論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	
Title(English)	Probabilistic studies of the value-distributions of zeta and L-functions
著者(和文)	峰正博
Author(English)	Masahiro Mine
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第11866号, 授与年月日:2021年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:鈴木 正俊,田口 雄一郎,加藤 文元,内藤 聡,谷田川 友里
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第11866号, Conferred date:2021/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	審査の要旨
Type(English)	Exam Summary

（博士課程）

論文審査の要旨及び審査員

報告番号	甲第　　号	学位申請者氏名	峰 正博

論文審査審査員		氏　名	職　名		氏　名	職　名
	主査	鈴木 正俊	准教授	審査員	谷田川 友里	准教授
	審査員	加藤 文元	教授			
		田口 雄一郎	教授			
		内藤 聡	教授			

論文審査の要旨（2000 字程度）

ゼータ関数またはＬ関数（以下，両者合せて「Ｌ関数」という）と総称される特殊関数の一群は，整数論の主要な研究対象の一つである．Ｌ関数の値分布の理論は，20 世紀初頭に H. Bohr らによって創始されて以来，様々な方向へ発展してきた．近年では，Ｌ関数を確率変数の一種とみなすランダム Euler 積の理論や，21 世紀初頭に伊原康隆と松本耕二により提唱された M 関数の理論のように，確率論的手法によるＬ関数の値分布の研究が盛んである．本論文は，「Probabilistic studies of the value-distributions of zeta and *L*-functions」と題し，本論文全体の概要を述べた一つの章と，Ｌ関数の値分布に関する確率論的研究の成果をまとめた五つの章から構成されている．

第一章「Introduction」では，先行研究の概要と共に，本論文の主結果が手際良く解説されている．

第二章「General *L*-functions」では，主結果を証明するための一つ目の準備として，Selberg クラス，松本ゼータ関数，Steuding クラスという三種のＬ関数の公理的定式化を復習した後，それらの関係性を解説している．そして，それらを踏まえて，本論文における値分布論の枠組みを論じている．さらに，以降の章で用いる複数のＬ関数の族を導入している．

第三章「Random Euler products」では，主結果を証明するための二つ目の準備として，Ｌ関数の族の確率論的なモデルである，素数により添え字付けられた確率変数の列から定まるランダム Euler 積について復習した後，それらの基本的な性質を述べている．また，伊原・松本により M 関数と名付けられた，ランダム Euler 積の確率密度関数について論じている．さらに，第二章で導入した各々のＬ関数の族に対応する確率変数の列が特定されている．

第四章「The value-distributions of *L*-functions」では，まず，Ｌ関数が Selberg クラスと Steuding クラスの双方に属すならば，その複素関数としての値分布が，第三章で特定されたランダム Euler 積の M 関数により記述されることを証明している．次に，有理数体上非ガロアな 3 次体に付随する Artin Ｌ関数の族について，Bhargava-Shankar-Tsimerman および Taniguchi-Thorne による 3 次体の数え上げ公式を用いて，変数の値を固定して体を動かした場合の，値分布の M 関数を決定している．また，この結果の代数的整数論への応用として，従来 2 次体について知られていた，類数の平均値に関するある種の漸近公式を，有理数体上非ガロアな 3 次体の場合に証明している．さらに，重さ 2 の素数レベルの正則尖点形式のＬ関数の族に対して，Eichler-Selberg 跡公式を確率論的に解釈することにより，変数の値を固定してレベルを動かした場合の，値分布の M 関数を決定している．

第五章「Further results on the Riemann zeta-function」では，対象を最も単純な Riemann ゼータ関数に限定して，その複素関数としての値分布とランダム Euler 積を精密に比較することによって，Lamzouri-Lester-Radziwiłł による値分布の大偏差に関係したある種の漸近公式を改良している．

第六章「Results for other zeta-functions」では，これ以前の四章とは異なり，ランダム Euler 積では捉えられない，Euler 積を持たないＬ関数の値分布を論じている．まず，Riemann ゼータ関数に対する Guo の手法を拡張することにより，Hurwitz-Lerch ゼータ関数について，パラメータが特殊な超越数である場合に，複素関数としての値分布の漸近等式を誤差項付きで証明している．その応用として，従来は不等式での評価しか知られていなかった Hurwitz-Lerch ゼータ関数の零点の個数関数について，誤差項付きの漸近等式を証明している．さらに，井上翔太により導入された Riemann ゼータ関数の対数の逐次積分によって定義される関数について，値分布の確率論的極限公式を証明している．

以上のように，本論文ではＬ関数の値分布論について幅広い成果が述べられており，基礎付けと応用の両面で理論を大きく推し進めている．また，これらの研究結果はＬ関数の値分布論の範囲に留まらず，整数論の関連分野に新たな知見をもたらしたものであり，理学上の貢献は大である．よって本論文は博士（理学）の学位論文として十分な価値があるものと認める．