

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	ODE/IM対応におけるWKB周期とTBA方程式
Title(English)	WKB periods and TBA equations in ODE/IM correspondence
著者(和文)	近藤宇泰
Author(English)	Takayasu Kondo
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第11688号, 授与年月日:2022年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:伊藤 克司,今村 洋介,慈道 大介,笹本 智弘,関澤 一之
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第11688号, Conferred date:2022/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	審査の要旨
Type(English)	Exam Summary

(博士課程)

論文審査の要旨及び審査員

報告番号	甲第	号	学位申請者氏名	近藤宇泰		
			氏名	氏名	職名	
論文審査 審査員	主査		伊藤克司	教授	関澤一之 准教授	
	審査員		今村洋介	准教授		
				慈道大介	教授	
				笹本智弘	教授	

論文審査の要旨 (2000 字程度)

近年 ODE/IM 対応と呼ばれる常微分方程式のスペクトル問題と量子可積分型における関数関係式に基づく解析の対応が見出され、数理論理学及び超弦理論の分野で注目されている。またその対応を用いて量子力学における厳密 WKB 解析や超対称ゲージ理論の非摂動効果や強結合領域の物理等の物理への新しい応用がなされている。先行研究において、ODE/IM 対応を多項式型のポテンシャルに対応するシュレーディンガー方程式に適用することにより、対応する量子力学系の厳密 WKB 周期と量子可積分型における熱力学的ベータ仮説(TBA)方程式の解との対応がわかり、非摂動効果を含む厳密な WKB 周期の解析が可能になった。この WKB 周期は強結合 $N=2$ 超共形場理論である Argyres-Douglas 理論の低エネルギー有効理論を特徴づける Seiberg-Witten 周期とも見なすことができ、強結合領域の真空構造を特徴づける新しい手法を提供している。本論文は、高階常微分方程式に ODE/IM 対応の手法を適用し、高階微分方程式の WKB 周期と対応する TBA 方程式の関係を調べ、さらに真空のパラメータの変化に対応する TBA 方程式の wall-crossing 現象を調べることに、異なるタイプの Argyres-Douglas 理論間の対応があることを示した。

本論文は”WKB periods and TBA equations in ODE/IM correspondence”と題し、申請者の3本の共著論文に基づき、申請者の寄与を中心にまとめられたものである。本論文は8つの章と5つの補遺からなる。第1章”Introduction”では、本論文の背景と動機を述べた後、可積分性、ODE/IM 対応、WKB 解析と wall-crossing 現象、4次元 $N=2$ 理論等を概観している。第2章”Integrability in 2 dimensions”では、2次元の可積分型である 6-vertex 模型を中心に、量子可積分型に現れるベータ仮説方程式、Baxter の T-Q 関係式、また本論文で重要な 2次元可積分場の理論における準粒子の有効エネルギーを表す Y 関数とその Y 関数の満たす関係式(Y-系)や TBA 方程式を導入している。第3章”ODE/IM correspondence and numerical tests for affine Lie algebras”では、単項式ポテンシャルのシュレーディンガー方程式の ODE/IM 対応により 6-vertex 模型のベータ仮説方程式や Baxter の T-Q 関係式が得られることを示した後、2階の常微分方程式を affine Lie 代数に対応する戸田場方程式に付随する線形方程式と見なすことにより、高階の微分方程式への拡張が得られ、その微分方程式が affine Lie 代数(の Langlands 双対)に対応する量子化積分型に対応することを示した。さらに数値的にその対応を検証した。第4章”TBA equations and its wall-crossing for the Schrodinger equation”では、多項式型ポテンシャルを持つシュレーディンガー方程式に ODE/IM 対応を適用し、方程式の subdominant 解のロンスキアンとの複比と量子可積分型の Y-関数の対応を見出した。また Y-関数の満たす TBA 方程式の解析性を調べ、Y-関数と厳密 WKB 周期が一致することを示した。またポテンシャルの変形により、TBA 方程式が変化する現象(wall-crossing 現象)を調べた。第5章”Four-dimensional $N=2$ theory and the quantum Seiberg-Witten curve”では、4次元 $N=2$ 超対称ゲージ理論の低エネルギー有効理論の厳密解を与える Seiberg-Witten 理論についてレビューを行った。特に真空を特徴づける BPS 粒子とそのスペクトルが真空のパラメータの変化に対し変化する現象(BPS wall-crossing)について説明し、さらに本研究と深い関連にある強結合 $N=2$ 超共形場理論である Argyres-Douglas 理論について説明を行った。また Ω 背景場で理論の分配関数を正則化すると、その Nekrasov-Shatashvili 極限で低エネルギー有効理論を特徴づける Seiberg-Witten 曲線が量子化され、Argyres-Douglas 理論の場合対応する常微分方程式が多項式型のポテンシャルを持つ高階微分方程式となることが示され、対応する Seiberg-Witten 周期が厳密 WKB 周期で与えられることを示した。第6章”WKB periods and Y-functions for higher order ODE”では、多項式型のポテンシャルを持つ高階微分方程式に対して WKB 法を適用し、WKB 周期に対する高次補正を系統的に計算する方法を示した後、ODE/IM 対応により対応する量子可積分系の Y-関数と TBA 方程式を決定した。さらに3階の微分

方程式に対し、WKB 周期と TBA 方程式の解を数値的に比較し一致していることを見た。第7章”Wall-crossing phenomena for the third order ODE”では、3階の微分方程式のポテンシャルを変形することにより、対応するN=2理論のBPSスペクトルとTBA方程式のwall-crossing現象を考察した。この結果、ポテンシャルの対称性により対応するTBA方程式が変化し、パラメータの変化により異なる可積分模型が対応する興味深い現象が見出された。これは4次元理論の見地では異なるタイプのArgyres-Douglas理論の双対性と解釈され、超対称理論の真空の大局的構造を調べる際にTBA方程式が有効であることが示された。また5つの補遺においては、本章で説明できなかった、Lie代数の基本データ、TBA方程式、ODEの級数解を求めるChengの手法、WKB展開を求めるための方法、wall-crossingの具体例について説明を行っている。以上の章で特に3,6,7章は自身の論文に基づいたオリジナルな結果を含んでいる。

本論文はODE/IM対応という見地から、可積分系や量子力学、場の量子論における基礎的な問題において大きな進展をもたらしたものである。またこの論文の幅広い内容は、申請者の知見の広さと研究能力の高さを表している。

よって本論文は、博士(理学)の学位論文として十分価値のあるものと認められる。

注意：「論文審査の要旨及び審査員」は、東工大リサーチポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。