $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho), (\rho, 0), (0, \rho), (1, 1 - \rho), (1 - \rho, 1)$ に顕著なピークが存在することがわかる。 ρ の変化に伴って、これらのピークの位置や符号、大きさが変化する。このピークの性質の変化が、応答の歪度の変化に大きな影響を与える。以降、図中暖色で表現されている符号が正のピークを「正のピーク」、寒色で表現されている符号が負のピークを「負のピーク」と呼ぶ。 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ を積分することで歪度が得られることから、正のピークは正の歪度を増大させる作用、負のピークは負の歪度を増大させる作用がある。

$0.1 \leq \rho \leq 0.6$ のとき、図 5.13(a)-(f) より、 $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho)$ におけるピークが顕著である。これは、 $0.1 \leq \rho \leq 0.6$ の場合の応答の非対称性が、周波数 ρ 成分とその第 2 高調波である $2\rho (= \rho + \rho)$ 成分間の依存性に由来していることを表している。そのピークの符号は ρ によって異なる。図 5.13(a)-(d) より、 $0.1 \leq \rho \leq 0.4$ ではこのピークの符号は正である。このピークの影響により、応答歪度は正の値を示す。 $\rho = 0.5$ の場合、ピークは正と負の両方の性質を示している (図 5.13(e))。これはピークの符号が反転している過程を表している。このピークの符号の反転は応答歪度の減少を引き起こし、結果として図 5.5(b) の通り、 $\rho = 0.5$ 付近で応答歪度は大きく減少する。図 5.13(f) で示されている $\rho = 0.6$ の場合、このピークの符号は負である。一方、 $\omega_1 + \omega_2 < 1$ なる領域において、正の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ が確認できる。この正の値が負のピークと打ち消しあうことで、応答歪度は 0 に近い正の値をとる。

$0.7 \leq \rho \leq 1.2$ のときは、 $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho)$ におけるピークの値が減少し、相対的に $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, 0), (0, \rho)$ におけるピークの重要性が増す。これは、 ρ 成分と 2ρ 成分間の依存関係に加えて、直流成分と ρ 成分間の依存関係も応答の非対称性に大きな影響を与えることを表している。図 5.14 には、これらのピークの様子を、関連する直線上で見た様子を示している。図 5.14(a) には、 $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho)$ におけるピークの様子を見るための、直線 $\omega_1 = \omega_2$ 上の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の様子を表す。図 5.14(b) には、 $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, 0)$ におけるピークの様子を見るための、直線 $\omega_2 = 0$ 上の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の様子を表す。 $0.7 \leq \rho \leq 0.9$ では、 $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho)$ におけるピークは負のピーク、 $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, 0), (0, \rho)$ におけるピークは正のピークである。そして、 ρ が大きくなるに従って、 $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho)$ における負のピークの絶対値は小さく、 $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, 0), (0, \rho)$ における正のピークの絶対値は大きくなっている。従って、図 5.5(b) にもある通り、 $0.7 \leq \rho \leq 0.9$ では、 ρ が大きくなるに従って応答歪度は増加傾向を示す。 $\rho = 1$ では、 $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho), (\omega_1, \omega_2) = (\rho, 0), (0, \rho)$ におけるいずれのピークも、正と負の両方の性質を示している。これは、 $\rho = 0.5$ の場合と同様に、各ピークの符号が反転している過程を表している。従って、これら正負両方の性質を有するピークが互いに打ち消しあうように作用することで、全体として応答歪度は 0 に近い値を示す。 $\rho = 1.1, 1.2$ では、 $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho)$ におけるピークは正のピーク、 $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, 0), (0, \rho)$ におけるピークは負のピークである。その絶対値を比べると $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, 0), (0, \rho)$ における負のピークが顕著になるため、応答歪度は負の値を示す。

$1.3 \leq \rho \leq 1.5$ のときは、 $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho)$ にピークはほぼ確認できない (図 5.13(m)-(o))。その代わり、

$0.7 \leq \rho \leq 1.2$ のときに顕著であった $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, 0), (0, \rho)$ のピークに加えて, $(\omega_1, \omega_2) = (1, \rho - 1), (\rho - 1, 1)$ のピークが確認できる. $(\omega_1, \omega_2) = (1, \rho - 1), (\rho - 1, 1)$ のピークは, 応答の周波数 ρ 成分, 系の共振周波数成分, それらの差である $\rho - 1$ 成分間での依存関係が顕著であることを示している. これらのピークはすべて負のピークであることから, 応答歪度は負の値を示す.

このように, 応答のバースペクトルを観察することで, 非対称性および歪度の変化傾向に対して説明を与えることができる. また, どのような周波数成分が応答の非対称性に寄与しているのかが明らかになる. 応答に非対称性をもたらす周波数成分が明らかになれば, 応答のその周波数成分を抑制するような制御や設計をすることで, 応答の非ガウス性を効率よく低減させることを通して, 構造物の安全性の向上に寄与できると期待できる.

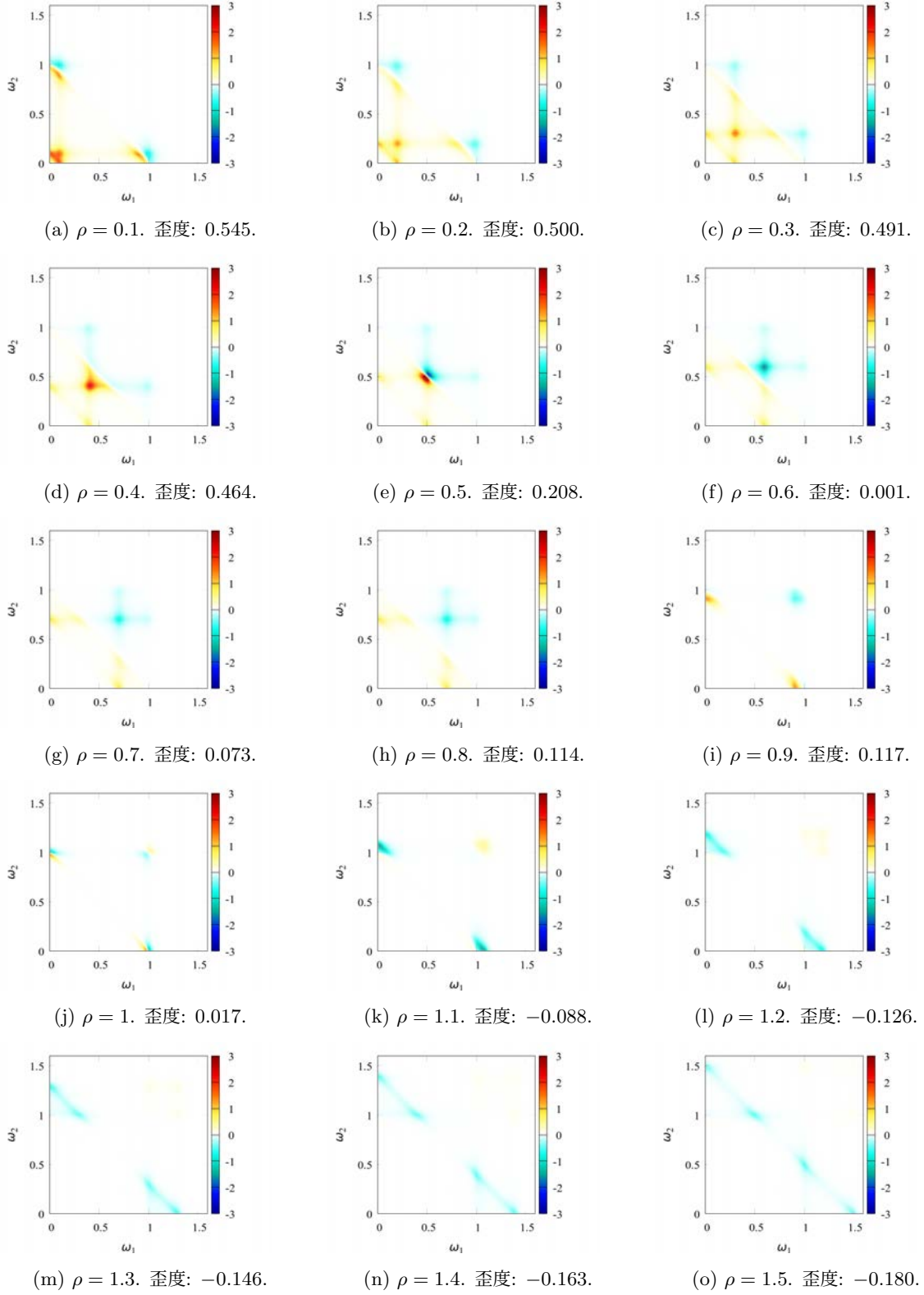


図 5.13 $\alpha = 0.05$ の場合の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の様子.

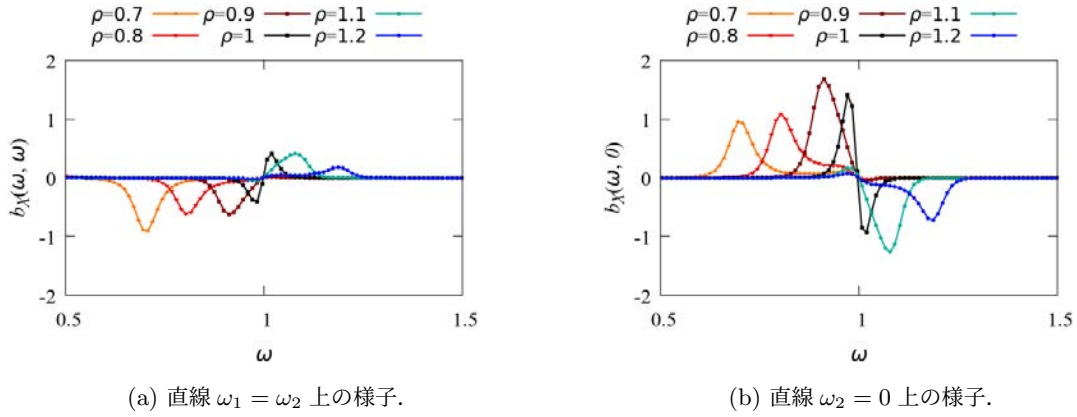


図 5.14 直線 $\omega_1 = \omega_2$ および $\omega_2 = 0$ 上の $\alpha = 0.05$ の場合の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の様子.

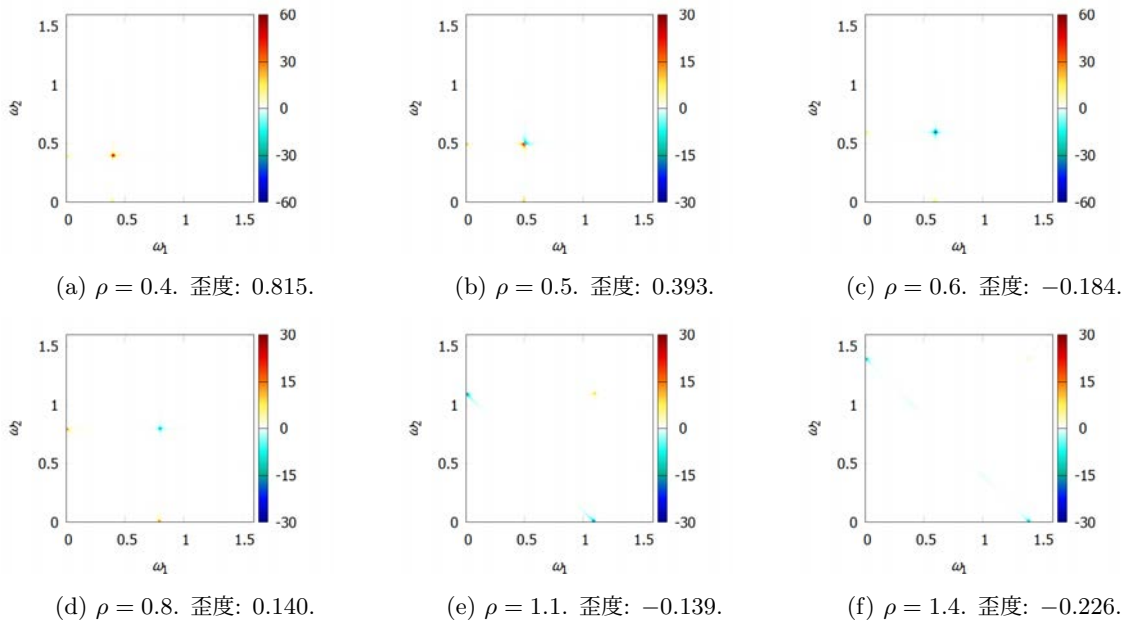


図 5.15 $\alpha = 0.01$ の場合の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の様子.

5.5.2 $\alpha = 0.01$ の場合

帯域幅パラメータ α が 0.01 と小さい場合、つまり、 $A < 1$ と入力帯域幅が系の帯域幅より狭い場合の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ が図 5.15 である。 $\alpha = 0.05$ の場合の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ を示した図 5.13 と比較すると、ピークの位置や符号に共通点が見られる。

図 5.15(a)-(c) を見ると、卓越振動数パラメータ $\rho = 0.4, 0.5, 0.6$ の場合では $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho)$ に顕著なピークが存在する。その符号は、 $\rho = 0.4$ では正、 $\rho = 0.6$ では負であり、 $\rho = 0.5$ では正と負の両方の性質を示している。応答の歪度を見ると、顕著な正のピークを有する $\rho = 0.4$ では正の歪度を示す。ピークの符号の反転が確認できる $\rho = 0.5$ では、その符号の反転の影響により、 $\rho = 0.5$ 前後で応答歪度は大きく減少する。そして、顕著な負のピークを有する

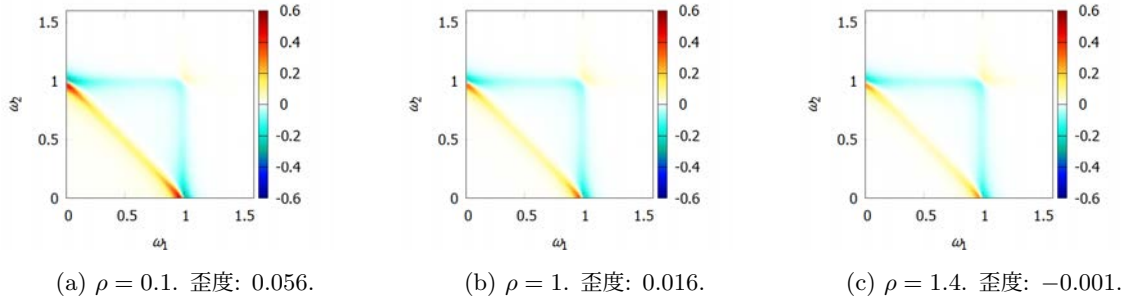


図 5.16 $\alpha = 1$ の場合の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の様子.

$\rho = 0.6$ では負の歪度を示す.

図 5.15(d), (e) より, $\rho = 0.8, 1.1$ の場合では, $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, 0), (0, \rho)$ のピークも顕著になる. 各ピークの符号を見ると, $\rho = 0.8$ のとき, $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho)$ には負のピーク, $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, 0), (0, \rho)$ には正のピークが存在する. $\rho = 1.1$ のときは, それぞれのピークの符号は反転し, $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho)$ には正のピーク, $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, 0), (0, \rho)$ には負のピークが存在する.

図 5.15(f) を見ると, $\rho = 1.4$ の場合, $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho)$ のピークはほぼ確認できない. 一方, $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, 0), (0, \rho)$ のピークに加えて, 視覚的に確認し難いが, $(\omega_1, \omega_2) = (1, \rho - 1), (\rho - 1, 1)$ にも低いピークが確認できる. これらすべて負のピークであるため, 応答歪度は負の値を示す.

$\alpha = 0.01$ と $\alpha = 0.05$ のバイスペクトルの相違点として, ピークの鋭さが挙げられる. 図 5.13(f) と図 5.15(c) を用いて $\rho = 0.6$ の場合の $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho)$ におけるピークを比較すると, $\alpha = 0.01$ の場合のピークのほうが鋭いことが確認できる. これは, 応答の非対称性に関する情報が, $\alpha = 0.01$ の場合のほうが, より限られた周波数成分間の依存性に集中していることを表している. そして, このことは, $\alpha = 0.05$ の場合より $\alpha = 0.01$ の場合のほうが, 入力のパワーが卓越振動数に集中している事 (図 5.1) に起因すると考えられる. これに関連して, $\alpha = 0.05$ である図 5.13(f) では, $\omega_1 + \omega_2 < 1$ なる領域で正の歪度を増大させる正の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ が確認できる. 一方, $\alpha = 0.01$ である図 5.15(c) の $\omega_1 + \omega_2 < 1$ なる領域ではそのような正の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ は確認できない. この違いによって, $\alpha = 0.01$ では $\rho = 0.6$ のとき応答歪度は負の値を示すが, $\alpha = 0.05$ では 0 に近い正の値を示すと考えられる.

5.5.3 $\alpha = 1$ の場合

帯域幅パラメータ α が $\alpha = 1$, つまり $A > 1$ と入力帯域幅が系の帯域幅より広い場合の, $b_X(\omega_1, \omega_2)$ を図 5.16 に示す. 図より, $\rho = 0.1, 1, 1.4$ と ρ を大きく変化させても, $b_X(\omega_1, \omega_2)$ はほぼ変化しないことがわかる. また, 正のピークと負のピークの両方を有し, その値も図 5.13 と図 5.15 で観察できるピークと比べて小さい. 以上より, 小さな正負のピークが打ち消しあうように作用し, 応答歪度は ρ に関わらず 0 に近い値となる. 式 (5.73) より, 応答のバイスペクトルには入力のパワースペクトル形状が反映されるが, $\alpha = 1$ の場合, 入力帯域幅が広いと, ρ の変化に対する入力パワースペクトル形状の変化は乏しい. また, 入力の 2 次のモーメントは一定の下考えているため, 帯域幅が広くなるに従って各周波数成分のパワーは小さくなる. これらの影響によって, 規格化された応答のバイスペクトルの形状は ρ の影響をほぼ受けず, その値も小さいものとなる.

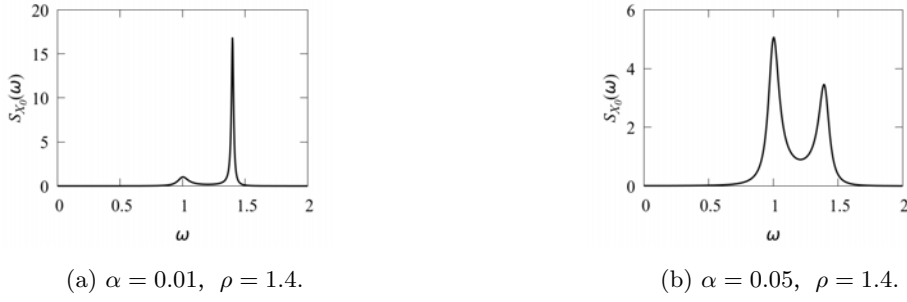


図 5.17 $X_0(t)$ のパワースペクトル $S_{X_0}(\omega)$.

5.5.4 $Y(t) = U(t) + \varepsilon X_0 U(t)$ を用いた応答バースペクトルのピークの大きさと位置に関する考察

5.3.6 項では、同時励振系を非ガウス入力 $Y(t) = U(t) + \varepsilon X_0 U(t)$ を入力として持つ線形系に置き換え、応答の非対称性について考察した。本項では、5.5.1 項から 5.5.3 項で求めた応答のバースペクトルのピークの位置と大きさについて、この $Y(t)$ を用いて考察する。ここで、 $Y(t)$ を入力として持つ線形系の応答を考えたとき、線形系によって異なる周波数成分間の依存関係が生じることはなく、各周波数成分の振幅を変化させるのみであることに注意する。

$\alpha = 0.01$ の場合

帯域幅パラメータ α が 0.01 と小さい場合、つまり、 $A < 1$ と入力帯域幅が系の帯域幅より狭い場合、 $U(t)$ のパワースペクトルは $\omega = \rho$ で顕著なピークを有する。 $X_0(t)$ は、 $U(t)$ を入力として持つ 1 自由度線形系の応答であるため、 $X_0(t)$ のパワースペクトルも $\omega = \rho$ で顕著なピークを有する。図 5.17(a) は、 $\alpha = 0.01$ の場合の $X_0(t)$ のパワースペクトルの一例であるが、図の通り、 $\omega = \rho = 1.4$ で顕著なピークを有している。従って、 $X_0 U(t)$ と $Y(t)$ に含まれる周波数成分間の主な依存関係は、周波数 ρ 成分同士の積によって生じると考えることができる。このとき、周波数 ρ 成分同士の積からは 2ρ 成分と直流成分が生じるので、依存関係にある周波数としては、 ρ 成分と 2ρ 成分または、 ρ 成分と直流成分の 2 通りが考えられる。 $Y(t)$ が線形系に加わることによって周波数成分間の依存関係が新たに生じることはないため、応答において依存関係にある主要な周波数としても、 ρ 成分と 2ρ 成分または、 ρ 成分と直流成分の 2 通りを考えればよい。

ρ 成分と 2ρ 成分の依存関係は、バースペクトルでは (ρ, ρ) におけるピークとして、 ρ 成分と直流成分の依存関係は $(0, \rho)$ または $(\rho, 0)$ におけるピークとして現れる。これら 2 種類のピークのどちらがより応答の非対称性に寄与するか考える。式 (3.17) より (ρ, ρ) におけるピークは、 ρ 成分、 ρ 成分、 2ρ 成分の 3 周波数成分の積の期待値である。同様に式 (3.17) から、 $(0, \rho)$ または $(\rho, 0)$ におけるピークは、 ρ 成分、 ρ 成分、直流成分の 3 周波数成分の積の期待値である。従って、 (ρ, ρ) におけるピークと $(0, \rho)$ または $(\rho, 0)$ におけるピークの大きさの関係を考える場合は、 2ρ 成分と直流成分の振幅を比較すればよい。加えて、入力において ρ 成分と依存関係を有する 2ρ 成分と直流成分は、共に入力の ρ 成分同士の積から生じているので、それらの振幅は等しい。従って、応答において ρ 成分と依存関係を有する 2ρ 成分と直流成分の振幅を比較する場合は、線形系の周波数応答関数 $H(\omega)$ の絶対値 $|H(2\rho)|$ と $|H(0)|$ の比較をすれば十分である。

$|H(2\rho)|$ は、 $\rho < 1/2$ のとき ρ が大きくなるに従って大きくなり、 $\rho > 1/2$ では、 ρ が大きくなるに従って小さくなる。従って、 $|H(2\rho_0)| = |H(0)|$ 、 $\rho_0 > 1/2$ を満たす $\rho_0 \approx 0.7$ を考えると、 $0 < \rho < \rho_0$ では $|H(2\rho)| > |H(0)|$ 、 $\rho > \rho_0$ では $|H(2\rho)| < |H(0)|$ となる。これは、 $\rho < \rho_0$ では $(0, \rho)$ または $(\rho, 0)$ におけるピークよりも (ρ, ρ) にお

るピークのほうが顕著となり、 $\rho > \rho_0$ では $(0, \rho)$ または $(\rho, 0)$ のピークの重要性が増すことを意味している。実際、図 5.15(a)-(c) では (ρ, ρ) におけるピークが顕著であるが、図 5.15(d)-(f) では $(\rho, 0)$, $(0, \rho)$ におけるピークが顕著になることと対応している。

$\alpha = 0.05$ の場合

$\alpha = 0.05$ のときの応答バースペクトルを考える。このときも、 $Y(t)$ には ρ 成分と 2ρ 成分、 ρ 成分と直流成分の間に依存関係が存在し、応答のバースペクトルにおける (ρ, ρ) , $(0, \rho)$, $(\rho, 0)$ におけるピークの変化については、 $\alpha = 0.01$ のときと同様に考えることができる。図 5.17(b) は、 $\alpha = 0.05$ の場合の $X_0(t)$ のパワースペクトルの一例であるが、図の通り $\omega = \rho$ と $\omega = 1$ で同程度の高さのピークが存在している。そのため、 $\alpha = 0.05$ の場合、 $X_0U(t)$, $Y(t)$ 中には、 ρ 成分と共振周波数成分の積から生じる依存関係も存在すると考えることができる。 ρ 成分と共振周波数成分の積からは、周波数 $\rho \pm 1$ 成分が生じる。よって、入力において依存関係にある周波数成分として ρ 成分と 2ρ 成分、 ρ 成分と直流成分に加え、 ρ 成分、共振周波数成分、 $\rho + 1$ 成分の 3 周波数成分と、 ρ 成分、共振周波数成分、 $\rho - 1$ 成分の 3 周波数成分の、計 4 通りが考えられる。

$\rho > 1$ の場合、線形系の周波数応答関数の絶対値 $|H(\rho)|$ は ρ が大きくなるに従い小さくなるため、応答の ρ 成分の振幅も小さくなり、結果的に応答バースペクトルの (ρ, ρ) , $(\rho, 0)$, $(0, \rho)$ におけるピークが小さくなる。同様に、応答の $\rho + 1$ 成分の振幅も小さくなるため、 ρ 成分、共振周波数成分、 $\rho + 1$ 成分の 3 周波数成分に対応したバースペクトルは、応答の非対称性に大きな影響は与えない。一方、 $1 < \rho < 2$ の場合 $|H(\rho - 1)|$ は ρ が大きくなるに従い大きくなるため、応答の $\rho - 1$ 成分の振幅も大きくなる。結果として、応答バースペクトルにおいて ρ 成分、共振周波数成分、 $\rho - 1$ 成分の 3 周波数成分間の依存関係を示す、 $(1, \rho - 1)$, $(\rho - 1, 1)$ のピークが顕著になる。これは、図 5.13(m)-(o) の場合に対応している。なお、 $\alpha = 0.01$ のとき、 $X_0(t)$ のパワースペクトルにおいて共振周波数 $\omega = 1$ 成分は ρ 成分ほど顕著ではないため（図 5.17(a)）、応答のバースペクトルにおいては $(1, \rho - 1)$, $(\rho - 1, 1)$ のピークはあまり大きくはならない（図 5.15(f)）。

$\alpha = 1$ の場合

帯域幅パラメータ α が $\alpha = 1$ 、つまり $A > 1$ と入力帯域幅が系の帯域幅より広い場合、 $U(t)$ は様々な周波数成分にパワーが分布する。いま、入力の 2 次モーメント一定の下考えているので、入力帯域幅が広い場合、各周波数成分のパワーは小さくなる。そのため、非ガウス入力 $Y(t)$ や $X_0U(t)$ の周波数成分を考えると、 $\alpha = 0.01$ の場合のように特定の周波数成分間に強い依存関係が存在するのではなく、様々な周波数成分間で弱い依存関係が存在することとなる。 $Y(t)$ が線形系に加わることで、応答のバースペクトルには系の共振周波数の影響を示す $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1$, $\omega_1 + \omega_2 = 1$ においてピークが観察できるが、入力の依存関係が弱いため、応答においてもそのバースペクトルピークは低くなる（図 5.16）。

5.5.5 近似解析解を用いた応答バースペクトルの符号の考察

図 5.13-5.16 を見ると、 α や ρ によらず $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の符号が一定の領域がある。例として、 $0 < \omega_1, \omega_2$ かつ $\omega_1 + \omega_2 < 1$ なる領域の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ は常に正である。さらに、5.5.1 項から 5.5.3 項で考察した通り、規格化された応答のバースペクトルの実部 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の符号は、応答歪度に大きな影響を与える。よって、 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ や、規格化する前のバースペクトルの実部の符号の性質を考えるのは、応答歪度の変化を考えるにあたって有用である。そこで、近似解析解を用いて、バースペクトルの実部の符号について考察する。

式 (5.75) と (5.80) から、応答のバースペクトルの近似解析解には、 $H(\omega_1)H(\omega_2)H(-(\omega_1 + \omega_2))$ が乗じてある。

周波数応答関数の偏角, つまり $\varepsilon = 0$ とした場合の系の位相遅れを $\phi(\omega)$ とすると, $H(\omega_1)H(\omega_2)H(-(\omega_1 + \omega_2)) = |H(\omega_1)||H(\omega_2)||H(-(\omega_1 + \omega_2))| \exp(i(\phi(\omega_1) + \phi(\omega_2) + \phi(-(\omega_1 + \omega_2))))$ と書ける. これより, バイスpekトル $B_X(\omega_1, \omega_2)$ の実部の符号は, 位相遅れ $\phi(\omega)$ の組み合わせから大きな影響を受けると考えることができる. 今, 時間の変数は系の不減衰固有角振動数で無次元化してあり, また減衰比 $\zeta < 1$ であるので, $0 \leq \omega < 1$ で $\phi(\omega) = 0$, $1 < \omega$ で $\phi(\omega) = -\pi$ と近似的に見なすことができる. これに加えて, 3.3 節の $Y(t)$ の位相とバイスペクトルの符号の関係も併せて, $B_X(\omega_1, \omega_2)$ の実部の符号を考える.

$0 < \omega_1, \omega_2$ かつ $\omega_1 + \omega_2 < 1$ の場合, $\phi(\omega_1) \approx 0$, $\phi(\omega_2) \approx 0$, $\phi(\omega_1 + \omega_2) \approx 0$ より, $\omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ の間には位相遅れの差は存在せず, $B_X(\omega_1, \omega_2)$ の実部は正となる. これは, 例えば, 図 5.13(a)-(d) および図 5.15(a) で $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho)$ のピークの符号が正であること, 図 5.13(g)-(i) および図 5.15(d) で $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, 0), (0, \rho)$ のピークの符号が正であることと一致する.

$0 < \omega_1, \omega_2 < 1$ かつ $\omega_1 + \omega_2 > 1$ の場合, $\phi(\omega_1) \approx 0$, $\phi(\omega_2) \approx 0$, $\phi(\omega_1 + \omega_2) \approx -\pi$ より, $\omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ の位相遅れの間には π だけ差があり, $B_X(\omega_1, \omega_2)$ の実部は負となる. これは, 例えば, 図 5.13(f)-(i) および図 5.15(c), (d) で $(\omega_1, \omega_2) = (\rho, \rho)$ のピークの符号が負であることと一致する.

以上のように, 応答の非対称性の向きに大きな影響を与える応答のバイスペクトルの符号は, 応答の 3 周波数成分の位相遅れの差から説明できることを近似解析解を用いて示した.

5.6 結言

非白色で相関を有する不規則な係数励振と外部励振を同時に受ける系を対象に, 入力のパワースペクトル形状が応答の確率密度関数の非対称性に与える影響を調査した. 入力のパワースペクトル形状としては, その帯域幅と卓越振動数に関するパラメータを変えることで, ピークの位置やそのピーク周りの帯域幅を様々に変化させた. まず, モンテカルロシミュレーションによって, 応答の確率密度関数と歪度を求め, 以下のことが分かった.

- $\alpha = 0.01$ に代表される入力帯域幅が系の帯域幅と比較して狭い場合, 応答に現れる非対称性は入力卓越振動数の位置によって大きく変化する. 入力卓越振動数が直流成分付近にある場合, 応答の確率密度関数は正の歪度に対応する非対称性を示した. 一方, 入力卓越振動数が系の共振周波数より大きい場合, 応答の確率密度関数は, 負の歪度に対応する非対称性を示した. その間の卓越振動数における歪度についても, 卓越振動数に対して単調に変化するのではなく, 複雑な変化を示した.
- $\alpha = 1$ に代表される入力帯域幅が系の帯域幅と比較して広い場合, 卓越振動数によらず, 応答に非対称性はほとんど現れなかった.

以上で得られた入力のパワースペクトル形状が応答の非対称性に与える影響について, 確率過程の非対称性の周波数領域における分布を可視化するバイスペクトルを用いて考察を行った. バイスpekトルと応答歪度を関連付ける目的で, 考察には応答の 2 次の中心モーメントの 1.5 乗で規格化したバイスペクトルの実部を用いた. まず, 摂動法を用いて, 考察に用いる規格化したバイスペクトルの近似解析解を導出した. こうして得られた近似解析解は, シミュレーションから得られた結果とよく一致した. そして, バイスpekトルを用いた考察より, 以下のことがわかった.

- 規格化されたバイスペクトルのピークの大きさや符号の変化に着目して, 入力パワースペクトル形状の変化に依存した応答歪度の変化に対して説明を与えることができた.
 - $\alpha = 0.01$ に代表される, 入力帯域幅が系の帯域幅と比較して狭い場合, バイスpekトルには, 入力のパワースペクトルの卓越振動数とその第 2 高調波の間, 同じく入力卓越振動数と直流成分の間, 卓越振動数と共振周波数成分の間における依存性を示すピークが存在する. それらのピークの大きさと符号の変化にともな

て、応答歪度は複雑に変化する．

- － $\alpha = 1$ に代表される，入力帯域幅が系の帯域幅と比較して広い場合，バースペクトルは入力の卓越振動数によらず，正と負の低いピークをもつほぼ同じ形状となる．これらのピークが打ち消しあい，歪度はほぼ 0 となる．
- 同時励振系を非ガウス入力を受ける線形系に置き換えて考え，その非ガウス入力の周波数成分の依存関係と，応答の各周波数成分の振幅から，応答バースペクトルのピークの大きさと位置について説明した．
- 応答のバースペクトルの符号は，近似解析解に含まれる 3 周波数成分間の位相遅れの差に依存して変化することを示した．

第 6 章

任意のクロススペクトルを考慮した係数・外部同時励振系の応答バイスペクトル解析

6.1 緒言

前章では、係数励振と外部励振が同一のガウス性非白色ノイズでモデル化される場合を考え、応答の確率密度関数の非対称性の向きや大きさは、入力のパワースペクトルの卓越振動数や帯域幅によって、大きく複雑に変化することがわかった。一方、先行研究において、入力を独立なガウス性非白色ノイズでモデル化した場合、応答の確率密度関数には非対称性は現れないことがわかっている [62]。従って、係数励振と外部励振の相関性が、応答の確率密度関数に現れる非対称性に大きな影響を与えると予想できる。しかし、前述した係数励振と外部励振が独立な場合と同一な場合という特別な場合を除いて、2つの励振の相関が応答に与える影響に関する知見は、得られていない。

そこで本章では、係数励振と外部励振の相関が応答の非対称性にどのような影響を与えるかを調査することを念頭に、2つの励振が任意のクロスパワースペクトルを有する場合を考える。前章において、応答の2次の中心モーメントの1.5乗で規格化した応答のバイスペクトルの実部のピークの大きさや符号から、入力パワースペクトル形状に依存した応答の非対称性の変化を説明した。同様に、規格化された応答のバイスペクトルを励振のクロススペクトルを含んだ式で表現することができれば、特別な場合に限らない、一般的な場合に対して入力パワースペクトルの変化に依存した応答の非対称性の変化を明らかにすることができると期待できる。

そこで本章では、摂動法に基づいた、任意のクロススペクトルを有する同時励振系の応答のバイスペクトルの近似解析手法を提案する。本章の解析においては、フーリエ係数を用いた入力の近似式を与える際、前章で近似解析解を求めたときとは異なり、係数励振と外部励振の任意のクロススペクトルを考慮した式を用いる。前章と同様に本章でも、歪度と対応させるために、応答の2次の中心モーメントの1.5乗で規格化した応答のバイスペクトルを求める。3組の性質の大きく異なる係数・外部励振を考え、モンテカルロシミュレーションから求まる規格化されたバイスペクトルと比較することで、提案手法の有効性を確認する。

6.2 解析モデル

本章では、定常で任意のクロススペクトルを有するガウス性非白色係数励振と外部励振を同時に受ける1自由度系の定常応答を考える。このとき、運動方程式は次の通り。

$$\ddot{X} + 2\zeta\dot{X} + X = U_1(t) + \varepsilon XU_2(t) \quad (6.1)$$

ここで、式中の $X(t)$ は変位応答、 ζ は減衰比であり、本研究では $\zeta = 0.05$ とする。 t は系の不減衰固有角振動数で無次元化した時間を表し、ドット記号はこの無次元時間での微分を表す。 $U_1(t)$ と $U_2(t)$ は、任意のクロススペクトルを

有する平均 0 の定常ガウス性非白色ノイズである。\$U_1(t)\$ のパワースペクトルを \$S_{11}(\omega)\$, \$U_2(t)\$ のパワースペクトルを \$S_{22}(\omega)\$ とする。2 つの励振の相関性はクロススペクトルによって完全に記述することができ、本章ではこのクロススペクトルを \$S_{12}(\omega)\$ とする。\$S_{12}(\omega) = 0\$ は先行研究 [59, 61, 53] で対象となった係数励振と外部励振が独立な場合に相当し、\$S_{11}(\omega) = S_{22}(\omega) = S_{12}(\omega) = S_U(\omega)\$ とすれば、第 5 章で考えた、2 つの励振が同一な場合に相当する。従って、この問題設定によって、これらの研究で考えた範囲を含めた広いクラスの入力を考えることができる。係数励振の大きさを支配するパラメータ \$\varepsilon\$ については、前章と同様に系が安定となる小さい \$\varepsilon\$ を対象とし、\$\varepsilon = 0.1\$ とする。

6.3 摂動法を用いた応答のバイスペクトルの近似解析

6.3.1 ガウス性非白色ノイズの近似表現

まず、入力 \$U_1(t)\$ と \$U_2(t)\$ を次の式で定義される \$\tilde{U}_1(t)\$ と \$\tilde{U}_2(t)\$ で表す。

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1(t) = & \sqrt{2} \sum_{k=0}^N \frac{|S_{12}(\omega_k)|}{\sqrt{S_{22}(\omega_k)}} \sqrt{2\Delta\omega} \cos(\omega_k t + \psi_{12}(\omega_k) + \theta_k) \\ & + \sqrt{2} \sum_{k=0}^N \sqrt{S_{11}(\omega_k) - \frac{|S_{12}(\omega_k)|^2}{S_{22}(\omega_k)}} \sqrt{2\Delta\omega} \cos(\omega_k t + \phi_k) \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\tilde{U}_2(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^N \sqrt{2S_{22}(\omega_k)\Delta\omega} \cos(\omega_k t + \theta_k) \quad (6.3)$$

ここで、\$\Delta\omega\$ は周波数の刻み幅であり、また \$\omega_k = k\Delta\omega\$ とする。\$\phi_k, \theta_k\$ は互いに独立な、\$[-\pi, \pi)\$ の一様分布に従う確率変数である。すなわち、\$k \neq k'\$ なる全ての \$k, k' \in \mathbb{Z}\$ に対して、\$E[\phi_k \theta_k] = E[\phi_k \theta_{k'}] = E[\phi_k \phi_{k'}] = E[\theta_k \theta_{k'}] = 0\$ である。外部励振を記述する式 (6.2) において、右辺第 1 項は係数励振と相関を有する項、第 2 項は係数励振と独立な項となっている。\$\psi_{12}(\omega_k)\$ は、クロススペクトル \$S_{12}(\omega_k)\$ の偏角であり、\$\psi_{12}(\omega_k) = \arg S_{12}(\omega_k)\$ である。カットオフ周波数 \$\omega_u\$ を \$\omega_u = N\Delta\omega\$ とし、\$S_{11}(\omega_u), S_{22}(\omega_u), S_{12}(\omega_u)\$ の値が無視できるほど小さくなるような十分大きい \$\omega_u\$ を考える。\$\omega_u\$ を固定した上で \$\Delta\omega \to 0\$ (\$N \to \infty\$) を考えると、\$\tilde{U}_1(t)\$ と \$\tilde{U}_2(t)\$ のパワースペクトルとクロススペクトルは、\$0 \leq \omega \leq \omega_u\$ なる \$\omega\$ に対して、\$S_{11}(\omega), S_{22}(\omega), S_{12}(\omega)\$ にそれぞれ一致し [84]、\$\tilde{U}_1(t)\$ と \$\tilde{U}_2(t)\$ は定常ガウス過程となる [86]。

オイラーの公式から、さらに、\$\tilde{U}_1(t)\$ と \$\tilde{U}_2(t)\$ を次のように整理する。

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1(t) = & \sum_{k=-N}^N \frac{S_{12}(\omega_k)}{\sqrt{S_{22}(\omega_k)}} \sqrt{\Delta\omega} \exp(i(\omega_k t + \theta_k)) \\ & + \sum_{k=-N}^N \sqrt{S_{11}(\omega_k) - \frac{|S_{12}(\omega_k)|^2}{S_{22}(\omega_k)}} \sqrt{\Delta\omega} \exp(i(\omega_k t + \phi_k)) \\ = & \sum_{k=-N}^N (U_{12,k} \exp(i\theta_k) + U_{11,k} \exp(i\phi_k)) \exp(i\omega_k t) \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\tilde{U}_2(t) = \sum_{k=-N}^N U_{22,k} \exp(i(\omega_k t + \theta_k)) \quad (6.5)$$

ここで、\$U_{11,k} = \sqrt{(S_{11}(\omega_k) - |S_{12}(\omega_k)|^2/S_{22}(\omega_k))\Delta\omega}\$, \$U_{12,k} = S_{12}(\omega_k)/\sqrt{S_{22}(\omega_k)}\sqrt{\Delta\omega}\$, \$U_{22,k} = \sqrt{S_{22}(\omega_k)\Delta\omega}\$ である。パワースペクトルの対称性および \$S_{12}(-\omega) = S_{12}^*(\omega)\$ から、\$U_{11,-k} = U_{11,k}\$, \$U_{22,k} = U_{22,-k}\$, \$U_{12,-k} = U_{12,k}^*\$ である。また、非 0 の整数 \$k\$ に対して、\$\phi_{-k} = -\phi_k\$, \$\theta_{-k} = -\theta_k\$ である。

6.3.2 摂動法を用いた応答の近似解析と近似解のフーリエ係数

式 (6.1) の定常応答 $X(t)$ の近似解 $\tilde{X}(t)$ を、係数励振の大きさを支配する微小パラメータ ε を用いて以下で表す.

$$\tilde{X}(t) = X_0 + \varepsilon X_1(t) + \varepsilon^2 X_2(t) \quad (6.6)$$

ここで、 ε の次数は、前章とは異なり 2 次までを考える. これは、前章の解析において、 ε について 2 次まで考慮すれば、規格化したバースペクトルが精度よく求まることが確認できたことを根拠としている. 式 (6.6) を運動方程式 (6.1) に代入し、 $U_1(t)$ と $U_2(t)$ を式 (6.4), (6.5) の $\tilde{U}_1(t)$, $\tilde{U}_2(t)$ とすると、 $X_0(t)$, $X_1(t)$, $X_2(t)$ の支配方程式が次のように求まる.

$$\varepsilon^0: \quad \ddot{X}_0 + 2\zeta\dot{X}_0 + X_0 = \tilde{U}_1(t) \quad (6.7)$$

$$\varepsilon^1: \quad \ddot{X}_1 + 2\zeta\dot{X}_1 + X_1 = X_0\tilde{U}_2(t) \quad (6.8)$$

$$\varepsilon^2: \quad \ddot{X}_2 + 2\zeta\dot{X}_2 + X_2 = X_1\tilde{U}_2(t) \quad (6.9)$$

$X_0(t)$ の定常解は、線形系の式 (6.7) の周波数応答関数 $H(\omega) = 1/(1 - \omega^2 + i2\zeta\omega)$ を用いて次のように書ける.

$$X_0(t) = \sum_{m=-N}^N (U_{11,m} \exp(i\phi_m) + U_{12,m} \exp(i\theta_m)) H(\omega_m) \exp(i\omega_m t) \quad (6.10)$$

以降、 $H(\omega_m) = H_m$ と書く. 次に、 $X_1(t)$ の支配方程式 (6.8) の励振項 $X_0\tilde{U}_2(t)$ を求める.

$$\begin{aligned} X_0(t)\tilde{U}_2(t) &= \sum_{m=-N}^N \sum_{j=-N}^N (U_{11,j} \exp(i(\phi_j + \theta_m)) + U_{12,j} \exp(i(\theta_j + \theta_m))) \\ &\quad \times U_{22,m} H_j \exp(i(\omega_m + \omega_j)t) \end{aligned} \quad (6.11)$$

ここで、総和記号中の添え字について、 $X_0(t)$ に関しては j を、 $\tilde{U}(t)$ に関しては m を、それぞれ用いた. 式 (6.8) と (6.11) より、 $X_1(t)$ の定常応答は次のように書ける.

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \sum_{m=-N}^N \sum_{j=-N}^N (U_{11,j} \exp(i(\phi_j + \theta_m)) + U_{12,j} \exp(i(\theta_j + \theta_m))) \\ &\quad \times U_{22,m} H_j H_{m+j} \exp(i(\omega_m + \omega_j)t) \end{aligned} \quad (6.12)$$

同様に、 $X_2(t)$ を求める. まず、 $X_1\tilde{U}_2(t)$ は

$$\begin{aligned} X_1\tilde{U}_2(t) &= \sum_{m=-N}^N \sum_{k=-N}^N \sum_{j=-N}^N (U_{11,j} \exp(i(\phi_j + \theta_k + \theta_m)) + U_{12,j} \exp(i(\theta_j + \theta_k + \theta_m))) \\ &\quad \times U_{22,k} U_{22,m} H_j H_{j+k} \exp(i(\omega_j + \omega_k + \omega_m)t) \end{aligned} \quad (6.13)$$

である. ここで、総和記号中の添え字について、 $X_1(t)$ については j と k を、 $U_2(t)$ については m を用いた. 従って、 $X_2(t)$ は次のように計算できる.

$$\begin{aligned} X_2(t) &= \sum_{m=-N}^N \sum_{k=-N}^N \sum_{j=-N}^N (U_{11,j} \exp(i(\phi_j + \theta_k + \theta_m)) + U_{12,j} \exp(i(\theta_j + \theta_k + \theta_m))) \\ &\quad \times U_{22,k} U_{22,m} H_j H_{j+k} H_{j+k+m} \exp(i(\omega_j + \omega_k + \omega_m)t) \end{aligned} \quad (6.14)$$

ここまで計算した結果である式 (6.10), (6.12), (6.14) から, $\tilde{X}(t)$ は次のように求まる.

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(t) = & \sum_{m=-N}^N (U_{11,m} \exp(i\phi_m) + U_{12,m} \exp(i\theta_m)) H_m \exp(i\omega_m t) \\
& + \varepsilon \sum_{m=-N}^N \sum_{j=-N}^N (U_{11,j} \exp(i(\phi_j + \theta_m)) + U_{12,j} \exp(i(\theta_j + \theta_m))) \\
& \quad \times U_{22,m} H_j H_{m+j} \exp(i(\omega_m + \omega_j)t) \\
& + \varepsilon^2 \sum_{m=-N}^N \sum_{k=-N}^N \sum_{j=-N}^N (U_{11,j} \exp(i(\phi_j + \theta_k + \theta_m)) + U_{12,j} \exp(i(\theta_j + \theta_k + \theta_m))) \\
& \quad \times U_{22,k} U_{22,m} H_j H_{j+k} H_{j+k+m} \exp(i(\omega_j + \omega_k + \omega_m)t)
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$\tilde{X}(t)$ を, その複素フーリエ係数 F_m を用いて次のように書き直す.

$$\tilde{X}(t) = \sum_{m=-3N}^{3N} F_m \exp(i\omega_m t) \tag{6.16}$$

F_m を新たに $F_m = F_m^0 + \varepsilon F_m^I + \varepsilon^2 F_m^{II}$ とおくと, 式 (6.15) より, F_m^0 , F_m^I , F_m^{II} はそれぞれ次のようになる.

$$F_m^0 = (U_{11,m} \exp(i\phi_m) + U_{12,m} \exp(i\theta_m)) H_m \mathbb{1}_{[-N, N]}(m) \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}
F_m^I = & H_m \sum_{j=-N}^N (U_{11,j} \exp(i(\phi_j + \theta_{m-j})) + U_{12,j} \exp(i(\theta_j + \theta_{m-j}))) \\
& \times U_{22,m-j} H_j \mathbb{1}_{[-N, N]}(m-j)
\end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned}
F_m^{II} = & H_m \sum_{k=-N}^N \sum_{j=-N}^N (U_{11,j} \exp(i(\phi_j + \theta_k + \theta_{m-(j+k)})) + U_{12,j} \exp(i(\theta_j + \theta_k + \theta_{m-(j+k)}))) \\
& \times U_{22,k} U_{22,m-(j+k)} H_j H_{j+k} \mathbb{1}_{[-N, N]}(m-(j+k))
\end{aligned} \tag{6.19}$$

式中の $\mathbb{1}_A(\cdot)$ は, 集合 A に対する指示関数であり, 次のように定義される.

$$\mathbb{1}_A(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \in A, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6.20}$$

6.3.3 $\tilde{X}(t)$ の平均の導出

$\tilde{X}$ の 3 次のキュムラントからバイスペクトルを求めたい. そのために, $\tilde{X}(t)$ から平均を除いた $\tilde{X} - E[\tilde{X}]$ とそのフーリエ係数 $\bar{F}_m$ を求める必要がある. そこで, $\tilde{X}(t)$ の複素フーリエ係数の平均 $E[F_m]$ を求める.

$$E[F_m] = E[F_m^0] + \varepsilon E[F_m^I] + \varepsilon^2 E[F_m^{II}] \tag{6.21}$$

ここで

$$E[F_m^0] = (U_{11,m} E[\exp(i\phi_m)] + U_{12,m} E[\exp(i\theta_m)]) H_m \mathbb{1}_{[-N, N]}(m) \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned}
E[F_m^I] = & H_m \sum_{j=-N}^N (U_{11,j} E[\exp(i(\phi_j + \theta_{m-j}))] + U_{12,j} E[\exp(i(\theta_j + \theta_{m-j}))]) \\
& \times U_{22,m-j} H_j \mathbb{1}_{[-N, N]}(m-j)
\end{aligned} \tag{6.23}$$

$$E[F_m^{II}] = H_m \sum_{k=-N}^N \sum_{j=-N}^N (U_{11,j} E[\exp(i(\phi_j + \theta_k + \theta_{m-(j+k)}))] + U_{12,j} E[\exp(i(\theta_j + \theta_k + \theta_{m-(j+k)}))]) \times U_{22,k} U_{22,m-(j+k)} H_j H_{j+k} \mathbb{1}_{[-N, N]}(m - (j+k)) \quad (6.24)$$

である。これらフーリエ係数の期待値を求める際、ランダム位相 θ , ϕ を引数として有する複素指数関数の期待値を評価する必要がある。そこで、次の式を用いる。

$$E \left[\exp \left(i \left(\sum_{k=1}^{M_1} \phi_{r_k} + \sum_{k=1}^{M_2} \theta_{r_k} \right) \right) \right] = \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{k=1}^{M_1} \phi_{r_k} = 0 \text{ and } \sum_{k=1}^{M_2} \theta_{r_k} = 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6.25)$$

ここで、 ϕ と θ は独立であるため、式 (5.45) が成り立てば式 (6.25) も直ちに成り立つ。

式 (6.25) を用いて、 $E[F_m^0]$, $E[F_m^I]$, $E[F_m^{II}]$ を求める。

まず、式 (6.25) より、すべての m に対して $E[\exp(i\phi_m)] = E[\exp(i\theta_m)] = 0$ である。従って、式 (6.22) より、 $E[F_m^0] = 0$ である。

次に、式 (6.23) 中の $E[\exp(i(\phi_j + \theta_{m-j}))]$ と $E[\exp(i(\theta_j + \theta_{m-j}))]$ について考える。まず、式 (6.25) より、すべての j と m に対して、 $E[\exp(i(\phi_j + \theta_{m-j}))] = 0$ である。また、 $m = 0$ かつ $j \neq 0$ のとき、 $\theta_{-j} = -\theta_j$ より $E[\exp(i(\theta_j + \theta_{m-j}))] = 1$ である。従って、 $E[F_m^I]$ は

$$E[F_m^I] = H_m \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N U_{12,j} U_{22,-j} H_j \mathbb{1}_{\{0\}}(m) \quad (6.26)$$

となる。

最後に、式 (6.24) 中の $E[\exp(i(\phi_j + \theta_k + \theta_{m-(j+k)}))]$ と $E[\exp(i(\theta_j + \theta_k + \theta_{m-(j+k)}))]$ について考える。式 (6.25) より、すべての j, k, m に対して、 $E[\exp(i(\phi_j + \theta_k + \theta_{m-(j+k)}))] = 0$, $E[\exp(i(\theta_j + \theta_k + \theta_{m-(j+k)}))] = 0$ である。従って、 $E[F_m^{II}] = 0$ である。

以上より、 $\tilde{X} - E[\tilde{X}]$ の複素フーリエ係数 $\bar{F}_m = F_m - E[F_m]$ を考えることができる。また、 $\bar{F}_m = \bar{F}_m^0 + \varepsilon \bar{F}_m^I + \varepsilon^2 \bar{F}_m^{II}$ とすると、 $\bar{F}_m^0 = F_m^0$, $\bar{F}_m^I = F_m^I - E[F_m^I]$, $\bar{F}_m^{II} = F_m^{II}$ である。

6.3.4 応答の 2 次の中心モーメント

応答のバースペクトルを規格化するために、応答の 2 次の中心モーメント $E[(X(t) - E[X(t)])^2]$ を求めたい。そこで、 $\tilde{X}(t)$ の 2 次の中心モーメントを求め、その後周波数領域において刻み幅 $\Delta\omega$ を 0 に近づける極限を考え、応答の 2 次の中心モーメント $E[(X(t) - E[X])^2]$ を求める。 $\tilde{X}(t)$ の 2 次の中心モーメント $E[(\tilde{X}(t) - E[\tilde{X}])^2]$ は、式 (6.16) より、 $\bar{F}_m$ を用いて次のように計算できる。

$$E[(\tilde{X}(t) - E[\tilde{X}])^2] = \sum_{m=-3N}^{3N} \sum_{n=-3N}^{3N} E[\bar{F}_m \bar{F}_n] \exp(i((\omega_m + \omega_n)t)) \quad (6.27)$$

ここで、 $\tilde{X}(t)$ は定常な確率過程であるので、その 2 次の中心モーメントは、時間に依らない定数である。また、 $\omega_m + \omega_n = \omega_{m+n} = (m+n)\Delta\omega$ である。そのため、 m と n に関する総和 $\sum_m \sum_n$ のうち、 $m+n=0$ なる場合のみ考えればよい。よって、 $\tilde{X}(t)$ の 2 次の中心モーメントは

$$E[(\tilde{X}(t) - E[\tilde{X}])^2] = \sum_{m=-3N}^{3N} E[\bar{F}_m \bar{F}_{-m}] \quad (6.28)$$

となる. ε の 3 次以上の項を微小項として無視すると, $E[\bar{F}_m \bar{F}_{-m}]$ は次のように整理できる.

$$E[\bar{F}_m \bar{F}_{-m}] = E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_{-m}^0] + \varepsilon (E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_{-m}^I + \bar{F}_m^I \bar{F}_{-m}^0]) + \varepsilon^2 (E[\bar{F}_m^I \bar{F}_{-m}^I + \bar{F}_m^0 \bar{F}_{-m}^{II} + \bar{F}_m^{II} \bar{F}_{-m}^0]) \quad (6.29)$$

式 (6.25) を考慮すると, 式 (6.29) 中の ε の項には $E[\exp(i(\phi_j + \phi_k + \theta_l))]$ または $E[\exp(i(\phi_j + \theta_k + \theta_l))]$ が存在するため, 0 である. 残りの各項を考える.

まず, $E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_{-m}^0]$ は, 式 (6.17) より

$$\begin{aligned} & E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_{-m}^0] \\ &= |H_m|^2 (U_{11,m}^2 E[\exp(i(\phi_m + \phi_{-m}))] + |U_{12,m}|^2 E[\exp(i(\theta_m + \theta_{-m}))] \\ & \quad + U_{11,m} U_{12,-m} E[\exp(i(\phi_m + \theta_{-m}))] + U_{11,-m} U_{12,m} E[\exp(i(\phi_{-m} + \theta_m))]) \mathbb{1}_{[-N, N]}(m) \end{aligned} \quad (6.30)$$

である. ここで, 式 (6.25) より, $E[\exp(i(\phi_m + \theta_{-m}))] = E[\exp(i(\phi_{-m} + \theta_m))] = 0$ である. また, $E[\exp(i(\phi_m + \phi_{-m}))]$ と $E[\exp(i(\theta_m + \theta_{-m}))]$ は, $m = 0$ で 0, それ以外では 1 となる. $U_{11,m}^2 + |U_{12,m}|^2 = S_{11}(\omega_m) \Delta\omega$ に注意すると,

$$E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_{-m}^0] = S_{11}(\omega_m) |H_m|^2 \Delta\omega \mathbb{1}_{[-N, N] \setminus \{0\}}(m) \quad (6.31)$$

となる.

次に, $E[\bar{F}_m^I \bar{F}_{-m}^I]$ を考える. 式 (6.26) に注意すると, $m = 0$ の場合とそれ以外で分けて考える必要がある. まず, $m = 0$ のとき,

$$\bar{F}_0^I = H_0 \sum_{j=-N}^N U_{11,j} \exp(i(\phi_j + \theta_{-j})) U_{22,-j} H_j + U_{12,0} \exp(i2\theta_0) U_{22,0} H_0 \quad (6.32)$$

である. $\exp(i\theta_0)$ を含む項の期待値は 0 であるので, $E[\bar{F}_0^I \bar{F}_0^I]$ は次のようになる.

$$E[\bar{F}_0^I \bar{F}_0^I] = |H_0|^2 \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N U_{11,j} U_{11,k} E[\exp(i(\phi_j + \theta_{-j} + \phi_k + \theta_{-k}))] U_{22,-j} U_{22,-k} H_j H_k \quad (6.33)$$

$E[\exp(i(\phi_j + \theta_{-j} + \phi_k + \theta_{-k}))]$ が非 0 の値を示すのは, $j + k = 0$ かつ $j \neq 0$ のときに限る. 従って, $U_{11,j}^2 U_{22,j}^2 = (S_{11}(\omega_j) S_{22}(\omega_j) - |S_{12}(\omega_j)|^2) (\Delta\omega)^2$ であることを用いると,

$$E[\bar{F}_0^I \bar{F}_0^I] = |H_0|^2 \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N (S_{11}(\omega_j) S_{22}(\omega_j) - |S_{12}(\omega_j)|^2) |H_j|^2 (\Delta\omega)^2 \quad (6.34)$$

となる. 次に, $m \neq 0$ のときを考える. 式 (6.25) より, すべての j と k に対して $E[\exp(i(\phi_j + \theta_{m-j} + \theta_k + \theta_{m-k}))] = 0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} E[\bar{F}_m^I \bar{F}_{-m}^I] &= |H_m|^2 \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N (U_{11,j} U_{11,k} E[\exp(i(\phi_j + \theta_{m-j} + \phi_k + \theta_{-m-k}))] \\ & \quad + U_{12,j} U_{12,k} E[\exp(i(\theta_j + \theta_{m-j} + \theta_k + \theta_{-m-k}))]) \\ & \quad \times U_{22,m-j} U_{22,-m-k} H_j H_k \mathbb{1}_{[-N, N]}(m-j) \mathbb{1}_{[-N, N]}(-m-k) \end{aligned} \quad (6.35)$$

式 (6.25) より, $E[\exp(i(\phi_j + \theta_{m-j} + \phi_k + \theta_{-m-k}))]$ が非 0 の値を示すのは, $j + k = 0$ かつ $j \neq 0$ の場合に限る. また, $E[\exp(i(\theta_j + \theta_{m-j} + \theta_k + \theta_{-m-k}))]$ が非 0 の値を示すのは, $j \neq 0$ かつ, $j + k = 0$ または $j - k = m$ の場合に限る. $j = m/2$, $k = -m/2$ のときに $j + k = 0$ かつ $j - k = m$ であることに注意すると, $E[\bar{F}_m^I \bar{F}_{-m}^I]$ ($m \neq 0$) は

次のように整理できる.

$$\begin{aligned}
E[F_m^I F_{-m}^I] &= |H_m|^2 \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N (U_{11,j}^2 U_{22,m-j}^2 |H_j|^2 + |U_{12,j}|^2 U_{22,m-j}^2 |H_j|^2 \\
&\quad + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{m/2\}}(j) U_{12,j} U_{12,-m+j} U_{22,m-j} U_{22,-j} H_j H_{j-m}) \mathbb{1}_{[-N, N]}(m-j) \\
&= |H_m|^2 \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N (S_{11}(\omega_j) S_{22}(\omega_{m-j}) |H_j|^2 + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{m/2\}}(j) S_{12}(\omega_j) S_{12}(\omega_{-m+j}) H_j H_{-m+j}) \\
&\quad \times (\Delta\omega)^2 \mathbb{1}_{[-N, N]}(m-j)
\end{aligned} \tag{6.36}$$

ここで, 右辺第 1 式から第 2 式への変形の際, $U_{11,j}^2 + |U_{12,j}|^2 = S_{11}(\omega_j) \Delta\omega$, $U_{12,j} U_{22,-j} = S_{12}(\omega_j) \Delta\omega$ であることを用いた.

最後に, $E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_{-m}^{II}]$ を考える. 式 (6.25) から $E[\exp(i(\phi_j + \theta_k + \theta_{m-(j+k)} + \theta_m))] = 0$, $E[\exp(i(\theta_j + \theta_k + \theta_{m-(j+k)} + \phi_m))] = 0$ であることを考慮すると, 式 (6.17), 式 (6.19) より

$$\begin{aligned}
E[F_m^0 F_{-m}^{II}] &= |H_m|^2 \sum_{k=-N}^N \sum_{j=-N}^N (U_{11,j} U_{11,m} E[\exp(i(\phi_j + \theta_k + \theta_{-m-(j+k)} + \phi_m))] \\
&\quad + U_{12,j} U_{12,m} E[\exp(i(\theta_j + \theta_k + \theta_{-m-(j+k)} + \theta_m))]) \\
&\quad \times U_{22,k} U_{22,-m-(j+k)} H_j H_{j+k} \mathbb{1}_{[-N, N]}(-m - (j+k)) \mathbb{1}_{[-N, N]}(m)
\end{aligned} \tag{6.37}$$

となる. $E[\exp(i(\phi_j + \theta_k + \theta_{-m-(j+k)} + \phi_m))]$ が非 0 の値を示すのは, 式 (6.25) より, $m+j=0$ かつ, $j \neq 0$ かつ, $k \neq 0$ のときに限る. また, $E[\exp(i(\theta_j + \theta_k + \theta_{-m-(j+k)} + \theta_m))]$ が非 0 の値を示すのは, 次のいずれかの状況に限る.

状況 5.1-1 $\theta_j + \theta_m = 0$ かつ $\theta_k + \theta_{-m-(j+k)} = 0$, つまり $m+j=0$ かつ k と m がどちらも 0 ではない場合

状況 5.1-2 $\theta_k + \theta_m = 0$ かつ $\theta_j + \theta_{-m-(j+k)} = 0$, つまり $m+k=0$ かつ m と j がどちらも 0 ではない場合

状況 5.1-3 $\theta_m + \theta_{-m-(j+k)} = 0$ かつ $\theta_j + \theta_k = 0$, つまり $j+k=0$ かつ m と j がどちらも 0 ではない場合

上記の 5.1-1 から 5.1-3 より, $E[\exp(i(\theta_j + \theta_k + \theta_{-m-(j+k)} + \theta_m))]$ が非 0 の値を示すためには, $m \neq 0$ が必要であることがわかる. さらに, $j = k = -m$ としたとき, 上記の 5.1-1 と 5.1-2 を両方とも満たすことになる. 同様に, $j = -m$, $k = m$ としたとき, 上記の 5.1-1 と 5.1-3 を両方とも満たすことになる. 最後に, $j = m$, $k = -m$ としたとき, 上記の 5.1-2 と 5.1-3 を両方とも満たすことになる. これらに注意すると, $E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_{-m}^{II}]$ は次のようになる.

$$\begin{aligned}
E[F_m^0 F_{-m}^{II}] &= |H_m|^2 \left(\sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N U_{11,m} U_{22,k}^2 H_{-m} H_{-m+k} + \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N |U_{12,m}|^2 U_{22,k}^2 H_{-m} H_{-m+k} \right. \\
&\quad + \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-m\}}(j) U_{12,j} U_{12,m} U_{22,-m} U_{22,-j} H_j H_{-m+j} \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-m, m\}}(j) U_{12,j} U_{12,m} U_{22,-j} U_{22,-m} H_j H_0 \right) \mathbb{1}_{[-N, N] \setminus \{0\}}(m)
\end{aligned} \tag{6.38}$$

総和記号中の添え字を j で統一し, $U_{11,m}^2 + |U_{12,m}|^2 = S_{11}(\omega_m) \Delta\omega$, $U_{12,k} U_{22,-k} = S_{12}(\omega_k) \Delta\omega$ を用いると,

$E[F_m^0 F_{-m}^{II}]$ は、さらに次のように計算できる.

$$E[F_m^0 F_{-m}^{II}] = |H_m|^2 \left(\sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N S_{11}(\omega_m) S_{22}(\omega_j) H_{-m} H_{-m+j} + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-m\}}(j) S_{12}(\omega_j) S_{12}(\omega_m) H_j H_{-m+j} \right. \\ \left. + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-m, m\}}(j) S_{12}(\omega_j) S_{12}(\omega_m) H_j H_0 \right) (\Delta\omega)^2 \mathbb{1}_{[-N, N] \setminus \{0\}}(m) \quad (6.39)$$

なお, $E[F_m^0 F_{-m}^{II}]$ は, 式 (6.39) において m の符号を反転させることで求まる.

式 (6.28), (6.31), (6.34), (6.36), (6.39) より, $\tilde{X}(t)$ の 2 次の中心モーメントは次のように書ける.

$$\begin{aligned} & E[(\tilde{X}(t) - E[\tilde{X}])^2] \\ &= \sum_{m=-3N}^{3N} E[\bar{F}_m \bar{F}_{-m}] \\ &= \sum_{m=-3N}^{3N} [E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_{-m}^0] + \varepsilon^2 (E[\bar{F}_m^I \bar{F}_{-m}^I + \bar{F}_m^0 \bar{F}_{-m}^{II} + \bar{F}_m^{II} \bar{F}_{-m}^0])] \\ &= \sum_{\substack{m=-3N \\ m \neq 0}}^{3N} \left[S_{11}(\omega_m) |H_m|^2 \Delta\omega \mathbb{1}_{[-N, N]}(m) \right. \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(\sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \tilde{g}_{F^I F^I}(m, j) (\Delta\omega)^2 \mathbb{1}_{[-N, N]}(m-j) \right. \\ &\quad + \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \tilde{g}_{F^0 F^{II}}(m, j) (\Delta\omega)^2 \mathbb{1}_{[-N, N]}(m) \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N \tilde{g}_{F^0 F^{II}}(-m, j) (\Delta\omega)^2 \mathbb{1}_{[-N, N]}(m) \right) \right] \\ &\quad + \varepsilon^2 |H_0|^2 \sum_{\substack{j=-N \\ j \neq 0}}^N (S_{11}(\omega_j) S_{22}(\omega_j) - |S_{12}(\omega_j)|^2) |H_j|^2 (\Delta\omega)^2 \end{aligned} \quad (6.40)$$

ここで,

$$\tilde{g}_{F^I F^I}(m, j) = |H_m|^2 (S_{11}(\omega_j) S_{22}(\omega_{m-j}) |H_j|^2 + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{m/2\}}(j) S_{12}(\omega_j) S_{12}(\omega_{-m+j}) H_j H_{-m+j}) \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{F^0 F^{II}}(m, j) &= |H_m|^2 \left(S_{11}(\omega_m) S_{22}(\omega_j) H_{-m} H_{-m+j} + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-m\}}(j) S_{12}(\omega_j) S_{12}(\omega_m) H_j H_{-m+j} \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-m, m\}}(j) S_{12}(\omega_m) S_{12}(\omega_j) H_j H_0 \right) \end{aligned} \quad (6.42)$$

である. また, 式 (6.40) 右辺第 3 式の第 5 項は, $E[\bar{F}_0^I \bar{F}_0^I]$ に起因する.

次に, $\omega_u = N\Delta\omega$ を固定したまま, $\Delta\omega \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) とした場合の $E[(\tilde{X}(t) - E[\tilde{X}])^2]$ の極限を考えると, 次の

ように計算できる.

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} E[(\tilde{X}(t) - E[\tilde{X}(t)])^2] \\
&= \int_{-3\omega_u}^{3\omega_u} \left[S_{11}(\omega) |H(\omega)|^2 \mathbb{1}_{[-\omega_u, \omega_u]}(\omega) + \varepsilon^2 \int_{-\omega_u}^{\omega_u} \left\{ g_{F^I F^I}(\omega, \omega') \mathbb{1}_{[-\omega_u, \omega_u]}(\omega - \omega') \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + g_{F^0 F^{II}}(\omega, \omega') \mathbb{1}_{[-\omega_u, \omega_u]}(\omega) + g_{F^0 F^{II}}(-\omega, \omega') \right\} \mathbb{1}_{[-\omega_u, \omega_u]}(\omega) d\omega' \right] d\omega
\end{aligned} \tag{6.43}$$

ここで

$$\begin{aligned}
g_{F^I F^I}(\omega_1, \omega_2) &= |H(\omega_1)|^2 (S_{11}(\omega_1) S_{22}(\omega_1 - \omega_2) |H(\omega_2)|^2 \\
&\quad + S_{12}(\omega_2) S_{12}(-\omega_1 + \omega_2) H(\omega_2) H(-\omega_1 + \omega_2))
\end{aligned} \tag{6.44}$$

$$\begin{aligned}
g_{F^0 F^{II}}(\omega_1, \omega_2) &= |H(\omega_1)|^2 (S_{11}(\omega_1) S_{22}(\omega_2) H(-\omega_1) H(-\omega_1 + \omega_2) \\
&\quad + S_{12}(\omega_2) S_{12}(\omega_1) (H(\omega_2) H(-\omega_1 + \omega_2) + H(\omega_2) H(0)))
\end{aligned} \tag{6.45}$$

である. ω_u が十分大きい場合を考えると, 式 (6.43) 中の各指示関数は常に 1 とみなすことができる. また, このとき区間 $[-\omega_u, \omega_u]$ も, 実数全体と近似的にみなすこともできる. これらを考慮すると, 応答の 2 次の中心モーメントの近似解析解が次のように得られる.

$$E[(X(t) - E[X])^2] \approx \int_{-\infty}^{\infty} \left[S_{11}(\omega) |H(\omega)|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 (g_{F^I F^I}(\omega, \omega') + g_{F^0 F^{II}}(\omega, \omega') + g_{F^0 F^{II}}(-\omega, \omega')) d\omega' \right] d\omega \tag{6.46}$$

6.3.5 応答バイスペクトル

$\tilde{X}(t)$ の 3 次のキュムラントから応答のバイスペクトルの近似解析解を求める. 定常性を考慮し, また, ε について 3 次以上を微小量として無視すると, $\tilde{X}(t)$ の 3 次のキュムラント $c_3^{\tilde{X}}(\tau_1, \tau_2)$ は, $\bar{F}_m$ を用いて次のように書ける.

$$\begin{aligned}
c_3^{\tilde{X}}(\tau_1, \tau_2) &= E[(\tilde{X}(t) - E[\tilde{X}]) (\tilde{X}(t + \tau_1) - E[\tilde{X}]) (\tilde{X}(t + \tau_2) - E[\tilde{X}])] \\
&= \sum_{m=-3N}^{3N} \sum_{n=-3N}^{3N} \varepsilon \left[E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_n^0 \bar{F}_{-(m+n)}^I] + E[\bar{F}_m^0 \bar{F}_{-(m+n)}^0 \bar{F}_n^I] + E[\bar{F}_{-(m+n)}^0 \bar{F}_n^0 \bar{F}_m^I] \right] \\
&\quad \times \exp(i(\omega_m \tau_1 + \omega_n \tau_2)) \mathbb{1}_{[-3N, 3N]}(-(m+n))
\end{aligned} \tag{6.47}$$

式 (6.47) の右辺の各項を評価するために, $E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^I]$ ($-N \leq p, q, r \leq N, p+q+r=0$) を考える. ここで, $p=0$ または $q=0$ のとき, 式 (6.17) から, $\exp(i\theta_0)$ または $\exp(i\phi_0)$ が含まれる. 式 (6.25) から, そのような場合, 期待値は 0 となるので, $p \neq 0, q \neq 0$ とする. 式 (6.26) に注意すると, r については, $r=0$ の場合とそれ以外で分けて考える必要がある.

まず, $r=0$ のとき,

$$\begin{aligned}
\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_0^I &= H_p H_q H_0 (U_{11,p} \exp(i\phi_p) + U_{12,p} \exp(i\theta_p)) (U_{11,q} \exp(i\phi_q) + U_{12,q} \exp(i\theta_q)) \\
&\quad \times \left(\sum_{j=-N}^N U_{11,j} \exp(i(\phi_j + \theta_{-j})) U_{22,-j} H_j + U_{12,0} \exp(i2\theta_0) U_{22,0} H_0 \right)
\end{aligned} \tag{6.48}$$

となる. ここで, $\exp(i\phi_0)$ が含まれる項と, 複素指数関数の引数として ϕ または θ が奇数個含まれる項の期待値は 0 となるので, $E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_0^I]$ は

$$\begin{aligned}
E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_0^I] &= H_p H_q H_0 \sum_{j=-N}^N (U_{11,p} U_{12,q} U_{11,j} E[\exp(i(\phi_p + \theta_q + \phi_j + \theta_{-j}))]) \\
&\quad + U_{12,p} U_{11,q} U_{11,j} E[\exp(i(\theta_p + \phi_q + \phi_j + \theta_{-j}))]) U_{22,-j} H_j
\end{aligned} \tag{6.49}$$

となる．ここで， $E[\exp(i(\phi_p + \theta_q + \phi_j + \theta_{-j}))]$ が非 0 の値を示すのは， $p + q = 0$ かつ $j = -p$ のときに限る．また， $E[\exp(i(\theta_p + \phi_q + \phi_j + \theta_{-j}))]$ が非 0 の値を示すのは， $p + q = 0$ かつ $j = p$ のときに限る．従って， $E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_0^I]$ は次のように整理できる．

$$\begin{aligned} E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_0^I] &= H_p H_q H_0 (U_{11,p}^2 U_{12,q} U_{22,p} H_{-p} + U_{12,p} U_{11,q}^2 U_{22,-p} H_p) \mathbb{1}_{\{0\}}(p+q) \\ &= |H_p|^2 H_0 S_{11}(\omega_p) (S_{12}^*(\omega_p) H_{-p} + S_{12}(\omega_p) H_p) (\Delta\omega)^2 \mathbb{1}_{\{0\}}(p+q) \end{aligned} \quad (6.50)$$

ここで，右辺第 2 式から第 3 式にかけて， $U_{12,p} U_{22,-p} = S_{12}(\omega_p) \Delta\omega$ を用いた．

次に， $r \neq 0$ の場合を考える．式 (6.17) と (6.18) より， $E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^I]$ は次のように書ける．

$$\begin{aligned} E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^I] &= \sum_{j=-N}^N H_j \left[U_{12,p} U_{12,q} U_{12,j} E[\exp(i(\theta_p + \theta_q + \theta_j + \theta_{-(p+q)-j}))] \right. \\ &\quad + U_{12,p} U_{12,q} U_{11,j} E[\exp(i(\theta_p + \theta_q + \phi_j + \theta_{-(p+q)-j}))] \\ &\quad + U_{12,p} U_{11,q} U_{12,j} E[\exp(i(\theta_p + \phi_q + \theta_j + \theta_{-(p+q)-j}))] \\ &\quad + U_{12,p} U_{11,q} U_{11,j} E[\exp(i(\theta_p + \phi_q + \phi_j + \theta_{-(p+q)-j}))] \\ &\quad + U_{11,p} U_{12,q} U_{12,j} E[\exp(i(\phi_p + \theta_q + \theta_j + \theta_{-(p+q)-j}))] \\ &\quad + U_{11,p} U_{12,q} U_{11,j} E[\exp(i(\phi_p + \theta_q + \phi_j + \theta_{-(p+q)-j}))] \\ &\quad + U_{11,p} U_{11,q} U_{12,j} E[\exp(i(\phi_p + \phi_q + \theta_j + \theta_{-(p+q)-j}))] \\ &\quad + U_{11,p} U_{11,q} U_{11,j} E[\exp(i(\phi_p + \phi_q + \phi_j + \theta_{-(p+q)-j}))] \left. \right] \\ &\quad \times U_{22,-(p+q)-j} \mathbb{1}_{[-N, N]}(-(p+q)-j) H_p H_q H_{-(p+q)} \end{aligned} \quad (6.51)$$

上式の 8 つの項のうち，複素指数関数の期待値が非 0 の値を示すのは， ϕ と θ の個数がそれぞれ偶数個の項のみである．従って，上式の右辺のうち，第 1 項，第 4 項，第 6 項，第 7 項のみを考えればよい．

$$\begin{aligned} E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^I] &= \sum_{j=-N}^N H_j \left[U_{12,p} U_{12,q} U_{12,j} E[\exp(i(\theta_p + \theta_q + \theta_j + \theta_{-(p+q)-j}))] \right. \\ &\quad + U_{12,p} U_{11,q} U_{11,j} E[\exp(i(\theta_p + \phi_q + \phi_j + \theta_{-(p+q)-j}))] \\ &\quad + U_{11,p} U_{12,q} U_{11,j} E[\exp(i(\phi_p + \theta_q + \phi_j + \theta_{-(p+q)-j}))] \\ &\quad + U_{11,p} U_{11,q} U_{12,j} E[\exp(i(\phi_p + \phi_q + \theta_j + \theta_{-(p+q)-j}))] \left. \right] \\ &\quad \times U_{22,-(p+q)-j} \mathbb{1}_{[-N, N]}(-(p+q)-j) H_p H_q H_{-(p+q)} \end{aligned} \quad (6.52)$$

上式右辺各項中の期待値が非 0 の値を示すための j の条件を整理する．まず， $p + q + r = 0$ ， $r \neq 0$ より， $-(p+q) \neq 0$ である．そのもとで，式 (6.52) 右辺第 1 項から第 4 項中の各期待値が非 0 の値を有する条件を確認する．

第 1 項 $p + q \neq 0$ より， $E[\exp(i(\theta_p + \theta_q + \theta_j + \theta_{-(p+q)-j}))]$ が非 0 の値を示すのは， $j = -p$ または $j = -q$ のときに限る．また， $p = q$ のとき， $j = -p = -q$ となることに注意する．

第 2 項 $E[\exp(i(\theta_p + \phi_q + \phi_j + \theta_{-(p+q)-j}))]$ が非 0 の値を示すのは， $\phi_q + \phi_j = 0$ かつ $\theta_p + \theta_{-(p+q)-j} = 0$ ，つまり $j = -q$ のときに限る．

第 3 項 $E[\exp(i(\phi_p + \theta_q + \phi_j + \theta_{-(p+q)-j}))]$ が非 0 の値を示すのは， $\phi_p + \phi_j = 0$ かつ $\theta_q + \theta_{-(p+q)-j} = 0$ ，つまり $j = -q$ のときに限る．ここでも， $p = q$ のとき， $j = -p = -q$ となることに注意する．

第 4 項 $E[\exp(i(\phi_p + \phi_q + \theta_j + \theta_{-(p+q)-j}))]$ が非 0 の値を示すのは， $p + q = 0$ かつ $j \neq 0$ のときに限る．しかし， $p + q = -r \neq 0$ より，すべての p, q, j に対して $E[\exp(i(\phi_p + \phi_q + \theta_j + \theta_{-(p+q)-j}))] = 0$ である．

なお，ここで考えた期待値が非 0 の値を示す j に対して，常に $\mathbb{1}_{[-N, N]}(-(p+q)-j) = 1$ である．

以上より, $E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^I]$ は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}
E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^I] &= H_p H_q H_{-(p+q)} \left[H_{-p} |U_{12,p}|^2 U_{12,q} U_{22,-q} + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(p-q) H_{-q} U_{12,p} |U_{12,q}|^2 U_{22,-p} \right. \\
&\quad \left. + H_{-q} U_{12,p} U_{11,q}^2 U_{22,-p} + H_{-p} U_{11,p}^2 U_{12,q} U_{22,-q} \right] \\
&= H_p H_q H_{-(p+q)} \left[H_{-p} S_{12}(\omega_q) S_{11}(\omega_p) + H_{-q} S_{12}(\omega_p) S_{11}(\omega_q) \right. \\
&\quad \left. - \mathbb{1}_{\{0\}}(p-q) H_{-q} U_{12,p} |U_{12,q}|^2 U_{22,-p} \right] (\Delta\omega)^2
\end{aligned} \tag{6.53}$$

ここで, $|U_{12}(\omega_p)|^2 + U_{11,p}^2 = S_{11}(\omega_p) \Delta\omega$, $U_{12,p} U_{22,-p} = S_{12}(\omega_p) \Delta\omega$ を用いた. また, 式 (6.53) において $r = p+q = 0$ としたとき, その結果は $r = 0$ のみを個別に考えた式 (6.50) と一致する. 従って, $r = 0$ の場合も式 (6.53) を用いればよい.

式 (6.53) 中の (p, q, r) について, $(p, q, r) = (m, n, -(m+n))$, $(m, -(m+n), n)$, $(n, -(m+n), m)$ とした後, 式 (6.47) に代入し, ω_u を固定した上で $\Delta\omega \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) の極限を考えると,

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} c_3^{\bar{X}}(\tau_1, \tau_2) &= \varepsilon \int_{-3\omega_u}^{3\omega_u} \int_{-3\omega_u}^{3\omega_u} [\kappa(\omega_1, \omega_2) + \kappa(\omega_1, -(\omega_1 + \omega_2)) + \kappa(-(\omega_1 + \omega_2), \omega_2)] \\
&\quad \times \exp(i(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)) \mathbb{1}_{[-\omega_u, \omega_u]}(\omega_1 + \omega_2) d\omega_1 d\omega_2
\end{aligned} \tag{6.54}$$

とできる. ここで, 極限操作の過程で式 (6.53) 中の指示関数を含む項の影響は 0 となる事に注意すると,

$$\kappa(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1) H(\omega_2) H(-(\omega_1 + \omega_2)) \left[H(-\omega_1) S_{12}(\omega_2) S_{11}(\omega_1) + H(-\omega_2) S_{12}(\omega_1) S_{11}(\omega_2) \right] \tag{6.55}$$

である. ω_u が十分大きい場合を考えると, 応答の 2 次の中心モーメントの近似解を考えたときと同様に, 指示関数 $\mathbb{1}_{[-\omega_u, \omega_u]}(-(\omega_1 + \omega_2))$ は常に 1 とみなすことができる. また, このとき, $[-3\omega_u, 3\omega_u]$ も, 実数全体と近似的にみなすこともできる. そのもとで, バイスpekトルと 3 次キユムラントの関係式を考えると, 元の運動方程式 (6.1) の応答のバイスpekトル $B_X(\omega_1, \omega_2)$ の近似解析解は, 次のように得られる.

$$\begin{aligned}
B_X(\omega_1, \omega_2) &\approx \varepsilon [\kappa(\omega_1, \omega_2) + \kappa(\omega_1, -(\omega_1 + \omega_2)) + \kappa(-(\omega_1 + \omega_2), \omega_2)] \\
&= \varepsilon H(\omega_1) H(\omega_2) H(-(\omega_1 + \omega_2)) \left[H(-\omega_1) S_{12}(\omega_2) S_{11}(\omega_1) + H(-\omega_2) S_{12}(\omega_1) S_{11}(\omega_2) \right. \\
&\quad + H(-\omega_1) S_{12}(-(\omega_1 + \omega_2)) S_{11}(\omega_1) + H(\omega_1 + \omega_2) S_{12}(\omega_1) S_{11}(-(\omega_1 + \omega_2)) \\
&\quad \left. + H(\omega_1 + \omega_2) S_{12}(\omega_2) S_{11}(-(\omega_1 + \omega_2)) + H(-\omega_2) S_{12}(-(\omega_1 + \omega_2)) S_{11}(\omega_2) \right]
\end{aligned} \tag{6.56}$$

本章で考えた入力において, $S_{11}(\omega) = S_{22}(\omega) = S_{12}(\omega) = S_U(\omega)$ のときは, 前章で考えた, 係数励振と外部励振が同一な場合に相当する. 実際, 式 (6.56) において, $S_{11}(\omega) = S_{22}(\omega) = S_{12}(\omega) = S_U(\omega)$ とすると, 前章式 (5.80) の, ε について 2 次まで考慮した場合の, 応答バイスpekトルの近似解析解と一致する. すなわち, 本章で考えた任意のクロスpekトルを有する $U_1(t)$, $U_2(t)$ を入力として持つ系は, 前章で対象とした系を一般化したものである. また, 式 (6.56) 中には, 係数励振のパワースpekトル $S_{22}(\omega)$ は現れない. すなわち, 外部励振と相関を有する係数励振が存在しなければ応答に非対称性は現れないが, その非対称性の向きや強さについては, 係数励振よりも外部励振のパワースpekトルのほうが大きな影響を及ぼすという点は, 近似解析解である式 (6.56) を求めて初めてわかることである.

6.4 数値計算例

本節では, 歪度の周波数領域における分布である, 2 次の中心モーメントの 1.5 乗で規格化した応答のバイスpekトルの実部を, モンテカルロシミュレーションから求めた結果と比較することで, 提案手法の有効性を確認する. 以降, 2 次の中心モーメントの 1.5 乗で規格化した応答のバイスpekトルの実部を $b_X(\omega_1, \omega_2)$ と書く.

係数励振と外部励振の計算例としては、2つの励振が白色ノイズの場合、2つの励振のクロススペクトルが1つのピークを持つ複素数の場合、2つの励振のクロススペクトルが2つのピークを持つ場合、の3種類を考える。3種類それぞれの励振に対して、後述する方法で励振の標本関数を多数生成する。それらを入力として持つ運動方程式 (6.1) の解を数値的に求め、応答の標本関数を多数求める。そして、その応答の標本関数をもとに、3種類それぞれの入力に対する応答の確率密度関数と規格化されたバースペクトルの実部 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ を得る。このモンテカルロシミュレーションによって得られる規格化したバースペクトルと近似解析解を比較することで、本手法の有効性を示す。

モンテカルロシミュレーションの入力の標本関数は、入力が白色ノイズの場合を除いて、式 (6.2) および (6.3) から求める。式 (6.2) および (6.3) によって所望の入力が生成できているかどうかは、生成した入力の標本関数のパワースペクトルとクロススペクトルから確認する。モンテカルロシミュレーションのパラメータとしては、標本関数の数を 100,000 本、1本の標本関数中のデータ点数を 2^{19} とした。数値計算の際の時間刻み幅は 0.001 とした。また、加振開始から時間にして $T = 100$ までの間、つまり数値計算のステップ数としては 100,000 ステップの間は過渡状態とみなし、 $T = 100$ 以降に 2^{19} のデータ点数をとった。

6.4.1 Case1: 係数励振と外部励振がガウス性白色ノイズの場合

まず、係数励振と外部励振がガウス性白色ノイズでモデル化される場合を考える。すなわち

$$\begin{aligned} E[U_{11}(t)U_{11}(t+\tau)] &= K_{11}\delta(\tau) \\ E[U_{22}(t)U_{22}(t+\tau)] &= K_{22}\delta(\tau) \\ E[U_{11}(t)U_{22}(t+\tau)] &= K_{12}\delta(\tau) \end{aligned} \quad (6.57)$$

である場合を考える。この場合、 $U_{11}(t)$ と $U_{22}(t)$ のパワースペクトル $S_{11}(\omega)$, $S_{22}(\omega)$ とクロススペクトル $S_{12}(\omega)$ は、次のようになる。

$$S_{11}(\omega) = \frac{K_{11}}{2\pi} \quad S_{22}(\omega) = \frac{K_{22}}{2\pi} \quad S_{12}(\omega) = \frac{K_{12}}{2\pi} \quad (6.58)$$

相関性を有するガウス性白色ノイズの標本関数は、式 (6.2) および (6.3) から生成することも可能だが、励振の δ 相関性を考慮すると、ガウス確率変数を用いることでより効率的に標本関数の生成ができる。ガウス確率変数 Z_{1k} と Z_{2k} ($k \in \mathbb{N}$) を考える。ここで、 Z_{1k} と Z_{2k} は互いに独立である。また、 $k \neq k'$ なる k と k' に対して、 Z_{1k} と $Z_{2k'}$, Z_{1k} と $Z_{1k'}$, Z_{2k} と $Z_{2k'}$ もまた、互いに独立である。この Z_{1k} と Z_{2k} を用いると、 $t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t)$ なる t における、式 (6.57) を満たすガウス性白色ノイズ $U_1(t)$ と $U_2(t)$ は、次のように近似的に求めることができる [87]。

$$\begin{aligned} U_1(t) &= \sqrt{\frac{2\pi K_{11}}{\Delta t}} Z_{1k} \\ U_2(t) &= \sqrt{\frac{2\pi K_{22}}{\Delta t}} \left(K_{12} Z_{1k} + \sqrt{1 - K_{12}^2} Z_{2k} \right) \end{aligned} \quad (6.59)$$

$K_{11} = K_{22} = 1$, $K_{12} = 0.5$ とした場合の、式 (6.59) を用いて生成した標本関数のパワースペクトルとクロススペクトルが図 6.1 である。図より、式 (6.59) から所望のパワースペクトルとクロススペクトルを有するガウス性白色ノイズが生成できていることが確認できる。

こうして生成したガウス性白色ノイズの標本関数を用いてモンテカルロシミュレーションを行い、応答の確率密度関数と規格化された応答のバースペクトルを求めた。シミュレーションから求めた応答の確率密度関数が図 6.2 である。図中の赤実線が、運動方程式 (6.1) で表現される運動の定常応答の確率密度関数である。黒破線は赤実線のシミュレーション結果と同じ平均、分散を有するガウス分布であり、確率密度関数の非対称性をより明確にする目的でプロットした。この白色ノイズ入力の場合に限らず、以降計算例における応答の確率密度関数の図に対して、プロットの方法は同様である。

そして、提案手法で求めた規格化されたバイスペクトルの実部 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の近似解析解とシミュレーション解の比較が図 6.3 である。規格化されたバイスペクトルをコンター図でプロットした図 6.3(a) では、バイスペクトルの対称性より、 $\omega_1 \leq \omega_2$ なる領域ではシミュレーション解を、 $\omega_2 < \omega_1$ には近似解析解をプロットしている。また、図 6.3(b) は、直線 $\omega_1 = \omega_2$ 上の様子をプロットしている。 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ について、以降他の計算例に対してもプロットの方法は白色ノイズの場合と同様である。図 6.3 より、提案した近似解析手法によって、規格化された応答バイスペクトルをよく再現できていることがわかる。

図 6.2 より、入力が白色ノイズの場合、応答に非対称性はほとんど現れないことがわかる。また、図 6.3(a) と (b) から、 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ は負の領域と正の領域の両方を有し、その値も大きくない。応答の確率密度関数に非対称性がほとんどの現れないのは、 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ のこの特徴を反映していると言える。

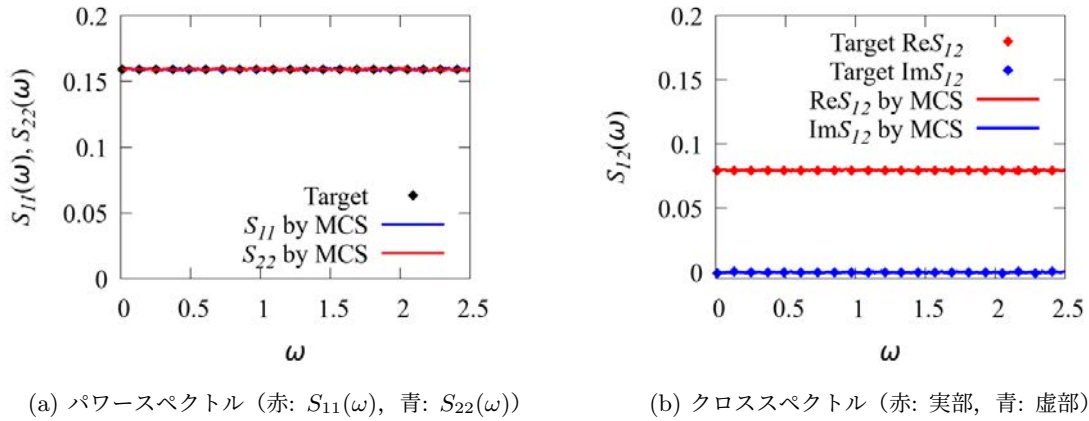


図 6.1 Case1 の場合の式 (6.59) から生成した標本関数のパワースペクトルとクロススペクトル (◇: 実現したいパワースペクトルまたはクロススペクトル, 実線: 生成した標本関数のパワースペクトルまたはクロススペクトル)

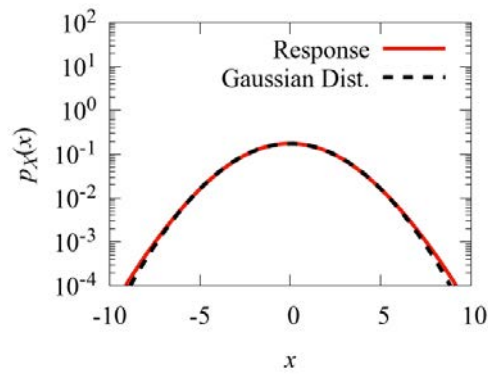
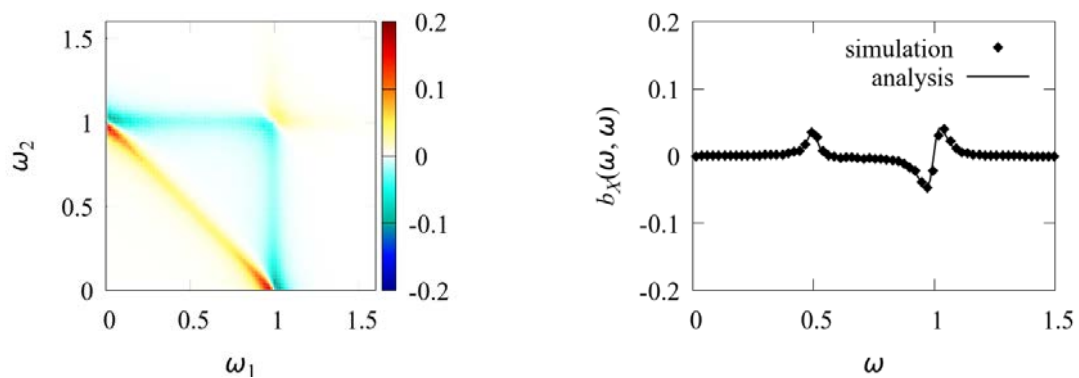


図 6.2 Case1 の場合の応答の確率密度関数 (赤実線: シミュレーション解, 黒破線: 赤実線と同一の平均, 分散のガウス分布)



(a) $\omega_1 - \omega_2$ 平面上の様子 ($\omega_1 \leq \omega_2$ にはシミュレーション解を, $\omega_2 < \omega_1$ には近似解析解をプロットしている)

(b) 直線 $\omega_1 = \omega_2$ 上の様子

図 6.3 Case1 の場合の規格化されたバイスペクトルの実部 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の近似解析解とシミュレーション解の比較.

6.4.2 Case2: 係数励振と外部励振のクロススペクトルがピークを 1 つ持つ複素数の場合

クロスバースペクトルは、パワースペクトルと異なり一般に複素数である。そこで、本項では、クロスバースペクトルの虚部が与える影響を見るために、これが純虚数で与えられる場合を考える。具体的には、係数励振と外部励振のパワースペクトルとクロススペクトルについて、次の場合を考える。

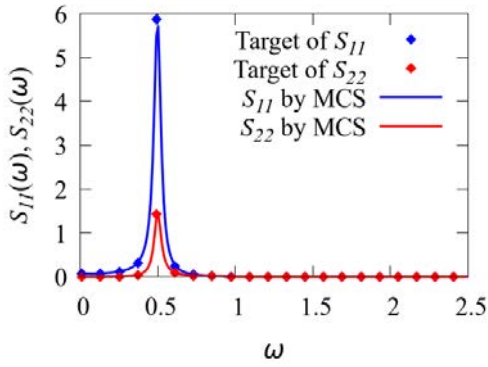
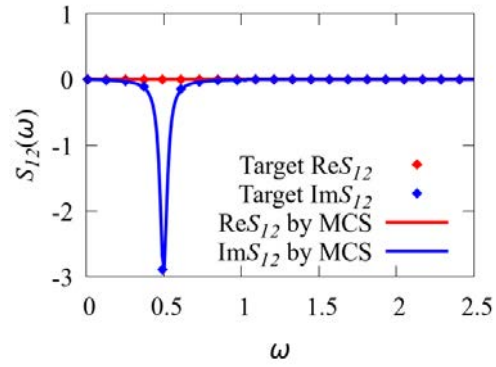
$$\begin{aligned} S_{11}(\omega) &= \frac{c}{(a^2 - \omega^2) + (2baw)^2} \\ S_{22}(\omega) &= \frac{c\omega^2}{(a^2 - \omega^2) + (2baw)^2} \\ S_{12}(\omega) &= \frac{-ic\omega}{(a^2 - \omega^2) + (2baw)^2} \end{aligned} \quad (6.60)$$

式中のパラメータ a , b は, $a = 0.5$, $b = 0.05$ とした。パラメータ c については, $U_{11}(t)$ の 2 次モーメントが 1 になるように, $c = (ab)/(2\pi) \approx 0.00398$ とした。式 (6.2) および (6.3) を用いて生成した標本関数のパワースペクトルとクロススペクトルが図 6.4 である。図より, 所望のパワースペクトルとクロススペクトルを有するガウス性非白色ノイズが生成できていることが確認できる。

こうして生成したガウス性非白色ノイズの標本関数を用いてモンテカルロシミュレーションを行い, 応答の確率密度関数と規格化された応答のバースペクトルを求めた。シミュレーションから求めた応答の確率密度関数が図 6.5 である。そして, 提案手法で求めた規格化されたバースペクトルの実部 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の近似解析解とシミュレーション解の比較が図 6.6 である。

図 6.5 より, 応答の確率密度関数には顕著な非対称性が確認できる。 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ を見ると, 図 6.6(a) より, 近似解析解とシミュレーション解はよく一致している。また, 図 6.6(a) から, $(\omega_1, \omega_2) = (0.5, 0.5)$ における大きな正のピークに起因して, 応答の確率密度関数に非対称性が現れることがわかる。 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の $\omega_1 = \omega_2$ 上の様子を示した図 6.6(b) を見ると, 近似解析解とシミュレーション解の間には, ピークの高さにわずかに誤差が確認できる。しかし, ピークの位置や符号, 他の領域と比較して卓越したピークとなっている点など, 応答の確率密度関数の非対称性を推し量するのに必要な性質は, 近似解析解によって捉えることができています。

虚部が顕著な負のピークを有するクロススペクトルから, 顕著な正のピークを有する応答のバースペクトルが得られた事について考察する。励振の近似表現である式 (6.2) を見ると, 外部励振には, 係数励振と相関を有する項と, 独立な項が存在する。係数励振と独立な項の各周波数成分には, 位相の情報としては, ランダム位相のみが存在する。一方, 係数励振と相関を有する項の各周波数成分の位相には, ランダム位相に加えてクロススペクトルの偏角 $\psi_{12}(\cdot)$ の分だけ位相遅れが存在する。Case2 においてクロススペクトルは負の純虚数であるため, この偏角は $-\pi/2$ である。次に, 規格化された応答のバースペクトルは, $(\omega_1, \omega_2) = (0.5, 0.5)$ で顕著なピークを示している。すなわち, 周波数 $\omega = 0.5$ 成分と, $\omega = 1$ 成分の複素共役の間で依存関係が存在し, 応答の非対称性はこの依存関係に由来するものである。ここで, $\omega = 1$ 成分の複素共役は, $\omega = -1$ 成分と等しい。 $\omega = 0.5$ 成分と $\omega = -1$ 成分の位相遅れは, それぞれ 0 と $+\pi/2$ (これは位相が $\pi/2$ だけ進む状況) である。結果として, 励振に元から含まれる位相遅れ $-\pi/2$ と $\omega = -1$ 成分の位相遅れ $+\pi/2$ が打ち消しあうように作用する項と, $-\pi/2$ の位相遅れが残る項が応答に生じる。 $-\pi/2$ の位相遅れが残る場合, バースペクトルとしては虚部に現れるため, 応答の非対称性には寄与しない。位相遅れが打ち消される場合, 応答の 3 周波数成分間には位相の差が存在しないため, 3.3 節より, 応答のバースペクトルの実部に正のピークが現れる。

(a) パワースペクトル (赤: $S_{11}(\omega)$, 青: $S_{22}(\omega)$)

(b) クロススペクトル (赤: 実部, 青: 虚部)

図 6.4 Case2 の場合の式 (6.2) および (6.3) から生成した標本関数のパワースペクトルとクロススペクトル (◇: 実現したいパワースペクトルまたはクロススペクトル, 実線: 生成した標本関数のパワースペクトルまたはクロススペクトル)

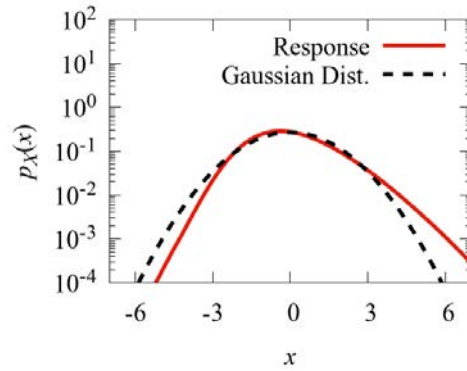
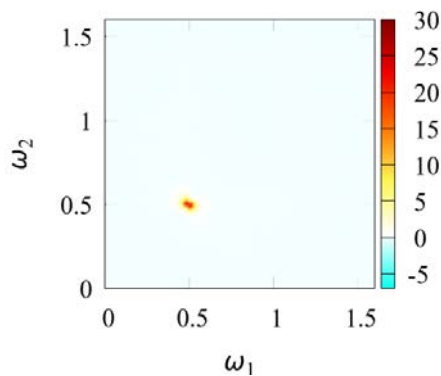


図 6.5 Case2 の場合の応答の確率密度関数 (赤実線: シミュレーション解, 黒破線: 赤実線と同一の平均, 分散のガウス分布)



(a) $\omega_1 - \omega_2$ 平面上の様子 ($\omega_1 \leq \omega_2$ にはシミュレーション解を, $\omega_2 < \omega_1$ には近似解析解をプロットしている)

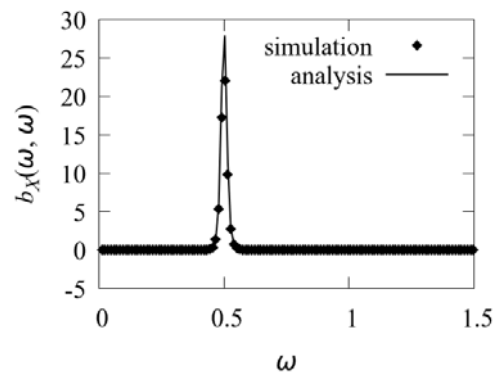
(b) 直線 $\omega_1 = \omega_2$

図 6.6 Case2 の場合の規格化されたバイスペクトルの実部 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の近似解析解とシミュレーション解の比較.

6.4.3 Case3: 係数励振と外部励振のクロススペクトルがピークを 2 つ持つ場合

ここでは、1 例目、2 例目より複雑な形状のクロススペクトルへの適用可能性を調査するため、最後にクロススペクトルが 2 つのピークを持つ場合を考える。係数励振と外部励振のパワースペクトルとクロススペクトルについて、次の場合を考える。

$$\begin{aligned} S_{11}(\omega) &= S_U(\omega, \alpha_1, \rho_1) \\ S_{22}(\omega) &= S_U(\omega, \alpha_2, \rho_2) \\ S_{12}(\omega) &= \gamma \sqrt{S_{11}(\omega) S_{22}(\omega)} \end{aligned} \quad (6.61)$$

$S_U(\omega, \alpha, \rho)$ は、前章で用いた $S_U(\omega)$ と同様のものであり、次の式で表される。

$$S_U(\omega, \alpha, \rho) = \frac{E[U^2]}{\pi} \frac{\alpha(\alpha^2 + \rho^2 + \omega^2)}{(\alpha^2 + \rho^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \quad (6.62)$$

ここでは、 $E[U^2] = 1$ とする。 $\rho_1 \neq \rho_2$ とすると、2 つのピークを有するクロススペクトルを表現できる。 γ は $-1 \leq \gamma \leq 1$ を満たす定数であり、 $U_1(t)$ と $U_2(t)$ の相関の強さを支配するパラメータである。

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.05$, $\rho_1 = 0.4$, $\rho_2 = 0.6$, $\gamma = 0.5$ とする。式 (6.2) および (6.3) を用いて生成した標本関数のパワースペクトルとクロススペクトルが図 6.7 である。図 6.7(b) から、直流成分付近でクロススペクトルの実部と虚部両方において、標本関数の不足が原因だと思われる誤差が確認できる。しかし、ほとんどの ω に対して、所望のパワースペクトルとクロススペクトルを再現できていることがわかる。

こうして生成したガウス性非白色ノイズの標本関数を用いてモンテカルロシミュレーションを行い、応答の確率密度関数と規格化された応答のバイスペクトルを求めた。シミュレーションから求めた応答の確率密度関数が図 6.8 である。そして、提案手法で求めた規格化されたバイスペクトルの実部 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の近似解析解とシミュレーション解の比較が図 6.9 である。

図 6.8 より、応答の確率密度関数には顕著な非対称性が確認できる。 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ を見ると、図 6.9(a) より、近似解析解とシミュレーション解はよく一致している。この図 6.9(a) から、 $(\omega_1, \omega_2) = (0.4, 0.4)$, $(0.4, 0.6)$, $(0.6, 0.4)$ で囲まれる領域の大きな正のピークに起因して、応答の確率密度関数に非対称性が現れるとみなすことができる。 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の $\omega_1 = \omega_2$ 上の様子を示した図 6.9(b) を見ても、近似解析解によって応答のバイスペクトルがよく再現できていることがわかる。

この計算例で扱った係数励振と外部励振のパワースペクトルのピークの値はほぼ等しい。そして、クロススペクトルには、係数励振と外部励振のパワースペクトルのピークに起因した、大きさがほぼ等しい 2 つのピークが存在する。しかし、 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ には、外部励振の卓越振動数 $\omega = 0.4$ を含む $(\omega_1, \omega_2) = (0.4, 0.4)$, $(0.4, 0.6)$, $(0.6, 0.4)$ にピークは存在するが、係数励振のパワースペクトルのピークに起因した $(0.6, 0.6)$ におけるピークは存在しない。このことは、応答のバイスペクトルの近似解析解に含まれる、式 (6.55) で定義される $\kappa(\omega_1, \omega_2)$ に、外部励振のパワースペクトル $S_{11}(\omega)$ は存在するが、係数励振のパワースペクトル $S_{22}(\omega)$ は現れないことに由来している。係数励振が存在しなければ応答に非対称性は現れないが、応答の非対称性の周波数領域における分布は、係数励振よりも外部励振のパワースペクトルから大きな影響を受ける、と言うことは、応答のバイスペクトルの近似解析解を求めることで新たに得られた知見である。

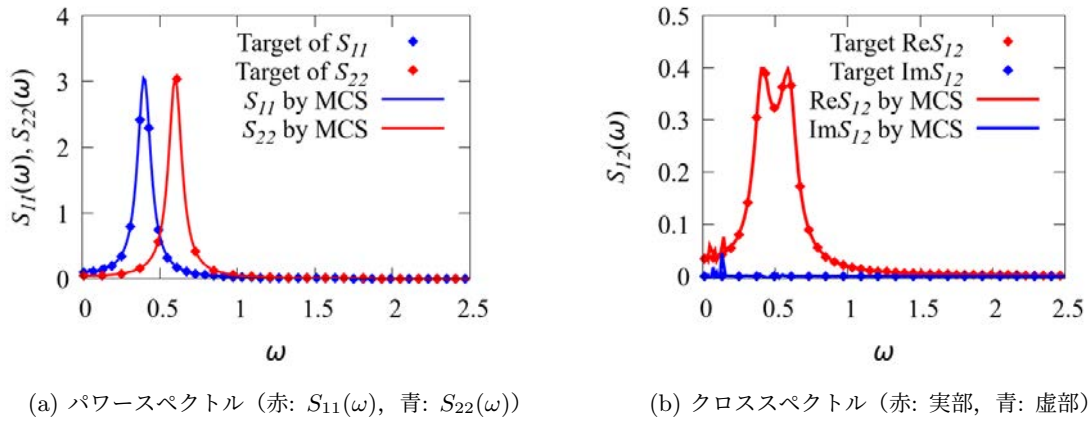


図 6.7 Case3 の場合の式 (6.2) および (6.3) から生成した標本関数のパワースペクトルとクロススペクトル (◇: 実現したいパワースペクトルまたはクロススペクトル, 実線: 生成した標本関数のパワースペクトルまたはクロススペクトル)

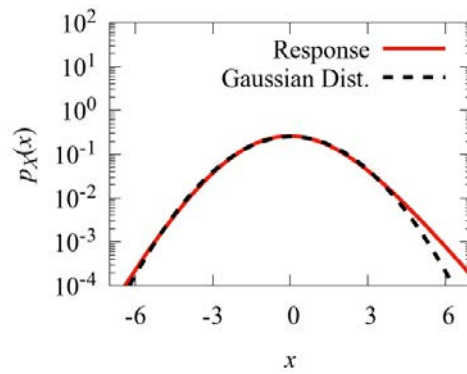
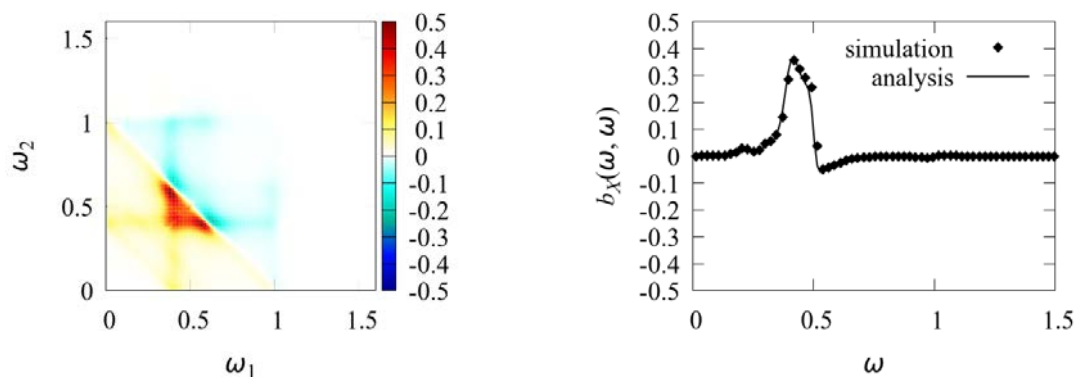


図 6.8 Case3 の場合の応答の確率密度関数 (赤実線: シミュレーション解, 黒破線: 赤実線と同一の平均, 分散のガウス分布)



(a) $\omega_1 - \omega_2$ 平面上の様子 ($\omega_1 \leq \omega_2$ にはシミュレーション解を, $\omega_2 < \omega_1$ には近似解析解をプロットしている)

(b) 直線 $\omega_1 = \omega_2$ 上の様子

図 6.9 Case3 の場合の規格化されたバイスペクトルの実部 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の近似解析解とシミュレーション解の比較.

6.5 結言

本章では、同時励振系の係数励振と外部励振の相関が任意のクロススペクトルで表現されるガウス性非白色ノイズでモデル化される場合を考え、応答のバースペクトルの近似解析手法を提案した。提案手法では、まず、ガウス性入力を周波数領域で離散化し、ランダム位相を含む複素指数関数の重ね合わせで表現した。ここで、任意のクロススペクトルを有する励振を表現するために、前章とは異なり、外部励振について、係数励振と独立な要素と相関を有している要素をわけた表現方法を採用した。具体的には、係数励振と同一のランダム位相を含む項と、係数励振と独立なランダム位相を含む項にわけて記述した。そのような入力に対する応答の近似解を、摂動法を用いて求めた。そして、摂動法による応答の近似解析解の3次キュムラントを求めたのち、離散的な周波数成分の刻み幅を0に近づける極限を考え、バースペクトルと3次キュムラントの関係から、応答のバースペクトルの近似解析解を求めた。

特性の大きく異なる3組の励振に対して提案手法を適用し、モンテカルロシミュレーションから得られたバースペクトルと比較することで、手法の有用性を確認した。いずれの場合においても、バースペクトルのピークの位置や符号などの、応答の確率密度関数の非対称性に大きな影響を与える重要な特性をよく捉えることができた。また、応答の非対称性は係数励振が存在することで初めて生じる特徴であるが、近似解析解から、応答の非対称性の周波数領域における分布は、係数励振よりも外部励振のパワースペクトルからより大きな影響を受けることが明らかになった。

第 7 章

係数励振と外部励振の相関係数が応答歪度に与える影響の調査

7.1 緒言

本章では、非白色な係数励振と外部励振の相関係数が応答の非対称性に与える影響を調査する。係数励振と外部励振が白色ノイズでモデル化される場合、2つの励振の相関は相関係数によって規定できる。そして、応答の非対称性の向きと強さは、その2つの励振の相関係数の符号と大きさによって変化することが同時励振系に関する先行研究における数値計算結果からわかっている [59, 61, 53]。もし応答の確率密度関数の非対称性の向きや大きさに対して誤った評価をしてしまうと、ある方向への応答に対しては大きな応答を示す確率を過小評価し、それとは異なる方向への応答については過小評価をしてしまう、といった誤った結果が導かれることとなる。そのため、先行研究で得られた、2つの白色励振の相関係数に依存した応答の非対称性の大きさや向きの変化に関する知見は重要なものである。入力为非白色ノイズの場合について考えると、(i)2つの励振が独立な場合は応答に非対称性は現れないこと [62]、(ii)2つの励振が同一の場合は応答に様々な非対称性が現れること（本論文第5章）はわかっている。これら (i) と (ii) の2つの状況での相関係数は、それぞれ0と1である。係数励振と外部励振が非白色ノイズで評価される場合も、相関係数は応答の非対称性に大きな影響を与えると予想できる。しかし、この点に関しては、前述したとおり相関係数が0と1の、特別な場合の知見しか得られておらず、その間の、より実際の励振現象でみられる様々な相関係数を示す場合に対する、応答の非対称性についてはまだ明らかになっておらず、調査が必要である。

本章では、前章に続き係数励振と外部励振の相関をクロススペクトルで与える。そして、2つの励振のパワースペクトルは同一で、クロススペクトルとしてそのパワースペクトルに相関係数をかけたものを考える。相関係数は-1から1の間の実数を取り、この入力モデルは、相関係数が0の場合は係数励振と外部励振が独立な場合に相当する。また、相関係数が1の場合は、第5章で考えた、2つの励振が同一な場合に相当する。この相関係数が応答のバイスペクトルと歪度に与える影響を調査する。まず、前章で求めた、係数励振と外部励振が任意のクロススペクトルを有する場合の応答のバイスペクトルの近似解析解を用いて、クロススペクトルが係数励振に比例する場合の、応答の2次の中心モーメントの1.5乗で規格化されたバイスペクトルの近似解析解と、応答歪度の近似解析解を求める。そして、数値計算例において、モンテカルロシミュレーションによって求めた応答バイスペクトルと応答歪度と比較することで、近似解析解の有効性を確認する。そして、この近似解析解を用いて、応答の歪度を構成する応答の2次の中心モーメントと3次の中心モーメントに入力の相関係数が与える影響の違いと、相関係数に依存した応答の歪度の変化に対して考察する。

7.2 解析モデル

第5章と第6章に続き本章でも、定常で相関を有するガウス性非白色係数励振と外部励振を同時に受ける1自由度系の定常応答を考える。このとき、運動方程式は次の通り。

$$\ddot{X} + 2\zeta\dot{X} + X = U_1(t) + \varepsilon XU_2(t) \quad (7.1)$$

ここで、式中の $X(t)$ は変位応答、 ζ は減衰比であり、本研究では $\zeta = 0.05$ とする。 t は系の不減衰固有角振動数で無次元化した時間を表し、ドット記号はこの無次元時間での微分を表す。 $U_1(t)$ と $U_2(t)$ は、相関を有する平均0の定常ガウス性非白色ノイズである。 $U_1(t)$ のパワースペクトルを $S_{11}(\omega)$ 、 $U_2(t)$ のパワースペクトルを $S_{22}(\omega)$ とする。 $U_1(t)$ と $U_2(t)$ のクロススペクトルを $S_{12}(\omega)$ とする。系に加わる係数励振の大きさを支配するパラメータである ε については、系が安定となる小さい ε を対象とし、 $\varepsilon = 0.1$ とする。

本章では、パワースペクトル $S_{11}(\omega)$ 、 $S_{22}(\omega)$ とクロススペクトル $S_{12}(\omega)$ として、次の場合を考える。

$$\begin{aligned} S_{11}(\omega) &= S_{22}(\omega) = S_U(\omega) \\ S_{12}(\omega) &= \gamma S_U(\omega) \end{aligned} \quad (7.2)$$

このとき、

$$\frac{E[U_1(t)U_2(t)]}{\sqrt{E[U_1^2(t)]E[U_2^2(t)]}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_{12}(\omega)d\omega}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S_{11}(\omega)d\omega \int_{-\infty}^{\infty} S_{22}(\omega)d\omega}} = \frac{\gamma \int_{-\infty}^{\infty} S_U(\omega)d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_U(\omega)d\omega} = \gamma \quad (7.3)$$

となり、 γ は係数励振と外部励振の相関係数である。相関係数は -1 から 1 の間の値をとり、その絶対値は各時刻における2つの励振の相関の強さを表す [81]。すなわち、 $\gamma = 1$ の場合、係数励振と外部励振は強い正の相関を有する。また、 $\gamma = 0$ の場合、係数励振と外部励振は相関を有さず、 $\gamma = -1$ の場合、2つの励振は強い負の相関を有する。本章で考えている $U_1(t)$ と $U_2(t)$ については、 $\gamma = 0$ は、係数励振と外部励振はいずれもガウス過程であることから、2つの励振が独立な場合に相当する。そして、 $\gamma = 1$ の場合は、第5章で考慮した、2つの励振が同一な場合に相当する。従って、 γ を様々に変化させることで、係数励振と外部励振が同一な場合と独立な場合の間の、様々な相関を考慮することができる。このもとで、この相関係数の変化が応答の非対称性に与える影響を調査する。

本節では、 $S_U(\omega)$ として、第5章および第6章の計算例3で用いたものと同様の、次の場合を考える。

$$S_U(\omega) = \frac{E[U^2]}{\pi} \frac{\alpha(\alpha^2 + \rho^2 + \omega^2)}{(\alpha^2 + \rho^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \quad (7.4)$$

帯域幅パラメータ α と、卓越振動数パラメータ ρ を変化させることで、様々なピーク位置、帯域幅を有するパワースペクトル形状を考えることができる。考慮する α と ρ の範囲については、第5章と同様である。

7.3 応答歪度の近似解析解

係数励振と外部励振のパワースペクトルとクロススペクトルが式 (7.2) で定義される場合の、前章で求めた応答の2次の中心モーメント $E[(X(t) - E[X])^2]$ の近似解析解は次の通り。

$$E[(X(t) - E[X])^2] \approx \int_{-\infty}^{\infty} \left[S_U(\omega) |H(\omega)|^2 + \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} (g_{F^I F^I}(\omega, \omega') + g_{F^0 F^{II}}(\omega, \omega') + g_{F^0 F^{II}}(-\omega, \omega')) d\omega' \right] d\omega \quad (7.5)$$

ここで

$$\begin{aligned} g_{F^I F^I}(\omega, \omega') &= |H(\omega)|^2 (S_U(\omega) S_U(\omega - \omega') |H(\omega')|^2 \\ &\quad + \gamma^2 S_U(\omega') S_U(-\omega + \omega') H(\omega') H(-\omega + \omega')) \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$g_{F^0 F^{II}}(\omega, \omega') = |H(\omega)|^2 (S_U(\omega)S_U(\omega')H(-\omega)H(-\omega + \omega') + \gamma^2 S_U(\omega)S_U(\omega')(H(\omega')H(-\omega + \omega') + H(\omega')H(0))) \quad (7.7)$$

である． γ の影響を強調する目的で，これを次のように表す．

$$E[(X(t) - E[X])^2] \approx A + \gamma^2 B \quad (7.8)$$

式中の A , B は

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{\infty} S_U(\omega) |H(\omega)|^2 \left[1 + \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ S_U(\omega - \omega') |H(\omega')|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + S_U(\omega') (H(-\omega)H(-\omega + \omega') + H(\omega)H(\omega + \omega')) \right\} d\omega' \right] d\omega \\ B &= \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_U(\omega') H(\omega') \left\{ S_U(-\omega + \omega') H(-\omega + \omega') \right. \\ &\quad \left. + S_U(\omega) (H(-\omega + \omega') + H(\omega + \omega') + 2H(0)) \right\} d\omega' d\omega \end{aligned} \quad (7.9)$$

で計算でき，また， A は係数励振と外部励振が独立な場合の応答の 2 次の中心モーメントの近似解に相当する量である．

応答のバースペクトルの近似解析解は

$$B_X(\omega_1, \omega_2) \approx \varepsilon [\kappa(\omega_1, \omega_2) + \kappa(\omega_1, -(\omega_1 + \omega_2)) + \kappa(-(\omega_1 + \omega_2), \omega_2)] \quad (7.10)$$

となる．ここで

$$\kappa(\omega_1, \omega_2) = \gamma H(\omega_1)H(\omega_2)H(-(\omega_1 + \omega_2))S_U(\omega_1)S_U(\omega_2) \left[H(-\omega_1) + H(-\omega_2) \right] \quad (7.11)$$

である．式 (7.10) を積分することで，応答の 3 次の中心モーメントの近似解析解が求まる．

$$E[(X(t) - E[X])^3] \approx \gamma C \quad (7.12)$$

式中の C は次の通り．

$$\begin{aligned} C &= \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega_1)H(\omega_2)H(-(\omega_1 + \omega_2)) \\ &\quad \times \left[H(-\omega_1)S_U(\omega_1)S_U(\omega_2) + H(-\omega_2)S_U(\omega_1)S_U(\omega_2) \right. \\ &\quad \left. + H(-\omega_1)S_U(\omega_1)S_U(-(\omega_1 + \omega_2)) + H(\omega_1 + \omega_2)S_U(\omega_1)S_U(-(\omega_1 + \omega_2)) \right. \\ &\quad \left. + H(\omega_1 + \omega_2)S_U(\omega_2)S_U(-(\omega_1 + \omega_2)) + H(-\omega_2)S_U(\omega_2)S_U(-(\omega_1 + \omega_2)) \right] d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned} \quad (7.13)$$

式 (7.8), (7.12) より，応答の歪度 $\beta(\gamma)$ が次のように求まる．

$$\beta(\gamma) = \frac{\gamma C}{\left(\sqrt{A + \gamma^2 B} \right)^3} \quad (7.14)$$

7.4 数値計算例

本節では，モンテカルロシミュレーションの結果と比較することで，前節で求めた近似解析解の妥当性を確認する．規格化に用いる 2 次の中心モーメントを求める際に必要な式 (7.9) や，応答歪度を計算する際に必要な式 (7.13) 中の数値積分を解析的に求めることはできない．そのため，台形則によって数値積分を行った．モンテカルロシミュレー

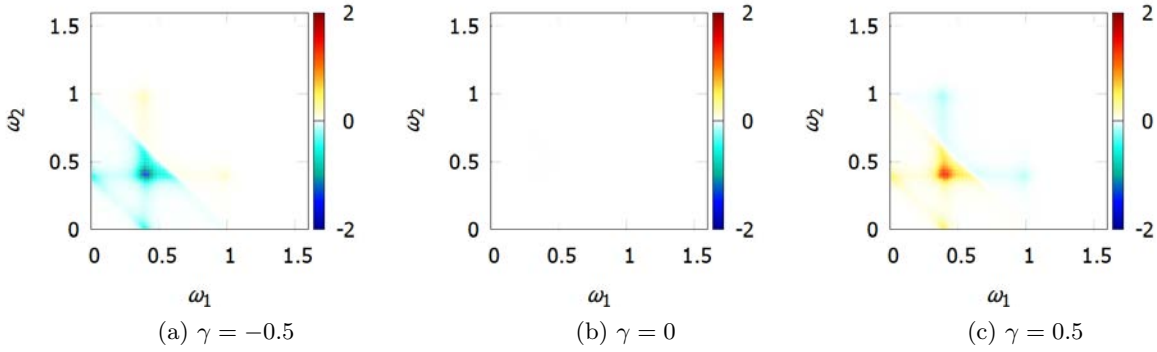


図 7.1 $\alpha = 0.05$, $\rho = 0.4$ の場合のシミュレーション解と近似解析解の規格化されたバイスペクトルの実部 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の比較 ($\omega_1 \leq \omega_2$ にはシミュレーション解を, $\omega_2 < \omega_1$ には近似解析解をプロットしている).

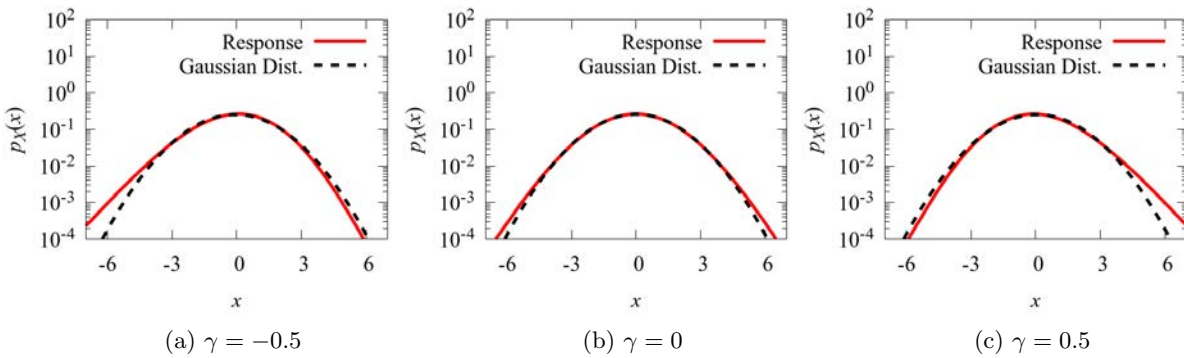


図 7.2 $\alpha = 0.05$, $\rho = 0.4$ の場合のシミュレーションによって求めた応答の確率密度関数.

シミュレーションを行う際のパラメータとしては、標本関数の数は 100,000 本、1 本の標本関数中のデータ点数を 2^{19} 、時間刻み幅を 0.001 とした。相関を有する係数励振と外部励振の標本関数の生成には、式 (6.2), (6.3) を用いた。

まず、式 (7.8), (7.10) から計算できる、応答の 2 次の中心モーメントの 1.5 乗で規格化された応答バイスペクトルの実部 $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の近似解析解の精度を、数値シミュレーション解と比較することで確認する。図 7.1 は、 $\alpha = 0.05$, $\rho = 0.4$, $\gamma = -0.5, 0, 0.5$ の場合の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ である。バイスペクトルの対称性より、 $0 \leq \omega_1, \omega_2$ なる領域では、バイスペクトルは直線 $\omega_1 = \omega_2$ に対して線対称である。従って、 $\omega_1 \leq \omega_2$ にはシミュレーション解を、 $\omega_2 < \omega_1$ には近似解析解をプロットして、近似解析解とシミュレーション解を比較する。また、図 7.2 は、モンテカルロシミュレーションによって求めた応答の確率密度関数である。これと $b_X(\omega_1, \omega_2)$ と比較することで、得られた応答バイスペクトルの特徴と応答の確率密度関数の非対称性が対応していることを示す。図中の赤実線が応答の確率密度関数、黒破線は赤実線と同じ平均と分散を持つガウス分布である。

図 7.1 の通り、近似解析解とシミュレーション解は、ピークの位置や符号といった特徴がよく一致しており、近似解析解によって $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の形状がよく再現できていることがわかる。 $\gamma = 0$ 、つまり係数励振と外部励振が独立な場合、図 7.1(b) の $b_X(\omega_1, \omega_2)$ は、全ての (ω_1, ω_2) に対して 0 となる。これに対応して、図 7.2(b) の通り、応答の確率密度関数には非対称性は見られない。係数励振と外部励振が独立な白色ノイズの場合、応答確率密度関数は対称性を有するという結果は、先行研究で得られた結果と一致する [62]。 $\gamma = \pm 0.5$ のとき、図 7.1(a) と (c) より、応答バイスペクトルの形状は変化せず、その値の符号のみが反転している。これに対応して、 $\gamma = -0.5, 0.5$ の場合の応答の確率密度関数の非対称性は、その強さは変わらず向きが逆向きとなっている。

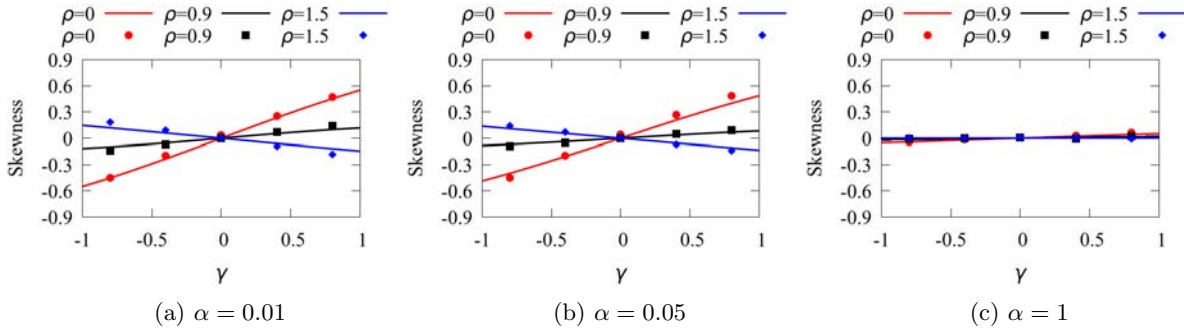


図 7.3 近似解析解から求めた応答歪度と α , ρ , γ の関係およびシミュレーション解との比較（実線：近似解析解，記号：シミュレーション解）。

次に、相関係数 γ と、応答の非対称性の指標である応答歪度の関係を調査する。帯域幅パラメータは $\alpha = 0.01, 0.05, 1$ の 3 種類、卓越振動数パラメータは $\rho = 0, 0.9, 1.5$ の 3 種類を考え、計 9 種類のスペクトル形状に対して応答歪度を求めた。これは、第 5 章で得られた、 $\gamma = 1$ の場合に対応する 2 つの励振が同一の場合の応答歪度の変化を考慮して、様々な入力卓越振動数、帯域幅に対する知見が得られるよう選んだ。また、モンテカルロシミュレーションとしては、上記の 9 種類の励振のパワースペクトル形状に対して、 $\gamma = 0, \pm 0.4, \pm 0.8$ の 5 種類の場合に対して応答歪度を求めた。こうして求めた応答歪度の近似解析解とシミュレーション解の比較が図 7.3 である。各図は帯域幅パラメータ α 毎にまとめており、赤で示した実線と記号が $\rho = 0$ の場合の、黒で示した実線と記号が $\rho = 0.9$ の場合の、青で示した実線と記号が $\rho = 1.5$ の場合の結果である。実線が式 (7.14) を用いて求めた近似解析解、各記号がシミュレーション解である。図より、近似解析解は、 γ に依存した応答歪度の変化傾向をよく再現できている。

7.5 相関係数が応答の非対称性に与える影響の考察

本節では、相関係数の正負によって、応答の確率密度関数の非対称性が変化する理由を、パワースペクトルとバイスペクトルの両方の観点から考察する。パワースペクトルの観点から考察する際は、5.3.6 項で導入した $Y(t)$ を用いる。5.3.6 項では、同時励振系を、 $Y(t) = U_1(t) + \varepsilon X_0 U_2(t)$ なる非ガウス入力を受ける線形系で近似し、応答に現れる非対称性を考察した。ここで、 $X_0(t)$ は、 $U_1(t)$ を入力として持つ線形系の定常応答である。いま、 $U_1(t)$ と独立な、平均 0 分散 1 でパワースペクトルが $S_U(\omega)$ である定常ガウス過程 $U_3(t)$ を導入する。ここで、確率過程 $Z(t) = \gamma U_1(t) + \sqrt{1 - \gamma^2} U_3(t)$ は、

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= \gamma E[U_1(t)] + \sqrt{1 - \gamma^2} E[U_3(t)] = 0 \\ E[Z(t)Z(t + \tau)] &= \gamma^2 E[U_1(t)U_1(t + \tau)] + (1 - \gamma^2) E[U_3(t)U_3(t + \tau)] \\ E[Z(t)U_1(t + \tau)] &= \gamma E[U_1(t)U_1(t + \tau)] \end{aligned} \quad (7.15)$$

を満たす。 $U_1(t)$, $U_3(t)$ のパワースペクトルが共に $S_U(\omega)$ であることとパワースペクトルは自己相関関数のフーリエ変換で定義されることから、式 (7.15) 第 2 式は $Z(t)$ のパワースペクトルが $S_U(\omega)$ であることを表している。同様に、式 (7.15) 第 3 式から、 $Z(t)$ と $U_1(t)$ のクロススペクトルは、 $\gamma S_U(t)$ である。従って、 $U_2(t) = Z(t) = \gamma U_1(t) + \sqrt{1 - \gamma^2} U_3(t)$ と書くことができる。このもとで $Y(t)$ は、

$$Y(t) = U_1(t) + \varepsilon X_0(t)(\gamma U_1(t) + \sqrt{1 - \gamma^2} U_3(t)) \quad (7.16)$$

となる。ここで、 $X_0(t)U_3(t)$ は、 $U_1(t)$ と $U_3(t)$ が独立であることから、5.3.6 項での議論より非ガウス入力 $Y(t)$ の非対称性には影響を与えない。次に、 $\gamma X_0(t)U_1(t)$ を見ると、5.3.6 項での議論より、この項が $Y(t)$ に非対称性をもたら

すが、 γ が係数として存在するので、 $Y(t)$ の非対称性の向きは、相関係数 γ の符号によって変化する。以上より、相関係数 γ の正負によって非ガウス入力 $Y(t)$ の非対称性の向きが変化し、それに対応して応答 $X(t)$ の向きも変化するとと言える。

相関係数の正負によって、応答の確率密度関数の非対称性が変化する理由は、式 (7.5) - (7.14) を用いることで、バースペクトルの観点から考察することもできる。式 (7.5), (7.6), (7.7) から、応答の 2 次の中心モーメントにおける 2 つの励振の相関係数 γ の影響は、 γ^2 で現れる。これは、応答の 2 次の中心モーメントは、相関係数の符号には影響を受けないことを表している。一方、バースペクトルの近似解析解である式 (7.10) 中の $\kappa(\omega_1, \omega_2)$ の定義式 (7.11) を見ると、 γ が式全体にかかる係数として現れており、応答のバースペクトルが係数励振と外部励振の相関係数に比例している。そのため、係数励振と外部励振が独立な場合に相当する $\gamma = 0$ では応答のバースペクトル、そしてバースペクトルを積分して得られる 3 次中心モーメントは 0 となり、応答に非対称性は現れない。そして、応答歪度の周波数領域における分布である規格化したバースペクトル $b_X(\omega_1, \omega_2)$ は、図 7.1(a)-(c) の通り、相関係数の値に依存して形状は保ったまま各ピークの高さが一様に増減し、また、相関係数の正負の変化に従って $b_X(\omega_1, \omega_2)$ の符号も変化する。 $Y(t)$ を用いた考察では、 $\gamma X_0(t)U_1(t)$ を導いた後、5.3.6 項で行ったような議論を経て応答に非対称性が現れることがわかる。一方、バースペクトルを用いれば、図 7.1 の通り、相関係数 γ によって非対称性の周波数領域における分布の符号が反転することが可視化され、 γ の符号による応答の非対称性の向きの変化がより捉えやすくなっている。

また、2 次の中心モーメントの式 (7.5) の積分中の第 2 項は、係数励振が存在することに起因する項であるが、式 (7.6), (7.7) より、係数励振と外部励振が独立な場合である $\gamma = 0$ としたときもこの項は 0 にはならない。従って、係数励振と外部励振の間の相関の有無に関わらず、応答の 2 次の中心モーメントには係数励振が存在することによる影響が現れる。一方、 $\gamma = 0$ のとき、バースペクトルは 0 となる。これは、係数励振と外部励振が独立な場合、応答の確率密度関数に非対称性は現れないことを意味する。これは、係数励振と外部励振の独立性の有無の影響が、2 次の統計量 (2 次の中心モーメント) と 3 次の統計量 (バースペクトル) で全く異なることを表している。

また、応答歪度の近似解析解 $\beta(\gamma)$ の γ についての微分は、式 (7.14) から次のように書ける。

$$\frac{d\beta}{d\gamma} = \frac{C}{(\sqrt{A})^3} \frac{(1 - 2(B/A)\gamma^2)}{(1 + (B/A)\gamma^2)^{5/2}} \quad (7.17)$$

$-1 \leq \gamma \leq 1$ であることを考えると、式 (7.17) より、 $B/A < 1/2$ のとき、応答歪度は相関係数 γ に対して単調に変化し、 $\gamma = \pm 1$ で応答の非対称性は最大となることがわかる。さらに、 A と B について、 $|B/A| \ll 1$ とできる場合、 $d\beta/d\gamma$ は定数と見なすことができ、 γ に対して応答歪度は線形に変化することがわかる。ここで、式 (7.9) から係数励振の大きさを支配する微小量 ε について A は 0 次の項、 B は 2 次の項であることを考えると、 $|B/A| \ll 1$ として良い。つまり、相関係数 γ と応答歪度は近似的に線形な関係にあると言える。図 7.3 を見ても、実線で表した近似解析解は γ に対して線形なグラフとなっており、また、シミュレーションによって求めた歪度もほぼ 1 直線上に並んでいることがわかる。

また、図 7.3 で確認できる直線の傾きは、 α と ρ に依存して様々に変化する。ここで、式 (7.17) を見ると、様々に変化する図 7.3 中の直線の傾きは、 $C/(\sqrt{A})^3$ によって決まることがわかる。これは、2 つの励振が同一の場合の応答の 3 次中心モーメントを、独立な場合の応答の 2 次の中心モーメントの 1.5 乗で規格化したものである。他方、第 5 章で得られた応答歪度の近似解析解は、式 (7.14) で $\gamma = 1$ とした $C/(\sqrt{A+B})^3$ で得られる。 $C/(\sqrt{A+B})^3$ と式 (7.17) で現れた $C/(\sqrt{A})^3$ は異なるが、 $|B/A| \ll 1$ であるため、入力の卓越振動数や帯域幅に依存した変化傾向はほぼ同様である。図 7.4 は、各 α と ρ の場合における $C/(\sqrt{A})^3$ と $C/(\sqrt{A+B})^3$ の比較である。図より、この 2 つの値はほぼ等しいことが確認できる。従って、第 5 章で求めた $\gamma = 1$ の場合の応答歪度 $\beta(1)$ を用いて、

$$\beta(\gamma) \approx \beta(1)\gamma \quad (7.18)$$

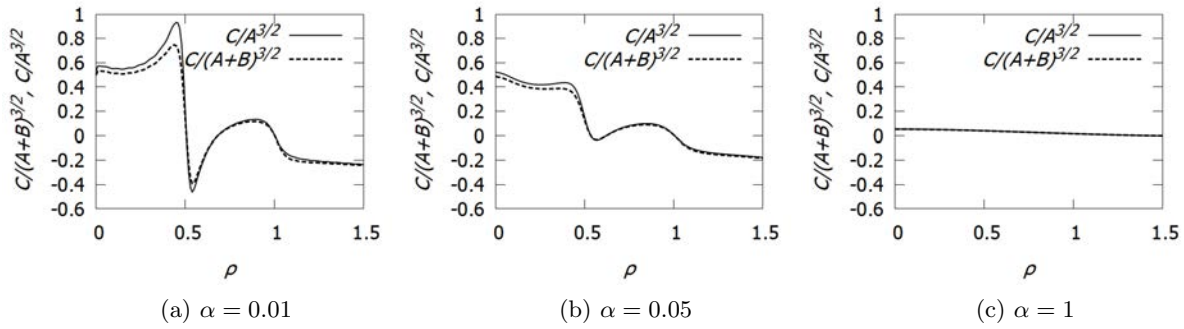


図 7.4 各 α と ρ に対する $C/(\sqrt{A})^3$ と $C/(\sqrt{A+B})^3$ の比較 (実線: $C/(\sqrt{A})^3$, 破線: $C/(\sqrt{A+B})^3$).

と近似的に書くことができる. この $\beta(1)$ は, 図 7.4 で示した通り, 入力パワースペクトルの卓越振動数と帯域幅に依存して, 複雑に大きく変化する.

7.6 結言

本章では, 係数励振と外部励振のパワースペクトルは同一で, クロススペクトルはパワースペクトルに相関係数を乗じたものを考え, 相関係数が応答の歪度にどのような影響を与えるかを調査した. 本章で用いた入力, 先行研究で対象とされた 2 つの励振が独立の場合と, 第 5 章で考えた 2 つの励振が同一の場合を含んだ, より広い範囲の入力モデルである. まず, 前章で提案した手法によって, 応答の 2 次の中心モーメントの 1.5 乗で規格化されたバイスペクトルと応答歪度の近似解析解を求め, その精度をモンテカルロシミュレーション解と比較することで, 近似解析解の妥当性を確認した. その後, 求めた近似解析解から, 次のことがわかった.

- 2 次の中心モーメントは, 相関係数の大きさには依存するがその符号からは影響を受けない. 一方, 応答バイスペクトルおよび応答の歪度の符号は, 相関係数の符号に従って変化する. このように, 応答の 2 次の統計量と 3 次の統計量で, 相関係数が与える影響が大きく異なる.
- 応答歪度は, 相関係数に対しておおよそ線形に変化する. その直線の傾きは, 第 5 章で求めた, 2 つの励振が同一な場合の応答歪度で近似できる. さらに, その傾きは入力パワースペクトルの卓越振動数や帯域幅に依存して様々に変化する.

第 8 章

結言

以下に、各章で行った研究と得られた結果について述べる。

第 2 章: 複素非整数次モーメントを用いた剛性と減衰に非線形性を持つ不規則励振系の過渡応答解析

本章では、減衰項と剛性項の両方に非線形性が含まれる系にガウス性白色ノイズが加わる場合に対して、過渡応答の確率密度関数の近似解析手法を提案した。提案手法では、まず、等価線形化法を適用することで、非線形剛性の影響を考慮した等価固有角振動数を求めた。この等価固有角振動数を用いることで、確率平均化法から、応答振幅の確率密度関数を支配する Fokker-Planck 方程式を得た。この Fokker-Planck 方程式をメルン変換することで、応答振幅の CFM の支配方程式を導出した。導出した CFM の支配方程式には、3 つの大きな特徴がある。(i) 幅広いクラスの系に対して、CFM の支配方程式は直ちに求まる。(ii) 解析精度を支配する解析パラメータを変化させた場合も、対応する CFM の支配方程式は直ちに求まる。(iii) CFM の支配方程式は線形連立常微分方程式であるので、過渡状態の CFM も容易に得ることができる。導出した CFM の支配方程式から得られた応答振幅の CFM に逆メルン変換を施すことで、過渡応答の確率密度関数を求めた。

数値計算例として、3 種類の性質の大きく異なる非線形系に対して提案手法を適用した。それらの計算結果から、提案手法による近似解析解と、モンテカルロシミュレーション解が確率密度関数の裾部を含めてよく一致することが確認できた。また、確率密度関数の幅が狭くなる傾向や応答のリミットサイクル挙動の影響による双峰性といった、応答の顕著な非ガウス性を提案手法によって捉えることができることを示した。

第 4 章以降は、不規則励振系を対象に、その応答の非ガウス性、特に非対称性について、バースペクトルを用いて調査した。対象とする系については、応答の非ガウス性が非ガウス入力に起因する場合と、相関性を有する係数励振と外部励振に起因する場合の 2 種類の場合について考えた。

第 4 章: バースペクトルに着目した非ガウス性励振が応答の非対称性に与える影響の考察

Cai and Lin モデルで表現される非ガウス励振を受ける 1 自由度線形系の応答について、バースペクトルとクロスバースペクトルを用いることで、入力の非ガウス性が応答に与える影響を調査した。Cai and Lin モデルは、直流成分が

卓越するパワースペクトルと、任意の非ガウス性確率密度関数を持つような幅広い非ガウス過程を表現できる。その Cai and Lin モデルに対応するバイスペクトルを導出した。導出したバイスペクトルより、Cai and Lin モデルの周波数領域における非ガウス性の特徴として、次がわかった。

- 帯域幅パラメータが小さい場合は、モデルの非ガウス性の情報は直流成分に集中する。
- 帯域幅パラメータが大きくなるに従って、モデルの非ガウス性の情報は、周波数領域全体に広く分布するようになる。

さらに、導出したバイスペクトルより求まる入力と応答のクロスバイスペクトルを計算し、次の知見を得た。

- 入力の帯域幅が系の周波数応答関数の帯域幅と比べて狭い場合、直流成分に集中する入力の非ガウス性の情報が変位応答の直流成分によく伝達される。結果的に、変位応答の確率密度関数は、入力の確率密度関数と近い形状をとる。一方、速度応答には、その周波数応答関数の特徴に起因して、入力の直流成分の非ガウス性はほとんど伝達されない。従って、速度応答の確率密度関数は、ガウス分布に近い形状をとる。
- 入力の帯域幅が系の周波数応答関数と比べて広い場合、クロスパワースペクトルに顕著に現れる共振周波数成分は、入力の非ガウス性の変位・速度応答への伝達・増幅にはほとんど寄与しない。従って、帯域幅が広い場合、変位応答と速度応答の確率密度関数は、いずれもガウス分布に近い形状をとる。

以上のように、従来研究のようなパワースペクトルに着目した研究では知ることのできなかった、周波数領域における非ガウス性の入出力関係の構造を、バイスペクトルとクロスバイスペクトルを用いることで明らかにした。

第5章から第7章までは、係数励振と外部励振が同時に系に加わることに起因して応答の確率密度関数に非対称性が現れる場合について考えた。具体的には、1自由度系に相関を有するガウス性非白色係数励振と外部励振が加わる例を考え、入力のパワースペクトルや相関係数が応答の確率密度関数の非対称性に与える影響を調査した。現実の係数・外部励振のパワースペクトルと相関としては様々なものが考えられるが、先行研究では、2つの励振が独立な場合や、パワースペクトルが理想的な数学モデルである白色ノイズである場合、また、相関性と非白色性が考慮されたがパワースペクトルの種類が限定的である場合に対する知見しか得られていなかった。そこで、係数・外部励振が相関性を有する非白色ノイズでモデル化される場合の応答の確率密度関数に現れる非ガウス性、特に非対称性について、段階的に調査した。第5章では、まず、2つの励振の相関性として最も単純な、2つの励振が同一な場合を考えた。そのうち第6章では、相関性についてより広いクラスの入力を考えるために、係数励振と外部励振の相関性として任意のクロススペクトルを有する場合を考慮し、その場合の応答のバイスペクトルの近似解析手法を提案した。第7章では、第5章で考えた入力を拡張した、係数励振と外部励振のクロススペクトルが相関係数に比例する場合を考え、第6章の手法を活用しつつ、その相関係数が応答の歪度に与える影響を調査した。各章の研究内容と、得られた知見の詳細を以下に述べる。

第5章：同一な非白色ノイズによる係数・外部同時励振下の系の応答非対称性のバイスペクトル解析

非白色で相関を有する不規則な係数励振と外部励振を同時に受ける系を対象に、入力のパワースペクトル形状が応答の確率密度関数の非対称性に与える影響を調査した。入力のパワースペクトル形状としては、ピークが1つ存在し、帯域幅パラメータと卓越振動数パラメータを設定することで、ピーク的位置やそのピーク周りの帯域幅を様々なに変化させることができるものを選んだ。多様なパワースペクトル形状を考え、モンテカルロシミュレーションによって応答の確

率密度関数を求めた。また、応答の確率密度関数の非対称性の指標として歪度を求めた。モンテカルロシミュレーションによって、以下のことが分かった。

- $\alpha = 0.01$ に代表される入力帯域幅が系の帯域幅と比較して狭い場合、応答に現れる非対称性は入力卓越振動数の位置によって大きく変化する。入力卓越振動数が直流成分付近にある場合、応答の確率密度関数は正の歪度に対応する非対称性を示した。一方、入力卓越振動数が系の共振周波数より大きい場合、応答の確率密度関数は、負の歪度に対応する非対称性を示した。その間の卓越振動数における歪度についても、卓越振動数に対して単調に変化するのではなく、複雑な変化を示した。
- $\alpha = 1$ に代表される入力帯域幅が系の帯域幅と比較して広い場合、卓越振動数によらず、応答に非対称性はほとんど現れなかった。

以上で得られた入力のパワースペクトル形状が応答の非対称性に与える影響について、確率過程の非対称性の周波数領域における分布を可視化するバイスペクトルを用いて考察を行った。バイスペクトルと応答歪度を関連付ける目的で、考察には応答の2次の中心モーメントの1.5乗で規格化したバイスペクトルの実部を用いた。まず、摂動法を用いて、考察に用いる規格化したバイスペクトルの近似解析解を導出した。こうして得られた近似解析解は、シミュレーションから得られた結果とよく一致した。そして、バイスペクトルを用いた考察より、以下のことがわかった。

- 規格化されたバイスペクトルのピークの大きさや符号の変化によって、入力パワースペクトル形状の変化に依存した応答歪度の変化に対して説明を与えることができた。
 - $\alpha = 0.01$ に代表される、入力帯域幅が系の帯域幅と比較して狭い場合、バイスペクトルには、入力のパワースペクトルの卓越振動数とその第2高調波の間、同じく入力卓越振動数と直流成分の間、卓越振動数と共振周波数成分の間における依存性を示すピークが存在する。それらのピークの大きさと符号の変化にともなって、応答歪度は複雑に変化する。
 - $\alpha = 1$ に代表される、入力帯域幅が系の帯域幅と比較して広い場合、バイスペクトルは入力卓越振動数によらず、正と負の低いピークをもつほぼ同じ形状となる。これらのピークが打ち消しあい、歪度はほぼ0となる。
- 同時励振系を非ガウス入力を受ける線形系に置き換えて考え、その非ガウス入力の周波数成分の依存関係と、応答の各周波数成分の振幅から、応答バイスペクトルのピークの大きさと位置について説明した。
- 応答のバイスペクトルの符号は、近似解析解に含まれる3周波数成分間の位相遅れの差に依存して変化することを示した。

第6章: 任意のクロススペクトルを考慮した係数・外部同時励振系の応答バイスペクトル解析

第6章では、同時励振系の係数励振と外部励振の相関が任意のクロススペクトルで表現されるガウス性非白色ノイズでモデル化される場合を考え、応答のバイスペクトルの近似解析手法を提案した。提案手法では、まず、ガウス性入力を周波数領域で離散化し、ランダム位相を含む複素指数関数の重ね合わせで表現した。その際、任意のクロススペクトルを有するガウス過程を表現するために、外部励振を係数励振と相関を持つ項と独立な項それぞれ分けて記述する方法を採用した。そのような入力に対する応答の近似解を、摂動法を用いて求めた。そして、摂動法による応答の近似解析解の3次キュムラントを求めたのち、離散的な周波数成分の刻み幅を0に近づける極限を考え、バイスペクトルと3次キュムラントの関係から、応答のバイスペクトルの近似解析解を求めた。

特性の大きく異なる 3 組の励振に対して提案手法を適用し、モンテカルロシミュレーションから得られたバースペクトルと比較することで、手法の有用性を確認した。いずれの場合においても、バースペクトルのピークの位置や符号などの、応答の確率密度関数の非対称性に大きな影響を与える重要な特性をよく捉えることができた。また、応答の非対称性は係数励振が存在することで初めて生じる特徴であるが、近似解析解から、応答の非対称性の周波数領域における分布は、係数励振よりも外部励振のパワースペクトルからより大きな影響を受けることが明らかになった。

第 7 章：係数励振と外部励振の相関係数が応答歪度に与える影響の調査

本章では、係数励振と外部励振の相関係数が応答の非対称性に与える影響の調査を目的に、2 つの励振のパワースペクトルは同一で、クロススペクトルはパワースペクトルに相関係数を乗じたものと考え、相関係数が応答の歪度にどのような影響を与えるかを調査した。この場合、相関係数を 0 とすれば、先行研究で対象とした 2 つの励振が独立な場合に、相関係数を 1 とすれば、第 5 章で考えた 2 つの励振が同一な場合に相当する。そのため、先行研究および第 5 章で考慮した場合を含んだ、より広いクラスの励振を対象とした。まず、第 6 章で提案した手法によって、応答の 2 次の中心モーメントの 1.5 乗で規格化されたバースペクトルと応答歪度の近似解析解を求め、その精度をモンテカルロシミュレーション解と比較することで、近似解析解の妥当性を確認した。その後、求めた近似解析解から、次のことがわかった。

- 2 次の中心モーメントは、相関係数の大きさには依存するがその符号からは影響を受けない。一方、応答バースペクトルおよび応答の歪度の符号は、相関係数の符号に従って変化する。このように、応答の 2 次の統計量と 3 次の統計量で、相関係数が与える影響が大きく異なる。
- 応答歪度は、相関係数に対しておおそ線形に変化する。その直線の傾きは、第 5 章で求めた、2 つの励振が同一な場合の応答歪度で近似できる。さらに、その傾きは入力パワースペクトルの卓越振動数や帯域幅に依存して様々に変化する。

今後の課題

最後に今後の課題について述べる。まず、第 4 章で考えた、応答の非対称性が入力非ガウス性に起因する場合について述べる。本研究では、系の減衰比を固定し、帯域幅パラメータによって特徴づけられる不規則入力の周波数領域における特性の変化が応答の確率密度関数に与える影響を、クロスバースペクトルの観点から考察を行った。一方、不規則入力の周波数特性を一つ定めた場合に、系の減衰の大小が応答に与える影響の調査も、安全な構造物の設計を念頭に置いた際、工学的には重要な問題である。系の減衰比は、周波数領域では、系の周波数応答の帯域幅に対応し、その大小によっても非ガウス性の伝達の様子は変化すると考えられる。このような減衰の変化の影響も、クロスバースペクトルを用いることで明らかにできると期待される。

次に、第 5 章から第 7 章で考えた、応答の非対称性が相関性を有する係数励振と外部励振が同時に系に加わることに起因する場合について述べる。まず、係数励振と外部励振が同一の場合、応答バースペクトルの符号の変化に関する考察は、バースペクトルの引数 ω_1 と ω_2 について $\omega_1 < 1$ かつ $\omega_2 < 1$ なる範囲を対象に行った (5.5.5 項)。この点について、より広い範囲のバースペクトルの変化に対して、パワースペクトルと周波数応答関数の大きさに注意しながら位相遅れの影響について整理し、考察する必要がある。また、第 6 章では、2 つの励振が任意のクロススペクトルを有する場合の、応答のバースペクトルの近似解析解を摂動法によって求めた。そして、第 7 章において、第 6 章の結果を活かして相関係数が応答の非対称性に与える影響を明らかにした。この点に関して、現実の励振現象はより多様なクロススペクトルを有するため、第 6 章の結果を活かしつつ、2 つの励振のクロススペクトルが応答の非対称性に与える影響

を調査する必要がある。また、第 5 章から第 7 章で共通して、応答の非ガウス性として変位応答の確率密度関数の非対称性を考えた。しかしながら、応答の平均閾値通過率を求める場合などは、変位応答と速度応答の両方の情報が必要となる。また、バースペクトルの虚部には、速度の確率密度関数の非対称性に関する情報が存在する。よって、入力のパワースペクトルに依存した速度応答の非対称性の変化についての調査や、それに対するバースペクトル解析が必要である。

最後に、本研究では、応答の非ガウス性として非対称性に限定して考えたが、応答の確率密度関数の裾の広さも、信頼性や安全性を考える上で重要である。確率密度関数の裾の様子にかかわる非ガウス性は、4 次のモーメントによって表現できる。そして、4 次のキュムラントの 3 重フーリエ変換で定義される高次スペクトルとして、トライスペクトルが存在する。この応答の 4 次の統計量に注目した解析を行うことで、不規則励振系の応答に現れる、非対称性に限らない、より広い範囲の非ガウス性と入力のパワースペクトル形状の関係を明らかにしたい。

Appendix A

$Y(t)$ の 3 次の中心モーメント

この Appendix では、式 (5.17) で導入した、非ガウス入力 $Y(t) = U_1(t) + \varepsilon X_0 U_2(t)$ の非対称性の有無について、 $Y(t)$ の 3 次の中心モーメントを求めることによって確認する。

外部励振と係数励振が独立な場合

まず、外部励振 $U_1(t)$ と係数励振 $U_2(t)$ が独立な場合について考える。 $X_0(t)$ は $U_1(t)$ を入力として持つ線形系の応答なので、 $U_1(t)$ と $U_2(t)$ が独立なとき、 $X_0(t)$ と $U_2(t)$ も独立である。このことに注意すると、 $Y(t)$ の 3 次の中心モーメントは

$$\begin{aligned} E[(Y(t) - E[Y(t)])^3] &= E[Y^3(t)] \\ &= E[U_1^3(t)] + 3\varepsilon E[U_1^2(t)X_0(t)]E[U_2(t)] \\ &\quad + 3\varepsilon^2 E[U_1(t)X_0^2(t)]E[U_2^2(t)] + \varepsilon^3 E[X_0^3(t)]E[U_2^3(t)] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A1}$$

となる。ここで、 $E[Y(t)] = E[U_1(t)] + \varepsilon E[X_0(t)]E[U_2(t)] = 0$ であることを用いた。よって、 $Y(t) = U_1(t) + \varepsilon X_0 U_2(t)$ は対称な非ガウス過程であることがわかる。従って、運動方程式 (5.5) は、対象な非ガウス入力を受ける線形系と近似的に見なすことができるため、応答に非対称性は現れない。

外部励振と係数励振が同一な場合

次に、外部励振と係数励振が同一な場合について考える。 $Y(t) = U_1(t) + \varepsilon X_0 U_1(t)$ として、 $Y(t)$ の 1 次から 3 次のモーメントを求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= E[U_1(t) + \varepsilon X_0 U_1(t)] = \varepsilon E[X_0(t)U_1(t)] \\ E[Y^2(t)] &= E[(U_1(t) + \varepsilon X_0 U_1(t))^2] \\ &= E[U_1^2(t)] + 2\varepsilon E[U_1^2(t)X_0(t)] + \varepsilon^2 E[U_1^2(t)X_0^2(t)] \\ E[Y^3(t)] &= E[(U_1(t) + \varepsilon X_0 U_1(t))^3] \\ &= E[U_1^3(t)] + 3\varepsilon E[U_1^3(t)X_0(t)] + 3\varepsilon^2 E[U_1^3(t)X_0^2(t)] + \varepsilon^3 E[U_1^3(t)X_0^3(t)] \end{aligned} \tag{A2}$$

ここで、式 (5.11) - (5.13) を用いると、 $E[Y^2(t)]$ の右辺第 2 式第 2 項と、 $E[Y^3(t)]$ の右辺第 2 式第 1 項および第 3 項は 0 となる。従って、 $Y(t)$ の 3 次までのモーメントはさらに次のように整理できる。

$$\begin{aligned}
E[Y(t)] &= \varepsilon E[X_0(t)U_1(t)] \\
E[Y^2(t)] &= E[U_1^2(t)] + \varepsilon^2 E[U_1^2(t)X_0^2(t)] \\
&= E[U_1^2(t)] + \varepsilon^2 (E[U_1^2(t)]E[X_0^2(t)] + 2(E[U_1(t)X_0(t)])^2) \\
E[Y^3(t)] &= 3\varepsilon E[U_1^3(t)X_0(t)] + \varepsilon^3 E[U_1^3(t)X_0^3(t)] \\
&= 9\varepsilon E[U_1^2(t)]E[U_1(t)X_0(t)] + \varepsilon^3 (9E[U_1^2(t)]E[X_0^2(t)]E[U_1X_0] + 6(E[U_1X_0])^3)
\end{aligned} \tag{A3}$$

ここで、平均 0 のガウス確率ベクトル $\mathbf{Z}^T = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6)^T$ に対して、次の関係式が成り立つことを用いた [81]。

$$\begin{aligned}
E[Z_1Z_2Z_3Z_4] &= E[Z_1Z_2]E[Z_3Z_4] + E[Z_1Z_3]E[Z_2Z_4] + E[Z_1Z_4]E[Z_2Z_3] \\
E[Z_1Z_2Z_3Z_4Z_5Z_6] &= E[Z_1Z_2]E[Z_3Z_4]E[Z_5Z_6] + E[Z_1Z_2]E[Z_3Z_5]E[Z_4Z_6] + E[Z_1Z_2]E[Z_3Z_6]E[Z_4Z_5] \\
&\quad + E[Z_1Z_3]E[Z_2Z_4]E[Z_5Z_6] + E[Z_1Z_3]E[Z_2Z_5]E[Z_4Z_6] + E[Z_1Z_3]E[Z_2Z_6]E[Z_4Z_5] \\
&\quad + E[Z_1Z_4]E[Z_2Z_3]E[Z_5Z_6] + E[Z_1Z_4]E[Z_2Z_5]E[Z_3Z_6] + E[Z_1Z_4]E[Z_2Z_6]E[Z_3Z_5] \\
&\quad + E[Z_1Z_5]E[Z_2Z_3]E[Z_4Z_6] + E[Z_1Z_5]E[Z_2Z_4]E[Z_3Z_6] + E[Z_1Z_5]E[Z_2Z_6]E[Z_3Z_4] \\
&\quad + E[Z_1Z_6]E[Z_2Z_3]E[Z_4Z_5] + E[Z_1Z_6]E[Z_2Z_4]E[Z_3Z_5] + E[Z_1Z_6]E[Z_2Z_5]E[Z_3Z_4]
\end{aligned} \tag{A4}$$

以上の結果を用いて $Y(t)$ の 3 次の中心モーメントを考えると、

$$\begin{aligned}
E[(Y(t) - E[Y(t)])^3] &= E[Y^3(t)] - 3E[Y^2(t)]E[Y(t)] + 2(E[Y(t)])^3 \\
&= E[U_1(t)X_0(t)] \{ \varepsilon 6E[U_1^2(t)] + \varepsilon^3 (6E[U_1^2(t)]E[X_0^2(t)] + 2(E[U_1(t)X_0(t)])^2) \}
\end{aligned} \tag{A5}$$

となる。ここで $E[U_1^2(t)]$, $E[X_0^2(t)]$, $(E[U_1(t)X_0(t)])^2 > 0$ より、 $Y(t)$ の 3 次の中心モーメントの符号は $U_1(t)$ と $X_0(t)$ の相関 $E[U_1(t)X_0(t)]$ によって決定される。ここで、 $E[U_1(t)X_0(t)]$ は

$$E[U_1(t)X_0(t)] = \int_{-\infty}^t h(t - \tau_0) E[U_1(t)U_1(\tau_0)] d\tau_0 \tag{A6}$$

である。第 5 章では $U_1(t)$ のパワースペクトルが式 (5.2) で与えられることと、パワースペクトルと 2 次のキュムラントの関係式 (3.10) から、 $U_1(t)$ の 2 次のキュムラントは、 $E[U_1(t)U_1(t + \tau)] = \exp(-\alpha|\tau|) \cos(\rho\tau)$ である。この $U_1(t)$ の 2 次のキュムラントと、単位インパルス応答関数 $h(t) = 1/\sqrt{1 - \zeta^2} \exp(-\zeta t) \sin(\sqrt{1 - \zeta^2}t)$ を用いると、 $E[U_1(t)X_0(t)]$ は次のように計算できる。

$$E[U_1(t)X_0(t)] = \frac{\{(\alpha + \zeta)^2 + 1 - \zeta^2 - \rho^2\}}{\left\{(\alpha + \zeta)^2 + (\sqrt{1 - \zeta^2} + \rho)^2\right\} \left\{(\alpha + \zeta)^2 + (\sqrt{1 - \zeta^2} - \rho)^2\right\}} \tag{A7}$$

式 (A7) において、右辺の分母は常に正である。従って、 $E[U_1(t)X_0(t)]$ の符号は式 (A7) の分子によって決定される。ここで、減衰が $\zeta = 0.05$ と小さく、また $\alpha = 0.01$ に代表される入力のパワースペクトルの帯域幅が系の帯域幅と比較して狭い場合を考える。このとき、式 (A7) の分子は、 $(\alpha + \zeta)^2 + 1 - \zeta^2 - \rho^2 \approx 1 - \rho^2$ とできる。すなわち、 $\rho < 1$ では $E[U_1(t)X_0(t)] > 0$ となり、 $Y(t)$ は正の歪度を示すような非対称性を示す。 $\rho > 1$ では $E[U_1(t)X_0(t)] < 0$ となり、 $Y(t)$ は負の歪度を示すような非対称性を有する。そして、 $\rho = 1$ では $E[U_1(t)X_0(t)] = 0$ とでき、 $Y(t)$ に非対称性は現れない。このように、モーメントの観点から非ガウス入力 $Y(t)$ の非対称性を確認することができた。また、その結果は、本文中 5.3.6 項で行った、パワースペクトルと波形の観点からの考察と一致した。この $Y(t)$ の非対称性の変化に対応して、 $Y(t)$ を入力として持つ線形系の応答の非対称性が変化する。そして、元の同時励振系の応答の非対称性の変化は、この線形系の応答の変化と対応させることで考えることができる。

Appendix B

式 (5.45) の証明

式 (5.22) で定義されている θ_n ($n = -N, \dots, N$) から、重複を許して M 個選んで作る集合 Θ を考える。この集合は、 $-N \leq r_k \leq N$ を満たす M 個の整数 r_k ($k = 1, 2, \dots, M$) を用いて、 $\Theta = \{\theta_{r_1}, \theta_{r_2}, \dots, \theta_{r_M}\}$ とできる。本節では、期待値 $E \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^M \theta_{r_k} \right) \right]$ を評価する。

まず、ある自然数 k_0 に対して、 $\theta_{r_{k_0}} \in \Theta$ とそれ以外の $\theta_{r_k} \in \Theta \setminus \{\theta_{r_{k_0}}\}$ が独立であるとする。このとき、 $E \left[\exp(i\theta_{r_{k_0}}) \right] = 0$ より

$$E \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^M \theta_{r_k} \right) \right] = E \left[\exp(i\theta_{r_{k_0}}) \right] E \left[\exp \left(i \sum_{k=1, k \neq k_0}^M \theta_{r_k} \right) \right] = 0 \quad (\text{B1})$$

となる。

次に、独立なものがなく、すべての θ_{r_k} に対して、それと相関を有する $\theta_{r_{k'}}$ (ただし $k \neq k'$) が少なくとも 1 つ存在する場合を考える。ここで、 θ_{r_k} の中で相関を有するもの同士をすべて集めた集合を考え、そのような集合が m 個あるとする ($1 \leq m \leq M/2$)。そして、そのような集合を A_j ($j = 1, 2, \dots, m$) とする。 A_j は次のような性質を有する。

- $a_1, a_2 \in A_j$ なるすべての a_1 と a_2 について、 $E[a_1 a_2] \neq 0$ である。
- $j \neq l$ とする。 $a_1 \in A_j, a_2 \in A_l$ なるすべての a_1 と a_2 について、 $E[a_1 a_2] = 0$ である。
- $j \neq l$ なるすべての j と l について、 $A_j \cap A_l = \emptyset$ であり、 $\bigcup_{j=1}^m A_j = \Theta$ である。

例として、 $M = 5, r_1 = -1, r_2 = 1, r_3 = 2, r_4 = 2, r_5 = -2$, つまり $\Theta = \{\theta_{-1}, \theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_{-2}\}$ の場合を考える。確率変数 θ_n は、 $|p| \neq |q|$ なる p と q について θ_p と θ_q は独立であり、かつ非 0 の整数 p に対して $\theta_{-p} = -\theta_p$ である。従って、 $m = 2$ であり、 $A_1 = \{\theta_{-1}, \theta_1\}, A_2 = \{\theta_2, \theta_2, \theta_{-2}\}$ とできる。

このような A_j を用いると、 $E \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^M \theta_{r_k} \right) \right]$ は次のように表すことができる。

$$E \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^M \theta_{r_k} \right) \right] = \prod_{j=1}^m E \left[\exp \left(i \sum_{\theta_{r_k} \in A_j} \theta_{r_k} \right) \right] \quad (\text{B2})$$

A_j の要素 θ_{r_k} のうち 1 つを θ_{A_j} とする。このとき、 A_j の要素 θ_{r_k} は θ_{A_j} または $-\theta_{A_j}$ のみである。従って、

$$\sum_{\theta_{r_k} \in A_j} \theta_{r_k} = \lambda_j \theta_{A_j}, \quad \lambda_j \in \mathbb{Z} \quad (\text{B3})$$

とできる。よって、式 (B2) は

$$E \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^M \theta_{r_k} \right) \right] = \prod_{j=1}^m E \left[\exp(i\lambda_j \theta_{A_j}) \right] = \prod_{j=1}^m \mathbb{1}_{\{0\}}(\lambda_j) \quad (\text{B4})$$

となる．従って， $E \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^M \theta_{r_k} \right) \right]$ が非 0 の値となるためには，すべての j について $\lambda_j = 0$ の必要がある．そして，そのとき $\sum_{k=1}^M \theta_{r_k} = 0$ である．

以上をまとめると， $E \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^M \theta_{r_k} \right) \right]$ は次のように評価できる．

$$E \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^M \theta_{r_k} \right) \right] = \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{k=1}^M \theta_{r_k} = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{B5})$$

なお， θ_n の性質から， A_j の要素数が奇数の場合 $\lambda_j \neq 0$ である．従って， M が奇数の場合， $E \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^M \theta_{r_k} \right) \right] = 0$ となる．逆に言えば，この期待値が非 0 の値となるためには，各 A_j の要素数および M は偶数である必要がある．また，ある A_j の要素の 1 つが θ_0 の場合， A_j の要素はすべて θ_0 である．従って， A_j の要素の 1 つが θ_0 となるときは，常に $\lambda_j \neq 0$ である．これより， $r_k = 0$ なる k がある場合， $E \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^M \theta_{r_k} \right) \right]$ は常に 0 である．

Appendix C

$E[\bar{F}_m^I \bar{F}_n^I \bar{F}_{-(m+n)}^I]$ の計算

$E[\bar{F}_m^I \bar{F}_n^I \bar{F}_{-(m+n)}^I]$ を考える．ここで， m, n は $0 \leq m, n \leq N/2$ ， $-N \leq -(m+n) \leq 0$ であるが，式 (5.64) から式 (5.65) における議論で述べた $\bar{F}_m^I$ の性質から， $E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^I]$ を求めた場合と同様に $m, n, -(m+n) \neq 0$ とする．このとき，式 (5.36) から， $E[\bar{F}_m^I \bar{F}_n^I \bar{F}_{-(m+n)}^I]$ は

$$\begin{aligned} E[\bar{F}_m^I \bar{F}_n^I \bar{F}_{-(m+n)}^I] &= H_m H_n H_{-(m+n)} \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N U_j U_{m-j} U_k U_{n-k} U_l U_{-(m+n)-l} H_j H_k H_l \\ &\quad \times E[\exp(i(\theta_j + \theta_{m-j} + \theta_k + \theta_{n-k} + \theta_l + \theta_{-(m+n)-l}))] \mathbb{1}_{[-N, N]}(m-j) \mathbb{1}_{[-N, N]}(n-k) \mathbb{1}_{[-N, N]}(-(m+n)-l) \end{aligned} \quad (C1)$$

となる．このとき， $E[\exp(i(\theta_j + \theta_{m-j} + \theta_k + \theta_{n-k} + \theta_l + \theta_{-(m+n)-l}))]$ が非 0 の値を示すのは，式 (5.45) より， $\theta_j + \theta_{m-j} + \theta_k + \theta_{n-k} + \theta_l + \theta_{-(m+n)-l} = 0$ となる場合に限る．非 0 の整数 p に対して $\theta_p = -\theta_p$ であること， θ の添え字は非 0 でなくてはならないこと， $m, n, -(m+n) \neq 0$ であることに注意すると，そのようになる j, k, l の状況は次の 8 通り．

- 状況 C-1 $\theta_j + \theta_k = 0$ かつ $\theta_l + \theta_{m-j} = 0$ かつ $\theta_{n-k} + \theta_{-(m+n)-l} = 0$ ，つまり $j+k=0$ かつ $l+m-j=0$ かつ $j, m-j, n+j$ がいずれも 0 ではない場合
- 状況 C-2 $\theta_j + \theta_k = 0$ かつ $\theta_l + \theta_{n-k} = 0$ かつ $\theta_{m-j} + \theta_{-(m+n)-l} = 0$ ，つまり $j+k=0$ かつ $l+n+j=0$ かつ $j, n+j, m-j$ がいずれも 0 ではない場合
- 状況 C-3 $\theta_j + \theta_l = 0$ かつ $\theta_k + \theta_{m-j} = 0$ かつ $\theta_{n-k} + \theta_{-(m+n)-l} = 0$ ，つまり $j+l=0$ かつ $k+m-j=0$ かつ $j, m-j, -(m+n)+j$ がいずれも 0 ではない場合
- 状況 C-4 $\theta_j + \theta_l = 0$ かつ $\theta_k + \theta_{-(m+n)-l} = 0$ かつ $\theta_{m-j} + \theta_{n-k} = 0$ ，つまり $j+l=0$ かつ $k-(m+n)+j=0$ かつ $j, -(m+n)+j, m-j$ がいずれも 0 ではない場合
- 状況 C-5 $\theta_j + \theta_{n-k} = 0$ かつ $\theta_k + \theta_{-(m+n)-l} = 0$ かつ $\theta_l + \theta_{m-j} = 0$ ，つまり $j+n-k=0$ かつ $k-(m+n)-l=0$ かつ $j, n+j, m-j$ がいずれも 0 ではない場合
- 状況 C-6 $\theta_j + \theta_{n-k} = 0$ かつ $\theta_k + \theta_l = 0$ かつ $\theta_{m-j} + \theta_{-(m+n)-l} = 0$ ，つまり $j+n-k=0$ かつ $k+l=0$ かつ $j, n+j, m-j$ がいずれも 0 ではない場合
- 状況 C-7 $\theta_j + \theta_{-(m+n)-l} = 0$ かつ $\theta_k + \theta_{m-j} = 0$ かつ $\theta_l + \theta_{n-k} = 0$ ，つまり $j-(m+n)-l=0$ かつ $k+m-j=0$ かつ $j, m-j, n+m-j$ がいずれも 0 ではない場合
- 状況 C-8 $\theta_j + \theta_{-(m+n)-l} = 0$ かつ $\theta_k + \theta_l = 0$ かつ $\theta_{m-j} + \theta_{n-k} = 0$ ，つまり $j-(m+n)-l=0$ かつ $k+l=0$ かつ $j, m+n-j, m-j$ がいずれも 0 ではない場合

以上より，式 (C1) 中の $E[\exp(i(\theta_j + \theta_{m-j} + \theta_k + \theta_{n-k} + \theta_l + \theta_{-(m+n)-l}))]$ が非 0 の値を示す j, k, l の組み

表 C1 $E[\exp(i(\theta_j + \theta_{m-j} + \theta_k + \theta_{n-k} + \theta_l + \theta_{-(m+n-l)}))] \neq 0$ となるような j, k, l の条件と制約.

状況	k	l	制約
C-1	$-j$	$-m+j$	$-N+m \leq j \leq N-n, \quad j \neq -n, 0, m$
C-2	$-j$	$-n-j$	$-N+m \leq j \leq N-n, \quad j \neq -n, 0, m$
C-3	$-m+j$	$-j$	$-N+m+n \leq j \leq N+m, \quad j \neq 0, m, m+n$
C-4	$m+n-j$	$-j$	$-N+m+n \leq j \leq N+m, \quad j \neq 0, m, m+n$
C-5	$n+j$	$-m+j$	$-N+m \leq j \leq N-n, \quad j \neq -n, 0, m$
C-6	$n+j$	$-n-j$	$-N+m \leq j \leq N+m, \quad j \neq -n, 0, m$
C-7	$-m+j$	$-m-n+j$	$-N+m+n \leq j \leq N+m, \quad j \neq 0, m, m+n$
C-8	$m+n-j$	$-m-n+j$	$-N+m \leq j \leq N+m, \quad j \neq 0, m, m+n$

表 C2 C-1 から C-6 のいずれか 2 つが同一になる条件とその組み合わせ.

条件	組み合わせ	条件	組み合わせ
$2j = m - n$	C-1 and C-2	$2j = m + n$	C-3 and C-7
$2j = m$	C-1 and C-3	$2j = m$	C-4 and C-5
$2j = -n$	C-1 and C-5	$2j = m + n$	C-4 and C-8
$2j = -n$	C-2 and C-6	$2j = m - n$	C-5 and C-6
$2j = m$	C-2 and C-7	$2j = m$	C-6 and C-8
$2j = 2m + n$	C-3 and C-4	$2j = 2m + n$	C-7 and C-8

合わせを, j を固定し, k と l を j を使って表すと表 C1 のように整理できる. j の制約中の不等式は, 式 (C1) 中の $\mathbb{1}_{[-N, N]}(m-j)\mathbb{1}_{[-N, N]}(n-k)\mathbb{1}_{[-N, N]}(-(m+n)-l)$ から求めた. C-1 の場合, $-N \leq m-j \leq N$ かつ $-N \leq n-k \leq N$ かつ $-N \leq -(m+n)-l \leq N$ に $(i, j, k) = (j, -j, j-m)$ を代入すると, $-N+m \leq j \leq N+m$ かつ $-N-n \leq j \leq N-n$ かつ $-N-n \leq j \leq N-n$ となる. $0 < m, n \leq N/2$ を考えると, これは $-N+m \leq j \leq N-n$ とできる.

また, 上記の C-1 から C-8 までの 8 つの状況は互いに排反ではない. 例えば, $2j = m$ の場合, $-j = j-m$ となり, C-1 と C-3 は同一の状況を指す. このような, いくつかの状況が同一の状況を指す組み合わせとそのときの条件を, $0 < m, n \leq N/2$ に注意して表 C2 にまとめる.

以上を用いて、式 (C1) は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}
& E[\bar{F}_m^I \bar{F}_n^I \bar{F}_{-(m+n)}^I] \\
&= H_m H_n H_{-(m+n)} \sum_{\substack{j=-N, \\ j \neq 0}}^N U_j^2 U_{m-j}^2 \left[U_{n+j}^2 C(j, -j, -m+j) \mathbb{1}_{[-N+m, N-n] \setminus \{-n, m\}}(j) \right. \\
&\quad + U_{n+j}^2 C(j, -j, -n-j) \mathbb{1}_{[-N+m, N-n] \setminus \{-n, m, (m-n)/2\}}(j) \\
&\quad + U_{m+n-j}^2 C(j, -m+j, -j) \mathbb{1}_{[-N+m+n, N+m] \setminus \{m/2, m, m+n\}}(j) \\
&\quad + U_{m+n-j}^2 C(j, m+n-j, -j) \mathbb{1}_{[-N+m+n, N+m] \setminus \{m, m+n, (2m+n)/2\}}(j) \\
&\quad + U_{n+j}^2 C(j, n+j, -m+j) \mathbb{1}_{[-N+m, N-n] \setminus \{-n, -n/2, m/2, m\}}(j) \\
&\quad + U_{n+j}^2 C(j, n+j, -n-j) \mathbb{1}_{[-N+m, N+m] \setminus \{-n, -n/2, (m-n)/2, m\}}(j) \\
&\quad + U_{m+n-j}^2 C(j, -m+j, -m-n+j) \\
&\quad \quad \times \mathbb{1}_{[-N+m+n, N+m] \setminus \{m/2, m, (m+n)/2, m+n\}}(j) \\
&\quad + U_{m+n-j}^2 C(j, m+n-j, -m-n+j) \\
&\quad \quad \times \mathbb{1}_{[-N+m, N+m] \setminus \{m/2, m, (m+n)/2, (2m+n)/2, m+n\}}(j) \left. \right] \quad (C2)
\end{aligned}$$

$$C(j, k, l) = H_j H_k H_l$$

式 (C2) 右辺の各項は、表 C1 の各状況に対応している。例えば、式 (C2) 右辺第 2 項は C-2 に対応している。また、表 C1 から、C-2 の場合 $-N+m \leq j \leq N-n$ かつ $j \neq -n, 0, m$ とする必要がある。加えて、表 C2 より、 $j = (m-n)/2$ のとき C-1 と C-2 は同一の状況を指す。従って、式 (C2) 右辺第 2 項は $j = -n, m, (m-n)/2$ 以外の場合のみ非 0 の値を示すようにするために、指示関数 $\mathbb{1}_{[-N+m, N-n] \setminus \{-n, m, (m-n)/2\}}(j)$ を乗じてある。

Appendix D

$E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^{III}]$ の計算

$-N \leq p, q, r \leq N$, $p + q + r = 0$ とする $E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^{III}]$ を考える. まず, $r = 0$ のときを考える. 式 (5.35), (5.38), (5.49) より

$$\begin{aligned} E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_0^{III}] &= U_p U_q H_p H_q H_0 \sum_{\substack{j=-N, \\ j \neq 0}}^N \sum_{\substack{k=-N, \\ k \neq 0}}^N \sum_{\substack{l=-N, \\ l \neq 0}}^N U_j U_k U_l U_{-(j+k+l)} H_j H_{j+k} H_{j+k+l} \\ &\quad \times E[\exp(\theta_p + \theta_q + \theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_{-(j+k+l)})] \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(j+k) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(j+l) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(k+l) \end{aligned} \quad (D1)$$

となる. ここで, j, k, l のいずれかが 0 のとき, 式 (5.45) より $E[\exp(\theta_p + \theta_q + \theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_{-(j+k+l)})] = 0$ となるため, $j, k, l \neq 0$ としてある. また, この式中の $E[\exp(\theta_p + \theta_q + \theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_{-(j+k+l)})] \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(j+k) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(j+l) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(k+l)$ は, $j+k \neq 0$ かつ $j+l \neq 0$ かつ $k+l \neq 0$ かつ $\theta_p + \theta_q + \theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_{-(j+k+l)} = 0$ の場合のみ非 0 の値を示す. $j+k \neq 0$ かつ $j+l \neq 0$ かつ $k+l \neq 0$ のとき, $\theta_j + \theta_k \neq 0$, $\theta_j + \theta_l \neq 0$, $\theta_k + \theta_l \neq 0$ である. 従って, $\theta_p + \theta_q + \theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_{-(j+k+l)} = 0$ であるならば, $j - (j+k+l) = 0$ または $k - (j+k+l) = 0$ または $l - (j+k+l) = 0$ である必要である. ここで, $j - (j+k+l) = 0$ のとき $k+l = 0$ となるが, これは $k+l \neq 0$ に反する. これは $k - (j+k+l) = 0$, $l - (j+k+l) = 0$ に対しても同様であるので, $j+k \neq 0$ かつ $j+l \neq 0$ かつ $k+l \neq 0$ かつ $\theta_p + \theta_q + \theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_{-(j+k+l)} = 0$ となるような j, k, l は存在しない. よって, $E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_0^{III}] = 0$ となる.

次に, $r \neq 0$ の場合の $E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^{III}]$ を考える. 式 (5.35), (5.38) より

$$\begin{aligned} E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^{III}] &= U_p U_q H_p H_q H_r \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N U_j U_k U_l U_{r-(j+k+l)} H_j H_{j+k} H_{j+k+l} \\ &\quad \times E[\exp(\theta_p + \theta_q + \theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_{r-(j+k+l)})] \mathbb{1}_{[-N, N]}(r - (j+k+l)) \end{aligned} \quad (D2)$$

このとき, $E[\exp(\theta_p + \theta_q + \theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_{r-(j+k+l)})]$ が非 0 の値を示すのは, 式 (5.45) より $\theta_p + \theta_q + \theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_{r-(j+k+l)} = 0$ となる場合に限る. 非 0 の整数 m に対して $\theta_{-m} = -\theta_m$ であること, θ の添え字は非 0 でなくてはならず, それに伴って $p, q \neq 0$ でなければならないこと, $p + q + r = 0$, $r \neq 0$ であることに注意すると, そのようになる j, k, l の状況は次の 12 通り.

状況 D-1 $\theta_p + \theta_j = 0$ かつ $\theta_q + \theta_k = 0$ かつ $\theta_l + \theta_{r-(j+k+l)} = 0$, つまり $p + j = 0$ かつ $q + k = 0$ かつ l が 0 ではない場合

状況 D-2 $\theta_p + \theta_j = 0$ かつ $\theta_k + \theta_l = 0$ かつ $\theta_q + \theta_{r-(j+k+l)} = 0$, つまり $p + j = 0$ かつ $k + l = 0$ かつ k が 0 ではない場合

表 D1 $E[\exp(\theta_p + \theta_q + \theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_{r-(j+k+l)})] \neq 0$ となるような j, k, l の条件と制約.

状況	j	k	l	制約	状況	j	k	l	制約
D-1	$-p$	$-q$	l	$l \neq 0$	D-7	j	$-j$	$-p$	$j \neq 0$
D-2	$-p$	k	$-k$	$k \neq 0$	D-8	j	$-j$	$-q$	$j \neq 0$
D-3	$-p$	k	$-q$	$k \neq 0$	D-9	j	$-p$	$-j$	$j \neq 0$
D-4	$-q$	$-p$	l	$l \neq 0$	D-10	j	$-q$	$-j$	$j \neq 0$
D-5	$-q$	k	$-k$	$k \neq 0$	D-11	j	$-p$	$-q$	$j \neq 0$
D-6	$-q$	k	$-p$	$k \neq 0$	D-12	j	$-q$	$-p$	$j \neq 0$

表 D2 $p \neq q$ の下で D-1 から D-6 のいずれか 2 つが同一になる条件とその組み合わせ.

条件	組み合わせ	条件	組み合わせ
$l = q$ in D-1 and $k = -q$ in D-2	D-1 and D-2	$l = p$ in D-4 and $k = -p$ in D-5	D-4 and D-5
$l = -q$ in D-1 and $k = -q$ in D-3	D-1 and D-3	$l = -p$ in D-4 and $k = -p$ in D-6	D-4 and D-6
$k = q$ in D-2 and $k = q$ in D-3	D-2 and D-3	$k = p$ in D-5 and $k = p$ in D-6	D-5 and D-6

状況 D-3 $\theta_p + \theta_j = 0$ かつ $\theta_q + \theta_l = 0$ かつ $\theta_k + \theta_{r-(j+k+l)} = 0$, つまり $p + j = 0$ かつ $q + l = 0$ かつ k が 0 ではない場合

状況 D-4 $\theta_q + \theta_j = 0$ かつ $\theta_p + \theta_k = 0$ かつ $\theta_l + \theta_{r-(j+k+l)} = 0$, つまり $q + j = 0$ かつ $p + k = 0$ かつ l が 0 ではない場合

状況 D-5 $\theta_q + \theta_j = 0$ かつ $\theta_k + \theta_l = 0$ かつ $\theta_p + \theta_{r-(j+k+l)} = 0$, つまり $q + j = 0$ かつ $k + l = 0$ かつ k が 0 ではない場合

状況 D-6 $\theta_q + \theta_j = 0$ かつ $\theta_p + \theta_l = 0$ かつ $\theta_k + \theta_{r-(j+k+l)} = 0$, つまり $q + j = 0$ かつ $p + l = 0$ かつ k が 0 ではない場合

状況 D-7 $\theta_j + \theta_k = 0$ かつ $\theta_p + \theta_l = 0$ かつ $\theta_q + \theta_{r-(j+k+l)} = 0$, つまり $j + k = 0$ かつ $p + l = 0$ かつ j が 0 ではない場合

状況 D-8 $\theta_j + \theta_k = 0$ かつ $\theta_q + \theta_l = 0$ かつ $\theta_p + \theta_{r-(j+k+l)} = 0$, つまり $j + k = 0$ かつ $q + l = 0$ かつ j が 0 ではない場合

状況 D-9 $\theta_j + \theta_l = 0$ かつ $\theta_p + \theta_k = 0$ かつ $\theta_q + \theta_{r-(j+k+l)} = 0$, つまり $j + l = 0$ かつ $p + k = 0$ かつ j が 0 ではない場合

状況 D-10 $\theta_j + \theta_l = 0$ かつ $\theta_q + \theta_k = 0$ かつ $\theta_p + \theta_{r-(j+k+l)} = 0$, つまり $j + l = 0$ かつ $q + k = 0$ かつ j が 0 ではない場合

状況 D-11 $\theta_j + \theta_{r-(j+k+l)} = 0$ かつ $\theta_p + \theta_k = 0$ かつ $\theta_q + \theta_l = 0$, つまり $p + k = 0$ かつ $q + l = 0$ かつ j が 0 ではない場合

状況 D-12 $\theta_j + \theta_{r-(j+k+l)} = 0$ かつ $\theta_q + \theta_k = 0$ かつ $\theta_p + \theta_l = 0$, つまり $q + k = 0$ かつ $p + l = 0$ かつ j が 0 ではない場合

以上より, 式 (D2) 中の $E[\exp(\theta_p + \theta_q + \theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_{r-(j+k+l)})]$ が非 0 の値を示す j, k, l の組み合わせは, 表 D1 のように整理できる. 表 D1 の j, k, l は, $-N$ から N の 0 を除いた任意の整数をとることができる. また, 式 (D2) 中では, $-N \leq r - (j + k + l) \leq N$ を満たす j, k, l のみを考えていたが, 表 D1 にまとめている D-1 か

表 D3 $j = -p, -q$ の下で D-1 から D-6 のいずれか 1 つと D-7 から D-12 のいずれか 1 つが同一になる条件とその組み合わせ.

条件	組み合わせ	条件	組み合わせ
$j = -p$ in D-7 and $k = p$ in D-2	D-7 and D-2	$j = -q$ in D-7 and $k = q$ in D-6	D-7 and D-6
$j = -p$ in D-8 and $k = p$ in D-3	D-8 and D-3	$j = -q$ in D-8 and $k = q$ in D-5	D-8 and D-5
$j = -p$ in D-9 and $k = -p$ in D-2	D-9 and D-2	$j = -q$ in D-9 and $l = q$ in D-4	D-9 and D-4
$j = -p$ in D-10 and $l = p$ in D-1	D-10 and D-1	$j = -q$ in D-10 and $k = -q$ in D-5	D-10 and D-5
$j = -p$ in D-11 and $k = -p$ in D-3	D-11 and D-3	$j = -q$ in D-11 and $l = -q$ in D-4	D-11 and D-4
$j = -p$ in D-12 and $l = -p$ in D-1	D-12 and D-1	$j = -q$ in D-12 and $k = -q$ in D-6	D-12 and D-6

表 D4 $p \neq q$ かつ $j \neq -p, -q$ の下で D-7 から D-12 のいずれか 2 つが同一になる条件とその組み合わせ.

条件	組み合わせ	条件	組み合わせ
$j = p$	D-7 and D-9	$j = p$	D-8 and D-11
$j = q$	D-7 and D-12	$j = q$	D-9 and D-11
$j = q$	D-8 and D-10	$j = p$	D-10 and D-12

ら D-12 はすべてこの条件を満たしている. 例として, D-1 の場合, $p + q + r = 0$ より $r - (j + k + l) = l$ となり, $-N \leq r - (j + k + l) \leq N$ を満たしている.

$E[\bar{F}_m^I \bar{F}_n^I \bar{F}_{-(m+n)}^I]$ のときと同様に, 上記の D-1 から D-12 までの 12 の状況は互いに排反ではない. 例えば, D-1 において $l = -q$ とした状況と D-3 において $k = -q$ とした状況は同一の状況を指す. このような, いくつかの状況が同一の状況を指す組み合わせとそのときの条件をまとめる.

まず, $p = q$ であるとき, D-1 と D-4, D-2 と D-5, D-3 と D-6 はそれぞれ同じ状況を指す. $p \neq q$ の下での, D-1, D-2, D-3 と, D-4, D-5, D-6 それぞれが同じ状況となる条件をまとめたものが表 D2 である.

次に, D-7 から D-12 を考える. D-7 から D-12 において $j = -p$ または $j = -q$ とした場合の (j, k, l) は, D-1 から D-6 のいずれかに含まれる. $j = -p, -q$ の下で, D-7 から D-12 が D-1 から D-6 のいずれかと同じ状況となる条件をまとめたものが表 D3 である. また, $p = q$ であるとき, D-7 と D-8, D-9 と D-10, D-11 と D-12 はそれぞれ同じ状況を指す. $j \neq -p, -q, p \neq q$ とした場合の, D-7 から D-12 が同じ状況となる条件をまとめたものが表 D4 である.

以上を用いて, 式 (D2) を整理する. D-1 から D-12 それぞれにおいて, 変数 k または l または j が 1 つ存在する.

それらをまとめて j で表現すると、式 (D2) は次のようにできる.

$$\begin{aligned}
& E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^{III}] \\
&= U_p^2 U_q^2 H_p H_q H_r \sum_{\substack{j=-N, \\ j \neq 0}}^N U_j^2 \left[D(-p, -q, j) + D(-p, j, -j) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-q\}}(j) + D(-p, j, -q) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-q, q\}}(j) \right. \\
&\quad + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(p-q) \left\{ D(-q, -p, j) + D(-q, j, -j) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p\}}(j) + D(-q, j, -p) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p, p\}}(j) \right\} \\
&\quad + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p, -q\}}(j) \left\{ D(j, -j, -p) + D(j, -j, -q) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(p-q) \right. \\
&\quad \quad + D(j, -p, -j) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{p\}}(j) + D(j, -q, -j) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(p-q) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{q\}}(j) \\
&\quad \quad \left. \left. + D(j, -p, -q) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{p, q\}}(j) + D(j, -q, -p) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(p-q) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{p, q\}}(j) \right\} \right] \\
&\hspace{15em} \text{(D3)}
\end{aligned}$$

$$D(j, k, l) = H_j H_{j+k} H_{j+k+l}$$

式 (D3) 右辺の各項は、表 D1 の各状況に対応している. 例えば、式 (D3) 右辺第 10 項は D-10 に対応している. また、ここまでの議論で、D-10 において $j = -p, -q$ の場合は、それぞれ D-1 と D-5 に含まれる. そのため、 $j \neq -p, -q$ とするために、式 (D3) 右辺上から 3 行目にあるように、 $\mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p, -q\}}(j)$ を乗じてある. また、D-10 は $p = q$ のとき D-9 と、 $j = q$ のとき D-8 の一部と同一の状況になるため、重複を避ける目的で $\mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(p-q) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{q\}}(j)$ も乗じてある.

Appendix E

$E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^I \bar{F}_r^{II}]$ の計算

$-N \leq p, q, r \leq N$, $p+q+r=0$ とする $E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^I \bar{F}_r^{II}]$ を考える. まず, F_q^I の平均は $q=0$ のときのみ非 0 の値を示すため, q が 0 の場合とそれ以外で分けて考える必要があるが, $E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^0 \bar{F}_r^I]$ を評価したときと同様に考えて, $q \neq 0$ とする. このとき, 式 (5.35), (5.36), (5.37) から, $E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^I \bar{F}_r^{II}]$ は

$$E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^I \bar{F}_r^{II}] = U_p H_p H_q H_r \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N U_j U_{q-j} U_k U_l U_{r-(k+l)} H_j H_k H_{k+l} \\ \times E[\exp(i(\theta_p + \theta_j + \theta_{q-j} + \theta_k + \theta_l + \theta_{r-(k+l)}))] \mathbb{1}_{[-N, N]}(q-j) \mathbb{1}_{[-N, N]}(r-(k+l)) \quad (\text{E1})$$

である. このとき, $E[\exp(i(\theta_p + \theta_j + \theta_{q-j} + \theta_k + \theta_l + \theta_{r-(k+l)}))]$ が非 0 の値を示すのは, 式 (5.45) より $\theta_p + \theta_j + \theta_{q-j} + \theta_k + \theta_l + \theta_{r-(k+l)}$ となる場合に限る. 非 0 の整数 m に対して $\theta_{-m} = -\theta_m$ であること, θ の添え字は非 0 でなくてはならず, それに伴って $p \neq 0$ でなければならないこと, $p+q+r=0$, $q \neq 0$ であることに注意すると, そのようになる j, k, l の状況は次の 12 通り.

状況 E-1 $\theta_p + \theta_j = 0$ かつ $\theta_{q-j} + \theta_k = 0$ かつ $\theta_l + \theta_{r-(k+l)} = 0$, つまり $p+j=0$ かつ $q-j+k=0$ かつ $p+q$ と l が 0 ではない場合

状況 E-2 $\theta_p + \theta_j = 0$ かつ $\theta_{q-j} + \theta_l = 0$ かつ $\theta_k + \theta_{r-(k+l)} = 0$, つまり $p+j=0$ かつ $q-j+l=0$ かつ $p+q$ と k が 0 ではない場合

状況 E-3 $\theta_p + \theta_j = 0$ かつ $\theta_k + \theta_l = 0$ かつ $\theta_{q-j} + \theta_{r-(k+l)} = 0$, つまり $p+j=0$ かつ $k+l=0$ かつ $p+q$ と k が 0 ではない場合

状況 E-4 $\theta_j + \theta_k = 0$ かつ $\theta_p + \theta_{q-j} = 0$ かつ $\theta_l + \theta_{r-(k+l)} = 0$, つまり $j+k=0$ かつ $p+q-j=0$ かつ $p+q$ と l が 0 ではない場合

状況 E-5 $\theta_j + \theta_l = 0$ かつ $\theta_p + \theta_{q-j} = 0$ かつ $\theta_k + \theta_{r-(k+l)} = 0$, つまり $j+l=0$ かつ $p+q-j=0$ かつ $p+q$ と k が 0 ではない場合

状況 E-6 $\theta_j + \theta_{r-(k+l)} = 0$ かつ $\theta_k + \theta_l = 0$ かつ $\theta_p + \theta_{q-j} = 0$, つまり $k+l=0$ かつ $p+q-j=0$ かつ $p+q$ と k が 0 ではない場合

状況 E-7 $\theta_j + \theta_k = 0$ かつ $\theta_p + \theta_l = 0$ かつ $\theta_{q-j} + \theta_{r-(k+l)} = 0$, つまり $j+k=0$ かつ $p+l=0$ かつ j と $q-j$ が 0 ではない場合

状況 E-8 $\theta_j + \theta_k = 0$ かつ $\theta_{q-j} + \theta_l = 0$ かつ $\theta_p + \theta_{r-(k+l)} = 0$, つまり $j+k=0$ かつ $q-j+l=0$ かつ j と $q-j$ が 0 ではない場合

状況 E-9 $\theta_j + \theta_l = 0$ かつ $\theta_p + \theta_k = 0$ かつ $\theta_{q-j} + \theta_{r-(k+l)} = 0$, つまり $j+l=0$ かつ $p+k=0$ かつ j と $q-j$ が 0 ではない場合

表 E1 $E[\exp(i(\theta_p + \theta_j + \theta_{q-j} + \theta_k + \theta_l + \theta_{r-(k+l)}))] \neq 0$ となる j, k, l, p, q の条件と制約.

状況	j	k	l	制約
E-1	$-p$	$-p-q$	l	$p+q, l \neq 0$
E-2	$-p$	k	$-p-q$	$p+q, k \neq 0$
E-3	$-p$	k	$-k$	$p+q, k \neq 0$
E-4	$p+q$	$-p-q$	l	$p+q, l \neq 0$
E-5	$p+q$	k	$-p-q$	$p+q, k \neq 0$
E-6	$p+q$	k	$-k$	$p+q, k \neq 0$
E-7	j	$-j$	$-p$	$-N \leq q-j \leq N, j \neq 0, q$
E-8	j	$-j$	$-q+j$	$-N \leq q-j \leq N, j \neq 0, q$
E-9	j	$-p$	$-j$	$-N \leq q-j \leq N, j \neq 0, q$
E-10	j	$-q+j$	$-j$	$-N \leq q-j \leq N, j \neq 0, q$
E-11	j	$-p$	$-q+j$	$-N \leq q-j \leq N, j \neq 0, q$
E-12	j	$-q+j$	$-p$	$-N \leq q-j \leq N, j \neq 0, q$

表 E2 $2p+q \neq 0$ の下で E-1 から E-6 のいずれか 2 つが同一になる条件とその組み合わせ.

条件	組み合わせ	条件	組み合わせ
$l = -p-q$ in E-1 and $k = -p-q$ in E-2	E-1 and E-2	$l = -p-q$ in E-4 and $k = -p-q$ in E-5	E-4 and E-5
$l = p+q$ in E-1 and $k = -p-q$ in E-3	E-1 and E-3	$l = p+q$ in E-4 and $k = -p-q$ in E-6	E-4 and E-6
$k = p+q$ in E-2 and $k = p+q$ in E-3	E-2 and E-3	$k = p+q$ in E-5 and $k = p+q$ in E-6	E-5 and E-6

状況 E-10 $\theta_j + \theta_l = 0$ かつ $\theta_{q-j} + \theta_k = 0$ かつ $\theta_p + \theta_{r-(k+l)} = 0$, つまり $j+l=0$ かつ $q-j+k=0$ かつ j と $q-j$ が 0 ではない場合

状況 E-11 $\theta_j + \theta_{r-(k+l)} = 0$ かつ $\theta_p + \theta_k = 0$ かつ $\theta_{q-j} + \theta_l = 0$, つまり $p+k=0$ かつ $q-j+l=0$ かつ j と $q-j$ が 0 ではない場合

状況 E-12 $\theta_j + \theta_{r-(k+l)} = 0$ かつ $\theta_{q-j} + \theta_k = 0$ かつ $\theta_p + \theta_l = 0$, つまり $q-j+k=0$ かつ $p+l=0$ かつ j と $q-j$ が 0 ではない場合

以上より, 式 (E1) 中の $E[\exp(i(\theta_p + \theta_q + \theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_{r-(j+k+l)}))]$ が非 0 の値を示す j, k, l の組み合わせは, 表 E1 のように整理できる. 表 E1 の j, k, l は, $-N$ から N の 0 を除いた任意の整数をとることができる. また, 式 (E1) 中では $-N \leq q-j \leq N$ かつ $-N \leq r-(k+l) \leq N$ を満たす j, k, l のみを考えていたが, 表 E1 にまとめている E-1 から E-6 はすべてこの条件を満たしている. また, E-7 から E-12 では, $-N \leq q-j \leq N$ のみを考えれば十分である. 例として E-10 の場合, $p+q+r=0$ より $r-(k+l) = r+q = -p$ であるため, $-N \leq r-(k+l) \leq N$ を満たしている.

また, 上記の E-1 から E-12 までの 12 の状況は互いに排反ではない. 例えば, E-1 において $l = -p-q$ とした状況と E-2 において $k = -p-q$ とした状況は同一の状況を指す. このような, いくつかの状況が同一の状況を指す組み合わせとそのときの条件をまとめる.

まず, $-p = p+q$ つまり $2p+q=0$ であるとき, E-1 と E-4, E-2 と E-5, E-3 と E-6 はそれぞれ同じ状況を指す. $2p+q \neq 0$ の下での, E-1, E-2, E-3 と E-4, E-5, E-6 それぞれが同じ状況となる条件をまとめたものが表 E2 である.

表 E3 $j \neq -p, p+q$ の下で E-7 から E-12 のいずれか 2 つが同一になる条件とその組み合わせ.

条件	組み合わせ	条件	組み合わせ
$j = -p + q$	E-7 and E-8	$j = -p + q$	E-9 and E-10
$j = p$	E-7 and E-9	$2j = q$	E-9 and E-11
$j = p, q = 2p$	E-7 and E-10	$j = p, q = 2p$	E-9 and E-12
$j = p, q = 2p$	E-7 and E-11	$j = p, q = 2p$	E-10 and E-11
$2j = q$	E-7 and E-12	$j = p$	E-10 and E-12
$j = p, q = 2p$	E-8 and E-9	$j = -p + q$	E-11 and E-12
$2j = q$	E-8 and E-10	-	-
$j = p$	E-8 and E-11	-	-
$j = p, q = 2p$	E-8 and E-12	-	-

次に, E-7 から E-12 を考える. これらにおいて $j = -p$ とした場合の (j, k, l) は, E-1 から E-3 のいずれかに含まれる. 例として, E-7 で $j = -p$ としたとき, $(j, k, l) = (-p, p, -p)$ となるが, それは E-3 において $k = p$ とした状況と等しい. 同様に, E-7 から E-12 において $j = p + q$ とした場合の (j, k, l) は, E-4 から E-6 のいずれかに含まれる. よって, E-7 から E-12 を考える際は, $j \neq -p, p + q$ とする. これを考慮して, E-7 から E-12 が同じ状況となる条件をまとめたものが表 E3 である.

以上を用いて, 式 (E1) を整理する. E-1 から E-12 それぞれにおいて, 変数 k または l または j が 1 つ存在する. それらをまとめて j で表現すると, 式 (E1) は次のようにできる.

$$\begin{aligned}
& E[\bar{F}_p^0 \bar{F}_q^I \bar{F}_r^{II}] \\
&= U_p^2 H_p H_q H_r \sum_{\substack{j=-N, \\ j \neq 0}}^N U_j^2 \left[\mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(p+q) U_{p+q}^2 \left\{ E(-p, -p-q, j) + E(-p, j, -p-q) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p-q\}}(j) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + E(-p, j, -j) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p-q, p+q\}}(j) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(p+q) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(2p+q) U_{p+q}^2 \left\{ E(p+q, -p-q, j) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + E(p+q, j, -p-q) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p-q\}}(j) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + E(p+q, j, -j) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p-q, p+q\}}(j) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{1}_{[-N+q, N+q] \setminus \{-p, q, p+q\}}(j) U_{q-j}^2 \left\{ E(j, -j, -p) + E(j, -j, -q+j) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p+q\}}(j) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + E(j, -p, -j) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{p\}}(j) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + E(j, -q+j, -j) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p+q, q/2\}}(j) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + E(j, -p, -q+j) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{q/2, p\}}(j) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + E(j, -q+j, -p) \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p+q, q/2, p\}}(j) \right\} \right] \quad (E2)
\end{aligned}$$

$$E(j, k, l) = H_j H_k H_{k+l}$$

式 (E2) 右辺の各項は, 表 E1 の各状況に対応している. 例えば, 式 (E2) 右辺第 10 項は E-10 に対応している. また, ここまでの議論で, E-10 において $j = -p, p + q$ の場合は, それぞれ E-1 と E-5 に含まれる. 加えて表 E1 から E-10 では $j \neq q$ が必要なため, $j \neq -p, q, p + q$ とする目的で式 (E2) 右辺上から 5 行目にあるように, $\mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p, q, p+q\}}(j)$ を乗じてある. また, $q = 2p$ かつ $j = p (= q/2)$ のとき E-7 の一部, $j = q/2$ のとき E-8 の一部, $j = -p + q$ のと

き E-9 の一部と E-10 は同一の状況になる．ここで，E-7 の一部と E-10 が同一の状況になるとき，常に E-8 の一部と E-10 も同一の状況になるため，E-8 と E-10 と，E-9 と E-10 の関係についてのみ考えればよい．結果として，式 (E2) 右辺第 10 項には $\mathbb{1}_{\mathbb{Z} \setminus \{-p+q, q/2\}}(j)$ が乗じてある．

謝辞

本研究を行い博士論文にまとめるにあたり暖かいご指導をいただいた中尾裕也教授にお礼申し上げます。また，日頃の研究から本論文の執筆に至るまで，多大なご協力を賜りました土田崇弘助教に深く感謝申し上げます。研究室秘書の久保田さんには，研究室における生活面でのサポートをいただきました。感謝いたします。

参考文献

- [1] T. K. Caughey. Derivation and application of the Fokker-Planck equation to discrete nonlinear dynamic systems subjected to white random excitation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 35(11):1683–1692, 1963.
- [2] Y. Yong and Y. K. Lin. Exact stationary-response solution for second order nonlinear systems under parametric and external white-noise excitations. *Journal of Applied Mechanics*, 54(2):414–418, 1987.
- [3] Y. K. Lin and Guoqiang Cai. Exact stationary response solution for second order nonlinear systems under parametric and external white noise excitations: Part II. *Journal of Applied Mechanics*, 55(3):702–705, 1988.
- [4] R. G. Bhandari and R. E. Sherrer. Random vibrations in discrete nonlinear dynamic systems. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 10(2):168–174, 1968.
- [5] R. S. Langley. A finite element method for the statistics of non-linear random vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 101(1):41–54, 1985.
- [6] B. F. Spencer and L. A. Bergman. On the numerical solution of the Fokker-Planck equation for nonlinear stochastic systems. *Nonlinear Dynamics*, 4(4):357–372, 1993.
- [7] A. Naess and J. M. Johnsen. Response statistics of nonlinear, compliant offshore structures by the path integral solution method. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 8(2):91–106, 1993.
- [8] A. Naess and V. Moe. Efficient path integration methods for nonlinear dynamic systems. *Probabilistic engineering mechanics*, 15(2):221–231, 2000.
- [9] G. K. Er. Exponential closure method for some randomly excited non-linear systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 35(1):69–78, 2000.
- [10] M. Di Paola and F. P. Pinnola. *Probabilistic Engineering Mechanics*, pages 149–156.
- [11] M. Di Paola. Fokker Planck equation solved in terms of complex fractional moments. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 38:70–76, 2014.
- [12] R. L. Stratonovich. *Topics in the theory of random noise*, volume 2. CRC Press, 1967.
- [13] X. Jin, Y. Wang, Z. Huang, and M. Di Paola. Constructing transient response probability density of non-linear system through complex fractional moments. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 65:253–259, 2014.
- [14] X. Xie, J. Li, D. Liu, and R. Guo. Transient response of nonlinear vibro-impact system under Gaussian white noise excitation through complex fractional moments. *Acta Mechanica*, 228(3):1153–1163, 2017.
- [15] H. L. Dryden. A review of the statistical theory of turbulence. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1(1):7–42, 1943.
- [16] W. J. Pierson Jr and L. Moskowitz. A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of sa kitaigorodskii. *Journal of Geophysical Research*, 69(24):5181–5190, 1964.

- [17] S. Okamoto. *Introduction to Earthquake Engineering Second Edition*. University of Tokyo Press, 1984.
- [18] J. B. Roberts and P. D. Spanos. Stochastic averaging: an approximate method of solving random vibration problems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 21(2):111–134, 1986.
- [19] H. Risken. *The Fokker-Planck equation*, volume 3. Springer, 1996.
- [20] S. S. Guo and Q. Shi. Probabilistic solutions of nonlinear oscillators to subject random colored noise excitations. *Acta Mechanica*, 228(1):255–267, 2017.
- [21] P. D. Spanos. A method for analysis of non-linear vibrations caused by modulated random excitation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 16(1):1–11, 1981.
- [22] P. Kumar, S. Narayanan, and S. Gupta. Finite element solution of Fokker–Planck equation of nonlinear oscillators subjected to colored non-Gaussian noise. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 38:143–155, 2014.
- [23] M. Sakata and K. Kimura. Calculation of the non-stationary mean square response of a non-linear system subjected to non-white excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 73(3):333–343, 1980.
- [24] K. Kimura and M. Sakata. Non-stationary responses of a non-symmetric non-linear system subjected to a wide class of random excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 76(2):261–272, 1981.
- [25] 横山 健太郎, 植前 理紗, 田村 晋司, 木村 康治. 高次統計量を用いた非白色励振を受ける非対称非線形系の非ガウス応答特性評価. *日本機械学会論文集 C 編*, 78(796):3926–3935, 2012.
- [26] W. F. Wu and Y. K. Lin. Cumulant-neglect closure for non-linear oscillators under random parametric and external excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 19(4):349–362, 1984.
- [27] A. Steinwolf. Random vibration testing beyond psd limitations. *Sound and Vibration*, 40(9):12–21, 2006.
- [28] N. H. Ko, K. P. You, and Y. M. Kim. The effect of non-Gaussian local wind pressures on a side face of a square building. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 93(5):383–397, 2005.
- [29] S. Elgar and R. T. Guza. Observations of bispectra of shoaling surface gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 161:425–448, 1985.
- [30] F. Yamazaki and M. Shinozuka. Digital generation of non-Gaussian stochastic fields. *Journal of Engineering Mechanics*, 114(7):1183–1197, 1988.
- [31] M. Grigoriu. Simulation of stationary non-Gaussian translation processes. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(2):121–126, 1998.
- [32] F. Xu and X. Ma. An efficient simulation algorithm for non-Gaussian nonstationary processes. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 63:103105, 2021.
- [33] K. K. Phoon, H. W. Huang, and S. T. Quek. Simulation of strongly non-Gaussian processes using karhunen–loeve expansion. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 20(2):188–198, 2005.
- [34] A. Steinwolf. Approximation and simulation of probability distributions with a variable kurtosis value. *Computational Statistics & Data Analysis*, 21(2):163–180, 1996.
- [35] V. Y. Kontorovich and V. Z. Lyandres. Stochastic differential equations: an approach to the generation of continuous non-Gaussian processes. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(10):2372–2385, 1995.
- [36] G. Q. Cai and Y. K. Lin. Generation of non-Gaussian stationary stochastic processes. *Physical Review E*, 54(1):299–303, 1996.
- [37] G. Q. Cai and C. Wu. Modeling of bounded stochastic processes. *Probabilistic engineering mechanics*, 19(3):197–203, 2004.
- [38] W. Q. Zhu and G. Q. Cai. Generation of non-Gaussian stochastic processes using nonlinear filters. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 36:56–62, 2014.

- [39] 土田 崇弘, 木村 康治. 包絡線分布を用いた狭帯域非ガウス確率過程の生成法. *日本機械学会論文集*, 80(812), 2014.
- [40] M. Grigoriu and S. T. Ariaratnam. Response of Linear Systems to Polynomials of Gaussian Processes. *Journal of Applied Mechanics*, 55(4):905–910, 1988.
- [41] C. Wu and G. Q. Cai. Effects of excitation probability distribution on system responses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 39(9):1463–1472, 2004.
- [42] G. Q. Cai and Y. Suzuki. Response of systems under non-Gaussian random excitations. *Nonlinear Dynamics*, 45(1):95–108, 2006.
- [43] 土田 崇弘, 木村 康治. 帯域幅を考慮した非ガウス性不規則入力を受ける非対称非線形剛性系の応答分布. *日本機械学会論文集 C 編*, 79(799):582–592, 2013.
- [44] 土田 崇弘, 上原 大暉, 木村 康治. パワースペクトルの形状差に着目した非ガウス性不規則励振を受ける 1 自由度線形系の応答分布. *日本機械学会論文集*, 83(855), 2017.
- [45] 福島 英人, 土田 崇弘. 帯域幅を考慮した非ガウス性不規則入力を受ける線形系の過渡応答特性. *日本機械学会論文集*, 87(899), 2021.
- [46] 小寺忠. *パラメータ励振*. 森北出版, 2010.
- [47] R. A. Ibrahim. *Parametric Random Excitation*. Research Studies Press, 1985.
- [48] J. B. Roberts. Effect of parametric excitation on ship rolling motion in random waves. *Journal of Ship Research*, 26(04):246–253, 1982.
- [49] R. L. Stratonovich and Y. M. Romanovskii. Parametric effect of a random force on linear and non-linear oscillatory systems. In *Non-Linear Transformations of Stochastic Processes*, pages 322–326. 1965.
- [50] S. T. Ariaratnam and D. S. F. Tam. Random vibration and stability of a linear parametrically excited oscillator. *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik*, 59:79–84, 1979.
- [51] C. Floris. Mean square stability of a second-order parametric linear system excited by a colored Gaussian noise. *Journal of Sound and Vibration*, 336:82–95, 2015.
- [52] S. K. Thampi and J. M. Niedzwecki. Parametric and external excitation of marine risers. *Journal of Engineering Mechanics*, 118(5):942–960, 1992.
- [53] H. Zhu, G. Geng, Y. Yu, and L. Xu. Probabilistic analysis on parametric random vibration of a marine riser excited by correlated Gaussian white noises. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 126:103578, 2020.
- [54] E. Wong and M. Zakai. On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals. *The Annals of Mathematical Statistics*, 36(5):1560–1564, 1965.
- [55] L. Niu, W. Xu, and Q. Guo. Transient response of the time-delay system excited by Gaussian noise based on complex fractional moments. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 31(5):053111, 2021.
- [56] C. Gardiner. *Stochastic methods*, volume 4. Springer, 2009.
- [57] W. Q. Zhu. Exact solutions for stationary responses of several classes of nonlinear systems to parametric and/or external white noise excitations. *Applied Mathematics and Mechanics*, 11(2):165–175, 1990.
- [58] Y. K. Lin and G. Q. Cai. *Probabilistic Structural Dynamics: Advance Theory and Application*. McGraw-Hill, 1995.
- [59] S. S. Guo. Probabilistic solutions of stochastic oscillators excited by correlated external and parametric white noises. *Journal of Vibration and Acoustics*, 136(3), 2014.
- [60] G. Q. Cai and W. Q. Zhu. Generation of two correlated stationary Gaussian processes and application to

- ship rolling motion. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 57:26–31, 2019.
- [61] S. S. Guo and Q. Shi. Transient influence of correlation between excitations on system responses. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 80:104866, 2020.
- [62] S. S. Guo and Q. Shi. Stationary solution of duffing oscillator driven by additive and multiplicative colored noise excitations. *Journal of Vibration and Acoustics*, 139(2), 2017.
- [63] K. Hasselmann, W. Munk, and G. MacDonald. Bispectra of ocean waves. In *Symposium on Time Series Analysis*, pages 125–139. New York, 1963.
- [64] D. R. Brillinger. An introduction to polyspectra. *The Annals of mathematical statistics*, pages 1351–1374, 1965.
- [65] C. H. McComas and M. G. Briscoe. Bispectra of internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 97(1):205–213, 1980.
- [66] 松本 宏行, 山川 新二. バイスpekトルによる非線形振動系の同定. *日本機械学会論文集 C 編*, 61(588):3184–3189, 1995.
- [67] 松本 宏行, 山川 新二, 大石 久己. 不規則入力を受ける非線形系のスペクトル解析および同定. *日本機械学会論文集 C 編*, 62(604):4491–4498, 1996.
- [68] T.W.S. Chow and G. Fei. Three phase induction machines asymmetrical faults identification using bispectrum. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 10(4):688–693, 1995.
- [69] S. Guoji, S. McLaughlin, X. Yongcheng, and P. White. Theoretical and experimental analysis of bispectrum of vibration signals for fault diagnosis of gears. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 43(1-2):76–89, 2014.
- [70] J. W. Johansen. Update on bispectral index monitoring. *Best Practice & Research Clinical Anaesthesiology*, 20(1):81–99, 2006.
- [71] M. D. Shields and H. Kim. Simulation of higher-order stochastic processes by spectral representation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 47:1–15, 2017.
- [72] L. Vandanapu and M. D. Shields. 3rd-order spectral representation method: Simulation of multi-dimensional random fields and ergodic multi-variate random processes with fast fourier transform implementation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 64, 2021.
- [73] L. D. Lutes and D. C. K. Chen. Trispectrum for the response of a non-linear oscillator. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 26(6):893–909, 1991.
- [74] M. J. Hinich and G. R. Wilson. Time delay estimation using the cross bispectrum. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(1):106–113, 1992.
- [75] P. Marzocca, J. M. Nichols, M. Seaver, S. T. Trickey, and A. Milanese. Development of higher-order spectra for randomly excited quadratic nonlinear systems: Volterra functional series approach. In *Health Monitoring of Structural and Biological Systems 2007*, volume 6532, pages 297–306. SPIE, 2007.
- [76] J. M. Nichols, P. Marzocca, and A. Milanese. The trispectrum for Gaussian driven, multiple degree-of-freedom, non-linear structures. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44(4):404–416, 2009.
- [77] 馬場 湧太, 土田 崇弘, 木村 康治. 混合ガウスモデルを用いた非ガウス性不規則入力を受ける非線形系の応答分布解析. *日本機械学会論文集*, 81(823), 2015.
- [78] W. D. Iwan and P. T. Spanos. Response envelope statistics for nonlinear oscillators with random excitation. *Journal of Applied Mechanics*, 45(1):170–174, 1978.
- [79] P. D. Spanos, A. Sofi, and M. Di Paola. Nonstationary response envelope probability densities of nonlinear

- oscillators. *Journal of Applied Mechanics*, 74(2):315–324, 2006.
- [80] C. L. Nikias and A. P. Petropulu. *Higher-Order Spectral Analysis: A nonlinear signal processing framework*. New Jersey: PTR Prentice-Hall, 1993.
 - [81] Y. K. Lin. *Probabilistic theory of structural dynamics*. McGraw-Hill, 1967.
 - [82] C. L. Nikias and M. R. Raghuveer. Bispectrum estimation: A digital signal processing framework. *Proceedings of the IEEE*, 75(7):869–891, 1987.
 - [83] P. E. Kloeden and E. Platen. *Probabilistic theory of structural dynamics*. Springer, 1992.
 - [84] M. Shinozuka and G. Deodatis. Simulation of stochastic processes by spectral representation. *Applied Mechanics Reviews*, 44(4):191–204, 1991.
 - [85] Y. C. Kim and E. J. Powers. Digital bispectral analysis and its applications to nonlinear wave interactions. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 7(2):120–131, 1979.
 - [86] M. Shinozuka and C.-M. Jan. Digital simulation of random processes and its applications. *Journal of Sound and Vibration*, 25(1):111–128, 1972.
 - [87] G. Q. Cai. Generation of correlated random variables and stochastic processes. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 52:40–46, 2018.