T2R2 東京科学大学 リサーチリポジトリ
Science Tokyo Research Repository

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	4次元多様体上のポシェット手術と3次元Brieskornホモロジー球面のd不変量
Title(English)	Pochette surgery on 4-manifolds and the d-invariants of Brieskorn homology 3-spheres
著者(和文)	鈴木龍正
Author(English)	Tatsumasa Suzuki
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第12635号, 授与年月日:2024年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:遠藤 久顕,本多 宣博,五味 清紀,KALMAN TAMAS,野坂 武史
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第12635号, Conferred date:2024/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	論文要旨
Type(English)	Summary

Powered by T2R2 (Science Tokyo Research Repository)

（博士課程）
Doctoral Program

論 文 要 旨

THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	数学 数学	系 コース	申請学位（専攻分野）： Academic Degree Requested	博士 Doctor of	（ 理学 ）
学生氏名： Student's Name	鈴木 龍正		審査員主査： Chief Examiner	遠藤 久顕	

要旨（和文 2000 字程度）
Thesis Summary（approx.2000 Japanese Characters ）

本博士学位論文の内容は次の 2 つの研究内容(A), (B)から構成される:
研究内容(A)について: 円周と 3 次元球体の直積と、円板と 2 次元球面の直積の境界連結和をポシェットと呼ぶ。2004 年に岩瀬順一氏と松本幸夫氏は Gluck 手術の一般化の一種である、ポシェット手術と呼ばれるコードとコア球面を用いた手術を導入した。ポシェット手術とは、4 次元多様体Xにポシェットを埋め込み、ポシェットの内部をXから除き、ポシェットの境界の微分同相写像でポシェットをXに再接着する操作と、この操作後に得られる 4 次元多様体のことを指す。本論文では、まずポシェットを 4 次元多様体に埋め込む際に、非自明なコードが存在する可能性があることを説明する。そして、ポシェット手術の基本群の表示の方法について解説する。更に、ポシェット手術についての mod 2 framing と絡み数について明確に定義する。

ポシェット手術の微分同相類は、ポシェットに対する埋め込み写像、ポシェットの境界の微分同相写像によるメリディアンと呼ばれるポシェットの部分多様体の像のホモロジー類から決まるスロープと呼ばれる有理数または無限遠点の値を取り得る数、ポシェットの境界の微分同相写像によるメリディアンの像の mod 2 framing で決まることが岩瀬氏と松本氏により証明されている。特別な場合のポシェット手術についての手術前の 4 次元多様体のハンドル図式から、手術後の 4 次元多様体のハンドル図式の描き方について、具体的なポシェットの境界の微分同相写像の合成写像を明示しながら、任意のスロープの場合について紹介する。特に、スロープが$1/p$または$p/(p+1)$の場合のポシェット手術後の 4 次元多様体のハンドル図式の描き方について具体的に紹介する。また、任意の 4 次元ホモロジー球面上のポシェット手術に対するホモロジー群と、任意の単連結な 4 次元閉多様体上のある特別な埋め込みに対するポシェット手術に対するホモロジー群を計算する。また、上記の仮定の下で、ポシェット手術前後でホモトピー型が不変になる為の必要十分条件を提示する。

以上の準備の下で、4 次元球面上のポシェット手術においてコードが自明な場合は Gluck 手術の問題に帰着されることを証明する。そして、コア球面が自明な場合は、4 次元球面上のポシェット手術で得られる 4 次元ホモロジー球面は 4 次元球面に微分同相になることを示す。更に、コア球面が任意の非自明なリボン 2 次元結び目の場合に、非自明なコードが取れることを示す。そして、非自明なリボン 2 次元結び目が ribbon 2-knot of 1-fusion の場合は、4 次元球面上のポシェット手術が 4 次元球面と微分同相になるような非自明なコードが常に存在することを示す。更に、任意の 2 以上の整数nに対して、4 次元球面上のポシェット手術が 4 次元球面に微分同相になるような非自明なコードが取れる ribbon 2-knot of n-fusion が存在することを示す。特に、4 次元ホモトピー球面を生成する 4 次元球面上のポシェット手術が 4 次元球面に微分同相になるような非自明なコードが存在するための十分条件を、4 次元球面上のポシェット手術のハンドル分解の様子から得られる Andrews-Curtis 自明な群の有限表示を用いることで、任意のnに対して可算無限個提示する。

更に、任意の結び目群のある有限表示に任意の関係式を 1 つ加えた有限表示群Rに対して、基本群がRと同型になるリボン 2 次元結び目上のポシェット手術が存在することを示す。特に、任意の結び目に沿う 3 次元球面上の(係数$1/q$の)Dehn 手術の基本群はあるリボン 2 次元結び目に沿う 4 次元球面上のポシェット手術(で構成される 4 次元ホモロジー球面)の基本群で実現されることを示す。
研究内容(B)について: 3 次元ホモロジー球面が滑らかな 4 次元ホモロジー球体の境界になる為の必要十分条件は未解明である。この問題は、最も基本的な 3 次元ホモロジー球面の一つである、$1 < p < q < r$を満たす互いに素な整数の組(p,q,r)で決まる Brieskorn ホモロジー球面$\Sigma(p,q,r)$に限定しても未解決である。2003 年に Ozsváth 氏と Szabó 氏により導入されたd不変量と呼ばれる有理ホモロジーspin^c同境不変量がある。d不変量は、3 次元ホモロジー球面が滑らかな 4 次元有理ホモロジー球体の境界でないことを示す際に有効である。一般の$\Sigma(p,q,r)$に対する Can 氏と Karakurt 氏による、ある$p,\ q,\ r$に依存する位数の集合内にある有理数の最大値を取ることで計算するd不変量の公式が存在する。2020 年、Karakurt 氏と Şavk 氏により、任意の$pq+pr-qr=1$を満たす$\Sigma(p,q,r)$のd不変量は、pが偶数の場合は計算され、奇数の場合には公式が存在する。

本論文では、$pq+pr-qr=1$かつpが奇数である場合に、Karakurt 氏と Şavk 氏により提唱された$\Sigma(p,q,r)$のd不変量の公式を基に、より精密な公式を提示する。この精密化された公式を用いて、$q-p=2$または$p \leq 23$かつ$q-p \geq (p-1)/2$の場合の$\Sigma(p,q,r)$のd不変量を新たに計算する。更に、$pq+pr-qr=1$の場合に、pの偶奇によらない$\Sigma(p,q,r)$のd不変量に対する自然な不等式関係を導出する。これらの結果を基に、2 つの Brieskorn ホモロジー球面同士がホモロジー同境でない Brieskorn ホモロジー球面の組を新たに可算無限通り提示する。また、Ozsváth 氏と Szabó 氏によるレンズ空間のd不変量の相互法則を一般化する。更に、この一般化により$\Sigma(p,q,r)$のd不変量の公式における位数をrに依存しないpq以下の数まで減らすことで、この公式を精密化する。

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。
Note：Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。
Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).

（博士課程）
Doctoral Program

論 文 要 旨

THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	数学 系 数学 コース		申請学位（専攻分野）： Academic Degree Requested	博士 Doctor of	（ 理学 ）
学生氏名： Student's Name	鈴木 龍正		審査員主査： Chief Examiner	遠藤 久顕	

要旨（英文 300 語程度）
Thesis Summary（approx.300 English Words ）

This doctoral thesis consists of the following two research contents (A) and (B):
The research content (A): The boundary sum of the product of a circle with a 3-ball and the product of a disk with a 2-sphere is called a pochette. The pochette surgery, which was discovered by Iwase and Matsumoto, is a generalization of the Gluck surgery. For a pochette P embedded in a 4-manifold X, a pochette surgery on X is the operation of removing the interior of P and gluing P by a diffeomorphism of the boundary of P.

In this paper, we investigate any pochette surgery on the 4-sphere with a trivial core sphere or a trivial cord trivial. Furthermore, we give infinitely many examples of pochette surgeries on the 4-sphere with a non-trivial core sphere and a non-trivial cord such that the surgeries give 4-sphere. We also show that the finite representation group obtained by adding one any relation to a finite representation of any knot group is isomorphic to the fundamental group of a pochette surgery on the 4-sphere along a ribbon 2-knot.
The research content (B): In 2003, Ozsváth and Szabó introduced an invariant of rational homology spin^c cobordisms called a d-invariant. Can and Karakurt constructed a formula for the d-invariant of any Brieskorn homology sphere. In 2020, Karakurt and Şavk investigated the d-invariant of the Brieskorn homology sphere $\Sigma(p,q,r)$ with $pq+pr-qr=1$. They derived concrete calculation results with p even and a formula with p odd.

In this paper, we find a sharper evaluation formula when p is odd and present some sufficient conditions for the equality of this formula. We introduce a reciprocity law for d-invariants of two lens spaces. By using the generalized reciprocity law, we reduce the order in the formula for any d-invariant of any Brieskorn homology sphere to a number less than or equal to pq that does not depend on r, and refine it.

備考 ： 論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。
Note : Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ（T2R2）にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。
Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).