論文 / 著書情報
Article / Book Information

題目(和文)	
Title(English)	Integrals of motion in Toda field theories and the ODE/IM correspondence
著者(和文)	ZHUMINGSHUO
Author(English)	Mingshuo Zhu
出典(和文)	学位:博士(理学), 学位授与機関:東京科学大学, 報告番号:甲第212号, 授与年月日:2025年3月26日, 学位の種別:課程博士, 審査員:伊藤 克司,今村 洋介,慈道 大介,須山 輝明,関澤 一之
Citation(English)	Degree:Doctor (Science), Conferring organization: Institute of Science Tokyo, Report number:甲第212号, Conferred date:2025/3/26, Degree Type:Course doctor, Examiner:,,,,
学位種別(和文)	博士論文
Category(English)	Doctoral Thesis
種別(和文)	審査の要旨
Type(English)	Exam Summary

（博士課程）

論文審査の要旨及び審査員

<table>
<tr><td>報告番号</td><td colspan="2">甲第　　　　　　　　号</td><td colspan="2">学位申請者氏名</td><td colspan="2">Zhu Mingshuo</td></tr>
<tr><td rowspan="5">論文審査
審 査 員</td><td></td><td>氏　名</td><td>職　名</td><td></td><td>氏　名</td><td>職　名</td></tr>
<tr><td>主査</td><td>伊藤克司</td><td>教授</td><td rowspan="4">審査員</td><td>関澤一之</td><td>准教授</td></tr>
<tr><td rowspan="3">審査員</td><td>今村洋介</td><td>准教授</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>慈道大介</td><td>教授</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>須山輝明</td><td>教授</td><td></td><td></td></tr>
</table>

論文審査の要旨（2000 字程度）

物理学や数学の分野において可積分模型は重要な一分野をなしている。可積分模型は多くの保存量を持ち、Bethe 仮説等の方法により模型を厳密に解くことが可能となる。これにより、模型のエネルギースペクトルや散乱行列について正確な情報が得られる。2 次元の量子場の理論である sine-Gordon 模型や，その一般化である戸田場の理論はそのような可積分模型の重要な例であり，本論文でも主に扱われている。近年，ODE/IM 対応と呼ばれる常微分方程式と量子可積分模型の興味深い対応が見出され、量子力学のスペクトル問題や超対称ゲージ理論への応用も含め研究が進展している。これまでの先行研究では，2 階常微分方程式の完全 WKB 解析による WKB 周期と量子可積分模型における熱力学的 Bethe 仮説方程式や非線形積分方程式との関係が詳しく調べられ両者の対応が議論されてきた。一方で、Bazhanov-Lukyanov-Zamolodchikov の研究において，ミニマル模型と呼ばれる 2 次元の共形場理論において散乱行列とその可積分構造が研究され,共形場理論の高次の運動の積分(Integrals of motion)と 2 階のシュレーディンガー方程式の WKB 周期との対応が明らかにされた。

本論文は，申請者の 2 本の出版論文に基づき，ODE/IM 対応を，2 次元の Virasoro 代数に高階スピン場を加えて拡張した W 代数を対称性としてもつ量子戸田場の理論と高階微分方程式の WKB 展開との対応に一般化してその詳細を明らかにしたものである。

本論文は” Integrals of motion in Toda field theories and the ODE/IM correspondence”と題し，5 つの章と 4 つの補遺から構成されている。

第 1 章”Introduction”では、量子可積分模型の概略と ODE/IM 対応について簡単にまとめ，論文の構成について説明している。第 2 章”Quantum integrable models in the ODE/IM correspondence”では，具体的に XXZ スピン鎖模型を例にとって ODE/IM 対応で重要な役割を果たす Q-関数，T-関数，及び Y-関数を導入しそれらの満たす関数関係式や積分方程式を導入した。さらにその連続極限を議論し、対応する共形場理論とその高次運動積分を構成している。また W 代数の対称性を持つ戸田場の理論を紹介し,高次の運動の積分を構成する方法を説明している。第 3 章”The ODE/IM correspondence from functional relations”ではシュレーディンガー方程式の解の Stokes 現象から導入される解の基底の接続係数の満たす関係式を導き、その関係式が可積分模型と一致するという ODE/IM 対応の概略を説明している。また古典戸田場方程式の Lax 形式に付随する 1 階連立線形微分方程式から高階常微分方程式を導入し,その WKB 解から一般の affine Lie 代数に対応する Bethe 方程式を導出できることを説明している。以上の 2,3 章はこれまでの先行研究の簡潔なレヴューとなっている。第 4 章”The Quantum/Classical Correspondence”では,まず古典戸田場方程式の Lax 形式に付随する線型方程式系の conformal 極限をとることにより複素平面上の 1 階連立線形微分方程式を得ており,さらにこれが ODE/IM 対応で期待される高階常微分方程式と等価であることを示している。一般にこの高階常微分方程式の WKB 展開を求めるのは難しい問題であるが,申請者は 線形微分方程式をゲージ変換により対角化することにより WKB 解を求める新しい手法について説明している。さらにこの方法が，Drinfeld-Sokolov の affine Lie 代数に基づく Lax 形式を対角化して古典可積分系の保存量を求める方法と同等であり，高階微分方程式の WKB 解と古典可積分系の保存量が同じものであることを示している。この方法により申請者は具体的に WKB 周期をいわゆる Pochhammer 経路に沿った周期積分により評価し、A 型及び D 型の Lie 代数の場合に具体的に積分の値を求めている。次にその結果を A 型及び D 型の W 代数をもつ共形場理論の運動の積分と比較し定数倍を除き両者が一致するという結果を得ている。この結果は AD 型のリー代数に基づく量子戸田場の理論と古典戸田場の理論に付随する線形微分方程式との間の ODE/IM 対応を意味していると結論づけている。第 5 章では本論文で得られた結果をまとめ、今後の展望について述べてい

る。また補遺 A では本文で用いられている Drinfeld-Sokolov 理論の詳細について，補遺 B では 2 次元共形場理論の簡単なレヴューと演算子の正規順序積に関する公式， 補遺 C では Lie 代数の説明，補遺 D では高次の WKB 周期の詳細な結果についてまとめている。
本論文において申請者は ODE/IM 対応を WKB 周期と高次運動積分の対応として厳密に定式化する手法を開発した。さらに WKB 周期が古典可積分系の保存量と対応していることを見出し，ODE/IM 対応を古典可積分系と量子可積分系の対応という新しい見方へと拡張した。この結果は， 今後共形場理論や超対称ゲージ理論への応用など大きな発展が期待される。また本論文の内容は、申請者がこの分野において高い見識と研究能力を有していることを示している。よって本論文は博士(理学)の学位論文として十分な価値があるものと認められる。