

論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	対称錐上の完全正值錐と共正值錐：近似と面的構造
Title(English)	Completely Positive and Copositive Cones over Symmetric Cones: Approximations and Facial Structure
著者(和文)	西島光洋
Author(English)	Mitsuhiro Nishijima
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京工業大学, 報告番号:甲第12830号, 授与年月日:2024年9月20日, 学位の種別:課程博士, 審査員:中田 和秀,松井 知己,塩浦 昭義,市瀬 龍太郎,梅室 博行
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Tokyo Institute of Technology, Report number:甲第12830号, Conferred date:2024/9/20, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	論文要旨
Type(English)	Summary

論文要旨

THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	経営工学 経営工学	系 コース	申請学位（専攻分野）： Academic Degree Requested	博士 Doctor of	(理学)
学生氏名： Student's Name	西島光洋		審査員主査： Chief Examiner	中田和秀	

要旨（和文 2000 字程度）

Thesis Summary (approx.2000 Japanese Characters)

本論文は「Completely Positive and Copositive Cones over Symmetric Cones: Approximations and Facial Structure」(対称錐上の完全正値錐と共正値錐：近似と面的構造)と題するもので、対称錐から定まる一般的な意味での完全正値錐および共正値錐——対称錐上の完全正値錐および共正値錐の近似と面的構造に関する研究をまとめたものである。完全正値錐および共正値錐を制約に持つ錐線型計画問題はそれぞれ完全正値計画問題および共正値計画問題と呼ばれ、非凸な構造および組合せ構造を伴うゆえ大域的な最適化が困難だと考えられている多くの問題を凸計画問題として等価に表現できる。とりわけ、実用上および理論上重要な問題をモデリングする際に、対称錐上の完全正値錐および共正値錐が現れやすい。しかし、完全正値計画問題および共正値計画問題を最適化することも同様に難しいと考えられており、この難しさは問題の非線型性を表現する完全正値錐および共正値錐に由来する。そこで本論文では、完全正値計画問題および共正値計画問題を解くために、完全正値錐および共正値錐の近似を研究する。そして、問題の解きにくさを理解するために、錐の面的構造を調査する。 本論文は第Ⅰ部の「Prologue」(序論)、第Ⅱ部の「Approximations」(近似)、第Ⅲ部の「Facial Structure」(面的構造)、第Ⅳ部の「Epilogue」(結語)から構成され、これらの4つの部は以下の7つの章で構成される。 第Ⅰ部第1章「Introduction」(導入)では、数理最適化の文脈において対称錐上の完全正値錐および共正値錐を考える必要性、これらの錐の近似と面的構造に関する先行研究、および本論文の貢献を述べている。 第Ⅰ部第2章「Preliminaries」(準備)では、本論文で現れる種々の概念を数学的に定義し、それらの性質をまとめている。また、既存研究の枠組みを用いて、非凸計画問題の完全正値錐を用いた凸化に関する結果を紹介している。そして、本論文で使用する既存の近似階層を示している。 第Ⅱ部第3章「Approximation Hierarchies for Copositive Cones over Symmetric Cones」(対称錐上の共正値錐に対する近似階層)では、対称錐上の共正値錐を階層的に近似する錐の無限列——近似階層を提案している。1つ目に、一般の対称錐上の共正値錐に対して、2乗和制約で記述される内側近似階層を与えている。2つ目に、非負象限錐と1つの2次錐の直積集合上の共正値錐に対して、半正定値制約で記述される内側および外側近似階層を与えている。これらの近似階層と既存の近似階層を組み合わせることで、共正値計画問題の高精度な近似最適値を求められることを数値実験で示している。 第Ⅱ部第4章「Generalizations of Doubly Nonnegative Cones and Their Comparison」(二重非負錐の一般化とその比較)では、完全正値錐の外側からの近似を考える。非負象限錐上の(すなわち通常の意味での)完全正値錐を外側から近似する際に、二重非負錐は半正定値錐よりも強い緩和を与えることで知られている。本章では、一般的な意味での完全正値錐を外側から近似するために、第3章で使用した近似階層を活用して、二重非負錐の一般化を2種類提案している。また、先行研究で提案されているものを含めた計3種類の一般化二重非負錐の包含関係および緩和の強さを理論的および数値的に比較している。数値実験では、一般化二重非負錐が半正定値錐よりも遥かに良い緩和を与えることを実証している。 第Ⅲ部第5章「Length of the Longest Chain of Faces and Distance to Polyhedrality of the Completely Positive and Copositive Cones」(完全正値錐および共正値錐の面の最長の鎖の長さ多面性への距離)では、通常の意味での完全正値錐および共正値錐、ならびに二重非負錐およびその双対錐を包摂する幅広いクラスの閉凸錐の「面の最長の鎖の長さ」および「多面性への距離」と呼ばれる値がいずれも、理論上取りうる最大の値に一致することを示している。 第Ⅲ部第6章「Non-facial Exposedness of Copositive Cones over Symmetric Cones」(対称錐上の共正値錐の非面露出性)では、対称錐の次元が2以上のとき、対称錐上の共正値錐が「面露出」と呼ばれる性質を決して満たさないことを明らかにしている。そのためにまず、対称錐の面を用いて、対称錐上の共正値錐の面を単射的に構成している。この結果を利用して、対称錐上の共正値錐の露出していない1次元の面を構成することで、対称錐上の共正値錐が面露出でないことを示している。 第Ⅳ部第7章「Conclusion」(結論)では、本論文を総括している。また、近似の部で得られた研究成果が面的構造の研究に貢献しうること、面的構造の部で得られた研究成果が近似の研究に貢献しうることをそれぞれ議論し、本論文から派生する今後の課題をいくつか述べている。

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。

Note : Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800

Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。
Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).

論文要旨
THESIS SUMMARY

系・コース： Department of, Graduate major in	経営工学 経営工学	系 コース	申請学位 (専攻分野)： 博士 (理学) Academic Degree Requested Doctor of
学生氏名： Student's Name	西島光洋		審査員主査： Chief Examiner 中田和秀

要旨 (英文 300 語程度)
Thesis Summary (approx.300 English Words)

This thesis studies approximations and the facial structure of completely positive cones and their duals, copositive cones, over symmetric cones from the optimization aspect.

In the part on the approximations, we first provide approximation hierarchies for copositive cones over general and specific symmetric cones. These hierarchies are described by positive semidefinite constraints. Additionally, we compare them with existing ones. Through numerical experiments, we demonstrate that by combining the proposed approximation hierarchies with the existing ones, we can evaluate the optimal values of copositive programming problems more accurately and efficiently.

We second examine various extensions of doubly nonnegative cones. Inner-approximation hierarchies for generalized (in the sense that the cones underlying completely positive and copositive cones are beyond nonnegative orthants) copositive cones are utilized to obtain two generalized doubly nonnegative cones from the doubly nonnegative cones. We conduct theoretical and numerical comparisons to assess the relaxation strengths of the generalized doubly nonnegative cones over a direct product of a nonnegative orthant and second-order or positive semidefinite cones. These comparisons also include an analysis of an existing generalized doubly nonnegative cone. Through numerical experiments, we demonstrate that the three generalized doubly nonnegative cones provide significantly tighter bounds for generalized completely positive programming problems than positive semidefinite cones.

In the part on the facial structure, we first investigate two values decided by the facial structure of closed convex cones: the length of the longest chain of faces and the distance to polyhedrality. We prove that the two lengths of completely positive cones over nonnegative orthants, doubly nonnegative cones, and their duals are the worst cases possible.

We second show that copositive cones over symmetric cones are never facially exposed when the underlying symmetric cone has dimension at least 2. We do so by explicitly exhibiting a non-exposed extreme ray. Our result extends the known fact that copositive cones over nonnegative orthants are not facially exposed in general.

備考：論文要旨は、和文 2000 字と英文 300 語を 1 部ずつ提出するか、もしくは英文 800 語を 1 部提出してください。
Note：Thesis Summary should be submitted in either a copy of 2000 Japanese Characters and 300 Words (English) or 1copy of 800 Words (English).

注意：論文要旨は、東工大リサーチリポジトリ(T2R2)にてインターネット公表されますので、公表可能な範囲の内容で作成してください。
Attention: Thesis Summary will be published on Tokyo Tech Research Repository Website (T2R2).