

論文 / 著書情報  
Article / Book Information

題目(和文)	Cayleyパラメータ表現法と直交制約付き最適化への応用に関する研究
Title(English)	A Study of Cayley Parametrizations and Their Applications to Optimizations with Orthogonality Constraints
著者(和文)	久米啓太
Author(English)	Keita Kume
出典(和文)	学位:博士(工学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第12708号, 授与年月日:2024年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:山田 功,植松 友彦,府川 和彦,尾形 わかは,山下 真
Citation(English)	Degree:Doctor (Engineering), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第12708号, Conferred date:2024/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	論文要旨
Type(English)	Summary

(博士課程)  
Doctoral Program

## 論文要旨

THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	情報通信 情報通信	系 コース	申請学位 (専攻分野)： 博士 Academic Degree Requested Doctor of	( 工学 )
学生氏名： Student's Name	久米 啓太		審査員主査： Chief Examiner	山田 功 教授

### 要旨 (和文 2000 字程度)

Thesis Summary (approx.2000 Japanese Characters )

<p>本論文は“A Study of Cayley Parametrizations and Their Applications to Optimizations with Orthogonality Constraints (Cayley パラメータ表現法と直交制約付き最適化への応用に関する研究)”と題し、英文6章よりなっている。</p> <p>第1章“Introduction (序章)”では、まず、「正規直交制約付き最適化問題」は、Stiefel 多様体(正規直交条件を満たす行列の集合)上の最適な行列の探索問題であり、信号処理や機械学習における強力な分析手法を生み出す共通課題となってきたことを紹介している。次に、最適解の推定値更新方向を直近の推定値における「Stiefel 多様体の接空間」内で決定することを基本方針とする従来の標準戦略(Retraction 表現法)に、過去の推定値更新履歴を活かして推定値更新方向を決定する高度な最適化技術を導入することが困難となる構造的要因を説明し、「正規直交制約付き最適化問題」に対しては、Stiefel 多様体の大域的パラメータ空間を用いる解法戦略が有望であることを述べ、本論文の目的を明らかにしている。</p> <p>第2章“Preliminaries (準備)”では、本研究で必要となる行列解析や最適化技法に関する数学的事実を紹介している。</p> <p>第3章“Generalized left-localized Cayley transform and Cayley parametrization strategy (一般化左局所 Cayley 変換と Cayley パラメータ表現法)”では、まず、一般の Stiefel 多様体の稠密開部分集合をユークリッド空間に対応付ける一般化左局所 Cayley 変換を提案している。一般化左局所 Cayley 変換は、調整可能な中心点に応じて決定されるユークリッド空間を特異点以外の稠密開部分集合の大域的パラメータ空間として利用できる特長を有している。次に、一般化左局所 Cayley 変換の逆変換を用いて「正規直交制約付き最適化問題」を「ユークリッド空間上の最適化問題」に翻訳し、ユークリッド空間上の最適化アルゴリズムを適用する「Cayley パラメータ表現法」を提案している。実際に勾配降下法を Cayley パラメータ表現法と Retraction 表現法に組み込んだ2つの解法の数値性能比較の結果、多くの場合で Cayley パラメータ表現法の優位性が確認された。ただし、一般化左局所 Cayley 変換の特異点集合が最適解に近接している例外的な場合に、Cayley パラメータ表現法の収束性能が著しく劣化する特異点問題とよばれる現象が確認され、Cayley パラメータ表現法では「中心点」の調整が重要な課題となることを明らかにしている。</p> <p>第4章“Adaptive localized Cayley parametrization strategy for smooth optimization over the Stiefel manifold (正規直交制約付き平滑最適化のための適応 Cayley パラメータ表現法)”では、まず、一般化左局所 Cayley 変換の特異点が大域的パラメータ空間の無限遠点として解釈可能であり、大域的パラメータ空間の原点から乖離が進むにつれ、Stiefel 多様体上の可動性が抑圧される特異点問題が強く顕れることを明らかにしている。次に、Stiefel 多様体上に与えられた点に応じて、これを原点近傍に対応付ける中心点調整法を導出し、特異点問題緩和のために大域的パラメータ空間そのものを更新できる「適応 Cayley パラメータ表現法」を提案している。実際に、Cayley パラメータ表現法が性能劣化する状況で数値実験を行った結果、「適応 Cayley パラメータ表現法」によって著しく性能改善されることを確認している。</p> <p>第5章“Variable smoothing for nonsmooth optimization with nonconvexly constraint (非凸制約付き非平滑最適化のための可変平滑化法)”では、制約集合がパラメータ表現可能である状況で「非凸制約付き弱凸非平滑最適化問題」を検討している。この最適化問題は、凸解析の枠組みで開拓されてきた近年のスパースモデリング技術を飛躍的に進化させる可能性を秘めた重要な課題であるが、制約集合と目的関数の非凸性に加えて、目的関数の非可微分性が障害となるため、有力な解法が知られていなかった。本研究では、「制約集合と目的関数のパラメータ空間上への翻訳戦略」と近年提案された「可変平滑化の最適化戦略」を融合した新解法を提案している。新解法によって、これまで未解決であった「Stiefel 多様体の凸緩和を前提としない非凸正則化モデルによるスパーススペクトラルクラスタリング」が実現され、提案法の性能が従来のスパーススペクトラルクラスタリングを凌駕することを数値実験で確認している。</p> <p>第6章“Conclusion (結論)”では、本論文で得られた結果を総括している。</p>
---

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note：Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。

Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).

(博士課程)  
Doctoral Program

## 論文要旨

THESIS SUMMARY

系・コース : Department of, Graduate major in	情報通信 情報通信	系 コース	申請学位 (専攻分野) : Academic Degree Requested	博士 Doctor of	( 工学 )
学生氏名 : Student's Name	久米 啓太		審査員主査 : Chief Examiner	山田 功 教授	

### 要旨 (英文 300 語程度)

Thesis Summary (approx.300 English Words)

An optimization problem with the orthogonality constraints has been playing a crucial role in signal processing and machine learning applications, e.g., sparse principal component analysis. The main challenge in this problem is the severe nonlinearity of the orthogonality constraint set, called the Stiefel manifold, which hinders the development of effective optimization algorithms.

In this thesis, to resolve the nonlinearity of the Stiefel manifold, we present the generalized left-localized Cayley transform (for short, the generalized Cayley transform) for parametrization of an open dense subset of the Stiefel manifold in terms of a Euclidean space. Via the generalized Cayley transform, we propose a (Naive) Cayley Parametrization (NCP) strategy, which translates the original problem into an optimization problem over the Euclidean space. For the translated problem, we can directly apply any Euclidean optimization algorithm in the NCP strategy. Our numerical experiments demonstrate that the NCP strategy outperforms the standard retraction-based strategy for the optimization problem with the orthogonality constraints. However, the NCP strategy may suffer from a slow convergence in an exceptional case where a minimizer lies near singular points where the generalized Cayley transform can not be defined. We call this performance degradation a singular-point issue in this thesis.

To suppress the singular-point issue, we propose an Adaptive Localized Cayley Parametrization (ALCP) strategy, which adaptively adjusts the location of singular points of the generalized Cayley transform. For a smooth cost function, we also present convergence analyses of the ALCP strategy in terms of a stationary point in cases where broad classes of Euclidean optimization algorithms are incorporated into the strategy. Numerical experiments demonstrate that the ALCP strategy dramatically improves the convergence speed of the NCP strategy.

Furthermore, we address an optimization problem over a nonconvex constraint set with a nonsmooth but weakly convex cost function. For this problem, we propose an optimization algorithm with guaranteed global convergence in terms of a stationary point inspired by (i) a parametrization of the constraint set similar to the NCP strategy and (ii) a variable smoothing, which uses a smooth approximation of the cost function for updating estimates of a solution. As an application of the proposed algorithm, we also address a Sparse Spectral Clustering (SSC) through a new formulation with a weakly convex regularizer over the Stiefel manifold. Our numerical experiments demonstrate that the proposed SSC successfully outperforms the existing SSC.

備考 : 論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note : Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意 : 論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。

Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).