

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	有限生成体の大きな代数拡大体上の Mordell–Weil 群
Title(English)	Mordell–Weil groups over large algebraic extensions of finitely generated fields
著者(和文)	浅山拓哉
Author(English)	Takuya Asayama
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第12634号, 授与年月日:2024年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:田口 雄一郎,落合 理,下元 数馬,鈴木 正俊,谷田川 友里
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第12634号, Conferred date:2024/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	論文要旨
Type(English)	Summary

論文要旨

THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	数学 数学	系 コース	申請学位 (専攻分野)： 博士 Academic Degree Requested Doctor of	(理学)
学生氏名： Student's Name	浅山 拓哉		審査員主査： Chief Examiner	田口 雄一郎

要旨 (和文 2000 字程度)

Thesis Summary (approx.2000 Japanese Characters)

素体上の有限生成体上の Mordell-Weil 群は数論における重要な研究対象であり古くから多くの研究がなされてきた。この分野におけるもっとも基本的な結果である Mordell-Weil の定理は素体上の有限生成体上のアーベル多様体の Mordell-Weil 群が有限生成であることを主張する。基礎体を無限生成体に置き換えたとき、Mordell-Weil 群はどうなるであろうか。

Kummer 忠実体という遠アーベル幾何学に由来する対象から別の問題が生じる。遠アーベル幾何学は数論幾何学の一分野で、代数多様体やそれに関連する幾何学的対象をその代数的基本群から復元する方法を記述することを目的とする。遠アーベル幾何学における代数多様体の基礎体は素体上の有限生成体が想定されていたが、実際には遥かに多くの体が遠アーベル幾何学の基礎体に適していることが最近の研究によりわかってきた。遠アーベル幾何学の基礎体に適していると考えられている体に Kummer 忠実体がある。Kummer 忠実体とは条件「 K の任意の有限次拡大 L とその上で定義される任意の準アーベル多様体 A に対し、Mordell-Weil 群 $A(L)$ が非自明な可除元をもたない」を満たす完全体 K のことをいう。Kummer 忠実体はどのくらい多く存在するだろうか。

申請者はこれらの問題に対する解答を得ることを動機として素体上の有限生成体の無限次代数拡大上で定義される Mordell-Weil 群の構造について研究してきた。本学位論文は次の三つの主題を取り上げる。

- (1) Kummer 忠実体の関数体類似
- (2) 有理数体上の有限生成体のある無限次代数拡大 L に関して、その上で定義される準アーベル多様体の Mordell-Weil 群の構造および L の Kummer 忠実性
- (3) 有限体上の有限生成代数関数体のある無限次代数拡大上で定義される Drinfeld 加群の構造
 - (1) について、上述の Kummer 忠実体の定義における準アーベル多様体を Drinfeld 加群に置き換えることで、代数関数体に対する「Drinfeld-Kummer 忠実体」の概念を定義し、その諸性質について調べた。Kummer 忠実体における小関-田口の結果の類似として、位数 q の有限体 \mathbb{F}_q 上の 1 変数代数関数体 K 上の Galois 拡大 L に対し、拡大 L/K が無限素点を除いて至る所 maximal ramification break が有限ならば、 K は Drinfeld-Kummer 忠実であることを示した。この結果の応用として、 \mathbb{F}_q 上の 1 変数代数関数体 K に、与えられた正整数以下の階数である条件を満たすすべて Drinfeld 加群の \mathfrak{p} 冪等分点 (冪は各 \mathfrak{p} に対し有限) を、すべての素イデアル \mathfrak{p} に亘って添加して得られる体は Drinfeld-Kummer 忠実であることを示した。
 - (2) について、体 K とその絶対 Galois 群 G_K の元の e 個組 σ に対し、 $\bar{K}(\sigma)$ を K の代数閉包 \bar{K} における σ の固定体、 $\bar{K}[\sigma]$ を $\bar{K}(\sigma)/K$ の最大 Galois 部分拡大とする。 K が有理数体 \mathbb{Q} の有限生成体で $e \geq 2$ のとき、(G_K^e の Haar 測度に関して、以下同様) ほとんどすべての σ 、 $\bar{K}[\sigma]$ の任意の有限次拡大 L 、および L 上の任意の準アーベル多様体 A に対し、Mordell-Weil 群 $A(L)$ を振れを法として還元した群は自由アーベル群であることを証明した。先行研究と併せると、 $A(L)$ は有限の振れ群と可算階数の自由 \mathbb{Z} 加群との直和であることがわかる。さらに体 $\bar{K}[\sigma]$ 、および $e \geq 2$ ならば体 $\bar{K}(\sigma)$ がほとんどすべての σ に対してそれぞれ Kummer 忠実であることを示した。この結果は大溪による結果を著しく拡張したものになっている。
 - (3) について、 \mathbb{F}_q 上の有限生成代数関数体 K と G_K の元の e 個組 σ に対し、 $\bar{K}(\sigma)$ 上で定義される Drinfeld 加群の振れについて調べた。申請者は修士課程における研究でこの問題に関する部分的な解答を得ていたが、その一部を拡張することができた。具体的には、ほとんどすべての σ 、 $\bar{K}(\sigma)$ の任意の有限次拡大 M 、および M 上の任意の Drinfeld 加群 ϕ に対して次が成り立つことを証明した：任意の素イデアル \mathfrak{p} に対し、 $\phi(M)$ の \mathfrak{p} 冪振れ部分加群は有限である。さらに $e \geq 2$ ならば $\phi(M)$ の振れ部分加群は有限である。この結果は Geyer-Jarden のアーベル多様体に関する有限性予想の, generic characteristic をもつ Drinfeld 加群に対する類似への完全な解答を与えている。応用として、 $e \geq 2$ のとき、ほとんどすべての σ 、 $\bar{K}[\sigma]$ の任意の有限次拡大 L 、および L 上の任意の Drinfeld 加群 ϕ に対して、 $\phi(L)$ は有限の振れ群と可算階数の自由加群との直和であることが示される。これは (2) の前半で述べた結果の Drinfeld 加群類似である。

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note : Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。
Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).

論文要旨

THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	数学 数学	系 コース	申請学位 (専攻分野)： 博士 Academic Degree Requested Doctor of	(理学)
学生氏名： Student's Name	浅山 拓哉		審査員主査： Chief Examiner	田口 雄一郎

要旨 (英文 300 語程度)

Thesis Summary (approx.300 English Words)

We study the Mordell-Weil group defined over a large algebraic extension of a finitely generated field over its prime field. There are three themes in this thesis.

First, we introduce the notion of Drinfeld-Kummer-faithful fields and investigate its properties. This notion amounts to a function field analogue of that of Kummer-faithful fields. We present a sufficient condition for a Galois extension of a function field to be Drinfeld-Kummer-faithful in terms of ramification theory. We also give some examples of Drinfeld-Kummer-faithful fields, one of which is inspired by Ozeki-Taguchi's construction of highly Kummer-faithful fields.

Second, we discuss the structure of the Mordell-Weil groups of semi-abelian varieties over finite extensions of $\overline{K}(\sigma)$ and $\overline{K}[\sigma]$ when the field K has characteristic zero. Here, for a field K and an e -tuple σ of elements in the absolute Galois group G_K of K , we write $\overline{K}(\sigma)$ for the fixed field of σ in the fixed algebraic closure \overline{K} of K and $\overline{K}[\sigma]$ for the maximal Galois extension of K in $\overline{K}(\sigma)$. We prove that, if $e \geq 2$, then the Mordell-Weil group of any semi-abelian variety over any finite extension of $\overline{K}[\sigma]$ reduced modulo torsion is free for almost all σ in the sense of the Haar measure on G_K^e . Then we deduce that the Mordell-Weil group of any semi-abelian variety over such a field is the direct sum of a finite torsion subgroup and a free \mathbb{Z} -module of denumerable rank. We also show that $\overline{K}(\sigma)$ and $\overline{K}[\sigma]$ are Kummer-faithful for almost all σ , where the former is shown under the assumption $e \geq 2$.

Third, we examine the torsion of Drinfeld modules over a finite extension of $\overline{K}(\sigma)$ for a finitely generated function field K over a finite field and $\sigma \in G_K^e$. We prove some finiteness results for the torsion of Drinfeld modules over such fields. These are extensions of the previous work by the author and give complete analogues for Drinfeld modules of generic characteristic of the finiteness theorems for abelian varieties over $\overline{K}(\sigma)$. As an application, we show the freeness result for Drinfeld modules over finite extensions of $\overline{K}[\sigma]$ reduced modulo torsion.

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note：Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1 copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。

Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).